

08. ročník matematické olympiády

Rudolf Zelinka (editor): 08. ročník matematické olympiády.
Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce
1958-1959. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství,
1960.

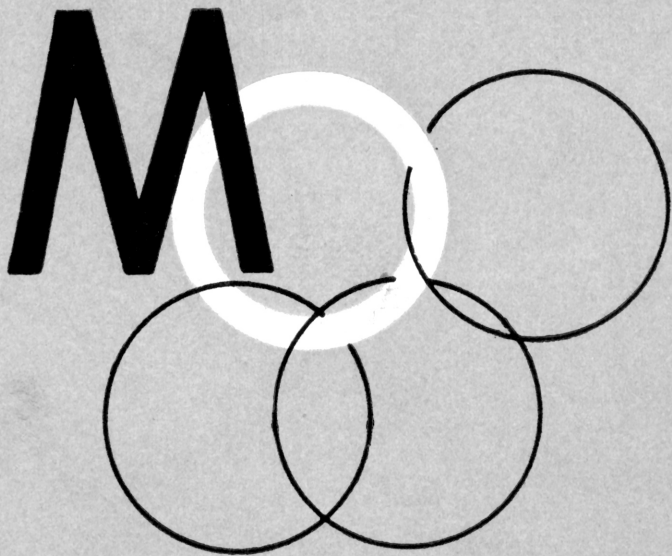
Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404475>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences
provides access to digitized documents strictly for personal use.
Each copy of any part of this document must contain these
Terms of use.



This document has been digitized, optimized for
electronic delivery and stamped with digital
signature within the project *DML-CZ: The Czech
Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

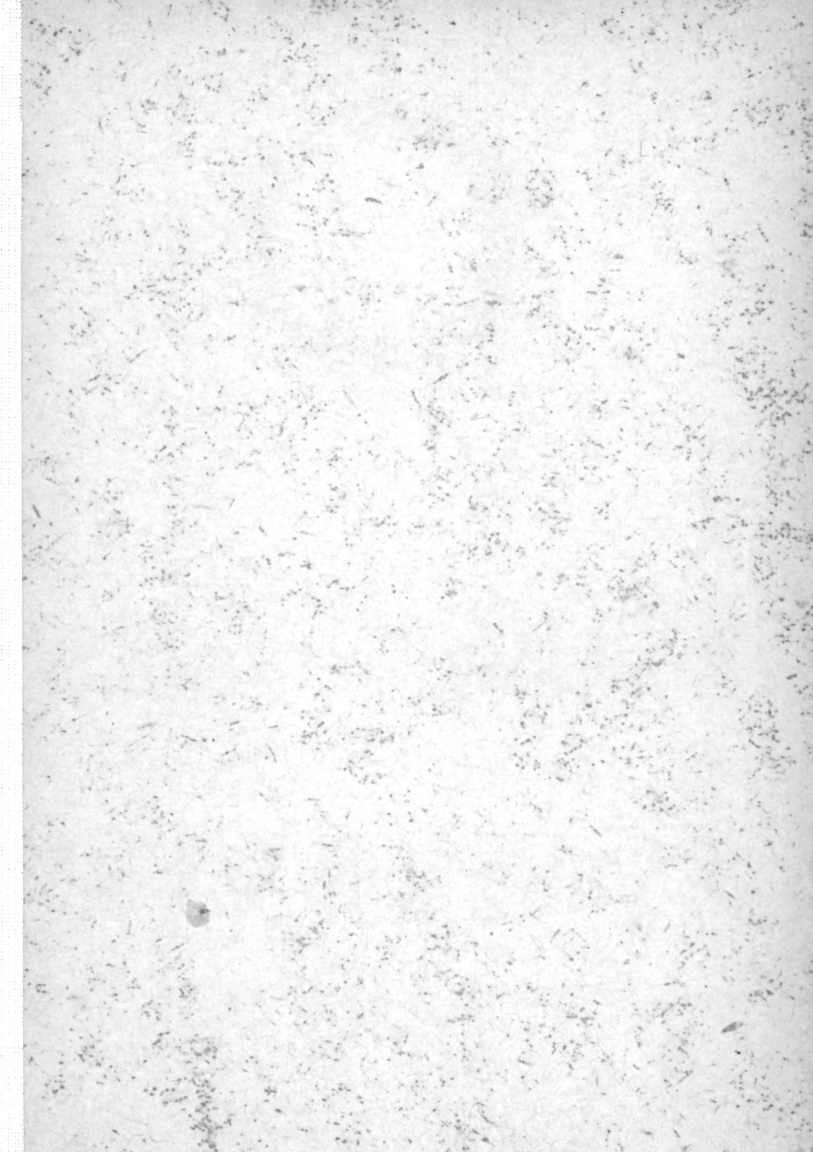


OSMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 66 01 - 3

Státní pedagogické nakladatelství



OSMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané
ve školním roce 1958—1959*

 Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 66 01 - 3

PRAHA 1960

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

V době tisku této knížky opustily čs. obec matematiků dvě významné osobnosti, které byly v r. 1951 iniciátory založení této velmi důležité soutěže, které stály u její kolébky a které projevovaly o MO neutuchající zájem.

Dne 1. listopadu 1959 zesnul ve věku 78 let nestor slovenských matematiků akademik SAV JUR HRONEC, místopředseda ústředního výboru matematické olympiády. Dne 15. března 1960, po dlouhotrvající nemoci opustil nás vědec světového významu, akademik EDUARD ČECH, nositel Řádu republiky a dvojnásobný laureát státní ceny.

Matematická olympiáda jim oběma trvale zachová vděčnou památku.

Za přispění spolupracovníků zpracoval Rudolf Zelinka

Slovenské části textu přeložil doc. dr. Milan Kolibiar

Recenzovali docent Josef Holubář, Vlastimil Macháček, dr. Zbyněk

Nádeník a Miroslav Šisler

I. K průběhu VIII. ročníku matematické olympiády

1. Osmý ročník soutěže matematická olympiáda (zkratka MO) probíhal ve školním roce 1958/59. Účastnili se jej opět převážně žáci středních škol.

Žáci středních škol a žáci výběrových škol odborných byli zařazeni do čtyř kategorií podle této tabulky:

Kategorie	A	B	C	D
Ročník střední školy	11	10	9	8
Ročník výběrové odborné školy	3–4	2	1	—

2. Soutěž se řídila organizačním řádem, který vydalo ministerstvo školství a kultury (instrukce č. 51 VMŠK, roč. XIV, 31. 8. 1958); toto ministerstvo spolu s Matematickým ústavem Československé akademie věd (MÚ ČSAV) a s Ústředním výborem Československého svazu mládeže (ÚV ČSM) byly pořadateli této olympiády.

Soutěž organizoval ústřední výbor matematické olympiády (ÚVMO) spolu s krajskými a okresními výbory matematické olympiády (KVMO, OVMO).

Členy těchto výborů byli učitelé matematiky středních a vysokých škol, školští pracovníci, pracovníci ČSM apod.

Ústřední výbor MO (adresa: Praha II, Žitná 25, tel. 24-11-93) byl složen takto:

Předseda:

Akademik *Josef Novák*

Místopředseda:

Akademik SAV *Jur Hronec*, profesor přírodovědecké fakulty university J. Á. Komenského v Bratislavě (zemřel 1. listopadu 1959)

Jednatel:

Rudolf Zelinka, vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Členové:

Ludmila Frantíková, učitelka jedenáctileté střední školy ve Vítkově u Opavy

Dr. *Karel Havlíček*, docent matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze

Doc. *Josef Holubář*, vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

František Hradecký, odborný asistent Vysoké školy pedagogické v Praze

Dr. *Karel Hruša*, docent Vysoké školy pedagogické
v Praze

Miloš Jelínek, ústřední inspektor ministerstva škol-
ství a kultury v Praze

Dr. *Milan Kolibiar*, docent přírodovědecké fakulty
university J. Á. Komenského v Bratislavě

Josef Krchňavý, učitel 2. jedenáctileté střední školy
v Košicích

Alena Müllerová, referentka oddělení studující mlá-
deže v ústředním výboru ČSM v Praze

Dr. *Josef Pírek*, učitel osmileté střední školy v Brně

Dr. *Miloslav Zedek*, odborný asistent Vysoké školy
pedagogické v Olomouci

PŘEDSEDY KRAJSKÝCH VÝBORŮ
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY BYLI:

Dr. *Josef Korous*, docent Vysoké školy železniční
v Praze (město Praha)

Dr. *Alfons Hyška*, dnes docent Vysokého učení
technického v Plzni, dříve docent Českého vysokého
učení technického v Praze (kraj Pražský)

František Vejsada, učitel 2. jedenáctileté střední
školy v Českých Budějovicích (kraj Budějovický)

Věra Rádllová, učitelka jedenáctileté střední školy
Julia Fučíka v Plzni (kraj Plzeňský)

Miloslava Žáčková, krajská školní inspektorka v od-

boru školství a kultury rady KNV v Karlových Varech
(kraj Karlovarský)

Josef Porcal, učitel pedagogické školy v Teplicích
(kraj Ústecký)

Zdeněk Kalousek, učitel pedagogické školy v Liberci
(kraj Liberecký)

Josef Mencl, učitel pedagogické školy v Hradci Králové
(kraj Hradecký)

Ludvík Kapička, učitel 1. jedenáctileté střední školy
v Třebíči (kraj Jihlavský)

Vladimír Štefl, krajský školní inspektor v Brně
(kraj Brněnský)

Dr. Miloslav Zedek, odborný asistent Vysoké školy
pedagogické v Olomouci (kraj Olomoucký)

Leo Krakówka, učitel průmyslové školy strojnické
v Gottwaldově (kraj Gottwaldovský)

Josef Andrys, vedoucí kabinetu matematiky při
Krajském ústavu pro další vzdělávání učitelů v Ostravě
(kraj Ostravský)

Jozef Kroupa, učitel 2. jedenáctileté střední školy
v Bratislavě (město Bratislava)

Dr. Milan Kolibiar, docent přírodovědecké fakulty
university J. Á. Komenského v Bratislavě (kraj
Bratislavský)

Adolf Heinisch, učitel matematiky na průmyslové
škole stavební v Nitře (kraj Nitranský)

Dr. *Cyril Palaj*, profesor Vysoké školy lesní a dřevařské ve Zvolenu (kraj Banskobystrický)

Ladislav Berger, učitel 1. jedenáctileté střední školy v Žilině (kraj Žilinský)

Dr. *Ján Jakubík*, docent Vysoké školy strojní v Košicích (kraj Košický)

Dr. *Ernest Jucovič*, odborný asistent Vyšší pedagogické školy v Prešově (kraj Prešovský)

3. Soutěž v kategoriích B, C, D měla dvě kola, v kategorii A tři kola.

Podle organizačního řádu probíhalo I. kolo v době od října 1958 do konce února 1959. Žáci měli rozřešit ze šesti zadaných úloh alespoň čtyři dobře. Tuto práci konali doma; vypracovaná řešení odevzdali svému učiteli matematiky, který je opravil a seznámil žáky s podstatnými nedostatky jejich řešení. Ředitel školy spolu s referentem matematické olympiády (jímž je na každé škole jeden z učitelů matematiky) podali návrh příslušnému krajskému nebo okresnímu výboru MO, které žáky své školy navrhuje zařadit do II. kola soutěže; na škole nesmí počet všech navrhovaných žáků určitého ročníku překročit 10 % celkového počtu žáků tohoto ročníku. O definitivním zařazení žáka do II. kola rozhoduje KVMO nebo OVMO.

Texty úloh I. kola byly uveřejněny v časopisech Matematika ve škole a Rozhledy matematicko-fyzi-

kální; vedle toho byl vydán zvláštní leták v počtu 15 000 exemplářů, v němž vedle úloh I. kola byly uveřejněny další úlohy k procvičování pro přípravu na úspěšné zvládnutí vlastní soutěže.

Vedle referenta MO pečovala na škole o propagaci soutěže školská organizace ČSM a pionýrská organizace.

II. kolo soutěže v kategoriích A, B, C se konalo v neděli 12. dubna 1959 v krajských městech, v kategorii D v městech okresních v neděli 26. dubna 1959. Během čtyř hodin měli žáci ze čtyř zadaných úloh rozřešit alespoň dvě dobře. Stejně požadavky se kladou i na III. kolo soutěže, kterého se účastní vybraní úspěšní řešitelé II. kola z kategorie A.

U příležitosti II. kola pořádaly krajské a okresní výbory MO pro účastníky soutěže besedy o významu studia matematiky, při nichž se mluvilo i o nedostacích v žákovských řešeních jednotlivých úloh; vedle toho bývá pro žáky uspořádán hodnotný kulturní podnik jako návštěva divadla, výstavy nebo exkurze do různých průmyslových závodů. Žáci bývají upozorňováni na vhodnou studijní literaturu z oboru matematiky, fyziky, astronomie a technických věd.

