

Čech, Eduard: Textbooks

Eduard Čech

Geometrie pro II. třídu středních škol

Státní nakladatelství, Praha, 1949, 92 s.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/501345>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

EDUARD ČECH

GEOMETRIE

PRO II. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ V PRAZE

GEOMETRIE

PRO II. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

NAPSAL
EDUARD ČECH

SE 127 OBRAZCI



Schváleno výnosem ministerstva školství ze dne 5 února 1943, čís. 11 172/43-II/2
stečně změněný dotisk pro školní rok 1949—50 povolen výnosem ministerstva
školství, věd a umění ze dne 13. ledna 1949, čís. 11 007/49-I/1

Cena Kčs 9,—

1 9 4 9

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ V PRAZE

Nová učebnice geometrie pro II. třídu střední školy se připravuje až na školní rok 1950—51. Ve školním roce 1949—50 se proto pracuje podle této upravené učebnice. Ale i podle ní je třeba plnit vzdělávací a výchovný úkol matematiky, jak jej stanoví učební osnovy: „Vychovávat k správnému hodnocení produktivní práce a probouzet zájem a pochopení pro účelnou a plánovitou hospodářskou výstavbu naší republiky a pro její brannost. Vychovávat k přesnosti, k hospodárnosti a k správnému hodnocení hospodářských statků. Učit logicky myslet a své myšlenky přesně vyjadřovat.

Učit řešit praktické úkoly zejména z oborů hospodářských a společenských a dát takové vědomosti, znalosti a dovednosti, jakých je třeba k jejich řešení.

Vést k poznání a k pochopení významu funkčních vztahů a jejich vyjadřování; seznámit se základy algebry.

Rozvíjet prostorovou představivost přesným pozorováním a vnímáním rovinných i prostorových útvarů a systematickým studiem jejich vlastností.

Seznámit s důležitými úseky z vývoje matematiky.“

Úkolem vyučování geometrie ve II. třídě střední školy je podle učebních osnov: „Pojmy a vlastnosti jednoduchých útvarů, vztahy jejich prvků, uspořádání v soustavu. Osová souměrnost a geometrické konstrukce z ní odvozené. Další vlastnosti a shodnost trojúhelníků, vlastnosti rovnoběžníků. Jednoduché strojně úlohy. Další výcvik v počítání povrchů a objemů krychle a kvádrů, obsahů čtverce a obdélníka. (Po celý rok se příležitostně, hlavně na výcházkách, vyměřují vzdálenosti na speciální mapě a srovnávají se se skutečností. Odhadují se výšky předmětů v přírodě.)“

Při úpravě učebnice byly provedeny tyto změny: Z I. dílu byla převzata stať „Osová souměrnost a euklidovské konstrukce“. Přidány jsou stati „Početní úlohy o obsahu, povrchu a objemu“ a „Úlohy k opakování“.

V § 2 se omezí mnohoúhelník na čtyřúhelník, z § 8 a 9 se proberou aspoň cvičení a § 9 se probere tenkrát, ovládají-li žáci učivo dobře.

Příklady v učebnici je ovšem třeba doplnit časovými příklady z výstavby a přestavby našeho hospodářství v duchu socialismu, hlavně příklady z pětiletého plánu.

Pokyny, jak učebnice používat, jsou v „Poznámkách k učebnicím geometrie“ (Jednota čs. matematiků a fysiků) a v časopise „Matematika a fysika ve škole“.

A. Osová souměrnost a euklidovské konstrukce.

Geometrie je velmi stará věda. Všecko, čemu se budete v geometrii učit až do IV. třídy, bylo známo už ve starověku. Byli to staří Řekové, kteří vybudovali geometrii v soustavnou vědu. Již kolem roku 300 př. Kr. vydal Euklid (vlastně Eukleides) soustavnou učebnici geometrie pod názvem **Základy** (řecky **Stoicheia**). Tato kniha vyšla pak v nesčetných vydáních. I nejmodernější geometrické bádání navazuje přímo na Euklida.

Staří Řekové nerýsovali tužkou na papír, nýbrž buďto kreslili své obrazce do jemného písku nebo je ryli do vosku. S tím souvisí, že při konstrukcích, které jsou popsány u Euklida, se neužívá dvou pravítek. Budeme říkat **euklidovská konstrukce** takové konstrukci, při které se užívá pouze dvou základních úkonů:

- (1) spojit dva body přímkou,
- (2) narýsovat kružnici, je-li dán střed a poloměr.

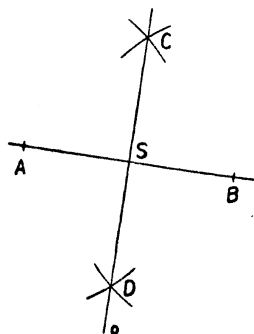
V tomto odstavci se naučíme řešit některé jednoduché úlohy euklidovsky.

K takovým euklidovským konstrukcím pohodlně dospějeme studiem **osové souměrnosti**.

Vezměte list papíru a přeložte jej podél přímky, kterou označte o . Budeme ji říkat osa souměrnosti. Rozevřete papír a položte jej třeba tak, aby osa o byla svislá. Napravo od o si narýsujte výjimečně i n k o u s t e m několik bodů a čar a chcete-li, třeba také několik menších kaněk. Nyní papír znovu přeložte, aby se vám inkoust přetiskl i nalevo od o . Po opětovém rozevření papíru máte dva obrazce s o u m ě r n ě v z h l e d e m k o s e o .

Vezměte nový list papíru a opět jej přeložte podél přímky o . V přeložené poloze papír na jednom místě propíchněte a pak rozevřete. Vzniknou vám dva body A a B (položené souměrně vzhledem k o).

Ved'te úsečku AB . Vidíte, že přímka o je kolmá k AB a že prochází středem S úsečky AB . Říkáme, že o je **osa úsečky AB** . Nejenom bod S , nýbrž každý bod osy o je stejně vzdálen od A jako od B . Ty body papíru, které nejsou na ose o , nejsou stejně vzdáleny od A jako od B . Ty body, které jsou na stejnou stranu od o jako je bod A , jsou blíže k A než k B ; ty body, které jsou na stejnou stranu od o jako je bod B , jsou dále od A než od B .

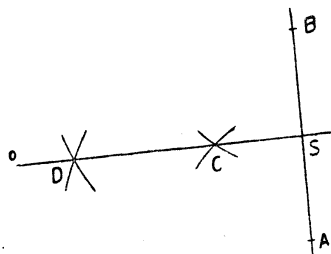


Obr. I.

Zvolte si nyní úsečku AB v sešitě. Chceme sestavit její osu o . Jak to provedeme? Protože o je přímka, stačí najít dva její body. Odměříme kružítkem libovolnou, jen ne příliš malou délku r . Opíšeme s poloměrem r kružnici nejprve ze středu A , potom ze středu B . Tyto dvě kružnice se protnou (viz obr. I.) v bodech C a D . Vzdálenost $\overline{AC}$ je rovná r ; také $\overline{BC} = r$. Tedy bod C je stejně daleko od A jako od B a proto leží na o . Podobně také D je stejně daleko od A jako od B a také leží na o . Tedy spojnice CD je hledaná osa úsečky AB . Tím jsme se naučili euklidovské konstrukci osy úsečky. Přemýšlejte, jak velká musí být délka r , aby se obě pomocné kružnice opravdu protály.

Chceme-li, aby naše konstrukce byla opravdu přesná, musíme volit r o dost větší než $\frac{1}{2} \overline{AB}$. Proč?

Může se stát, že úsečka AB je blízko kraje papíru. Potom by hořejší postup nedal osu o dosti přesně. Pak postupujeme trochu jinak, ale podle stejných zásad. Viz obr. II. Popište sami konstrukci a proveďte ji v sešitě.

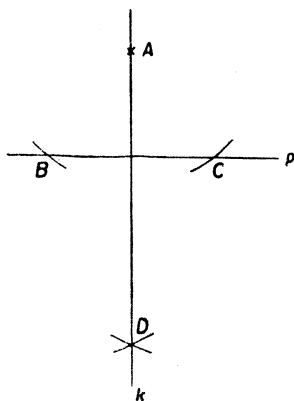


Obr. II.

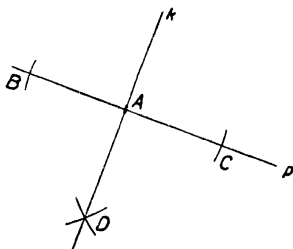
Protože střed S úsečky AB je v průsečíku přímky AB s osou o , umíme už také **euklidovskou konstrukci středu úsečky**.

Jak byste rozdělili euklidovsky úsečku na čtyři stejné díly? Jak na osm? Rozdělit euklidovsky úsečku na jiný počet stejných dílů, třeba na tři nebo na pět, budeme se učit až ve vyšších třídách.

Zvolte si přímku p a mimo ni bod A . Sestrojíme euklidovsky kolmici spuštěnou s bodu A na přímku p . Opišme ze středu A kružnici s poloměrem libovolným, ale dosti velkým. Tato kružnice protne



Obr. III.



Obr. IV.

(viz obr. III.) přímku p ve dvou bodech B a C . Bod A je stejně vzdálen od B jako od C (proč?), tedy A leží na ose úsečky BC . Ale osa k úsečky BC stojí kolmo na přímce BC , t. j. na přímce p . Tedy žádaná kolmice k je osa úsečky BC . Protože už jeden bod A přímky k známe, stačí si opatřit ještě jeden bod D (viz obr. III.) přímky k . Jak to uděláme?

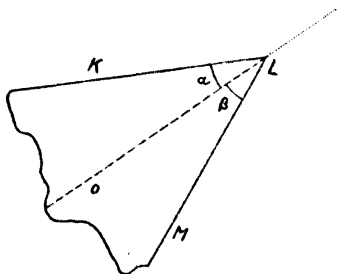
Konstrukce, kterou jsme právě prováděli, dá se beze změny provést i když bod A leží na přímce p . Tedy dovedeme také sestrojit euklidovsky kolmici vztyčenou v bodě A k přímce p (viz obr. IV.).

V I. třídě jsme se naučili sestrojit úhel, který má jedno rameno dáno a který je roven danému úhlu. To byla také euklidovská konstrukce.

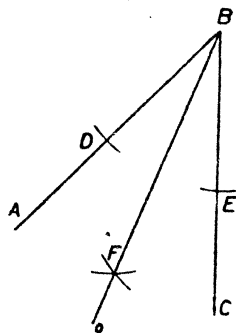
Narýsujte si na listu papíru úhel KLM a vystříhněte si jej (viz obr. V.). Nyní přeložte papír tak, aby se obě ramena kryla. Polopřímka o , podél které jsme přeložili papír, jmenuje se **osa úhlu KLM** . Polopřímka o rozděluje $\sphericalangle KLM$ na dva úhly α a β . Protože můžeme papír přeložit tak, že úhly α a β se kryjí, jest $\alpha = \beta$, tedy sestrojit osu úhlu znamená **ten úhel rozpůlit**.

Prodloužíme-li polopřímku o za bod L , dostaneme polopřímku p (tečkovanou v obr. V.). Je to **osa vypuklého úhlu KLM** .

Sestrojte si v sešitě úhel ABC . Provedeme euklidovskou konstrukci osy úhlu ABC (viz obr. VI.). Opišme s libovolným poloměrem kružnici ze středu B , která protne ramena daného úhlu v bodech D a E (viz obr. VI.). Kdybychom přeložili papír podél hledané osy o , kryla by se polopřímka BA s polopřímkou BC . Protože je $\overline{BD} = \overline{BE}$, kryl by se



Obr. V.



Obr. VI.

bod D s bodem E . Tedy přímka, na které leží hledaná polopřímka o , je osa úsečky DE . Protože jeden bod osy už známe (který?), stačí nalézt ještě jeden její bod F . Jak se to provede? (Viz obr. VI.)

Je zajímavé si všimnout, že konstrukce, které jsme se právě naučili, dá se provést i když daný úhel je přímý. Tím dostaneme znovu jednu konstrukci, kterou jsme už dříve provedli. Kterou?

Máme-li sestrojit euklidovsky k přímce p rovnoběžku bodem A , můžeme to provést tak, že spustíme euklidovsky kolmici q s bodu A na přímku p a potom vztyčíme euklidovsky kolmici r v bodě A k přímce q . Přímka r je žádaná rovnoběžka. Jsou jednodušší euklidovské konstrukce rovnoběžky, ale ty nejsou založeny na osově souměrnosti a budeme je probírat až později (viz str. 53, obr. 98 a 99).

Jak byste sestrojili euklidovsky úhel 90° ? Jak úhel 45° ? Jak úhel 135° ? Jak úhel $22\frac{1}{2}^\circ$?

Víme, už, že dva trojúhelníky ABC a DEF , které mají stejně dlouhé strany, jsou shodné, t. j. že se dají položit na sebe tak, že se kryjí. Ovšem ale jen ty strany se mohou krýt, které jsou stejně dlouhé.

Narýsujte si do sešitu nejdříve různostranný trojúhelník DEF , třeba tak, aby bylo

$$\overline{DE} = 5 \text{ cm}, \quad \overline{DF} = 4 \text{ cm}, \quad \overline{EF} = 33 \text{ mm}.$$

Pak si narýsujte na list papíru trojúhelník ABC se stranami

$$\overline{BC} = 5 \text{ cm}, \quad \overline{AC} = 4 \text{ cm}, \quad \overline{AB} = 33 \text{ mm}.$$

Trojúhelníky ABC a DEF jsou shodné. Vystříhněte trojúhelník ABC a položte jej na trojúhelník DEF . Jde to jen jediným způsobem. Říkejte, který vrchol se s kterým kryje.

Nyní si narýsujte do sešitu rovnoramenný trojúhelník DEF třeba tak, aby bylo

$$\overline{DE} = \overline{DF} = 45 \text{ mm}, \quad \overline{EF} = 3 \text{ cm}.$$

Co je základna? Co jsou ramena? Na list papíru narýsujte shodný trojúhelník ABC se stranami

$$\overline{BC} = \overline{AC} = 45 \text{ mm}, \quad \overline{AB} = 3 \text{ cm}.$$

Vystříhněte trojúhelník ABC . Kolikerym způsobem můžete položit ABC na DEF ? Jmenujte oba způsoby. S úhlem DEF se jednou kryje úhel při vrcholu A , po druhé úhel při vrcholu B trojúhelníka ABC . Tedy tyto dva úhly jsou stejné.

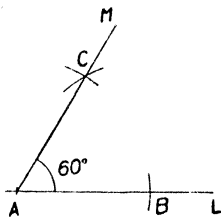
Pamatujte: Oba úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou stejné.

Konečně si narýsujte do sešitu rovnostranný trojúhelník DEF třeba se stranou 4 cm, a na list papíru shodný rovnostranný trojúhelník ABC . Vystříhněte trojúhelník ABC . Nyní můžete položit ABC na DEF š e s t e r ý m způsobem. Můžeme položit trojúhelník ABC na DEF tak, že se s $\sphericalangle DEF$ kryje libovolný úhel trojúhelníka ABC . Tedy všechny tři úhly trojúhelníka ABC jsou stejné. Umíte vypočítat, jak velké musí být?

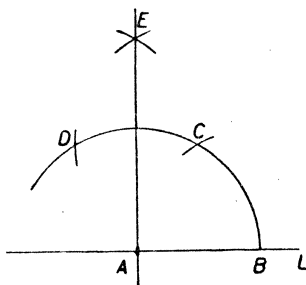
Pamatujte: Každý vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníka má velikost 60° .

Zvolte si v sešitě libovolnou polopřímku AL . Sestrojíme euklidovský $\sphericalangle LAM = 60^\circ$ s jedním ramenem daným. Stačí zvolit bod B na polopřímce AL a sestrojit rovnostranný trojúhelník nad stranou AB . V obr. VII. je jen j e d n o řešení dané úlohy. Je ještě jedno řešení?

Úhel 120° můžeme sestrojít buďto jako vedlejší úhel k úhlu 60° nebo jako dvojnásobek úhlu 60° . Jak sestrojíte úhel 30° ? Jak úhel 150° ? Jak úhel 15° ?



Obr. VII.



Obr. VIII.

V obr. VIII. je naznačena euklidovská konstrukce kolmice vztyčené v bodě A k přímce AL , založená na vztahu

$$90^\circ = 60^\circ + 30^\circ.$$

Vyložte sami. Která konstrukce kolmice vztyčené v bodě k přímce se vám líbí lépe? (Viz obr. IV. a obr. VIII.) Ve vyšších třídách poznáte ještě jiné euklidovské konstrukce kolmic.

Cvičení k A.

- A1. Popište euklidovskou konstrukci osy úsečky.
- A2. Popište euklidovskou konstrukci kolmice vztyčené k přímce p v jejím bodě A .
- A3. Popište euklidovskou konstrukci kolmice spuštěné na přímku p s bodu B .
- A4. Popište euklidovskou konstrukci rozdělení úhlu.
- A5. Popište euklidovskou konstrukci úhlu 60° .
- A6. Popište euklidovskou konstrukci úhlu 30° .
- A7. Zvolte úsečku AB dlouhou 4 cm a sestrojte euklidovsky čtverec nad stranou AB .
- A8. Zvolte úsečku AB dlouhou 5 cm a sestrojte euklidovsky obdélník $ABCD$ takový, aby bylo $\overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AB}$.
- A9. Zvolte úsečku AB dlouhou 5 cm a sestrojte euklidovsky čtverec $ABCD$. (Čím je úsečka AB ?)
- A10. Zvolte si trojúhelník EFG a sestrojte osy všech tří stran. Protínají se vám v jednom bodě?

A11. Zvolte si trojúhelník HKL a sestrojte osy všech tří úhlů. Protínají se vám v jednom bodě?

A12. Zvolte si kružnici a na ní tři body A , B a C . Sestrojte osy úseček AB a AC . Protínají se vám ve středu dané kružnice?

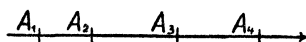
A13. Kolik os souměrnosti má obdélník? Jakou mají polohu?

A14. Kolik os souměrnosti má čtverec? Jakou mají polohu?

A15. Písmeno A má svislou osu souměrnosti, písmeno B má vodorovnou osu souměrnosti. Hledejte všechna písmena souměrná: (1) podle svislé osy, (2) podle vodorovné osy, (3) i podle svislé i podle vodorovné osy.

§ 1. Dvě přímky proťaté příčkou.

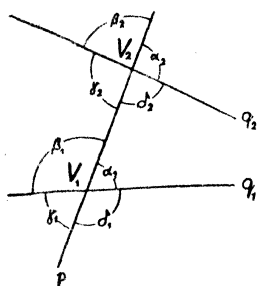
Víte, že body značíme velkými písmeny. Když jsme si v nějakém obrazci chtěli vyznačit body písmeny, dělali jsme to dosud tak, že jsme užili pro každý bod jiného písmene. Ale můžeme také užít jednoho písmene k vyznačení několika bodů. K rozlišení těch bodů pak užijeme i n d e x ů. Indexy jsou číslice, které píšeme d o l e v p r a v o. Na př. A_1 , A_2 , A_3 , A_4 v obr. 1. (Čteme A jedna, A dvě atd.) Indexy píšeme maličkě, ale zřetelně!



Obr. 1.

Víte, že body na dané přímce můžeme sledovati ve dvojím pořádku. Rozhodneme-li se pro určitý pořádek, můžeme si to znázorniti šipkou jako v obr. 1. Záleží na tom, na kterém místě přímky je šipka vyznačena? Na čem záleží?

Zvolme si v obr. 1 třeba bod A_2 . Přímka se jím rozdělí na dvě polopřímky. Jedna z nich, totiž polopřímka A_2A_3 , odpovídá pořádku vyznačenému šipkou; druhá z nich, totiž polopřímka A_2A_1 , odpovídá druhému možnému pořádku bodů na naší přímce. O dvou polopřímkách na dané přímce říkáme, že mají (mezi sebou) s t e j n ý s m y s l, když odpovídají obě stejnému pořádku bodů na přímce; říkáme, že mají (mezi sebou) o p a č n ý s m y s l, když každá odpovídá jinému pořádku. Tak na př. mají v obr. 1 polopřímka A_1A_3 a A_2A_3 stejný smysl, odpovídající vyznačenému pořádku. Také polopřímky A_3A_1 a A_4A_1 mají stejný smysl, tentokrát neopovídají zvolenému pořádku. Naproti tomu mají polopřímky A_1A_4 a A_4A_1 opačný smysl (první odpovídá vyznačenému pořádku, druhá mu neodpovídá).



Obr. 2.

V obr. 2 vidíme tři přímky. Jedna z nich je označena p , ostatní dvě jsou označeny q_1 a q_2 . Přímky p a q_1 se protnou v bodě, který je označen V_1 . Přímky p a q_2 se protnou v bodě, který je označen V_2 . (Přímky q_1 a q_2 by se v našem případě také protály, kdybychom si obrazec prodloužili. Ale na tom nezáleží; přímky q_1 a q_2 v takovém obrazci by také mohly být rovnoběžné.) Máme-li takový obrazec, říkáme přímce p příčka; q_1 a q_2 nazveme proťaté přímky.

Celý obrazec se tedy jmenuje: dvě přímky proťaté příčkou.

Při vrcholu V_1 máme čtyři úhly, které jsou v obrazci označeny $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$. Také při vrcholu V_2 máme čtyři úhly, v obrazci označené $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$. Celkem máme v obrazci osm úhlů; každý z nich má jedno rameno v příčce a druhé rameno v jedné z obou proťatých přímek.

Z těchto osmi úhlů si můžeme mnoha způsoby vybrati dva. Tak dostaneme rozmanité dvojice úhlů. Některé z těch dvojic mají určitá jména, která si musíte zapamatovat. Jestliže oba úhly v dvojici mají stejný vrchol (ať už je to vrchol V_1 či vrchol V_2), je to buďto dvojice vedlejších úhlů nebo dvojice vrcholových úhlů. Oba ty názvy už znáte.

S novými jmény se tedy setkáme pouze u těch dvojic, kde jeden úhel má vrchol V_1 a druhý vrchol V_2 . Důležité jsou především tyto čtyři dvojice:

$$\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \delta_1, \delta_2.$$

Říkáme, že to jsou dvojice **souhlasných úhlů**. U souhlasných úhlů mají ramena ležící v příčce stejný smysl; ramena ležící v proťatých přímkách leží obě na stejné straně od příčky.

Dále jsou důležité tyto čtyři dvojice:

$$\alpha_1, \gamma_2; \beta_1, \delta_2; \gamma_1, \alpha_2; \delta_1, \beta_2.$$

Říkáme, že to jsou dvojice **střídavých úhlů**. U střídavých úhlů mají ramena ležící v příčce opačný smysl; ramena ležící v proťatých přímkách leží každé na jiné straně od příčky.

Z ostatních dvojic si pojmenujeme ještě pouze dvojice:

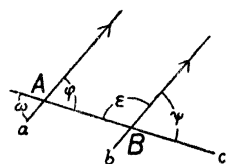
$$\alpha_1, \delta_2; \beta_1, \gamma_2.$$

Říkáme, že to jsou dvojice **přilehlých úhlů**. U přilehlých úhlů ramena ležící v přímce obsahují úsečku V_1V_2 ; ramena ležící v proťatých přímkách leží obě na stejné straně od příčky.

Často se vyskytují obrazce, ve kterých jsou dvě přímky, o kterých je nám známo, že jsou rovnoběžné. Abychom měli tu rovnoběžnost dobře na paměti, děláme si na obou rovnoběžkách šipky (viz obr. 3 a jiné). Na jedné z nich si zvolíme šipku libovolně, ale na druhé přímce uděláme šipku tak, aby obě šipky vyznačovaly souhlasný pořádek. Takový souhlasný pořádek dostaneme, představíme-li si, že se dva body pohybují současně, každý po jedné z obou rovnoběžek, a to tak, že jsou stále stejně od sebe vzdáleny.

V obrazcích, které sami rýsujete, můžete si rovnoběžnost vyznačit výrazněji, užijete-li barevné tužky. (Obě šipky stejnou barvou!) Někdy se vyskytují v témž obrazci dva páry rovnoběžek. Tak je tomu na př. v obr. 16; jeden pár rovnoběžek je vyznačen jednoduchými šípkami, druhý pár dvojími. Ve vlastním obrazci můžete užít dvou různých barev.

V obr. 3 vidíte, stejně jako v obr. 2, dvě přímky proťaté příčkou; ale tentokrát jsou proťaté přímky mezi sebou rovnoběžné. Budeme nyní obr. 3 zkoumat a to tak, že si pokaždé všimneme jedné dvojice úhlů. Výsledkem toho zkoumání budou poznatky, které si musíte dobře vštípit v paměť, protože, jak uvidíte na příkladech, dá se jich užít k řešení rozmanitých úloh. Takovým důležitým poznatkům říkáme **poučky**. Některé poučky již znáte. Uvedme si dvě takové známé poučky.



Obr. 3.

Vrcholové úhly jsou si rovny. (Na př. $\omega = \varphi$ v obr. 3.)

Vedlejší úhly jsou výplňkové. (Na př. $\varepsilon + \varphi = 2R$ v obr. 3.)

Všimněme si nyní v obr. 3 dvojice souhlasných úhlů φ, ψ . Posouváme-li úhel φ podél příčky c tak daleko, až vrchol přejde z polohy A do polohy B , přejde úhel φ nakonec v úhel ψ . Protože při posouvání zůstává velikost úhlu nezměněna, je $\varphi = \psi$.

Souhlasné úhly mezi rovnoběžkami jsou si rovny.

Nyní si všimněme v obr. 3 dvojice střídavých úhlů ω, ψ . Jest $\omega = \varphi$ (vrcholové úhly), ale také $\varphi = \psi$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami); proto je $\omega = \psi$.

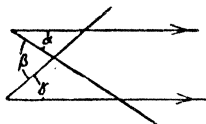
Střídavé úhly mezi rovnoběžkami jsou si rovny.

Dále si všimněme v obr. 3 dvojice přilehlých úhlů φ , ε . Jest $\varphi + \varepsilon = 2R$ (vedlejší úhly); ale $\varphi = \psi$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami); proto je $\varphi + \varepsilon = 2R$.

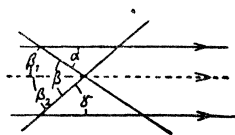
Přilehlé úhly mezi rovnoběžkami jsou výplňkové.

Příklad. V obr. 4a je $\alpha = 32^\circ$, $\gamma = 41^\circ$. Určete β .

Jako mnohé jiné geometrické úlohy, rozřeší se i tato úloha snadno, provedeme-li napřed pomocnou konstrukci. To znamená, že do daného obrazce přirýsujeme jednu novou čáru nebo několik nových čar, volených tak, aby se řešení úlohy ulehčilo. V našem případě je vhodné vésti k oběma daným rovnoběžkám třetí rovnoběžku vrcholem



Obr. 4a.



Obr. 4b.

úhlu β (viz obr. 4b). Úhel β se nám rozdělí na dva úhly β_1 a β_2 . Jest $\beta_1 = \alpha$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami), dále $\beta_2 = \gamma$ (z téhož důvodu); tedy $\beta_1 = 32^\circ$, $\beta_2 = 41^\circ$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 73^\circ$. Pomocná čára byla v obr. 4b čárkována, aby bylo patrné, že nepatří k původnímu obrazci.

Všimněme si znovu obrazce 3! V tomto obrazci jsou φ a ψ souhlasné úhly mezi rovnoběžkami a proto je $\varphi = \psi$. Nyní si myslíme náš obrazec poněkud změněn. Přímky a a c ať zůstanou stále v původní poloze, ale přímku b si myslíme z původní polohy pootočenou (kolem středu B). Co se stane se souhlasnými úhly φ a ψ ? Úhel φ zůstane beze změny, ale velikost úhlu ψ se jistě změní. Proto už nebude $\varphi = \psi$. Kdežto souhlasné úhly mezi rovnoběžkami jsou stejné, vidíte, že souhlasné úhly mezi různoběžkami stejné býti nemohou. Proto když o dvou souhlasných úhlech víme, že jsou stejné, můžeme z toho soudit, že jsou mezi rovnoběžkami. Říkáme, že poučka o rovnosti souhlasných úhlů mezi rovnoběžkami se dá obrátit. Původní poučka říká, že když víme, že proťaté přímky jsou rovnoběžné, můžeme usoudit, že souhlasné úhly jsou si rovny. Obrácená poučka říká, že když víme, že dva souhlasné úhly jsou si rovny, můžeme usoudit, že proťaté přímky jsou rovnoběžné.

Každá poučka se obrátit nedá. Na př. „Když dva úhly jsou vrcholové, jsou si rovné“ je správná poučka. Obrácení by znělo „Když dva úhly jsou si rovný, jsou to úhly vrcholové“, ale to není správné.

Vyslovme si ještě jednou obrácenou poučku o souhlasných úhlech:

Jsou-li dva souhlasné úhly sobě rovny, jsou prořáté přímky rovnoběžné.

Nyní se snadno přesvědčíme, že také poučka o střídavých úhlech se dá obrátit:

Jsou-li dva střídavé úhly sobě rovny, jsou prořáté přímky rovnoběžné.

Abychom se o správnosti této poučky přesvědčili, podívejme se znovu na obr. 3. V něm jsou ω a ψ dva střídavé úhly. Víme, že $\omega = \psi$ a máme se přesvědčit, že $a \parallel b$. Vezmeme si na pomoc úhel φ . Jest $\omega = \varphi$ (vrcholové úhly). Proto je také $\varphi = \psi$, ale φ a ψ jsou souhlasné úhly, takže $a \parallel b$.

Také obrácená poučka o přilehlých úhlech je správná:

Jsou-li dva přilehlé úhly výplňkové, jsou prořáté přímky rovnoběžné.

O správnosti se přesvědčíme zase podle obr. 3. Víme, že

$$\varphi + \varepsilon = 2R$$

a máme se přesvědčit, že $a \parallel b$. Vezmeme na pomoc úhel ψ . Jest

$$\psi + \varepsilon = 2R$$

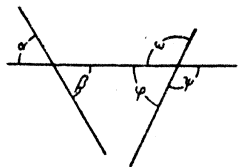
(vedlejší úhly). Proto je $\varphi = \psi$, ale φ a ψ jsou souhlasné úhly, takže $a \parallel b$.

Vraťme se ještě jednou k obr. 3! Prořáté přímky a , b jsou rovnoběžné a jest $\varphi + \varepsilon = 2R$. Zase si myslíme, že přímky a a c zůstanou každá ve své poloze, ale že se přímka b pootočí kolem středu B . Pootočená přímka b bude s přímkou a různoběžná a proto ji protne. Pootočení přímky b můžeme provést dvojím způsobem. Předně můžeme přímku b otočit tak, že se úhel ε zmenší, takže bude $\varphi + \varepsilon < 2R$. V tomto případě se protnou ramena úhlů φ a ε ležící v prořátých přímkách. Za druhé můžeme přímku b otočit tak, že se úhel ε zvětší, takže bude $\varphi + \varepsilon > 2R$. Ted' se ramena úhlů φ a ε (ležící v přímkách a a b) neprotnou, protože průsečík přímek a a b bude ted' na druhé straně od příčky.

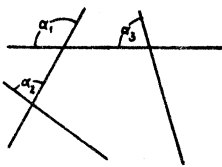
Mají-li dva přilehlé úhly součet menší než $2R$, pak se ramena ležící v profatých přímkách protnou.

Cvičení k § 1.

1. Co můžete říci o smyslu dvou polopřímek, víte-li, že jedna je částí druhé?
2. Na druhé přímce si zvolíme dvě polopřímky opačného smyslu. Které body jsou oběma polopřímek společné? (Jsou tři možné případy.)
3. Mohou dvě polopřímky stejného smyslu dohromady vyplnit celou přímku?
4. Musí dvě polopřímky opačného smyslu dohromady vyplnit celou přímku?
5. Jmenujte všechny dvojice vedlejších úhlů v obr. (str. 10)!
6. Jmenujte všechny dvojice vrcholových úhlů v obr. 2!
7. V obr. 5 udejte název dvojice úhlů:



Obr. 5.



