Matyáš Lerch
Poznámky k Schendelovu zobecnění řady Taylorovy. [I.]

Věstník Čes. Akademie cís. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze, 1 (1891), 78–84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501692

## Poznámky k Schendelovu zobecnění řady Taylorovy.

Napsal *M. Lerch.*

1. Řada Taylorova především jako základ analyse nikdy nebude vytlačena ze svého vynikajícího místa, které zaujímá v dnešní methodice: jakožto praktický prostředek ku přehlednému vyjadřování rozmanitých výrazů však nalezla soupeře v řadě Lagrangeově, která jest zase zvláštním případem řady Wrónského, postupující (místo dle mocností proměnné $x$) dle fakultativních součinů

$$\varphi(x)^{m|\xi} = \varphi(x)\,\varphi(x+\xi)\,\varphi(x+2\xi)\ldots\varphi(x+\overline{m-1}\,\xi),$$

tak že vyjadřuje dané funkce $f(x)$ řadami tvaru

$$f(x) = A_0 + A_1\,\varphi(x)^{1|\xi} + A_2\,\varphi(x)^{2|\xi} + A_3\,\varphi(x)^{3|\xi} + \ldots.$$

Zajímavou analogii ne sice tak obsáhlé obecnosti, jako má řada slaveného nyní Poláka, postavil jako třetí tvar zobecněné řady Taylorovy německý mathematik pan Leopold Schendel,[1]) který nahrazuje mocnost $(x-v)^n$ součinem

$$\prod_{\alpha=0}^{n-1}(x - q^\alpha v) = (x - q^\alpha v)_{\alpha=0}^{n-1},$$

jenž přechází v onu mocnost pro $q = 1$; řada Schendelova má tedy tvar

$$(1)\qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\,(x - q^\alpha v)_{\alpha=0}^{k-1},$$

kde místo bezvýznamného symbolu $(x - q^\alpha v)_{\alpha=0}^{-1}$ dlužno klásti číslo 1.

---

[1]) Zur Theorie der Functionen. Journal für reine und angewandte Mathematik, sv. 84.

Avšak pan Schendel omezil se ve své zmíněné krátké práci toliko na část formalnou svého předmětu, a jeho vývody nejsou vždy přesvědčující. Poněvadž řada jeho vede přirozeně k některým pěkným výrazům příbuzným aspoň formalně s některými veličinami z theorie funkcí elliptických, poskytujíc příležitosti k zajímavým poznámkám, nebude na škodu jednak vyložiti na tomto místě ve vší stručnosti způsobem přístupnějším a věci přiměřenějším stanovení koefficientů řady (1), jednak podati podmínky pro existenci rozvoje.

Abychom ustanovili koefficienty $A_k$ řady (1), zaveďme po příkladu Schendelově operaci rozdílovou $\Delta_x$ rovnicemi:

$$\Delta_x f(x) = \frac{f(x)-f(qx)}{x-qx} = f'_q(x),$$

$$\Delta_x^2 f(x) = \Delta_x f'_q(x) = \frac{f'_q(x)-f'_q(qx)}{x-qx} = f''_q(x),$$

$$\Delta_x^3 f(x) = \Delta_x f''_q(x) = \frac{f''_q(x)-f''_q(qx)}{x-qx} = f'''_q(x),$$

$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots,$$

kteráž operace pro $q = 1$ přechází v obyčejné differencování, a ustanovme jakožto analogii vzorce

$$\frac{d\,(x-v)^k}{dx} = k\,(x-v)^{k-1}$$

hodnotu výrazu

$$\Delta_x\,(x-q^\alpha v)_{\alpha=0}^{k-1}\,.$$

Kladouce zatím

$$\varphi_k(x) = (x-q^\alpha v)_{\alpha=0}^{k-1}$$

máme patrně

$$\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}(x).\,\left(x-q^{k-1}v\right),$$

$$\varphi_k(qx) = (qx-v).\,\left(x-q^{\alpha-1}v\right)_{\alpha=1}^{k-1} q^{k-1}$$

$$= \left(q^k x - q^{k-1}v\right)\varphi_{k-1}(x)$$

a tedy

$$(2) \qquad \Delta_x \varphi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(qx)}{x-qx} = \frac{1-q^k}{1-q}\,\varphi_{k-1}(x)\,,$$

z kteréhožto vzorce obdržíme dále opětováním operace $\Delta_x$ vzorec následující:

$$(2^*) \qquad \Delta_x^\mu (x-q^\alpha v)_{\alpha=0}^{k-1} = \left(\frac{1-q^{k-\mu+\alpha}}{1-q}\right)_{\alpha=1}^{\mu} (x-q^\alpha v)_{\alpha=0}^{k-\mu-1}\,.$$

Poznamenejme, že tento výraz je nullou, jakmile $\mu$ převyšuje stupeň $k$ součinu $q^k(x)$.