Pedagogický dozor nad účastníky soutěže bývá organizován ve spolupráci s ČSM a se školskými odbory rad KNV a ONV.

4. Celostátní soutěž III. kola pro vybrané úspěšné řešitele II. kola kategorie A se konala dopoledne v sobotu 23. května 1959 v budově Matematického ústavu Karlovy university v Praze 2-Nové Město, Ke Karlovu 3.

Do posledního kola přihlášily krajské výbory celkem 90 úspěšných řešitelů II. kola. Organizační komise ústředního výboru matematické olympiády vybrala z nich 76 nejlepších (podle organizačního řádu matematické olympiády se III. kola může účastnit maximálně 80 žáků); soutěže se účastnilo 73 řešitelů (3 se tedy nedostavili). Požadavkům soutěže vyhovělo 33 řešitelů III. kola.

Pro účastníky III. kola soutěže uspořádal při této příležitosti ústřední výbor matematické olympiády besedu za účasti širší školské a vědecké veřejnosti. Besedu řídil předseda ústředního výboru MO akademik Josef Novák, který v úvodu podal přehled o průběhu VIII. ročníku. O elektronkových počítacích strojích z hlediska matematiky promluvil dr. Josef Metelka, profesor Palackého university v Olomouci; o významu matematiky pro technické studium promluvil dr. Václav Pleskot, profesor Českého vysokého učení technického v Praze. K oběma přednáškám se rozvinula bohatá diskuse a pracovníci přítomní na besedě pak odpověděli olympionikům na řadu jejich dotazů. Besedu uzavřel akademik Josef Novák, který poděkoval

olympionikům za jejich pracovní úsilí a přál jim hodně úspěchů v dalším studiu. Dále jako předseda ÚVMO poděkoval pořadatelům soutěže; zvláště srdečně zhodnotil obětavou dobrovolnou práci členů a spolupracovníků krajských a okresních výborů MO i všech učitelů matematiky na školách.

Večer téhož dne navštívili olympionici v Armádním divadle na Vinohradech hru „Vojna a mír“, jejíž předlohou je proslulý román L. N. Tolstého.

V neděli 24. května 1959 shlédli účastníci soutěže pamětihodnosti Prahy v rámci hostitelských úkolů ÚV ČSM; členové ČSM pečovali také o pedagogický dozor nad olympioniky.

II. Zpráva o výsledcích jednotlivých kol soutěže

A. SOUTĚŽ I. KOLA

O počtu účastníků v soutěži informují tabulky čís. 1 a 2. V tomto soutěžním ročníku — jak je dále vyloženo — nelze početní stav porovnávat s ročníky předchozími, neboť na okresní a krajské výbory nebyla zasílána řešení všech žáků, ale jen těch, o jejichž konečném úspěchu měli ředitel školy a referent MO dobré mínění. Nejsou tedy v tabulkách podchyceni ti, kteří se o řešení úloh I. kola sice pokoušeli, ale neuspokojili plně již ani v měřítku vlastní školy.

Podstatně příznivější jsou čísla v kategorii A — a to pokud jde o účast i úspěch; slabší jsou výsledky v kategorii C. Zdá se, že by učitelé matematiky měli věnovat žákům kategorie C intenzivní pozornost, neboť většina z nich setrvává v příštích letech v soutěži; přitom žáci kategorie C postrádají hlubších zkušeností s řešením obtížnějších úloh a nedovedou své myšlenky ještě jasně formulovat a uvádět v logické souvislosti.

Jestliže některá srovnání s loňským rokem jsou

zdánlivě nepříznivá, je skutečnost jiná. Procento úspěšných řešitelů ze všech účastníků soutěže v každé z kategorií A, B, C je podstatně vyšší. Z toho však nelze ještě usuzovat, že jsme podstatně pokročili ve zvyšování výsledků vyučování matematice; mezi účastníky I. kola nepočítáme ty, jichž slabý výkon zjistil již jejich učitel. Vedle toho měli žáci v VIII. ročníku práci podstatně usnadněnu tím, že povinně řešili nejvýše 6 úloh proti deseti úlohám v ročníku předchozím; přitom museli rozřešit správně jen 4 úlohy proti dřívějším sedmi.

Značně menší je procento úspěšných řešitelů v kategorii D (něco přes 52 % proti minulým 76 %). I když kategorie D má podle organizačního řádu MO podstatně odlišné poslání než kategorie A až C, není tato situace nepříznivá; recenzenti by měli na posuzování olympioniků vzít přísnější měřítko, než tomu bylo dosud, a zvláště je nezbytné, aby toto měřítko bylo mnohem náročnější než to, s nímž se spokojují při klasifikaci ve třídě, kde posuzují především zvládnutí nejzákladnějších vědomostí.

Závažnější problém však je, že řada krajů se dosud málo uplatňuje v soutěži — a to nejen pokud jde o celkový počet účastníků, ale i pokud jde o úspěšné řešitele; zde je třeba vzít v úvahu i počet obyvatelstva v jednotlivých krajích. Nepříznivé je zvláště porovnání obou prvních krajů v Čechách s krajem třetím. V Pražském

Tabulka č. 1

*Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů
v kategoriích A, B, C*)*

KRAJ	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Celkem	
	P	U	P	U	P	U	P	U
Praha - město	127	74	133	51	175	54	435	179
Praha - venkov	30	26	36	29	50	29	116	84
České Budějovice	118	23	120	21	146	19	384	63
Plzeň	48	21	68	26	46	23	162	70
Karlovy Vary	64	13	33	11	54	13	151	37
Ústí nad Labem	47	17	51	13	78	24	176	54
Liberec	32	11	20	15	19	6	71	32
Hradec Králové	47	26	40	26	58	42	145	94
Pardubice	26	10	49	20	47	18	122	48
Jihlava	55	26	51	32	81	41	187	99
Brno	121	64	95	54	127	58	343	176
Olomouc	79	47	91	48	98	49	268	144
Gottwaldov	59	31	34	16	62	30	155	77
Ostrava	63	33	74	35	106	29	243	97
Bratislava - město	52	30	49	33	70	27	171	90
Bratislava - venkov	26	16	40	14	38	12	104	42
Nitra	31	16	34	23	70	18	135	57
Banská Bystrica	193	48	72	23	116	37	381	108
Žilina	110	41	131	36	111	23	352	100
Košice	35	14	38	6	58	8	131	28
Prešov	34	18	26	7	47	6	107	31
Celkem	1397	605	1285	539	1657	566	4339	1710

*) P = celkový počet účastníků, U = počet úspěšných řešitelů

kraji soutěž dosud plně nezakotvila a je zajímavé, že i české pohraniční kraje jeví příznivější situaci.

Slovenské kraje působí mnohem příznivěji než tomu bylo dosud; úsilí slovenských soudruhů, aby se olympiáda u nich vžila, se zřejmě osvědčuje. Přitom kraj Bratislavský má asi podobné nesnáze jako Pražský.

B. SOUTĚŽ II. KOLA

1. Tabulky č. 3 a 4 podávají přehled o účasti a výsledcích II. kola. Proti předchozímu ročníku jeví kategorie A značně vyšší účast, avšak úspěšných řešitelů je podstatně méně (asi 23 % proti loňským 50 %); to se projevilo i na menším počtu přihlášek do III. kola. Kategorie B má sice horší procento počtu úspěšných řešitelů z celkového počtu účastníků, ale absolutně je počet úspěšných řešitelů týž jako minule. Nejslabší skoro ve všech krajích a tím i celkově se jeví v obou bodech kategorie C; je proto namístě věnovat větší pozornost při náboru žáků do soutěže v této kategorii a samozřejmě i jejich dalšímu vedení. V kategoriích A až C se umístilo úspěšně jen asi 25 % žáků proti 60 % předchozího ročníku. Příčinu nelze hledat např. jen v možné obtížnosti úloh; vedle jiných závažných okolností to může být menší připravenost, zvláště vzhledem k podstatnému snížení počtu úloh I. kola. Proto se snad právem ozývaly hlasy na závěrečné schůzi ústředního výboru Matematické olym-

Tabulka č. 2

*Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů
v kategorii D*)*

Kraj	Kategorie D	
	P	U
Praha-město	1127	618
Praha -venkov	506	284
České Budějovice	658	329
Plzeň	450	294
Karlovy Vary	427	198
Ústí nad Labem	182	94
Liberec	436	187
Hradec Králové	482	334
Pardubice	328	204
Jihlava	389	226
Brno	884	540
Olomouc	705	386
Gottwaldov	664	366
Ostrava	755	337
Bratislava-město	310	190
Bratislava -venkov	431	212
Nitra	677	289
Banská Bystrica	553	327
Žilina	954	251
Košice	246	164
Prešov	196	64
Celkem	11360	5894

*) P = počet všech účastníků, U = počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 3
*Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů
v kategoriích A, B, C*)*

KRAJ	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Celkem	
	P	U	P	U	P	U	P	U
Praha-město	68	12	46	13	50	32	164	57
Praha-venkov	24	14	27	9	18	18	69	41
České Budějovice	18	1	20	13	18	6	56	20
Plzeň	21	6	24	13	20	13	65	32
Karlovy Vary	11	1	10	4	12	4	33	9
Ústí nad Labem	17	7	13	13	24	17	54	37
Liberec	11	—	15	4	6	1	32	5
Hradec Králové	25	13	26	22	39	32	90	67
Pardubice	11	2	18	5	16	5	45	12
Jihlava	23	17	29	21	30	29	82	67
Brno	59	17	49	21	50	35	158	73
Olomouc	45	5	42	11	37	31	124	47
Gottwaldov	26	2	16	5	27	9	69	16
Ostrava	33	3	35	8	29	10	97	21
Bratislava-město	30	3	31	4	24	10	85	17
Bratislava-venkov	16	5	14	1	12	7	42	13
Nitra	15	7	23	11	17	12	55	30
Banská Bystrica	48	8	23	5	33	9	104	22
Žilina	36	6	36	16	21	4	93	26
Košice	14	2	6	3	8	2	28	7
Prešov	18	—	8	4	6	2	32	6
Celkem	569	131	511	206	497	288	1577	625

*) P = celkový počet účastníků, U = počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 4

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategorii D)*

KRAJ	Kategorie D	
	P	U
Praha-město	503	444
Praha-venkov	176	158
České Budějovice	276	210
Plzeň	236	194
Karlovy Vary	132	112
Ústí nad Labem	90	75
Liberec	166	144
Hradec Králové	231	188
Pardubice	159	134
Jihlava	157	142
Brno	429	378
Olomouc	287	246
Gottwaldov	282	252
Ostrava	297	218
Bratislava-město	54	41
Bratislava-venkov	123	73
Nitra	242	178
Banská Bystrica	241	200
Žilina	201	168
Košice	118	87
Prešov	59	35
Celkem	4459	3677

*) P = počet všech účastníků, U = počet úspěšných řešitelů

piády, aby byl počet úloh I. kola zvýšen opět na 10.

V kategorii D je na 80 % úspěšných řešitelů, avšak absolutně vzhledem k předchozímu roku je počet účastníků i úspěšných řešitelů asi o 10 % menší. Přírůstky se jeví u krajů slovenských, kdežto řada českých krajů má značné úbytky; zdá se, že okresní výbory MO budou musit této otázce věnovat zvláštní pozornost.

2. Všichni úspěšní řešitelé II. kola dostali pochvalná uznání. Podle organizačního řádu pak ještě nejlepší úspěšní řešitelé II. kola v každé kategorii A—C (v rámci kraje) obdrželi věcné ceny, zvláště pak ceny knižní; v kategorii D se tak stalo v rámci každého okresu.

V dalším uvádíme seznamy *prvních deseti* nejlepších úspěšných řešitelů II. kola v kategoriích B, C podle jednotlivých krajů (pro ně se II. kolem soutěž zakončuje).

Pořadí úspěšných řešitelů II. kola v kategoriích B, C
J = jedenáctiletá střední škola, kterou někde neuvádíme,

P = průmyslová škola; Pg = pedagogická škola

Praha město

B. Souček Jiří, Praha 16; Lonek Bolemír, P, Praha 2; Zvánovec Jan, Praha 12; Doubravová Anna,

Praha 12; Kutiš Ladislav, Praha 16; Mach Václav, Praha 6; Temml Petr, Praha 16; Jaroš Petr, Praha 12; Hemmer Ivan, Praha 2; Klátil Aleš, Praha 6.