Obr. 6.

- a) α , β . b) α , ω . c) ω , φ .
d) β , ψ . e) β , ω . f) β , φ .

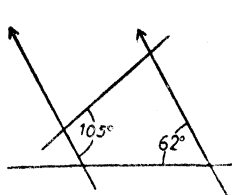
8. Narýsujte si od ruky obrazec podobný obr. 6.

α_1 , α_2 a α_1 , α_3 , jsou dvě dvojice souhlasných úhlů.

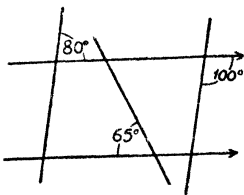
- a) Ve svém obrazci si označte β_1 , γ_1 , δ_1 ostatní tři úhly, které mají týž vrchol jako úhel α_1 . Podobně pro úhly α_2 a α_3 .
b) Vypište podle svého obrazce všechny dvojice souhlasných úhlů!
c) Vypište všechny dvojice střídavých úhlů!
d) Vypište všechny dvojice přilehlých úhlů!

9. Sestrojte si od ruky obrazec podobný obr. 7. Vpište do svého obrazce velikosti všech úhlů! (Celkem máte 16 úhlů.)

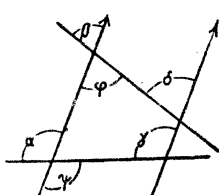
10. Opakujte s obr. 8! (Celkem máte 24 úhly.)



Obr. 7.



Obr. 8.



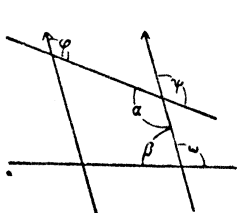
Obr. 9.

Také ve cvičeních 11 až 18 pokaždé si narysujte vlastní obrazec od ruky.

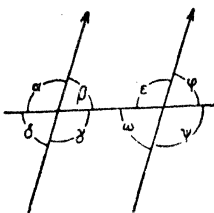
11. V obr. 9 jest $\varphi = 73^\circ$, $\psi = 114^\circ$. Určete α , β , γ , δ . Udávejte důvody!

12. V obr. 10 jest $\alpha = 127^\circ$, $\beta = 87^\circ$. Určete φ , ψ , ω . Udávejte důvody!

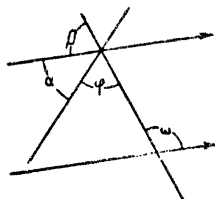
Také ve cvičeních 13 až 18 udávejte důvody!



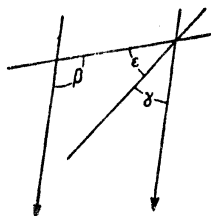
Obr. 10.



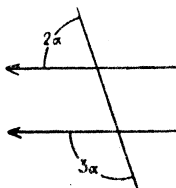
Obr. 11.



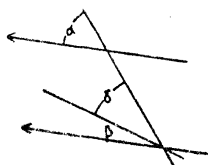
Obr. 12.



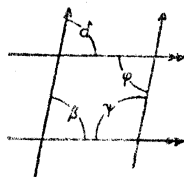
Obr. 13.



Obr. 14.



Obr. 15.



Obr. 16.

13. Následující úlohy se týkají obr. 11, který není přesně rýsován.

a) Jest $\beta = 72^\circ$; určete ω .

d) Jest $\varphi = 82^\circ$; určete γ .

b) Jest $\psi = 106^\circ$; určete α .

e) Jest $\alpha = 2\varphi$; určete φ .

c) Jest $\delta = 63^\circ$; určete ϵ .

f) Jest $\gamma - \omega = 72^\circ$; určete φ .

14. V obr. 12 jest $\varphi = 65^\circ$, $\omega = 114^\circ$. Určete α a β .

15. V obr. 13 jest $\beta = 107^\circ$, $\gamma = 35\frac{1}{2}^\circ$. Určete ϵ .

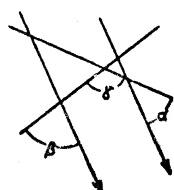
16. V obr. 14 určete α .

17. V obr. 15 je $\alpha = 51^\circ$, $\gamma = 2\beta$. Určete β a φ .

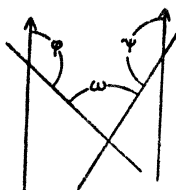
18. V obr. 16 je $\beta = 79\frac{1}{2}^\circ$. Určete δ , φ , a ψ .

Ve cvičeních 19 až 24 rýsujte vlastní obrazce od ruky! Pomocné čáry čárkujte!
Udávejte důvody!

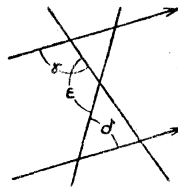
19. V obr. 17 jest $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 76^\circ$. Určete γ .



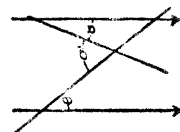
Obr. 17.



Obr. 18.

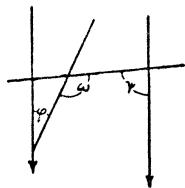


Obr. 19.

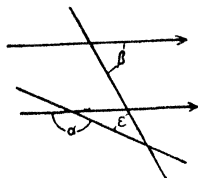


Obr. 20.

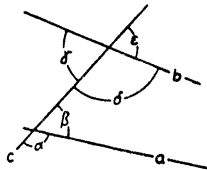
20. V obr. 18 jest $\varphi = 132^\circ$, $\psi = 154^\circ$. Určete ω .
 21. V obr. 19 jest $\gamma = 112^\circ$, $\delta = 58^\circ$. Určete ε .
 22. V obr. 20 jest $\alpha = 21^\circ$, $\delta = 57^\circ$. Určete φ .
 23. V obr. 21 jest $\varphi = 25^\circ$, $\omega = 121^\circ$. Určete ψ .
 24. V obr. 22 jest $\beta = 63^\circ$, $\varepsilon = 36^\circ$. Určete α .



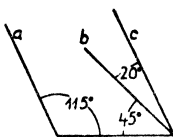
Obr. 21.



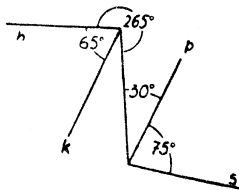
Obr. 22.



Obr. 23.



Obr. 24.



Obr. 25.

25. Dá se následující poučka obrátit?

a) Když úhel φ je ostrý, je menší než jeho vedlejší úhel.

b) Když trojúhelník má jeden úhel pravý, má dva úhly ostré.

Ke cvič. 26 až 28 rýsujte vlastní obrazce od ruky! Udávejte důvody!

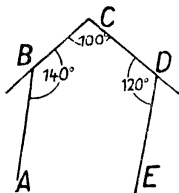
26. V obr. 23, který není přesně rýsován, zkoumejte podle daných číselných údajů, je-li $a \parallel b$. Není-li řekněte, zda se přímky a a b protnou nalevo či napravo od přímky c .

a) $\beta = 60^\circ$, $\varepsilon = 70^\circ$.

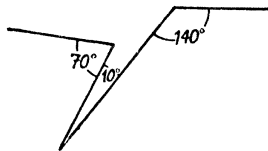
c) $\alpha = 115^\circ$, $\varepsilon = 65^\circ$.

b) $\beta = 55^\circ$, $\delta = 125^\circ$.

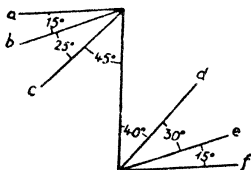
d) $\beta = 65^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.



Obr. 26.



Obr. 27.



Obr. 28.

27. a) Zkoumejte, je-li v obr. 24 nějaký pár rovnoběžek!

b) Opakujte s obr. 25!

c) Opakujte s obr. 26! (Pomocná konstrukce: Bodem C ved'te rovnoběžku s přímkou AB .)

d) Opakujte s obr. 27! (Zase pomocná konstrukce.)

28. Hledejte páry rovnoběžek v obr. 28!

29. Které nové geometrické výrazy jste poznali v tomto paragrafu?

Zapište si je!

30. Zapište si všechny poučky, které jste poznali v tomto paragrafu.

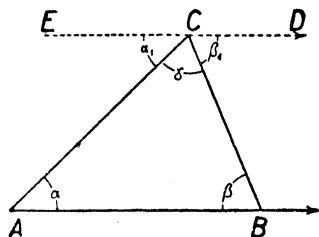
§ 2. Úhly mnohoúhelníka.

Součet úhlů trojúhelníka je $2R$. Tuto důležitou poučku už znáte. Můžeme si ji d o k á z a t i takto (viz obr. 29). Vrcholem C si vedeme přímkou ECD rovnoběžnou s přímkou AB . Podle obrazce jest

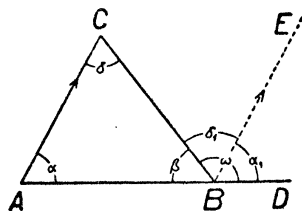
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 2R.$$

Avšak $\alpha_1 = \alpha$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami) a $\beta_1 = \beta$ (z téhož důvodu). Tedy

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R.$$



Obr. 29.



Obr. 30.

Při důkaze právě provedeném jsme vedli pomocnou čáru vrcholem C . Místo toho jsme mohli vésti pomocnou čáru vrcholem A nebo vrcholem B . Proved'te to!

Vnější úhel trojúhelníka se rovná součtu obou protějších úhlů vnitřních. Také tato poučka je vám už známa. Můžeme si ji d o k á z a t i takto (viz obr. 30). Máme dokázati, že $\omega = \alpha + \gamma$. Vrcholem B si vedeme přímkou BE rovnoběžnou s přímkou AC . Podle obrazce jest $\omega = \alpha_1 + \gamma_1$. Avšak $\alpha_1 = \alpha$ (proč?), $\gamma_1 = \gamma$ (proč?), takže je opravdu $\omega = \alpha + \gamma$.

Vnější úhel při vrcholu B jsme si mohli také opatřiti prodloužením strany BC za vrchol B (místo prodloužení strany AB). Proved'te důkaz s touto změnou.

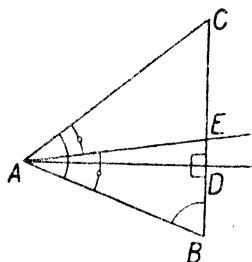
Proved'te důkaz také pro vnější úhel při vrcholu C !

Poučku o vnějším úhlu odvod'te z poučky o součtu úhlů!

Poučku o součtu úhlů odvod'te z poučky o vnějším úhlu!

U pravoúhlého trojúhelníka je jeden úhel roven R , tedy součet obou ostrých úhlů pravoúhlého trojúhelníka je R .

Příklad (viz obr. 31). V trojúhelníku ABC úhel při vrcholu A měří 60° , úhel při vrcholu B 70° . AE je osa úhlu $\sphericalangle BAC$. D je pata kolmice spuštěné s bodu A na přímkou BC . Vypočtěte $\sphericalangle DAE$.



Obr. 31.

[Polopřímka AE rozdělí $\sphericalangle BAC$ na dva stejné úhly. Abychom to měli na mysli, jsou oba úhly v obrazci vyznačeny malými obloučky, které jsou přerušeny malým kroužkem. Ve svém obrazení můžete užít barevných obloučků (oba stejné barvy). Všimněte si také obou malých čtverečků u bodu D . Ty nám připomínají, že oba úhly s vrcholem D jsou pravé. Zase můžete ve svém obrazení docílit výraznosti barvou.]

Protože AE je osa úhlu $\sphericalangle BAC$, rovného 60° , je

$$\sphericalangle BAE = 30^\circ, \quad \sphericalangle EAC = 30^\circ.$$

Všimněme si pravoúhlého trojúhelníka ABD . Víme, že jeho úhel při vrcholu B měří 70° . Proto si můžeme vypočítat jeho úhel při vrcholu A .

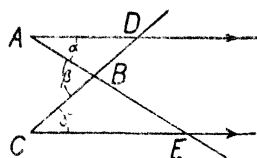
Najdeme

$$\sphericalangle BAD = 20^\circ.$$

Nám běží o úhel $\sphericalangle DAE$. Ten dostaneme, když od úhlu $\sphericalangle BAE$ ubereme úhel $\sphericalangle BAD$. Protože $30 - 20 = 10$, jest $\sphericalangle DAE = 10^\circ$.

Příklad. V obr. 4a (str. 12) je $\alpha = 32^\circ$, $\gamma = 41^\circ$. Určete β .

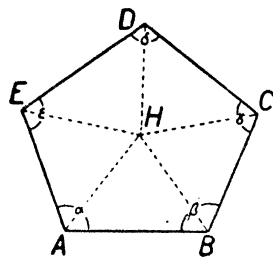
Tuto úlohu jsme už řešili tak, že jsme provedli pomocnou konstrukci (viz obr. 4b). Nyní si ji rozřešíme bez pomocné konstrukce. Obrazec máme narýsován znovu (viz obr. 32). Vidíme dva trojúhelníky: ABD a CBE . Kterýkoli z nich nám poslouží. V trojúhelníku ABD máme při vrcholu A úhel α a úhel při vrcholu D se rovná γ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Protože β je vnější úhel, vyjde $\beta = \alpha + \gamma$, tedy



Obr. 32.

$\beta = 73^\circ$. V trojúhelníku CBE máme při vrcholu C úhel γ a úhel při vrcholu E se rovná α (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Protože β je vnější úhel, vyjde zase $\beta = \alpha + \gamma$.

Narýsujte si libovolný pětiúhelník $ABCDE$. Jeho vnitřní úhly (nebo krátce úhly) jsou $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ (viz obr. 33). Budeme hledati, čemu se rovná součet všech pěti úhlů. Za tím účelem si zvolme uvnitř pětiúhelníka bod H . Spojíme-li jej se všemi vrcholy, rozdělí se pětiúhelník na pět trojúhelníků. Součet všech úhlů všech těchto trojúhelníků je $5 \times (2R)$ neboli $10R$. Ale tento součet se skládá



Obr. 33.

ze dvou úhlů s vrcholem A , které dohromady dají úhel α ,
ze dvou úhlů s vrcholem B , které dohromady dají úhel β ,
ze dvou úhlů s vrcholem C , které dohromady dají úhel γ ,
ze dvou úhlů s vrcholem D , které dohromady dají úhel δ ,
ze dvou úhlů s vrcholem E , které dohromady dají úhel ε

a ještě z pěti úhlů s vrcholem H , které dohromady dají $4R$ neboli $2 \times (2R)$. Tedy

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + 2 \times (2R) = 5 \times (2R),$$

takže $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 3 \times (2R) = 540^\circ$.

Stejnou cestou určete součet úhlů

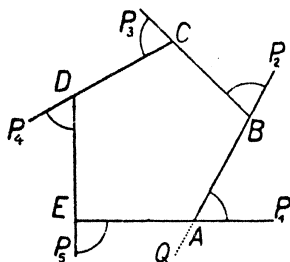
a) u čtyřúhelníka, b) u osmiúhelníka, c) u dvacetiúhelníka.

Při určování součtu úhlů jsme nemusili bod H voliti uvnitř, mohli jsme jej také voliti na obvodě, a to buďto v některém vrcholu nebo také v jiné poloze. Proved'te to

a) pro pětiúhelník, b) pro osmiúhelník, c) pro dvacetiúhelník.

Výsledek: Součet všech úhlů mnohoúhelníka je $(n - 2) \times 2R$, kde n značí počet stran (neboli počet úhlů).

Vnější úhel mnohoúhelníka vznikne stejně jako u trojúhelníka. Na př. u pětiúhelníka $ABCDE$ v obr. 34 vnější úhel při vrcholu A je $\sphericalangle BAP_1$ nebo také $\sphericalangle EAQ$. Tyto dva úhly jsou stejné (proč?), takže rýsuje zpravidla jen jeden, jak je to v obr. 34 provedeno pro vrcholy B, C, D, E . Zejména, když určujeme součet všech vnějších úhlů, bereme u každého vrcholu jen jeden vnější úhel.



Obr. 34.

U každého vrcholu pětiúhelníka máme tedy jeden vnitřní úhel a jeden vnější úhel, a ty dva úhly dají dohromady $2R$ (proč?). Tedy, když sečteme dohromady všech pět úhlů vnitřních i všech pět úhlů vnějších, dostaneme $5 \times (2R)$. Ale my víme, že součet vnitřních úhlů je $3 \times (2R)$. Tedy vnější úhly dají dohromady $2 \times (2R)$ neboli $4R$.

Stejnou cestou určete součet vnějších úhlů.

a) u trojúhelníka, b) u čtyřúhelníka, c) u patnáctiúhelníka.

Výsledek: Součet všech vnějších úhlů mnohoúhelníka je $4R$ neboli 360° .

O správnosti této poučky se můžeme přesvědčiti z názoru. Provedme si to třeba pro pětiúhelník. Na podlaze se narýsuje velký pětiúhelník $ABCDE$. Nyní se postavme do vrcholu E tak, abychom hleděli k bodu A (viz obr. 34). Potom obejdeme celý pětiúhelník kolem dokola (nejprve jdeme do A). Při tom se musíme v každém z vrcholů A, B, C, D pootočit, a to právě o vnější úhel při tomto vrcholu. Když se vrátíme do vrcholu E , hledíme směrem k bodu P_5 . Proto se také ve vrcholu E ještě pootočíme o vnější úhel při tomto vrcholu a pak jsme obráceni právě týmž směrem jako na začátku. Celkem jsme se otočili pětkrát, a to dohromady právě o plný úhel, neboli o $4R$. Proto součet všech vnějších úhlů pětiúhelníka je $4R$.

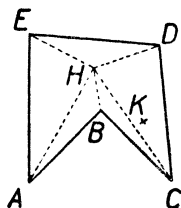
Pojem pravidelného mnohoúhelníka je vám již znám. Víte, že pravidelný mnohoúhelník je vepsán do kružnice k a že jeho vrcholy rozdělí kružnici k na stejné díly. Označme S střed kružnice k . Jsou-li P a Q kterékoli dva vrcholy pravidelného mnohoúhelníka, přejde vhodným otočením kolem středu S vrchol P ve vrchol Q . Tímto otočením přejde vnitřní úhel při vrcholu P ve vnitřní úhel při vrcholu Q a také vnější úhel při vrcholu P přejde ve vnější úhel při vrcholu Q . Proto všechny vnitřní úhly pravidelného mnohoúhelníka jsou si rovny a také všechny vnější úhly pravidelného mnohoúhelníka jsou si rovny. Ostatně se stejným způsobem přesvědčíme, že také délky všech stran pravidelného mnohoúhelníka jsou si rovny.

Velikost vnitřního úhlu pravidelného mnohoúhelníka se ovšem dostane, když se součet všech úhlů dělí jejich počtem. Stejně můžeme počítat velikost vnějšího úhlu; ta tedy je

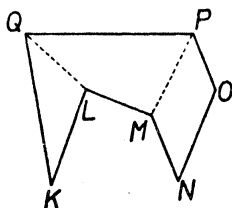
360° děleno počtem stran.

Nejllepší je vypočíst napřed velikost vnějšího úhlu. Potom určíme vnitřní úhel z toho, že je výplňkový k vnějšímu úhlu.

Mnohoúhelníky, které jsme dosud jediné měli na mysli, jsou t. zv. mnohoúhelníky vypuklé. Mají tu vlastnost, že když si kteroukoli stranou proložíme přímku, leží celý mnohoúhelník na jedné straně od této přímky. Všecky vnitřní úhly vypuklého mnohoúhelníka jsou duté. Ale jsou také mnohoúhelníky jiného tvaru, na př. pětiúhelník $ABCDE$ v obr. 35 nebo sedmiúhelník $KLMNOPQ$ v obr. 36. První z nich má jen čtyři úhly duté, druhý jen pět ze sedmi.



Obr. 35.



Obr. 36.

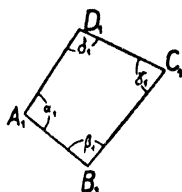
Součet vnitřních úhlů pětiúhelníka $ABCDE$ z obr. 35 můžeme nalézt právě tak jako u stejně označeného pětiúhelníka z obr. 33. Ale tam jsme si mohli bod H zvolit uvnitř pětiúhelníka libovolně, kdežto nyní si musíme bod H zvolit uvnitř pětiúhelníka vhodně; nešlo by na př. zvoliti si místo H bod, který je v obr. 35 označen K . U sedmiúhelníka z obr. 36 pak dokonce vůbec není možné, zvolit si uvnitř bod H tak, aby se součet úhlů dal počítat úvahou naznačenou v obr. 33 a 35. Přesto poučka o součtu vnitřních úhlů je správná i pro mnohoúhelníky, které nejsou vypuklé. Ale nebudeme si to obecně dokazovat; spokojíme se tím, že se o tom přesvědčíme na příkladě sedmiúhelníka z obr. 36. Úsečky LQ a MP rozdělí náš sedmiúhelník na trojúhelník KLQ a na vypuklé čtyřúhelníky $LMPQ$ a $MNOP$. Z obrazce je vidět, že součet úhlů našeho sedmiúhelníka dostaneme, když sečteme všechny úhly trojúhelníka i obou čtyřúhelníků. Dostaneme součet úhlů

$$2R + 2 \times (2R) + 2 \times (2R) = 5 \times (2R),$$

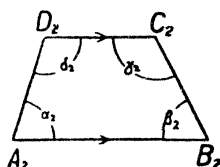
tedy stejný součet úhlů jako u vypuklých sedmiúhelníků.

Vypuklé mnohoúhelníky jsou mnohem důležitější než ostatní. V této učebnici budeme se jen jimi zabývat a budeme jim krátce říkat mnohoúhelníky.

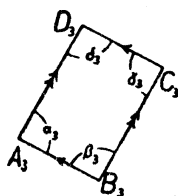
V každém z obrazců 37, 38, 39 máme čtyřúhelník.



Obr. 37.



Obr. 38.



Obr. 39.

Dva vrcholy čtyřúhelníka jsou buďto s o u s e d n í nebo p r o t ě j š í. spojnice sousedních vrcholů je strana, spojnice protějších vrcholů je úhlopříčka. Při dvou sousedních vrcholech máme dva s o u s e d n í ú h l y; při dvou protějších vrcholech máme dva p r o t ě j š í ú h l y. Dvě strany čtyřúhelníka jsou s o u s e d n í, vycházejí-li obě z téhož vrcholu; jinak jsou p r o t ě j š í.

U čtyřúhelníka $A_1B_1C_1D_1$ (obr. 37) jsou protější strany A_1B_1 a C_1D_1 rovnoběžné a také protější strany A_1D_1 a B_1C_1 jsou rovnoběžné; takový čtyřúhelník se jmenuje **rovnoběžník**.

U čtyřúhelníka $A_2B_2C_2D_2$ (obr. 38) jsou protější strany A_2B_2 a C_2D_2 rovnoběžné, ale protější strany A_2D_2 a B_2C_2 jsou rovnoběžné; takový čtyřúhelník se jmenuje **lichoběžník**. Strany A_2B_2 a C_2D_2 jsou základny lichoběžníka $A_2B_2C_2D_2$ z obr. 38; strany A_2D_2 a B_2C_2 jsou jeho ramena.

U čtyřúhelníka $A_3B_3C_3D_3$ (obr. 39) jsou protější strany A_3B_3 a C_3D_3 rovnoběžné a také protější strany A_3D_3 a B_3C_3 jsou rovnoběžné; takový čtyřúhelník se jmenuje **rovnoběžník**.

Úhly α_2 a δ_2 v obr. 38 jsou dva úhly přilehlé: proťaté přímky jsou A_2B_2 a D_2C_2 , příčka je A_2D_2 . Protože $A_2B_2 \parallel C_2D_2$, jest $\alpha_2 + \delta_2 = 2R$, t. j. úhly α_2 a δ_2 jsou výplňkové. Také úhly β_2 a γ_2 v obr. 38 jsou výplňkové, neboť zase to jsou přilehlé úhly mezi rovnoběžkami, α_2 a δ_2 jsou úhly při ramenu A_2D_2 lichoběžníka $A_2B_2C_2D_2$; β_2 a γ_2 jsou úhly při ramenu B_2C_2 .

Úhly při ramenu lichoběžníka jsou výplňkové.

Všimneme-li si u rovnoběžníka $A_3B_3C_3D_3$ (obr. 39) kteréhokoliv páru sousedních úhlů, shledáme pokaždé, že to jsou přilehlé úhly mezi rovnoběžkami. Přesvědčte se o tom ve všech případech! Výsledek: **Dva sousední úhly rovnoběžníka jsou vždy výplňkové.**

Všimněme si jednoho páru protějších úhlů našeho rovnoběžníka, na př. páru α_3 a γ_3 . Jest $\alpha_3 + \beta_3 = 2R$ a také jest $\gamma_3 + \beta_3 = 2R$, proto je $\alpha_3 = \gamma_3$. **Dva protější úhly rovnoběžníka jsou si rovny.**

Cvičení k § 2.

31. Úhly α , β , γ , ω mají takový význam jako v obr. 30. Mimo to znamená φ vnější úhel trojúhelníka ABC při vrcholu A , ψ vnější úhel při vrcholu C . (Vyznačte si všech šest úhlů ve vlastním obrazci!) Vypočtěte velikost všech úhlů podle těchto údajů:

a) $\alpha = 36^\circ 51' 47''$, $\beta = 57^\circ 48' 43''$;

b) $\varphi = 112^\circ 21' 19''$, $\gamma = 53^\circ 42' 26''$;

c) $\psi = 134^\circ 26' 2''$, $\omega = 156^\circ 58' 17''$;

Ve cvičeních 32 až 36 dojdete k cíli, budete-li hledat pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých znáte jeden ostrý úhel.

32. Sestrojte si trojúhelník FGH s pravým úhlem při vrcholu F . Spusťte s bodu F kolmici na přímku GH a její patu označte K . Je v obrazci nějaký úhel rovný úhlu $\sphericalangle HFK$? Udejte důvod!

33. Sestrojte si ostroúhlý trojúhelník EST . Spusťte s vrcholu R kolmici na přímku ST a patu označte P . Spusťte s vrcholu S kolmici na přímku RT a patu označte Q . Dokažte, že

$$\sphericalangle PRT = \sphericalangle QST.$$

(Můžete to provést dvojím způsobem.)

34. V trojúhelníku HKL měří úhel při vrcholu K 110° , úhel při vrcholu L 50° . N je pata kolmice spuštěné s bodu H na přímku KL . Dokažte že,

$$\sphericalangle LHK = \sphericalangle KHN.$$

35. Uvnitř ostrého úhlu $\sphericalangle BAC$ leží polopřímka AD . S bodu B spusťte kolmice na přímky AC a AD ; patu první označte E , patu druhé F . Dokažte, že

$$\sphericalangle EBF = \sphericalangle CAD.$$

36. Opakujte úlohu 35 s tím rozdílem, že úhel $\sphericalangle BAC$ bude tupý; úhly $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAC$ budou ostré.

Ve cvičeních 37 až 41 se opírejte o poučky o součtu úhlů a o vnějším úhlu.

37. Ve čtyřúhelníku $FGHK$ úhlopříčka FH půlí jak úhel při vrcholu F tak také úhel při vrcholu H . Dokažte, že

$$\sphericalangle FGH = \sphericalangle FKH.$$

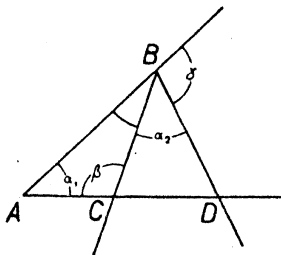
38. V obr. 40 jest $\alpha_1 = \alpha_2$. Dokažte, že $\beta = \gamma$. [Vyznačte si $\varepsilon = \sphericalangle ADB$.]

Cvičení 39 až 41 se vztahují k obr. 41, ve kterém YS je osa úhlu $\sphericalangle XYZ$ a ZR je osa úhlu $\sphericalangle XZY$. Vyčárkovaná přímka a body U , V přijdou jen ve cvičení 41.

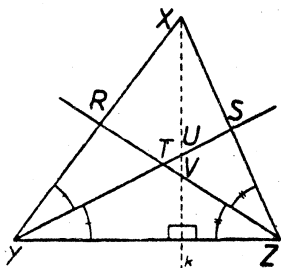
39. Jest $\sphericalangle YXZ = 81^\circ 23' 18''$, $\sphericalangle XYZ = 32^\circ 54' 58''$. Najděte $\sphericalangle YTZ$.

40. Jest $\sphericalangle XYZ = 43^\circ 43' 34''$, $\sphericalangle YTZ = 125^\circ 38' 26''$. Najděte $\sphericalangle YSZ$.

41. Jest $\sphericalangle YXZ = 65^\circ 12' 8''$, $\sphericalangle XZY = 73^\circ 8' 56''$. S bodu X spustíte kolmici k na přímku YZ . Určete úhly trojúhelníka TUV .



Obr. 40.



Obr. 41.

42. Řešte znovu, ale bez pomocné konstrukce

- a) cvič. 19; b) cvič. 20; c) cvič. 21;
d) cvič. 22; e) cvič. 23; f) cvič. 24.

43. Vypočítejte čtvrtý vnitřní úhel čtyřúhelníka, když tři vnitřní úhly měří

- a) $76^\circ 34'$, $96^\circ 42'$, $112^\circ 56'$.
b) $118^\circ 36'$, $72^\circ 51'$, $48^\circ 38'$.
c) $89^\circ 42' 32''$, $123^\circ 45' 20''$, $86^\circ 50' 28''$.

44. Jeden vnitřní úhel čtyřúhelníka měří $113^\circ 8' 54''$. Všecky tři ostatní jsou si rovny. Určete jejich velikost!

45. Ze šesti úhlů šestiúhelníka je pět sobě rovných. Zbývající úhel je o $71^\circ 13'$ menší. Určete velikost všech úhlů!

46. Tři úhly pětiúhelníka jsou si rovny a každý měří $156^\circ 52' 48''$. Zbývající dva úhly jsou si rovny. Určete jejich velikost!

47. Úhly pětiúhelníka měří (ve stupních)

$$2x, 3x, 4x, 5x, 6x.$$

Určete x .

48. Součet vnitřních úhlů mnohoúhelníka je 1080° . Kolik má stran?

49. Které mnohoúhelníky mají součet úhlů mezi sedmi a osmi tisíci stupňů?

50. Určete nejprve vnější úhel, potom vnitřní úhel pravidelného

- a) 12úhelníka, b) 15úhelníka, c) 18úhelníka, d) 30úhelníka.

51. Může pravidelný mnohoúhelník mít vnější úhel

- a) 15° ? b) 7° ? c) 11° ? d) 6° ? e) 5° ? f) 4° ?

Může-li, udejte počet stran.

52. Může pravidelný mnohoúhelník mít vnitřní úhel

- a) 108° ? b) 120° ? c) 130° ? d) 144° ? e) 60° ? f) 170° ?

Může-li, udejte počet stran.

53. $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Přímky AB a CD se protnou v bodě X . Určete úhel $\sphericalangle AXD$.

54. Rozdělte devítiúhelník z obr. 42 na vypuklé mnohoúhelníky a přesvědčte se, že součet všech úhlů je $14R$.

55. U čtyřúhelníka z obr. 37 jmenujte všechny páry a) sousedních vrcholů, b) protějších vrcholů.

56. U čtyřúhelníka z obr. 38 jmenujte všechny páry a) sousedních úhlů, b) protějších úhlů.

57. U čtyřúhelníka z obr. 39 jmenujte všechny páry a) sousedních stran, b) protějších stran.



Obr. 42.

58. Vypočítejte ostatní úhly lichoběžníka A_1, B_1, C_1, D_1 (viz obr. 38), víte-li, že

a) $\alpha_2 = 72^\circ 13' 47''$, $\beta_2 = 43^\circ 52' 36''$.

b) $\alpha_2 = 69^\circ 24' 15''$, $\gamma_2 = 145^\circ 23' 56''$.

c) $\beta_2 = 46^\circ 12' 38''$, $\delta_2 = 110^\circ 36' 28''$.

d) $\gamma_2 = 138^\circ 57' 26''$, $\delta_2 = 112^\circ 53' 7''$.

