

EQUADIFF 6

Lothar Collatz

Einige Anwendungen der mehrdimensionalen approximationstheorie zur Lösungseinschließung bei Randwertaufgaben

In: Jaromír Vosmanský and Miloš Zlámal (eds.): Equadiff 6, Proceedings of the International Conference on Differential Equations and Their Applications held in Brno, Czechoslovakia, Aug. 26 - 30, 1985. J. E. Purkyně University, Department of Mathematics, Brno, 1986. pp. [367]--372.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/700148>

Terms of use:

© Masaryk University, 1986

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

EINIGE ANWENDUNGEN DER MEHRDIMENSIONALEN APPROXIMATIONSTHEORIE ZUR LÖSUNGSEINSCHLIEßUNG BEI RANDWERTAUFGABEN

L. COLLATZ

*Inst. für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg
Bundesstraße 55, D-2000 Hamburg 13, West Germany*

Summary. In this survey lecture we summarize at first some elsewhere described methods for inclusion of solutions of linear and nonlinear boundary value problems, and apply them to certain three-dimensional problems. In simple case one can check with aid of multivariate Approximation-theorie, which degree of accuracy can be reached. A numerical three-dimensional example shows this.

Abstract. In diesem Übersichtsvortrag werden zunächst auch schon andersorts beschriebene Methoden zur Einschließung der Lösungen von linearen und nichtlinearen Randwertaufgaben zusammengestellt und dann an verschiedenen dreidimensionalen Aufgaben getestet. Die Güte der erreichten Näherung kann in einfachen Fällen mit Hilfe der multivariaten Approximationstheorie beurteilt werden, wie es an einem einfachen Beispiel vorgeführt wird.

I. Einführung und Zielsetzung

Vorgelegt sei eine Operatorgleichung der Form

$$Tu = r. \quad (1.1)$$

T sei ein gegebener (evtl. nichtlinearer) Operator, der einen Bereich D eines halbgeordneten Banachraumes R_1 in einen halbgeordneten Banachraum R_2 abbildet. $r \in R_2$ ist gegeben und $u \in D$ gesucht. Häufig ist $R_1 = R_2$. Für die Praxis ist folgender Ordnungsbegriff nützlich: Für zwei in einem Bereich B des n -dimensionalen Punktraumes R^n definierte reellwertige Funktionen g, h bedeute

$$g < h, \text{ daß } g(x) < h(x) \text{ ist für alle } x \in B. \quad (1.2)$$

Dabei bezieht sich das Zeichen $<$ auf die klassische Ordnung reeller Zahlen. Wenn $g < h$ gilt, kann man das Intervall $I = [g, h]$ einführen als die Menge $p(x)$ der Funktionen $I = \{p(x), g < p < h\}$.

Hat man eine Näherungslösung $z(x)$ für $u(x)$ berechnet, so interessiert sich der Anwender dafür, wieviele der vom Computer ausgedruckten Dezimalen richtig sind und garantiert werden können, d.h. es soll ein genügend kleines Intervall $I = [v, w]$ angegeben werden, welches mit Sicherheit eine Lösung u von (1.1) enthält mit

$$v \leq u \leq w \quad (1.3)$$

Die in den Anwendungen auftretenden Probleme sind häufig so komplexer Natur, daß es für den Mathematiker in der Regel zu schwierig ist, ein solches Intervall anzugeben. Trotzdem wurden hier in neuerer Zeit Fortschritte erzielt, und es soll hier beschrieben werden, wie man bei verschiedenen einfachen Modellen zum Ziel kommen kann. Dabei sollen beson-

ders dreidimensionale Aufgaben betrachtet werden.

II. Methode der Berechnung und Zusammenstellung der Grundlagen

1. Operatoren monotoner Art. Der Operator T heißt "von monotoner Art" oder "inversmonoton" (SCHRÖDER [62]), falls

$$\text{aus } Tf < Tg \text{ folgt: } f < g \text{ für alle } f, g \in D. \quad (2.1)$$

Für weitreichende Klassen linearer und nichtlinearer elliptischer und parabolischer Gleichungen und Integralgleichungen, aber auch für gewisse Fälle hyperbolischer Gleichungen wurde monotone Art bewiesen (vgl. COLLATZ [68],[81], WALTER [70], BOHL [74], SCHRÖDER [80] u.a.).

