Matyáš Lerch

Sur quelques analogies des sommes de Gauss

Věstník Král. čes. spol. nauk, II. tř., 1897, č. 43, 1–16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501502

XLIII.

Sur quelques analogies des sommes de Gauss.

Note de **M. Lerch** à Fribourg (Suisse).

(Présenté dans la séance du 9 juillet 1897)

Les formes quadratiques à des coefficients entiers

$$(1) \qquad ax^2 + bxy + cy^2$$

ayant le même discriminant négatif $b^2 - 4\,ac = -\Delta$, constituent un nombre fini de classes; lorsque les coefficients a, b, c n'ont pas de diviseur commun la forme ainsi que la classe correspondante s'appelle primitive. C'est le nombre des classes primitives correspondant au discriminant $-\Delta$ que je représente par $Cl\,(-\Delta)$.

Dirichlet avait considéré les formes telles que $ax^2 + 2bxy + cy^2$ et a obtenu l'expression du nombre $Cl\,(-\Delta)$ sous forme finie; Kronecker avait simplifié les résultats de Dirichlet en introduisant les formes telles que (1).

Pour bien comprendre les résultats de Kronecker, il faut généraliser un peu le signe $\left(\frac{m}{n}\right)$ introduit par Legendre et Jacobi. Les nombres m, n ne doivent admetre aucun divisieur commun sans quoi le symbole représenterait le zéro.

1) Soit n impair et soit $n = p\,p'\,p''$, . . . sa décomposition en facteurs premiers; on pose

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\left(\frac{m}{p''}\right)\cdots\cdot\,;\left(\frac{m}{-n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right).$$

2) Si n est pair, m sera nécessairement impair, et si l'on a $n = 2^\nu\,n'$, n' étant impair, on pose

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{2^\nu\, n'}\right) = \left(\frac{2^\nu}{m}\right) \cdot \left(\frac{m}{n'}\right).$$

Le discriminant $D = b^2 - 4ac$ doit toujours avoir la forme $4\mu + 1$ ou 4μ, et par conséquent le nombre Δ sera de la forme $4\mu + 3$ ou il sera divisible par 4. Pour ces nombres Δ on a ensuite la relation

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\Delta - m}\right), \quad (m = 1, 2, 3 \ldots \Delta - 1). \tag{2}$$

Cela étant, la formule fondamentale de Dirichlet consiste dans l'équation

$$Cl\,(-\Delta) = H(-\Delta) \cdot \frac{\tau \sqrt{\Delta}}{2\pi}, \tag{3}$$

en posant pour abréger

$$H(-\Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \frac{1}{k}, \tag{4}$$

et en représentant par τ le nombre 2, si Δ surpasse quatre, puis $\tau = 4$ pour $\Delta = 4$ et $\tau = 6$ pour $\Delta = 3$.

Pour transformer la série (4) considérons ses termes jusqu'à l'indice $k = m\Delta$ inclusivement et posons

$$k = h + \mu\Delta;$$

on aura de la sorte

$$\sum_{k=1}^{m\Delta} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \frac{1}{k} = \sum_{h=1}^{\Delta} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{h + \mu\Delta},$$

et grâce à la relation

$$\sum_{h=1}^{\Delta} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) = 0, \left(\frac{-\Delta}{\Delta}\right) = 0,$$

il s'ensuit

$$\sum_{k=1}^{m\Delta} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \frac{1}{k} = \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \sum_{\mu=0}^{m-1} \left(\frac{1}{h + \mu\Delta} - \frac{1}{(\mu + 1)\Delta}\right),$$

d'où il vient pour m infini

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{1}{k}=\frac{1}{\Delta}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{h}{\Delta}+\mu}-\frac{1}{\mu+1}\right).$$

La quantité

$$\psi\left(\frac{h}{\Delta}\right)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu+1}-\frac{1}{\frac{h}{\Delta}+\mu}\right)$$

ayant pour valeur l'expréssion

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{h}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right)}-\Gamma'(1)$$

on aura le résultat

$$(4^{a})\qquad H(-\Delta)=-\frac{1}{\Delta}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\psi\left(\frac{h}{\Delta}\right).$$