Dá se podrobný výpočet provést, je-li známa velikost jiného páru úhlů?

59. Vypočítejte ostatní úhly rovnoběžníka A, B, C, D , (viz obr. 39), víte-li, že

a) $\alpha_3 = 98^\circ 12' 47''$.

b) $\beta_3 = 82^\circ 44' 55''$.

c) $\gamma_3 = 102^\circ 28' 35''$.

d) $\delta_3 = 78^\circ 57' 3''$.

60. Dokažte, že čtyřúhelník, o kterém víme, že má dva sousední úhly výplňkové, je buďto lichoběžník nebo rovnoběžník.

61. $ABCD$ je lichoběžník ($AB \parallel CD$); osa úhlu $\sphericalangle BAD$ a osa úhlu $\sphericalangle CDA$ se protínou v bodě X . Dokažte, že

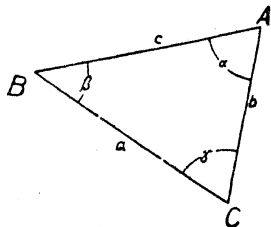
$$\sphericalangle AXD = R.$$

62. Které nové geometrické výrazy jste poznali v tomto paragrafu? Zapište si je!

63. Zapište si všechny poučky, které jste poznali v tomto paragrafu? Zopakujte si jejich důkazy.

§ 3. Shodné trojúhelníky.

U trojúhelníků se užívá velmi často takového označení jako v obr. 43. Vrcholy jsou označeny velkými písmeny A, B, C . Délky stran jsou označeny malými písmeny a, b, c a to tak, že strana je vždy označena písmenem stejného jména jako protější vrchol. Úhly jsou označeny řeckými písmeny α, β, γ a to tak, že úhel α leží při vrcholu A a proti straně a atd. Toto základní označení vám musí býti dobře známo, ale přesto musíte také umět řešit úlohy při jakémkoli označení.



Obr. 43.

Říkáme, že úhly α a β jsou přilehlé ke straně c . To je v soulase s názvem přilehlých úhlů zavedeným na str. 5. (Považujeme

AB za příčku, AC a BC za proťaté přímky.) Podobně jsou α a γ úhly přilehlé ke straně b , β a γ jsou úhly přilehlé ke straně a .

U trojúhelníka měříme celkem šest hodnot: tři délky a , b , c a tři úhly α , β , γ . Shodné trojúhelníky, t. j. takové, které lze položit jeden na druhý tak, že se navzájem kryjí, mají stejné dlouhé strany a stejně velké úhly.

Je vám již známo, že trojúhelník můžeme sestrojit, jakmile známe délky všech tří stran. Tedy stačí, když ze šesti hodnot a , b , c , α , β , γ známe tři, totiž a , b , c . Pak je už možné trojúhelník sestrojit; zbývající tři hodnoty α , β , γ můžeme potom změřit úhloměrem.

Ríkáme, že

trojúhelník je určen, známe-li délky všech tří stran.

Slovo „určen“ ovšem neznamena, že by existoval jen jediný takový trojúhelník, nýbrž že se dva takové trojúhelníky od sebe liší pouze umístěním, t. j. že jsou shodné. Tedy

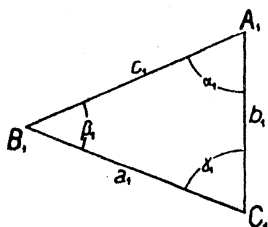
dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách (t. j. jsou-li strany prvního stejně dlouhé jako strany druhého).

Je vám také známo, že nesmíme libovolně zvolit všechny tři délky a , b , c . Můžeme si zvolit na př. a a b úplně libovolně, ale c musí být menší než součet a větší než rozdíl prvních dvou stran.

Ale ze šesti hodnot a , b , c , α , β , γ můžeme vybrati k určení trojúhelníka také jiné tři nežli právě a , b , c . Na př. platí:

trojúhelník je určen, známe-li délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného (t. j. úhlu, jehož ramena obsahují ty strany). I tuto poučku můžeme vysloviti ve druhém znění:

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném.



Obr. 44.

O správnosti této poučky se snadno přesvědčíme. V obr. 44 máme trojúhelník se stejným označením jako u trojúhelníka z obr. 43 až na ten rozdíl, že v obr. 44 je všude ještě index 1. Dejme tomu, že víme, že $b_1 = b$, $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha$. Máme se přesvědčit, že je možné trojúhelník $A_1B_1C_1$ přemístit tak, aby se kryl s trojúhelníkem ABC . To je velmi jednoduché.

Protože úhel $\alpha_1 = \sphericalangle B_1A_1C_1$ se rovná úhlu $\alpha = \sphericalangle BAC$, můžeme trojúhelník $A_1B_1C_1$ přemístiti tak, že vrchol A_1 úhlu α_1 se bude krýti s vrcholem A úhlu α , rameno A_1B_1 úhlu α_1 s ramenem AB úhlu α , rameno A_1C_1 úhlu α_1 s ramenem AC úhlu α . Tedy v nové poloze bude B_1 ležet na polopřímce AB ve vzdálenosti $c_1 = \overline{AB_1}$ od bodu A . Ale vzdálenost c_1 je rovna vzdálenosti $c = \overline{AB}$, takže nová poloha bodu B_1 se kryje s bodem B . Podobně se nová poloha bodu C_1 musí krýt s bodem C . Tedy se budou krýt všechny tři vrcholy obou trojúhelníků a proto jsou ty trojúhelníky shodné.

Konstrukce trojúhelníka ABC ze stran b, c a úhlu α jimi sevřeného je velmi jednoduchá. Můžeme napřed úhloměrem sestrojiti úhel α a vrchol označiti A . Potom nanese na jedno rameno délku $\overline{AB} = c$, na druhé délku $\overline{AC} = b$, spojíme BC a jsme hotovi. Můžeme však při konstrukci místo daného úhlu začít také jednou z daných stran. Popište sami konstrukci, při které se začne stranou b !

Dále platí, že

trojúhelník je určen, známe-li délku jedné strany a velikost obou úhlů přilehlých. Druhé znění poučky:

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v obou úhlech přilehlých.

O správnosti poučky se zase snadno přesvědčíme. Dejme tomu, že víme (viz obr. 43 a 44), že $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$. Protože délka $c_1 = \overline{A_1B_1}$ se rovná délce $c = \overline{AB}$, můžeme přemístit trojúhelník $A_1B_1C_1$ tak, že v nové poloze se bod A_1 bude krýt s bodem A a bod B_1 s bodem B . To se dá ještě provésti dvojím způsobem. Volíme takový způsob, aby nová poloha bodu C_1 byla od přímky AB na tu stranu, na které je bod C . Po přemístění se kryje jedno rameno A_1B_1 úhlu α_1 s jedním ramenem AB úhlu α . Protože $\alpha_1 = \alpha$ a protože jsou oba úhly α a α_1 na stejné straně od přímky AB , musí se krýti také druhá ramena, t. j. polopřímka A_1C_1 se po přemístění kryje s polopřímkou AC . Z toho vychází, že nová poloha bodu C_1 je někde na přímce AC . Všimneme-li si nyní úhlu β , vyjde nám podobně, že nová poloha bodu C_1 je někde na přímce BC . Tedy nová poloha bodu C_1 je v průsečíku přímky AC s přímkou BC , t. j. v bodě C . Tedy po přemístění se kryje nejen vrchol A_1 s vrcholem A a vrchol B_1 s vrcholem B , nýbrž také vrchol C_1 s vrcholem C a proto jsou trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ shodné.

Konstrukce trojúhelníka ABC ze strany c a z obou přilehlých úhlů α , β je zase snadná, ale aby byla možná, musí býti $\alpha + \beta < 180^\circ$. (Proč?) Sestrojíme si napřed úsečku AB dané délky c . Potom si sestrojíme oba úhly α , β , při čemž úhel α má vrchol A a jedno rameno v polopřímce AB , úhel β má vrchol B a jedno rameno v polopřímce BA , a oba úhly leží na stejné straně od přímky AB . Protože je $\alpha + \beta < 180^\circ$, musí se druhá ramena našich úhlů protnout. (Podle které poučky?) Jejich průsečík C je třetí vrchol trojúhelníka ABC .

Probrali jsme si tři základní poučky o určenosti (nebo o shodnosti) trojúhelníků. Tyto tři poučky jsou velmi důležité, protože většina ostatních pouček se dá odvoditi z nich (a z pouček o dvou přímkách prořatých příčkou). Proto je nutné, abyste ty poučky znali opravdu dokonale. Aby se vám to ulehčilo, zavedeme si pro ně velmi pohodlné značky.

I. Označíme sus (strana, úhel, strana) poučku
trojúhelník je určen, známe-li dvě strany a úhel jimi sevřený neboli

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném.

II. Označíme usu (úhel, strana, úhel) poučku
trojúhelník je určen, známe-li jednu stranu a oba úhly přilehlé neboli

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v obou přilehlých úhlech.

III. Označíme sss (strana, strana, strana) poučku
trojúhelník je určen, známe-li délky všech tří stran neboli

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách.

Co by znamenalo uuu ? To by nebyla správná poučka. K trojúhelníku ABC si můžeme opatřit trojúhelník $A_1B_1C_1$ dvakrát (nebo třeba desetkrát) tak veliký; oba trojúhelníky budou mítí všechny úhly stejné, ale shodné nebudou. Třemi úhly není trojúhelník určen. To nepřekvapuje, neboť znáti tři úhly trojúhelníka není o nic větší znalost nežli znáti dva úhly, protože ze dvou úhlů umíme vypočítati třetí podle vztahu

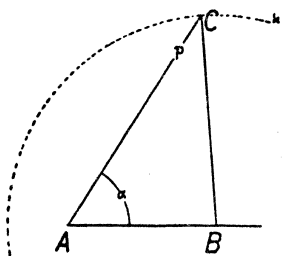
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

který dobře známe.

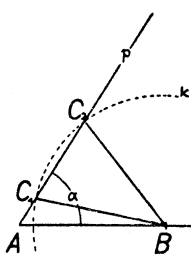
Zato vedle usu také suu nebo uss je správná poučka: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně, v úhlu protiní a v ještě jednom úhlu. Na př. jsou trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ (viz obr. 43 a 44) shodné, je-li $c_1 = c$, $\gamma_1 = \gamma$, $\alpha_1 = \alpha$. Neboť podle poučky o součtu úhlů je potom také $\beta_1 = \beta$, takže je $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, t. j. trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ jsou shodné podle usu.

Máme-li sestrojiti trojúhelník ABC znajíce délku c a úhly α a γ , vypočteme si napřed $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$ a potom sestrojíme podle usu. Aby byla konstrukce možná, musí býti $\alpha + \gamma < 180^\circ$.

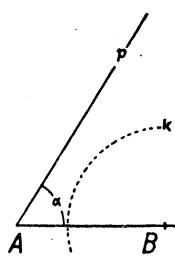
Důležité je, že suu nebo uss není správná poučka. Trojúhelník nemusí býti určen, známe-li délky dvou stran a velikost úhlu proti jedné z nich. Nechť je na př. $\alpha = 57^\circ$, $c = 25$ mm a mimo to nechť je známa délka a . Jest $a = 35$ mm v obr. 45, $a = 22$ mm v obr. 46, $a = 16$ mm v obr. 47. Sestrojíme si pokaždé napřed úhel $\alpha = 57^\circ$



Obr. 45.



Obr. 46.



Obr. 47.

s vrcholem A , potom nanese na jedno rameno délku $\overline{AB} = c = 25$ mm; druhé rameno si označíme p . Máme už dva vrcholy A , B žádaného trojúhelníka ABC a zbývá určit polohu třetího vrcholu C . Protože známe délku $a = \overline{BC}$, musí bod C ležeti na kružnici k o středu B a poloměru a . Mimo to musí C ovšem ležeti na polopřímce p . V každém z našich tří případů dopadne věc jinak: v obr. 45 kružnice k protne polopřímku p v jediném bodě C , v obr. 46 ve dvou bodech C_1 a C_2 , v obr. 47 se p a k vůbec neprotnou. Tedy pro $a = 35$ mm máme jediný trojúhelník ABC vyhovující podmínkám, pro $a = 22$ mm není žádný takový trojúhelník, ale pro $a = 16$ mm vyhovují podmínkám dva trojúhelníky ABC_1 a ABC_2 , které nejsou shodné. Proto ssu neboli uss není správná poučka.

Značka shodnosti je $\cong$. Dá-li se trojúhelník $A_1B_1C_1$ položit na trojúhelník ABC tak, že vrchol A_1 se kryje s vrcholem A , vrchol B_1 s vrcholem B , vrchol C_1 s vrcholem C , zapíšeme shodnost takto:

$$ABC \cong A_1B_1C_1.$$

Místo toho můžeme také napsati třeba

$$BAC \cong B_1A_1C_1 \text{ nebo } CAB \cong C_1A_1B_1,$$

t. j. vrcholy jednoho z obou trojúhelníků můžeme napsati v libovolném pořádku. Ale jakmile se rozhodneme pro určitý pořádek vrcholů jednoho trojúhelníka, je tím už rozhodnuto o pořádku vrcholů druhého, protože zápis musí být proveden tak, aby z něho bylo patrné, který vrchol s kterým se bude po přemístění kryt. Na př. u trojúhelníků z obr. 43 a 44 nemůžeme napsati $BCA \cong A_1C_1B_1$, ačkoli jsou ty trojúhelníky shodné; neboť to by znamenalo, že lze přemístiti trojúhelník $A_1B_1C_1$ tak, aby se vrchol A_1 kryl s vrcholem B , vrchol C_1 s vrcholem C , vrchol B_1 s vrcholem A ; to jistě nelze, protože strana A_1C_1 je mnohem kratší nežli strana BC .

Ze správného zápisu shodnosti je patrné, které jsou páry stejných stran a při kterých vrcholech jsou páry stejných úhlů.

Když na shodnost trojúhelníků soudíme z některé základní poučky, můžeme si za zápis shodnosti poznamenati značku poučky. Když na př. u trojúhelníků z obr. 43 a 44 zjistíme měřením, že $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A_1C_1B_1$, můžeme zapsati

$$ABC \cong A_1B_1C_1 \text{ (sus),}$$

neboť shodnost je zaručena poučkou sus.

Cvičení k § 3.

64. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů. Pokaždé změřte a , β a γ .

- $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$.
- $a = 8 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $c = 54 \text{ mm}$.
- $a = 9 \text{ cm}$, $b = 58 \text{ mm}$, $c = 46 \text{ mm}$.
- $a = 37 \text{ mm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 44 \text{ mm}$.

65. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů.

- $b = 57 \text{ mm}$, $c = 48 \text{ mm}$, $\alpha = 42^\circ$. Změřte a , β , γ .
- $a = 85 \text{ mm}$, $c = 52 \text{ mm}$, $\beta = 113^\circ$. Změřte b , α , γ .
- $a = 36 \text{ mm}$, $b = 66 \text{ mm}$, $\gamma = 147^\circ$. Změřte c , α , β .
- $a = 73 \text{ mm}$, $b = 43 \text{ mm}$, $\gamma = 25^\circ$. Změřte c , α , β .

66. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů.

- $c = 72$ mm, $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 59^\circ$. Změřte a , b , γ .
- $a = 35$ mm, $\beta = 126^\circ$, $\gamma = 34^\circ$. Změřte b , c , α .
- $b = 43$ mm, $\alpha = 27^\circ$, $\gamma = 132^\circ$. Změřte a , c , β .
- $a = 69$ mm, $\beta = 83^\circ$, $\gamma = 42^\circ$. Změřte b , c , α .

67. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů. Pokaždé změřte c a všechny úhly.

- $a = 58$ mm, $\alpha = 47^\circ$, $\beta = 53^\circ$.
- $b = 92$ mm, $\alpha = 23^\circ$, $\beta = 138^\circ$.
- $a = 42$ mm, $\alpha = 16^\circ$, $\gamma = 154^\circ$.

68. Sestrojte, je-li to možno, trojúhelník ABC podle daných údajů. Není-li řešení, napište „nemožné“. Jsou-li dva takové trojúhelníky, sestrojte je oba. Pokaždé změřte všechny strany a úhly.

- $a = 83$ mm, $b = 57$ mm, $\alpha = 153^\circ$.
- $b = 64$ mm, $c = 42$ mm, $\beta = 37^\circ$.
- $b = 7$ cm, $c = 55$ mm, $\gamma = 35^\circ$.
- $b = 8$ cm, $c = 7$ cm, $\beta = 35^\circ$.

69. Jest $ABC \cong HKG$. Který úhel se rovná $\angle CAB$? Která strana se rovná straně GH ?

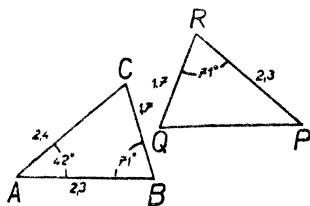
V následujících cvičeních 70 až 73 máte po každé hledati v obrazci dva shodné trojúhelníky. Shodnost správně zapište a po každé udejte také značku poučky, podle které na shodnost usuzujete. Narýsujte si od ruky vlastní obrazce a do nich zapište velikost všech stran úhlů. V tištěných obrazcích je jednotka 1 cm.

70. Viz obr. 48.

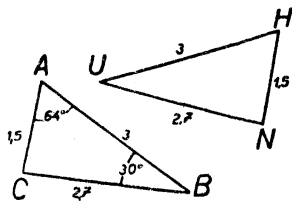
71. Viz obr. 49.

72. Viz obr. 50.

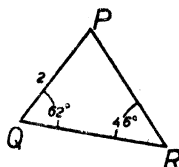
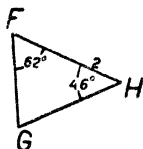
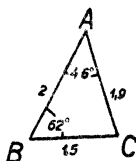
73. Viz obr. 51.



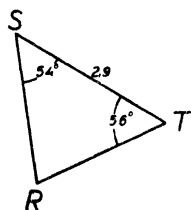
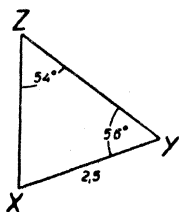
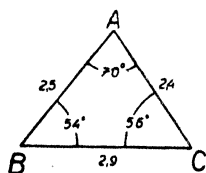
Obr. 48.



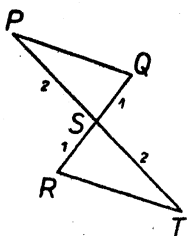
Obr. 49.



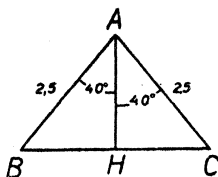
Obr. 50.



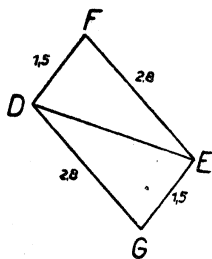
Obr. 51.



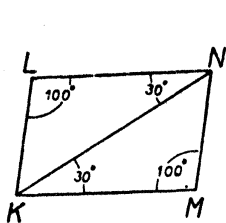
Obr. 52.



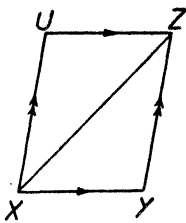
Obr. 53.



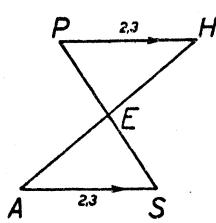
Obr. 54.



Obr. 55.



Obr. 56.



Obr. 57.

Ve cvičeních 74 až 79 máte najít v obrazech dva shodné trojúhelníky, zapsat správně shodnost a zapsat také důvod. V tištěných obrazech je jednotka 1 cm.

74. Viz obr. 52.

77. Viz obr. 55.

75. Viz obr. 53.

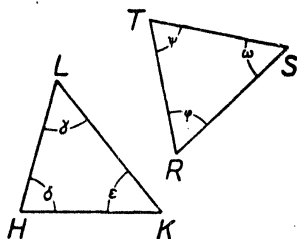
78. Viz obr. 56.

76. Viz obr. 54.

79. Viz obr. 57.

Cvičení 80 až 88 se vztahují k obr. 58, který pouze vysvětluje označení. Po každé si narýsujte vlastní obrázek od ruky a v něm si vyznačte pomocí párů stejných značek, co je dáno. Je-li na př. dáno, že dvě úsečky jsou stejně dlouhé, přetřhněte si je obě touž barevnou tužkou. Potom rozhodněte, zdali oba trojúhelníky musí být shodné. Když ano, zapíšte správně shodnost a zapíšte také její důvod.

80. $\overline{HK} = \overline{ST}$, $\overline{HL} = \overline{RT}$, $\delta = \psi$.
 81. $\overline{HK} = \overline{RS}$, $\delta = \varphi$, $\varepsilon = \psi$.
 82. $\overline{HL} = \overline{RT}$, $\overline{HK} = \overline{RS}$, $\gamma = \psi$.
 83. $\overline{HK} = \overline{ST}$, $\delta = \psi$, $\gamma = \varphi$.
 84. $\overline{KL} = \overline{RT}$, $\overline{HL} = \overline{RS}$, $\overline{HK} = \overline{ST}$.
 85. $\delta = \varphi$, $\varepsilon = \omega$, $\gamma = \psi$.
 86. $\overline{HL} = \overline{KL}$, $\overline{RT} = \overline{ST}$, $\gamma = \psi$.
 87. $\overline{HL} = \overline{ST}$, $\overline{KL} = \overline{RS}$, $\gamma = \omega$.
 88. $\overline{HK} = \overline{HL}$, $\overline{RS} = \overline{RT}$, $\delta = \omega$.



Obr. 58.

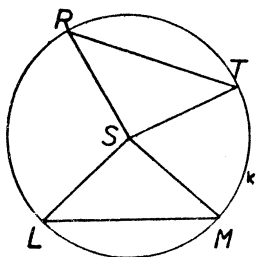
Cvičení 89 až 101 se řeší tak, že si po každé najdete v obrazci dva trojúhelníky, které podle některé základní poučky musí býti shodné. I k těm úlohám, ke kterým je obrazec v učebnici, rýsujte si obrazce vlastní.

89. Ve středu S úsečky AB vztýčte kolmici k ke přímce AB . Zvolte si bod T na přímce k . Dokažte, že $\overline{AT} = \overline{BT}$.

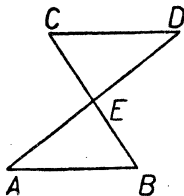
90. Na ose úhlu $\sphericalangle XYZ$ si zvolte bod K . Spusťte s bodu K kolmice na obě ramena úhlu a jejich paty označte P , Q . Dokažte, že $\overline{KP} = \overline{KQ}$.

91. V obr. 59 je S střed kružnice k . Dokažte:

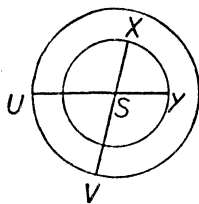
- a) Je-li $\overline{LM} = \overline{RT}$, je $\sphericalangle LSM = \sphericalangle RST$.
 b) Je-li $\sphericalangle LSM = \sphericalangle RST$, je $\overline{LM} = \overline{RT}$.



Obr. 59.



Obr. 60.



Obr. 61.

92. V trojúhelníku ABK je $\overline{AK} = \overline{BK}$. H je střed strany AB . Dokažte, že $\overline{HK} \perp \overline{AB}$. (Je-li úhel rovný úhlu vedlejšímu, je pravý.)

93. V trojúhelníku XYZ je $\overline{XY} = \overline{XZ}$. Označte S střed strany XY a T střed strany XZ . Dokažte, že $\overline{SZ} = \overline{TY}$.

94. V obr. 60 je E střed obou úseček AD a BC . Dokažte:

- a) $\overline{AB} = \overline{CD}$. b) $AB \parallel CD$.

95. V obr. 60 je $\overline{AE} = \overline{ED}$ a $AB \parallel CD$. Dokažte, že $\overline{BE} = \overline{EC}$.

96. V obr. 60 je $\overline{AB} = \overline{CD}$, $AB \parallel CD$. Dokažte:

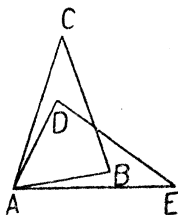
- a) $\overline{AE} = \overline{ED}$. b) $\overline{AC} = \overline{BD}$. c) $AC \parallel BD$.

97. V obr. 61 je S střed obou kružnic. Dokažte, že $\overline{UX} = \overline{VY}$.

98. Všecky strany čtyřúhelníka $HKLM$ jsou si rovny. Dokažte, že úhel při vrcholu H je půlen úhlopříčkou HL .

Cvičení 99 až 101 jsou trochu těžší.

99. ABC je ostroúhlý trojúhelník. Vně trojúhelníka jsou čtverce $ABQR$, $ACST$. Dokažte, že $\overline{CR} = \overline{BT}$.



Obr. 62.

100. FGH je ostroúhlý trojúhelník. Vně trojúhelníka FGH jsou rovnostranné trojúhelníky FKG , FLH . Dokažte že $\overline{GL} = \overline{HK}$.

101. V obr. 62 je $ABC \cong ADE$. Dokažte, že $\overline{CD} = \overline{BE}$.

102. Které geometrické výrazy se vyskytovaly v tomto paragrafu? Zapište si je!

103. Zapište si poučky, které jste poznali v tomto paragrafu. Zapište si také jejich značky.

§ 4. Grafické určování vzdáleností a výšek.

V minulém paragrafu jsme poznali, že ke konstrukci trojúhelníka ABC stačí, když ze šesti hodnot a , b , c , α , β , γ známe vhodné tři hodnoty. Pak už můžeme trojúhelník ABC sestavit a ostatní tři hodnoty změřit. To má velký praktický význam. Často se stává, že je třeba určit nějakou délku, která je přímému měření nepřístupná. Tu si pomáháme z nesnáze tím, že provedeme jiná měření, která se dají provádět snáze a z nichž se dá určit ta hodnota, o kterou se vlastně zajímáme. Dejme tomu na příklad, že bychom chtěli určit vzdálenost místa A , které leží u břehu řeky, od místa B , které leží u druhého břehu řeky. Přímému měření vadí řeka. Pomůžeme si takto. Zvolíme si vhodné třetí místo C na témž břehu, na kterém je A , změříme vzdálenost $\overline{AC}$ a změříme si ještě dva úhly, totiž $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle BCA$. Všecka tři měření se dají provést na té straně od řeky, na které je místo A . Trojúhelník ABC je provedenými měřeními úplně určen (podle poučky usu), takže také žádanou vzdálenost $\overline{AB}$ můžeme na základě provedených měření stanovit. To stanovení by se dalo provést tím, že bychom si sestrojili na základě naměřených údajů trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC . Ale takový trojúhelník by byl příliš velký; proto se jej sestrojíme ve zmenšeném měřítku. Obvykle sestrojujeme obrazce dva; napřed malý obrazec od ruky, potom větší obrazec přesný. V našem případě naměříme třeba $\overline{AC} = 6$ m, $\sphericalangle BAC = 86^\circ$, $\sphericalangle BCA = 68^\circ$. Tyto údaje si poznamenejme do obraz-

ce od ruky, který může být skutečnému trojúhelníku ABC jen velmi zhruba podobný. Potom rozhodneme, v jakém měřítku budeme rýso-
vati přesný obrazec. To měřítko musí být voleno tak, aby se nám celý
obrazec vešel. Za druhé je volíme tak, abychom dostali pokud možno
veliký obrazec, protože z malého obrazce bychom hledanou vzdálenost
dostali velmi nepřesně. Konečně volíme měřítko tak, aby souvislost
mezi skutečnými a zmenšenými vzdálenostmi byla co nejjednodušší.
Obyčejně volíme měřítko tak, aby 1 cm znamenal 1 m, 10 m, 100 m, ...
nebo 2 m, 20 m, 200 m, ... nebo 0,5 m, 5 m, 50 m atd. V našem případě
volíme měřítko tak, že 1 cm znamená 2 m. Proto si sestrojíme (co
nejpřesněji!) trojúhelník ABC , ve kterém $\overline{AC} = 3$ cm, $\sphericalangle BAC = 86^\circ$,
 $\sphericalangle BCA = 68^\circ$. Pak si změříme $\overline{AB}$ a najdeme $\overline{AB} = 6,3$ cm. Protože
1 cm nákresu znamená 2 m ve skutečnosti, skutečná vzdálenost $\overline{AB}$
měří asi 12,6 m. („Asi“ proto, že ani měření v přírodě, ani rýsování
na papíře nemohlo být dokonale přesné.)

Trojúhelníky, kterých jsme užívali v úloze právě řešené, ležely
ve vodorovné rovině. Ke stanovení výšek užíváme trojúhelníků ve
svislé rovině. Přitom měříme úhly ve svislé rovině, které šikmý směr
tvoří se směrem vodorovným. Pozorujeme-li se stanoviska S předmět P
položený výše než S , pak svislý úhel polopřímky SP s vodorovnou
polopřímkou se jmenuje výškový úhel předmětu P se stanoviska S ;
leží-li P níže nežli S , mluvíme o h l o u b k o v é m ú h l u.

Cvičení k § 4.

104. Písmena U , V , W znamenají tři kostelní věže. U je na sever od V ve
vzdálenosti 6 km. W je na severovýchod od V ve vzdálenosti 12 km.

- Jak daleko je W od U ?
- V jakém směru od U je W ?

105. Písmena A , B , C znamenají tři města. A leží 30 km severně od B
a 50 km západně od C .

- Určete vzdálenost od B k C .
- V jakém směru od města B leží město C ?

106. Tři cesty tvoří trojúhelník LMN . Jest $\overline{LM} = 600$ m, $\overline{MN} = 450$ m,
 $\overline{NL} = 350$ m. Jak daleko od cesty LM je křižovatka N ?

107. Domek C leží nalevo od silnice mezi dvěma body A , B silnice. Směr
 AC je od silnice odchýlen o úhel 32° , směr BC o úhel 65° . Jest $\overline{AB} = 250$ m.

- Určete vzdálenost $\overline{AC}$.
- Určete nejkratší vzdálenost od domku k silnici.

108. Nalevo od rovné cesty HKX jsou dva kopce A , B . Jest $\overline{HK} = 1$ km, $\sphericalangle XHA = 25^\circ$, $\sphericalangle XHB = 40^\circ$, $\sphericalangle XKA = 63^\circ$, $\sphericalangle XKB = 140^\circ$. Určete,

- a) jak daleko od sebe jsou ty kopce;
- b) jak daleko od cesty je kopec A ;
- c) jak daleko od cesty je kopec B .

109. Železniční trať směřuje od západu k východu. A a B jsou dvě místa na trati vzdálená 300 m od sebe. Věž V leží od místa A ve směru 48° od severu k východu, od místa B ve směru 28° od severu k západu. Určete

- a) vzdálenost věže od místa A ;
- b) vzdálenost věže od místa B ;
- c) vzdálenost věže od trati.

110. Loď pluje k severovýchodu rychlostí 10 uzlů. [To znamená, že urazí za hodinu 10 námořních mil; jedna námořní míle je asi 1850 m.] Maják je v jedné chvíli přesně na sever od lodi a za čtvrt hodiny je ve směru 76° od jihu k západu. Určete nejkratší vzdálenost od lodi k majáku.

111. Na krajích přístavu jsou dva majáky A , B . A je západně od B ve vzdálenosti 500 m. Loď pluje k přístavu směrem $J\ 30^\circ\ Z$ (t. j. směrem, který je mezi jihem a západem a tvoří úhel 30° se směrem jižním). Pozorovatel na lodi vidí maják B ve směru $J\ 10^\circ\ Z$, maják A ve směru $J\ 40^\circ\ Z$. Jak daleko bude loď od A a od B , až se dostane mezi oba majáky?