C. Froněk Pavel, Praha 8; Groda Alexander, Praha 3; Leebová Anna, P, Praha 2; Veselý Karel, Praha 6; Kraemer Emil, Praha 6; Kretschmer Michal, Praha 13; Výborný Z., Praha 5; Lacina Libor, Praha 14; Smrž Petr, Praha 6; Štecher Petr, Praha 12.

Pražský kraj

B. Regner Vlad., Mladá Boleslav; Renner O., Český Brod; Musil B., Kolín; Karhan V., Hořovice; Vaněk Jos., Mladá Boleslav; Kobylka V., Hořovice; Vojáček Jan, Český Brod; Kozlovský Jan, Benešov; Nová Marta, Český Brod.

C. Hrbáček, Nymburk; Kovanda, P, Mladá Boleslav; Pilousek, P, Mladá Boleslav; Laifr, Poděbrady; Jandová, Mladá Boleslav; Fanta, Mladá Boleslav; Hanika, Hořovice; Drápal, Nymburk; Koníř, Kolín; Černá, Říčany.

Kraj Budějovický

B. Havlíček Václav, 2. J, České Budějovice; Kořenáč J., Vodňany; Krejšová Marie, 2. J, České Budějovice; Komrska Josef, Týn n. Vlt.; Ondřich Boh., 1. J, České Budějovice; Kohelová Libuše, 3. J,

České Budějovice; Proška Vladimír, 2. J, České Budějovice; Žofka Jan, Písek; Moravec Vladimír, 2. J, České Budějovice; Komárková R., Vodňany.

C. Hofferová Pravoslava, 1. J, Tábor; Lusk Jan, 2. J, České Budějovice; Moravec Václav, 2. J, České Budějovice; Parma Ludvík, 2. J, Tábor (Mareduv Vrch); Horník Jiří, P, Písek; Gottwald Josef, 2. J, České Budějovice.

Kraj Plzeňský

B. Hájek Josef, 1. J, Plzeň; Hajšman Lad., 1. J, Plzeň; Vrba Ant., Přeštice; Žaloudek Fr., Plasy; Mareš Jaroslav, 2. J, Plzeň; Baumlová Milena, 1. J, Plzeň; Kahudová Alena, 1. J, Plzeň; Matějka Jan, Sušice; Nedoma Petr, 2. J, Plzeň; Žilák Jan, 1. J, Plzeň.

C. Vaníček M., P, Plzeň; Vacek Jiří, 3. J, Plzeň; Čížek Zd., Klatovy; Pilný Karel, 1. J, Plzeň; Vaník Josef, 1. J, Plzeň; Minařík Lud., 2. J, Plzeň; Walter Karel, Plasy; Umprecht Jan, 1. J, Plzeň; Sláma Jar., P, Plzeň; Šašková M., 3. J, Plzeň.

Kraj Karlovarský

B. Křišťan Bohumil, Karlovy Vary; Kalenda Libor, Podbořany; Klír Jiří, Karlovy Vary; Vítkovský Evžen, Podbořany; Konopásek Petr, Karlovy Vary.

Kraj Ústecký

B. Cihlář Jiří, 1. J, Ústí n. L.; Růžička Karel, 1. J, Ústí n. L.; Toman Zdeněk, 2. J, Chomutov; Wetzler Jiří, 2. J, Chomutov; Černý Viktor, 2. J, Chomutov; Pernerová Marie, 2. J., Ústí n. L.; Krajčářová Květ., 1. J, Teplice II; Závodský Petr, 2. J, Teplice; Popel Ivan, 1. J, Teplice II; Zavadil Jar., P, Děčín.

C. Starý Petr, 2. J, Ústí n. L.; Thorovský Ctibor, 2. J, Ústí n. L.; Jaeger Vlad., DSS, Most; Koten Alexandr, P, Ústí n. L.; Franče Jiří, Litoměřice; Lukšan Lad., 1. J, Ústí n. L.; Tymich Jiří Al., Litoměřice; Stará Ivona, P, Ústí n. L.; Šíma Stanislav, P, Děčín; Vaněk Zdeněk, 2. J, Teplice.

Kraj Liberecký

B. Šída Otakar, Tanvald; Denk Jan, 2. J, Liberec; Jonáš Stanislav, 2. J, Liberec; Zemanová Arnoštka, 1. J, Liberec.

C. Šoltys Dušan, 1. J, Liberec.

Kraj Hradecký

B. Nosek Pavel, Hradec Král.; Dršata Jaroslav, Hradec Král.; Kovář Jindřich, Nová Paka; Vejs Jaroslav, Hradec Králové; Gottland Miroslav, Hradec Král.; Hovorka František, Hradec Král.; Kubíček

Milan, Trutnov; Kyrál Václav, Trutnov; Soukup Karel, Nový Bydžov; Škop Josef, Dobruška.

C. Polkovníková Marie, Kostelec n. O.; Bryknar Zdeněk, Nová Paka; Švejdar Václav, Náchod; Čápová Marie, Kostelec n. O.; Rus Jan, Náchod; Tůma Petr, Nová Paka; Zeidlerová Ludmila, Kostelec n. O.; Divišková Jarmila, Kostelec n. O.; Fialová Stanislava, Kostelec n. O.; Losa Milan, Trutnov.

Kraj Pardubický

B. Synek Jan, P, Pardubice; Moravec Petr, 2. J, Pardubice, Na Spořilově; Třešňák Josef, Chrudim; Laštovková Marie, 1. J, Pardubice; Kyncl Jan, Hlinsko v Č.

C. Gabrielová Věra, 1. J, Pardubice; Kroupa Jaroslav, Chrudim; Lesák Miloš, 2. J, Pardubice - Na Spořilově; Rychlý Josef, Chotěboř; Malečková Drahomíra, Litomyšl.

Kraj Jihlavský

B. Vajcar Oldřich, Třebíč; Klíma Tomislav, Žďár n. S.; Malbohan Ivan, Třebíč; Málek Jaromír, Žďár n. S.; Langpaul Petr, Havlíčkův Brod; Šperlink Karel, Havlíčkův Brod; Kadlec Luděk, Telč; Fráňa Jan, Havlíčkův Brod; Lupač Vlad., Telč; Boušková Libuše, Telč.

C. Dovalil Josef, Jihlava; Bulička Jaroslav, Třebíč; Fořtová Libuše, Ledec; Frolián Miroslav, Třebíč; Rosa Jan, Jihlava; Svoboda Karel, Třebíč; Trtík Bohumil, Ledec; Večeřová Marta, Velké Meziříčí; Bacík František, Ledec n. S.; Jůna Pavel, Ledec n. S.

Kraj Brněnský

B. Lochman Václav, Brno; Seidel Zbyněk, Brno; Zavadilová Květa, Brno; Kuba Ivan, Brno; Soukup Jiří, Brno; Štefanová Marie, Brno; Auermüller Jan, Brno; Halámek Josef, Brno; Okleštěk Josef, Slavkov u Brna; Zachoval Jan, Brno.

C. Špundlová Jarmila, Brno; Vanýsek Jiří, Brno; Mareš Petr, Ivančice; Běhal Jiří, Brno; Košťál Lubor, Brno; Tomášek Jiří, 1. J, Břeclav, Stejskal Pavel, Brno; Šilhán Jindřich, Svitavy; Marčíková Irena, Brno; Matonoha Jiří, 1. P, Brno.

Kraj Olomoucký

B. Wichterle Karel, Jeseník; Losík Václav, 1. J, Olomouc; Vrána Miroslav, Šumperk; Skopal František, Litovel; Dohnal Zdeněk, Kojetín; Unzeitig Petr, Zábřeh; Ferdinand Jan, Hranice; Karásek Vojtěch, 1. J, Olomouc; Hronek Jiří, 1. J, Olomouc; Kryl Miroslav, Uničov.

C. Černohorský Jindřich, 1. J, Olomouc; Mareček

Michael, 1. J, Olomouc; Lukš Antonín, 1. J, Olomouc; Novotný Jan, 12letá střední škola, Olomouc-Hodolany; Burián Ivo, 1. J, Prostějov; Trnka Josef, P, Přerov; Doskočil Ivan, 1. J, Prostějov; Pavlík Alfréd, Hranice; Jahnová Jitka, 1. J, Olomouc; Sedláček Jiří, Zábřeh.

Kraj Gottwaldovský

B. Krumpolc E., Kroměříž; Třešňáková J., P, Gottwaldov; Pelíšek Vlad., 1. J, Gottwaldov; Jurečka J., Vsetín; Mach R., Hodonín.

C. Zmeškalová Eva, Val. Meziříčí; Hron Josef, P, Uherský Brod; Jandík M., 2. J, Gottwaldov; Obdržálek Vl., Otrokovice; Šnajdrová D., P, Gottwaldov; Dřevojánková J., P, Gottwaldov; Plívová Eva, 2. J, Gottwaldov; Novotná Marie, Rožnov p. Radh.; Kratochvíl Jan, 2. J, Gottwaldov.

Kraj Ostravský

B. Fiala Miroslav, Ostrava I; Kosík Pavel, Ostrava I; Lanta Jan, Ostrava I; Jánoš Vít, Ostrava I; Weber Milan, Ostrava I; Veselý Jan, Ostrava I; Srovnal Milan, Ostrava I; Bezoušek Pavel, Ostrava I; Pěkník Miroslav, Ostrava VII; Ottová Jana, Nový Jičín.

C. Ošmera Radomír, P, Kopřivnice; Sobotková Jana, Ostrava I; Havlíčková Marie, Ostrava I; Dittrichová Libuše, Ostrava VII; Slíva Karel, Ostrava VII;

Špička Jaroslav, Ostrava VII; Černík Jiří, Ostrava VII; Vagera Ivan, Ostrava VII; Kývalová Miluše, Nový Jičín; Novosad Antonín, Nový Jičín.

Bratislava město

B. Petrovič M., Bratislava; Plesník J., P, Bratislava; Krušínský J., Bratislava; Matzt, P, Bratislava.

C. Macák K., Bratislava; Vinceková A., Bratislava; Mikláš D., Bratislava; Čunderlík J., P, Bratislava; Komrska F., Bratislava; Schwarz J., P, Bratislava; Klinský R., P, Bratislava; Lexa I., Bratislava; Jakubík I., Bratislava; Krampl, P, Bratislava.

Kraj Bratislavský

B. Krcho Bohuš, Nové Mesto nad Váhom.

C. Nemeček Miloš, 1. J, Trenčín; Suchán Pavol, 1. J, Trenčín; Zahradník Pavol, 1. J, Trenčín; Červeňanová Agnesa, 1. J, Trenčín; Grečner Dušan, 1. J, Trenčín; Sýkorčinová Emília, 1. J, Trenčín; Šebeková Zora, 1. J, Trenčín.

Kraj Nitranský

B. Korec Ivan, Partizánske; Bendlová Helena, Komárno; Petrikovits Ebbo, Partizánske; Féglás Ferenc, Komárno; Jahn Peter, Nitra; Ač Vladimír, Nitra; Ručková Gabriela, Šurany.

C. Chocholáček Ľudovít, Komárno; Baník Peter, Partizánske; Šmondrková Anna, Levice; Dodok Samuel, Levice; Mohnáčzky Ladislav, Komárno; Mešina Marián, Prievidza; Lazorišák Ivan, Levice; Šulo Štefan, Partizánske; Švec Pavol, Šurany; Goga Anton, Prievidza.

Kraj Banskobystrický

B. Heim Peter, Kremnica; Šoršák Jozef, Šahy; Sarka Kamil, Žarnovica; Pönthe Štefan, P, Lučenec; Regelyová Mariana, P, Lučenec.

C. Dobríková Anna, 1. J, Ban. Bystrica; Ursíny Ivan, Brezno; Ferenc Jozef, Šahy; Kováčová Mária, 2. J, Zvolen; Pavlajová Eva, 2. J, Zvolen; Palajová Elena, 2. J, Zvolen; Lányi Štefan, P, Ban. Bystrica; Badín Oto, P, Zvolen; Burjániv Jaroslav, P, Zvolen.

Kraj Žilinský

B. Beran Lad., 2. J, Žilina; Šlocová Tatiana, Kláštor p. Zn.; Závodská Marta, 1. J, Žilina; Engelová Mária, L. Mikuláš; Prokainová M., Kláštor p. Zn.; Joštíková Vilma, Trstená; Geburová Tatiana, 1. J, Žilina; Jagelka Leon, Púchov; Matula Pavol, Kláštor p. Zn.; Macko Oto, L. Mikuláš.