Cela étant, changeons h en $\Delta-k$ et employons l'équation (2); il s'ensuit

$$H(-\Delta)=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\psi\left(1-\frac{k}{\Delta}\right);$$

ajoutant membre à membre avec l'équation (4^{a}), et faisant usage de l'équation

$$\psi(x)-\psi(1-x)=-\pi\cot x\pi,$$

il vient

$$(4^{b})\qquad H(-\Delta)=\frac{\pi}{2\Delta}\sum_{k=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\cot\frac{k\pi}{\Delta},$$

ou bien, en faisant usage de l'équation (3),

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\cot\frac{k\pi}{\Delta}=\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\,Cl\,(-\Delta).$$

Cette équation que nous venons d'obtenir par la simple transformation de l'équation de Dirichlet, présente quelque analogie avec les sommes de Gauss. Cette analogie devient encore plus évidente, si l'on choisit pour Δ un nombre premier.

Soit p un nombre premier de la forme $4m+3$ et posons $\Delta=p$; l'équation (5) deviendra dans ce cas

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{k}{p}\right)\cot\frac{k\pi}{p}=\frac{4\sqrt{p}}{\tau}\,Cl(-p).$$

Cela étant, ajoutons membre à membre avec l'identité

$$\sum_{k=1}^{p-1}\cot\frac{k\pi}{p}=0,$$

il s'ensuit

$$2\sum{}'\cot\frac{k\pi}{p}=\frac{4\sqrt{p}}{\tau}\,Cl\,(-p);\quad \left(k=1,2,3,\ldots p-1;\left(\frac{k}{p}\right)=1\right),$$

la sommation s'étendant aux résidus quadratiques de p.

En posant $k=\alpha^2-p\left[\frac{\alpha^2}{p}\right]$, $(\alpha=1,2,3\ldots\ldots p-1)$, chacun des nombres k se trouve deux fois engendré et il vient

$$\sum_{\alpha=1}^{p-1}\cot\frac{\alpha^2\pi}{p}=\frac{4\sqrt{p}}{\tau}\,Cl(-p), \tag{6}$$

ou bien

$$\sum_{\alpha=1}^{\frac{p-1}{2}}\cot\frac{\alpha^2\pi}{p}=\frac{2\sqrt{p}}{\tau}\,Cl\,(-p). \tag{6*}$$

Soit maintenant p un nombre premier de la forme $4m+1$, et posons $\Delta=4p$; puisqu'on a évidemment

$$\left(\frac{-4p}{k}\right)=(-1)^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{k}{p}\right),\ k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2),$$

la formule (5) deviendra

$$(7^a) \qquad \sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{k}{p}\right) \cot\frac{k\pi}{4p} = 4\sqrt{p}\ \ Cl\,(-4p),$$

les conditions sommatoires étant $k = 1, 3, 5, \ldots\ 4p-1$; nous avons employé la valeur de τ qui est égal à 2, en supposant que p surpasse l'unité. Nous allons maintenant calculer la valeur de la somme

$$\sum (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cot\frac{k\pi}{4p}.$$

Pour ce but j'emploie la fonction rationelle

$$\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{2p}+1},$$

dont la somme des résidus correspondant au pôle $x = 1$ et aux pôles $x = \xi$, racines de l'équation $\xi^{2p} + 1 = 0$, est évidemment nulle. Le résidu au point $x = 1$ étant $R_1 = 1$, et le résidu au pôle $x = \xi = e^{\frac{k\pi i}{2p}}$ ayant pour valeur la quantité

$$R_\xi = -\frac{1}{2p}\frac{\xi+1}{\xi-1}\xi^p = -\frac{1}{2p}\cot\frac{k\pi}{4p} \cdot (-1)^{\frac{k-1}{2}},$$

on a par conséquent

$$(8) \quad \sum (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cot\frac{k\pi}{4p} = 2p, \quad (k = 1, 3, 5, \ldots\ 4p-1).$$

