V. M. Ivanova; A. A. Ivanov

Отношения смежности и H-замкнутые расширния

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 195--199.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700828

ОТНОШЕНИЯ СМЕЖНОСТИ И H-ЗАМКНУТЫЕ РАСШИРЕНИЯ

В. М. ИВАНОВА и А. А. ИВАНОВ

Ленинград

1. Напомним, прежде всего, некоторые определения и обозначения (см. [3]).

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Систему γ непустых замкнутых в X множеств будем называть *кофильтром* (замкнутым) в X, если для любых замкнутых в X множеств F_1, F_2 имеем $F_1 \cup F_2 \in \gamma$ тогда и только тогда, когда $F_1 \in \gamma$ или $F_2 \in \gamma$. Например $\gamma(x) = \{F \mid x \in F\}$ — кофильтр для любой точки $x \in X$.

Систему ω непустых открытых в X множеств будем называть *фильтром* (открытым) в X, если для любых открытых в X множеств G_1, G_2 имеем $G_1 \cap G_2 \in \omega$ тогда и только тогда, когда $G_1 \in \omega$ и $G_2 \in \omega$. Например $\omega(x) = \{G \mid x \in G\}$ — фильтр для любой точки $x \in X$.

Будем говорить, что фильтр ω и кофильтр γ *двойственны*, если $\gamma = \{F \mid X \setminus F \,\bar{\in}\, \omega\}$ $(\omega = \{G \mid X \setminus G \,\bar{\in}\, \gamma\})$. Отношение двойственности устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством всех кофильтров в X и множеством всех фильтров в X.

Пусть σ — произвольное отношение смежности на X.

Кофильтр γ в X будем называть *σ-кофильтром*, если он является системой σ-смежности.

Через $\tilde{\sigma}X$ обозначим расширение пространства X получаемое присоединением к X всех σ-кофильтров, отличных от $\gamma(x)$ для $x \in X$. Топология в $\tilde{\sigma}X$ определена замкнутым базисом, состоящим из множеств вида $F \cup \tilde{F}$, где $\tilde{F} = \{\gamma \mid F \in \gamma\}$, а F — произвольное замкнутое в X множество.

Если $\sigma_1 < \sigma_2$, то $\tilde{\sigma}_2 X \subset \tilde{\sigma}_1 X$.

Расширение X' топологического пространства X, будем называть *регулярным расширением*, если замыкания в X' подмножеств пространства X образуют замкнутый базис пространства X', и для двух любых точек в X', из которых хоть одна не принадлежит X, найдется в X такое множество F, что одна из этих точек принадлежит $\bar{F}^{X'}$, а другая не принадлежит.

В дальнейшем будут рассматриваться только регулярные расширения топологических пространств.

2. Будем говорить, что расширение X' пространства X *согласовано с отношением смежности* σ на X, если для любых не σ-смежных замкнутых в X множеств $F_1, F_2, \ldots, F_n$ имеем $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{X'} = \emptyset$.

Будем называть расширение X' пространства X *σ-комбинаторным расширением*, если для любых замкнутых в X множеств $F_1, F_2, \ldots, F_n$ имеем $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{X'} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда эти множества σ-смежны.

Любое пространство X' содержащееся в $\tilde{\sigma}X$ и содержащее X ($X \subset X' \subset \tilde{\sigma}X$) является очевидно расширением пространства X, согласованным с σ. Просто доказывается и тот факт, что любое расширение пространства X (напомним, что мы рассматриваем только регулярные раширения), согласованное с σ эквивалентно расширению пространства X, содержащемуся в $\tilde{\sigma}X$. Изучая произвольное расширение X' пространства X согласованное с σ мы, таким образом, можем считать (и будем считать), что $X \subset X' \subset \tilde{\sigma}X$.