C. Konček Ján, Púchov; Rusnák Ivan, Ružomberok; Kordoš Ivan, Martin; Račková Margita, Rajec; Jaroš Štefan, Ružomberok.

Kraj Košický

B. Mikuš Ján, 2. J, Košice; Poracká Zita, 2. J, Košice; Sedláček Anton, 2. J, Košice.

C. Kundrunovský Jozef, 2. J, Košice; Franclík Ján, 2. J., Košice.

Kraj Prešovský

B. Csontó B., 1. J, Prešov; Skalský V., 1. J, Prešov; Lukáč L., 1. J, Prešov; Bačík K., Humenné.

C. Pavelka D., 4. J, Prešov; Ličák Š., 4. J, Prešov.

C. SOUTĚŽ III. KOLA

Soutěž III. kola se týká řešitelů kategorie A. Krajské výbory MO přihlásily do soutěže 90 nejlepších úspěšných řešitelů II. kola. Organizační komise při ústředním výboru matematické olympiády z nich vybrala 73 účastníků. Z nich 33 bylo úspěšných. Nejlepších 20 z těchto úspěšných řešitelů III. kola stává se podle organizačního řádu vítězi příslušného ročníku soutěže; jejich seznam podle pořadí kvality jejich výkonů v dalším uvádíme.

Pořadí vítězů VIII. ročníku matematické olympiády (škol. rok 1958-59)

1. *Jiří Moudrý*, 11.c tř. 1. jsš, Pardubice, ul. Slovenského povstání
2. *Jiří Votava*, 11.d tř. 14. jsš, Praha 12, ul. W. Piecka 2
3. *Zdislav Kovařík*, 11.a tř. jsš, Hodonín
4. *Jiří Souček*, 10.a tř. 21. jsš, Praha 16, Na San-
tošce 1
5. *Karel Šmuk*, 11.b tř. jsš, Ostrava VIII - Hladnov
6. *Jaromír Fährich*, 11.b tř. 7. jsš, Praha 7, Štross-
mayerovo nám.
7. *Jan Ježek*, 11.c tř. 16. jsš, Praha 13 - Vršovice,
Kodaňská 16
8. *Bohuslav Diviš*, jsš, Praha 14 - Michle, Ohradní 5
9. *Ľitka Klánská*, 11.b tř. 16. jsš, Praha 13 - Vršovice,
Kodaňská 16
10. *Ján Vojtko*, 11.a tř. jsš, Holíč, Slovensko (okr.
Skalica)
11. *Petr Jiříček*, 11.a tř. jsš, Ostrava I, Matiční 5
12. *Štěpán Mikoláš*, 11.a tř. jsš, Boskovice na Moravě
13. *Jan Vlček*, 11. tř. jsš, Vimperk
14. *Kamil John*, 11.b tř. 14. jsš, Praha 12, ul. W.
Piecka 2

15. *Ri-Son-tek*, 11.a tř. jsš, Brandýs n. Labem
16. *Jiří Bičák*, 11.d 14. jsš, Praha 12, ul. W. Piecka 2
17. *Marie Krčálová*, 11.b tř. jsš J. K. Tyla, Hradec Králové
18. *Anežka Nováčková*, 11.b tř. jsš, Třebíč na Moravě
19. *Petr Tomšů*, 3.b ročník průmyslové školy strojní, Kopřivnice
20. *Jan Henig*, 11.b tř. jsš, Plzeň, ul. Pionýrů 2

Jako každoročně obdrželi vítězové soutěže od ministerstva školství a kultury velmi hodnotné věcné ceny podle vlastního výběru; dále každý dostal umělecky provedený čestný diplom, podepsaný ministrem školství a kultury a předsedou ústředního výboru matematické olympiády. Vítězům byla poukázána značná peněžní částka (až 250,— Kčs) na nákup odborné literatury z oborů matematiky, fyziky a technických věd; seznam vhodné odborné literatury byl každému vítězi zaslán.

III. Řešení úloh ze soutěže

Poznámka: Odkazy na školské učebnice týkají se jejich českého znění.

I. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE A

1. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky d . Úsečka délky p se pohybuje tak, že její krajní body leží na obvodu daného čtverce.

Jaký útvar vyplní střed pohybující se úsečky? Proveďte diskusi vzhledem k daným číslům d, p .

Řešení. Daný čtverec $ABCD$ má strany velikosti $d > 0$. Úsečku délky $p > 0$, která má krajní body na obvodu daného čtverce, označme XY a její střed Z .

Z názoru je patrné, že délka p úsečky XY musí být menší než délka úhlopříčky $AC = d\sqrt{2}$ čtverce $ABCD$; tuto domněnku dokážeme.

Důkaz. To je zřejmé, jestliže body X, Y leží na téže straně daného čtverce, např. na straně AB ; pak je $XY \leq d < d\sqrt{2}$.

Dále rozlišme dvě možnosti [a], [b].

[a] Body X, Y leží pořadě na dvou sousedních stranách čtverce, např. na stranách AB, BC (viz obr. 1), ale s vyloučením případu, že některý z bodů X, Y splývá s bodem B . [b] Body X, Y leží pořadě na protějších stranách daného

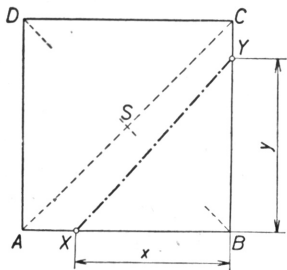
čtverce, např. na stranách AB , CD , ale s vyloučením případu, že je $XY \perp AB$ (pak je $XY = AD = d < d\sqrt{2}$).

Případ [a] (obr. 1). Označme $BX = x$, $BY = y$, kde je

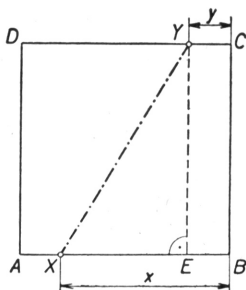
$$0 < x \leq d, 0 < y \leq d; \quad (1')$$

pomocí Pythagorovy věty užitě na trojúhelník XYB dostaneme

$$x^2 + y^2 = p^2. \quad (2')$$



Obr. 1



Obr. 2

Vzhledem k (1') platí

$$x^2 + y^2 \leq d^2 + d^2; \quad (3')$$

ze (2') a (3') tedy plyne

$$p^2 \leq 2d^2,$$

tj.

$$p \leq d\sqrt{2},$$

což jsme měli dokázat.

Příklad [b]. Označme $BX = x$, $CY = y$ jako v obr. 2, přičemž můžeme bez újmy obecnosti předpokládat, že $0 < x \leq d$, $0 \leq y < d$, $y < x$ [jinak bychom vyměnili vhodně označení a tím i x, y]. Označme E patu kolmice vedené bodem Y k přímce AB ; je-li $E \equiv B$, je $y = 0$, jinak je $y > 0$, ale vždy platí $XE = x - y$. Pomocí Pythagorovy věty, užitě na trojúhelník XYE , dostaneme

$$XE^2 + EY^2 = XY^2$$

neboli

$$(x - y)^2 + d^2 = p^2. \quad (4')$$

Protože je $0 < x \leq d$, $0 \leq y < d$, $y < x$, je $0 < x - y \leq d$; na základě toho platí neboli

$$(x - y)^2 + d^2 \leq d^2 + d^2.$$

Odtud a ze (4') dostaneme $p^2 \leq 2d^2$

$$p \leq d\sqrt{2},$$

což jsme právě měli dokázat.

Tím je důkaz proveden.

Daná úloha nemá tedy smysl pro

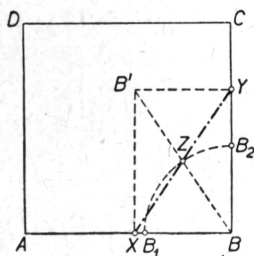
$$p > d\sqrt{2}.$$

V dalším o čísle p předpokládáme, že splňuje nerovnost

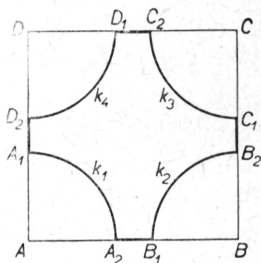
$$p \leq d\sqrt{2}. \quad (1)$$

Rozbor úlohy rozčleníme na čtyři případy:
 [1] $p < d$; [2] $p = d$; [3] $d < p < d\sqrt{2}$; [4] $p = d\sqrt{2}$. (2)

Případ [1]. Necht' je $p < d$ (obr. 3). Všimněme si toho, že vzdálenost dvou bodů, které leží na protějších stranách čtverce $ABCD$, je rovna alespoň číslu d . V našem případě musí proto body X, Y buď ležet na téže straně čtverce — např. na AB — nebo střídavě na dvou sousedních stranách. Nyní rozlišíme možnosti: a) Body X, Y leží na sousedních stranách čtverce $ABCD$; b) body X, Y leží na téže straně daného čtverce.



Obr. 3



Obr. 4

a) Necht' bod X leží uvnitř strany AB , bod Y na straně BC (viz obr. 3) — a to uvnitř této strany (z pravoúhlého trojúhelníka XYB , kde $\sphericalangle B = 90^\circ$, plyne $BY < XY$, tj. $BY < d$, tj. $Y \neq C$). Potom

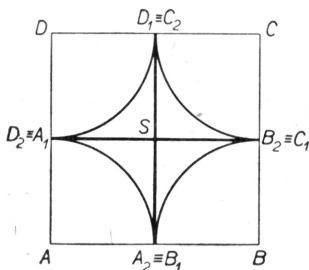
v trojúhelníku XYB platí pro střed Z strany XY vztahy $ZB = ZX = ZY = \frac{1}{2}p$; leží tedy bod Z na čtvrtkružnici $k \equiv (B, \frac{1}{2}p)$, která má krajní body B_1, B_2 na ramenech BA, BC pravého úhlu $\sphericalangle ABC$ a leží celá v tomto úhlu (krajní body B_1, B_2 nepočítáme). Obráceně, buď Z libovolný bod, který leží uvnitř čtvrtkružnice k a tedy uvnitř úhlu $\sphericalangle ABC$. Sestrojme v tomto úhlu obdélník $BXB'Y$ (kde X leží na polopřímce BA a Y na polopřímce BC), jehož středem je bod Z ; provedeme to tak, že určíme obraz B' bodu B v souměrnosti o středu Z a bodem B' pak vedeme rovnoběžky s přímkami BA, BC . O úhlopříčce BB' platí: $BB' = 2 \cdot \frac{1}{2}p = p$; avšak rozměry obdélníka jsou vždy menší než velikost jeho úhlopříčky. Je tedy $BX < p, BY < p$, takže body X, Y leží pořadě uvnitř úseček AB, BC ; přitom je $XY = BB' = p$ a $XZ = ZY = \frac{1}{2}p$ [úhlopříčky obdélníka $BXB'Y$ jsou shodné]. Tím je obrácení provedeno.

Opakujeme-li tuto úvahu pro ostatní vrcholy čtverce $ABCD$, dospějeme (viz obr. 4) celkem ke čtyřem čtvrtkružnicím k_1, k_2, k_3, k_4 (bez krajních bodů).

b) Protože je $p < d$, leží v obr. 4 bod B_1 blíže k bodu B než k A a bod A_2 blíže k bodu A než k B . Nyní snadno usoudíme, že úsečka A_2B_1 (včetně krajních bodů) je množinou středů úseček $XY = p$, jejichž oba krajní body X, Y leží na úsečce AB .

Závěr případu [1]. Množinou středů všech úseček XY je čára vyznačená tučně na obr. 4.

Případ [2] (obr. 5). Nechť je $p = d$. Situace se tu od případu [1] liší takto:



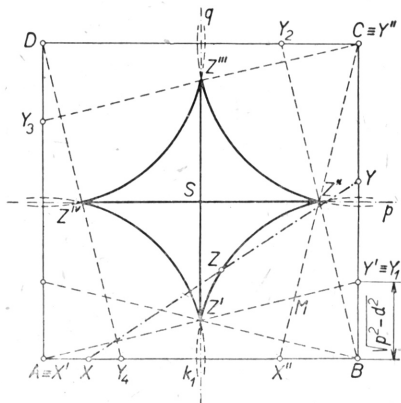
Obr. 5

a) Existuje jediná úsečka $XY = p = d$, která leží ve straně AB , totiž ta, která s úsečkou AB splývá. Je tedy $A_2 \equiv B_1$, $B_2 \equiv C_1$, $C_2 \equiv D_1$, $D_2 \equiv A_1$. Dostáváme čtyři čtvrtkružnice k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , včetně jejich krajních bodů A_1 , B_1 , C_1 , D_1 .

b) Existují úsečky $XY = p$, kde X , Y leží na protějších stranách čtverce, např. na stranách AB , DC (mezi tyto úsečky patří i strany daného čtverce). Středů těchto úseček vyplní střední příčky A_1C_1 , B_1D_1 (viz obr. 5).