Le symbole $\left(\frac{k}{p}\right)$ représentant la valeur zéro pour $k = p$ et pour $k = 3p$, nous isolons les termes correspondants dans la formule (8) et il vient

$$(8^a) \sum (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cot\frac{k\pi}{4p} = 2p - 2\,(k = 1, 3, \ldots\ 4p-1, \text{ sauf } p \text{ et } 3p).$$

En ajoutant membre à membre les formules (7^a) et (8^a), nous aurons l'équation

$$2\sum{}'(-1)^{\frac{k-1}{2}}\cot\frac{k\pi}{4p}=2p-2+4\sqrt{p}\;Cl(-4p),$$

les conditions sommatoires étant

$$k=1,3,5,\ldots.\;4p-1;\;\left(\frac{k}{p}\right)=1.$$

Observons maintenant que pour $k=h+2p$ on a

$$(-1)^{\frac{h-1}{2}}\cot\frac{h\pi}{4p}+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\cot\frac{k\pi}{4p}=(-1)^{\frac{h-1}{2}}\left(\cot\frac{h\pi}{4p}+tg\frac{h\pi}{4p}\right)$$

ou bien

$$=\frac{2(-1)^{\frac{h-1}{2}}}{\sin\frac{h\pi}{2p}};$$

cela étant, la formule que nous venons d'établir s'écrira plus simplement

$$2\sum_h(-1)^{\frac{h-1}{2}}\frac{1}{\sin\frac{h\pi}{2p}}=p-1+2\sqrt{p}\;Cl(-4p),$$

avec les conditions sommatoires

$$h=1,3,5,\ldots.\;2p-1;\;\left(\frac{h}{p}\right)=1.$$

On engendre deux fois la suite des valeurs de h qui entrent dans la sommation, si l'on prend les restes, suivant le module $2p$, des carrés des nombres impairs

$$\nu=1,3,5,\ldots\;2p-1.$$

En posant

$$\nu^2=h+2\mu p,$$

on trouve, puisque $p\equiv 1\pmod 4$, les valeurs

$$(-1)^{\frac{h-1}{2}}=(-1)^{\mu},\quad\sin\frac{h\pi}{2p}=(-1)^{\mu}\sin\frac{\nu^2\pi}{2p}$$

ce qui transforme notre équation dans la formule suivante

$$\sum \frac{1}{\sin \frac{\nu^2 \pi}{2p}} = p - 1 + 2\sqrt{p}\, Cl(-4p),$$

avec les conditions sommatoires

$$\nu = 1, 3, 5, \ldots . 2p - 1, \text{ sauf } \nu = p.$$

En observant que les indices ν et $2p - \nu$ donnent des termes de valeurs égales, on peut écrire la formule comme il suit

$$(7^*)\quad \sum_\nu \frac{1}{\sin \frac{\nu^2 \pi}{2p}} = \frac{p-1}{2} + \sqrt{p}\ Cl(-4p);\ (\nu = 1, 3, 5, \ldots p-2).$$

La forme simple du résultat m'engage à considérer encore le cas de $\Delta = 4p$ où $p \equiv 3 \pmod 4$. Ici la formule (5) se change en équation

$$\sum_k \left(\frac{k}{p}\right) \cot \frac{k\pi}{4p} = 4\sqrt{p}\ Cl(-4p),$$

où $k = 1, 3, 5, \ldots 4p - 1$. En ajoutant membre à membre avec l'équation

$$\sum \cot \frac{k\pi}{4p} = 0$$

et en observant que les termes $k = p$ et $k = 3p$ se détruisent, on a le resultat

$$2\sum{}' \cot \frac{k\pi}{4p} = 4\sqrt{p}\ Cl(-4p),$$

avec la condition $k = 1, 3, 5, \ldots . 4p - 1;\ \left(\frac{k}{p}\right) = 1$. Observons maintenant que les termes correspondants aux valeurs $k = h$ et $k = h + 2p$ ont la somme égale à la quantité