112. Výškový úhel vrcholu věže se stanoviska vzdáleného 40 m od paty věže je 35° . Najděte výšku věže.

113. Dětský drak je na provaze dlouhém 230 m, který tvoří úhel 65° s vodorovným směrem. V jaké výši je drak?

114. Určete výškový úhel slunce v době, kdy svislá tyč dlouhá 4 m vrhá stín délky 5 m!

115. Pod jakým hloubkovým úhlem je vidět s vrcholu věže vysoké 42 m předmět ležící na zemi ve vzdálenosti 60 m od věže?

116. Žebřík dlouhý 5 m je opřen o svislou stěnu. Pata žebříku je 2,4 m od stěny.

- a) O jaký úhel je žebřík odchýlen od vodorovné polohy?
- b) Jak vysoko nad zemí je vrchol žebříku?

117. S vrcholu pahorku, který je 75 m nad hladinou vodní, je vidět přesně za sebou dvě loďky. Hloubkový úhel první je 64° , hloubkový úhel druhé je 48° . Určete vzdálenost loďek.

118. Výškový úhel vrcholu věže z místa vzdáleného 150 m od paty je 28° . Jaký je výškový úhel z místa vzdáleného 100 m?

119. Pozorovatel z balonu ve výšce 1 km vidí kostel pod hloubkovým úhlem 35° . Po dvaceti minutách stoupání jej vidí pod hloubkovým úhlem 55° . Určete rychlost stoupání v kilometrech za hodinu.

120. Muž na vrcholu kopce pozoruje rovnou cestu v údolí přímo od něho se vzdalující. Dva sousední kilometrové kameny vidí pod hloubkovými úhly 30° a 13° . Jak vysoko nad údolím je vrchol kopce?

121. Aeroplán letí k východu ve výši 800 m. Pozorovatel vidí plynojem směrem k jihu pod hloubkovým úhlem 29° ; o 15 vteřin později vidí týž plynojem směrem k jihozápadu. Určete rychlost aeroplánu v metrech za vteřinu.

122. Trám AB dlouhý 3 m je upevněn dvěma provazy AC , BD . Oba body C , D jsou stejně vysoko nad zemí. Trám je nakloněn o 10° od vodorovné polohy, bod B je níže než A , oba provazy jsou nakloněny o 20° od svislé polohy. Jest $\overline{AC} = 4,8$ dm. Určete $\overline{BD}$.

§ 5. Pokračování o trojúhelníku.

Je vám již známo, že u rovnoramenného trojúhelníka oba úhly při základně jsou si rovny. Týž poznatek se dá vysloviti také takto: **V trojúhelníku leží proti rovným stranám rovné úhly.**

Můžeme si tuto poučku velmi jednoduše odvoditi z jedné poučky o shodnosti trojúhelníků. Když v obr. 63 je $\overline{AC} = \overline{BC}$, máme dokázati, že $\alpha = \beta$. Avšak

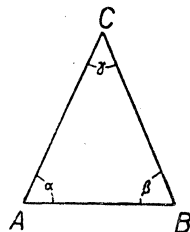
$$ABC \cong BAC \text{ (s s s),}$$

takže $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$, t. j. $\alpha = \beta$.

Také obrácená poučka je správná. Můžeme ji vysloviti takto: **Trojúhelník, který má dva úhly sobě rovné, je rovnoramenný.** Nebo také takto: **V trojúhelníku leží proti rovným úhlům rovné strany.** Důkaz je zase velice jednoduchý. Když v trojúhelníku ABC (obr. 63) je $\alpha = \beta$, jest

$$ABC \cong BAC \text{ (u s u),}$$

takže $\overline{BC} = \overline{AC}$.



Obr. 63.

V obr. 30 je ω vnější úhel trojúhelníka ABC ; protější úhly vnitřní jsou α a γ . Víme, že jest $\omega = \alpha + \gamma$. Z toho následuje, že ω je větší než α a také větší než γ . **Vnější úhel trojúhelníka je větší než kterýkoli z protějších úhlů vnitřních.** Tento poznatek je přes svoji jednoduchost užitečný, jak nyní uvidíme.

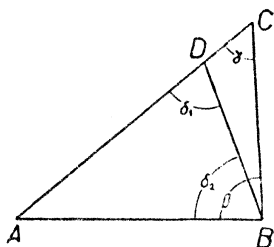
V trojúhelníku leží proti větší straně větší úhel. V trojúhelníku leží proti menší straně menší úhel. To jsou ovšem dvě znění téže poučky. Dokážeme si ji snadno. Nechť v trojúhelníku ABC je $\overline{AC} > \overline{BC}$; máme dokázati, že je $\beta > \gamma$. Protože strana AC je delší nežli strana BC , můžeme (viz obr. 64) určití bod D na straně AC tak, že $\overline{AD} = \overline{AB}$. V trojúhelníku ABD leží proti stranám AB a AD úhly δ_1 a δ_2 ; protože $\overline{AB} = \overline{AD}$, je $\delta_1 = \delta_2$. V trojúhelníku BCD je δ_1

úhel vnější a γ je jeden z protějších úhlů vnitřních; tedy je γ menší než δ_1 . Mimo to je patrné z obrazce, že β je větší než δ_2 . Celkem tedy je $\gamma < \delta_1$, $\beta > \delta_2$; $\delta_1 = \delta_2$; z toho následuje, že $\gamma < \beta$, a to jsme měli dokázat.

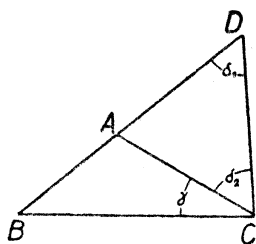
Poučka, kterou jsme si právě odvodili, dá se obrátit: **V trojúhelníku leží proti většímu úhlu větší strana. V trojúhelníku leží proti menšímu úhlu menší strana.** To je zase dvojí znění téže poučky. Dokážeme si ji takto: Dejme tomu, že v trojúhelníku ABC (viz obr. 43) je $a < \gamma$. Máme dokázat, že je $a < c$. Rozhodně nastane jeden z těchto tří případů:

$$[1] a = c; \quad [2] a > c; \quad [3] a < c.$$

Ale podle pouček nám už známých je: v případě [1] $a = \gamma$; v případě [2] $a > \gamma$; v případě [3] $a < \gamma$. Protože v našem trojúhelníku je $a > \gamma$, musí u něho nastati případ [2] a to jsme měli dokázat.



Obr. 64.



Obr. 65.

Následující poučka je vám již známa. **Součet dvou stran trojúhelníka je větší nežli strana třetí.** Můžeme si ji dokázat takto: Dokážeme třeba, že $b + c > a$. Prodlužme stranu AB za vrchol A a na prodloužení si určíme bod D tak, že $\overline{AD} = b$ (viz obr. 65). Protože $\overline{BA} = c$, $\overline{AD} = b$, je $\overline{BD} = b + c$; mimo to je $\overline{BC} = a$. Tedy máme dokázat, že $\overline{BD} > \overline{BC}$. V trojúhelníku ACD je $\overline{AC} = \overline{AD}$ (proč?) v témž trojúhelníku leží úhel δ_1 proti straně AC a úhel δ_2 proti straně AD . Proto je $\delta_1 = \delta_2$. V trojúhelníku BCD leží proti straně BD úhel $\gamma + \delta_2$ a proti straně BC úhel δ_1 . Protože $\delta_1 = \delta_2$, je $\gamma + \delta_2 > \delta_1$. Tedy v trojúhelníku BCD leží proti straně BD větší úhel nežli proti straně BC . Proto je $\overline{BD}$ větší než $\overline{BC}$ a to jsme právě chtěli dokázat.

Rozdíl dvou stran trojúhelníka je menší než strana třetí. Také tato poučka je vám již známa. Nepraví vlastně už nic nového. Dejme tomu, že je třeba $a > b$; máme dokázat, že $a - b < c$. Víme, že

$$a < b + c.$$

Proto, když od a ubereme b , zbude méně, nežli když od $b + c$ ubereme b ; tedy

$$a - b < (b + c) - b.$$

Protože $(b + c) - b$ je totéž jako c , jsme hotovi.

Chceme-li se přesvědčit, zda tři délky a , b , c mohou být délkami stran trojúhelníka, stačí se přesvědčit, že součet kterýchkoli dvou z nich je větší nežli třetí: neboť jsme právě nahlédli, že potom také rozdíl kterýchkoli dvou z nich bude menší než třetí a víme, že to už potom stačí. Dokonce stačí se přesvědčit, že největší z délek a , b , c je menší než součet ostatních dvou; neboť tím spíše bude kterákoli jiná menší než součet zbývajících dvou.

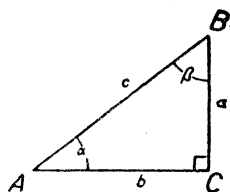
U pravoúhlého trojúhelníka základní označení je takové, jaké vidíte v obr. 66; a , b jsou odvěsny, c je přepona, C je vrchol pravého úhlu.

Nejdelší strana pravoúhlého trojúhelníka je přepona. Neboť přepona leží proti pravému úhlu a odvěsna proti ostrému úhlu, který je menší.

Nejdelší strana tupoúhlého trojúhelníka leží proti tupému úhlu. Neboť ostatní strany leží proti ostrým úhlům, které jsou menší.

Nejkratší vzdálenost od bodu A k přímce c je vzdálenost $\overline{AP}$, kde P znamená patu kolmice spuštěné s bodu A na přímku c . Neboť je-li X kterýkoli jiný bod přímky c , pak APX je pravoúhlý trojúhelník, AP je odvěsna, AX je přepona, tedy $\overline{AX} > \overline{AP}$.

Můžeme si snadno dokázati ještě více! Bod P rozdělí přímku c na dvě polopřímky. Pohybuje-li se bod po jedné z těchto polopřímek, počínají polohou P , pak jeho vzdálenost od bodu A stále vzrůstá. Neboť v trojúhelníku AXX_1 (viz obr. 67) leží strana AX_1 proti tupému úhlu, takže je delší nežli strana AX .



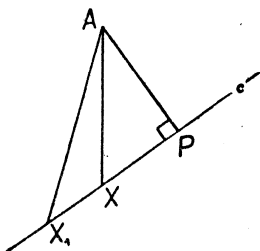
Obr. 66.

V paragrafu 3 jsme si zjistili, že poučka s s u není vždycky správná (viz obr. 45 až 47). Správná je tato poučka:

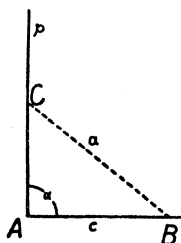
Trojúhelník je určen, známe-li dvě strany a úhel proti větší z nich.

Druhé znění: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich.

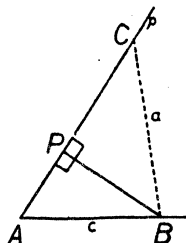
Dejme tomu, že jsou dány délky a , c , při čemž je a větší než c , a mimo to je dán úhel α . Setrojíme si úhel α s vrcholem A a na jedno rameno nanese me délku $\overline{AB} = c$; druhé rameno si označí me p . [Stejně to bylo v obrazcích 45 až 47.] Běží o to, že na polopřímce p leží pouze jediný bod C takový, že vzdálenost $\overline{BC}$ je rovna dané délce a . Rozeznávej me tři případy podle toho, zda úhel α je pravý, ostrý či tupý.



Obr. 67.



Obr. 68.



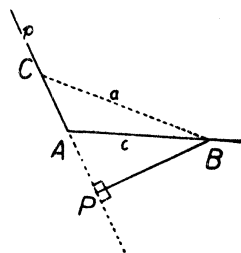
Obr. 69.

Případ první: $\alpha = R$ (viz obr. 68). Zde A je pata kolmice spuštěné s bodu B na přímku, jejíž částí je polopřímka p . Pohybuje-li se bod X po polopřímce p , počínajíc polohou A , víme, že vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá. Počíná nejmenší hodnotou $\overline{AB} = c$; protože $a > c$, nabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty a pro jedinou polohu C bodu X .

Případ druhý: $\alpha < R$ (viz obr. 69). Je-li P pata kolmice spuštěné s bodu B na přímku, jejíž částí je polopřímka p , tu v našem případě padne bod P do polopřímky p . Vzdálenost $\overline{AB} = c$ je větší nežli $\overline{BP}$; protože $a > c$, je tím spíše a větší nežli BP . Z bodu P vychází polopřímka p_0 (v obrazi nevyznačená), která je částí polopřímky p . Pohybuje-li se bod X po polopřímce p_0 , počínajíc polohou P , víme, že vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá. Počíná nejmenší hodnotou $\overline{BP}$; protože $a < \overline{BP}$, nabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty a pro jedinou polohu C bodu X na polopřímce p_0 . Ovšem polopřímka p_0 je pouze částí polo-

přímky p , která se skládá jednak z polopřímky p_0 , jednak ještě z úsečky $\overline{PA}$. Ale pohybuje-li se bod X po úsečce $\overline{PA}$, počínajíc polohou P , tu vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá a končí největší hodnotou $\overline{BA} = c$; protože i tato největší hodnota je menší nežli a , nenabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty a pro žádnou polohu bodu X na úsečce PA .

Případ třetí: $a > R$ (viz obr. 70). Je-li zase P pata kolmice spuštěné s bodu B na přímku, jejíž částí je polopřímka p , tu v našem případě padne bod P mimo polopřímku p . Polopřímka p je nyní částí polopřímky PA . Pohybuje-li se bod X po polopřímce PA , počínajíc polohou P , víme, že vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá. Když bod X přijde do polohy A , nabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty c ; potom přejde bod X na polopřímku p a vzdálenost $\overline{BX}$ vzrůstá dále; dané hodnoty $a > c$ nabude vzdálenost $\overline{BX}$ pro jedinou polohu C bodu X .



Obr. 70.

Cvičení k § 5.

123. Rovnoramenný trojúhelník má při základně úhel

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $25^{\circ} 48' 56''$. | b) $36^{\circ} 54' 12''$. | c) $54^{\circ} 27' 46''$. |
| d) $58^{\circ} 58' 58''$. | e) $64^{\circ} 57''$. | f) $73^{\circ} 33' 38''$. |

Vypočtete úhel proti základně.

124. Rovnoramenný trojúhelník má proti základně úhel

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $12^{\circ} 15' 42''$. | b) $23^{\circ} 45' 6''$. | c) $34^{\circ} 56' 54''$. |
| d) $82^{\circ} 16' 36''$. | e) $112^{\circ} 52' 28''$. | f) $148^{\circ} 36' 48''$. |

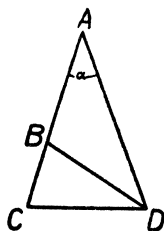
Vypočtete úhel při základně.

125. Jeden úhel rovnoramenného trojúhelníka měří 74° . Vypočtete ostatní úhly. (Dvoje řešení!)

126. Úhel při základně rovnoramenného trojúhelníka je dvojnásobek úhlu proti základně. Vypočtete všechny úhly.

127. Úhel proti základně rovnoramenného trojúhelníka je trojnásobek úhlu při základně. Vypočtete všechny úhly.

128. V obr. 71 je $\overline{AC} = \overline{AD}$, $\overline{BD} = \overline{CD}$, $\alpha = 34^{\circ}$. Vypočtete $\angle ADB$.



Obr. 71.

129. V obr. 72 je $\varphi = 42^{\circ}$, $\psi = 66^{\circ}$. S je střed kružnice. Vypočtete úhly trojúhelníka HKL .

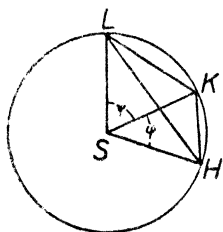
130. V obr. 73 je $\overline{XZ} = \overline{VZ}$, $\beta = 52^\circ$, $\gamma = 84^\circ$, $\epsilon = 32^\circ$, $\omega = 96^\circ$. Dokažte:

a) $XV \parallel YZ$. (Bod U , úsečka UZ a úhel γ jsou v této části zbytečné.)

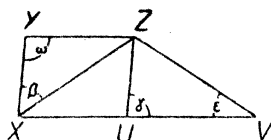
b) $XY \parallel UZ$.

131. V obr. 74 je $\overline{PQ} = \overline{PN}$, $\delta_1 = 32^\circ$, $\delta_2 = 80^\circ$. Najděte $\sphericalangle QPR$.

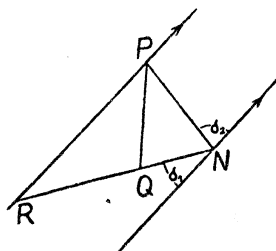
132. $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Přímky AD a BE se protnou v bodě F . Určete úhly trojúhelníka ABF .



Obr. 72.



Obr. 73.



Obr. 74.

133. V obr. 75 je $\overline{EF} = \overline{EH}$, $\varphi = 37^\circ$, $\psi = 148^\circ$. Dokažte, že $\overline{FG} = \overline{FH}$.

134. V obr. 76 je $\alpha = 67^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 104^\circ$. Dokažte, že $\overline{RP} = \overline{RS}$.

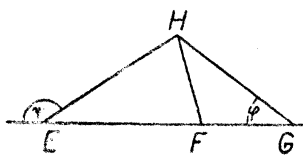
135. Uvnitř čtverce $ABCD$ je rovnostranný trojúhelník ABK . Určete $\sphericalangle CKB$.

136. V obr. 77 je $a_1 = a_2$, $\beta_1 = \beta_2$. Dokažte, že $\overline{ZX} = \overline{ZV}$.

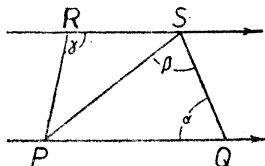
137. Na ose úhlu $\sphericalangle EFG$ leží bod H . Jest $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$. Dokažte, že $\overline{EF} = \overline{EH}$.

138. V trojúhelníku ABC je $b = c$, $\beta = 62^\circ$. Co je větší, a nebo b ?

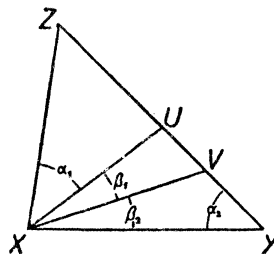
139. V trojúhelníku ABC měří vnější úhel při vrcholu A 126° , při vrcholu B 118° . Osa úhlu β a osa úhlu γ se protnou v bodě S . Co je větší, $\overline{BS}$ nebo $\overline{CS}$?



Obr. 75.



Obr. 76.



Obr. 77.

140. V trojúhelníku ABC je $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 56^\circ$. Osa úhlu α protne stranu BC v bodě X . Která ze tří délek $\overline{AX}$, $\overline{BX}$, $\overline{CX}$ je největší? Která je nejmenší?

141. Bod U leží uvnitř trojúhelníka ABC . Dokažte, že

$$\sphericalangle AUB < \sphericalangle ACB.$$

[Přímka AU protne stranu BC v bodě T . Porovnejte oba úhly s úhlem $\sphericalangle ATB$.]

142. Bod U leží uvnitř trojúhelníka ABC . Dokažte, že

$$\overline{AU} + \overline{UB} < \overline{AC} + \overline{CB}.$$

[Přímka AU protne stranu BC v bodě T . Dokažte napřed, že $\overline{AT} + \overline{TB} < \overline{AC} + \overline{CB}$ a potom, že $\overline{AU} + \overline{UB} < \overline{AT} + \overline{TB}$.]

143. Rozhodněte, existuje-li trojúhelník ABC , ve kterém by platilo toto:

- a) $a = 37,4$ cm, $b = 25,3$ cm, obvod $= 123$ cm;
- b) $a = 49,8$ cm, $b = 12,5$ cm, obvod $= 1$ m;
- c) $a = 37,3$ cm, $b = 24,9$ cm, obvod $= 125$ cm;
- d) $a = 50,1$ cm, $b = 13,6$ cm, obvod $= 1$ m.

144. Zapište si všechny poučky, kterými jsme se zabývali v tomto paragrafu.

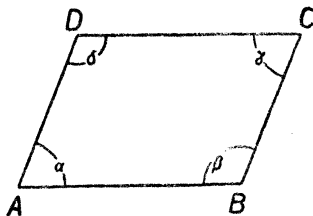
§ 6. Rovnoběžník.

Čtýrúhelník $ABCD$ se nazývá rovnoběžník, když je $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

To je nám již známo z paragrafu 2. Také již víme, že u rovnoběžníka v obr. 78 je $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ a že úhly α , β (nebo α , δ nebo β , γ nebo γ , δ) jsou výplňkové.

Obráceně, když o čtýrúhelníku $ABCD$ v obr. 78 víme, že $\alpha = \gamma$ a že $\beta = \delta$, můžeme souditi, že to je rovnoběžník: je-li u čtýrúhelníka každý úhel rovný úhlu protějšnému, je to rovnoběžník. Neboť víme, že $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$, neboli

$$(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) = 4R.$$



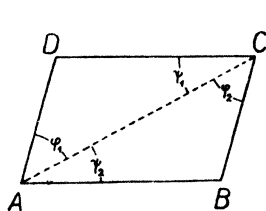
Obr. 78.

V našem případě je $\alpha = \gamma$, tedy α je polovina z $\alpha + \gamma$; dále je $\beta = \delta$, tedy β je polovina z $\beta + \delta$; tedy $\alpha + \beta$ je polovina ze $4R$, t. j. α a β jsou výplňkové úhly. Protože $\beta = \delta$, také α a δ jsou výplňkové úhly. Nyní α a β jsou přilehlé úhly (příčka AB , proťaté přímky AD , BC); protože $\alpha + \beta = 2R$, je $AD \parallel BC$. Také α a δ jsou přilehlé úhly (příčka AD , proťaté přímky AB , CD); protože $\alpha + \delta = 2R$, je $AB \parallel CD$. Tedy $ABCD$ je skutečně rovnoběžník.

Nyní si všimneme stran rovnoběžníka. Dvě protější strany rovnoběžníka jsou si rovny. V obr. 79 je $ABCD$ rovnoběžník. Chceme dokázat, že

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \overline{AD} = \overline{BC}.$$

Provedeme pomocnou konstrukci jako v obrazci. Vzniknou nám trojúhelníky ACD a ABC , které mají společnou stranu AC ; mimo to je $\varphi_1 = \varphi_2$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami) a $\psi_1 = \psi_2$ (z téhož důvodu).



Obr. 79.

Proto je

$$ACD \cong CAB \text{ (usu)}$$

a z toho vychází $\overline{AD} = \overline{CB}$, $\overline{CD} = \overline{AB}$, což jsme měli dokázat.

Proveďte též důkaz znovu s tou změnou, že za pomocnou čáru zvolíte úhlopříčku BD !

Jsou-li u čtyřúhelníka $ABCD$ protější strany AB a CD rovnoběžné a sobě rovné, je $ABCD$ rovnoběžník. Nyní víme o obr. 79, že

$$AB \parallel CD, \quad \overline{AB} = \overline{CD}$$

a máme dokázat, že je $AD \parallel BC$. Zase provedeme stejnou pomocnou konstrukci a opět si všimneme trojúhelníků ACD a ABC se společnou stranou AC . Nyní víme, že $\overline{CD} = \overline{AB}$; mimo to je $\psi_1 = \psi_2$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Proto je

$$ACD \cong CAB \text{ (sus)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$ neboli $\varphi_1 = \varphi_2$. Avšak φ_1 a φ_2 jsou střídavé úhly (příčka AC , proťaté přímky AD, BC); protože $\varphi_1 = \varphi_2$, je $AD \parallel BC$ a to jsme měli dokázat.

Zase proveďte důkaz znovu s tou změnou, že za pomocnou čáru zvolíte úhlopříčku BD !

Je-li u čtyřúhelníka každá strana rovná straně protější, je to rovnoběžník. Nyní víme o obr. 79, že

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AD} = \overline{BC};$$

máme dokázat, že $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Provedeme-li obvyklou pomocnou konstrukci, vyjde ihned

$$ACD \cong CAB \text{ (sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAB$ neboli $\varphi_1 = \varphi_2$, $\psi_1 = \psi_2$. Avšak φ_1 a φ_2 jsou střídavé úhly (příčka AC , proťaté přímky AD, BC); protože $\varphi_1 = \varphi_2$, je $AD \parallel BC$. Také ψ_1 a ψ_2 jsou střídavé úhly (příčka AC , proťaté přímky AB, CD); protože $\psi_1 = \psi_2$, je $AB \parallel CD$.

Opakujte důkaz s obvyklou změnou!

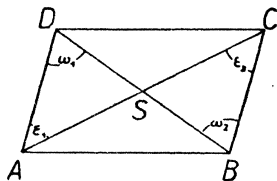
Nyní si všimneme u h l o p ř í č e k rovnoběžníka. Úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí. V obr. 80 je S průsečík úhlopříček rovnoběžníka $ABCD$. Chceme dokázat, že

$$\overline{AS} = \overline{CS}, \quad \overline{BS} = \overline{DS}.$$

Všimneme si trojúhelníků SAD , SBC . Víme, že $\overline{AD} = \overline{BC}$ (protější strany rovnoběžníka); mimo to je $\epsilon_1 = \epsilon_2$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami) a $\omega_1 = \omega_2$ (z téhož důvodu). Proto je

$$SAD \cong SCB \quad (\text{usu})$$

a z toho vychází $\overline{SA} = \overline{SC}$, $\overline{SD} = \overline{SB}$, což jsme měli dokázat.



Obr. 80.

Proveďte důkaz znovu s tou změnou, že místo trojúhelníků SAD , SCB si všimnete trojúhelníků SAB , SCD !

Jestliže se u čtyřúhelníka úhlopříčky navzájem půlí, je to rovnoběžník. Nyní víme o obr. 80, že

$$\overline{AS} = \overline{CS}, \quad \overline{BS} = \overline{DS}.$$

Zase si všimneme trojúhelníků SAD , SBC . Jest $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC$ (vrcholové úhly). Proto je

$$SAD \cong SCB \quad (\text{sus})$$

a z toho soudíme, že $\overline{AD} = \overline{CB}$. Dále si všimněme trojúhelníků SAB , SCD . Jest $\sphericalangle ASD = \sphericalangle CSD$. Proto je

$$SAB \cong SCD \quad (\text{sus})$$

a z toho soudíme, že $\overline{AB} = \overline{CD}$. Nyní už víme o čtyřúhelníku $ABCD$, že se každá strana rovná straně protější. Proto $ABCD$ je rovnoběžník.

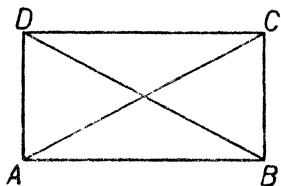
Obdélník je takový čtyřúhelník, jehož všechny úhly jsou pravé. Obdélník je rovnoběžník, neboť každý jeho úhel se rovná (každému jinému, tedy zejména) jeho úhlu protějším, a to, jak víme, platí jen pro rovnoběžníky.

O obdélníku platí zajisté všecko, co platí o rovnoběžnících. Zejména dvě protější strany obdélníka jsou stejně dlouhé a úhlopříčky obdélníka se navzájem půlí.

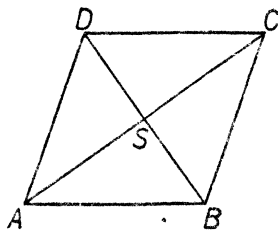
Obě úhlopříčky obdélníka jsou si rovny. V obr. 81 je $ACBD$ obdélník; chceme dokázat, že $\overline{AC} = \overline{BD}$. Všimneme si trojúhelníků ABC , BAD . Mají společnou stranu AB ; dále je $\overline{BC} = \overline{AD}$ a mimo to $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$. Tedy

$$ABC \cong BAD \quad (\text{sus})$$

a z toho následuje $\overline{AC} = \overline{BD}$.



Obr. 81.



Obr. 82.

Opakujte důkaz z tou změnou, že užijete trojúhelníků se společnou stranou AD !

Rovnoběžník, jehož obě úhlopříčky jsou si rovny, je obdélník. Nyní víme o obr. 81, že $ABCD$ je rovnoběžník a že $\overline{AC} = \overline{BD}$. Máme dokázat, že na př. úhel $\sphericalangle BAD$ je pravý. Protože $ABCD$ je rovnoběžník, musí být $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$. Jelikož je také $\overline{AC} = \overline{BD}$, je

$$ABC \cong BAD \quad (\text{sss})$$

a z toho následuje $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$. Ale ty dva úhly jsou výplňkové (sousední úhly rovnoběžníka); protože jsou si rovné, musí být pravé.

Kosočtverec je takový čtyřúhelník, jehož všechny strany jsou si rovny. Kosočtverec je rovnoběžník, neboť každá jeho strana se rovná (každé jiné, tedy zejména) protější straně, a to, jak víme, platí jen pro rovnoběžníky. Jako u každého rovnoběžníka, úhlopříčky kosočtverce se navzájem půlí.

Úhlopříčky kosočtverce stojí na sobě kolmo. V obr. 82 je $ABCD$ kosočtverec. Chceme dokázat, že

$$BD \perp AC.$$

Trojúhelníky ABS , ADS mají společnou stranu AS ; dále je $\overline{AB} = \overline{AD}$ (strany kosočtverce) a mimo to $\overline{BS} = \overline{SD}$ (úhlopříčky se půlí). Proto je

$$ABS \cong ADS \text{ (sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASD$. Ale ty dva úhly jsou výplňkové (neboť jsou vedlejší); protože jsou si rovné, musí býti pravé.

Každý úhel kosočtverce je půlen úhlopříčkou vycházející z toho vrcholu. Jako při předešlém důkaze je

$$ABS \cong ADS$$

a proto $\sphericalangle BAS = \sphericalangle DAS$, t. j. úhlopříčka AC půlí úhel při vrcholu A .

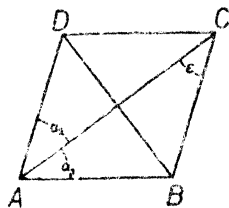
Rovnoběžník, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo, je kosočtverec. Nyní víme o obr. 82, že $ABCD$ je rovnoběžník a že úhly při vrcholu S jsou pravé. Chceme dokázat, že všechny délky $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ jsou stejné. Jako u každého rovnoběžníka víme i zde, že $\overline{AB} = \overline{CD}$ a že $\overline{BC} = \overline{AD}$. Proto potřebujeme pouze ukázat, že $\overline{AB} = \overline{AD}$. Všimneme si zase trojúhelníků ABS , ADS se společnou stranou AS . Jest $\overline{BS} = \overline{DS}$ (úhlopříčky se půlí) a mimo to $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASD$. Proto je

$$ABS \cong ADS \text{ (sus)}$$

a z toho následuje $\overline{AB} = \overline{AD}$, což jsme měli dokázat.

Je-li úhel při vrcholu A rovnoběžníka $ABCD$ půlen úhlopříčkou AC , je $ABCD$ kosočtverec. O obr. 83 víme, že $ABCD$ je rovnoběžník a že $\alpha_1 = \alpha_2$. Máme dokázat, že všechny strany jsou si rovny. Jako u každého rovnoběžníka víme i zde, že $\overline{AB} = \overline{CD}$ a že $\overline{AD} = \overline{BC}$. Proto potřebujeme pouze dokázat, že $\overline{AB} = \overline{BC}$. Jest $\alpha_2 = \epsilon$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami); protože $\alpha_1 = \alpha_2$, jest $\alpha_1 = \epsilon$.

Avšak α_1 a ϵ jsou úhly trojúhelníka ABC proti stranám BC a AB . Protože ty úhly jsou si rovny, jsou si rovny také protější strany, t. j. $\overline{AB} = \overline{BC}$.



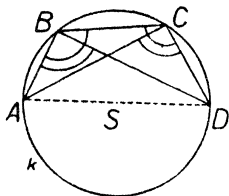
Obr. 83.

Čtverec je takový čtyřúhelník, který má i všechny strany stejné i všechny úhly pravé neboli čtverec je současně obdélníkem i kosočtvercem. Všecky vlastnosti obdélníka a všechny vlastnosti kosočtverce musí platit pro čtverec. Vyslovte pro čtverec ty vlastnosti, které zde byly dokázány pro obdélník nebo pro kosočtverec!

