О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ КЛАССАХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Николай А. Ларькин, Вячеслав А. Новиков, Николай Н. Яненко.

Новосибирск, СССР

Известно, что реальные физические явления с определенной степенью достоверности можно моделировать уравнениями математической физики [I].

Классическая теория уравнений математической физики имеет дело с тремя типами уравнений: эллиптическим, параболическим, гиперболическим.

Однако, развитие новой технологии, необходимость более детального рассмотрения природы физических явлений потребовало от математиков и механиков исследования новых объектов математической физики, прежде всего уравнений переменного типа. Как правило, это квазилинейные уравнения в частных производных второго порядка, тип которых зависит от свойств решения, например, уравнение Буземана, описывающее трансзвуковые течения газа.

$$u_x u_{xx} - u_{yy} = 0. \qquad \text{(I)}$$

Оно эллиптично, если $u_x < 0$ и гиперболично, если $u_x > 0$.

Другой класс уравнений переменного типа был предложен Н.Н.Яненко [2] для моделирования гидродинамической неустойчивости

$$u_t - (F(u_x))_x = 0, \qquad (2)$$

где функция $F'(u_x)$ может менять знак. Это уравнение в зависимости от знака $F'(u_x)$ параболично "вперед" или параболично "назад".

Постановка краевых задач для уравнений (I) и (2), исследование их разрешимости и численный расчет представляются чрезвычайно трудной проблемой.

I. В тесной связи с уравнениями (I), (2) находится уравнение в частных производных третьего порядка:

$$\beta u_{tt} + u_t - (F(u_x))_x - \mu (F_1(u_x))_{xt} = f(x,t). \qquad (3)$$

Если $\beta = 1$, $F'(u_x) > 0$, $F_1'(u_x) > 0$, $\mu = 1$, то уравнение (3) возникает в теории материалов, обладающих памятью, и его рассмотрели Д.Гринберг, Р.Мак Ками, В.Мизел [3].

К уравнению вида (3) приводится система уравнений, описывающая нестационарные одномерные течения вязкого баротропного газа в лагранжевой системе координат:

$$\frac{\partial 1/\rho}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial x}\right); \qquad (4)$$

отметим, что при немонотонной зависимости давления P от плотности ρ и при $\mu = 0$ система (4) будет системой переменного типа. При $\mu > 0$ разрешимость краевых задач для системы (4) изучалась А.В.Кажиховым и Николаевым [4].

А.И.Кожанов, Н.А.Ларькин, Н.Н.Яненко [5] исследовали разрешимость краевых задач для общего уравнения (3) в случае, когда производные второго порядка образуют оператор переменного типа. Основным допущением являлось следующее

$$F_1'(U_x) \geq \delta > 0, \quad \mu > 0, \quad \beta > 0,$$
$$|F'(U_x)| \leq C(1 + F_1'(U_x)), \quad C > 0. \qquad (5)$$

При этих условиях удалось доказать теоремы об однозначной разрешимости в целом по t начально-краевых задач для уравнения (3), а также задачи Коши.

Более строго справедливо утверждение:

Теорема I. Пусть $F(U_x), F_1(U_x) \in C^2(R)$, $Q = (0,1) \times (0,T)$; $U_0(x) \in W_2^2(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$; $U_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, $f(x,t) \in L_2(Q)$ и выполнены неравенства (5), тогда существует единственная функция $U(x,t)$:

$$U \in L_\infty(0,T; W_2^2(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)), \quad U_t \in L_\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)),$$
$$U_{tt} \in L_2(Q), \quad U_{xxt} \in L_2(Q),$$

удовлетворяющая п.в. в Q уравнению (3) и принимающая следующие начальные и краевые значения:

$$U(x,0) = U_0(x), \quad U_t(x,0) = U_1(x), \quad U|_{x=0,1} = 0.$$

В том случае, если функции $F(U_x)$, $F_1(U_x)$, $f(x,t)$, $U_0(x)$, $U_1(x)$ – более гладкие и согласованы в точках $x = 0, 1$; $t = 0$, то полученное решение является более гладким.

Доказательство существования решения проводится в два этапа:

I. Доказывается существование гладкого решения на достаточно малом промежутке времени.

2. Получаются априорные оценки гладкого решения, позволяющие продолжить решение по t на более широкий промежуток времени.

Для получения априорных оценок уравнение (3) умножается сначала на u_t, затем на $-(F_1(u_x))_x$ и результаты преобразуются совместно.

Из этих оценок следует, что в уравнении (3) можно устремлять к нулю параметр β. Более того, в некоторых случаях можно отказаться от ограничения $F_1'(u_x) \geq \delta > 0$, а потребовать только $F_1'(u_x) \geq 0$.

