

Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch

O liczbie klas form kwadratowych dwójkowych o
wyróżniku zasadniczym dodatnim

Prace Mat.-Fiz. 15 (1904), 91–113

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/501559>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

M. LERCH,

O LICZBIE KLAS FORM KWADRATOWYCH DWÓJKOWYCH O WYRÓŹNIKU ZASADNICZYM DODATNIM. ¹⁾

Formy dwójkowe o współczynnikach całkowitych

$$ax^2 + bxy + cy^2 \text{ lub } (a, b, c),$$

należące do tego samego wyróżnika dodatniego $D = b^2 - 4ac$, rozdzielają się na skończoną liczbę klas, którą oznaczam przez $Cl(D)$. Wyróżnik nazywa się *zasadniczym*, gdy odpowiadają mu tylko formy pierwotne t. j. takie, w których współczynniki a, b, c nie mają wspólnego dzielnika. Będziemy rozpatrywali tu tylko wyróżniki zasadnicze.

Według metod analitycznych Dirichleta, wyznaczenie liczby $Cl(D)$ zależy od podstawowego rozwiązania równania Fermata:

$$(1) \quad T^2 - DU^2 = 4,$$

t. j. od rozwiązania, złożonego z najmniejszych liczb całkowitych dodatnich T, U . Niechaj $E(D)$ oznacza wielkość

$$\frac{T + UV\sqrt{D}}{2};$$

¹⁾ Z „Journal de Mathématiques pures et appliquées” 9. 1908. za upoważnieniem Autora. S. D.

opierając się na badaniach Dirichleta, otrzymałem był wzór następujący ¹⁾:

$$(2) \quad \text{Cl}(D) \log E(D) = 2 \sqrt{\frac{D}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} \int_{\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2} dx + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \int_{\frac{m^2\pi}{4D}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

gdzie u oznacza dowolną wielkość dodatnią, symbol zaś $\left(\frac{D}{m}\right)$ ma zwykłe znaczenie symbolu Legendre'a, uogólnionego przez Kroneckera.

Zastosowania liczebne wzoru (2), bez wprowadzenia w nim modyfikacji, byłyby uciążliwe. Okazemy atoli w tej Nocie, że wzór (2) nadaje się do modyfikacji, która ułatwia obliczanie liczby klas, nawet gdy wartość wyróżnika jest dość duża, w założeniu, rozumie się, że wartość wielkości $\log E(D)$ jest znana z pewnym przybliżeniem.

W tym celu wprowadzamy tu wielkość:

$$(3) \quad S = 2 \sqrt{\frac{D}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2} dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\frac{m^2\pi}{4D}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x};$$

oznaczamy przez β całkowite 1, 2, 3, ..., czyniące zadość jednemu lub drugiemu z równań

$$(4) \quad \left(\frac{D}{\beta}\right) = -1 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{D}{\beta}\right) = 0$$

i kładziemy:

$$(5) \quad P = 2 \sqrt{\frac{D}{\pi}} \sum_{\beta} \frac{1}{\beta} \int_{\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad Q = \sum_{\beta} \int_{\frac{\beta^2\pi}{4D}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

umawiając się, by zredukować do połowy wyrazy, odpowiadające takim wartościom β , dla których $\left(\frac{D}{\beta}\right) = 0$.

Wtedy, zamiast wzoru (2) mieć będziemy:

$$(2a) \quad \text{Cl}(D) \log E(D) = S - 2P - 2Q.$$

¹⁾ Rozprawa, odznaczona wielką nagrodą (Grand prix des sciences mathématiques) Akademii nauk w Paryżu w r. 1900.

Dowiedziemy, że wielkość S można otrzymać z wielkiem przybliżeniem w postaci skończonej; wyznaczmy następnie liczbę wyrazów, jakie wziąć należy w szeregach P i Q , aby przy pomocy wzoru (2a) mógł otrzymać liczbę całkowitą $O_1(D)$. Liczba tych wyrazów jest względnie dość mała.

Równocześnie podamy tu na nowo dowód wzoru (2), ponieważ rozprawa, w której go podaliśmy, nie jest jeszcze ogłoszona drukiem.

I.

Niechaj $f(x)$ będzie funkcją rzeczywistą dodatnią, malejącą w przedziale $(g \dots \infty)$; będziemy rozpatrywali jedynie wartości zmiennej x , w tym przedziale zawarte. Nierówność oczywista

$$f(m) > \int_m^{m+1} f(x) dx > f(m+1)$$

daje bezpośrednio:

$$\sum_{m=n}^{n+p-1} f(m) > \int_n^{n+p} f(x) dx > \sum_{m=n+1}^{n+p} f(m),$$

skąd wyprowadzamy twierdzenie Cauchy'ego, że szereg $\sum f(m)$ i całka

$\int_n^{\infty} f(x) dx$ są równocześnie zbieżnymi albo rozbieżnymi.

