ФАКТОРИЗАЦИЯ И НЕПОНИЖЕНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ НА ОКРУЖНОСТИ

Анатолий Левин
ЯрГУ, Ярославль, СССР

Рассматривается обыкновенный линейный дифференциальный оператор

$$L = D^n + p_1(t)D^{n-1} + \dots + p_{n-1}(t)D + p_n(t) \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right)$$

с локально суммируемыми коэффициентами $p_i \in R_\omega$; через R_ω обозначается класс вещественных ω-периодических функций. Как обычно, назовем $I \subset (-\infty, \infty)$ промежутком неосцилляции, если каждое нетривиальное решение уравнения $Lx = 0$ имеет менее n нулей в I. Вопросы, связанные с неосцилляцией и распределением нулей решений, широко изучались за последнее время в ряде стран, в том числе и в Чехословакии. После известных работ О. Борувки (об уравнениях второго порядка) этими вопросами занимались М. Грегуш, М. Швец, В. Шеда, М. Гера, М. Раб, М. Зламал, Ф. Нойман; данный перечень можно было бы продолжить.

Согласно классической теореме Пойа (частично восходящей к Фробениусу и Пуанкаре) для факторизуемости L на открытом или замкнутом промежутке I в виде

$$L = (D + h_n)(D + h_{n-1}) \dots (D + h_1) \tag{1}$$

с вещественными (и достаточно гладкими на I) необходимо и достаточно, чтобы I был промежутком неосцилляции для L. Здесь ω-периодичности p_i не требуется. В случае $p_i \in R_\omega$ возникает естественный вопрос о факторизуемости (1) с $h_i \in R_\omega$; такую факторизацию назовем периодической или, что то же, факторизацией (вещественной) на окружности.

Следующие три свойства, как выяснилось, эквивалентны:

1) L вещественно факторизуем на окружности;

2) $(-\infty, \infty)$ есть промежуток неосцилляции для L ;

3) для уравнения $Lx = 0$ все мультипликаторы μ_i положительны и каждому значению μ_i отвечает ровно один (с точностью до множителя) собственный вектор; притом, если базис $\{e_i\}$ приводит матрицу монодромии к жордановой форме и $x_i(t)$ - решение уравнения $Lx = 0$, $(x_i(0), \dots, x_i^{(n-1)}(0))^T = e_i$ $(i = 1, \dots, n)$, то вронскианы $w_k(t)$ функций $x_1, x_2, \dots, x_k$ не имеют нулей в $[0, \omega]$ $(k = 1, \dots, n-1)$.

Как известно, для 2) достаточно, чтобы корни $\lambda_i(t)$ уравнения $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0$ были при всех t вещественны и разделены константами. Условие 3), очевидно, допускает проверку с помощью компьютера (за исключением граничных случаев, когда приближенные методы непригодны). Если оно выполнено, для получения (1) достаточно положить $h_i = \dot{w}_{i-1}/w_{i-1} - \dot{w}_i/w_i$, $i=1,\ldots,n$ $(w_0 \equiv 1)$.

Отметим, что существуют операторы, не факторизуемые на окружности даже с комплексными h_i (как и операторы, факторизуемые на окружности бесконечным числом способов). Однако, если понимать факторизацию в смысле Фробениуса, т.е. допускать наличие особенностей у h_i , то любой оператор с ω-периодическими коэффициентами факторизуем на окружности.

Вернемся к вещественному случаю и обозначим через $S(f)$ число перемен знака функции $f \in R_\omega$ на периоде или, что то же, на окружности ($0 \leq S(f) \leq \infty$; $S(f)$ четно, если $S(f) < \infty$). Будем говорить, что оператор L не понижает осцилляции на окружности, если

$$S(Ly) \geq S(y)$$

для любой (достаточно гладкой) $y \in R_\omega$. В этом случае ω-периодическое решение $x(t)$ уравнения $Lx = f$ $(\in R_\omega)$, очевидно, не может осциллировать "сильнее", чем правая часть $f(t)$.

Из факторизуемости на окружности легко следует непонижение осцилляции на окружности (т.к. последнее очевидно для операторов вида $D+h$). Обратное неверно. Именно, для того, чтобы L не понижал осцилляции на окружности, достаточно, чтобы каждый интервал длины $[\frac{n}{2}]\omega$ был промежутком неосцилляции для L (ясно, что это менее ограничительное требование, чем 2)). При $n=2$ имеет место и необходимость: оператор $L = D^2+p_1D+p_2$ не понижает осцилляции на окружности в том и только том случае, если ни одно нетривиальное решение уравнения $Lx=0$ не имеет двух нулей на расстоянии меньшем, чем ω. Выполнение последнего требования может быть проверено с помощью компьютера (подробнее здесь на этом не останавливаемся), а в ряде случаев также с помощью известных "коэффициентных" признаков - например, неравенства (неулучшаемого характера)

$$\|p_2^+\|\, e^{\frac{1}{2}\|p_1\|} \leq \frac{4}{\omega} \qquad (f^+ = \max\{0, f\},\ \|f\| = \int_0^\omega |f(t)|\,dt\ ).$$

Для $n>2$ автору неизвестны эффективные необходимые и достаточные условия непонижения осцилляции на окружности (интересен, по-видимому, даже случай постоянных коэффициентов). Неясно, в какой мере здесь может быть полезна связь с теорией нечетных ядер Келлога (применительно к функции Грина периодической краевой задачи).

Часть изложенных выше фактов приводилась ранее в [1].

Литература

1. А.Ю.Левин, Факторизация Пойа - Маммана в периодическом случае, Вестник Ярославского университета, вып. 2, 1973, стр. 57-59.