Závěr případu [2]. Množina středů všech úseček XY je znázorněna tučně na obr. 5.

Případ [3] (obr. 6). Nechť je $d < p < d\sqrt{2}$. Pak krajní body úsečky $XY = p$ nemohou ležet v téže straně čtverce $ABCD$. Jsou tedy dvě možnosti: a) Body X, Y leží pořadě na sousedních stranách daného čtverce nebo b) leží v protějších stranách čtverce.



Obr. 6

a) Sestrojíme dva pomocné pravoúhlé trojúhelníky $AY'B$, $CX''B$ o přeponách $AY' = CX'' = p$ jako v obr. 6; ukážeme ihned, že tyto trojúhelníky existují, čímž dostáváme úsečky $X'Y' = X''Y'' = p$, kde je $X' \equiv A$, $Y'' \equiv C$. Podle Pythagorovy věty o trojúhelníku $AY'B$ v obr. 6 platí $BY'^2 = AY'^2 - AB^2 =$

$= p^2 - d^2$, takže je $BY'^2 < p^2$ a $BY' < BC$; leží tedy bod Y' uvnitř úsečky BC . Stejně bod X'' leží uvnitř úsečky AB , což ostatně plyne ze souměrnosti podle přímky BD , takže

$$BX'' = BY' = \sqrt{p^2 - d^2}. \quad (3)$$

Nyní předpokládejme, že bod X úsečky $XY = p$ leží uvnitř úsečky AX'' , tj. platí

$$BX'' < BX < BA.$$

Ze vztahu $BX'' < BX$ a (3) dostaneme

$$p^2 - d^2 < BX^2; \quad (4)$$

vztah $BX < BA$ lze psát ve tvaru

$$d^2 > BX^2. \quad (5)$$

Snadno nyní dokážeme, že příslušný bod Y úsečky XY , který leží na úsečce BC , padne dovnitř úsečky $Y'C$, tj. platí

$$BY' < BY < BC. \quad (6)$$

Důkaz. V trojúhelníku XYB , kde $\sphericalangle B = 90^\circ$, je $XY = p$ a platí (4), (5); podle Pythagorovy věty je

$$BX^2 = p^2 - BY^2. \quad (7)$$

Odtud a z (5) plyne

$$d^2 > p^2 - BY^2$$

neboli postupně [viz (3)]

$$\begin{aligned} BY^2 &> p^2 - d^2, \\ BY &> BY'. \end{aligned} \quad (8)$$

Ze vztahů (7), (4) postupně plyne

$$\begin{aligned} p^2 - d^2 &< p^2 - BY^2, \\ BY^2 &< d^2, \\ BY &< BC. \end{aligned} \quad (9)$$

Platnost vztahů (6) vyplývá ze vztahů (8), (9).

Úsečky AY' , CX'' mají pořadě středy Z' , Z'' a dále mají společný bod M , který leží na úsečce BD , neboť úsečky jsou souměrně sdružené podle přímky BD .

Probíhá-li bod X úsečku AX'' , probíhá příslušný bod Y na úsečce BC úsečku $Y'C$ (a obráceně). Jako v případě [1] usoudíme, že středy těchto úseček vyplní oblouk $Z'Z''$ kružnice $k_1 \equiv (B, \frac{1}{2}p)$; tento oblouk $Z'Z''$ leží v úhlu $\angle AMC$. Přitom z vlastnosti středu kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku $AY'B$ platí o bodu Z' zřejmě $Z'A = ZY' = Z'B$ a bod Z' leží tudíž na střední příčce q čtverce $ABCD$ kolmé ke straně AB (viz obr. 6, z něhož je též patrné, že bod Z'' leží na úsečce BY_2 , kde Y_2 leží na straně CD a platí $CY_2 = BY'$).

b) Necht' body X , Y úsečky XY velikosti p leží na protějších stranách AB , CD čtverce $ABCD$. Příkladem takových úseček v obrázku 6 jsou úsečky BY_2 (Y_2 leží uvnitř CD a je $CY_2 = BY' = \sqrt{p^2 - d^2}$) a DY_4 (Y_4 leží uvnitř AB a je $AY_4 = BY'$). Úsečky, které vzniknou z úsečky BY_2 posunutím ve smyslu BA — a to nejvýše o délku BY_4 — patří mezi hledané

úsečky; všechny leží v rovnoběžníku BY_2DY_4 . Jejich středy vyplní na střední příčce $p \parallel AB$ daného čtverce úsečku $Z''Z^{IV} = AX''$. Druhá soustava takových rovnoběžných úseček XY vznikne posunutím úsečky CX'' ve směru BA nejvýše o BY_4 (neboli $X''A$); jejich středy rovněž vyplní úsečku $Z''Z^{IV}$. Jiných úseček kromě zmíněných dvou soustav, které by měly krajní body na stranách AB, CD , zřejmě není.

Závěr případu [3]. Ze souměrnosti čtverce podle úhlopříček a středních příček plyne: Množina středů všech úseček se skládá ze čtyř oblouků a ze dvou úseček ležících na středních příčkách daného čtverce (viz tučné čáry na obr. 6).

Případ [4]. Necht' je $p = d\sqrt{2}$ (obr. 1). Z úvodní úvahy vyplývá, že jediné dvě úsečky XY velikosti p jsou úsečky AC, BD . Hledaná množina středů těchto úseček se skládá z jediného bodu; je jím střed S čtverce $ABCD$.

Tím je řešení úlohy provedeno.

2. Určte všechny reálné čísla x , pro které platí vztah

$$\frac{1}{x+1+\sqrt{2}} + \frac{1}{x+1-\sqrt{2}} \leq 2. \quad (1)$$

Riešenie. Nech reálné číslo x splňuje nerovnosť (1), čiže nerovnosť

$$\frac{1}{x+1+\sqrt{2}} + \frac{1}{x+1-\sqrt{2}} - 2 \leq 0. \quad (2)$$

Označme V výraz na ľavej strane nerovnosti (2); o ňom postupne platí

$$\begin{aligned}
 V &= \\
 &= \frac{x+1-\sqrt{2}+x+1+\sqrt{2}-2(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})} = \\
 &= \frac{2x+2-2[(x+1)^2-(\sqrt{2})^2]}{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})} = \\
 &= \frac{2[x+1-(x^2+2x+1-2)]}{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})} = \\
 &= -\frac{2(x^2+x-2)}{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}.
 \end{aligned}$$

Po rozložení kvadratického trojčlena v čitateli dostaneme

$$V = -\frac{2(x+2)(x-1)}{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}. \quad (3)$$

O číse x platí (2); vzhľadom na výsledok (3) platí teda

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})} \geq 0. \quad (3')$$

Musí teda o číse x platiť:

[1] buď súčasne

$$(x+2)(x-1) \geq 0, \quad (3a)$$

$$(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}) > 0 \quad (3b)$$

[posledná nerovnosť je nevyhnutelne ostrá, inak by v menovateli zlomku v (3') bola nula],

[2] buď súčasne

$$(x + 2)(x - 1) \leq 0, \quad (4a)$$

$$(x + 1 + \sqrt[3]{2})(x + 1 - \sqrt[3]{2}) < 0 \quad (4b)$$

[kde opäť v poslednej nerovnosti nemožno pripustiť znamienko rovnosti].

Každú z oboch možností preskúmame zvlášť.

Prípad [1]. Zo vzťahu (3a) vyplýva, že o číse x musí platiť práve jeden zo vzťahov:

$$a) x \geq 1, \quad (5a)$$

$$b) x \leq -2. \quad (5b)$$

Zo vzťahu (3b) vyplýva, že o číse x musí platiť práve jeden zo vzťahov

$$a) x > \sqrt[3]{2} - 1 > 0,4, \quad (6a)$$

$$b) x < -(\sqrt[3]{2} + 1) < -2,4. \quad (6b)$$

Požiadavky (5a), (6b) alebo požiadavky (5b), (6a) nemožno splniť súčasne. Kombinovaním (5a), (6a) dostaneme, že o číse x nevyhnutne platí

$$x \geq 1. \quad (7)$$

Kombinovaním (5b), (6b) dostaneme, že o číse x nevyhnutne platí

$$x < -(\sqrt[3]{2} + 1). \quad (7')$$

I. Pre $x \geq 1$ sú skutočne oba činitele v menovateli zlomku (3) kladné čísla (platí $x + 1 - \sqrt[3]{2} \geq 2 - \sqrt[3]{2} > 0,5$, lebo $\sqrt[3]{2} < 1,5$); rovnako všetky tri či-

niteľa v čitateli zlomku (3) sú nezáporné čísla. Je teda $V \leq 0$ a číslo $x \geq 1$ je riešením nerovnosti (1), lebo vzťah $V \leq 0$ je ekvivalentný s nerovnosťou (1).

II. Pre $x < -(\sqrt{2} + 1)$ sú oba zlomky na ľavej strane nerovnosti (1) záporné čísla a teda aj ich súčet je záporné číslo a teda menšie než 2.

Prípad [2]. Zo vzťahu (4a) vyplýva, že o čísle x nevyhnutne platí jedine vzťah

$$-2 \leq x \leq 1. \quad (8)$$

Zo vzťahu (4b) vyplýva, že o čísle x musí jedine platiť

$$-(\sqrt{2} + 1) < x < \sqrt{2} - 1. \quad (9)$$

Avšak platí $-(\sqrt{2} + 1) < -2$, $\sqrt{2} - 1 < 1$; o čísle x , pre ktoré zároveň platia vzťahy (8), (9), platí teda nevyhnutne

$$-2 \leq x < \sqrt{2} - 1. \quad (10)$$

Pre číslo x z intervalu (10) je

$$x + 1 + \sqrt{2} > 0, \quad x - (\sqrt{2} - 1) < 0$$

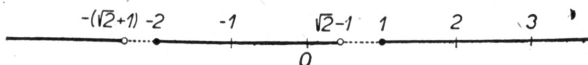
a teda menovateľ zlomku (3) je záporný. Ďalej je pre toto x

$$x + 2 \geq 0, \quad x - 1 < 0$$

a teda čitateľ zlomku (3) je záporný alebo nula. Je teda zlomok vo výraze (3) nezáporný a preto o výraze V platí $V \leq 0$. Číslo x z intervalu (10) je teda riešením nerovnosti (1).

Záver. Všetky riešenia nerovnosti (1) sú dané číslami x , ktoré ležia v jednom z intervalov (7), (7'), (10) (pozri grafické znázornenie na obr. 7), tj. v intervaloch

$$x < -(\sqrt{2} + 1), \quad -2 \leq x < \sqrt{2} - 1, \quad x \geq 1.$$



Obr. 7

3. Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže je dáno t_c , u_c , v_c . Provedte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným číslům. (Daná čísla udávají pořadí velikosti těžnice, osy úhlu a výšky při vrcholu C trojúhelníka ABC .)

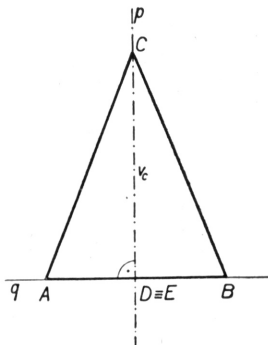
Řešení (obr. 8, 9). Místo *rozboru* dokážeme tuto *potomnou větu V*: „Jestliže v trojúhelníku ABC platí $CA = CB$ neboli $a = b$, potom platí

$$t_c = u_c = v_c; \quad (1)$$

jestliže však je $CA \neq CB$ neboli $a \neq b$, potom platí

$$t_c > u_c > v_c. \quad (2)$$

Důkaz. Platnost vztahu



Obr. 8

(1) plyne ze souměrnosti rovnoramenného trojúhelníka ABC podle osy p jeho základny AB (obr. 8).

Nechť je nyní $a \neq b$ (obr. 9). Pro určitost předpokládejme, že platí $a < b$ neboli $\alpha < \beta$ (proti menší straně trojúhelníka leží menší úhel). Je-li $a > b$, stačí uvažovat obraz daného trojúhelníka v souměrnosti o ose p , kde p je osa úsečky AB .

Sestrojíme úhel $\alpha' \equiv \sphericalangle ABB' = \alpha$. Ze vztahu $\alpha < \beta$ plyne, že polopřímka BB' prochází vnitřkem úhlu β ; dále ze vztahu $\alpha < \beta$ plyne, že α je ostrý úhel. Je tedy $\alpha + \alpha' < 180^\circ$ a polopřímky AC , BB' mají podle Euklidova axiómu uvnitř poloroviny ABC společný bod P ; trojúhelník ABP je tedy rovnoramenný a osa p jeho základny AB prochází bodem P a středem E základny AB . Protože polopřímka BB' leží v úhlu β , přičemž bod P je na této polopřímce, leží tedy bod P uvnitř úsečky AC a bod C tudíž padne dovnitř poloroviny pB .