W przypadku zbieżności mamy nierówności:

$$\sum_{m=n}^{\infty} f(m) > \int_n^{\infty} f(x) dx > \sum_{m=n+1}^{\infty} f(m)$$

i wyprowadzamy stąd, że:

$$(6) \quad \sum_{v=n+1}^{\infty} f(v) = \int_n^{\infty} f(x) dx - \vartheta f(n) \quad (0 < \vartheta < 1)$$

i także:

$$\sum_{v=n}^{\infty} f(v) = \int_n^{\infty} f(x) dx + \vartheta' f(n). \quad (0 < \vartheta' < 1)$$

Cytować będziemy te dwa równania pod nazwą twierdzenia pomocniczego Cauchy'ego. Spożytkujemy to twierdzenie dla wyprowadzenia związku, podanego przez Kinkelin¹⁾, mianowicie:

$$(7) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{\varrho} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^{1+\varrho}} \right\} = -\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)},$$

gdzie ϱ dąży do zera, przechodząc przez wartości dodatnie.

Ponieważ funkcja:

$$f(x) = \frac{1}{(w+x)^{1+\varrho}}$$

jest malejącą, to na mocy twierdzenia pomocniczego Cauchy'ego wnosimy, że:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho} \frac{1}{(w+n)^{\varrho}} + \frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\varrho}} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Wynika stąd, w założeniu, że w jest dodatnie:

$$(a) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^{1+\varrho}} - \frac{1}{\varrho} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{(w+\nu)^{1+\varrho}} + \frac{(w+n)^{-\varrho} - 1}{\varrho} + \frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\varrho}}$$

Kładąc na chwilę:

$$G(\varrho) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{(w+\nu)^{1+\varrho}} + \frac{(w+n)^{-\varrho} - 1}{\varrho}, \quad F(\varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^{1+\varrho}} - \frac{1}{\varrho},$$

otrzymamy z równania (a):

$$(a') \quad F(\varrho) = G(\varrho) + \frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\varrho}}.$$

Wnosimy stąd najprzód, że wyrażenie $F(\varrho)$ jest oznaczone dla ϱ nieskończonostkowego. Niechaj, w samej rzeczy, δ będzie wielkością tak małą, jak się podoba; wyznaczamy całkowitą n przy pomocy nierówności

¹⁾ „Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen mit Anwendung auf die Zahlentheorie“ (Progr. der Gewerbeschule Basel 1861—1862).

$$\frac{1}{w+n} < \frac{1}{2} \delta$$

i tworzymy różnicę:

$$F(\varrho) - F(\varrho') = [G(\varrho) - G(\varrho')] + \left[\frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\varrho}} - \frac{\vartheta'}{(w+n)^{1+\varrho'}} \right],$$

gdzie ϑ' jest, podobnie jak ϑ , wielkością dodatnią, mniejszą od 1. Wtedy wartość bezwzględna wielkości, zawartej w drugim nawiasie po stronie drugiej, będzie mniejsza od $\frac{1}{2} \delta$ i można podać granicę ϱ'' taką, aby było $|G(\varrho) - G(\varrho')| < \frac{1}{2} \delta$, jeżeli tylko obie wielkości dodatnie ϱ i ϱ' pozostają mniejsze od ϱ'' . Wypływa to z ciągłości funkcji $G(\varrho)$, która jest przestępną całkowitą. Będzie tedy:

$$|F(\varrho) - F(\varrho')| < \delta,$$

słowo tylko $\varrho < \varrho''$ i $\varrho' < \varrho''$.

Wynika stąd, że wyrażenie $\lim_{\varrho \rightarrow 0} F(\varrho)$ jest zbieżne, a równanie (a') wskazuje, że wielkość ϑ dąży do granicy oznaczonej ϑ_0 dla ϱ nieskończonostkowego; ponieważ zaś:

$$G(0) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{1}{w+v} - \log(w+n),$$

otrzymujemy więc, że:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} F(\varrho) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{1}{w+v} - \log(w+n) + \frac{\vartheta_0}{w+n}. \quad (0 \leq \vartheta_0 \leq 1)$$

Przechodząc do granicy dla n rosnącego nieograniczenie, znajdujemy:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} F(\varrho) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{v=0}^{n-1} \frac{1}{w+v} - \log(w+n) \right\},$$

lub

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} F(\varrho) = -\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)};$$

jest to właśnie twierdzenie Kinkelina.

II.

W dalszym ciągu będziemy korzystali z wzoru, występującego w teorii szeregu *Malmstena*:

$$(8) \quad F(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(x+m)^2 + u]^{\frac{1}{2}s}}.$$

Na badanie tego wzoru, należącego do klasy przestępnych, którą zajmowałem się wielokrotnie, naprowadziła mnie rozprawa *Appella*¹⁾. Zakładamy, że u jest rzeczywiste i dodatnie, dalej, że $0 < x < 1$, jakkolwiek nie jest to koniecznem.

