

# Toposym 2

---

Igor A. Shvedov

Розмерность и мягкие пучки

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 347--348.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/700885>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## РАЗМЕРНОСТЬ И МЯГКИЕ ПУЧКИ

И. А. ШВЕДОВ

Новосибирск

Пусть  $X$  — паракомпактное пространство и  $\dim X$  — его размерность, определяемая с помощью всевозможных открытых покрытий. Хорошо известно, что  $\dim X$  не превосходит  $n$  в том и только в том случае, когда всякое непрерывное отображение любого замкнутого подмножества  $Y \subset X$  в  $n$ -мерную сферу  $S^n$  распространяемо на всё  $X$ . Последнее можно выразить словами: пучок непрерывных отображений из  $X$  в  $S^n$  является мягким. Совершенно аналогичный факт имеет место для кохомологической размерности  $\dim(X, G)$  пространства  $X$  с коэффициентами в произвольном пучке абелевых групп  $G$ . Именно: для каждого целого числа  $n$  существует такой пучок  $G^n$ , что  $\dim(X, G^n)$  не больше  $n$  в том и только в том случае, когда пучок  $G^n$  является мягким. В связи с этим многие теоремы как о лебеговской, так и о кохомологической размерности, можно получить в качестве следствий некоторых утверждений о пучках. Например, допустим, что пространство  $X$  есть объединение семейства  $\mathcal{V}$ , состоящего из локально конечной системы локально замкнутых подмножеств, локально счётной системы замкнутых подмножеств и произвольной системы открытых подмножеств. В этом случае для того, чтобы пучок с базой  $X$  был мягким, необходимо и достаточно, чтобы он был относительно мягким над каждым элементом  $V$  семейства  $\mathcal{V}$ . Отсюда немедленно вытекает, что  $\dim X = \max_{V \in \mathcal{V}} (\text{rdim } V)$ , где  $\text{rdim } V$  — относительная размерность множества  $V \subset X$ .

В точности такой же результат получается и для кохомологической размерности. Аналогичным способом можно вывести следующее усиление теоремы К. А. Ситникова о расположении  $r$ -мерного множества в евклидовом пространстве. Пусть  $X$  — подмножество в  $\mathbb{R}^n$  и  $\dim(X, G) = r$ , где  $G$  — произвольная абелева группа. Тогда существует такая точка  $x \in X$ , что в любом достаточно малом шаре  $V$  с центром в точке  $x$  лежит  $(n - r - 1)$ -мерный  $G$ -цикл, зацеплённый в  $V$  с множеством  $X$  а при  $k < n - r - 1$  вообще нет  $k$ -мерных  $G$ -циклов, зацеплённых с  $X$  в какой-либо области из  $\mathbb{R}^n$ .

В том случае, когда  $G$  — абелева группа, в качестве рассмотренного ранее пучка  $G^n$  можно взять пучок непрерывных отображений из  $X$  в комплекс Эйленберга-Маклейна  $K(G, n)$ . Из этого в предположении  $\dim X < \infty$  с помощью симплициальной аппроксимации нетрудно вывести следующие факты. Если

группа  $G$  имеет конечное число образующих то  $\dim(X, G) = \dim(\check{X}, G)$ , где  $\check{X}$  — расширение Чеха пространства  $X$ . Пусть  $Z$  — группа целых чисел. Поскольку  $(n + 1)$ -остов комплекса  $K(Z, n)$  гомотопически эквивалентен сфере  $S^n$ , то из условия  $\dim(X, Z) \leq n$  вытекает, что пучок непрерывных отображений из  $X$  в  $S^n$  является мягким. Это равносильно известной формуле П. С. Александрова  $\dim X = \dim(X, Z)$ , доказанной для паракомпактных пространств К. Х. Даукером. Привлекая некоторые конструкции гомотопической топологии, можно получить следующее усиление приведенного результата. Пусть  $Y$  — произвольный клеточный комплекс и  $\Pi_i = \pi_i(Y)$  — его  $i$ -тая гомотопическая группа. Тогда, если  $\dim(X, \Pi_i) \leq i$  для каждого  $i$ , то пучок непрерывных отображений из  $X$  в  $Y$  является мягким.