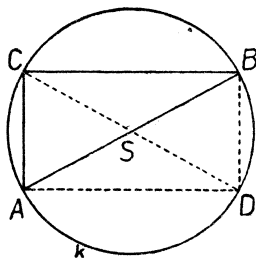
Leží-li body A, B, C na kružnici k , pak úhel $\sphericalangle ABC$ se nazývá obvodový úhel, určitěji: obvodový úhel nad tětivou AC . Viz obr. 84, ve kterém je vyznačen m. j. obvodový úhel $\sphericalangle ABC$ nad tětivou AC a obvodový úhel $\sphericalangle BCD$ nad tětivou BD . Důležitý případ nastane, když tětiva prochází středem kružnice neboli je průměrem kružnice. Pak máme obvodový úhel nad průměrem; v obr. 84 jsou vyznačeny dva takové úhly: $\sphericalangle ABD$ a $\sphericalangle ACD$.

Obvodový úhel nad průměrem je pravý. To je proslulá Thaletova věta. (Řecký filosof Thales milétský žil v 6. století př. Kr.) V obr. 85 je AB průměr kružnice k a bod C leží na kružnici k ; máme dokázat, že

$$\sphericalangle ACB = R.$$



Obr. 84.



Obr. 85.

Ved'me průměr CSD kružnice k a všimněme si čtyřúhelníka $ACBD$. Úsečky AB, CD jsou úhlopříčky čtyřúhelníka. Jsou to průměry kružnice k a protínají se ve středu S kružnice k . Z toho vychází především, že obě úhlopříčky čtyřúhelníka $ACBD$ se navzájem půlí, takže $ACBD$ je rovnoběžník. Dále však vychází, že obě úhlopříčky rovnoběžníka $ACBD$ jsou si rovny. Proto $ACBD$ je obdélník a $\sphericalangle ACB$ je pravý, jak jsme měli dokázat.

Mysleme si nyní místo úhlu $\sphericalangle ABC$ úhel $\sphericalangle ACX$, kde X je nějaký jiný bod kružnice k . Protože přímka CB má s kružnicí společné pouze body C a B a protože bod X naší kružnice není ani v poloze C ani v poloze B , nemůže přímka CX se krýt s přímkou CB . A protože CB stojí kolmo na CA (podle Thaletovy věty), nemůže CX státi kolmo na CA . Obvodový úhel nad tětivou, která není průměrem, není úhel pravý.

Cvičení k § 6.

145. V obr. 86 je $EFGH$ rovnoběžník. H je střed kružnice m . Dokažte, že

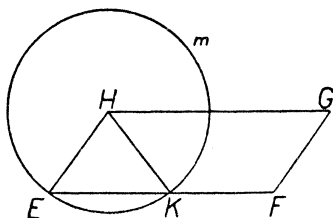
$$\sphericalangle GHK = \sphericalangle FGH.$$

[U každého z obou úhlů si najdete v obrazci jiný úhel, o kterém víte, že mu je rovný.]

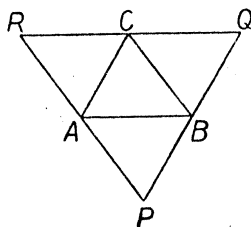
146. Obr. 87 vznikl tak, že každým vrcholem trojúhelníka ABC byla vedena rovnoběžka s protější stranou. Dokažte, že body A, B, C jsou středy stran trojúhelníka PQR .

147. STX je přímka. $STUV$ je rovnoběžník. Osa úhlu $\sphericalangle XTU$ protne přímku VS v bodě Y a přímku VU v bodě Z . Dokažte, že

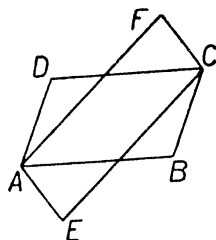
$$\overline{VY} = \overline{VZ} = \overline{ST} + \overline{TU}.$$



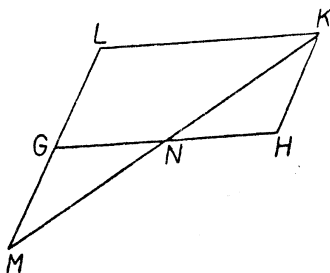
Obr. 86.



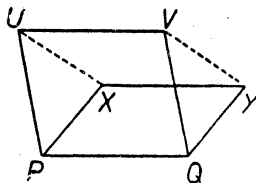
Obr. 87.



Obr. 88.



Obr. 89.



Obr. 90.

148. V obr. 88 jsou $ABCD$ a $AECF$ rovnoběžníky. Dokažte, že všechny tři přímky AC, BD, EF se protnou v jediném bodě. Potom dokažte, že $BE \parallel FD$.

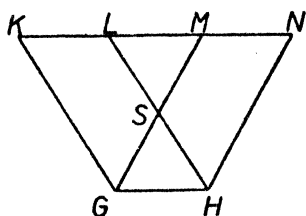
149. V obr. 89 je $GHKL$ rovnoběžník a $\overline{GN} = \overline{NH}$. Dokažte, že $\overline{LG} = \overline{GM}$.

150. $ABCD$ je rovnoběžník. S je střed strany AB , T je střed protější strany. Dokažte, že $BSDT$ je rovnoběžník.

151. V obr. 90 jsou $PQYX$, $PQVU$ dva rovnoběžníky. Dokažte, že také $XYVU$ je rovnoběžník. Je to pravda také tehdy, když rovnoběžníky $PQYX$, $PQVU$ leží každý v jiné rovině?

152. $ABCD$ je rovnoběžník. S je střed strany AB , T střed strany CD , E střed strany BC , F střed strany DA . Sestrojte přímky AE , BT , CF , DS a dokažte, že těmi přímkami je určen nový rovnoběžník.

153. V obr. 91 jsou $GHLK$ a $GHNH$ dva rovnoběžníky. S je střed úsečky HL . Dokažte, že body L a M dělí úsečku KN na tři stejné díly.



Obr. 91.

154. Zvolte si libovolný čtyřúhelník $ABCD$. Určete body E a F tak, aby $ADCE$, $BADF$ byly rovnoběžníky. Dokažte, že přímka EF prochází středem úsečky BC .

155. Veďte bodem O tři přímky. Na první zvolte bod H , na druhé bod K , na třetí bod L . Určete body X , Y a Z tak, aby $OKXL$, $OLYH$, $OHZK$ byly rovnoběžníky. Dokažte, že úsečky HX , KY , LZ se navzájem půlí.

156. Zvolte si trojúhelník ABC . Zvolte si bod D na straně AB a bod E na straně AC .

Dokažte, že úsečky CD a BE se nemohou navzájem půlit.

157. Víme-li o jednom úhlu rovnoběžníka, že je pravý, je to jistě obdélník. (Dokažte!)

158. Má-li čtyřúhelník všechny úhly stejné, je to obdélník. (Dokažte!)

159. $ABCD$ je rovnoběžník. S je střed strany AB , T střed strany CD , E střed strany BC , F střed strany DA . Dokažte:

- $ESFT$ je rovnoběžník.
- Když $ABCD$ je obdélník, $ESFT$ je kosočtverec.
- Když $ABCD$ je kosočtverec, $ESFT$ je obdélník.
- Když $ABCD$ je čtverec, $ESFT$ je čtverec.
- Když $ESFT$ je kosočtverec, $ABCD$ je obdélník.
- Když $ESFT$ je obdélník, $ABCD$ je kosočtverec.
- Když $ESFT$ je čtverec, $ABCD$ je čtverec.

160. Které nové geometrické výrazy se vyskytly v tomto paragrafu? Zapište si je!

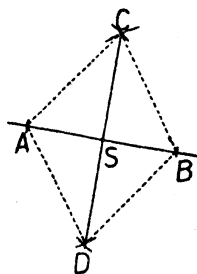
161. Zapište si poučky, které jsme dokázali v tomto paragrafu.

§ 7. Konstrukce.

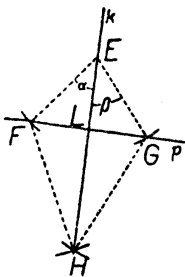
Víte, že říkáme *euklidovská konstrukce* takové konstrukci, při které se užívá pouze dvou základních výkonů: [1] narýsovatí přímku, která spojuje dva dané body; [2] narýsovatí kružnici, která má daný střed a daný poloměr.

Řada základních euklidovských konstrukcí je vám známa. Správnost každé z nich si můžeme potvrdit pomocí pouček, které jsme letos probírali.

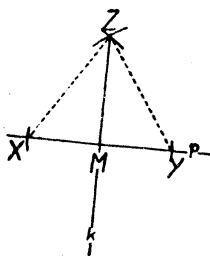
V obr. 92 je znázorněno, jak se euklidovsky sestrojí střed S úsečky AB a osa CD úsečky AB . Vložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili o její správnosti, máme dokázat, že $\overline{AS} = \overline{BS}$ a že $CD \perp AB$. Podle konstrukce je $\overline{AC} = \overline{BC}$ a $\overline{AD} = \overline{BD}$, takže $ACBD$ je kosoúhelník. Víme, že úhlopříčky kosoúhelníka (jako každého jiného rovnoběžníka) se navzájem půlí: proto je $\overline{AS} = \overline{BS}$. Víme, že úhlopříčky kosoúhelníka stojí na sobě kolmo: proto je $CD \perp AB$.



Obr. 92.



Obr. 93.



Obr. 94.

V obr. 93 je znázorněno, jak se euklidovsky spustí kolmice k s bodu E na přímku p . Vložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili, že opravdu je $EH \perp p$, že tedy $\sphericalangle ELF$ je pravý úhel, všimneme si napřed trojúhelníků EFH a EGH . Podle konstrukce je

$$EFH \cong EGH \quad (\text{sss})$$

a z toho plyne $\sphericalangle FEH = \sphericalangle GEH$ neboli $\alpha = \beta$. Teď si všimneme trojúhelníků FEL a GEL . Jest $\overline{FE} = \overline{GE}$, $\alpha = \beta$ a strana EL je oběma trojúhelníkům společná. Proto je

$$FEL \cong GEL \quad (\text{sas})$$

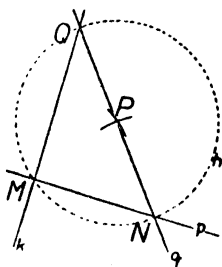
a z toho následuje $\sphericalangle ELF = \sphericalangle ELG$. Tedy úhel $\sphericalangle ELF$ se rovná svému vedlejšímu úhlu, takže $\sphericalangle ELF = R$.

V obr. 94 je znázorněno, jak se euklidovsky vztyčí kolmice k k přímce p v jejím bodě M . Vložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili, že opravdu $\sphericalangle XMZ = R$, všimneme si trojúhelníků XMZ a YMZ . Podle konstrukce je

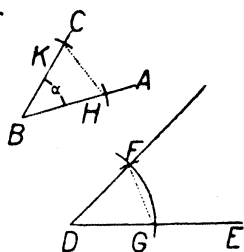
$$XMZ \cong YMZ \quad (\text{sss})$$

a z toho následuje $\sphericalangle XMZ = \sphericalangle YMZ$. Tedy úhel $\sphericalangle XMZ$ se rovná svému vedlejšímu úhlu, takže $\sphericalangle XMZ = R$.

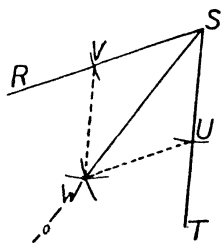
V obr. 95 je znázorněn jiný zajímavý způsob euklidovské konstrukce, vztyčiti kolmice k přímce p v jejím bodě M . Popis: Na přímce p si zvolíme ještě jeden bod N . Kružítkem si stanovíme bod P tak, aby bylo $\overline{MP} = \overline{NP}$, dále sestrojíme spojnici $q = NP$ a na ní si stanovíme kružítkem bod Q tak, aby bylo $\overline{QP} = \overline{NP}$. Spojnice QM je žádaná kolmice k . Odůvodnění: Jest $\overline{MP} = \overline{NP} = \overline{QP}$, takže body M , N a Q leží na kružnici h se středem P . Tedy $\sphericalangle QMN$ je



Obr. 95.



Obr. 96.



Obr. 97.

obvodový úhel a protože QN je průměr kružnice h , je $\sphericalangle QMN = R$ podle Thaletovy věty.

Také úloha, spustit na přímce p kolmici s bodu Q , dá se euklidovskými řešit pomocí Thaletovy věty, ale je to konstrukce složitější než ta, která je znázorněna v obr. 93. Bodem Q si vedeme libovolnou přímku q (viz zase obr. 95). Je-li N průsečík přímek p a q , najdeme si střed P úsečky QN , což umíme provést euklidovskými. Potom si opíšeme se středem P kružnici h tak, aby procházela bodem Q . Kružnice h má s přímkou p vedle bodu N společný ještě jeden bod M . Přímka QM je žádaná kolmice k . Proč?

V obr. 96 je znázorněno, jak se euklidovskými sestrojí úhel, který se rovná danému úhlu α a má jedno rameno v dané polopřímce DE (tedy vrchol v bodě D). Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili, že je správná, máme dokázati, že $\sphericalangle GDF = \alpha$. Podle konstrukce je

$$BHK \cong DGF \quad (\text{sss}),$$

takže $\alpha = \sphericalangle HBK = \sphericalangle GDF$.

V obr. 97 je znázorněno, jak se euklidovskými najde osa o úhlu $\sphericalangle RST$. Vyložte ústně průběh konstrukce! Podle ní je $\overline{SU} = \overline{SV} =$

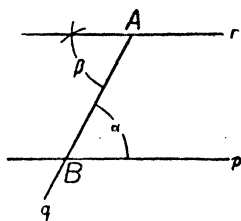
$= \overline{UW} = \overline{VW}$, takže $SUWV$ je kosočtverec. Víme, že úhlopříčka SW půlí úhel $\sphericalangle VSU = \sphericalangle RST$. Proto $o = SW$ je osa úhlu $\sphericalangle RST$.

Euklidovská konstrukce úhlu 60° je založena na poučce, že každý úhel rovnostranného trojúhelníka se rovná 60° . Tato poučka nebyla v této části učebnice ještě výslovně uvedena, ale znáte poučku, že proti stejným stranám leží stejné úhly, a poučku o součtu úhlů. Z těchto dvou plyne snadno.

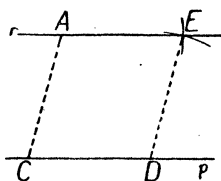
Protože umíme euklidovsky sestrojít úhly 60° a 90° a protože umíme euklidovsky rozpůlit daný úhel, dovedeme euklidovsky sestrojít rozmanité úhly (viz cvič. 162).

Když velikost úhlu je vyjádřena celým počtem stupňů, dá se úhel euklidovsky sestrojít, kdykoli počet stupňů je násobek tří (ale nebudeme se to učit); dá se také dokázat, že když počet stupňů není násobek tří, je euklidovská konstrukce nemožná. Na př. úhel 10° nelze euklidovsky sestrojít.

V obrazech 98 a 99 jsou znázorněny euklidovské konstrukce úlohy, vésti bodem A rovnoběžku r k přímce p .



Obr. 98.

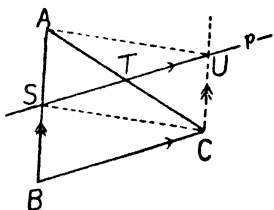


Obr. 99.

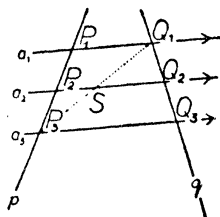
Popis konstrukce z obr. 98: Bodem A si vedeme libovolnou přímku q a označíme B její průsečík s přímkou p . Přímky p a q určí úhel α . Sestrojíme si euklidovsky úhel β rovný úhlu α s jedním ramenem v polopřímce AB , ale na druhé straně od přímky q než je úhel α . Druhé rameno úhlu β je v žádané rovnoběžce r . **O d ů v o d n ě n í :** Úhly α a β jsou střídavé (příčka q , protaťte přímky p a r); protože $\alpha = \beta$, jest $r \parallel p$.

Popis konstrukce z obr. 99: Na přímce p si zvolíme dva body C a D . Kružítkem si opatříme takový bod E , aby bylo $\overline{AE} = \overline{CD}$, $\overline{DE} = \overline{AC}$. Přímka AE je žádaná rovnoběžka r . **O d ů v o d n ě n í :** Protože $\overline{AE} = \overline{CD}$, $\overline{DE} = \overline{AC}$, je $ACDE$ rovnoběžník, takže $AE \parallel CD$.

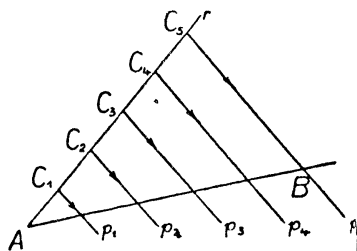
V tomto paragrafu se naučíme, jak se může daná úsečka euklidovsky rozdělit na předepsaný počet stejných dílů. Ale napřed si uvedeme dvě poučky. Jestliže přímka p rovnoběžná se stranou BC trojúhelníka ABC prochází středem strany AB , pak prochází také středem strany AC . V obr. 100 je tedy $p \parallel BC$ a S je střed strany AB . Máme dokázati, že T je střed strany AC . Za tím účelem si vedeme bodem C rovnoběžku se stranou AB a označíme si U její průsečík s přímkou p . Protože $SU \parallel BC$, $SB \parallel UC$, je $BSUC$ rovnoběžník a z toho následuje $\overline{CU} = \overline{BS}$. Protože také $\overline{SA} = \overline{BS}$, je $\overline{CU} = \overline{SA}$. Tedy $CU \parallel SA$, $\overline{CU} = \overline{SA}$ a proto $CUAS$ je rovnoběžník.



Obr. 100.



Obr. 101.



Obr. 102.

Úhlopříčky AC a SU rovnoběžníka $CUAS$ se protnou v bodě T . Protože úhlopříčky rovnoběžníka se půlí, je T střed úsečky AC , což jsme měli dokázati.

Nyní druhou poučku (viz obr. 101)! Nechť rovnoběžky a_1, a_2, a_3 protnou přímku p v bodech P_1, P_2, P_3 , a přímku q v bodech Q_1, Q_2, Q_3 ; jestliže $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$, pak také $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3}$. Tu poučku dokážeme, když vedeme pomocnou čáru P_3Q_1 a užijeme dvakrát za sebou předešlé poučky. Po prvé ji užijeme na trojúhelníku $P_3P_1Q_1$; přímka a_2 je rovnoběžná se stranou P_1Q_1 a prochází středem P_2 strany P_3P_1 ; proto přímka a_2 prochází středem S strany P_3Q_1 . Po druhé užijeme téže poučky na trojúhelníku $Q_1P_3Q_3$; přímka a_2 je rovnoběžná se stranou P_3Q_3 a prochází středem S strany Q_1P_3 ; proto přímka a_2 prochází středem strany Q_1Q_3 . Ale to právě znamená, že $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3}$, což jsme měli dokázati.

V obr. 102 je znázorněno euklidovské řešení úlohy, rozdělení úsečky AB na pět stejných dílů. P o p i s: Bodem A si vedeme libovolnou přímku r a zvolíme si na ní libovolný bod C_1 . Kružítkem si určíme

postupně další body C_2, C_3, C_4, C_5 na přímce r tak, aby bylo $\overline{AC_1} = \overline{C_1C_2} = \overline{C_2C_3} = \overline{C_3C_4} = \overline{C_4C_5}$. Spojíme C_5B a vedeme rovnoběžky p_4, p_3, p_2, p_1 s přímkou C_5B tak, že p_1 prochází bodem C_1, p_2 bodem C_2 , atd. Přímký p_1, p_2, p_3, p_4 protnou přímku AB v bodech, které rozdělí úsečku AB na pět stejných dílů.

Základní konstrukce trojúhelníka jsme již probírali. Pro opakování zde máte ještě cvič. 165.

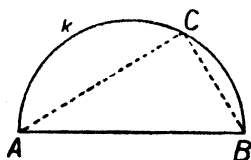
Známe-li jeden ostrý úhel pravoúhlého trojúhelníka, známe všechny tři úhly. Proto z poučky *usu* následuje, že **pravoúhlý trojúhelník je určen, známe-li**

- a) délku jedné odvěsny a jeden ostrý úhel;
- b) délku přepony a jeden ostrý úhel.

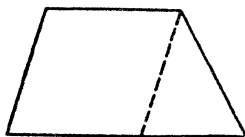
Ale pravoúhlý trojúhelník je také určen, známe-li

- c) délku přepony a délku jedné odvěsny.

Neboť přepona je delší než odvěsna a proti přeponě je pravý úhel; tedy známe dvě strany a úhel proti větší z nich. Při sestavování v případě c) začneme obvykle tak, že si zvolíme určitou polohu dané odvěsny; vyložte sami, jaký je potom průběh konstrukce! Ale je zajímavé, že si při této úloze můžeme také zvolit určitou polohu přepony AB (viz obr. 103): Opíšeme nad průměrem AB polokruž-



Obr. 103.

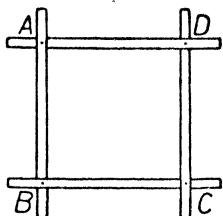


Obr. 104.

nici k ; je-li dána na př. délka $\overline{AC} = b$, najdeme si kružítkem na polokružnici k ten bod C , jehož vzdálenost od bodu A se rovná dané délce b . Že trojúhelník ABC je pravoúhlý, to plyne z Thaletovy věty.

Při konstrukcích lichoběžníka často pomůže pomocná čára (vyčárkovaná v obr. 104), která lichoběžník rozdělí na rovnoběžník a na trojúhelník.

Kdežto trojúhelník je určen, známe-li délky všech stran, u čtyřúhelníka už tomu tak není. V obr. 105 jsou znázorněny čtyři dřevěné laťky, spojené v bodech A, B, C a D tak, že se každá laťka může otáčeti. V dané poloze je $ABCD$ čtverec, můžeme však body A, C přiblížit k sobě nebo oddálit od sebe, takže nám vzniknou kosočtverce rozmanitých tvarů, které všechny mají strany tak dlouhé jako původní čtverec. K určení čtyřúhelníka nestačí čtyři číselné údaje; je jich potřeba pět (viz cvič. 174).



Obr. 105.

Cvičení k § 7.

162. Jak byste sestrojili euklidovsky úhly

$15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 165^\circ$?

Jak úhly $22\frac{1}{2}^\circ, 52\frac{1}{2}^\circ, 67\frac{1}{2}^\circ$?

163. Jak byste sestrojili euklidovsky k dané přímce p rovnoběžku, jejíž vzdálenost od přímky p je rovna délce dané úsečky?

164. Narysujte si úsečku AB dlouhou přesně 7 cm a rozdělte ji euklidovsky na sedm stejných dílů. Změřte ty díly!

Ve cvič. 165 neužívejte při konstrukci úhloměru, nýbrž sestrojíte úhly euklidovsky. Ale při kontrolních měřeních užívejte úhloměru.

165. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů:

a) $a = 53$ mm, $b = 81$ mm, $c = 42$ mm. Změřte úhly.

b) $a = 8,5$ cm, $b = 8$ cm, $c = 10,7$ cm. Změřte úhly.

c) $a = 7,5$ cm, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 45^\circ$. Změřte b, c .

d) $b = 75$ mm, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 97\frac{1}{2}^\circ$. Změřte a, c .

e) $c = 3,2$ cm, $a = 82\frac{1}{2}^\circ$, $\gamma = 30^\circ$. Změřte a, b .

f) $b = 39$ mm, $c = 55$ mm, $\alpha = 112\frac{1}{2}^\circ$. Změřte a, β, γ .

g) $a = 12,5$ cm, $c = 8$ cm, $\beta = 75^\circ$. Změřte b, a, γ .

166. Pomocí základních pouček o určení trojúhelníka dokažte, že rovnoramenný trojúhelník je určen, známe-li

a) délku základny a délku ramene;

b) délku základny a úhel při základně;

c) délku základny a úhel proti základně;

d) délku ramene a úhel při základně;

e) délku ramene a úhel proti základně.

Také ve cvič. 167 sestrojíte dané úhly euklidovsky.

167. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC podle daných údajů. Základna je AB .

- a) $c = 4,7$ cm, $\beta = 67^\circ$, změřte a .
- b) $c = 72$ mm, $\gamma = 97\frac{1}{2}^\circ$; změřte a .
- c) $b = 5$ cm, $\beta = 75^\circ$; změřte c .

168. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC podle daných údajů. (Jest $\sphericalangle ACB = R$.)

- a) $a = 67$ mm, $\beta = 30^\circ$; změřte b, c .
- b) $a = 5\frac{1}{2}$ cm, $\alpha = 52\frac{1}{2}^\circ$; změřte b, c .
- c) $b = 5$ cm, $\alpha = 75^\circ$; změřte a, c .
- d) $b = 6$ cm, $\beta = 67\frac{1}{2}^\circ$; změřte a, c .
- e) $c = 7$ cm, $\alpha = 22\frac{1}{2}^\circ$; změřte a, b .
- f) $a = 37$ mm, $b = 51$ mm; změřte c, α .
- g) $a = 4$ cm, $c = 8,5$ cm; změřte b, α .

V následujících cvičeních 169 až 174 si pokaždé napřed udělejte malý obrázec od ruky, který vám pomůže při přemýšlení o postupu práce.

169. Sestrojte euklidovsky čtverec $ABCD$, je-li dáno:

- a) $\overline{AB} = 7$ cm; změřte $\overline{AC}$.
- b) $\overline{AC} = 9$ cm; změřte $\overline{AB}$.

170. Sestrojte euklidovsky obdélník $ABCD$, je-li dáno:

- a) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm; změřte $\overline{AD}$.
- b) $\overline{BD} = 8$ cm, úhlopříčky tvoří úhel $\sphericalangle ASB = 37\frac{1}{2}^\circ$; změřte strany.

171. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno:

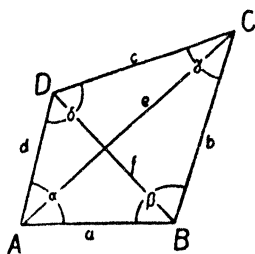
- a) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AD} = 5$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm; změřte $\sphericalangle BAD$.
- b) $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{BD} = 8$ cm; změřte $\overline{BC}$.
- c) $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BD} = 12$ cm, úhlopříčky tvoří úhel $\sphericalangle ASB = 60^\circ$; změřte strany.

172. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno:

- a) $\overline{BD} = 7$ cm, $\sphericalangle ABC = 40^\circ$; změřte $\overline{AC}$.
- b) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm; změřte $\sphericalangle BAD$.
- c) $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BD} = 9$ cm; změřte $\overline{AB}$.

173. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ podle daných údajů. AB a CD jsou základny.

- a) $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{CD} = 3$ cm, $\overline{DA} = 3\frac{1}{2}$ cm; změřte $\sphericalangle BAD$.
- b) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CD} = 2$ cm, $\overline{DA} = 4$ cm; změřte $\sphericalangle BAD$.
- c) $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 5$ cm, $\sphericalangle BAD = 72^\circ$, $\sphericalangle ABC = 40^\circ$; změřte $\overline{BC}$.
- d) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{CD} = 7$ cm, $\sphericalangle BAD = 130^\circ$, $\sphericalangle ABC = 70^\circ$; změřte $\overline{AD}$.



Obr. 106.

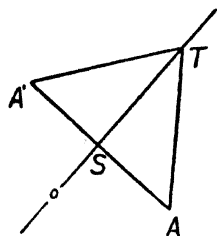
174. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ podle daných údajů. Označení stran, úhlů a úhlopříček jako v obr. 106.

- $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm, $d = 10$ cm, $\beta = 105^\circ$; změřte e a f ;
- $a = 82$ mm, $b = 56$ mm, $c = 42$ mm, $f = 93$ mm, $\alpha = 70^\circ$; změřte d a e ;
- $c = 9$ cm, $d = 3,2$ cm, $f = 10,6$ cm, $\gamma = 85^\circ$, $\delta = 124^\circ$; změřte a a b .

§ 8. Souměrnost osová a souměrnost středová.

O souměrnosti osové jsme již mluvili v druhé třídě. Tato souměrnost je určena přímkou o , která se jmenuje **osa souměrnosti**. K danému geometrickému útvaru dostaneme útvar s ním **souměrně sdružený**, překlápíme-li původní útvar kolem osy o . Z tohoto názorného vytvoření útvaru souměrně sdruženého plyne, že každý geometrický útvar je shodný s útvarem souměrně sdruženým, neboli že každá úsečka je stejně dlouhá s úsečkou souměrně sdruženou a že každý úhel se rovná úhlu souměrně sdruženému.

Je-li A libovolný bod, nazveme pro krátkost **obrazem** bodu A a označíme A' (což čteme A s čárkou) bod souměrně sdružený s bodem A . Leží-li bod A na ose o , splyne s bodem A' ; proto říkáme, že každý bod na ose o je **bod samodružný**. Je-li A libovolný bod, pak obraz A'' jeho obrazu A' splyne s původním bodem A .



Obr. 107.

Je-li A libovolný bod a je-li A' jeho obraz, tu je nám známo, že střed S úsečky AA' leží na ose o a že je $o \perp AA'$. Víme-li, že při osové souměrnosti se nemění ani délky úseček ani velikosti úhlů, můžeme si tuto základní vlastnost osové souměrnosti odvoditi takto (viz obr. 107): Zvolme si na ose o libovolný bod T . Vznikne nám trojúhelník $AA'T$. Protože přímka o je souměrně sdružena sama s sebou, protože mimo to se stranou AT našeho

trojúhelníka je sdružena strana $A'T$ a protože při souměrnosti se velikosti úhlů nemění, je úhel osy o se stranou AT roven úhlu osy o se stranou $A'T$ neboli o pólí $\sphericalangle ATA'$. Z toho následuje, že přímka o ve-

dená vrcholem trojúhelníka $AA'T$ vnikne dovnitř tohoto trojúhelníka a proto musí protnouti protější stranu, t. j. úsečku AA' . Označme si S průsečík úsečky AA' s osou o . S trojúhelníkem AST je souměrně sdružený trojúhelník $A'ST$, takže

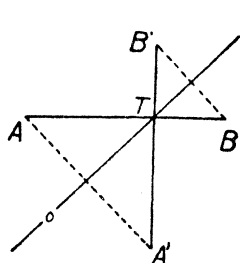
$$AST \cong A'ST;$$

z této shodnosti plyne předně, že $\overline{AS} = \overline{A'S}$, což je prvá z věcí, které jsme měli dokázati; za druhé plyne z téže shodnosti, že úhly $\sphericalangle AST$ a $\sphericalangle A'ST$ jsou si rovny; protože to jsou úhly vedlejší, jsou tedy pravé a to je druhá z věcí, které jsme měli dokázati.

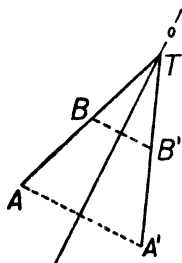
Vycházejíce z výše vyslovené základní vlastnosti osové souměrnosti, můžeme snadno dokázati, že při osové souměrnosti se délky úseček nemění. Všimněme si nejprve takové úsečky AT , jejíž jeden krajní bod T leží na ose o . Máme zase obr. 107, ve kterém nyní víme, že úhly při vrcholu S jsou pravé a že $\overline{AS} = \overline{A'S}$; dokázati máme, že $\overline{AT} = \overline{A'T}$. Protože $\overline{ST} = \overline{ST}$, $\overline{AS} = \overline{A'S}$, $\sphericalangle AST = \sphericalangle A'ST$, jest

$$AST \cong A'ST$$

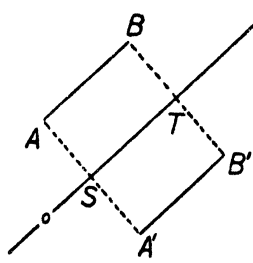
a z toho plyne $\overline{AT} = \overline{A'T}$. Všimneme-li si nyní libovolné úsečky AB , rozeznáváme tři případy. Předně může úsečka AB protnouti osu o v bodě, který si označíme T (viz obr. 108); za druhé může prodloužení úsečky AB — třeba za bod B — protnouti osu o v bodě, který zase si označíme T (viz obr. 109); za třetí může býti $AB \parallel o$ (viz obr. 110). V případě obr. 108 víme, že



Obr. 108.