Korzystajmy z wzoru:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{[(x+m)^2 + u]^{\frac{1}{2}s}} = \int_0^{\infty} e^{-uz - (x+m)^2 z} z^{\frac{1}{2}s-1} dz,$$

zachodzącego dla wartości s , mających część rzeczywistą dodatnią, o której zakładamy najprzód, że jest większa od 1, jak tego wymaga zbieżność naszego szeregu. Będzie:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) F(x, s, u) = \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{2}s-1} e^{-uz} dz \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x+m)^2 z}.$$

Na tej podstawie, znany wzór z teorii funkcji eliptycznych:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega}(x+m)^2} = \sqrt{\frac{\omega}{i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(m^2 \omega + 2mx)} = \sqrt{\frac{\omega}{i}} \vartheta_3\left(x \mid \omega\right),$$

jeżeli położymy w nim $\omega = \frac{\pi i}{s}$, przybierze postać:

$$(\beta) \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x+m)^2 z} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \vartheta_3\left(x \mid \frac{\pi i}{s}\right),$$

¹⁾ Patrz List wydrukowany w „Annales de la Faculté des sciences de Toulouse“, t. 3.

a wzór nasz stanie się:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) F(x, s, u) = V\pi \int_0^{\infty} \vartheta_3\left(x \mid \frac{\pi i}{s}\right) z^{\frac{s-3}{2}} e^{-uz} dz,$$

lub, gdy zmienimy z na $s\pi$:

$$(9) \quad \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) F(x, s, u) = \int_0^{\infty} \vartheta_3\left(x \mid \frac{i}{s}\right) s^{\frac{s-3}{2}} e^{-uz} dz.$$

Dla s nieskończonościowego funkcja $\vartheta_3\left(x \mid \frac{i}{s}\right)$ różni się nieskończenie mało od 1, istnienie całki wymaga tedy, aby część rzeczywista wielkości s była większa od 1; wzór (9) wskazuje nadto, że całka istnieje także dla $u=0$, gdy założymy, że $0 < x < 1$. Gdy uczynimy $u=0$, wzór (8) stanie się:

$$F(x, s, 0) = R(x, s) + R(1-x, s),$$

gdzie $R(x, s)$ oznacza szereg harmoniczny uogólniony:

$$(10) \quad R(x, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(x+m)^s}.$$

Jeżeli zamiast z wprowadzimy $\frac{1}{s}$, otrzymamy z powyższego wzoru (9):

$$(9^0) \quad \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) [R(x, s) + R(1-x, s)] = \int_0^{\infty} \vartheta_3(x \mid is) s^{-\frac{s+1}{2}} dz,$$

gdzie przekształcimy jeszcze stronę drugą, tak, aby była zbieżna dla wszystkich wartości s .

W samej rzeczy, niechaj a oznacza wielkość dodatnią; rozłożmy całkę jak następuje:

$$\int_0^a \vartheta_3(x \mid is) s^{-\frac{s+1}{2}} ds + \int_a^{\infty} \vartheta_3(x \mid is) s^{-\frac{s+1}{2}} ds;$$

w całce drugiej położmy $\{\vartheta_3(x \mid is) - 1\} + 1$ zamiast $\vartheta_3(x \mid is)$ i rozłożmy

obie całki. Ponieważ założyliśmy, że część rzeczywista wielkości $\frac{s-1}{2}$ jest dodatnia, przeto:

$$\int_a^{\infty} z^{-\frac{s+1}{2}} dz = \frac{2}{s-1} a^{-\frac{s+1}{2}}$$

i będzie:

$$(10^*) \left\{ \begin{array}{l} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) [R(x, s) + R(1-x, s)] \\ = \frac{2}{s-1} a^{\frac{1-s}{2}} + \int_0^a \vartheta_3(x|iz) z^{-\frac{s+1}{2}} dz + \int_a^{\infty} \frac{\vartheta_3(x|iz) - 1}{z^{\frac{s+1}{2}}} dz. \end{array} \right.$$

We wzorze tym mnożymy obie strony przez $\frac{\pi^{\frac{1}{2}s}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$ i bierzemy $s = 1 + \varrho$;

będzie najprzód:

$$\frac{2\pi^{\frac{1}{2}s}}{(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} a^{\frac{1-s}{2}} = \frac{2}{\varrho} + \left[\log \pi - \log a - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right] + (\varrho),$$

gdzie (ϱ) oznacza wielkość, malejącą nieograniczenie wraz z wielkością ϱ .
Będziemy tym sposobem mieli wzór:

$$\begin{aligned} R(x, 1+\varrho) + R(1-x, 1+\varrho) - \frac{2}{\varrho} &= \left[\log \pi - \log a - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right] + (\varrho) \\ &+ \frac{\pi^{\frac{1+\varrho}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\varrho}{2}\right)} \left[\int_0^a \vartheta_3(x|is) s^{-\frac{1}{2}\varrho-1} ds + \int_a^{\infty} \frac{\vartheta_3(x|is) - 1}{s^{1+\frac{1}{2}\varrho}} ds \right], \end{aligned}$$

a ponieważ według twierdzenia Kinkelina jest

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left[R(x, 1+\varrho) - \frac{1}{\varrho} \right] = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

przezo, biorąc q nieskończenie małe i stosując wzór znany

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \log \pi = \Gamma'(1) - \log 4\pi,$$

otrzymamy:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = [\Gamma'(1) - \log 4\pi] + \log a \\ - \int_0^a \vartheta_3(x|iz) \frac{dz}{z} - \int_a^{\infty} \frac{\vartheta_3(x|iz) - 1}{z} dz. \end{array} \right.$$

Wzór ten, podany przez nas w Buletynie czesko-król. Tow. nauk w Pradze w roku 1897 („O kilku wzorach, dotyczących funkcji eliptycznych i całek eulerowych“), ma ważność pierwszorzędą dla naszego przedmiotu.