$$\cot \frac{h\pi}{4p} + tg \frac{h\pi}{4p} = \frac{2}{\sin \frac{h\pi}{2p}}$$

on aura

$$2\sum \frac{1}{\sin\frac{h\pi}{2p}} = 2\sqrt{p}\; Cl(-4p),$$

$$h = 1, 3, 5, \ldots 2p-1; \left(\frac{h}{p}\right) = 1.$$

En observant que pour

$$\nu^2 = h + 2\mu p$$

on a

$$\sin\frac{h\pi}{2p} = (-1)^{\mu}\sin\frac{\nu^2\pi}{2p} = (-1)^{\left[\frac{\nu^2}{2p}\right]}\sin\frac{\nu^2\pi}{2p},$$

l s'ensuit que notre équation deviendra

$$\sum_{\nu} \frac{(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{2p}\right]}}{\sin\frac{\nu^2\pi}{2p}} = 2\sqrt{p}\; Cl(-4p), \; (\nu = 1, 3, 5, \ldots 2p-1, \text{ sauf } p)$$

ou bien

$$(9) \quad \sum_{\nu} \frac{(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{2p}\right]}}{\sin\frac{\nu^2\pi}{2p}} = \sqrt{p}\; Cl(-4p), \; (\nu = 1, 3, 5, \ldots p-2).$$

Soit ensuite $\Delta = 8p$, le nombre premier p étant de la forme $4m+3$, nous aurons

$$\sum_{k} (-1)^{\frac{k^2-1}{8}} \left(\frac{k}{p}\right) \cot\frac{k\pi}{8p} = 4\sqrt{2p}\; Cl(-8p),$$

avec les conditions

$$k = 1, 3, 5, \ldots 8p-1.$$

Dans l'identité

$$\sum_{k} (-1)^{\frac{k^2-1}{8}} \cot\frac{k\pi}{8p} = 0$$

les termes $k=p,\ 3p,\ 5p,\ 7p$ se détruisent; en l'ajoutant avec l'équation précédente nous aurons d'abord

$$2\sum_k{}' (-1)^{\frac{k^2-1}{8}} \cot\frac{k\pi}{8p} = 4\sqrt{2p}\, Cl(-8p),$$

$$\left(k = 1, 3, 5, \ldots 8p-1;\ \left(\frac{k}{p}\right) = 1\right).$$

En posant $k = h + 4p$ on a

$$\frac{k^2-1}{8} \equiv \frac{h^2-1}{8} + 1 \pmod 2.$$

et par conséquent

$$(-1)^{\frac{k^2-1}{8}} \cot\frac{k\pi}{8p} = (-1)^{\frac{h^2-1}{8}}\, tg\, \frac{h\pi}{8p};$$

on en conclut que notre équation s'écrira un peu plus simplement

$$\sum_h{}' (-1)^{\frac{h^2-1}{8}} \frac{1}{\sin\frac{h\pi}{4p}} = \sqrt{2p}\, Cl(-8p),$$

avec les conditions sommatoires

$$h = 1, 3, 5, \ldots 4p-1; \left(\frac{h}{p}\right) = 1.$$

Si l'on pose $h = 2p + k$, la condition $p \equiv 3 \pmod 4$ fait voir que l'on a

$$(-1)^{\frac{h^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{k^2-1}{8} + \frac{k-1}{2}},\ \sin\frac{h\pi}{4p} = \cos\frac{k\pi}{4p},$$

ce qui change notre résultat comme il suit

$$\sum_k{}' \frac{(-1)^{\frac{k^2-1}{8}}}{\sin\frac{k\pi}{4p}} + \sum_k{}' \frac{(-1)^{\frac{k^2-1}{8}+\frac{k-1}{2}}}{\cos\frac{k\pi}{4p}} = \sqrt{2p}\, Cl(-8p),$$

les conditions sommatoires étant

$$k = 1, 3, 5, \ldots 2p-1\,;\ \left(\frac{k}{p}\right) = 1.$$

Les nombres k qui entrent dans la sommation représentent le système complet des résidus quadratiques du module p, et on a par conséquent $k \equiv \nu^2 \pmod{2p}$, où ν sont des nombres impairs.