Für viele Anwendungen ist auch ein anderer Monotoniebegriff wichtig:

T heißt synton (antiton), wenn $Tf < Tg$ aus $f < g$ ($f > g$) folgt für alle $f, g \in D$.

2. Lineare und nichtlineare Approximation. Sei T ein Operator von monotoner Art; man versucht zwei Funktionen $v(x)$, $w(x)$ aufzustellen mit

$$Tv < r < Tw; \quad (2.2)$$

dann gilt die Einschließung (1.3). Für die Numerik läßt man v und w noch von Parametern a_ν, b_μ abhängen:

$$v = v(x, a) = v(x, a_1, \dots, a_p), \text{ analog } w = w(x, b_1, \dots, b_q)$$

und bestimmt die a_ν, b_μ so, daß das Intervall möglichst klein wird.

3. Lineare und nichtlineare Optimierung. Auf dem Computer bestimmt man die a_ν, b_μ aus der semi-infiniten Optimierung:

$$-\delta \leq w(x, b) - v(x, a) \leq \delta; \quad Tv(x, a) \leq r(x) \leq Tw(x, b); \quad \delta = \text{Min.} \quad (2.3)$$

4. Iterationsverfahren. Brauchbare Schranken v, w bekommt man häufig mit Hilfe eines Iterationsverfahrens, ausgehend von passenden Startelementen v_0, w_0 wie es schon oft ausführlich dargestellt worden ist (BOHL [74], SCHRÖDER [80], COLLATZ [68] u.a.).

5. Singularitäten. Diese erfordern i.a. eine besondere Beachtung, wie es hier in III näher behandelt wird. Wenn man den Typ und die Lage der Singularitäten kennt, so kann man sie "abspalten". (vgl. TOLKSDORF [85], DOBROWOLSKI [85], WHITEMAN [85]). Hier ist noch viel Forschung nötig.

6. Schauderscher Fixpunktsatz. Der Operator T sei "monoton zerlegbar", d.h. er lasse sich als Summe eines syntonen Operators T_1 und eines antitonen Operators T_2 schreiben. Wenn der Operator T überdies vollstetig ist, so läßt sich unter gewissen Voraussetzungen mit Hilfe des genannten Satzes die Existenz von mindestens einer Lösung u im Intervall $[v_0, w_0]$ nachweisen, vgl. die in 4. genannte Literatur.

7. Multivariate Tschebyscheff Approximation. Eine gegebene stetige reellwertige Funktion $f(x) \in C(B)$ soll durch Funktionen φ einer gegebenen

Menge $W \subset C(B)$ im Tschebyscheffschen Sinne, d.h. bezüglich der Maximumnorm "möglichst gut" approximiert werden; man fragt nach der "Minimalabweichung" $\rho(f, W) = \inf_{\varphi \in W} \|\varphi - f\|$.

Wenn es zwei (normalerweise endliche) Punktfolgen M_1, M_2 von B gibt mit der Eigenschaft: Für kein Paar $\varphi, \hat{\varphi} \in W$ ist

$$\varphi(x) - \hat{\varphi}(x) > 0 \text{ für alle } x \in M_1; \varphi(x) - \hat{\varphi}(x) < 0 \text{ für alle } x \in M_2 \quad (2.4)$$

so heißt die Vereinigung M von M_1 und M_2 eine H-Menge ("Haar-Menge") $M = M_1 \cup M_2$. Nun sei $h(x)$ eine Funktion aus W und es gebe eine H-Menge M , für die der Fehler $\varepsilon = h - f$ auf $M \neq \emptyset$ ist; ferner soll es keine Funktion $\varphi \in W$ geben mit $\varepsilon \cdot (h - \varphi) > 0$ auf M . Dann bestehen für ρ die Schranken (COLLATZ-KRABS [73], MEINARDUS [67])

$$m_1 = \inf_M |\varepsilon| \leq \rho(f, W) \leq \|\varepsilon\| = m_2 \quad (2.5)$$

Dies gibt einen Anhaltspunkt für die Güte der erreichbaren Annäherung für f in der Klasse W : Ist m_1 "nahe" an m_2 , so hat man mit h nahezu die beste Annäherung an f erreicht; für $m_1 = m_2$ ist h eine beste Approximation. Ist m_1 größer als die gewünschte Genauigkeit, so muß man zu einer anderen Funktionenklasse W übergehen (z.B. mehr Parameter verwenden).