III.

We wzorze, dopiero co wyprowadzonym, zastąpmy w pierwszej całce po stronie drugiej wielkość $\vartheta_3(x|iz)$ przez jej wartość

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{z}(s+m)^2}$$

i zmieńmy następnie z na $\frac{1}{z}$; jeżeli przez C oznaczymy stałą Eulera $\Gamma'(1) = 0,577215 \dots$, i położymy dla skrótowania:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \psi(x),$$

wzór nasz przybierze postać:

$$(11^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} -C - \log 4\pi + \log a - \psi(x) - \psi(1-x) \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{1}{z}}^{\infty} e^{-(s+m)^2 z \pi} \frac{dz}{\sqrt{z}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n x \pi \int_z^{\infty} e^{-z^2 \pi} \frac{dz}{z}. \end{array} \right.$$

Przypomnijmy jeszcze następujący wynik z klasycznego wzoru Dirichleta:

$$(12) \quad \sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \psi\left(\frac{h}{D}\right) = -\sqrt{D} \text{Cl}(D) \log E(D).$$

Niechaj D będzie wyróżnikiem zasadniczym dodatnim; połączmy we wzorze (11*) $x = \frac{h}{D}$ i pomnożywszy obie strony przez symbol Legendre'a $\left(\frac{D}{h}\right)$, dodajmy wyniki dla $h=1, 2, \dots, D-1$.

Na zasadzie związków

$$\left(\frac{D}{D-h}\right) = \left(\frac{D}{h}\right), \quad \sum_1^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) = 0$$

i uwzględniając wzór (12), znajdziemy równanie:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{D} \text{Cl}(D) \log E(D) &= \sum_{h=0}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-(h+mD)\pi \frac{z}{D}} \frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &+ 2\sqrt{D} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_a^{\infty} e^{-n^2 z \pi} \frac{dz}{z}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy ze znanego wzoru:

$$\sum_{n=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \cos \frac{2nh\pi}{D} = \left(\frac{D}{n}\right) \sqrt{D},$$

zachodzącego dla wyróżników zasadniczych dodatnich.

Podwójne sumowanie po drugiej stronie wzoru wykonamy, kładąc $h + mD = n$ i pamiętając, że

$$\left(\frac{D}{h}\right) = \left(\frac{D}{n}\right);$$

otrzymujemy tym sposobem:

$$2\sqrt{D} \text{Cl}(D) \log E(D) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-\frac{n^2 z \pi}{D}} \frac{dz}{\sqrt{z}} + 2\sqrt{D} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_a^{\infty} e^{-n^2 z \pi} \frac{dz}{z}.$$

Wyrazy szeregu pierwszego są parami równe; następnie podstawienia $z = \frac{D^2 x^2}{n^2 \pi}$, $z = \frac{x}{n^2 \pi}$ dają:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-\frac{D^2 x^2}{n^2 \pi}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2D}{n\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{n^2 \pi}}^{\infty} e^{-z} dz; \quad \int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-\frac{x}{n^2 \pi}} \frac{dz}{z} = \int_{\frac{x}{n^2 \pi}}^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{z};$$

kładąc więc dla symetrii $a = \frac{1}{Du}$, otrzymamy:

$$\text{Cl}(D) \log E(D) = 2 \sqrt{\frac{D}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \int_{\frac{x}{n^2 \pi}}^{\infty} e^{-z} dz + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{x}{n^2 \pi}}^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{z},$$

gdzie u oznacza wielkość dodatnią dowolną. Jest to właśnie wzór (2), o którym mówimy na początku tej pracy.

IV.

Wróćmy do wzoru (11*) i zbadajmy, czem on się staje, gdy x jest nieskończonością. Mamy najprzód:

$$\psi(x) = \psi(1+x) - \frac{1}{x},$$

skąd wynika, że dla x nieskończenie małego pierwsza strona wzoru (11*) staje się:

$$(\gamma) \quad C - \log 4\pi + \log a + \frac{1}{x}.$$

Co się tyczy strony drugiej, to wszystkie jej wyrazy pozostają skończone dla $x=0$, z wyjątkiem wyrazu pierwszej sumy, dla którego $m=0$; tym wyrazem jest:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-z^2 \pi} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{n^2 \pi}}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} - \int_0^{\frac{x}{n^2 \pi}} e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} \right],$$

lub:

$$-\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{a}} + (x),$$

gdzie (x) oznacza nieskończoność. Znosząc po obu stronach wyraz $\frac{1}{x}$ i przechodząc do granicy, dostaniemy:

$$C - \log 4\pi + \log a = -\frac{2}{\sqrt{a}} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{v}}^{\infty} \frac{e^{-m^2 \pi z}}{\sqrt{z}} dz + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi z}}{z} dz.$$