Технические моменты доказательства теоремы I имеются в [5]. Указанная процедура доказательства существования решения обобщается на многомерное уравнение вида

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} (F_i(u_{x_i}))_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} (\Phi_i(u_{x_i}))_{x_i t} = f(x,t), \tag{6}$$

рассматриваемое в цилиндре $Q = \Omega \times (0,T)$, где Ω – область с достаточно гладкой границей.

Условия (5) заменяются следующими:

$$\begin{gathered} C_1(1+|u_{x_i}|^{p-2}) \leq \Phi_i'(u_{x_i}) \leq C_2(1+|u_{x_i}|^{p-2}), \\ |F_i'(u_{x_i})|^2 \leq C(1+\Phi_i'(u_{x_i})), \quad p>2. \end{gathered} \tag{7}$$

В этом случае удается доказать теорему существования обобщенного решения первой начально-краевой задачи для уравнения (6) в целом по t.

В случае задачи Коши второе из условий (7) можно ослабить:

$$|F_i'(u_{x_i})| \leq C(1+\Phi_i'(u_{x_i})).$$

II. Положив в уравнение (3) $f=\beta=\mu=0$, придем к уравнению

$$u_t - (F(u_x))_x = 0; \tag{2}$$

отсутствие в этом уравнении в отличие от (3) сильной диссипации (при условии знакопеременности функции $F'(u_x)$) приводит к ухудшению свойств решений: потере гладкости, неоднозначности, несуществованию гладких решений у ряда краевых задач.

Будем искать решения уравнения (2), удовлетворяющие начальным и краевым условиям:

$$u_x|_{x=0} = u_1(t), \quad u_x|_{x=1} = u_2(t), \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{8}$$

Теорема 2. Пусть $F(P)=(\nu_0+\nu_2 P^2)$, $\nu_0<0$, $\nu_2>0$;

$u_1(t)=0$, $u_2(t)=(|\nu_0|/3\nu_2)^{1/2}$, $u_0(x)\in C^\infty(0,1)$;

$u_0(1)=0$, $F'(u_0'(x))\le 0$; $u_0'(0)=0$, $u_0'(1)=(|\nu_0|/3\nu_2)^{1/2}$.

Тогда, если $\|u_0\|^2_{L_2(0,1)}=(|\nu_0|/10\nu_2)$ и $t^*=15/|\nu_0|$, то при $t\geq t^*$ не существует решений задачи (2), (8), принадлежащих $C^2(\bar{Q}_t)$, $Q_t=(0,1)\times(0,t)$.

Доказательство теоремы 2 основано на аналоге принципа максимума для параболических уравнений. Тем не менее при "хороших" начальных данных уравнение (2) ведет себя как обычное параболическое уравнение, что утверждает

Теорема 3. Пусть:

i) $F(P)$: $R\to R$ – достаточно гладкая функция, и существует интервал $[P_1, P_2]$ с R, на котором $F'(P)\geq 0$.

ii) функция $\Psi(P)=\int_{P_1}^{P}(F'(\eta))^{1/2}d\eta$ имеет непрерывную обратную для $P\in[P_1,P_2]$.

iii) $0\in[P_1,P_2]$,

$$u_0\in W_2^2(0,1)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1),\quad P_1\le u_0'(x)\le P_2.$$

Тогда существует, по крайней мере, одно решение $u(x,t)$:

$$u\in W_2^1(Q)\cap L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_\infty^1(0,1)),\quad \Psi(u_x)\in W_2^1(Q),$$

задачи (2), (8), удовлетворяющее уравнению (2) п.в. в Q.

Теорема 3 доказывается при помощи монотонного продолжения функции $F(P)$ с интервала $[P_1, P_2]$ и рассмотрением вспомогательной задачи:

$$u_{\varepsilon t}=(F_1(u_{\varepsilon x}))_x+\varepsilon u_{\varepsilon xx},$$

$$u_{\varepsilon x}\big|_{x=0,1}=0,\qquad u_\varepsilon(x,0)=u_{0\varepsilon}(x),$$

где $\varepsilon>0$, $F_1(P)$ – монотонное продолжение функции $F(P)$

Для полученной задачи доказываются равномерные по $\varepsilon>0$ априорные оценки, позволяющие осуществить предельный по $\varepsilon\to 0$ переход. Более полное изложение теорем 2,3 находится в работе В.А.Новикова [6].

