

# Lerch, Matyáš: Scholarly works

---

Matyáš Lerch

Sur une propriété des nombres

Jornal des ciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, 8 (1887),  
161–163

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/501633>

## Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

**SUR UNE PROPRIÉTÉ DES NOMBRES**

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. LERCH

(à Prague)

... Le théorème que j'ai en vue est le suivant: La somme de tous les produits possibles de la forme  $q_1 q_2 q_3 \dots q_n$ , où les  $q$  sont des nombres entiers positifs satisfaisant aux conditions

$$q_1 = \leq 2, \quad q_{x+1} \leq 1 + q_x,$$

est égale au nombre  $1.3.5 \dots (2n + 1)$ .

Ce théorème résulte en évaluant de deux manières différentes la dérivée

$$\left( \frac{d^{n+2} x}{du^{n+2}} \right)_{u=0},$$

où

$$x = 1 - \sqrt{1 - 2u} = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} \binom{1}{v} 2^v u^v.$$

On a évidemment

$$\left( \frac{d^{n+2} x}{du^{n+2}} \right)_{u=0} = 1.3.5 \dots (2n + 1);$$

ensuite, la fonction  $x$  satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

il en résulte que l'on a

$$\frac{d^2x}{du^2} = \left[ \sum_{\alpha_0=0}^{\infty} \alpha_0 x^{\alpha_0-1} \right] \frac{dx}{du} = \sum_{\alpha_0, \alpha_1} \alpha_0 x^{\alpha_0+\alpha_1-1},$$

où

$$\alpha_0, \alpha_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

De là on tire, en différentiant de nouveau,

$$\frac{d^3x}{du^3} = \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} \alpha_0 (\alpha_0 + \alpha_1 - 1) x^{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2-2}, \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2, \dots)$$

et ainsi de suite. De cette manière on trouve aisément la formule générale

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}} = & \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}} \alpha_0 (\alpha_0 + \alpha_1 - 1) (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2) \dots \\ & \dots (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n - n) x^{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_{n+1}-n-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}} \right)_{u=0} = & \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}} \alpha_0 (\alpha_0 + \alpha_1 - 1) (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2) \dots \\ & \dots (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - n), \end{aligned}$$

les symboles  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  représentant des nombres de la série  $0, 1, 2, \dots$  assujettis à la condition

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n + 1.$$

Or en posant

$$\alpha_0 = q_n, \quad \alpha_0 + \alpha_1 - 1 = q_{n-1},$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2 = q_{n-2}, \quad \dots, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n - n = q_0 = 1,$$

de sorte que  $1 + q_x \geq q_{x+1}$ , on aura

$$\left( \frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}} \right)_{u=0} = \sum q_0 q_1 q_2 \dots q_n, \quad q_0 = 1,$$

les  $q$  étant des nombres entiers positifs assujettis à la condition  $1 + q_x \geq q_{x+1}$ . On a donc

$$\sum q_1 q_2 \dots q_n = 1.3.5 \dots (2n + 1),$$

c. qu. f. d.

Cerhovice, le 6 juin 1888.