Położmy $u = \frac{1}{v}$ i przekształćmy całki, jak wyżej; otrzymamy związek:

$$(13) \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{m\sqrt{\frac{u}{\pi}}}^{\infty} e^{-x^2} dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\frac{m^2 \pi}{v}}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = \frac{C - \log 4\pi}{2} + \sqrt{v} - \frac{1}{2} \log v,$$

który posłuży nam do wyznaczenia wartości sum:

$$(14) \quad S_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{m\sqrt{\frac{u}{\pi}}}^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{n^2 \pi}{Du}}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

W samej rzeczy, z wzoru (13), gdy w nim położymy $v = \frac{u}{D}$, wynika:

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{m\sqrt{\frac{u}{\pi D}}}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{C - \log 4\pi}{2} + \sqrt{\frac{u}{D}} - \log \sqrt{\frac{u}{D}} - \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\frac{m^2 \pi u}{D}}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx;$$

gdy zaś weźmiemy $v = Du$, będzie:

$$S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\frac{m^2 \pi}{Du}}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = \frac{C - \log 4\pi}{2} + \sqrt{Du} - \log \sqrt{Du} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{m\sqrt{\frac{u}{\pi}}}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Zauważmy, że równania, które znajdujemy, całkując przez części

$$\int_a^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} = \frac{e^{-a}}{a} - \int_a^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_a^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{e^{-a^2}}{2a} - \frac{1}{2} \int_a^{\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{x^2},$$

dają nam następujące nierówności:

$$(15) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\frac{m^2 D \pi}{u}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} < \frac{u}{D\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{m^2 D \pi}{u}}}{m^2}; \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{m\sqrt{D\pi}}^{\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{Du\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m^2 D \pi}}{m}.$$

Jeżeli wybierzemy u w ten sposób, aby Du oraz równocześnie $\frac{D}{u}$ były dostatecznie wielkimi (np. $u=1$), strony drugie nierówności (15) będą miały wartości niewielkie, a wielkości (14) będą dane ze znacznym przybliżeniem przez wzory:

$$(14a) \quad \begin{cases} S_1 = \frac{C - \log 4\pi}{2} + \sqrt{\frac{\alpha}{D}} + \log \sqrt{\frac{D}{u}}, \\ S_2 = \frac{C - \log 4\pi}{2} + \sqrt{Du} - \log \sqrt{Du}. \end{cases}$$

Suma S , określona przez wzór (3), która jest równa

$$(16) \quad S = S_1 \sqrt{D} + S_2,$$

ma wartość przybliżoną następującą:

$$(16^*) \quad \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{D} (\log D + C - \log 4\pi + 2\sqrt{u} - \log u) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\log D - C + \log 4\pi + \log \alpha - 2\sqrt{u}). \end{aligned}$$

Część zależna od parametru dowolnego α , t. j.:

$$(1 + \sqrt{D}) (\sqrt{u} - \log \sqrt{u}),$$

staje się najmniejszą dla $u=1$; założenie to zawsze czynić będziemy. Znajdziemy tedy następujący wzór przybliżony w założeniu, że $u=1$:

$$(17) \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{D} (\log D + 0,046181) - \frac{1}{2} \log D + 0,023090;$$

w praktyce będzie można stronę drugą zastąpić wielkością

$$\frac{1}{2} \sqrt{D} \log D - \frac{1}{2} \log D,$$

skoro tylko wyróżnik D przekracza pewną granicę, w założeniu, rozumie się, że wielkość $\log E(D)$ ma także wartość znaczną.

V.

Wyznamy obecnie granicę wyższą błędu, jaki wprowadzamy do rachunku, biorąc skończoną liczbę r , odpowiednio r' wyrazów w szeregach:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \int_{\frac{\sqrt{u\pi}}{D}}^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{\sqrt{u\pi}}{Du}}^{\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{x}.$$

Błędy te będą w każdym razie mniejsze odpowiednio od wielkości:

$$a_r = \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad b_{r'} = \sum_{\nu=r'+1}^{\infty} \int_{\frac{\sqrt{u\pi}}{Du}}^{\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{x}.$$

Funkcje:

$$f(z) = \frac{1}{z} \int_{az}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad \text{i} \quad f(z) = \int_{a^2 z}^{\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{x},$$

są malejącami; stosując więc do nich twierdzenie pomocnicze Cauchy'ego

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} f(\nu) = \int_{ia}^{\infty} f(z) dz - \vartheta f(m), \quad (0 < \vartheta < 1)$$

otrzymujemy bezpośrednio:

$$a_r = \int_r^{\infty} \frac{dz}{z} \int_{az}^{\infty} e^{-x^2} dx - \frac{\vartheta}{r} \int_{ar}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

$$b_{r'} = \int_{r'}^{\infty} dz \int_{a^2 z}^{\infty} \frac{dx}{x} - \vartheta' \int_{a^2 r'}^{\infty} \frac{dx}{x},$$

gdzie położono:

$$a = \sqrt{\frac{u\pi}{D}}, \quad a' = \sqrt{\frac{\pi}{Du}}$$

i gdzie $0 < \vartheta < 1$, $0 < \vartheta' \leq 1$.

