V. Nollau

Über die Potenzen A^α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ eines abgeschlossenen Operators A in einem Banachraum

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 271--273.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700849

ÜBER DIE POTENZEN A^α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ EINES ABGESCHLOSSENEN OPERATORS A IN EINEM BANACHRAUM

V. NOLLAU

Dresden

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit Potenzen linearer Abbildungen eines vollständigen normierten linearen Raumes $\mathfrak{X}$ in sich. Genauer gesagt besteht unser Anliegen darin, für einen linearen Operator A eine Schar linearer Operatoren A^α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ zu definieren, die man als Analogen der Potenzen z^α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ einer komplexen Zahl z ansehen kann, und deren Eigenschaften zu untersuchen.

Wir betrachten wie Balakrishnan [1] in seiner grundlegenden Arbeit die Potenzen eines abgeschlossenen linearen Operators A mit dichtem Definitionsbereich $\partial(A)$ in einem Banachraum, für den die offene negative reelle Halbachse zur Resolventenmenge $\varrho(A)$ gehört und eine positive Konstante M existiert, so daß die Beziehung

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\| \leqq \frac{M}{\lambda}$$

für $\lambda > 0$ besteht. Einen solchen Operator A nennen wir kurz vom Typ (M). Durch das Integral

$$\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \eta^{\alpha-1}(A + \eta I)^{-1} Ax \,\mathrm{d}\eta \,,$$

das für $0 < \alpha < 1$ und $x \in \partial(A)$ in der Normtopologie auf $\mathfrak{X}$ konvergiert, ist dann auf $\partial(A)$ ein abschließbarer linearer Operator definiert, dessen Abschließung wir nach Balakrishnan [1] als die α-te Potenz A^α von A ansehen. Unter A^0 wollen wir außerdem die identische Abbildung und unter A^1 den Operator A selbst verstehen.

Ist ein Operator A vom Typ (M) außerdem stetig und stetig invertierbar, so sind die hier eingeführten Potenzen $A^\alpha\,(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ mit den Operatoren $-(1/2\pi i)\,.\oint_C z^\alpha R(z; A)\,\mathrm{d}z$ [1]) identisch, die man mittels des Riesz-Dunfordschen Funktionalkalküls den Funktionen z^α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ zuordnen kann.

Einige wesentliche Eigenschaften der Operatoren A^α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ geben wir in den folgenden Sätzen an.

---

[1]) Die Funktion z^α sei so definiert, daß $z^\alpha > 0$ für $z > 0$ ist und die komplexe Ebene längs der negativen reellen Halbachse aufgeschnitten ist.

Satz 1. *Es seien A ein Operator vom Typ (M) und A^α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ die α-te Potenz von A. Dann gilt:*

a) *Das Spektrum $\sigma(A^\alpha)$ liegt im Sektor $\{z : |\arg z| \leqq \alpha\omega_A\}$* [2]) $(\omega_A = \pi - \operatorname{Arc\,tan}(1/M))$.

b) *Für alle $z' \in \{z : |\arg z| > \pi\alpha\}$ ist*

$$R(z'; A^\alpha) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu^\alpha (A + \mu I)^{-1}\, d\mu}{\mu^{2\alpha} - 2z\mu^\alpha \cos \pi\alpha + z^2}.$$

Dieses Integral konvergiert in der gleichmäßigen Operatorentopologie.

c) *Die Operatoren A^α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ sind ebenfalls vom Typ (M).*

Satz 2. *Es sei A ein Operator vom Typ (M). Dann gelten für $0 \leqq \alpha, \beta \leqq 1$ die Beziehungen*

$$(\mathrm{P}_1) \qquad A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta} \quad (0 \leqq \alpha + \beta \leqq 1)$$

und

$$(\mathrm{P}_2) \qquad (A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}.$$

Die Beziehungen (P_1) und (P_2) sind bisher nur teilweise oder in Spezialfällen bekannt. Ist A ein maximal accretiver Operator in einem Hilbertraum, so geben Sz.-Nagy und Foias [5] (P_1) und (P_2) an. Für stetig invertierbare Operatoren vom Typ (M) zeigen Krasnoselskij und Sobolevskij [3] (P_1) und (P_2), während Balakrishnan [1] die Beziehung $A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta} x$ $(0 < \alpha + \beta < 1;\ 0 < \alpha, \beta)$ für $x \in \partial(A^2)$ beweist.

Wir bemerken noch, daß (P_2) eine unmittelbare Konsequenz der in Satz 1 angegebenen Integraldarstellung der Resolvente $R(-\mu; A^\alpha)$ $(\mu > 0)$ ist, wie Watanabe [6] in dem Spezialfall eines Operators A vom Typ (M, ω) im Katoschen Sinne (vgl. [2]) zeigt.

Satz 3. *Es sei A ein Operator vom Typ (M). Dann existiert zu einer beliebigen natürlichen Zahl n genau ein Operator B mit den Eigenschaften*

$$B^n = A$$

und

$$\sigma(B) \subseteqq \left\{z : |\arg z| \leqq \frac{\pi}{n}\right\}.$$

Der Operator B ist die $(1/n)$-te Potenz $A^{1/n}$ im Sinne der obigen Definition.

Dieser Sachverhalt entspricht genau der Tatsache, daß es zu einer komplexen Zahl z_0, die nicht auf der negativen reellen Halbachse liegt, und jeder natürlichen

[2]) Das Argument $\arg z$ einer komplexen Zahl z sei stets so definiert, daß $-\pi < \arg z \leqq \pi$ ist, und es gelte $\arg 0 = 0$.

Zahl genau eine Lösung der Gleichung $z^n = z_0$ gibt, die der Bedingung $|\arg z| \leqq \pi/n$ genügt.

Die Aussage des Satzes 3 stellt im Spezialfall eines maximal dissipativen Operators in einem Hilbertraum eine Verschärfung des von Langer [4] angegebenen Satzes über die eindeutige Lösbarkeit der Operatorengleichung $B^n = A$ dar.

Literatur

[1] *A. V. Balakrishnan:* Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. Pac. J. Math. *10* (2) (1960), 419—437.

[2] *T. Kato:* Note on fractional powers of linear operators. Proc. Japan Acad. *36* (3) (1960), 94—96.

[3] *M. A. Krasnoselskij, P. P. Sabreiko, E. I. Pustylnik und P. E. Sobolevskij:* Integraloperatoren in Räumen summierbarer Funktionen. Moskau 1966 (russ.).

[4] *H. Langer:* Über die Wurzeln eines maximalen dissipativen Operators. Acta Math. XIII (1962), 415—424.

[5] *B. Sz.-Nagy und C. Foias:* Sur les contractions de l'espace de Hilbert VI. Acta Sci. Math. XXIII (1962), 130—167.

[6] *J. Watanabe:* On some properties of fractional powers of linear operators. Proc. Japan Acad. *37* (6) (1961), 273—275.