Obr. 109.



Obr. 110.

a podobně také

$$\overline{AT} = \overline{A'T}$$

$$\overline{TB} = \overline{TB'};$$

mimo to je

$$\overline{AB} = \overline{AT} + \overline{TB}, \\ \overline{A'B'} = \overline{A'T} + \overline{TB'},$$

takže musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

V případě obr. 109 zase je

$$\overline{AT} = \overline{A'T}, \quad \overline{BT} = \overline{B'T};$$

mimo to je v tomto případě

$$\overline{AB} = \overline{AT} - \overline{BT}; \quad \overline{A'B'} = \overline{A'T} - \overline{B'T};$$

takže zase musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Konečně v případě obr. 110 si označme S střed úsečky AA' a T střed úsečky BB' . Víme, že obě přímky ASA' , BTB' jsou kolmé na o , takže jsou mezi sebou rovnoběžné. Tedy je $AS \parallel BT$; mimo to však víme, že je také $AB \parallel ST$. Tedy čtyřúhelník $ABTS$ je rovnoběžník. (Je to dokonce obdélník, ale na tom už nezáleží.) Víme, že u rovnoběžníka protější strany jsou si rovny. Tedy je $\overline{AS} = \overline{BT}$. Avšak $\overline{A'S} = \overline{AS}$, $\overline{B'T} = \overline{BT}$, takže musí býti také $\overline{A'S} = \overline{B'T}$. Tedy čtyřúhelník $A'B'TS$ má dvě protější strany $A'S$ a $B'T$ sobě rovné; protože také víme, že ty strany jsou rovnoběžné, je $A'B'TS$ rovnoběžník stejně jako $ABTS$. Z rovnoběžníka $ABTS$ soudíme, že $\overline{AB} = \overline{TS}$; z rovnoběžníka $A'B'TS$ soudíme, že $\overline{TS} = \overline{A'B'}$; proto je $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Jako jsme dokázali pomocí shodných trojúhelníků, že při souměrnosti osově se nemění délky úseček, podobně také bychom mohli dokázat, že při souměrnosti osově se nemění ani velikosti úhlů. Zase bychom musili rozeznávat různé případy. Ale je jednodušší usuzovati takto. Budiž dán libovolný úhel $\sphericalangle ABC$. (Zvolili jsme si libovolně bod A na jednom rameni a bod C na druhém.) Sestrojíme si trojúhelník ABC i trojúhelník souměrně sdružený $A'B'C'$. Víme, že

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} = \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

Proto je

$$ABC \cong A'B'C' \quad (\text{sss})$$

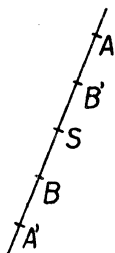
a z toho plyne $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, což jsme měli dokázat.

Od osově souměrnosti se liší **souměrnost středová**. Tato souměrnost je určena bodem S , který se jmenuje **střed souměrnosti**. K danému geometrickému útvaru dostaneme útvar s ním **souměrně sdru-**

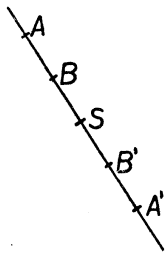
žený, otočíme-li původní útvar kolem bodu S o 180° . Z tohoto názorného vytvoření útvaru souměrně sdruženého plyne zase, že každý geometrický útvar je shodný s útvarem souměrně sdruženým, neboli že každá úsečka je stejně dlouhá s úsečkou souměrně sdruženou a že každý úhel se rovná úhlu souměrně sdruženému. Při středové souměrnosti máme zřejmě jen jediný **samodružný bod**, který?

Je-li A libovolný bod a je-li A' jeho **obraz** (t. j. zase bod souměrně sdružený), jest $\sphericalangle ASA' = 180^\circ$ a z toho následuje, že bod S leží na úsečce AA' . Protože $\overline{AS} = \overline{A'S}$, máme základní vlastnost středové souměrnosti: Obraz A' libovolného bodu A dostaneme, prodloužíme-li úsečku AS za bod S a nanese-li $\overline{SA'} = \overline{AS}$.

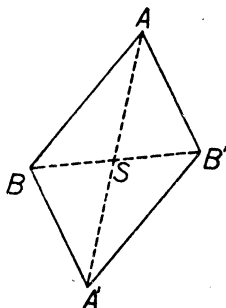
Vycházejíce zase ze základní vlastnosti středové souměrnosti, dokážeme si pomocí pouček nám známých, že dvě úsečky souměrně sdružené jsou stejně dlouhé. Pro úsečku AS , jejíž jeden krajní bod



Obr. 111.



Obr. 112.



Obr. 113.

je S , je zřejmé, že $\overline{AS} = \overline{A'S}$. Všimněme si za druhé takové úsečky AB , uvnitř které je bod S (viz obr. 111). Víme, že

$$\overline{AS} = \overline{A'S}, \quad \overline{BS} = \overline{B'S},$$

Protože však je

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AS} + \overline{BS}, \\ \overline{A'B} &= \overline{A'S} + \overline{B'S}, \end{aligned}$$

musí být $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Podobně usuzujeme v tom případě, když bod S leží na prodloužení úsečky AB (viz obr. 112). Proved'te úsudek sami!

Zbývá případ, kdy bod S neleží na přímce AB (viz obr. 113). V tomto případě si všimněme čtyřúhelníka $ABA'B'$. Bod S je průsečík jeho úhlopříček. Protože

$$\overline{AS} = \overline{A'S}, \quad \overline{BS} = \overline{B'S},$$

úhlopříčky se navzájem půlí, takže $ABA'B'$ je rovnoběžník. Protože protější strany rovnoběžníka jsou si rovny, jest $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, jak jsme měli dokázati.

Jakmile máme dokázáno, že při středové souměrnosti se nemění délky úseček, soudíme stejně jako při souměrnosti osové, že se nemění ani velikosti úhlů.

Z obr. 111 až 113 plyne také jiná důležitá vlastnost středové souměrnosti: Je-li AB libovolná přímka, pak přímka $\overline{A'B'}$ souměrně sdružená buďto s ní splyne (**samodružná přímka**) nebo je s ní rovnoběžná.

Cvičení k § 8.

175. Zvolte si (nepravidelný) pětiúhelník $ABCDE$ a sestrojte pětiúhelník souměrně sdružený podle zvolené osy. Proveďte to třikrát. Osu souměrnosti volte po prvé tak, aby ležela celá vně pětiúhelníka, po druhé tak, aby obsahovala jednu stranu, po třetí tak, aby prořezala strany AB a CD .

176. Zvolte si zase (nepravidelný) pětiúhelník a sestrojte pětiúhelník souměrně sdružený podle zvoleného středu. Proveďte to zase třikrát. Střed souměrnosti volte po prvé vně pětiúhelníka, po druhé na obvodě (asi ve třetině jedné strany), po třetí uvnitř.

177. Jaký tvar musí mítí trojúhelník, aby byl osově souměrný? Kolik os souměrnosti má rovnostranný trojúhelník? Může býti trojúhelník středově souměrný?

178. Jaký tvar musí mítí čtyřúhelník, aby byl osově souměrný? Středově souměrný? (Jsou dva druhy osově souměrných čtyřúhelníků!)

179. Má-li nějaký geometrický útvar dvě k sobě kolmé osy souměrnosti, musí mítí také střed souměrnosti. Dokažte!

180. Dokažte, že pravidelný n -úhelník má n os souměrnosti. Kudy procházejí? Zkoumejte napřed případy $n = 3, 4, 5, 6$, potom se pokuste usuzovati obecně. Musíte rozeznávatí dva případy podle toho, zda číslo n je liché či sudé.

§ 9. Geometrická místa.

Pozorujeme-li hrot vteřinové ručičky u hodinek, vidíme, že jeho poloha se stále mění; všechny tyto polohy dohromady tvoří kružnici, kterou hrot proběhne celou za každou minutu. Říkáme, že ta kružnice je geometrické místo hrotu vteřinové ručičky. Když řekneme, že

nějaká čára je geometrickým místem bodu, jehož poloha je podrobena předepsaným podmínkám, rozumíme tím, že dvě věci jsou splněny zároveň:

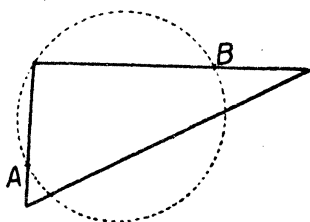
[1] Každý bod na té čáře vyhovuje daným podmínkám.

[2] Každý bod, který daným podmínkám vyhovuje, musí ležeti na té čáře.

V předcházejícím příkladě geometrickým místem byla celá kružnice, v následujícím příkladě geometrickým místem je jen část kružnice. Dejme tomu, že okno se dá otevřít do úhlu 110° , ale ne více. Jaké je geometrické místo určitého bodu na okně? Je to zřejmě oblouk kružnice a poloměry v krajních bodech toho oblouku svírají úhel 110° .

Tvar geometrického místa se někdy nejsnáze určí, když si napřed vyznačíme několik možných poloh proměnného bodu a potom se snažíme uhodnouti tvar celého geometrického místa. Nakonec se musí dokázat, že jsme uhodli správně; ale někdy je těžší objevit, jak geometrické místo vypadá, než dokázat správnost výsledku, který jsme uhodli z názoru.

Příklad na pokusné určení geometrického místa (viz obr. 114). A a B jsou dva dané body. Jaké je geometrické místo vrcholu pravého úhlu, jehož jedno rameno prochází bodem A a druhé bodem B ? Umístěte různými způsoby trojúhelníkové pravítko tak, aby jedno rameno pravého úhlu na pravítku procházelo bodem A a druhé bodem B a po každé pichněte špendlíkem do papíru na místě, kde je



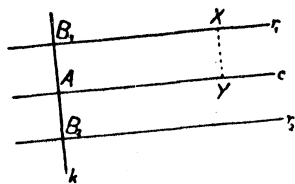
Obr. 114.

vrchol pravého úhlu. Dostanete řadu bodů, z nichž je jasně vidět, že geometrické místo je kružnice nad průměrem AB . To platí ovšem jen tehdy, když všechny polohy pravého úhlu leží v pevné rovině. Geometrickým místem bez tohoto omezení je kulová plocha.

Některá geometrická místa jsou velmi důležitá. Omezíme se na geometrická místa v rovině. Geometrické místo bodu X , jehož vzdálenost od daného bodu A se rovná dané délce r , je kružnice o středu A a poloměru r . To je ovšem samozřejmé.

Geometrické místo bodu X , jehož vzdálenost od dané přímky c se rovná dané délce v , se skládá ze dvou rovnoběžek r_1 a r_2 k přímce c . (Viz obr. 115.) Zvolme si určitý bod A na

přímce c a vztyčme v bodě A kolmici k k přímce c . Na přímce k si určíme body B_1, B_2 (každý na jedné straně od přímky c), pro které platí $\overline{AB}_1 = \overline{AB}_2 = v$.



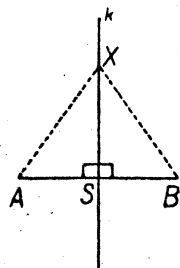
Obr. 115.

Veďme bodem B_1 rovnoběžku r_1 a bodem B_2 rovnoběžku r_2 k přímce c . Máme dokázati, že hledané geometrické místo se skládá z obou přímek r_1 a r_2 . Takový důkaz se musí skládati ze dvou částí: předně se musí ukázati, že když bod X leží na některé z přímek r_1 a r_2 , jeho vzdálenost od přímky c je rovná v ; za druhé se musí dokázati,

že když obráceně bod X má od přímky c vzdálenost rovnou v , musí X ležeti buďto na přímce r_1 nebo na přímce r_2 .

Prvá část důkazu: Budiž X bod, který leží třeba na přímce r_1 . Spustíme s bodu X kolmici na přímku c a označme Y patu této kolmice; máme dokázati, že $\overline{XY} = v$. Všimneme si čtyřúhelníka AB_1XY . Protože přímky AB_1 a YX jsou obě kolmé na přímku c , jsou mezi sebou rovnoběžné; také přímky AY a B_1X jsou mezi sebou rovnoběžné. Tedy AB_1XY je rovnoběžník a AB_1, XY jsou jeho protější strany. Proto je $\overline{XY} = \overline{AB}_1$, neboli $\overline{XY} = v$.

Druhá část důkazu. Budiž X bod takový, že $\overline{XY} = v$, kde Y znamená patu kolmice spuštěné s bodu X na přímku c . Máme dokázati, že X leží buďto na přímce r_1 nebo na přímce r_2 . Na té straně od přímky c , na které leží bod X , leží jeden z bodů B_1 a B_2 ; budiž to na př. bod B_1 . Dokážeme, že $B_1X \parallel c$; to právě znamená, že X leží na přímce r_1 . Všimneme si zase čtyřúhelníka AB_1XY . Protože $AB_1 \perp c$, $YX \perp c$, jest $AB_1 \parallel YX$; protože $\overline{AB}_1 = v$, $\overline{YX} = v$, jest $\overline{AB}_1 = \overline{YX}$. Proto AB_1XY je rovnoběžník a z toho následuje $B_1X \parallel AY$ neboli $B_1X \parallel c$.



Obr. 116.

Geometrické místo bodu X stejně vzdáleného od daného bodu A jako od daného bodu B je kolmice k vztyčená k přímce AB ve středu S úsečky AB (neboli osa úsečky AB). (Viz obr. 116.) Důkaz se skládá zase ze dvou částí.

Prvá část. Budiž X bod na přímce k . Máme dokázati, že $\overline{AX} = \overline{BX}$. Všimneme si trojúhelníků ASX

a BSX se společnou stranou SX . Protože S je střed úsečky AB , je $\overline{AS} = \overline{BS}$; mimo to je $\sphericalangle ASX = \sphericalangle BSX$ (úhly pravé). Proto je

$$ASX \cong BSX \text{ (sus)}$$

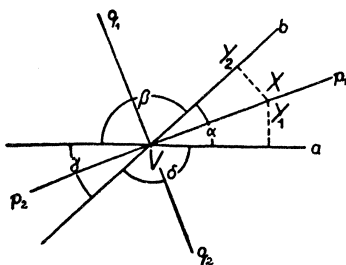
a z toho následuje $\overline{AX} = \overline{BX}$.

Druhá část. Budiž X bod takový, že $\overline{AX} = \overline{BX}$. Máme dokázati, že bod X leží na přímce k neboli, že $\sphericalangle ASX = R$. Zase si všimneme trojúhelníků ASX a BSX . Nyní vidíme, že

$$ASX \cong BSX \text{ (sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle ASX = \sphericalangle BSX$. Tedy úhel $\sphericalangle ASX$ se rovná svému vedlejšímu úhlu, takže $\sphericalangle ASX = R$.

V obr. 117 máme dvě různoběžky a, b , které se protínají v bodě V . Každá z těchto dvou přímek je bodem V rozdělena na dvě polopřímky



Obr. 117.

a proto vznikají čtyři úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ s vrcholem V . V obr. 117 máme ještě čtyři polopřímky p_1, q_1, p_2, q_2 , z nichž každá je osou jednoho z úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Úhly α a β jsou vedlejší, takže $\alpha + \beta = 2R$. Proto je

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = R;$$

ale $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ je právě úhel s rameny p_1 a q_1 ; proto je tento úhel pravý.

Ježto tak $\beta + \gamma = 2R$, dojdeme stejně k výsledku, že úhel s rameny q_1 a p_2 je pravý. Proto úhel s rameny p_1 a p_2 je přímý, takže polopřímky p_1 a p_2 dohromady vyplní přímku p . Podobně se dokáže, že polopřímky q_1 a q_2 dohromady vyplní přímku q . Jest

$$p \perp q,$$

neboť už jsme si všimli, že úhel s rameny p_1 a q_1 je pravý. Obě přímky p a q nazveme osami různoběžek a a b ; tyto dvě osy tedy stojí na sobě kolmo a půlí úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Geometrické místo bodu X stejně vzdáleného ode dvou různoběžek a, b , se skládá ze dvou přímek, totiž z obou os různoběžek a, b . Důkaz má zase dvě části.

Prvá část. Budiž X bod na jedné z přímek p, q třeba na polopřímce p_1 . Máme dokázati, že $\overline{XY}_1 = \overline{XY}_2$, kde Y_1 je pata kolmice spuštěné s bodu X na přímku a a Y_2 je pata kolmice spuštěné s bodu X na polopřímku b . Všimneme si trojúhelníků VXY_1 a VXY_2 se společnou stranou VX . Protože polopřímka VX je osou úhlu α , je $\sphericalangle Y_1VX = \sphericalangle Y_2VX$; mimo to je $\sphericalangle VY_1X = \sphericalangle VY_2X$. Proto je

$$VXY_1 \cong VXY_2 \text{ (suu)}$$

a z toho následuje $\overline{XY}_1 = \overline{XY}_2$.

Druhá část. Budiž X bod stejně vzdálený od přímky a jako od přímky b ; máme dokázati, že X leží buďto na přímce p nebo na přímce q . Bod X leží uvnitř některého ze čtyř úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; třeba uvnitř úhlu α . S bodu X spustíme kolmice na přímky a, b a označíme Y_1, Y_2 jejich paty. Všimneme si trojúhelníků VXY_1 a VXY_2 se společnou stranou VX . Protože X je stejně vzdálen od přímky a jako od přímky b , je $\overline{XY}_1 = \overline{XY}_2$. Mimo to $\sphericalangle VY_1X = R, \sphericalangle VY_2X = R$. Tedy VXY_1 a VXY_2 jsou pravoúhlé trojúhelníky, které se shodují v přeponě a v jedné odvěsně, tedy ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich. Proto je

$$VXY_1 \cong VXY_2$$

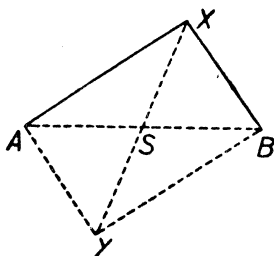
a z toho následuje $\sphericalangle Y_1VX = \sphericalangle Y_2VX$, takže X leží na ose p_1 úhlu α .

Bud'tež A, B dva dané body. Geometrické místo bodu X , pro který $\sphericalangle AXB$ je úhel pravý, je kružnice k nad průměrem AB .

Prvá část. Leží-li X na kružnici k , je $\sphericalangle AXB = R$ podle Thaletovy věty.

Druhá část. Budiž $\sphericalangle AXB = R$. Máme dokázati (viz obr. 118), že $\overline{SX} = \overline{SA}$, kde S je střed úsečky AB . V bodě A vztyčíme kolmici k přímce AX a v bodě B vztyčíme kolmici k přímce BX ; ty dvě kolmice se protnou v bodě Y . Čtýrhelník $AXBY$ má při vrcholu A , při

vrcholu X a při vrcholu B pravý úhel; protože součet úhlů čtyřúhelníka je $4R$, je také zbývající úhel čtyřúhelníka $AXBY$ pravý; tedy je to obdélník. Protože úhlopříčky obdélníka jsou si rovny, je $\overline{XY} = \overline{AB}$.



Obr. 118.

Protože úhlopříčky obdélníka (jako každého rovnoběžníka) se půlí, prochází přímka XY středem S úhlopříčky AB . Mimo to $\overline{SX}$ je polovina z $\overline{XY}$, $\overline{SA}$ je polovina z AB ; protože $\overline{XY} = AB$, je $\overline{SX} = \overline{SA}$.

Cvičení k § 9.

Ve cvič. 181 až 186 máte popsati ústně geometrické místo, jehož tvar je patrný z názoru.

181. Malý předmět, který pustíte z ruky na zem.

182. Špička nosu dítěte na houpačce.

183. Střed kola vozu, který jede po rovné silnici.

184. Vrchol pravého úhlu trojúhelníkového pravítka, které otáčíte kolem přepony.

185. Nejnižší bod kyvadla u hodin.

186. Člověk, který kráčí od určitého místa k severozápadu.

187. Proměnný bod P je stále ve stejné vzdálenosti od daného bodu A . Jaké je geometrické místo bodu P

a) v rovině? b) v prostoru?

188. Proměnný bod P je stále ve stejné vzdálenosti od dané přímky a . Jaké je geometrické místo bodu P

a) v rovině? b) v prostoru?

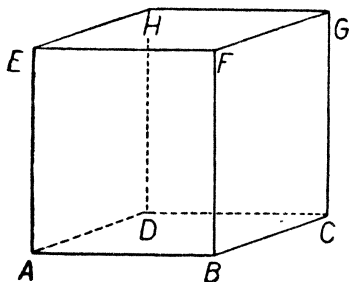
189. Kružnice s pevným poloměrem r a s proměnným středem S se pohybuje tak, že stále prochází daným bodem A . Jaké je geometrické místo bodu S

a) v rovině? b) v prostoru?

190. Kus drátu ABC je ohnut do pravého úhlu v bodě B . Poloha bodu A je pevná. Jaké je geometrické místo bodu C ?

191. Čtyři spojené tyčky mají tvar rovnoběžníka $HKLM$. Poloha tyčky HK je pevná; tyčka HM se může otáčet kolem bodu H ; tyčka KL se může otáčet kolem bodu K . Na tyčce LM je vyznačen určitý bod X . Jaké je geometrické místo bodu X ? [Všimněte si toho bodu P na straně HK , pro který je $PX \parallel HM$.]

192. ABC je daný trojúhelník; k je daná kružnice se středem A . $BAFG$, $CBGH$ jsou proměnné rovnoběžníky. Bod F leží stále na kružnici k . Jaké je geometrické místo bodu H ?



Obr. 119.

193. Obr. 119 znázorňuje dřevěnou bednu spočívající na vodorovné půdě. Z původní polohy znázorněné obrazcem, ve které dolní podstavou je $ABCD$, se bedna překlápí podél hrany BC do druhé polohy, ve které dolní podstavou je $BCGF$. Potom se bedna překlápí znovu, tentokrát podél hrany FG , do třetí polohy, ve které je dolní podstavou $FGHE$. Potom se bedna překlápí ještě jednou podél hrany EH do konečné polohy, ve které dolní podstavou je $EHDA$. Narýsujte geometrické místo bodu A .

194. KL je pevná úsečka délky 3 cm. Určete geometrické místo bodu X , jehož nejkratší vzdálenost od úsečky KL je 1 cm:

a) v rovině, b) v prostoru.

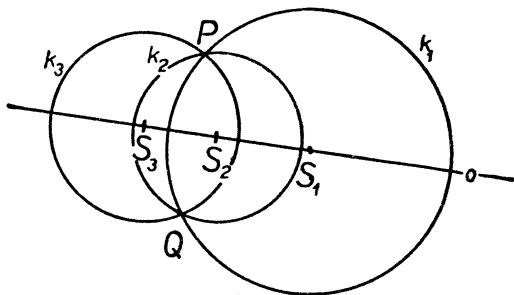
§ 10. Tětivy kružnice.

Narýsujte si kružnici k (střed S) a zvolte si na ní dva body A , B . Víte že osa o úsečky AB je geometrické místo toho bodu X , pro který platí $\overline{AX} = \overline{BX}$. Protože je jistě $\overline{AS} = \overline{BS}$, leží tedy bod S na přímce o . Osa každé tětivy kružnice k prochází středem kružnice k . Protože osa úsečky AB je kolmice vztyčená v jejím středu na přímkou AB , můžeme dáti právě vyslovené poučce také jiné tvary:

Je-li T střed tětiny AB a je-li S střed kružnice, pak buďto oba body S a T splynou (tětina je průměrem) nebo spojnice ST je kolmá na přímkou AB .

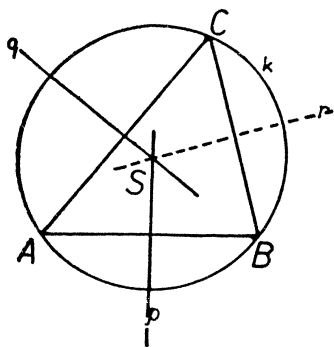
Je-li AB tětina kružnice, která neprochází středem S kružnice, pak kolmice spuštěná s bodu S na přímkou AB půlí úsečku AB .

Bud'tež dány dva body P, Q (viz obr. 120). Víme, že každá kružnice k , která prochází i bodem P i bodem Q , musí mít střed na ose o úsečky PQ . Obráceně, zvolíme-li si na ose o libovolný bod S , je $\overline{PS} = \overline{QS}$ a proto kružnice se středem S a poloměrem $\overline{PS}$ prochází (nejen bodem P , nýbrž také) bodem Q . Geometrické místo středu kružnice, která prochází dvěma danými body P, Q , je osa úsečky PQ .



Obr. 120.

Při mnoha geometrických úlohách se hledá bod, který má vyhovovati zároveň dvěma podmínkám. Takové úlohy můžeme řešiti pomocí geometrických míst. Body, které vyhovují první podmínce, vyplní jedno geometrické místo (můžeme si je narýsovat třeba červeně), body, které vyhovují druhé podmínce, vyplní druhé geometrické místo (můžeme si je narýsovat třeba modře). Žádaný bod musí vyhovovati oběma podmínkám a proto bude ležeti tam, kde se protne červená čára s modrou. Narýsujte si na př. rovnostranný trojúhelník HKL s délkou strany 4 cm; budiž naší úlohou určití bod M vzdálený 2 cm od přímky HL a stejně vzdálený od přímky HK jako od přímky KL . Geometrické místo bodu X vzdáleného 2 cm od přímky HL se skládá ze dvou rovnoběžek s přímkou HL ; narýsujte si je obě červeně. Geometrické místo bodu X vzdáleného od přímky HK stejně jako od přímky KL se skládá ze dvou k sobě kolmých přímk procházejících bodem K a půlicích úhly tvořené přímkami HK a KL ; narýsujte si toto nové geometrické místo modře. Žádaný bod M musí ležeti i na červeném i na modrém geometrickém místě; vidíte, že jsou dva takové body M ; označte si je M_1, M_2 .



Obr. 121.

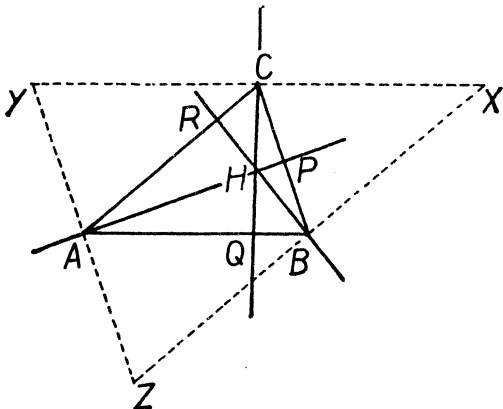
Narýsujte si kružnici k (viz obr. 121) a na ní si zvolte tři body A, B, C . Tyto tři body jsou vrcholy trojúhelníka ABC vepsaného do kružnice k ; tato kružnice je opsána trojúhelníku ABC . Protože kružnice k prochází body A, B , leží její střed S na ose p úsečky AB . Z podobného důvodu leží střed S také na ose q úsečky AC a na ose r úsečky BC . Je-li kružnice k opsána trojúhelníku ABC , protínají se osy všech tří stran trojúhelníka ABC v jediném bodě, totiž ve středu S kružnice k .

Nyní si obráceně zvolme libovolný trojúhelník ABC . Máme už dokázáno, že se osy všech tří stran našeho trojúhelníka protnou v jediném bodě? Bylo by to dokázáno, kdybychom měli zaručeno, že lze našemu trojúhelníku opsati kružnici; neboť pak víme, že osa každé strany prochází středem té kružnice. Ale snadno provedeme důkaz i bez předpokladu, že možnost opsati trojúhelníku kružnici je vám už známa. Za tím účelem si sestrojíme napřed pouze osy dvou stran, třeba osu p strany AB a osu q strany AC . Jest $AB \perp p$, $AC \perp q$, tedy ke každé z obou přímek máme z bodu A jinou kolmici. Proto přímky p a q nejsou rovnoběžné. Tedy jsou různoběžné a mají průsečík, který si označíme S . Přímka p je geometrické místo toho bodu X , pro který je $\overline{AX} = \overline{BX}$; přímka q je geometrické místo toho bodu X , pro který je $\overline{AX} = \overline{CX}$. Protože bod S leží na přímce p , je délka $\overline{BS}$ rovná délce $\overline{AS}$; protože bod S leží na přímce q , je také délka $\overline{CS}$ rovná délce $\overline{AS}$. Proto je $\overline{BS} = \overline{CS}$ a z toho plyne, že bod S leží také na ose r úsečky BC , neboť r je geometrické místo toho bodu X , pro který je $\overline{BX} = \overline{CX}$. Tím je dokázáno, že osy všech tří stran trojúhelníka ABC mají společný bod S . Mimo to je dokázáno, že všechny tři délky $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$ jsou si rovny, takže kružnice k se středem S a poloměrem $\overline{AS}$ prochází (nejen bodem A , nýbrž také) bodem B a bodem C , t. j. k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC . Tedy jsme dokázali, že lze každému trojúhelníku opsati kružnici a také jsme se naučili, jak se tato kružnice sestrojí.

U pravoúhlého trojúhelníka ABC s přeponou AB leží střed opsané kružnice na obvodě trojúhelníka, a to uprostřed přepony. Abychom si to odůvodnili, označme si písmenem k kružnici nad průměrem AB a písmenem S její střed, tedy střed přepony. Víme, že k je geometrické místo toho bodu X , pro který $\sphericalangle AXB = 90^\circ$. Protože $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, leží (vedle bodů A, B také) bod C na kružnici k , t. j. k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC .

Dá se dokázat, že u ostroúhlého trojúhelníka leží střed opsané kružnice vždy uvnitř trojúhelníka, a u tupoúhlého trojúhelníka vždy vně.

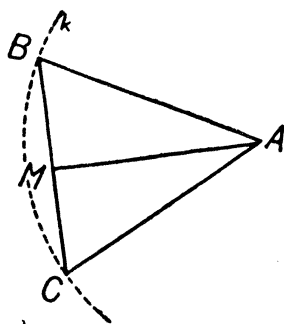
V obr. 122 máme trojúhelník ABC . S každého vrcholu je spuštěna kolmice na protější stranu a paty těchto kolmic jsou označeny písmeny P, R, Q . Tyto tři kolmice AP, BR, CQ se jmenují **výšky trojúhelníka ABC** ; určitěji pravíme, že na př. AP je výška příslušná straně BC ; bod P je pata té výšky.



Obr. 122.

V obr. 122 všechny tři výšky trojúhelníka ABC se protínají v jediném bodě H . Dokážeme si, že tomu tak je u každého trojúhelníka; bod H se proto jmenuje **průsečík výšek** trojúhelníka ABC . Abychom dospěli k důkazu, veďme si každým vrcholem trojúhelníka rovnoběžku s protější stranou. Tyto tři rovnoběžky omezí nový trojúhelník, který je v obr. 122 označen XYZ . Protože $AB \parallel YC, BC \parallel AY$, je $ABCY$ rovnoběžník a proto je $\overline{AY} = \overline{BC}$. Protože $AC \parallel ZB, BC \parallel ZA$, je $ACBZ$ rovnoběžník a proto je $\overline{AZ} = \overline{BC}$.) Tedy $\overline{AY} = \overline{AZ}$, t. j. bod A je střed strany YZ trojúhelníka XYZ . Protože $AP \perp BC, ZY \parallel BC$, je $AP \perp ZY$. Tedy přímka AP je osou strany YZ trojúhelníka XYZ . Stejně se dokáže, že přímky BR a CQ jsou osami ostatních stran trojúhelníka XYZ . Protože však osy tří stran trojúhelníka mají společný bod, musí všechny tři přímky AP, BR, CQ procházeti jedním bodem, což jsme měli dokázat.

*) Protože $AC \parallel ZB, BC \parallel ZA$, je $ACBZ$ rovnoběžník a proto $\overline{AZ} = \overline{BC}$.



Obr. 123.