8. Algorithmus für H-Mengen. In (2.4) sind φ und $\hat{\varphi}$ beliebige Elemente aus W , sodaß die Nachprüfung bei nichtlinearer Approximation schwierig werden kann. Bei vorliegender Näherung $h^* \in W$ genügt es aber, h^* als φ zu nehmen und (2.4) nur für beliebiges $\hat{\varphi} \in W$ zu prüfen (Ph. Defert-J.P. Thiran, Exchange Algorithm for multivariate Polynomials, Intern. Ser. Numerical Math. 59(1982) 115-128. Dann ist $H = M_1 \cup M_2$ eine H-Menge, wenn die Ungleichungen

$$h^*(x) - \hat{\varphi}(x) > 0 \text{ für } x \in M_1; -[h^*(x) - \hat{\varphi}(x)] > 0 \text{ für } x \in M_2 \quad (2.6)$$

keine Lösung $\hat{\varphi}(x) \in W$ zulassen. Falls W ein linearer Unterraum von $C(B)$ ist, kann man zum Nachweis, daß eine H-Menge vorliegt, den Gaußschen Algorithmus benutzen (ein Beispiel in Nr. IV). Wenn eine H-Menge vorliegt, gelten die Schranken (2.5) und man kann die Güte der Näherung beurteilen.

III. Einige Testbeispiele

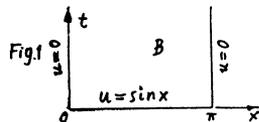
1. Eine nichtlineare Anfangs-Randwertaufgabe. Ein sehr einfaches Modell der Navier-Stokesschen Gleichungen ist die eindimensionale Gleichung (Burger's Gleichung) für eine Funktion $u(x, t)$:

$$Tu = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ in } B$$

mit dem Bereich $B = \{(x, t), 0 < x < \pi, t > 0\}$

und den Anfangs- und Randbedingungen, Fig. 1:

$$u(x, 0) = \sin x \text{ für } 0 \leq x \leq \pi, u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \text{ für } t \geq 0.$$



Für die Näherungsfunktion $w(x,t)$ wird der Ansatz gemacht:

$$u \approx w(x,t) = \sin x + \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x,t)$$

mit $\varphi_1 = t \sin x, \varphi_2 = tx(\pi-x), \varphi_3 = tx^2(\pi-x), \varphi_4 = t^2x(\pi-x), \varphi_5 = \frac{t}{2}\sin(2x)$.

Bei Diskretisierung mit den Schrittweiten $1/32$, (bzw. $1/20$) in x -, bzw. t -Richtung erhält man im Intervall $0 \leq t \leq 0.2$ die Fehlerschranken

	$v=0.1$	$ w-u \leq$	$v=0.5$
$n=2$	0.1013		0.0999
$n=3$	0.0450		0.0420
$n=4$	0.0408		0.0377
$n=5$	0.0171		0.0252

Für den größeren Wert $v=0.5$ fallen die Fehlerschranken ungünstiger aus als für $v=0.1$. Ich danke Herrn Dipl.Math. Uwe Grothkopf für die numerische Durchrechnung auf dem Computer.

2. Einschließung einer Ableitung bei einem unbeschränkten dreidimensionalen Bereich. (Elektrostatistisches Potential $u(x,y,z)$ zwischen einer Kugel (Potential $u=1$) und zwei Ebenen mit dem Potential $u=0$, Fig.2).