Předpokládejme nyní, že lze rozvinouti funkci $f(x)$ v řadu (1) konvergentní ne-li pro všecka $x$ bez rozdílu, tedy aspoň pro hodnoty

$$x = v,\ q\,v,\ q^2\,v,\ q^3\,v,\ \ldots,$$

tvořící řadu geometrickou. Pak bude dovoleno psáti rovnici

$$\Delta^n_x f(x) = \sum_{k=o}^{\infty} A_k \Delta^n_x (x - q^\alpha\, v)^{k-1}_{\alpha=o}$$

neboli dle (2*)

$$\Delta^n_x f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} A_k \left(\frac{1-q^{k-n+\alpha}}{1-q}\right)^n_{\alpha=1} . (x - q^\alpha\, v)^{k-n-1}_{\alpha=1}$$

aspoň pro řečené hodnoty $x$. Pro $x = v$ obdržíme tu zvláště

$$\Delta^n_v f(v) = f^{(n)}_q(v) = A_n \left(\frac{1-q^\alpha}{1-q}\right)^n_{\alpha=1}$$

a tedy

(1$^a$) $$A_n = \left(\frac{1-q}{1-q^\alpha}\right)^n_{\alpha=1} f^{(n)}_q(v),$$

tak že řada (1) nabude tvaru definitivního

(1*) $$f(x = \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{1-q}{1-q^\alpha}\right)^n_{\alpha=1} \cdot f^{(n)}_q(v) . (x - q^\alpha\, v)^{n-1}_{\alpha=o} .$$

Konverguje-li pravá strana pro hodnoty

$$x = v,\ q\,v,\ q^2\,v,\ q^3\,v,\ \ldots,$$

pak jest pro tyto hodnoty rovnice (1*) zajisté správnou.

Rozeznávejme nyní případy $|\,q\,| \gtreqless 1$.

1°. Jest-li $|\,q\,| > 1$, pišme obecný člen řady ve tvaru

$$u_n = (1-q)^n f^{(n)}_q(v) \left(\frac{x - q^\alpha\, v}{1 - q^{\alpha+1}}\right)^{n-1}_{\alpha=o},$$

a řada bude absolutně konvergentní, konverguje-li řada s obecným členem

$$u'_n = (1-q)^n f_q^{(n)}(v) \left(\frac{v}{q}\right)^n ,$$

anebo též, konverguje-li řada o členech

$$(\alpha) \qquad u''_n = \left(1 - \frac{1}{q}\right)^n f_q^{(n)}(v)\, v^n .$$

Z konvergence řady (1*) však neplyne ještě správnost rovnice (1*), poněvadž tato jest zaručena v tom případě jediné pro hodnoty $x = v, q\,v, q^2 v, \ldots$, jež pro $|\,q\,| > 1$ nemají bodů hromadných v konečnu. A skutečně lze sestrojiti nesčíslný počet funkcí $f(x)$, které poskytnou konvergentní řadu (1*), ale funkce a řada se různí.

Budiž na př. $f(x)$ realná funkce klesající s rostoucím $x$, stále kladná, a volme za $q$, $v$ kladné realné veličiny (kde musí $q > 1$); pak bude

$$0 < -f'_q(v) < \frac{f(v)}{(q-1)\,v}, \quad 0 < f''_q(v) < \frac{f(v)}{(q-1)^2 v^2},$$

$$0 < -f'''_q(v) < \frac{f(v)}{(q-1)^3 v^3}, \quad \ldots,$$

tedy obecně

$$\left| f_q^{(n)}(v) \right| < f(v) \frac{1}{(q-1)^n v^n} ,$$

tak že

$$|\,u''_n\,| < \frac{f(v)}{q^n}$$

je členem řady konvergentní. Pak bude řada (1*) konvergovati stejnoměrně vzhledem k $x$ a bude definovati celistvou funkci transcendentní této proměnné; rovnice (1*) bude nemožnou, jakmile $f(x)$ není celistvou funkcí transcendentní, na př. pro $f(x) = \frac{1}{x}$.