Całka podwójna

$$J = \int_r^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{as}^{\infty} e^{-x} dx,$$

odpowiada warunkom $r < s < \frac{x}{a}$ i może być przedstawiona tak:

$$(18) \quad J = \int_{ar}^{\infty} e^{-x} dx \int_r^{\frac{x}{a}} \frac{ds}{s} = \int_{ar}^{\infty} e^{-x} [\log x - \log(ar)] dx,$$

lub, gdy uczynimy $ar = v$:

$$(18^1) \quad J(v) = \int_v^{\infty} e^{-x} \log x dx - \log v \int_v^{\infty} e^{-x} dx.$$

Tym sposobem wartość wyrażenia a_r będziemy mogli napisać w postaci:

$$(18^2) \quad a_r = J(ar) - \frac{\delta}{r} \int_{ar}^{\infty} e^{-x} dx.$$

Aby przekształcić wyrażenie b_r , zauważmy, że całka podwójna

$$J' = \int_r^{\infty} ds \int_{(a's)^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}$$

odpowiada warunkom $r' < z < \frac{\sqrt{x}}{a'}$, da się przeto przedstawić w postaci:

$$J' = \int_{(a'r')^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \int_r^{\frac{\sqrt{x}}{a'}} ds = \int_{(a'r')^2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{a'} - r' \right) e^{-x} \frac{dx}{x},$$

lub też:

$$J' = \frac{2}{a'} \int_{a'r'}^{\infty} e^{-x} dx - r' \int_{(r')^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Jeżeli położymy więc dla skrócenia

$$(19) \quad K(v) = 2 \int_v^{\infty} e^{-x^2} dx - v \int_{a^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

otrzymamy następujące wyrażenie na b_r :

$$(19') \quad b_r = \frac{K(a'r')}{a'} - \mathcal{G} \int_{(a'r')^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

To mając, położmy $u = \xi^2$, aby wielkości

$$a = \xi \sqrt{\frac{\pi}{D}}, \quad a' = \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\pi}{D}},$$

wyraziły się liniowo i przyjmijmy ξ za zmienną niezależną. Korzystając z łatwo sprawdzalnych związków

$$\frac{dJ}{dv} = -\frac{1}{v} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad \frac{dK}{dv} = -\int_{a^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

znajdziemy, że pochodna względem ξ głównej części wielkości $2\sqrt{\frac{D}{\pi}} a_r + b_r$, to jest:

$$\Phi = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}} J(a_r) + \frac{K(a'r')}{a'},$$

wyraża się w sposób następujący:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = -\frac{1}{a} \int_{ar}^{\infty} e^{-x^2} dx + \frac{2}{a'\xi} \int_{a'r'}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Wyrażenie to znika dla $r=r'$, $\xi=1$; widzimy tedy, że błąd staje się prawie minimalnym, gdy weźmiemy równą liczbę wyrazów w obu szeregach i założymy, że $u=1$. Położymy tedy ostatecznie:

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{D}}, \quad v = ar,$$

tak, że wielkości a_r, b_r przybiorą postać:

$$a_r = J(v) - \frac{\vartheta}{r} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad b_r = \frac{K(v)}{\alpha} - \vartheta' \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{x}.$$

Będziemy jeszcze potrzebowali następującej wielkości:

$$(20) \quad c_r = 2 \sqrt{\frac{D}{\pi}} a_r + b_r = \frac{2a_r}{\alpha} + b_r,$$

określającej granicę wyższą błędu, o którym mówimy, t. j. wielkości:

$$c_r = 2 \sqrt{\frac{D}{\pi}} \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\alpha\nu}^{\infty} e^{-x^2} dx + \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \int_{\nu\alpha^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Przy pomocy równania (2) otrzymamy najprzód wzór:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cl}(D) \log E(D) \\ = \sum_{m=1}^r \left(\frac{D}{m} \right) \left[\frac{2}{\alpha m} \int_{\alpha m}^{\infty} e^{-x^2} dx + \int_{\alpha^2 m^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \right] + \theta e_r \\ (-1 < \theta < 1) \end{array} \right.$$

i następujące wyrażenie na c_r :

$$(20^1) \quad c_r = \frac{2J(v) + K(v)}{\alpha} - \frac{2\vartheta}{v} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \vartheta' \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

które posłużą nam do wyznaczenia liczby r .

Położmy dla skrócenia:

$$2J(v) + K(v) = \Lambda(v)$$

tak, że Λ będzie funkcją, określoną przez wyrażenie

$$(22) \quad \Lambda(v) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \log x dx + (2 - 2 \log v) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - v \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x};$$

położmy jeszcze:

$$(22') \quad \Omega(v) = \frac{2}{v} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

wtedy z wzoru (20') wyniknie:

$$(20'') \quad c_r = \frac{\Lambda(v)}{a} \cdot \vartheta'' \Omega(v). \quad (0 < \vartheta'' < 1)$$