Следующий результат говорит о возможности стабилизации решений задачи (2), (8), см [7]. Рассмотрим стационарное уравнение

$$\{F(u_x)\}_x=\frac{1}{2}(u^2)_x \tag{9}$$

и его нестационарный вариант.

$$U_t + UU_x = (F(U_x))_x. \qquad (10)$$

Будем изучать задачу (10), (8) при следующих предположениях:
i) $F(P) \in C^1(R)$, и существует интервал $[P_1, P_2] \subset R$ такой, что $F'(P) \geq 0 \quad \forall P \in [P_1, P_2]$

ii) $\sup\limits_{P \in (-\infty, P_1)} F(P) \leq F(P_1) \leq F(P_2) \leq \inf\limits_{P \in (P_2, \infty)} F(P)$.

iii) $|F(P)P| \leq C(1 + |P|^m)$, $C > 0$, $m > 1$.

Теорема 4. Пусть выполнены предположения i) – iii) и существует обобщенное решение $V(x)$ уравнения (9) такое, что

$$P_1 + \varepsilon \leq V'(x) \leq P_2, \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть также существует обобщенное решение уравнения (10) с произвольным начальным условием $U_0(x) \in W^1_m(0,1)$ и краевыми условиями $U(0,t) = V(0)$, $U_1(t) = V(1)$. Положим $P_1 \geq 0$. Тогда справедлива оценка

$$\|U - V\|^2_{L_2(0,1)} \leq e^{-\varepsilon t} \|U_0\|^2_{L_2(0,1)}.$$

Утверждения теорем 2–4 характеризуются тем, что начальные условия всегда задаются при $t = 0$.

Однако, для параболических уравнений с меняющимся направлением времени предложена постановка краевых задач, когда условия могут задаваться и при некотором значении $t = T > 0$. Линейные задачи такого типа изучались С.А.Терсеновым [8], нелинейный вариант рассмотрели В.Н.Врагов и А.Г.Подгаев.

В полосе $\Pi = R \times (0,T)$ заданы уравнения

$$V_t = ((|V|^\alpha)_{xx} - C_0 |V|), \qquad (11)$$

где $\alpha > 1$, $C_0 > 0$, V – неизвестная функция.

Заданы следующие краевые условия

$$V(x,0) = V_0(x) \geq 0,\ x \leq L; \quad V(x,T) = V_T(x) \leq 0,\ x \geq L. \qquad (12)$$

Неотрицательная при $x \leq L$ и положительная при $x \geq L$ ограниченная функция $V \in C^\gamma(\Pi)$, $\gamma > 0$ называется обобщенным решением задачи (11), (2) если для произвольных чисел R, $R_1 > 0$ выполняется интегральное тождество

$$-\int_{R_1}^{R}\int_0^T (v f_t + |v|^{\alpha} f_{xx} - C_0 |v| f)\,dx\,dt + \int_{R_1}^{R} v f\,dx \Big|_{t=0}^{t=T} -$$

$$\int_0^T |v|^{\alpha} f\,dt \Big|_{x=R_1}^{x=R} = 0, \text{ где } f \in C^{2,1}(\Pi) \qquad , f(R,t) - f(-R_1,t) = 0 ,$$

– в остальном произвольна. Имеет место

Теорема 5. Пусть $V_0(x) \equiv 0$ при $L-h_1 < x \leq L$ и $x < -R_2$, $V_0(0) > 0$, $h_1 > 0$; $V_T(x) \equiv 0$ при $L \leq x \leq L + h_2 < \tilde{L}$ и при $x \geq R_3$, $V_T(\tilde{L}) < 0$, $h_2 > 0$; $V_0, V_T \in C^1$; $R_2, R_3 > 0$.

Тогда при достаточно больших C_0 существует единственное обобщенное решение задачи (II), (I2).

Доказательство теоремы 5 основано на факте локализации возмущений для нелинейных параболических уравнений.

Литература

I. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М. Наука, I968г.

2. Новиков В.А., Яненко Н.Н. "Об одной модели жидкости со знакопеременным коэффициентом вязкости". Сб. "Численные методы механики сплошной среды". Новосибирск, т.4, №2, I973, I42–I47.

3. Greenberg J.M., MacCamy R.C., Mizel V.J. On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$. Journal of Mathematics and Mechanics, v.17, n7, 1968.

4. Кажихов А.В., Николаев В.А. К теории уравнений Навье-Стокса вязкого газа с немонотонной функцией состояния. Докл. АН СССР т.246, №5, I979г., I045–I047.

5. Kozanov A.I., Lar'kin N.A., Yanenko N.N. On a regularization of equations of variable type. Soviet Math. Dokl., v.21, n3, 1980, 758–761.

6. Новиков В.А.,"Теоремы существования и несуществования для одного класса уравнений переменного типа". Докл. АН СССР, т.253, №6, I980.

7. Новиков В.А. "Качественные свойства решений одного класса уравнений переменного типа". Тр.семинара "Численные методы решений уравнений баланса". Берлин, I980г.

8. Терсенов С.А. Первая краевая задача для уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Препринт Ин-та математики СО АН СССР. Новосибирск, I978г.