Poněvadž řada (1*) konverguje absolutně zároveň s řadou $\Sigma u''_n$, jež nezávisí na $x$, patrno, že *v případě* $|\,q\,| > 1$ *může rovnice (1*) býti správnou pouze pro celistvé funkce transcendentní;* pro funkce celistvé racionalné jest její správnost patrna při všech $q$.

2°. Budiž nyní $|\,q\,| < 1$. Poněvadž zde

$$(x - q^\alpha v)_{\alpha=0}^{n-1} = x^n \left(1 - q^\alpha \frac{v}{x}\right)_{\alpha=0}^{n-1} ,$$

a součin $\left(1 - q^\alpha \frac{v}{x}\right)_{\alpha=0}^{n-1}$ zůstává pod stálou mezí $M_\delta$, jak mile $|x| > \delta$, bude řada (1*) konvergovati nebo divergovati zároveň s řadou

$$\bar{f}(x) = \Sigma (1-q)^n f_q^{(n)}(v)\, x^n \ ,$$

a z této okolnosti plyne, že *řada (1*) konverguje absolutně a stejnoměrně pro všecka $x$ obsažená v mezikruží $\delta < |x| < r$, pokud jest $r$ taková veličina, že vrchní mez veličin*

$$(\beta) \qquad \left| (1-q)^n r^n f_q^{(n)}(v) \right|, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

*jest konečná.*

Zbývá ještě vyšetřiti konvergenci řady (1*) pro nekonečně malá $x$. Pro $|x| < \delta$ jest

$$(\gamma) \qquad |u_n| < M . \left| (1-q)^n f_q^{(n)}(v) q^{\frac{1}{2} n (n-1)} v^n \right| ,$$

kde stálá $M$ nezávisí na $x$ ani na $n$.

Ze supposice $(\beta)$ plyne nerovnosť

$$\left| (1-q)^n f_q^{(n)}(v) \right| < \frac{M'}{r^n} ,$$

a tedy bude dle $(\gamma)$

$$|u_n| < M M' \left| q^{\frac{1}{2} n (n-1)} \left(\frac{v}{r}\right)^n \right| ;$$

poněvadž tu $|q| < 1$, vychází nade vši pochybnost, že řada $\Sigma |u_n|$ konverguje tu *stejnoměrně.*

Aby řada (1*) konvergovala v případě $|q| < 1$, je nutno i dostačí, aby vrchní mez veličin $(\beta)$ byla konečná pro určité $r$; pak konverguje řada (1*) stejnoměrně uvnitř kruhu $|x| < r$.

Tuto vlastnost mají řady Schendelovy společně s řadami mocninovými; lze ji vysloviti takto:

*Schendelova řada při $|q| < 1$ konverguje absolutně i stejnoměrně uvnitř každého kruhu $|x| < r$, na jehož obvodě leží aspoň jedno místo $x$ různé od míst $q^\alpha v$, pro něž vrchní mez její členů jest konečnou.*

Že zde nutno místa $q^\alpha v$, $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots)$ vyloučiti, plyne odtud, že výrazy $(x - q^\alpha v)_{\alpha=0}^{n-1}$ od určitého $n$ počínajíce vymizí na daném z těchto míst, pročež nelze pak tvrditi, že by

$$x^n < M'' \left| (x - q^\alpha v)_{\alpha=0}^{n-1} \right|$$

pro všecka $n$.

Budiž nyní $f(x)$ funkce mající na místě $x=o$ povahu funkce celistvé, a předpokládejme, že pro určité $v$ Schendelova řada (1*) konverguje na místě $x_0$, pro něž $|x_0|>|v|$; pak řada konverguje uvnitř kruhu $|x|<|x_0|$, kde leží zároveň všecky hodnoty $v$, $qv$, $q^2v$, $q^3v$, ...., jichž užito při stanovení součinitelů $A$. Řada pak representuje funkci $f(x)_1$, pravidelnou uvnitř kruhu $|x|<|x_0|$, která s funkcí $f(x)$ splývá na místech $v$, $qv$, $q^2v$, $q^3v$, ...., jež mají na $x=0$ místo hromadné; obě funkce musejí dle známé věty z theorie funkcí býti identické uvnitř uvažovaného kruhu a tedy v celém oboru své existence.