Je suppose d'abord que l'on a

$$\nu^2 = k + 4\mu p\,;$$

dans ce cas on a

$$(-1)^{\frac{k^2-1}{8}} = (-1)^{\mu},\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} = 1,$$

$$\sin\frac{k\pi}{4p} = (-1)^{\mu} \sin\frac{\nu^2\pi}{4p},\ \cos\frac{k\pi}{4p} = (-1)^{\mu} \cos\frac{\nu^2\pi}{4p},$$

et par conséquent

$$(a)\quad \frac{(-1)^{\frac{k^2-1}{8}}}{\sin\frac{k\pi}{4p}} + \frac{(-1)^{\frac{k^2-1}{8}+\frac{k-1}{2}}}{\cos\frac{kp}{4p}} = \frac{1}{\sin\frac{\nu^2\pi}{4p}} + \frac{1}{\cos\frac{\nu^2\pi}{4p}}.$$

Considérons maintenant le second cas, à savoir

$$\nu^2 = k + (4\mu + 2)\,p\,;$$

on a évidemment

$$(-1)^{\frac{k^2-1}{8}} = (-1)^{\mu},\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} = -1,$$

$$\sin\frac{k\pi}{4p} = (-1)^{\mu+1} \cos\frac{\nu^2\pi}{4p},\ \cos\frac{k\pi}{4p} = (-1)^{\mu} \sin\frac{\nu^2\pi}{4p},$$

d'où par conséquent

$$(b)\quad \frac{(-1)^{\frac{k^2-1}{8}}}{\sin\frac{k\pi}{4p}} + \frac{(-1)^{\frac{k^2-1}{8}+\frac{k-1}{2}}}{\cos\frac{k\pi}{4p}} = -\frac{1}{\cos\frac{\nu^2\pi}{4p}} - \frac{1}{\sin\frac{\nu^2\pi}{4p}}.$$

En comparant avec (a) on voit que les seconds membres ont le signe plus ou le signe moins suivant que le nombre $\frac{\nu^2-k}{2p}$ est pair ou impair; ce signe est par conséquent égal à la quantité

$$(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{2p}\right]},$$

et il s'ensuit pour le nombre premier p de la forme $4m+3$

$$(10)\quad \sum_{\nu}(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{2p}\right]}\left(\frac{1}{\sin\frac{\nu^2\pi}{4p}}+\frac{1}{\cos\frac{\nu^2\pi}{4p}}\right)=\sqrt{2p}\,Cl\,(-8p),$$

avec les conditions sommatoires

$$\nu=1,3,5,\ldots.\,p-2,$$

ou bien

$$(10'')\quad \sum_{\nu}(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{2p}\right]}\frac{\sin\frac{(\nu^2+p)\pi}{4p}}{\sin\frac{\nu^2\pi}{2p}}=\frac{1}{2}\sqrt{p}\,Cl\,(-8p).$$

Enfin soit $\varDelta=8p$, p un nombre premier de la forme $4m+1$; la formule (5) devient

$$\sum_{k}(-1)^{\frac{k^2-1}{8}+\frac{k-1}{2}}\left(\frac{k}{p}\right)\cot\frac{k\pi}{8p}=4\sqrt{2p}\,Cl\,(-8p),$$

avec les valeurs de l'indice

$$k=1,3,5,\ldots.\,8k-1.$$

J'observe que l'on a

$$(-1)^{\frac{k^2-1}{8}+\frac{k-1}{2}}=(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]},$$

et je vais évaluer la somme

$$\sum(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]}\cot\frac{k\pi}{8p}.$$