U rovnoramenného trojúhelníka výška příslušná základně pólí tuto základnu. Budiž ABC rovnoramenný trojúhelník se základnou BC (viz obr. 123). Protože $\overline{AB} = \overline{AC}$, můžeme si sestrojiti kružnici k se středem A , která prochází oběma body B, C . Úsečka BC je tětivou kružnice k . Je-li M její střed, je $AM \perp BC$ podle poučky ze začátku tohoto paragrafu. To jsme však měli dokázati.

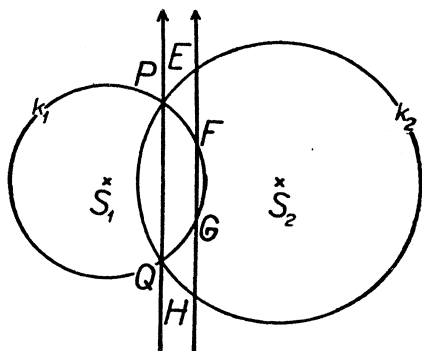
Cvičení k § 10.

I. Osa tětivy kružnice.

195. Narýsujte si oblouk kružnice třeba pomocí korunové mince. Jak můžete určit střed kružnice?

196. Uvnitř kružnice k si zvolte bod U . Sestrojte tětivu kružnice k pólenu bodem U .

197. Kružnice k_1 se středem S_1 a kružnice k_2 se středem S_2 protínají se v bodech P, Q . (Viz obr. 124.) a) Dokažte, že $PQ \perp S_1S_2$. b) Dokažte, že v obr. 124 je $\overline{EF} = \overline{GH}$.



Obr. 124.

198. Kružnice k_1 a k_2 jsou soustředné. $C_1C_2D_2D_1$ je přímka; body C_1, D_1 leží na kružnici k_1 ; body C_2, D_2 leží na kružnici k_2 . Dokažte, že $\overline{C_1C_2} = \overline{D_1D_2}$.

199. AB, CD jsou dvě tětivy kružnice o středu S . Dokažte:

a) Je-li $\overline{AB} = \overline{CD}$, jsou obě přímky AB, CD stejně vzdáleny od bodu S . [Je-li L střed úsečky AB a je-li M střed úsečky CD , dokažte, že $SLA \cong SMC$.]

b) Jsou-li obě přímky AB, CD stejně vzdáleny od bodu S , je $\overline{AB} = \overline{CD}$. [Zase dokažte, že $SLA \cong SMC$.]

II. Geometrická místa.

200. Je dána kružnice k . Určete geometrické místo středu tětivy XY , jejíž délka je pevně dána. [Užijte výsledku cvič. 199 a).]

201. Na dané kružnici k se středem S je dán bod A . Proměnná tětiva AX prochází stále bodem A . Dokažte, že geometrické místo středu proměnné tětivy je kružnice nad průměrem AS .

202. Proměnná tětiva dané kružnice k stále prochází daným bodem M . Sestrojte geometrické místo středu proměnné tětivy. (Proveďte dvakrát: bod M budiž napřed uvnitř kružnice k , potom vně.)

203. Jsou dány dvě přímky $EF \perp EG$. Úsečka dané délky se pohybuje tak, že stále leží jeden krajní bod na přímce EF , druhý na přímce EG . Dokažte, že geometrické místo středu proměnné úsečky je kružnice se středem E .

III Metoda dvou geometrických míst. (Viz též úlohy 211 až 213.)

204. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu 6 cm. Určete bod P vzdálený 4 cm od vrcholu A a 2 cm od strany BC . (Dvě řešení.)

205. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu 4 cm. Určete bod K na přímce AB vzdálený 2 cm od přímky AC . (Dvě řešení.)

206. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu 4 cm. Určete bod L vzdálený 2 cm od přímky AB a 3 cm od přímky AC . (Čtyři řešení.)

207. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 45$ mm, $\overline{BC} = 5$ cm. Sestrojte bod M ve vzdálenosti 6 cm od vrcholu B tak, aby M byl stejně vzdálen od přímky AC jako od přímky BC . (Čtyři řešení.)

IV. Kružnice procházející dvěma body,

208. Zvolte si čtyřúhelník $EFGH$. Sestrojte kružnici, která má střed někde na obvodě čtyřúhelníka a která prochází

a) vrcholy E, F ;

b) vrcholy E, G .

209. Narýsujte si kružnici k a na ní si zvolte dva body C, D . Sestrojte kružnici m , která má střed na kružnici k a která protíná kružnici k v bodech C, D .

210. Zvolte si dva body A, B a přímku p . Sestrojte kružnici, která prochází oběma danými body a má střed na přímce p . Je konstrukce v ž d y možná?

211. Je dána úsečka UV ; $\overline{UV} = 5$ cm. Máte sestrojiti kružnici s poloměrem 32 mm, která prochází bodem U i bodem V . [První podmínka pro střed S : kružnice prochází oběma body U, V . Druhá podmínka pro střed S : kružnice s poloměrem 32 mm prochází bodem U . Každá podmínka určí jedno geometrické místo. Kolik řešení má úloha? Bylo možné postupovat jinak?]

212. Narýsujte si rovnoramenný trojúhelník PQR ; $\overline{PQ} = \overline{PR} = 3$ cm; $\overline{QR} = 5$ cm. Sestrojte kružnici, která prochází bodem P i bodem Q a jejíž střed je tak daleko od přímky PQ jako od přímky QR . (Dvě řešení.)

213. Narýsujte si znovu trojúhelník PQR takový jako ve cvič. 212. Sestrojte kružnici, která prochází bodem P i bodem R a jejíž střed vyhovuje podmínce $\sphericalangle QSR = 90^\circ$. (Dvě řešení.)

V. Kružnice opsaná trojúhelníku a pod.

214. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo

a) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CA} = 7$ cm;

b) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm, $\overline{CA} = 8$ cm.

Sestrojte opsanou kružnici a změřte její poloměr.

215. Narýsujte si čtyřúhelník $PQRS$ tak, aby nebylo $PQ \parallel RS$. Sestrojte bod H tak, aby bylo

$$a) \overline{HP} = \overline{HQ}, \overline{HR} = \overline{RS};$$

$$b) \overline{HP} = \overline{HQ}, \sphericalangle RHS = 90^\circ.$$

216. Na kružnici si zvolte čtyři body E, F, G, H . Dokažte, že osy úseček EF, EG, EH, FG, FH, GH všechny se protínají v jednom bodě.

217. Zvolte si čtyři různoběžky tak, aby žádné tři z nich nešly týmž bodem. Vynecháte-li jednu z nich, omezí ostatní tři trojúhelník. Takové trojúhelníky máte celkem čtyři. Opište každému z nich kružnici, shledáte, že všechny ty čtyři kružnice mají společný bod. (Nemáte nic dokazovat, pouze máte provést konstrukci. Velký obrazec!)

VI. Výšky trojúhelníka.

218. Kde leží průsečík výšek pravoúhlého trojúhelníka?

219. U ostroúhlého trojúhelníka leží průsečík výšek uvnitř trojúhelníka, u tupoúhlého vně. Proč?

220. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 45^\circ$, D je průsečík výšek, $\dot{D}$ je pata výšky příslušné straně AB . Dokažte, že $\overline{BD} = \overline{DH}$. (Narýsujte si troji obrazec: po první at' oba úhly β, γ jsou ostré; po druhé at' je β tupý, po třetí at' je γ tupý.)

221. Uvnitř rovnoběžníka $PQRS$ je bod T v takové poloze, že $QT \perp QR$, $ST \perp RS$. Dokažte, že $PT \perp QS$.

222. Je-li D průsečík výšek trojúhelníka ABC , dokažte, že C je průsečík výšek trojúhelníka ABD .

§ 11. Tečny ke kružnici.

Zvolte si přímku p a mimo ni bod S (viz obr. 125). Spusťte s bodu S kolmici na přímku p a patu označte P , takže $\overline{SP}$ je vzdálenost bodu S od přímky p . Bod P rozdělí přímku p na dvě polopřímky. Probíhá-li bod X kteroukoli z těchto polopřímek, počínajíc polohou P , tu je vám známo, že se vzdálenost $\overline{SX}$ stále zvětšuje. Zvolíme-li si nyní libovolnou délku r větší než $\overline{SP}$, budou na přímce p dva body X takové, že

$$\overline{SX} = r \quad (*)$$

(po jednom na každé z obou polopřímek); zvolíme-li si $r = \overline{SP}$, bude platit (*) pro jediný bod X na přímce p , totiž pro bod P ; zvolíme-li si konečně $r < \overline{SP}$, nebude (*) platit pro žádný bod X na přímce p . Zvolíme-li si tři délky r_1, r_2, r_3 tak, že je

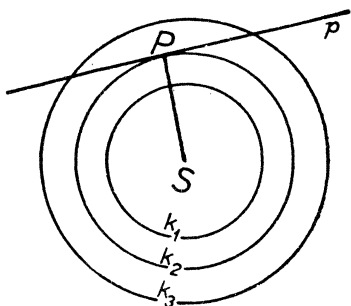
$$r_1 < \overline{SP}, r_2 = \overline{SP}, r_3 > \overline{SP}$$

a opíšeme-li kolem středu S tři kružnice k_1, k_2, k_3 s poloměry r_1, r_2, r_3 , tu přímka p nemá s kružnicí k_1 žádný společný bod, s kružnicí k_2 má jediný společný bod P a s kružnicí k_3 má společné dva

body. Říkáme, že přímka p leží mimo kružnici k_1 , je tečnou kružnice k_2 (a to tečnou v bodě P) a je sečnou kružnice k_3 .

Přímka je sečnou kružnice, je-li její vzdálenost od středu menší než poloměr. Přímka je tečnou kružnice, je-li její vzdálenost od středu rovna poloměru. Přímka leží mimo kružnici, je-li její vzdálenost od středu větší než poloměr.

Na kružnici k se středem S a poloměrem r si zvolme bod A . Mysleme si bodem A vedeny rozmanité přímky. Nejprve vedme bodem A přímku t kolmou na přímkou SA ; patou kolmice



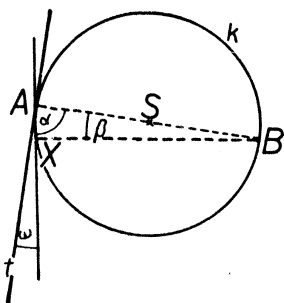
Obr. 125.

spuštěné s bodu S na přímkou t je patrně bod A , takže vzdálenost přímky t od bodu S je rovna poloměru r ; proto t je tečna kružnice k v bodě A . Vedeme-li si však bodem A kteroukoli jinou přímku s , tu vzdálenost bodu S od přímky s je menší než délka $\overline{SA}$, t. j. menší než r , takže s je sečnou kružnice k . Kružnice se středem S má v každém svém bodě určitou tečnu; je to kolmice vztyčená v bodě A k přímce SA ; každá jiná přímka vedená bodem A je sečnou kružnice.

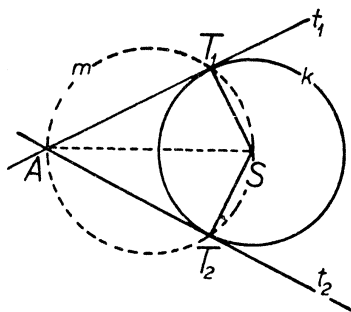
V obr. 126 je narysována tečna t ke kružnici k v bodě A této kružnice. Ačkoli přímka t a kružnice k mají společný pouze jediný bod A , přece se zdá, jako by ty dvě čáry měly společnou celou krátkou úsečku. Můžeme si to vysvětliti takto. Zvolme si na kružnici k bod X blízko bodu A . Vedme si průměr AB kružnice k . Podle Thaletovy věty je $\sphericalangle AXB = 90^\circ$ a z toho následuje, že v obr. 125 je $\alpha + \beta = 90^\circ$. Podle obrazce je však také $\alpha + \omega = 90^\circ$, takže musí býti $\omega = \beta$. Je-li bod X velmi blízko bodu A , je zřejmě úhel β velmi malý, takže také úhel ω je velmi malý. Ačkoli tedy přímka AX nesplyne přesně s tečnou t , tvoří s ní velmi malý úhel, takže přibližně splyne přímka AX s tečnou t .

Na rozdíl od tečny rozeznáváme sečnu od kružnice velmi jasně už v malé blízkosti společného bodu. Proto říkáme, že kružnice a sečna se protínají, kdežto kružnice a tečna se dotýkají.

Tečnu t k narýsované kružnici rovnoběžnou s danou přímkou p (kolik je takových tečen?) můžeme sestrojiti docela přesně (ale ne euklidovsky) posouváním trojúhelníkového pravítka. Ale abychom přesně určili **bod dotyku** (t. j. ten bod, ve kterém je t tečnou) je nezbytné spustiti se středu kružnice kolmici na přímkou p .



Obr. 126.



Obr. 127.

Narýsujte si kružnici k se středem S a vně kružnice si zvolte bod A . Bodem A procházejí dvě tečny t_1, t_2 ke kružnici k . Můžeme je sestrojiti docela přesně (ale ne euklidovsky) pouhým přiložením pravítka. K určení bodů dotyku je však třeba spustiti se středu S kolmice na obě tečny. Ale také euklidovská konstrukce tečen vedených z bodu A je snadná (viz obr. 127). Tu si sestojíme napřed body dotyku T_1, T_2 . Postupujeme tak, že si nejprve narýsujeme pomocnou kružnici m nad průměrem AS . (To dovedeme provést euklidovsky.) Víme, že m je geometrické místo toho bodu X , pro který platí $\sphericalangle AXS = 90^\circ$. Protože $\sphericalangle AT_1S = 90^\circ$, $\sphericalangle AT_2S = 90^\circ$, leží oba body T_1, T_2 na kružnici m . Tedy body dotyku tečen vedených ke kružnici k z bodu A jsou průsečíky kružnice k s pomocnou kružnicí m nad průměrem AS , kde S je střed kružnice k . Tečny samy dostaneme, spojíme-li bod A se sestrojenými body dotyku.

Všimněme si znovu obr. 127! Máme v něm dva pravoúhlé trojúhelníky AST_1, AST_2 , které mají společnou přeponu; mimo to je $\overline{ST_1} = \overline{ST_2}$ (proč?). Tedy oba pravoúhlé trojúhelníky se shodují v přeponě a v jedné odvěsně, takže je

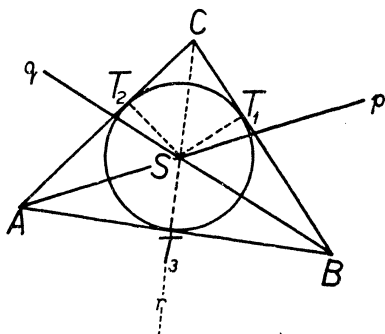
$$AST_1 \cong AST_2. \quad (*)$$

Ze vztahu (*) následuje $\overline{AT}_1 = \overline{AT}_2$. Bod vně kružnice je stejně vzdálen od bodů dotyku obou tečen vedených z něho ke kružnici. Mimo to ze vztahu (*) následuje

$$\sphericalangle SAT_1 = \sphericalangle SAT_2,$$

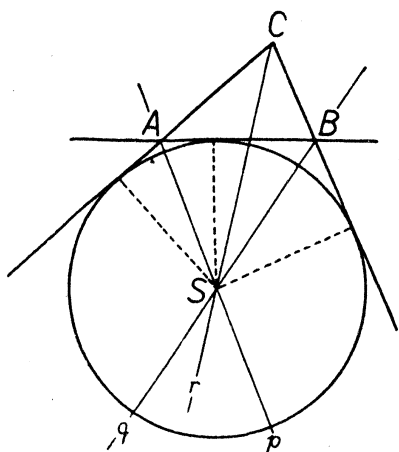
t. j. polopřímka AS je osou úhlu $\sphericalangle T_1AT_2$.

Zvolte si trojúhelník ABC (viz obr. 128). Chceme si odůvodnit, že mu lze vždy vepsat kružnici a také se chceme naučit, jak se vepsaná kružnice k sestrojí. Střed S kružnice k musí být někde uvnitř trojúhelníka. Vzdálenosti bodu S od všech tří stran trojúhelníka musí být stejné; neboť přímky AB , AC , BC mají být tečnami kružnice k . Obráceně, najdeme-li uvnitř trojúhelníka ABC takový bod S , že jeho



Obr. 128.

vzdálenosti od stran trojúhelníka se všechny tři rovnají téže délce r , tu kružnice se středem S a poloměrem r bude patrně vepsána do trojúhelníka ABC . Tedy hledáme bod S podrobený dvojí podmínce: p ř e d n ě jeho vzdálenost od přímky AB má být taková jako jeho vzdálenost od přímky AC , z a druhé jeho vzdálenost od přímky AB má být taková jako jeho vzdálenost od přímky BC . Proto bod S dostaneme jako průsečík dvou geometrických míst. Sestrojíme si napřed polopřímku p , která je osou úhlu α . Víte, že každý bod polopřímky p je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky AC ; polopřímka p je částí geometrického místa bodu stejně vzdáleného od přímky AB jako od přímky AC . Víte, že toto geometrické místo se skládá ze dvou přímek (z kterých?). Ale je zbytečné rýsovat to geometrické místo celé, neboť hledaný bod S má ležet uvnitř trojúhelníka ABC , kdežto ta část geometrického místa, která v obr. 128 není narýsována, jistě je vně trojúhelníka. Dále si narýsujeme polopřímku q , která je osou úhlu β . Zase každý bod polopřímky q je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky BC , a každý bod uvnitř trojúhelníka ABC stejně vzdálený od AB jako od BC leží na polopřímce q . Je patrné, že se polopřímky p a q protnou v určitém bodě S uvnitř trojúhelníka ABC . Protože bod S leží



Obr. 129.

kružnici k se středem S a poloměrem r , je k kružnice vepsaná do trojúhelníka ABC . Tedy jsme poznali, že do každého trojúhelníka lze vepsati kružnici, a umíme tuto kružnici narýsovat. Mimo to jsme shledali: **Osy všech tří úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, totiž ve středu kružnice vepsané.**

Kružnice vepsaná do trojúhelníka ABC není jediná kružnice, která se dotýká všech tří přímek AB , AC , BC . Jsou ještě tři další takové kružnice, kterým se říká **kružnice připsané trojúhelníku ABC** . Každá z nich je připsána k jedné ze tří stran trojúhelníka. V obr. 129 vidíte kružnici připsanou ke straně AB . Její střed S dostaneme, sestrojíme-li si kterékoli dvě ze tří polopřímek, jež jsou v obr. 129 označeny p , q , r . Při tom je r osa vnitřního úhlu při vrcholu C , kdežto p , q jsou osy vnějších úhlů při vrcholech A , B . Odůvodněte sami, proč je bod S stejně vzdálen od všech tří přímek AB , AC , BC .

Cvičení k § 11.

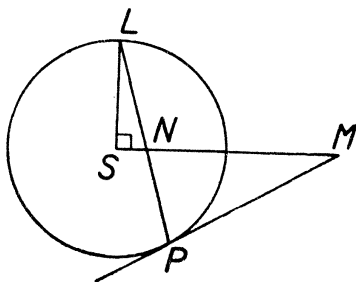
I. Tečna kružnice v daném bodě.

223. AB je průměr kružnice k . Dokažte, že tečny kružnice k v bodech A , B jsou mezi sebou rovnoběžné.

224. Na kružnici k s průměrem AB si zvolte bod C . Sestrojte kružnici m , která má střed v bodě A a prochází bodem C . Dokažte, že přímka BC je tečnou kružnice m v bodě C .

225. Narýsujte si dvě soustředné kružnice, menší si označte k_1 , a větší k_2 . Na kružnici k_1 si zvolte bod E a sestrojte tečnu t kružnice k_1 v bodě E . Označte F, G průsečíky přímky t s kružnicí k_2 . Dokažte, že $\overline{EF} = \overline{EG}$.

226. Na kružnici k se středem S si zvolte dva body H, K . Sestrojte tečnu t kružnice k v bodě H . Označte P patu kolmice spuštěné s bodu K na přímku t . Dokažte, že polopřímka KH je osou $\sphericalangle SKP$. [Oba úhly $\sphericalangle SKH, \sphericalangle HKP$ porovnejte s úhlem $\sphericalangle KHS$].



Obr. 130.

227. V obr. 130 S je střed kružnice a $\sphericalangle LSM = 90^\circ$. Dokažte, že $\overline{MN} = \overline{MP}$. [Spojte SP .]

II. Tečny rovnoběžné s danou přímkou.

228. Narýsujte si kružnici k s poloměrem 37 mm a zvolte si přímku p třeba mimo kružnici k . Sestrojte euklidovsky ten bod kružnice k , ve kterém je tečna rovnoběžná s přímkou p a sestrojte tu tečnu. (Dvě řešení.)

III. Tečny vedené z bodu na kružnici.

229. Narýsujte si kružnici k (střed S , poloměr 34 mm). Zvolte si bod H ve vzdálenosti 56 mm od bodu S . Sestrojte euklidovsky obě tečny vedené ke kružnici k z bodu H . Změřte vzdálenosti bodu H od bodů dotyku.

230. Rovnoběžník je opsán kružnicí. Dokažte, že je to kosočtverec, jehož úhlopříčky se protnou ve středu kružnice.

231. Ke kružnici se středem S jsou vedeny dvě mezi sebou rovnoběžné tečny a ještě jedna tečna, která protne první dvě v bodech G, H . Dokažte, že $\sphericalangle GSH = 90^\circ$.

IV. Kružnice vepsaná do trojúhelníka a pod.

232. a) Sestrojte znovu trojúhelník ABC podle údajů ze cvič. 214 a). Sestrojte kružnici vepsanou a všechny tři kružnice připsané.

b) Opakujte s trojúhelníkem ze cvič. 214 b).

233. Narýsujte si dvě rovnoběžky p, q a třetí přímku r s nimi různoběžnou. Sestrojte kružnici, která se dotýká všech tří přímek p, q, r . (Dvě řešení.)

§ 12. Početní úlohy o obsahu, povrchu a objemu.

234. Strana čtverce je rovna

a) 27,15 m; b) 13,78; c) $3\frac{3}{4}$ m; d) $2\frac{5}{6}$ m; e) $\frac{7}{1\frac{1}{2}}$ m.

Určete jeho obvod!

235. Strana čtverce je rovna

a) 7,85 m; b) 12,09 m; c) 0,025 m; d) $5\frac{1}{2}$ m; e) $1\frac{1}{4}$ m.

Určete jeho obsah!

236. Kolikrát se zvětší obsah čtverce, jestliže stranu

- a) zdvojnásobíme, b) ztrojnásobíme?

Vysvětlete obrazcem od ruky! Proveďte číselný příklad!

237. Určete obsah obdélníkové zahrady, jestliže její šířka je 13,4 m a délka je

- a) o 12,6 m větší než šířka;
b) třikrát větší než šířka;
c) $2\frac{1}{2}$ krát větší než šířka!

238. Kolik arů měří obdélníkový pozemek, jestliže

- a) délka je 1,72 km, šířka 0,34 km;
b) délka je 516 m, šířka 720 m?

239. Jak se změní obsah obdélníka, jestliže

- a) ztrojnásobíme délku,
b) zdvojnásobíme šířku,
c) ztrojnásobíme délku a zdvojnásobíme šířku,
d) ztrojnásobíme délku a šířku zmenšíme na polovinu,
e) ztrojnásobíme délku i šířku,
f) ztrojnásobíme délku a šířku zmenšíme na třetinu,
g) délku i šířku zmenšíme na třetinu,
h) délku zvětšíme o polovinu a šířku zmenšíme na polovinu,
i) délku zvětšíme o polovinu a šířku zmenšíme o třetinu?

Vysvětlujte obrazci od ruky! Přesvědčujte se o správnosti odpovědi jednoduchými číselnými příklady!

240. Jak široké je pole obsahu 4 ha, je-li jeho délka 625 m?

241. Kolik osob je možno umístiti do sálu rozměrů 59 m a 26 m, počítáme-li, že na 1 m² mohou pohodlně stát 4 osoby?

242. Zahrada tvaru obdélníka rozměrů 169 m $\times$ 95 m byla obezděna zdí 30 cm silnou; oč se zmenšila plocha zahrady?

243. Co je větší, čtverec o straně 7 29 m nebo obdélník o stranách 8,83 m; 6,02 m? Oč?

244. Obdélník délky $1\frac{1}{2}\frac{1}{1}$ m má stejný obsah jako čtverec o straně $1\frac{1}{7}$ m. Určete šířku obdélníka!

245. Na dvoře $25\frac{3}{4}$ m dlouhém a $16\frac{1}{4}$ m širokém vykopal hospodář čtvercovou jámu o straně $6\frac{3}{4}$ m. Kolik čtverečních metrů volné plochy mu zůstalo?

246. O kolik procent se zvětší obsah obdélníka, zvětšíme-li oba rozměry, každý o 10%. Přesvědčte se o správnosti odpovědi na obdélníku délky 60 m a šířky 50 m!

247. O kolik procent se zmenší obsah obdélníka, zmenšíme-li oba rozměry, každý o 20 %? Zase se přesvědčte o správnosti na obdélníku s rozměry, 60×50 m!

248. Jak se změní obsah obdélníka, jestliže jeden rozměr zvětšíme o 10% a druhý zmenšíme o 10%? O kolik procent? Opět se přesvědčte o správnosti na obdélníku s rozměry $60 \text{ m} \times 50 \text{ m}$!

249. Délku obdélníka zvětšíme o 20%. O kolik procent musíme zmenšit šířku, aby obsah zůstal nezměněn? Znovu se přesvědčte o správnosti na obdélníku s rozměry $60 \text{ m} \times 50 \text{ m}$!

250. O kolik procent se zmenšila plocha zahrady v úloze 203? (Na setiny procenta.)

251. Hrana krychle je rovna

- a) 17,3 m; b) 0,85 m; c) $\frac{2}{3}$ m; d) $1\frac{1}{6}$ m; e) $2\frac{5}{12}$ m.

Určete její povrch!

252. Hrana krychle je rovna

- a) 3,7 m; b) 0,7 m; c) $1\frac{1}{2}$ m; d) $3\frac{1}{2}$ m; e) $2\frac{3}{4}$ m.

Určete její objem!

253. Kolikrát se zvětší

- a) povrch,
b) objem krychle, jestliže hranu zdvojnásobíme?

Přesvědčte se o správnosti na krychli s hranou 1,5 m!

254. Co je větší, 3 krychle s hranou po 5 cm nebo 5 krychlí s hranou po 3 cm?

255. Vypočtete povrch a objem kváдру rozměrů

- a) 14 cm, 16 cm, 50 cm; b) 112 cm, 176 cm, 362 cm;
c) $\frac{3}{4}$ m, $1\frac{1}{2}$ m, $\frac{5}{6}$ m; d) $2\frac{6}{25}$ m, $2\frac{7}{9}$ m, $\frac{9}{14}$ m!

256. Kolik hektolitrů vody naplní nádrž 24 m dlouhou, 15 m širokou a 2 m hlubokou? Kolik hektolitrů je třeba vypustiti, aby hloubka činila pouze $1\frac{1}{2}$ m?

257. Kolik kusů mýdla rozměrů $12,5 \text{ cm} \times 5,5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ se dá umístiti do bedny s rozměry $56 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 22 \text{ cm}$?

258. Kolika cihel je třeba na stavbu zdi 15 m dlouhé, 44 cm silné, 4 m vysoké? Rozměry cihly: $29 \text{ cm} \times 14 \text{ cm} \times 6\frac{1}{2} \text{ cm}$; na spáru mezi cihlami se počítá 1 cm.

259. Kolik plátna je třeba na zabalení bedničky s rozměry $40 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$, je-li na švy třeba 1,8% povrchu bedničky?

260. Na vodovodní roury je třeba vykopat v zemi v délce 35,6 m, šířce $\frac{3}{4}$ m, hloubce 0,6 m. Kolik země je třeba vykopat?

261. Kolik sena se vejde do kůlny délky 3 m 20 cm a šířky o 70 cm menší, může-li seno dosahovat do výše $2\frac{1}{4}$ m? 1 m³ čerstvě sklizeného sena váží 82 kg.

262. Z železného plátu rozměrů $14 \text{ dm} \times 8 \text{ dm}$ byly v rozích odříznuty čtverce o straně 2 dm a ze zbytku byla zhotovena otevřená krabice. Určete objem krabice?

263. Měděný čtvercový plát o straně $\frac{1}{4} \text{ m}$ váží $2,848 \text{ kg}$. Určete tloušťku plátu, jestliže 1 cm^3 mědi váží $8,9 \text{ g}$!

264. Do bedny s obdélníkovým dnem rozměrů $4\frac{1}{2} \text{ m} \times 3\frac{1}{2} \text{ m}$ se nasype žito do výšky $0,8 \text{ m}$. Kolik bude vážit žito za 6 měsíců, jestliže 1 l v době nasypání váží 685 g a jestliže za 6 měsíců se váha zmenší o $0,3\%$?

265. Dřevěná čtvercová deska o straně 2 dm má tloušťku 3 cm . Od desky se odřízne čtverec o straně 5 cm

- a) v rohu, b) podél jedné strany, c) uprostřed.

Určete povrch tělesa, které zbude po odříznutí!

266. Kvádr délky 12 cm a šířky 8 cm má týž objem jako krychle o hraně 1 dm .

- a) Určete výšku a povrch kváдру!
b) O kolik procent (povrchu krychle) má kvádr větší povrch než krychle?
c) O kolik procent (povrchu kváдру) má krychle menší povrch než kvádr?

[Počítejte b) a c) na desetiny procenta!]

267. Kvádr má délku 6 cm a šířku 5 cm .

- a) Čemu se rovná povrch kváдру, je-li jeho výška 1 cm , 2 cm , 3 cm , 4 cm ?
b) Čemu se rovná výška kváдру, je-li jeho povrch 214 cm^2 ?

268. Rozměry kváдру jsou 2 dm , 2 dm , 1 dm .

- a) Oč se zmenší objem kváдру, zmenšíme-li každou hranu o 1 cm , o 2 cm , o 3 cm ?
b) Oč se zvětší objem kváдру, zvětšíme-li každou hranu o 1 cm , o 2 cm , o 3 cm ?

269. Kvádr má délku 3 dm , šířku 2 dm , výšku 1 dm . Vypočtete, oč se zvětší povrch kváдру, zvětšíme-li

- a) délku o 1 cm , 2 cm , 3 cm ;
b) šířku o 1 cm , 2 cm , 3 cm ;
c) výšku o 1 cm , 2 cm , 3 cm ;
d) délku i šířku o 1 cm , 2 cm , 3 cm ;
e) délku i výšku o 1 cm , 2 cm , 3 cm ;
f) šířku i výšku o 1 cm , 2 cm , 3 cm ;
g) každý rozměr o 1 cm , 2 cm , 3 cm ?

270. Kvádru má délku 3 dm, šířku 2 dm, výšku 1 dm. Vypočítejte oč se zmenší povrch kvádru, zmenšíme-li

- a) délku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;
- b) šířku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;
- c) výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;
- d) délku i šířku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;
- e) délku i výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;
- f) šířku i výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;
- g) každý rozměr o 1 cm, 2 cm, 3 cm!

271. Kvádru má délku 11 cm, šířku 6 cm, výšku 2 cm. Vypočtete, kolikrát se zvětší povrch kvádru, zdvojnásobíme-li

- a) délku, c) výšku, e) délku i výšku, g) každý rozměr!
- b) šířku, d) délku i šířku, f) šířku i výšku,

§ 13. Úlohy k opakování.

A. Osová souměrnost.

272. Zvolte přímku p za osu souměrnosti.

- a) Může bod splynout s bodem souměrně sdruženým? Kde leží takové body?
- b) Jakou polohu musí mít úsečka, aby úsečka souměrně sdružená byla jejím prodloužením?
- c) Jaká úsečka splyne s úsečkou souměrně sdruženou? (Dvoje řešení.)
- d) Jaká přímka splyne s přímkou souměrně sdruženou? (Dvoje řešení.)
- e) Jaká přímka je rovnoběžná s přímkou souměrně sdruženou?
- f) Může přímka státí kolmo na přímce souměrně sdružené? Kolik takových přímek prochází daným bodem?