Přímka p je osou úsečky AB a proto na ní leží střed S kružnice k trojúhelníku ABC opsané. Společný bod přímky p a kružnice k , který leží v polorovině opačné k polorovině ABC , označme G . Ze souměrnosti úsečky AB a kružnice k podle osy p plyne

$$\sphericalangle ASG = \sphericalangle BSG.$$

K těmto shodným středovým úhlům kružnice k při-

slušejí pořadě i shodné obvodové úhly, takže platí

$$\sphericalangle ACG = \sphericalangle BCG = \frac{1}{2}\gamma.$$

Polopřímka CG je tudíž osou úhlu γ a protne proto přímku AB v bodě F , který leží uvnitř úsečky AB ; protože bod F leží uvnitř kružnice k , je bod F uvnitř úsečky CG , která až na bod G leží uvnitř poloroviny pB a proto je F vnitřním bodem úsečky EB .

Výška CD trojúhelníku ABC má na straně AB patu D , která s bodem C leží uvnitř poloroviny pB ; přímky p , CD jsou tedy různé rovnoběžky. Úsečka CG až na bod C leží uvnitř poloroviny CDE a proto zde leží i bod F . Bod F leží tedy uvnitř úsečky ED . Probíhá-li bod polopřímku DE z jejího počátku D , vzrůstá i vzdálenost od bodu C [porovnej např. s textem k obr. 82 v učebnici Geometrie pro 8. roč., vydání z r. 1958, str. 44], tj. ze vztahu $DE > DF$ a $CD \perp AB$ plynou vztahy

$$CE > CF > CD$$

neboli

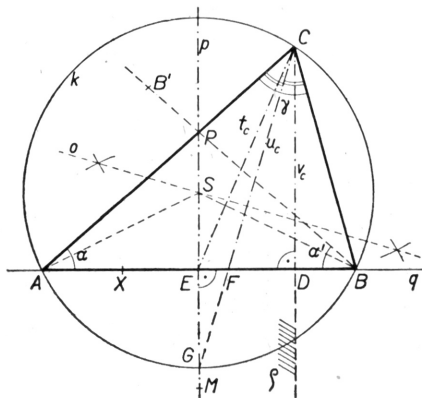
$$t_c > u_c > v_c,$$

což je vztah (2), který právě jsme měli dokázat.

Jestliže tedy neplatí ani vztah (1) ani (2), nemá úloha řešení.

Konstrukce. Uvažujme dvě možnosti: [1] platí (1); [2] platí (2).

Výsledek. Úloha má nekonečný počet řešení.



Obr. 9

Případ [2]. Nechť platí $t_c > u_c > v_c$ (viz obr. 9). Zvolme úsečku $DC = v_c$ a sestrojme bodem D přímku $q \perp DC$. Požadujeme, aby střed E strany AB hledaného trojúhelníka ABC padl dovnitř jedné z polorovin vytyčených přímkou DC (tuto polorovinu označme ϱ); to znamená vzhledem k provedení důkazu

věty V, že i bod F padne dovnitř poloroviny ϱ . Sestrojíme tedy podle věty Ssu v polorovině ϱ trojúhelník CFD , kde $CF = u_c$, $\sphericalangle D = 90^\circ$; bod F leží tedy na přímce q . Dále sestrojíme v polorovině ϱ trojúhelník CED , kde $CE = t_c$, $\sphericalangle D = 90^\circ$; bod E tedy padne na polopřímku DF . Bodem E vedeme přímku $p \perp ED$ a označme G společný bod přímek CF , p . Dále sestrojíme osu o úsečky CG a označme S společný bod přímek p , o . Opišme kružnici $k \equiv (S, SC)$ a označme A , B její průsečíky s přímkou q . Potom trojúhelník ABC je řešením dané úlohy; přitom nebudeme přihlížet k možné výměně označení bodů A , B .

Důkaz. Body E , S leží na přímce p ; proto je E středem tětiny AB kružnice k ; podle konstrukce je $CE = t_c$, takže velikost těžnice CE v trojúhelníku ABC je t_c . Ze souměrnosti kružnice k i úsečky AB podle přímky p plyne, že je $\sphericalangle ASE = \sphericalangle BSE$; proto o obvodových úhlech příslušných k těmto středovým úhlům v kružnici k platí $\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCF$. Je tedy CF osa úhlu a podle konstrukce je $CF = u_c$. Konečně je $CD \perp AB$, $CD = v_c$. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Vzhledem k platnosti vztahu (2) existují oba trojúhelníky CFD , CED [podle věty Ssu] a pořádek bodů je D , F , E . Úhel $\sphericalangle CFD$ je úhel pravoúhlého trojúhelníka CFD ; je tedy ostrý a proto i úhel

k němu vrcholový je ostrý. Proto podle Euklidova axiómu má polopřímka CF s přímkou p společný bod G uvnitř poloroviny opačné k polorovině DFC . Přímka DF odděluje tedy body C , G a bod F leží uvnitř tětivy CG kružnice k a tedy i uvnitř k . Je tedy i přímka DFE sečnou (obsahuje bod F) kružnice k , tj. přímka $q \equiv DFE$ je sečnou kružnice k a body A , B proto existují.

Při zvoleném umístění úsečky $DC = v_c$ a bodu E uvnitř poloroviny ϱ existuje tedy při platnosti vztahu (2) jediný trojúhelník ABC (nehledíme na možnou záměnu označení bodů A , B).

Závěr. Jestliže platí $t_c = u_c = v_c$, potom při zvoleném umístění lze sestrojit nekonečně mnoho trojúhelníků; jestliže platí $t_c > u_c > v_c$, lze při zvoleném umístění sestrojit právě jeden trojúhelník.

4. Řešte soustavu rovnic

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} = 9 \operatorname{tgy}, \quad (1)$$

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \operatorname{cotgy}, \quad (2)$$

kde x , y jsou neznámé.

Řešení. Necht' dvojice čísel x , y splňuje rovnice soustavy. Znásobme navzájem jednak levé a jednak

pravé strany rovnic (1), (2). Dostaneme

$$\cos x \sin x + \frac{1}{\cos x \sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{9}{2}.$$

Obě strany nové rovnice znásobíme číslem $\cos x \sin x$; po úpravě dostaneme

$$(\cos x \sin x)^2 - \frac{9}{2} \cos x \sin x + \cos^2 x + \sin^2 x + 1 = 0$$

neboli

$$(\cos x \sin x)^2 - \frac{9}{2} \cos x \sin x + 2 = 0.$$

Podle známého vzorce je $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$; po dosazení do předchozí rovnice dostaneme

$$\frac{1}{4} \sin^2 2x - \frac{9}{4} \sin 2x + 2 = 0$$

neboli

$$\sin^2 2x - 9 \sin 2x + 8 = 0$$

neboli

$$(\sin 2x - 1)(\sin 2x - 8) = 0.$$

O čísla x musí tedy platit buď $\sin 2x - 8 = 0$ anebo $\sin 2x - 1 = 0$.

Ze vztahu

$$\sin 2x = 1$$

plyne

$$2x = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ,$$

kde k je libovolné celé číslo, tj.

$$x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ. \quad (3)$$

Vzhledem k tomu, že pro každé reálné číslo a je $|\sin a| \leq 1$, nelze vztah

$$\sin 2x = 8,$$

splnit žádným reálným číslem x .

O čísle x podle (3) musí tedy platit
buď

$$x = 45^\circ + 2n \cdot 180^\circ \quad (3a)$$

anebo

$$x = 225^\circ + 2n \cdot 180^\circ, \quad (3b)$$

kde n je libovolné celé číslo.

Dále uvažujme každou z těchto možností odděleně.

Případ [1]. Nechť platí (3a); potom je

$$\cos x = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad \sin x = \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (4)$$

a po dosazení do rovnice (1) dostaneme

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 9 \operatorname{tg} y.$$

Odtud postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} &= 9 \operatorname{tg} y, \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} &= 9 \operatorname{tg} y, \\ \frac{\sqrt{2}}{6} &= \operatorname{tg} y. \end{aligned} \quad (5)$$

Položme $\sqrt{2} \doteq 1,414$, pak je

$$\operatorname{tgy} \doteq \frac{1}{6} \cdot 1,414$$

neboli

$$\operatorname{tgy} \doteq 0,236$$

a z tabulek pro y dostaneme přibližnou hodnotu

$$y \doteq 13^{\circ}10' + k \cdot 180^{\circ}, \quad (4a)$$

kde k je libovolné celé číslo.

Dvojice čísel x, y daných vztahy (3a), (4a) je řešením soustavy. To je podle výpočtu čísla y zřejmé o rovnici (1). Dosadíme tuto dvojici (x, y) ze vztahů (3a), (5) do (2). Vzhledem ke (4) na levé straně rovnice (2) dostaneme

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

neboli

$$\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

na pravé straně vzhledem k tomu, že pro y platí vztah (5), obdržíme postupně

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Tím je zkouška provedena.

Případ [2]. Nechť platí (3b); potom je

$$\cos x = -\frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad \sin x = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (6)$$

a po dosazení do (1) dostaneme

$$-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 9\operatorname{tg} y,$$

tj.

$$\operatorname{tg} y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{6}, \quad (7)$$

neboli

$$\operatorname{tg} y \doteq -0,236.$$

Stejně jako prve obdržíme

$$y \doteq 166^{\circ}50' + k \cdot 180^{\circ}, \quad (7a)$$

kde k je libovolné celé číslo.

Dvojice čísel (x, y) ze vztahů (3b), (7a) jistě vyhovuje rovnici (1). Porovnáním vztahů (3a), (3b) a dále vztahů (5), (7a) je patrné, že dvojice čísel (x, y) ze (3b), (7a) obsahuje právě opačná čísla k dvojici čísel ze vztahů (3a), (5); je však $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{cotg}(-y) = -\operatorname{cotg} y$. Dosadíme-li tedy dvojici (x, y) ze vztahů (3b), (7a) do (2), znamená to dosazení dvojice (x, y) ze vztahů (3a), (5) do (2) a znásobení obou stran rovnice (2) číslem -1 . Avšak čísla (x, y) ze (3a), (5) splňují (2) a proto ji splňují i čísla (x, y) ze vztahů (3b), (7a).

Závěr. Tím je řešení úlohy provedeno. Všechna řešení soustavy (1), (2) jsou dvojice čísel (x, y) daných buď vztahy (3a), (5) anebo vztahy (3b), (7a).

5. Určte všetky dvojice (x, y) celých čísel x, y , o ktorých platí

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}. \quad (1)$$

Riešenie. Nech x, y sú celé čísla, ktoré vyhovujú rovnici (1). Potom čísla x, y musia byť celé nezáporné (predpokladáme, že druhá odmocnina je definovaná len z nezáporných čísel). Potom z (1) vyplýva

$$\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{x}.$$

Umocnením oboch strán na druhú dostaneme rovnicu

$$y = 50 + x - 2\sqrt{50x}, \quad (1')$$

čiže

$$2\sqrt{50x} = 50 + x - y.$$

Číslo na pravej strane tejto rovnice je celé, preto aj ľavá strana tejto rovnice je celé číslo a , t. j. platí

$$2\sqrt{50x} = a.$$

Číslo na ľavej strane je nezáporné, teda je tiež $a \geq 0$.

Ak umocníme obe strany tejto rovnice na druhú, dostaneme

$$2 \cdot 10^2 \cdot x = a^2,$$

čiže

$$2x = \left(\frac{a}{10}\right)^2. \quad (2)$$

Číslo a musí byť násobkom čísla 10, t. j.

$$a = 10b,$$

kde b je celé nezáporné číslo. Po dosadení do (2) dostaneme

$$2x = b^2. \quad (3)$$

Číslo b nemôže byť nepárne*), lebo jeho druhá mocnina je párne číslo. Číslo b musí byť teda párne*), t. j. musí platiť

$$b = 2c,$$

kde c je celé nezáporné číslo. Po dosadení do (3) dostaneme, že o čísle x musí platiť

$$2x = 4c^2,$$

čiže

$$x = 2c^2. \quad (4)$$

Ešte si všimnime, že pre $x > 50$ je $\sqrt{x} > \sqrt{50}$; preto o celom nezápornom čísle x nevyhnutne platí

$$0 \leq x \leq 50,$$

čiže

$$0 \leq 2c^2 \leq 50$$

a teda

$$0 \leq c^2 \leq 25,$$

čiže

$$0 \leq c \leq 5.$$

Zostavme pre celé nezáporné číslo c tabuľku. Tabuľku hneď doplníme celým nezáporným číslom y ,

*) *Párne* znamená česky *sudé*, *nepárne* *liché*.

ktoré dostaneme po dosadení čísla x do pravej strany rovnice (1'):

c	0	1	2	3	4	5
x	0	2	8	18	32	50
y	50	32	18	8	2	0

Ak teda existuje dvojica (x, y) celých nezáporných čísel x, y , ktoré vyhovujú rovnici (1), je to niektorá zo šiestich dvojíc tejto tabuľky. Ľahko sa presvedčíme dosadením do (1), že každá z týchto šiestich dvojíc vyhovuje rovnici (1). Danej úlohe vyhovuje teda šesť dvojíc celých nezáporných čísel (x, y) , uvedených v tabuľke a žiadna iná dvojica celých nezáporných čísel. Tým je úloha rozriešená.