Для изучения H-замкнутых расширений представляет интерес следующее утверждение

Теорема 1. *Совокупность H-замкнутых расширений пространства X согласованных с отношением смежности σ на X совпадает с совокупностью всех максимальных в $\tilde{\sigma}X$ хаусдорфовых подпространств содержащих X.*

Действительно, пусть X' — максимальное в $\tilde{\sigma}X$ хаусдорфово подпространство, содержащее X. Пусть ω' — произвольный максимальный фильтр в X', $\omega = \{G \cap X \mid G \in \omega'\}$ — максимальный фильтр в X, γ — двойственный фильтру ω кофильтр. Нетрудно доказать, что γ будет центрированной системой и следовательно σ-кофильтром ($\gamma \in \tilde{\sigma}X$). Если теперь предположить, что $\bigcap\limits_{G \in \omega'} \overline{G}^{X'} = \emptyset$, то γ можно будет присоединить к X' получив снова хаусдорфово расширение пространства X, содержащееся в $\tilde{\sigma}X$, что противоречит свойству максимальности расширения X' пространства X. Тем самым доказано, что любое максимальное в $\tilde{\sigma}X$ хаусдорфово расширение пространства X является его H-замкнутым расширением. Обратное утверждение очевидно.

Простыми следствиями теоремы 1 являются следующие утверждения.

Теорема 2. *Любое хаусдорфово расширение пространства X, согласованное с отношением смежности σ на X содержится в H-замкнутом расширении также согласованном с σ.*

Действительно, можно считать, что хаусдорфово расширение X' пространства X, согласованное с σ содержится в $\tilde{\sigma}X$. Взяв любое максимальное в $\tilde{\sigma}X$ хаусдорфово подпространство X'', содержащее X', получим согласованное с σ H-замкнутое расширение содержащее X'.

Теорема 3. *Любое σ-комбинаторное хаусдорфово расширение пространства X может быть расширено до H-замкнутого σ-комбинаторного расширения пространства X.*

Действительно, любое σ-комбинаторное хаусдорфово расширение X' пространства X согласовано с σ и потому может быть расширено до согласованного с σ H-замкнутого расширения X'' пространства X. С другой стороны легко заметить, что расширение X'' согласованное с σ и содержащее σ-комбинаторное расширение само является σ-комбинаторным расширением.

3. Подмножество F пространства X назовем *H_X-замкнутым,* если оно замкнуто в любом хаусдорфовом расширении пространства X. Обозначим через σ_H отношение смежности на X, для которого $\sigma_H(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$ или же все F_i не H_X-замкнуты.

Теорема 4. *Для любого отношения смежности $\sigma > \sigma_H$ на X существует H-замкнутое расширение пространства X не согласованное с σ.*

Действительно, если $\sigma > \sigma_H$, то существует система $F_1, F_2, \ldots, F_n$ замкнутых в X множеств, являющаяся системой σ_H-смежности, но не являющаяся системой σ-смежности. Это означает, что каждое множество F_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ не H_X-замкнуто, $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$ и потому существуют такие H-замкнутые расширения $X'_1, X'_2, \ldots, X'_n$, что $\bar{F}_i^{X'_i} \setminus F_i \neq \emptyset$ для каждого i $(1 \leqq i \leqq n)$. Пусть $x_i \in \bar{F}_i^{X'} \setminus F_i$, $\gamma_i = \{F \mid x_i \in \bar{F}^{X'_i}\}$, $\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$, $X' = X \cup \{\gamma\}$ — одноточечное расширение пространства X, являющееся, как можно заметить, хаусдорфовым пространством. Точка γ является предельной точкой для каждого множества F_i (так как $F_i \in \gamma$ при $1 \leqq i \leqq n$), то есть $\bigcap_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{X'} \neq \emptyset$. Любое H-замкнутое расширение пространства X, содержащее пространство X' не согласовано с σ.

Естественным усилением теоремы 4 явилось бы доказательство существования σ_H-комбинаторного расширения для любого пространства X. К сожалению нам неизвестен общий метод доказательства существования σ-комбинаторных расширений. В некоторых случаях может быть с успехом использовано следующее рассуждение.

4. Пусть X' — произвольное хаусдорфово расширение пространства X и $\Sigma = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ произвольное разбиение нароста $X' \setminus X$ на конечные множества A_λ, $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = X' \setminus X,\ A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} = \emptyset \text{ для } \lambda_1 \neq \lambda_2\right)$. Рассмотрим множество $\Sigma(X') = X \cup \Sigma$ и введем на нем топологизацию, замкнутый базис которой будет состоять из множеств вида $F \cup F_\Sigma$, где $F_\Sigma = \{A_\lambda \mid \bar{F}^{X'} \cap A_\lambda \neq \emptyset\}$ а F — произвольное замкнутое в X множество. Нетрудно заметить, что $\Sigma(X')$ будет также хаусдорфовым расширением пространства X. (При этом естественное отображение $X' \to \Sigma(X')$ не обязано быть непрерывным.) Используем эту конструкцию для доказательства следующего утверждения.