Gesucht ist die elektrische Feldstärke η im Punkte $P=(0,0,1)$, $\eta = \partial u / \partial z(P)$

Randwertaufgabe: $\overline{u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}} = 0$ in $(|z| < 3, |r| > 1)$ mit $r=(x,y,z)$

$u = 0$ auf Γ_1 und Γ_2 ($|z|=3$) und $u=1$ auf Γ_3 ($|r|=1$)

Ansatz für eine Näherungsfunktion

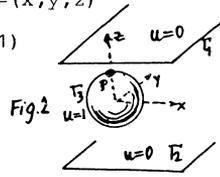
$$u \approx v = a + \frac{a_0}{|r|} + \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{1}{|r-(0,0,z_i)|} + \frac{1}{|r-(0,0,-z_i)|} \right)$$

mit $v(P)=1; 0 < z_i < 1$ oder $z_i > 3$)

Nichtlineare Optimierung: $v(r) \geq u(r)$ auf $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)(P) = \text{Min.}$

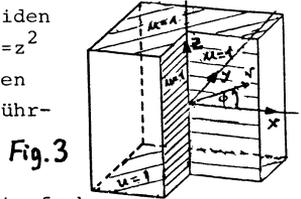
Einschließung für η (berechnet von Herrn Dipl.Math. Jörg Haarmeyer)

$m = \text{Anzahl der Parameter}$	untere Schranke für η	obere Schranke für η
4	- 1.358 022	- 1.357 97
8	- 1.358 022	- 1.358 016



3. Singuläre Kante bei einer dreidimensionalen Aufgabe. Modell einer Temperaturverteilung $u(x,y,z)$ in einem Raumteil B , Fig. 3

mit $\Delta u = 0$ in $B = \{(x,y,z), |z| < 1; |x| < 1 \text{ für } 0 < y < 1, \text{ und } -1 < x < 0 \text{ für } -1 < y < 0.\}$ und $u=1$ auf Grund- und Deckfläche und auf den beiden an die z -Achse grenzenden Rechteckrandflächen; $u=z^2$ für $x=-1$ und $y=1$, und u linear in x , bzw. y auf den restlichen zwei Randflächenstücken, Fig. 3 (ausführliche Behandlung an anderer Stelle).



IV. H-Mengen bei einer dreidimensionalen Randwertaufgabe

Als ähnliches Beispiel für eine dreidimensionale Temperaturverteilung

$u(x,y,z)$ werde gewählt; Fig. 4

$-\Delta u=1$ in $B=\{(x,y,z) \ 0 < x < 2, \ 0 < y < 2, \ x+y < 3, \ |z| < 1\}$; $u=0$ auf ∂B

Ansatz für die Näherungsfunktionen v_n :

$$u \approx v_n = -\frac{1}{2}z^2 + \sum_{i=1}^n a_i v_i, \text{ mit den die Potentialgleichung erfüllenden}$$

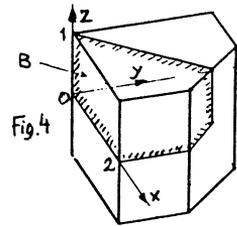
$$\text{Polynomen: } v_1=1, \ v_2=x+y, \ v_3=x \cdot y, \ v_4=x^2+y^2-2z^2, \\ v_5=x^3+y^3-3/(x+y)z^2, \ v_6=xy(x+y)-(x+y)z^2, \dots$$

Mit $\epsilon_k = v_k - u$ lautet die Optimierungsaufgabe:

$$-\delta \leq \epsilon_k \leq \epsilon \text{ in } B, \ \Delta = \text{Min.}$$

Ich danke Herrn Dipl.-Math. Zheng Tsinghua aus Schanghai für die Durchführung der Technung auf einem Computer und für Fig. 4 und 5; man erhält:

Verwendeter Polynomgrad	Anzahl k der Parameter	δ
1	2	0.25
2	4	0.153
4	9	0.0382
6	16	0.0145
8	25	0.00493



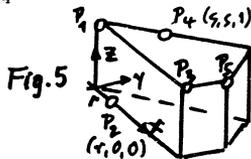
Man hat damit die Einschließung $|u-v_{25}| \leq 0.00493$.

2. Algorithmus zur Testung der H-Mengeneigenschaft. Um ein einfaches Beispiel zu haben, werden die Punkte P_1, P_2, \dots, P_5 wie in Fig. 5 ausgewählt; Die Koordinaten x, y, z der Punkte sind in dem folgenden Schema angegeben. Daneben stehen die Faktoren v_j der zugehörigen Terme a_j, v_j . Bei den P_v bedeutet ein "+"-Zeichen (bzw. ein "-"-Zeichen, daß P_v zu M_1 (bzw. M_2) gehört. Die erste Zeile des Schemas ist zu lesen als

$$1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 - 2 a_4 > 0$$

Da hier lineare Approximation vorliegt, kann man wie beim Gaußschen Eliminationsverfahren Unbekannte eliminieren, indem man Ungleichungen mit positiven Faktoren multipliziert und addiert, wie es in der Spalte "Operation" der folgenden Tabelle angegeben ist. Dann stellen die Ungleichungen (9) (10) einen Widerspruch dar, die Punkte P_1, \dots, P_5 bilden eine H-Menge.