6. Je dán trojuholník ABC o úhloch α, β, γ a polomere r kružnice opísané. Nechť M, N, P jsou pořadě středy stran BC, CA, AB .

Dokažte: Je-li trojuholník ABC ostroúhlý, potom existuje čtyřstěn $MNPQ$, jehož stěny tvoří trojuholníky MNP, NPA, PMB, MNC ; jeho objem je

$$V = \frac{1}{3} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sqrt{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Není-li trojuholník ABC ostroúhlý, pak takový čtyřstěn neexistuje.

Řešení I. V trojuholníku ABC o stranách a, b, c

jsou úsečky NP , PM , MN středními příčkami, takže jsou pořadě rovnoběžné se stranami BC , CA , AB (obr. 12). Označme pořadě o_1 , o_2 , o_3 kolmice vedené vrcholy A , B , C k protějším stranám trojúhelníka ABC ; jejich paty na protějších stranách označme pořadě V_1 , V_2 , V_3 . Dále buďte O_1 , O_2 , O_3 průsečíky dvojic přímek (o_1, NP) , (o_2, PM) , (o_3, MN) . Konečně položme

$$AV_1 = v_1, \quad BV_2 = v_2, \quad CV_3 = v_3.$$

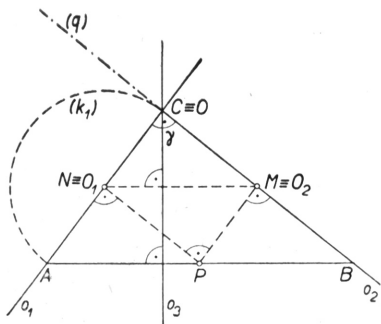
Platí, že $\sphericalangle NPM = \sphericalangle BCA = \gamma$ atd.

Všimněme si tohoto faktu (srovnej s obr. 12): Buď $MNPQ$ libovolný čtyřstěn. Otočme pořadě trojúhelníky NPQ , PMQ , MNQ i s jejich rovinami kolem přímek NP , PM , MN do roviny MNP , a to pořadě do polorovin opačných k polorovinám NPM , PMN , MNP ; přejdou do poloh NPA , PMB , MNC . Bod Q se při těchto rotačních pohybech otáčí pořadě v rovinách $\omega_1 \perp NP$, $\omega_2 \perp PM$, $\omega_3 \perp MN$; jejich průsečnice s rovinou MNP jsou pořadě o_1 , o_2 , o_3 a středy příslušných kružnic k_1 , k_2 , k_3 otáčení (ty leží pořadě v rovinách ω_1 , ω_2 , ω_3) jsou body O_1 , O_2 , O_3 ; poloměry těchto kružnic otáčení kolem os NP , PM , MN jsou pořadě

$$O_1Q = O_1A, \quad O_2Q = O_2B, \quad O_3Q = O_3C.$$

Přímka $q \equiv QO \perp MNP$, kde O je pata této kolmice, leží v rovinách ω_1 , ω_2 , ω_3 a tudíž bod O je průsečíkem

k důkazu, že naše úloha nemá řešení, jestliže trojúhelník ABC není ostroúhlý.

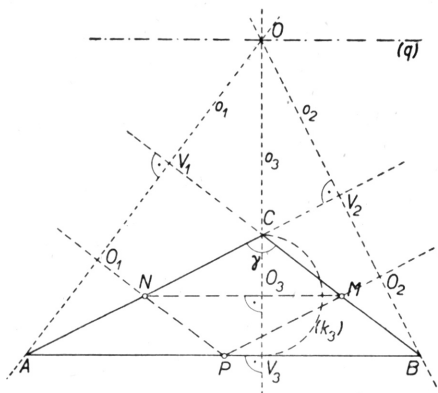


Obr. 10

Případ [1] (obr. 10). Nechť je $\gamma = 90^\circ$. Tu je $O \equiv C$ a $N \equiv O_1$ a kružnice k_1 má průměr AC , tj. má s přímkou $q \perp MNP$ (jdoucí bodem O) společný jen bod C a ten leží v rovině MNP , takže neexistuje hledaný čtyřstěn $MNPQ$.

Případ [2] (obr. 11). Nechť je $\gamma > 90^\circ$, takže průsečík O výšek trojúhelníka ABC padne vně trojúhelníka. Kružnice k_3 otáčení má průměr CV_3 a nemá zřejmě společný bod s přímkou $q \perp MNP$ vedenou bodem O .

Případ [3] (obr. 12). Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, takže průsečík O jeho výšek padne dovnitř tohoto trojúhelníka, tedy např. dovnitř úsečky AV_1 .



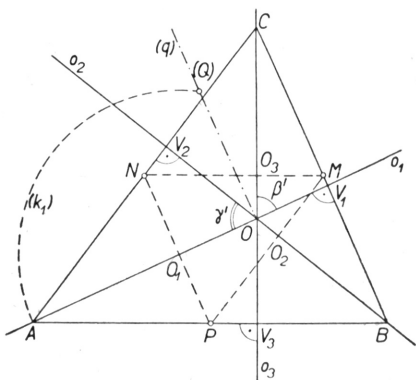
Obr. 11.

Je tedy poloměr $O_1A = O_1Q$ kružnice otáčení k_1 bodu A větší než vzdálenost O_1O a přímka $q \perp MNP$ vedená bodem O má s kružnicí k_1 společný bod Q , který neleží v rovině MNP . Půjde o to dokázat, že každá z kružnic k_1, k_2, k_3 tímto bodem Q prochází; to dokážeme tak, že určíme velikost v úsečky OQ , kterou jsme sestrojili pomocí kružnice k_1 .

V obr. 12 je písmeny v kulaté závorce znázorněna situace v rovině ω_1 , totiž kružnice (k_1) , přímka (q) ,

bod (Q) , přičemž trojúhelník $AV_1(Q)$ má podle Thaletovy věty při vrcholu (Q) pravý úhel; o velikosti v jeho výšky $O(Q)$ podle Euklidovy věty o výšce platí

$$v^2 = OA \cdot OV_1. \quad (1)$$



Obr. 12

Platí (z trojúhelníka AOV_2 , kde $\sphericalangle V_2 = 90^\circ$, $\sphericalangle O = \gamma$)

$$OA = \frac{AV_2}{\sin \gamma},$$

(z trojúhelníka ABV_2 , kde $\sphericalangle V_2 = 90^\circ$, $AB = c$, $\sphericalangle A = \alpha$)

$$AV_2 = c \cdot \cos \alpha$$

a tedy

$$OA = c \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}. \quad (2)$$

Dále platí (z trojúhelníka OCV_1 , kde $\sphericalangle V_1 = 90^\circ$, $\sphericalangle O = \beta$)

$$OV_1 = CV_1 \cdot \cotg \beta,$$

(z trojúhelníka ACV_1 , kde $\sphericalangle V_1 = 90^\circ$, $\sphericalangle C = \gamma$, $AC = b$)

$$CV_1 = b \cdot \cos \gamma$$

a tedy

$$OV_1 = b \cdot \cotg \beta \cdot \cos \gamma. \quad (3)$$

Po dosazení z (2), (3) do (1) dostáváme

$$v^2 = bc \cdot \cos \alpha \cdot \cotg \beta \cdot \cos \gamma \cdot \frac{1}{\sin \gamma}. \quad (4)$$

Označme r poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC . Podle věty sinové užití na trojúhelník ABC platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

neboli

$$b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma; \quad (5)$$

po dosazení za b, c do (4) dostaneme

$$v^2 = 4r^2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$$

neboli

$$v = 2r \sqrt{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}. \quad (6)$$

Číslo v se nezmění, jestliže místo kružnice k_1 užijeme některé z kružnic k_2, k_3 , neboť vztah (6) zůstává týž, provedeme-li záměnu úhlů α, β, γ . Z toho plyne, že sestrojeným bodem Q procházejí všechny tři kružnice k_1, k_2, k_3 , což právě jsme měli dokázat.

II. Obsah p trojúhelníka ABC je např.

$$\frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

a po dosazení za b, c z (5)

$$2r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma;$$

obsah p trojúhelníka MNP je roven $\frac{1}{4}$ obsahu trojúhelníka ABC , tj.

$$p = \frac{1}{2}r^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma. \quad (7)$$

Objem V čtyřstěnu $MNPQ$ je

$$V = \frac{1}{3}p \cdot v$$

čili po dosazení

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot 2r \sqrt{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}$$

neboli

$$V = \frac{1}{3}r^3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sqrt{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Tím je řešení celé úlohy provedeno.

2. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE A

1. Zostrojte trojuholník ABC , ak je dané t_c, v_c, γ (t_c je dĺžka ťažnice príslušnej k vrcholu C ; v_c je výška

príslušná k tomu istému vrcholu; $\gamma = \sphericalangle BCA$). Urobte diskusiu riešiteľnosti.

Riešenie (obr. 13, 14). *Rozbor*. Predpokladajme, že sme zostrojili trojuholník ABC požadovaných vlastností. Označme M stred strany AB , ďalej P päťu kolmice vedenej bodom C k priamke AB . Je teda

$$CM = t_c, \quad CP = v_c, \quad \sphericalangle BCA = \gamma < 180^\circ.$$

Sú dve možnosti: [1] $M \equiv P$ a teda $t_c = v_c$ (obr. 13); v tomto prípade je ABC rovnoramenný trojuholník, ktorý pri umiestení úsečky MC a bodu A v jednej z polrovín vyŕatých priamkou MC možno zostrojiť s jediným výsledkom. Tým považujeme tento prípad za vyriešený.

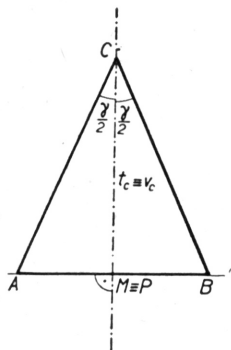
[2] $M \neq P$. Trojuholník CMP má uhol $\sphericalangle P = 90^\circ$ (obr. 14), preto je $CM > CP$, čiže nevyhnutne platí

$$t_c > v_c. \quad (1)$$

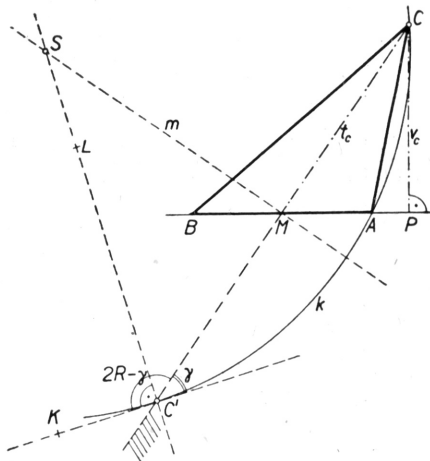
(V prípade $t_c < v_c$ zrejme nemá úloha riešenie.) Zostrojme rovnobežník $ACBC'$, ktorého stredom je bod M . O ňom platí $CC' = 2t_c$, $\sphericalangle CAC' = 180^\circ - \gamma$; jeden z bodov A, B (pri vhodnom označení je to bod A) padne dovnútra polpriamky MP . Z toho vyplýva *konštrukcia*:

Zostrojme trojuholník CMP , kde $CP = v_c$, $\sphericalangle P = 90^\circ$, $CM = t_c$. Požadujeme, aby bod A padol do-

vnútra polroviny CMP . Na predĺžení úsečky CM za bod M zostrojme úsečku $MC' = t_c$. Označme k oblúk v polrovine CMP , z ktorého vidieť úsečku CC'



Obr. 13



Obr. 14

pod uhlom $180^\circ - \gamma$. Stred S oblúka k zostrojíme takto: a) zostrojíme os m úsečky CC' ; b) v polrovine opačnej k polrovine CMP zostrojíme úsekový uhol $\sphericalangle CC'K = 180^\circ - \gamma$ a priamku $C'L \perp C'K$. Potom je $S \equiv (m \cdot C'L)$. Polomer oblúka je SC .