To mając, na mocy wiadomej parzystości liczby $\text{Cl}(D)$ dość będzie wybrać liczbę r zgodnie z warunkiem

$$c_r < \log E(D),$$

któremu stanie się zadość a fortiori według (20''), gdy przyjmiemy:

$$(23) \quad \Lambda(v) \leq a \log E(D). \quad (v = ar)$$

Dla wyznaczenia liczby v , wystarczy ułożyć tablicę wartości funkcji $\Lambda(v)$, dającej się łatwo obliczyć przy pomocy wzoru:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda(v) = (2 - C - \log 4) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ + (2v - \sqrt{\pi}) \log v + Cv + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{(4v+1)v^{2r+1}}{v!v(2v+1)^2}, \end{array} \right.$$

lub też:

$$\Lambda(v) = 0,0323 + (2v - 1,7724) \log v + 0,5772 v - \frac{5}{9} v^3 + \frac{9}{10} v^5 - \frac{13}{882} v^7 + \dots$$

Mamy naprzykład:

$$\Lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 0,7896, \quad \Lambda\left(\frac{1}{3}\right) = 1,4091, \quad \Lambda\left(\frac{1}{4}\right) = 1,9319,$$

$$\Lambda\left(\frac{1}{5}\right) = 2,3519, \quad \Lambda\left(\frac{1}{6}\right) = 2,7044, \quad \Lambda\left(\frac{1}{7}\right) = 3,0060, \quad \Lambda\left(\frac{1}{8}\right) = 3,2690.$$

Jakkolwiek liczba r wyrazów, która zawiera wzór (21) nie ma być zbyt

wielka, mimo to daleko dogodniej będzie oddzielić wyrazy, odpowiadające wartościom $m = \beta$, dla których

$$(25^0) \quad \left(\frac{D}{\beta}\right) = -1 \quad \text{albo} \quad \left(\frac{D}{\beta}\right) = 0 \quad (\beta = \beta_0)$$

i wziąć:

$$(25) \quad P_r = \sum_{\beta \leq r} \frac{2}{\alpha\beta} \int_{\alpha\beta}^{\infty} e^{-x} dx, \quad Q_r = \sum_{\beta \leq r} \int_{\alpha\beta}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

przy umówieniu się, by sprowadzić do połowy każdy wyraz $\beta = \beta_0$, odpowiadający wartości β takiej, dla której $\left(\frac{D}{\beta}\right) = 0$. Wtedy strona druga wzoru (21) staje się:

$$\sum_{m=1}^r \left(\frac{2}{\alpha m} \int_{\alpha m}^{\infty} e^{-x} dx + \int_{\alpha m}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \right) - 2(P_r + Q_r) + \theta c_r,$$

a ponieważ suma, która występuje na pierwszym miejscu ma wartość $S - c_r$, będziemy mieli:

$$(26) \quad \text{Cl}(D) \log E(L) = S - 2(P_r + Q_r) - (1 - \theta) c_r,$$

gdzie S ma wartość następującą:

$$(26^0) \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{D} (\log D + 0,046181) - \frac{1}{2} \log D + 0,023090,$$

tak jak podaje wzór (17).

Ponieważ wielkość $1 - \theta$ zawiera się pomiędzy 0 i 2, wzór (26) można wyrazić przez nierówność, wypływającą nadto z warunku $c_r < \log E(D)$:

$$(26^*) \quad \frac{S - 2(P_r + Q_r)}{\log E(D)} - 2 < \text{Cl}(D) < \frac{S - 2(P_r + Q_r)}{\log E(D)}$$

i ta ostatnia nierówność określa całkowitą $\text{Cl}(D)$ nie dwuznacznie, jeżeli znamy z góry jej parzystość. Nie będą też rzadkimi przypadki, w których sama tylko nierówność

$$\text{Cl}(D) \log E(D) < S$$

wystarcza do wyznaczenia liczby klas.

Zanotujmy jeszcze raz, że położyliśmy $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{D}}$, $ar = v$ i że liczba r jest określona przy pomocy warunku (23).

Nieoznaczoność wzoru (26) ścieśnia się, jeżeli zastąpimy w nim c , przez wartość, obliczoną za pomocą wzoru (20²).

Wszelkie tedy trudności zagadnienia sprowadzają się do wyznaczenia podstawowego rozwiązania równania F e r m a t a :

$$T^2 - DU^2 = 4,$$

którego teoria zdaje się nie być jeszcze dostatecznie posunięta.

Aby okazać użytek praktyczny powyższych wywodów, wyznaczmy liczbę klas wyróżnika pierwszego $D = 9817$. Tylko wyróżniki formy $8k + 5$ mogą mieć T i U nieparzyste, dla innych jest $T = 2x$, $U = 2y$, $x^2 - Dy^2 = 1$. Z cytaty K o n e n a zapożyczam fakt, wykryty przez A. M a r t i n a, że całkowita x ma 97 cyfr; wielkość $\log E(D)$ jest prawie równa $\log T = \log 2x$, będzie zatem przybliżenie $\log E(D) = 222$; a ponieważ w naszym przypadku $\alpha = 0,01788$, więc warunek, dotyczący liczby wyrazów staje się:

$$\Lambda(v) \leq \alpha \log E(D) = 4.$$

Wartość $\Lambda\left(\frac{1}{8}\right) = 3,269$ pozwala wniesć, że wystarczy wziąć $ar \geq \frac{1}{8}$, skąd $r = 7$.

Ponieważ równanie $\left(\frac{D}{\beta}\right) = -1$ ma tylko rozwiązania $\beta = 5, \beta = 7$, przeto w przedziale od $\beta = 1$ do $\beta = r = 7$ sumy P , i Q , zawierają każda po dwa wyrazy, które zresztą łatwo obliczyć się dają.

