

## Lerch, Matyáš: Scholarly works

---

Matyáš Lerch

Démonstration élémentaire d'un théorème arithmétique

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1903, O. 2, 1–3

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/501548>

### Terms of use:

© Akademie věd ČR, 1903

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## II.

# Démonstration élémentaire d'un théorème arithmétique.

Par M. Lerch.

(Présenté dans la séance du 9 Janvier 1903)

Soit  $m$  un entier divisible par les facteurs  $a, b, c, \dots k, l$ , premiers entre eux, deux à deux. Il s'agit du nombre  $N$  des entiers positifs ne surpassant pas  $m$  qui n'admettent pour diviseur aucun des entiers  $a, b, c \dots k, l$ .

Pour déterminer  $N$ , j'emploie la fonction  $F(x)$ , égale à 1 pour  $x$  fractionnaire, mais s'annulant pour  $x$  entier: le nombre en question sera alors donné par l'expression

$$N = \sum_{\nu=1}^m F\left(\frac{\nu}{a}\right) F\left(\frac{\nu}{b}\right) \dots F\left(\frac{\nu}{k}\right) F\left(\frac{\nu}{l}\right),$$

car le terme en  $\nu$  est nul, si  $\nu$  admet l'un ou l'autre des entiers  $a, b, \dots$  pour diviseur, et il est égal à un dans le cas contraire.

Cela étant, posons  $L = a b c \dots k$  et effectuons la substitution

$$\nu = \varrho + L\mu, (\varrho = 1, 2, \dots L; \mu = 0, 1 \dots \frac{m}{L} - 1).$$

Il vient, vue la périodicité de la fonction  $F(x)$ , la formule

$$N = \sum_{\varrho=1}^L F\left(\frac{\varrho}{a}\right) F\left(\frac{\varrho}{b}\right) \dots F\left(\frac{\varrho}{k}\right) \sum_{\mu=0}^{\frac{m}{L}-1} F\left(\frac{\varrho + L\mu}{l}\right),$$

où j'ai mis  $m' = \frac{m}{L}$ .

Il s'agit encore de la somme interne que je transforme en faisant

$$\mu = \sigma + \lambda l, \quad (\sigma = 0, 1, \dots, l-1; \lambda = 0, 1, \dots, m''-1), \quad \text{où}$$

$$m'' = \frac{m'}{l} = \frac{m}{abc \dots kl}.$$

Il vient ainsi

$$S_p = \sum_{\mu=0}^{m'-1} F\left(\frac{q + L\mu}{l}\right) = m'' \sum_{\sigma=0}^{l-1} F\left(\frac{q + L\sigma}{l}\right),$$

car on a

$$F\left(\frac{q + L\sigma + Ll\lambda}{l}\right) = F\left(\frac{q + L\sigma}{l}\right);$$

cela étant, j'observe que les fractions

$$\frac{q + L\sigma}{l} \quad (\sigma = 0, 1, \dots, l-1)$$

ne diffèrent des fractions

$$\frac{0}{l}, \frac{1}{l}, \frac{2}{l}, \dots, \frac{l-1}{l},$$

prises dans un certain ordre, que par des entiers: on a donc

$$\sum_{\sigma=0}^{l-1} F\left(\frac{q + L\sigma}{l}\right) = \sum_{x=0}^{l-1} F\left(\frac{x}{l}\right) = l-1,$$

d'où

$$S_p = m'' (l-1)$$

et il s'ensuit, en substituant,

$$(1) \quad N = \frac{m(l-1)}{abc \dots kl} \sum_{a=1}^l F\left(\frac{q}{a}\right) F\left(\frac{q}{b}\right) \dots F\left(\frac{q}{k}\right).$$

Pour achever le calcul, je prend d'abord  $m = abc \dots kl$ , et en dénotant par  $n$  le nombre de facteurs, la formule (1) donnera pour la somme.

$$M_n = \sum_{\nu=1}^{ab \dots kl} F\left(\frac{\nu}{a}\right) F\left(\frac{\nu}{b}\right) \dots F\left(\frac{\nu}{k}\right) F\left(\frac{\nu}{l}\right)$$

la formule de réduction

$$M_n = (l - 1) M_{n-1}$$

dont on conclut

$$M_n = (a - 1) (b - 1) \dots (l - 1).$$

La somme qui figure dans la formule (1), aura donc la valeur  $(a - 1) (b - 1) \dots (k - 1)$  et il vient le résultat connu

$$N = m \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{l}\right).$$