273. Zvolte přímku p za osu souměrnosti. Popište a provedte euklidovskou konstrukci

- a) bodu A' souměrně sdruženého s daným bodem A ;
- b) přímky r' souměrně sdružené s danou přímkou r !

274. Narýsujte pětiúhelník $ABCDE$ a pětiúhelník k němu souměrně sdružený vzhledem k ose AB !

275. Narýsujte čtyřúhelník $ABCD$ a čtyřúhelníky k němu souměrně sdružené vzhledem k osám AB , CD !

276. Narýsujte kružnici k a do ní vpište trojúhelník ABC ! Zvolte bod D na obvodě kružnice k a narýsujte body k němu souměrně sdružené vzhledem k osám AB , AC , BC ! Přesvědčte se, že ty tři body leží na jedné přímce!

277. Narýsujte dvě sobě rovné úsečky AB a CD ! Určete dvě přímky p , q tak, aby úsečka souměrně sdružená s AB vzhledem k ose p splynula s úsečkou souměrně sdruženou s CD vzhledem k ose q ! (Za přímku p se může zvolit osa úsečky AC ; je však mnoho jiných způsobů.)

278. Čtyrúhelník, který vznikne spojením dvou trojúhelníků navzájem souměrných vzhledem ke společné straně je jmenuje *deltoid*.

- a) Přesvědčte se, že deltoid vznikne také spojením dvou rovnoramenných trojúhelníků se společnou základnou!
- b) Vyslovte dvě vlastnosti úhlopříček deltoidu!
- c) Který rovnoběžník je zvláštním případem deltoidu?

B. Dvojice úhlů.

279. Narýsujte si od ruky obrazec podle obr. 23 z učebnice (str. 16) a pojmenujte správně tyto dvojice úhlů:

- a) α, β ; b) α, δ ; c) β, δ ; d) γ, δ ; e) γ, ϵ ; f) β, γ ; g) β, ϵ !

280. Jestliže v obr. 9 (str. 14) je $\alpha = 120^\circ$, $\delta = 70^\circ$, čemu se rovnají úhly $\beta, \gamma, \varphi, \psi$?

281. Jestliže v obr. 12 (str. 15) je $\alpha = 40^\circ 36'$, $\omega = 125^\circ 26'$, čemu se rovnají úhly β a φ ?

282. Jestliže v obr. 16 (str. 15) je $\beta = 3\omega$, $\psi = 5\omega$, čemu se rovnají úhly v obrazci vyznačené?

283. Vyložte slovy správně, které úhly nazýváme

- a) vrcholové, b) vedlejší, c) souhlasné, d) střídavé, e) přilehlé?

284. a) Vyslovte správně poučku o tom, kdy dva úhly souhlasné jsou si rovny i poučku obrácenou!

b) Vyslovte obě poučky o úhlech střídavých!

c) Vyslovte, co je vám známo o úhlech přilehlých!

285. Názvy uvedené ve cvičení 244 se týkají polohy úhlů. Čeho se týkají názvy úhlů doplňkové, úhly výplňkové?

286. Jak je nutné změnit úhel 265° v obr. 25 (str. 16), aby (při ponechání velikosti ostatních úhlů) přímky h, s byly rovnoběžné?

287. V jakém smyslu je třeba v obr. 28 (str. 16) prodloužit narýsované části přímk c, d , abychom dostali průsečík těchto přímek?

288. Narýsujte si obrazec podle obr. 3 (str. 11) a v něm osy úhlů φ a ψ ! Jsou ty dvě osy mezi sebou rovnoběžné? Proč?

289. Daným bodem ved'te přímku tak, aby protála dvě dané různoběžky p, q obě pod týmž úhlem! (Sestrojte obě přímky, které pólí úhly tvořené přímkami p, q a dokažte, že hledaná přímka je s jednou z nich rovnoběžná! Daná úloha je dvojznačná.)

C. Úhly trojúhelníka.

290. Dva úhly trojúhelníka jsou:

- a) $53^\circ, 79^\circ$; b) $109^\circ, 36^\circ$; c) $74\frac{1}{2}^\circ, 62\frac{1}{3}^\circ$; d) $83\frac{1}{4}^\circ, 41\frac{1}{2}^\circ$;
e) $1\frac{1}{8}R, \frac{3}{8}R$; f) $\frac{5}{8}R, \frac{2}{3}R$; g) $29^\circ 35' 46'', 83^\circ 52' 54''$.

Určete velikost třetího úhlu!

291. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 46^\circ$, $\beta = 64^\circ$. Uvnitř strany BC leží bod D tak, že $\sphericalangle BAD = 26^\circ$. Určete velikost úhlů trojúhelníků ABD , ACD !

292. Opakujte úlohu 252 s tím rozdílem, že bod D neleží uvnitř strany BC , nýbrž na jejím prodloužení za bod B !

293. Uvnitř strany BC trojúhelníka ABC leží bod D . Určete úhly trojúhelníků ABD , ACD , jestliže $\sphericalangle ADC = 70^\circ$, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, $\sphericalangle ACB = 50^\circ$!

294. Opakujte úlohu 254 s tím rozdílem, že $\sphericalangle ADC = 82^\circ 36' 36''$, $\sphericalangle ABC = 58^\circ 45' 38''$, $\sphericalangle ACB = 43^\circ 13' 29''$!

295. Jestliže v obr. 40 (str. 24) je $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 42^\circ$, $\gamma = 133^\circ$, čemu se rovná úhel β ?

296. Opakujte úlohu 256 s tím rozdílem, že $\alpha_1 = 49^\circ 27' 56''$, $\alpha_2 = 39^\circ 56' 62''$, $\gamma = 142^\circ 44' 55''$!

297. Jestliže v trojúhelníku ABC je a) $\alpha = 2\beta$, b) $\alpha = 3\beta$, c) $\alpha - \beta = 50^\circ$ a jestliže mimo to $\gamma = 48^\circ$, určete úhly α a β !

298. Jestliže v trojúhelníku ABC je $\alpha > \beta > \gamma$, $\beta = 70^\circ$, co můžete říci o velikosti úhlu α ? Co o velikosti úhlu γ ?

299. V trojúhelníku ABC budiž AU osa úhlu α , BV osa úhlu β . Dokažte, že $\sphericalangle AUB$ je vždy tupý! b) Vyjádřete velikost $\sphericalangle AUB$ pomocí velikosti úhlu γ ? (Proveďte napřed pro $\gamma = 60^\circ$, $\gamma = 40^\circ$, $\gamma = 80^\circ$, potom obecně!)

300. Dá se dokázat, že všechny tři výšky trojúhelníka ABC se protnou v jediném bodě H ; je-li trojúhelník ostroúhlý, leží H uvnitř trojúhelníka. Výšky v tomto případě vymezí šest úhlů s vrcholem H , z nichž dva a dva jsou vrcholové. Dokažte, že dva z těchto šesti úhlů jsou rovny α , dva rovny β a dva rovny γ ! (Proveďte napřed pro $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 50^\circ$, potom obecně!)

D. Úhly rovnoramenného trojúhelníka.

301. Úhel proti základně rovnoramenného trojúhelníka je roven a) $1\frac{2}{7}R$, b) $105^\circ 27' 38''$. Určete velikost úhlu při základně!

302. Úhel při základně rovnoramenného trojúhelníka je roven a) $\frac{5}{9}R$, b) $70^\circ 43' 27''$. Určete velikost úhlu proti základně!

303. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Uvnitř strany BC leží bod D tak, že $\overline{CD} = \overline{CA}$. Určete velikost úhlů trojúhelníků ABD a ACD !

304. Opakujte úlohu 264 s tím rozdílem, že bod D leží na prodloužení strany BC za bod C !

305. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 85^\circ$, $\beta = 44^\circ$. Na prodloužení strany AC

a) za bod A ,

b) za bod C leží bod D tak, že $\overline{CD} = \overline{CB}$.

Určete velikost úhlů trojúhelníků ABD a BCD !

306. V trojúhelníku ABC je $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\beta = 36^\circ$. Dokažte, že osa úhlu α dělí ABC na dva rovnoramenné trojúhelníky!

307. Stranu BC trojúhelníka ABC prodlužte jednak za bod B o délku $\overline{BD} = \overline{AB}$, jednak za bod C o délku $\overline{CE} = \overline{AC}$; vyjádřete úhly trojúhelníka ADE pomocí úhlů trojúhelníka ABC !

308. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 50^\circ$. Uvnitř strany BC leží body D, E tak, že $\overline{BD} = \overline{AB}$, $\overline{CD} = \overline{AC}$. Vypočtěte úhly trojúhelníků ABE , AED , ADC !

E. Shodné trojúhelníky.

309. Jestliže $DHF \cong KAS$, запиште správně, které strany jsou si rovny a které úhly jsou si rovny!

310. Vyslovte čtyři základní poučky o určenosti trojúhelníků! Vyslovte je ve tvaru pouček o shodnosti trojúhelníků!

311. Vyslovte tři základní poučky o určenosti pravoúhlého trojúhelníka! Vyslovte je ve tvaru pouček o shodnosti pravoúhlých trojúhelníků!

312. Uvnitř ramen AB, AC rovnoramenného trojúhelníka ABC zvolte body D, E tak, že $\overline{AD} = \overline{AE}$. Dokažte, že trojúhelníky BCD a BCE jsou shodné; запиште správně shodnost! Potom dokažte, že trojúhelníky ABE a ADC jsou shodné; zase запиште správně shodnost!

313. Nad stranami AB a AC libovolného trojúhelníka ABC sestrojte rovnostranné trojúhelníky ABK a ACL tak, aby zasahovaly dovnitř trojúhelníka ABC ! Spojte CK, BL ! Který trojúhelník v obrazci je shodný s trojúhelníkem ABL ? Která úsečka v obrazci je rovna úsečce BL ? Který úhel v obrazci je roven $\angle ABL$?

314. Budiž BC základna rovnoramenného trojúhelníka ABC . Na přímce AB určete body D, E, F tak, že $\overline{AD} = \overline{BD}$, že CE je osa úhlu γ a že $CF \perp AB$! Na přímce AC určete body G, H, K tak, že $\overline{AG} = \overline{GC}$, že BH je osa úhlu β a že $BK \perp AC$! Na základě shodnosti trojúhelníků dokažte:

a) $\overline{BG} = \overline{CD}$, b) $\overline{BH} = \overline{CE}$, c) $\overline{BK} = \overline{CF}$!

Ke každé úloze zvláštní obrazec! K úloze c) si narýsujte dva obrazce, jeden pro případ ostrého úhlu α , druhý pro případ tupého úhlu α ! V případě pravého úhlu α je výsledek úlohy c) samozřejmý; proč?

F. Rovnoběžník.

315. Určete úhly rovnoběžníka, jestliže

- jeden z nich je roven $1\frac{1}{5}R$;
- jeden je trojnásobek druhého;
- jeden je o 30° větší než druhý;
- jeden je o 30° větší než dvojnásobek druhého;
- jeden je o 40° menší než trojnásobek druhého!

316 Určete délky stran rovnoběžníka, jestliže jedna z nich, dlouhá 9 cm, je čtvrtinou obvodu!

317. Poměr dvou stran rovnoběžníka je $3:5$ a obvod měří 24 cm. Určete délky stran!

318. U rovnoběžníka $ABCD$ jest $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{AC} = 3$ cm; na straně CD leží body E, F tak, že AE je osa úhlu α , BF je osa úhlu β . Určete délky $\overline{CE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$!

319. Osy úhlů α a β rovnoběžníka $ABCD$ se protnou na straně CD . Dokažte, že $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AC}$!

320. Bod E uvnitř strany AB rovnoběžníka $ABCD$ spojte s průsečíkem S úhlopříček rovnoběžníka a prodlužte až k průsečíku F se stranou CD ! Dokažte, že S půlí úsečku EF ! (Napřed dokažte, že $SBE \cong SDF$, potom $BEDF$ je rovnoběžník!)

321. Jedna úhlopříčka kosočtverce je rovna jedné jeho straně. Určete úhly kosočtverce!

322. Strana kosočtverce tvoří s úhlopříčkami úhly φ, ψ . Určete úhly kosočtverce, jestliže

$$\text{a) } \varphi - \psi = 10^\circ, \quad \text{b) } \varphi : \psi = 2 : 3!$$

323. Výška spuštěná s vrcholu tupého úhlu kosočtverce půlí protější stranu. Určete úhly kosočtverce!

324. Výška kosočtverce se rovná 2 cm, obvod 16 cm. Určete úhly kosočtverce!

325. Strana obdélníka svírá úhlopříčkou úhel 36° . Určete ostrý úhel obou úhlopříček!

326. Určete úhel mezi menší stranou obdélníka a úhlopříčkou, je-li tento úhel o 30° menší než ostrý úhel obou úhlopříček!

327. Úhlopříčky obdélníka svírají úhel 60° . Součet obou úhlopříček a obou menších stran je roven $3,6$ cm. Určete délku úhlopříček!

328. Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka je vepsán obdélník tak, že dva jeho vrcholy leží na přeponě a druhé dva na odvěsnách. Přepona trojúhelníka měří 45 cm; poměr stran obdélníka je $2 : 5$. Určete délky stran obdélníka!

329. Osa pravého úhlu pravoúhlého trojúhelníka protne přeponu v bodě, jímž vedeme rovnoběžky s oběma odvěsnami. Dokažte, že vznikne čtverec!

330. Narýsujte osy všech čtyř úhlů obdélníka a dokažte, že vznikne čtverec!

G. Konstrukce.

331. Sestrojte součet tří narýsovaných úhlů!

332. Sestrojte rozdíl dvou narýsovaných úhlů!

333. Zvolte si dvě úsečky a a b ! Sestrojte dvě úsečky tak, aby jejich součet byl roven a a rozdíl byl roven b !

334. Zvolte si dva úhly α a β tak, že $\alpha > \beta$! Sestrojte dva úhly tak, aby jejich součet byl roven α a rozdíl byl roven β !

335. Zvolte si úhel α a sestrojte úhel rovný $\frac{1}{4}\alpha$!

336. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno:

a) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 75^\circ$;

b) $a = 5$ cm, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$;

c) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 75^\circ$;

d) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm;

e) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $\beta = 30^\circ$.

Kolik řešení má úloha e)?

337. Bodem zvoleným uvnitř úhlu ved'te přímku tak, aby vytínala na obou ramenech úhlu úsečky sobě rovné! (Čím bude kolmice spuštěná na hledanou přímku s vrcholu úhlu?)

338. Na přímce protínající obě ramena daného úhlu sestrojte bod stejně vzdálený od obou ramen! (Čím bude spojnice hledaného bodu s vrcholem úhlu?)

339. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby odvěsna BC se rovnala 4 cm a aby součet přepony a druhé odvěsny AC byl roven 7 cm! (Je-li D na prodloužení AC za bod A tak, že $\overline{AD} = \overline{AB}$, sestrojte nejprve trojúhelník BCD !)

340. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby odvěsna BC se rovnala 4 cm a aby rozdíl přepony a druhé odvěsny AC byl roven 2 cm! (Řeší se podobně jako úloha 339.)

341. Daným bodem A ved'te přímku tak, aby protčala danou přímku p pod úhlem 75° ! (Dvě řešení.)

342. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $a = 5$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 75^\circ$!

343. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$ a je-li obvod roven 1 dm! (Je-li D na prodloužení strany AB za bod A , dále E na prodloužení AB za bod B tak, že $\overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{BE} = \overline{BC}$, můžeme napřed sestrojit trojúhelník CDE , protože umíme určit jeho úhly při vrcholech D a E .)

344. Sestrojte rovnoběžník se stranami 4 cm a 7 cm tak, aby výška spuštěná s vrcholu tupého úhlu půlila protější stranu!

345. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby součet strany a úhlopříčky byl roven 8 cm! (Je-li E na prodloužení strany AB za bod A tak, že $\overline{AE} = \overline{AC}$, můžeme napřed sestrojit trojúhelník BCE , protože umíme určit jeho úhel při vrcholu E .)

ABECEDNÍ SEZNAM GEOMETRICKÝCH POJMŮ Z LÁTKY I. A II. TŘÍDY.

(I 3₁₂ znamená učebnici pro I. třídu, stranu 3, řádek 12 zdola, II 76⁴ znamená učebnici pro II. třídu, stranu 76, řádek 4 shora a podobně v jiných případech.)

Bod I 3₁₂, b. dotyku II 76⁴, b. krajní (úsečky) I 4₀
centimetr I 7⁵, I 44₅, čtvereční cm I 44₁, krychlový cm I 49₃, I 51₈
čára I 3², č. křivá I 3⁵, č. lomená I 5¹, č. přímá I 3⁵
čtverec I 35₁, II 47₅
čtyrboký pravidelný jehlan I 38₂
čtyrstěn pravidelný I 39¹
čtyrúhelník I 8⁵, I 22
decilitr I 52⁴
decimetr I 44₅, čtvereční dm I 44₁, krychlový dm I 51₈
délka kvádry I 33⁸, d. obvodu I 8₅, d. obdélníka I 32₀, I 33⁴, d. poloměru I 10¹⁷, d. průměru I 11₁₂, d. úsečky I 7²
délková jednotka I 7⁰, I 44₅
díametros I 11₁₀
doplňkové úhly I 67¹³
dotyk přímky s kružnicí I 25₆, II 74 a násl.
dotýkati se II 75₁
dotyku bod II 76⁴
duté míry I 52⁵
dutý úhel I 59²
Eukleides (Euklid) II 3⁵
euklidovská konstrukce II 3¹², II 50 a násl., e. k. kolmice II 5; II 8, II 52, e. k. osy úsečky II 4, e. k. osy úhlu (rozpůlení úhlu) II 6, e. k. přenesení úhlu II 5₁₀ (viz I 61 a násl.), e. k. rovnoběžky II 6, II 53, e. k. středu úsečky II 4, e. k. úhlu 60° II 7, e. k. úhlů 45°, 135°, 22½° II 6, e. k. úhlů 120°, 30°, 150°, 15° II 8
geometrické místo II 62 a násl., II 69₁₆
geometrie I 3³, I 27⁷, I 43², II 3²
grafické odčítání úseček I 9³, úhlů I 63⁴
grafické násobení úsečky číslem I 9⁴, úhlu číslem I 63⁴
grafické sčítání úseček I 8₆, úhlů I 63⁴
hektar I 45⁴
hektolitr I 52³
hloubkový úhel II 35₁₆
hrana kvádry I 27₅
hranol pravidelný pětiboký I 39⁸

jednotka délková I 7⁰, I 44₅, j. plošná I 44₁, j. prostorová I 49₃, I 51₈
jehlan pravidelný čtyrboký I 38₂, j. p. pětiboký I 39³
kilometr I 44₅, čtvereční km I 45¹
kolmost přímek I 19⁰, k. přímky k rovině I 54⁰, k. (značka $\perp$) I 19⁰
konstrukce I 14₁₂, k. euklidovská II 3¹², II 50 a násl., k. pomocná II 12⁸
kosočtverec II 46₁₀
kosý úhel I 58₇
krajní bod úsečky I 4₀
kruh I 10⁷
kruhovatá úseč I 11⁰, k. výseč I 11¹²
kružítka I 10₁₄
kružnice I 10⁸, k. soustředné I 11¹
krychle I 27¹⁴
křivá čára I 3⁵
kvádr I 27¹⁵
lichoběžník II 22¹³
litr I 51₁
lomená čára I 5¹
měnitel I 44₁, I 45⁷, I 51₈
menší (značka $<$) I 16₁₂
měřictví I 43⁵
měřítka I 7²
metr I 44₅, čtvereční m I 45¹, krychlový m I 51₈
mezikružší I 11²
milimetr I 7⁵, I 44₅, čtvereční mm I 44₁, krychlový mm I 51₈
mimoběžné přímky n. mimoběžky I 53¹³
minuta (úhlová) I 64²
místo geometrické II 62 a násl., II 69₁₆
mnohouhelník (pravidelný) I 70⁶, II 20₁₆, m. vypuklý II 21⁴
násobení grafické úsečky číslem I 9⁴, úhlu číslem I 63⁴
obdélník I 24², I 31 a násl., I 45, II 46¹, II 46⁰, o. obecný I 36₁₁
objem I 49₅, o. kvádry I 51³, o. krychle I 51¹⁰
oblouk I 11⁰
obrácená poučka II 12₅
obraz II 58₁₈, II 61⁷
obsah (plošný) I 44⁸, o. čtverce I 45₁₃, I 45₃, o. obdélníka I 45¹¹

obvod I 8², I 8_s
 odčítání grafické úseček I 9³, úhlů I 63⁴
 odvěsna I 19₇
 opsati kružnici čtverci I 36₁₂, o. k. obdélníku I 34₂, o. k. trojúhelníku II 70
 osa souměrnosti II 3₀, II 58¹², o. úhlu II 5₀, II 5₁, o. úsečky II 4², II 64₄
 osová souměrnost II 3₁₁, II 58¹¹
 osy dvou různoběžek II 66², II 66⁶
 o. stran trojúhelníka II 70, o. úhlů trojúhelníka II 78
 pás přímý I 23₀
 pata kolmice na přímkou I 19₁₃, p. k. na rovinu I 54¹⁰
 pětiboký pravidelný hranol I 39⁸, p. p. jehlan I 39¹
 pětiúhelník I 9⁵, I 39⁴
 plný úhel I 56₃
 plocha I 8¹, I 10⁸, I 27₁₂, p. rovná n. rovinná I 28₃, p. zakřivená I 28₂
 plošná jednotka I 44₁
 plošný obsah I 44⁸
 pobočná hrana I 27₂, p. stěna I 27₀
 podstava kváдру I 27₈
 polokruh I 11₀
 polokružnice I 11₃
 poloměr I 10¹⁶, I 10¹⁸
 polopřímka I 58³
 pomocná konstrukce II 12⁸
 poučka II 11₂, p. obrácená II 12₀
 povrch I 27₁₀, I 48⁶
 pravidelný čtyřboký jehlan I 38₂, p. čtyřstěn I 39¹, p. mnohoúhelník I 70⁸, II 20₁₀, p. pětiboký hranol I 39⁸, p. pětiboký jehlan I 39³, p. pětiúhelník I 39⁵, p. šestiúhelník I 70⁹
 pravítko I 3⁰, p. pomocné I 20₂, p. trojúhelníkové I 3⁶
 pravoúhlý trojúhelník I 19₁₀, I 67⁷, II 55
 pravý úhel I 19¹⁵, I 56₇
 prostor I 27⁷
 prostorová jednotka I 49₃, I 51₈
 protější vrcholy, strany a úhly čtyřúhelníka II 22², p. strany rovnoběžníka II 43₄, II 44¹¹, II 44₁₁
 průčelná poloha kváдру I 30₃
 průměr I 11₁₃, I 11₁₁, I 11₄
 průmět tělesa I 40⁸
 průsečnice I 53₃
 průsečík přímek I 4⁴, p. přímky s rovinou I 53₀, p. výšek trojúhelníka II 71₁₃

přenášení úsečky I 12, p. úhlu I 61
 přepona I 19₀
 příčka střední I 36⁶ (u čtverce), I 34⁴ (u obdélníka), dvě přímky prořáté příčkou II 10₁₂
 přilehlé úhly II 11¹, II 12⁵, II 13¹⁷, II 14¹, II 25₂
 přímá čára I 3⁰
 přímka I 3⁸
 přímý pás I 23₀, p. úhel I 56₄
 připsané kružnice II 78₁₄
 radius I 10₁₈
 rameno lichoběžníka II 22¹⁵, r. trojúhelníka rovnoramenného I 17₁₈, r. úhlu I 58⁶
 rovina I 28⁹
 rovinná n. rovná plocha I 28₃
 rovnoběžka I 23⁷
 rovnoběžník II 22₁₂, II 43 a násl.
 rovnoběžnost (značka ||) I 23¹⁰, r. dvou přímek I 23⁷, r. dvou rovin I 53, r. přímky s rovinou I 53₁₅
 rovnoramenný trojúhelník I 17₁₇, II 37
 rovnostranný trojúhelník I 17₁₄, II 53⁴
 rozměry kváдру I 33⁷, r. obdélníka I 33²
 rozpůlit úsečku I 11₂ (zkusmo), I 12 (proužkem papíru), II 4 (euklidovský), r. úhel II 6
 různoběžka I 53⁷
 různoběžník II 22¹⁰
 různoběžnost dvou přímek I 53⁷, r. dvou rovin I 53₀, r. přímky s rovinou I 53₀
 různostranný trojúhelník I 17₁₀
 rýsování kolmic I 21, r. kružnice I 10, r. přímky I 5, r. rovnoběžek I 24, I 25
 samodružný bod II 58₁₅, II 61⁶
 sčítání grafické úseček I 8₀, s. g. úhlů I 63³
 sečna kružnice I 75²
 sevřený úhel II 26₁₂
 shodnost I 33₁₇, II 6₂, s. trojúhelníků II 26, II 27, II 28, II 40, značka shodnosti $\cong$ II 30¹
 síť tělesa I 37₁
 smysl plopřímky II 9₀
 souhlasné úhly II 10₁₀, II 11₄, II 13⁵
 souměrné sdružený útvar II 58¹³, II 60₁
 souměrnost osová II 3₁₁, II 58¹¹, s. středová II 60₃
 sousední vrcholy, strany a úhly čtyřúhelníka II 22²
 soustředné kružnice I 11¹

spojnice I 4₄
spustiti kolmicí na přímku I 19₁₄, s. k.
na rovinu I 54⁹

sss II 28₁₄

státi kolmo I 19⁶, I 54⁸

stěna kvádru I 27₁₁

Stoicheia II 3⁶

strana čtyřúhelníka I 8⁶, s. trojúhel-
níka I 8⁹

střed kružnice I 10¹¹, s. kvádru I 54₂,
s. obdélníka I 34₁₁, s. souměrnosti
II 60₂, s. úsečky I 11₃, střední příc-
ka čtverce I 36⁶, s. p. obdélníka
I 34⁴

stupeň I 63₆

svislá přímka I 30₁₆, s. rovina I 30₁₅
šestiúhelník I 9⁷, š. pravidelný I 70⁹
šikmá přímka I 30₁₁, š. rovina I 30₁₁
šipka I 58₂, II 9₁₄, II 11⁶
šifka kvádru I 33⁹, š. mezikruží I 11³,
š. obdélníka I 32₄, I 33⁴, š. přímého
pásu I 23₆

tečna kružnice II 75

těleso I 27¹¹

tětiva I 11⁷, II 68 a násl.

Thaletova věta II 48⁸, II 66₆

trojúhelník I 7₅, t. (označení $A, B, C,$
 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$) II 25, t. kosoúhlý
I 67⁹, t. ostroúhlý I 67⁶, t. pravo-
úhlý I 19₁₀, I 67⁷, II 55, t. rovno-
ramenný I 17₁₇, II 37, t. rovnostran-
ný I 17₁₄, II 53⁴, t. různostranný
I 17₁₈, t. tupoúhlý I 67⁸

tupý úhel I 58₆

úhel I 56₁₃, ú. (značka $\angle$) I 58₁₀, ú.
dutý I 59², ú. hloubkový II 35₁₀, ú.
kosý I 58₇, ú. obvodový II 48², II 48⁶,
II 48⁸, II 48₂, ú. ostrý I 58₁₀, ú. plný
I 56₃, ú. pravý I 19¹⁵, I 56₇, ú. přímý
I 56₄, ú. sevřený II 26₁₂, ú. tupý
I 58₉, ú. trojúhelníka I 60₉, II 17²,
II 17₄, ú. vnější (mnohoúhelníka)
II 19₉, II 20⁸, ú. vnější (trojúhelní-
ka) I 68⁹, II 17₁₄, ú. vnitřní (mno-
hoúhelníka) II 19², II 19₁₁, ú. vnitřní
(trojúhelníka) I 60₁₀, II 17², II 17₁₄,
ú. vypuklý I 59³, ú. výškový II 85₁₇

úhломěr I 64₄

úhlopříčka I 8⁷, ú. čtverce I 36₃, ú.
kvádru I 54₁₄ (stěnová), I 54₁₅ (tě-
lesná), ú. kosočtverce II 46₅, II 47⁴,
II 47₁₇, ú. obdélníka I 34₁₀, II 46¹,
ú. rovnoběžníka II 45², II 45¹⁵

úhly doplňkové I 67¹³, ú. přilehlé
II 11¹, II 12⁵, II 13¹⁷, II 14¹, II 25₂,
ú. souhlasné II 10₁₀, II 11₁, II 13⁵,
ú. střídavé II 10₈, II 12¹, II 13⁹, ú.
vedlejší I 64⁷, II 11₁₀, ú. vrcholové
I 64⁸, II 11₁₀, ú. výplňkové I 63₂

umocnit číslo na druhou I 45₁₄, u. č.
na třetí I 51⁸

určenost trojúhelníka II 26, II 27,
II 28, II 40, u. t. pravoúhlého II 55,
u. t. rovnoramenného II 56₁₀

úseč kruhová I 11⁹

úsečka I 3⁹

usu II 28₁₀

uus II 29¹

vedlejší úhly I 64⁷, II 11₁

vepsati kružnici do čtverce I 36₁₄, v.
k. do trojúhelníka II 77

větší (značka $>$) I 16₁₂

vnější úhel mnohoúhelníka II 19₉,
II 20⁸, v. ú. trojúhelníka I 68⁹,
II 17₁₄

vnitřní úhel mnohoúhelníka II 19²,
II 19₁₁, v. ú. trojúhelníka I 60₁₀,
II 17², II 17₁₄

vodorovná přímka I 30₁₃, v. rovina
I 30₁₄

vrchol čtyřúhelníka I 8⁶, v. kvádru
I 28¹, v. obdélníka I 31₁₂, v. pravé-
ho úhlu I 19¹⁵, v. trojúhelníka I 7₄,
v. úhlu I 58⁶

vrcholové úhly I 64⁸, II 11₁₀

vteřina (úhlová) I 64²

výplňkové úhly I 63₂

vypuklý mnohoúhelník II 21⁴, v. úhel
I 59³

výseč kruhová I 11¹²

výška kvádru I 33⁹, v. obdélníka I 32₇,
I 32₆, I 33⁴, v. trojúhelníka II 71

výškový úhel II 35₁₇

vzdálenost bodu od přímky I 21₆,
II 39₁₀, v. dvou bodů I 7¹⁰, v. dvou
rovnoběžek I 23₅

vztýčiti kolmicí na přímku I 19₁₅, v. k.
na rovinu I 54¹¹

základna lichoběžníka II 22¹⁴, z. ob-
délníka I 32₉, z. trojúhelníka rov-
noramenného I 17₁₈

Základy (Euklidovy) II 3⁶

zakřivená plocha I 29²

O B S A H :

	Strana
A. Osová souměrnost a euklidovské konstrukce	3
Cvičení k A (A 1—A 15)	8
§ 1. Dvě přímky prořáté příčkou	9
Cvičení k § 1 (1—30)	14
§ 2. Úhly mnohoúhelníka	17
Cvičení k § 2 (31—63)	23
§ 3. Shodné trojúhelníky	25
Cvičení k § 3 (64—103)	30
§ 4. Grafické určování vzdáleností a výšek	34
Cvičení k § 4 (104—122)	35
§ 5. Pokračování o trojúhelníku	37
Cvičení § 5 (123—144)	41
§ 6. Rovnoběžník	43
Cvičení k § 6 (145—161)	49
§ 7. Konstrukce	50
Cvičení k § 7 (162—174)	56
§ 8. Souměrnost osová a souměrnost středová	58
Cvičení § 8 (175—180)	62
§ 9. Geometrická místa	62
Cvičení k § 9 (181—194)	67
§ 10. Tětivy kružnice	68
Cvičení k § 10 (195—222)	72
§ 11. Tečny ke kružnici	74
Cvičení k § 11 (223—233)	78
§ 12. Početní úlohy o obsahu, povrchu a objemu	79
§ 13. Úkoly k opakování	83
Abecední seznam geom. pojmů z látky I. a II. třídy	88



B 390 6/2