Lecz znajdujemy $S = 450,5$, skąd:

$$\text{Cl}(D) < \frac{450}{222},$$

a stąd:

$$\text{Cl}(D) = 1, \quad (D = 9817),$$

gdyż liczba klas wyróżnika pierwszego musi być nieparzysta.

VI.

Jeżeli wyróżnik D ma jako czynniki liczbę 2 lub 3, wartości β_0 są bardzo liczne i rachunek mógłby się stać uciążliwy. I dla tego to zaleciłbym zmodyfikowanie wzoru przez wyrzucenie najprzód wartości m , zawierających jeden lub drugi z tych czynników.

Niechaj tedy będzie $D = 4m$ wyznacznikiem parzystym; suma, występująca po stronie drugiej wzoru (21), zawiera faktycznie tylko wyrazy rzędu nieparzystego i można będzie napisać:

$$S' - 2(P'_r + Q'_r) + (\theta - 1) c'_r,$$

gdzie P'_r i Q'_r są sumami P_r i Q_r , ograniczonymi do wyrazów pochodzących od nieparzystych wartości β , i gdzie:

$$S' = \sum_{\mu} \left(\frac{2}{\alpha\mu} \int_{\alpha\mu}^{\infty} e^{-x} dx + \int_{\alpha^2\mu^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \right). \quad (\mu = 1, 3, 5, 7 \dots)$$

To mając, położmy:

$$S'' = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2r\alpha} \int_{2r\alpha}^{\infty} e^{-x} dx + \int_{4r^2\alpha^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \right);$$

będzie widocznie:

$$S' = S - S'',$$

gdzie S jest wyżej badanym szeregiem. Aby otrzymać wielkość S'' , zauważmy, że:

$$S'' = \frac{1}{2} \sqrt{D} S''_1 + S''_2,$$

gdzie:

$$S''_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \int_{2r\alpha}^{\infty} e^{-x} dx, \quad S''_2 = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{4r^2\alpha^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Te dwie wielkości otrzymać można z wielkiem przybliżeniem przy pomocy

wzorów (14) i (14a), w których należy wziąć $u = 4$ i $u = \frac{1}{4}$. Pisząc $D = 4m$, otrzymamy:

$$S''_1 = \frac{C - \log 4\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2} \log m, \quad S''_2 = \frac{C - \log 4\pi}{2} + \sqrt{m} - \frac{1}{2} \log m.$$

Kładąc na chwilę $\frac{C - \log 4\pi}{2} = A$, mamy tym sposobem:

$$S'' = \frac{1}{2} \sqrt{m} \log m + \sqrt{m} (A + 1) - \frac{1}{2} \log m + A + 1,$$

a ponieważ według (16*) dla $D = 4m$, $u = 1$ jest:

$$S = \sqrt{m} (\log m + 2A + 2 + \log 4) - \frac{1}{2} \log m + A + 1 - \log 2,$$

znajdziemy więc, odejmując:

$$(27) \quad S' = \frac{1}{2} \sqrt{m} (\log m + C - \log \pi + 2 + 2 \log 2) - \log 2$$

lub:

$$(27') \quad S' = \frac{1}{2} \sqrt{m} (\log m + 2,818770) - 0,693147.$$

Liczba klas będzie tedy określona przez nierówności:

$$(28) \quad \frac{S' - 2P' - 2Q'}{\log E(D)} > Cl(D) > \frac{S' - 2P' - 2Q'}{\log E(D)} - 2, \quad (D = 4m).$$

Niechaj będzie np. $D = 4m = 4.859 = 3436$; będzie:

$$\frac{1}{2} T = 7024.10^{18},$$

skąd

$$\log E(D) = 53,28,$$

następnie

$$a = 0,0308$$

i wreszcie:

$$a \log E(D) = 1,64;$$

zważywszy, że $A\left(\frac{1}{3}\right) = 1,409$, będzie można wziąć $ar \geq \frac{1}{3}$, skąd $r = 11$, i będziemy mieli tylko jedno rozwiązanie równania $\left(\frac{D}{\beta}\right) = -1$, mianowicie $\beta = 7$.

Znajdujemy:

$$\log m + 2,82 = 9,57, \quad \sqrt{m} = 29,30,$$

skąd:

$$S' < 150, \quad \text{Cl}(D) < \frac{150}{53,28},$$

a zatem:

$$\text{Cl}(D) = 2,$$

bo liczba klas musi tu być parzysta.

Czytelnik sam spostrzeże, w jaki sposób modyfikuje się wzór ogólny w przypadku $D = 3m$ lub $D = 12m$.

Wyłożona tu metoda, oparta na wzorze (2), daje się zastosować i do innych rozwinięć, podanych przez nas w uwieńczyonej rozprawie, tak dla wyznaczników dodatnich jak i dla ujemnych. Przy innej sposobności powrócę do szeregów warunkowo-zbieżnych, występujących w tym ostatnim przypadku, i okażę, że metody analityczne mają istotną wyższość nad metodą elementarną, polegającą na wyznaczaniu form zredukowanych.