

Toposym 3

S. Gähler

Über 2-Banach-Räume

In: Josef Novák (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the Third Prague Topological Symposium, 1971. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1972. pp. 143--144.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/700779>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1972

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ÜBER 2-BANACH-RÄUME

S. GÄHLER

Berlin

Ein 2-normierter Raum L ist ein linearer Raum der Dimension > 1 , über dessen Punktepaaren a, b eine reelle Funktion v , die 2-Norm von L , erklärt ist, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. Es gilt $v(a, b) = 0$ genau dann, wenn a und b linear abhängig sind,
2. $v(a, b) = v(b, a)$,
3. $v(a, \beta b) = |\beta| v(a, b)$ für jede reelle Zahl β sowie
4. $v(a, b + c) \leq v(a, b) + v(a, c)$.

Auf jedem 2-normierten Raum L erzeugt das System $\{\mu_b\}_{b \in L}$ aller durch $\mu_b(a) = v(a, b)$ definierter Halbnormen μ_b , $b \in L$, eine uniforme Struktur und damit eine Topologie. Ein 2-normierter Raum, der eine beschränkte Nullumgebung besitzt, heißt *lokal beschränkt*. Ein vollständiger 2-normierter Raum wird *2-Banach-Raum* genannt. Der Vortrag befaßt sich mit den 2-Banach-Räumen näher. Es wird unter anderem gezeigt, daß vom Standpunkt der uniformen Struktur aus die Klasse der Banach-Räume der Dimension > 1 mit der der lokal beschränkten 2-Banach-Räume übereinstimmt.

Ein 2-normierter Raum L^* heißt *Vervollständigung* eines 2-normierten Raumes L , wenn L ein linearer Teilraum von L^* ist, $v = v^*|_{L \times L}$ gilt, die Topologie von L mit der durch die Topologie von L^* in L induzierten Topologie übereinstimmt, L in L^* dicht sowie L^* vollständig ist. Durch Beispiele läßt sich zeigen, daß ein 2-normierter Raum nicht immer eine Vervollständigung besitzt. Es existiert genau dann eine Vervollständigung L^* von L , wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Für zwei Cauchysche Moore-Smith-Folgen $(a_i)_{i \in I}$, $(b_j)_{j \in J}$ von Punkten $a_i, b_j \in L$ ist $\lim_{i \in I} \lim_{j \in J} v(a_i, b_j) = 0$ äquivalent der Existenz zweier reeller Zahlen α und β mit $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ sowie $(\alpha a_i)_{i \in I} \sim (\beta b_j)_{j \in J}$, wobei \sim die bei der Konstruktion einer Vervollständigung eines uniformen Raumes üblicherweise benutzte Äquivalenzrelation bezeichnet.

2. Für beliebige Cauchysche Moore-Smith-Folgen $(a_i)_{i \in I}$, $(b_j)_{j \in J}$ von Punkten $a_i, b_j \in L$ gilt $\lim_{i \in I} \lim_{j \in J} \lim_{i^* \in I} v(a_i - a_{i^*}, b_j) = 0$.

3. Zu jeder Cauchyschen Moore-Smith-Folge $(a_i)_{i \in I}$ von Punkten $a_i \in L$ und jedem $\varepsilon^* > 0$ existieren Punkte $b_1, \dots, b_m \in L$ sowie ein $\varepsilon > 0$, so daß $v(a, b_j) < \varepsilon$, $j = 1, \dots, m$, stets $\lim_{i \in I} v(a, a_i) < \varepsilon^*$ nach sich zieht.

Literatur

- [1] *S. Gähler*: Über 2-Banach-Räume. Math. Nachr. 42 (1969), 335–347.
- [2] *S. Gähler*: Zum Problem der Vervollständigung 2-normierter Räume. Hausdorff-Gedenkband.
- [3] *A. White*: 2-Banach spaces. Math. Nachr. 42 (1969), 43–60.