Bei dem Ansatz $a_1 v_1 + a_2 v_2$ genügen P_1, P_2, P_3 wie es im Schema der gestrichelte Rahmen andeuten soll, zum Nachweis der H-Mengeneigenschaft, in dem (1) und (7) mit $a_1 > 0$, $(-2+r)a_1 > 0$ einen Widerspruch ergeben. Bei Hinzunahme von $a_3 v_3$ und P_4 mit (1) (8) ergeben $a_1 > 0$, $(-4+4s-s^2)a_1 > 0$ einen Widerspruch.



	Punkte	x	y	z	$a_1 \cdot 1$	$a_2(x+y)$	a_3xy	$a_4(x^2+y^2-2z^2)$
(1)	$P_1(+)$	0	0	1	1	0	0	-2
(2)	$P_2(-)$, $0 < r < 2$	r	0	0	-1	-r	0	-r ²
(3)	$P_3(+)$	2	0	1	1	2	0	2
(4)	$P_4(-)$, $0 < s \leq 4/3$	s	s	1	-1	-2s	-s ²	2-2s ²
(5)	$P_5(+)$	2	1	1	1	3	2	3
(6)	Operation $2 \cdot (4) + s^2 \cdot (5)$				$-2 + s^2$	$-4s + 3s^2$	0	$4 - s^2$
(7)	$2 \cdot (2) + r \cdot (3)$				$-2 + r$	0		$2r - 2r^2$
(8)	$(4s - 3s^2) \cdot (3) + 2 \cdot (6)$				$-4 + 4s - s^2$	0		$8 + 8s - 8s^2$
(9)	$(2-r) \cdot (1) + (7)$				0			$-4 + 4r - 2r^2$ $= -2 - 2(1-r)^2 < 0$
(10)	$(4 - 4s + s^2) \cdot (1) + (8)$				0			$16s - 10s^2$ $= 2s(8 - 5s) > 0$ Widerspruch.

Literatur

- BOHL, E. [74] Monotonie, Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen. Springer, 1974, 255 S.
- COLLATZ, L. [52] Aufgaben monotoner Art, Arch.Math.Anal.Mech.3 (1952) 366-376.
- COLLATZ, L. [68] Funktional Analysis und Numerische Mathematik, Springer, 1968, 371 S.
- COLLATZ, L. [81] Anwendung von Monotoniesätzen zur Einschließung der Lösungen von Gleichungen; Jahrbuch Überblicke der Mathematik 1981, 189-225.
- COLLATZ, L. [85] Inclusion of regular and singular solutions of certain types of integral equations, Intern.Ser.Num.Math. 73 (1985) 93-102.
- COLLATZ, L. - W. KRABS [73] Approximationstheorie, Teubner, Stuttgart, 1973, 208 S.
- DOBROWOLSKI, M. [85] On quasilinear elliptic equations in domains with conical boundary points, Bericht Nr. 8506, Juni 1985, Univers. d. Bundeswehr München, 16 S.
- MEINARDUS, G. [67] Approximation of functions, Theory and numerical methods, Springer, 1967, 198 p.
- SCHRÖDER, J. [62] Invers-monotone Operatoren, Arch.Rat.Mech.Anal. 10 (1962), 276-295.
- SCHRÖDER, J. [80] Operator inequalities, Acd.Press (1980), 367 p.
- TOLKSDORF, P. [85] On the Dirichletproblem for quasilinear equations in domains with conical boundary points, erscheint in Comm.Diff. Equ.
- WALTER, W. [70] Differential and Integral Inequalities, Springer (1970) 352 p.
- WHITEMAN, J.R. [85] Singularities in two- and threedimensional elliptic problems and finite element methods for their treatment, erscheint in Proc. Equadiff 6, Brno 1985.