A cet effet je considère la fonction rationelle

$$\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^{p-1}}{x^{2p}-1}\cdot\frac{1}{x^{4p}+1};$$

elle a un pôle du second dégré $x=1$ avec le résidu $R_1=-1$, puis $4p$ pôles du premier dégré $x=\xi=e^{\frac{k\pi i}{4p}}$ $(k=1,3,5,\ldots 8p-1)$, et enfin $2p-1$ pôles du premier dégré

$$x=\eta=e^{\frac{\nu\pi i}{p}},\ (\nu=1,2,\ldots\ldots 2p-1).$$

Le résidu correspondant au pôle η a la valeur

$$R_\eta=\frac{(-1)^\nu}{4pi}\cot\frac{\nu\pi}{2p},$$

et la somme

$$\Sigma R_\eta$$

est zéro. Le résidu correspondant au pôle ξ a la valeur

$$R_\xi=-\frac{1}{4p}\,\frac{\xi+1}{\xi-1}\,\frac{\xi^p}{\xi^{2p}-1}=\frac{1}{8p}\cot\frac{k\pi}{8p}\cdot\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{4}};$$

or $\sin\frac{k\pi}{4}=(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]}\sqrt{\frac{1}{2}}$ et par conséquent

$$R_\xi=(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]}\frac{\sqrt{2}}{8p}\cot\frac{k\pi}{8p};$$

cela étant, la formule

$$\Sigma R_\xi+\Sigma R_\eta-1=0$$

fait voir qu'on a

$$(11)\quad \sum_k(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]}\cot\frac{k\pi}{8p}=4p\sqrt{2},\ (k=1,3,5,\ldots 8p-1).$$

Les termes $k=p,\ 3p,\ 5p$ et $7p$ donnent la somme

$$(-1)^{\frac{p-1}{4}}\ 4\sqrt{2},$$

et il s'ensuit

$$(11^0)\qquad \sum{}'(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]}\cot\frac{k\pi}{8p}=4p\sqrt{2}-(-1)^{\frac{p-1}{4}}4\sqrt{2},$$

les conditions sommatoires étant

$$k=1,3,5,\ldots 8p-1;\ k \text{ non congru } 0 \pmod{p}.$$

En ajoutant l'équation (11^0) membre à membre avec l'équation

$$\sum(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]}\left(\frac{k}{p}\right)\cot\frac{k\pi}{8p}=4\sqrt{2p}\ Cl(-8p),$$

il vient

$$2\sum{}'(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]}\cot\frac{k\pi}{8p}=4\left(p-(-1)^{\frac{p-1}{4}}\right)\sqrt{2}+4\sqrt{2p}\ Cl(-8p),$$

$$\left[k=1,3,5,\ \ldots.\ 8p-1;\ \left(\frac{k}{p}\right)=1\right].$$

En prenant $k=h$ et $k=8p-h$, où $h=1,3,5,\ldots 4p-1$, on aura $\left(\frac{k}{p}\right)=\left(\frac{h}{p}\right)$ et puis

$$(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]}\cot\frac{k\pi}{8p}=(-1)^{\left[\frac{h}{4}\right]}\cot\frac{h\pi}{8p},$$

ce qui simplifie notre formule comme il suit

$$\sum{}'(-1)^{\left[\frac{h}{4}\right]}\cot\frac{h\pi}{8p}=\left(p-(-1)^{\frac{p-1}{4}}\right)\sqrt{2}+\sqrt{2p}\ Cl(-8p);$$

$$\left(h=1,3,5,\ \ldots.\ 4p-1;\ \left(\frac{h}{p}\right)=1\right).$$

En réduisant de nouveau à l'aide de la transformation $h=4p-k$, le premier membre devient

$$\sum{}'(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]}\left(\cot\frac{k\pi}{8p}-tg\frac{k\pi}{8p}\right),\ \left(k=1,3,5,\ \ldots.\ 2p-1;\left(\frac{k}{p}\right)=1\right),$$

ou bien

$$2\sum{}'(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]}\cot\frac{k\pi}{4p},$$

ce qui donne

$$\sum{}'(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]}\cot\frac{k\pi}{4p}=\frac{p-(-1)^{\frac{p-1}{4}}}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2p}\ Cl(-8p),$$

$$\left(k=1,3,5,\ldots .2p-1;\ \left(\frac{k}{p}\right)=1\right).$$

On peut évidemment remplacer les nombres k par les nombres

$$\nu^2-2p\left(\frac{\nu^2}{2p}\right), (\nu=1,3,5,\ldots .p-2),$$

dans ce cas on a

$$(-1)^{\left[\frac{k}{4}\right]}=(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{4p}+\frac{1}{2}\right]}$$

comme il est aisé de voir, puis on peut écrire

$$\frac{\nu^2}{2p}-\left[\frac{\nu^2}{2p}\right]=\Re\frac{\nu^2}{2p},$$

en représentant par $\Re x$ le plus petit reste positif de la quantité x; par conséquent, la formule deviendra

$$\sum_{\nu}(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{4p}+\frac{1}{2}\right]}\cot\left(\frac{\pi}{2}\Re\frac{\nu^2}{2p}\right)$$