*Ke správnosti rovnice (1*) nutno i dostačí, aby řada (1*) konvergovala pro určité $x$, jehož absolutní hodnota převyšuje $|v|$.*

2. Po těchto úvahách nutných obraťme se nyní ke vzorcům tvořícím obsah práce p. Schendela.

Budiž především $f(x)$ celistvá funkce racionalná stupně $n$; poněvadž $(x-q^\alpha v)_{\alpha=o}^{k-1}$ jest celistvou racionalnou funkcí stupně $k$, bude lze ustanoviti konstanty $A_0$, $A_1$, ... $A_n$ tak, aby

$$f(x)=\sum_{k=o}^{n} A_k\,(x-q^\alpha v)_{\alpha=o}^{k-1};$$

tu tedy řada (1*) se redukuje na konečný počet členů, a bude

$$f(x)=\sum_{k=o}^{n}\left(\frac{1-q}{1-q^\alpha}\right)_{\alpha=1}^{k} f_q^{(k)}(v)\,.\,(x-q^\alpha v)_{\alpha=o}^{k-1}\,.$$

Pro případ

$$f(x)=(x+q^\alpha y)_{\alpha=o}^{n-1}$$

máme dle (2*)

$$f_q^{(k)}(v)=\left(\frac{1-q^{n+1-\alpha}}{1-q}\right)_{\alpha=1}^{k}\,.\,(v+q^\alpha y)_{\alpha=o}^{n-k-1},$$

tedy

$$\left(\frac{1-q}{1-q^\alpha}\right)_{\alpha=1}^{k} f_q^{(k)}(v)=\left(\frac{1-q^{n+1-\alpha}}{1-q^\alpha}\right)_{\alpha=1}^{k}\left(v+q^\alpha y\right)_{\alpha=o}^{n-k-1}$$

Znamenáme-li po Schendelovi

$$\left(\frac{1-q^{n+1-\alpha}}{1-q^\alpha}\right)_{\alpha=1}^{k}=\binom{n}{k}_q,$$

aby se vytkla analogie s binomialním součinitelem $\binom{n}{k}$, obdržíme jakožto zobecnění vzorce binomialního Schendelem podané:

$$(3)\qquad (x+q^\alpha y)_{\alpha=o}^{n-1}=\sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k}_q\,(x-q^\alpha v)_{\alpha=o}^{k-1}(v+q^\alpha y)_{\alpha=o}^{n-k-1}\,.$$

Tento vzorec má smysl pro kladná celistvá $n$; pokládáme-li však levou stranu za funkci čísla $n$ znamenajíce ji

$$(x+q^\alpha y)_{\alpha=0}^{n-1} = (x, y, q, n)\,,$$

naskytuje se otázka, nelze-li jednoduchým způsobem definovati funkci $(x, y, q, n)$ pro všecka $n$ realná i komplexní, tak aby pro celistvá $n$ přešla u veličinu vyšetřovanou, podobně jako funkce $\Gamma\,(n+1)$ interpoluje fakultu $n!$ Leč pomíjejíce tohoto úkolu, který by sotva bylo lze řešiti tak, aby větší díl vlastností funkce zůstal zachován, omezme se na definici veličiny $(x, y, q, n)$ pro záporná $n$, berouce za základ permanenci vztahu

$$(x, y, q, n+1) = (x, y, q, n)\,.\,(x+q^n y)\,.$$

Volíme-li pak $n+1=0$, máme

$$(x, y, q, -1) = \frac{1}{x+q^{-1}y}\,,$$

odtud podobně dále případy $n=-2, -3, \ldots$, tak že shledáváme jako vhodnou definici

$$(4)\qquad (x, y, q, -n) = \frac{1}{(x+q^{-\alpha}y)_{\alpha=1}^{n}}\,.$$

Píšeme-li relaci (3) ve tvaru

$$(3^a)\qquad (x, y, q, n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (x, -v, q, k)\,(v, y, q, n-k)\,,$$

jde o to, který vztah nastoupí na místo této rovnice při záporném $n$, zejména naskytá se otázka, nevystačíme-li tu prostě kladouce v pravo $k=0, 1, 2, \ldots \infty$ místo $k=1, 2, \ldots n$. K otázce té odpovídá rozvoj (1*) funkce (4). Ponévadž tato funkce je racionalní lomená, dlužno předpokládati $|q| < 1$.

(Dokončení.)