Теорема 5. *Для любого метрического пространства счетного веса существует его σ_H-комбинаторное хаусдорфово расширение.*

Пусть X — метрическое пространство счетного веса и X' — его чеховское расширение. Отношение смежности $\sigma_H(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ имеет место на X тогда и только тогда, когда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$ или же все F_i $(1 \leqq i \leqq n)$ небикомпактны. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — произвольная конечная система замкнутых в X небикомпактных множеств с пустым пересечением. Выберем по точке в каждом множестве $\bar{F}_i^{X'} \setminus F_i \neq \emptyset$, образовав конечное множество $A(F_1, F_2, \ldots, F_n)$. Соотношение между мощностью совокупности всех конечных систем небикомпактных замкнутых в X множеств и мощностями множеств $\bar{F}^{X'} \setminus F$ в рассматриваемом случае таково, что выбор $A(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ можно осуществить без повторений (все $A(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ будут иметь попарно пустые пересечения). Множества $A(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ и оставшиеся невыбранными точки образуют разбиение Σ чеховского нароста пространства X. Пространство $\Sigma(X')$ будет очевидно σ_H-комбинаторным хаусдорфовым расширением пространства X.

5. Как уже было отмечено выше нам неизвестен общий метод доказательства существования или не существования σ-комбинаторных расширений.

Можно было бы предположить на основании некоторых соображений, что σ-комбинаторные расширения существуют для главных отношений смежности (это будет так при некоторых дополнительных ограничениях на σ). Однако это предположение неверно, как показывает следующий пример.

Рассмотрим произвольное небикомпактное нормальное пространство X, его чеховское расширение X' и такие множества A_1, A_2 лежащие в чеховском наросте $X' \setminus X$, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $\bar{A}_1^{X'} \cap \bar{A}_2^{X'} \neq \emptyset$. Введем на X отношение близости δ для которого $\delta(F_1, F_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\bar{F}_1^{X'} \cap \cap \bar{F}_2^{X'} \neq \emptyset$ или же оба множества $\bar{F}_1^{X'}$ и $\bar{F}_2^{X'}$ имеют одновременно непустое пересечение с A_1 или с A_2. Пусть σ — главное отношение смежности на X согласованное с отношением близости δ. Тогда σ таково, что не существует σ-комбинаторного расширения пространства X.

С другой стороны существуют σ-комбинаторные H-замкнутые расширения для отношений смежности σ, не являющихся главными отношениями смежности. Соответствующий пример можно построить на основе конструкции использованной при доказательстве теоремы 5 с той разницей, что конечные множества $A(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ выбираются только для двухэлементных систем замкнутых в X небикомпактных множеств.

Множества $A(F_1, F_2)$ и оставшиеся невыбранными точки образуют разбиение Σ чеховского нароста пространства X. Пространство $\Sigma(X')$ будет очевидно σ-комбинаторным расширением для такого отношения смежности σ, что $\sigma(F_1, F_2)$ имеет место для любых небикомпактных замкнутых в X множеств F_1, F_2 и в то же время $\sigma(F_1, F_2, F_3)$ не всегда имеет место даже если каждое из F_1, F_2, F_3 не бикомпактно. Ясно, что σ не является главным отношением смежности.

6. В заключение мы хотели бы обратить внимание на некоторые вопросы, представляющиеся нам интересными.

Основная задача состоит в выяснении для каких отношений смежности σ на том или ином топологическом пространстве X существуют его σ-комбинаторные расширения. Частными случаями этой общей задачи является вопрос о существовании σ_H-комбинаторных расширений. Аналогично можно поставить вопрос о существовании σ-комбинаторных расширений для различных типов отношений смежности σ и различных классов топологических пространств.

Литература

[1] *E. Čech and J. Novák:* On regular and combinatorial imbedding. Čas. pěst. mat. fys. *72* (1947), 7—16.

[2] *А. А. Иванов:* Отношения смежности на топологических пространствах. ДАН *128* 1 (1959), 33—36.

[3] *А. А. Иванов:* Регулярные расширения топологических пространств. Изв. АН БССР, сер. физ. мат., № 1 (1966), 28—35.

[4] *В. М. Иванова и А. А. Иванов:* Пространства смежности и бикомпактные расширения топологических пространств. Изв. АН СССР, серия матем., *23* (1959), 613—634.