(12)

$$=\frac{p-(-1)^{\frac{p-1}{4}}}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2p}\ Cl(-8p).$$

On a évidemment

$$\frac{1}{2}\Re\left(\frac{\nu^2}{2p}\right)=\Re\left(\frac{\nu^2}{4p}\right)-\frac{\varepsilon}{2},$$

où $\varepsilon=0$ ou $\varepsilon=1$, suivant que le nombre

$$\mu = \left[\frac{\nu^2}{2p}\right]$$

est pair ou impair; il s'ensuit que la quantité

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}\,\Re\,\frac{\nu^2}{2p}\right)$$

a pour valeur la quantité

$$\cot\frac{\nu^2\pi}{4p}, \text{ si } \mu \text{ est pair,}$$

et la quantité

$$\tan\frac{\nu^2\pi}{4p}, \text{ si } \mu \text{ est impair,}$$

ce qui s'exprime par la formule unique suivante:

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}\,\Re\,\frac{\nu^2}{2p}\right) = \frac{1+(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{2p}\right]}}{2}\cot\frac{\nu^2\pi}{4p} - \frac{1-(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{2p}\right]}}{2}\tan\frac{\nu^2\pi}{4p}.$$

A cause de cette identité l'équation (12) s'écrira

$$\sum_\nu(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{4p}+\frac{1}{2}\right]}\cot\frac{\nu^2\pi}{2p} + \sum_\nu(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{2p}\right]+\left[\frac{\nu^2}{4p}+\frac{1}{2}\right]}\frac{1}{\sin\frac{\nu^2\pi}{2p}}$$

$$= \frac{p-(-1)^{\frac{p-1}{4}}}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2p}\,Cl\,(-8p).$$

Or, d'après la formule

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right] = [x]$$

on aura

$$\left[\frac{\nu^2}{2p}\right] + \left[\frac{\nu^2}{4p}+\frac{1}{2}\right] \equiv \left[\frac{\nu^2}{4p}\right] \pmod{2},$$

ce qui donne à notre resultat la forme définitive

$$
(12^*)\qquad \sum_{\nu}(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{4p}+\frac{1}{2}\right]}\cot\frac{\nu^2 p}{2p}+\sum_{\nu}(-1)^{\left[\frac{\nu^2}{4p}\right]}\frac{1}{\sin\frac{\nu^2\pi}{2p}}
$$

$$
=\frac{p-(-1)^{\left[\frac{p-1}{4}\right]}}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2p}\,Cl(-8p),
$$

$$
(\nu=1,\ 3,\ 5\ldots\ p-2).
$$

A ces resultats nous joignons la formule suivante que nous avons rencontrée il y a six années, dans une occasion toute différente:

$$
\sum_{a=1}^{D_0-1}\left(\frac{D_0}{a}\right)\frac{1}{\sin^2\frac{a\pi}{D_0}}=\frac{2}{\sqrt{D_0}}\sum_{\varrho=1}^{D_0-1}\varrho^2\left(\frac{D_0}{\varrho}\right),
$$

D_0 représentant un discriminant fondamental positif.

Remarque. M. Hermite a bien voulu me faire observer que la formule fondamentale (5) a été déjà obtenue par Lebesgue. Les recherches de ce savant français se trouvent surtout dans le Journal de Liouville, tome VII et XV; il ne nous semblait pas cependant inutile de publier des détails qu'on vient de lire, et sur lesquels nous nous reservons de revenir dans une prochaine occasion.

Nákladem Král. České Společnosti Náuk. — Tiskem dra Edv. Grégra v Praze 1897.