Označme ďalej A spoločný bod polpriamky MP a oblúka k . Bod B je obraz bodu A v súmernosti so stredom M . Potom je ABC hľadaný trojuholník.

Dôkaz (obr. 14). Bod M je podľa konštrukcie stredom úsečiek CC' , AB , takže $ACBC'$ je rovnobežník, v ktorom podľa konštrukcie je $\sphericalangle A = 180^\circ - \gamma$ a teda $\sphericalangle C = \gamma$. Trojuholník ABC má vzhľadom k strane AB výšku $CP = v_c$ a ťažnicu $CM = t_c$. Tým je dôkaz hotový.

Diskusia (obr. 14). Trojuholník CMP za predpokladu (1) možno zostrojiť, takže priamky CM , MP sú rôzne. Oblúk k tiež (pre $\gamma < 180^\circ$) existuje. Bod M podľa konštrukcie leží vnútri kružnice (S, SC) a teda polpriamka MP nevyhnutne obsahuje práve jeden bod oblúka k , totiž bod $A \neq M$. Úloha má teda pri zvolenom umiestení práve jedno riešenie.

Záver. Pre $t_c \geq v_c$, $\gamma < 180^\circ$ má úloha práve jedno riešenie; inak nemá riešenie.

2. Nájdite všetky reálne čísla x , pre ktoré platí

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} > 1. \quad (1)$$

(Poznámka. Najprv určte všetky x , pre ktoré nemá ľavá strana nerovnosti zmysel.)

Riešenie. Upravme čitateľa aj menovateľa zlomku Z na ľavej strane vzťahu (1). Platí (použijeme vzorce pre súčet funkcií $\sin \alpha + \sin \beta$, $\cos \alpha + \cos \beta$):

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 3x + \sin 5x &= (\sin x + \sin 5x) + \\ &+ \sin 3x = 2\sin 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x = \\ &= \sin 3x (1 + 2 \cos 2x), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\cos x + \cos 3x + \cos 5x &= (\cos x + \cos 5x) + \\ &+ \cos 3x = 2\cos 3x \cdot \cos 2x + \cos 3x = \\ &= \cos 3x (1 + 2\cos 2x). \quad (3)\end{aligned}$$

I. Zlomek Z vzhľadom na (3) stráca zmysel, ak platí jeden zo vzťahov:

$$\cos 3x = 0, \quad (4)$$

$$1 + 2\cos 2x = 0. \quad (5)$$

Zo vzťahu (4) vyplýva: buď je $3x = 90^\circ + n \cdot 4R$, alebo je $3x = 270^\circ + n \cdot 4R$ (kde n je ľubovoľné celé číslo); teda

$$x = 30^\circ + n \cdot 120^\circ \quad \text{a} \quad x = 90^\circ + n \cdot 120^\circ,$$

čiže

$$x = \alpha + k \cdot 4R \quad (6)$$

(kde k je ľubovoľné celé číslo), pričom α je ktorékoľvek z čísel

$$30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ. \quad (6')$$

Zo vzťahu (5) vyplýva: $2\cos 2x = -1$, čiže $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ a teda: buď je

$$2x = (180^\circ - 60^\circ) + m \cdot 4R, \quad (7)$$

buď je

$$2x = (180^\circ + 60^\circ) + m \cdot 4R, \quad (7')$$

kde m je ľubovoľné celé číslo. Zo (7), (7') vyplýva jednak

$$x = 60^\circ + m \cdot 2R,$$

jednak

$$x = 120^\circ + m \cdot 2R;$$

je teda

$$x = \beta + p \cdot 4R \quad (8)$$

(kde p je ľubovoľné celé číslo), pričom β je ľubovoľné z týchto čísel:

$$60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ. \quad (8')$$

Vzhľadom na vzťahy (6), (6') a (8), (8') stráca zlomok Z zmysel pre

$$x = \gamma + q \cdot 4R \quad (9)$$

(kde q je ľubovoľné celé číslo), pričom γ je ľubovoľné z týchto čísel:

$$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, \\ 300^\circ, 330^\circ. \quad (9')$$

II. Nech x je číslo, ktoré vyhovuje nerovnosti (1), takže je rôzne od všetkých čísel zo vzťahu (9), (9'). Podľa (2) a (3)

$$Z = \frac{\sin 3x(1 + \cos 2x)}{\cos 3x(1 + \cos 2x)} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \operatorname{tg} 3x.$$

Vzťah (1) možno teda písať v tvare

$$\operatorname{tg} 3x > 1. \quad (10)$$

Nerovnosť $\operatorname{tg} \varphi > 1$, kde φ leží v intervale $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$, má riešenie

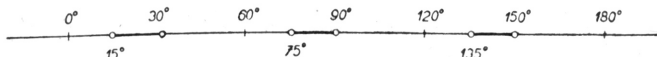
$$45^\circ < \varphi < 90^\circ,$$

nerovnosť (10) teda splňujú práve tie čísla x , o ktorých platí

$$45^\circ + r \cdot 180^\circ < 3x < 90^\circ + r \cdot 180^\circ,$$

kde r je ľubovoľné celé číslo, t. j.

$$15^\circ + r \cdot 60^\circ < x < 30^\circ + r \cdot 60^\circ. \quad (11)$$



Obr. 15

Všetky čísla (9) možno písať v tvare $x = m \cdot 30^\circ$ (kde m je celé číslo, ktoré nie je deliteľné číslom 6). Medzi číslami x z nerovností (11) nie je žiadne z týchto čísel. Robili sme ekvivalentné úpravy danej nerovnosti. Čísla (11) sú preto riešeniami danej nerovnosti a neexistuje žiadne iné riešenie.

Záver. V intervale $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ dostaneme podľa (11) práve tieto riešenia x (obr. 15):

$$\begin{aligned} 15^\circ &< x < 30^\circ, \\ 75^\circ &< x < 90^\circ, \\ 135^\circ &< x < 150^\circ. \end{aligned} \quad (12)$$

Všetky riešenia nerovnosti (1) sú čísla tvaru

$$x + s \cdot 2R,$$

kde x je jedno z čísel (12) a s je ľubovoľné celé číslo.

3. Je dána tato funkce y proměnné x (kde x je reálné číslo):

$$y = \frac{\sqrt[3]{1+p} + \sqrt[3]{1-p}}{\sqrt[3]{1+p} - \sqrt[3]{1-p}}, \text{ kde } p = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Na základě úpravy daných výrazů načrtněte graf této funkce a dále rozhodněte, pro která x není funkce definována; pomocí tohoto grafu určete ta x , pro která nabývá y nejmenší kladné hodnoty.

Řešení. Nejprve vyšetříme, pro která x mají smysl odmocniny $\sqrt[3]{1+p}$, $\sqrt[3]{1-p}$; platí:

$$1 + p = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1},$$

což je nezáporné číslo pro každé reálné x ;

$$1 - p = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1},$$

což je nezáporné číslo pro každé reálné x .

Dále vyšetříme, pro která x je $\sqrt[3]{1+p} - \sqrt[3]{1-p} = 0$ neboli $\sqrt[3]{1+p} = \sqrt[3]{1-p}$ a tedy $1 + p = 1 - p$, tj. $p = 0$. Avšak $p = 0$ právě pro $x = 0$. Pro $x = 0$ není tedy y definováno.

V dalším předpokládáme, že reálné x je různé od nuly, takže je příslušné y definováno. Upravujme

výraz:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{1+p} + \sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p} - \sqrt{1-p}} = \\ &= \frac{(\sqrt{1+p} + \sqrt{1-p})^2}{(\sqrt{1+p} - \sqrt{1-p})(\sqrt{1+p} + \sqrt{1-p})} = \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{(1+p)(1-p)}}{1+p - (1-p)} = \frac{2(1 + \sqrt{1-p^2})}{2p} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{1-p^2}}{p}. \end{aligned}$$

Protože je $1 - p^2 = 1 - \frac{(2x)^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$,

je $\sqrt{1-p^2} = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1}$; dostáváme tedy

$$y = \frac{1 + \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1}}{\frac{2x}{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1 + |x^2 - 1|}{2x},$$

tj.

$$y = \frac{x^2 + 1 + |x^2 - 1|}{2x}.$$

Zřejmě musí být $x \neq 0$. Nyní jsou dvě možnosti:

[1] Nechť je $x^2 - 1 \geq 0$, tj. buď je $x \geq 1$ anebo $x \leq -1$. Potom je $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ a

$$y = \frac{x^2 + 1 + x^2 - 1}{2x} = x$$

neboli

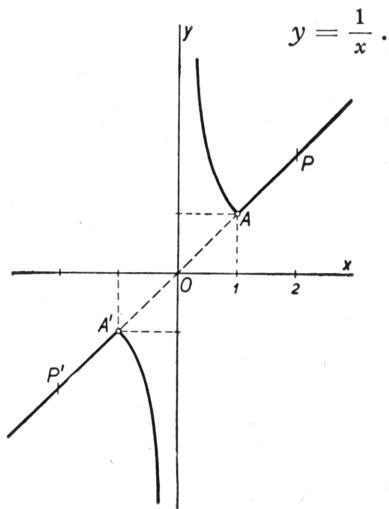
$$y = x.$$

Pro $|x| \geq 1$ se graf funkce skládá z polopřímek AP , $A'P'$ souměrně sdružených podle počátku O souřadnic; přitom je $A \equiv [1, 1]$, $P \equiv [2, 2]$.

[2] Necht' je $x^2 - 1 \leq 0$, ale $x \neq 0$, tj. $-1 \leq x \leq 1$, $x \neq 0$; potom je $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$ a

$$y = \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{2x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

neboli



V tomto případě jsou grafem dva oblouky rovnoosé hyperboly (viz grafické znázornění nepřímé úměrnosti), a to pro $|x| \leq 1$, $x \neq 0$.

Z obrázku 16 je patrný průběh naší funkce; z něho je vidět, že nejmenší kladnou hodnotu $y = 1$ dostaneme pro $x = 1$. Tím je řešení provedeno.

Obr. 16

4. Trojboký jehlan má za podstavu rovnostranný trojúhelník o straně velikosti p . Pobočné stěny svírají s jeho podstavou pořadě ostré úhly α , β , γ .

Je-li $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, potom poloměr kulové plochy jehlanu vepsané je

$$\rho = \frac{1}{2}p\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma;$$

dokažte.

Řešení. Označme V hlavní vrchol jehlanu a S střed kulové plochy jehlanu (v podstatě čtyřstěnu $VABC$) vepsané; je známo, že bod S existuje. Označme U patu kolmice vedené bodem S k rovině ABC (obr. 17). Bod S leží v rovinách, které půlí úhly α, β, γ ; snadno se zjistí, že bod S leží uvnitř kolmé hranolové plochy sestrojené nad trojúhelníkem ABC a proto bod U padne dovnitř tohoto trojúhelníka.

Označme X, Y, Z paty kolmic vedených bodem U k přímkám BC, CA, AB a položme $UX=x$,

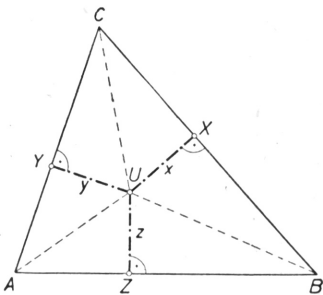
$$UY=y, \quad UZ=z;$$

podle předchozího jsou x, y, z kladná čísla (bod U neleží na obvodu trojúhelníka ABC). Vznikají trojúhelníky

$$SXU, SYU, SZU,$$

kde

$$\sphericalangle U = 90^\circ, \sphericalangle X = \frac{1}{2}\alpha, \sphericalangle Y = \frac{1}{2}\beta, \sphericalangle Z = \frac{1}{2}\gamma, \\ SU = \rho.$$



Obr. 17

O těchto trojúhelnících platí

$$x = \varrho \cotg \frac{1}{2}\alpha, \quad y = \varrho \cotg \frac{1}{2}\beta, \quad z = \varrho \cotg \frac{1}{2}\gamma. \quad (1)$$

Obsah P rovnostranného trojúhelníka ABC se stranou p je

$$P = \frac{1}{4}p^2\sqrt{3}. \quad (2)$$

Zároveň je obsah P roven součtu obsahů trojúhelníků UBC , UCA , UAB (obr. 17), tj.

$$P = \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}py + \frac{1}{2}pz$$

neboli

$$P = \frac{1}{2}p(x + y + z). \quad (3)$$

Porovnáním (2), (3) dostaneme po snadné úpravě

$$x + y + z = \frac{1}{2}p\sqrt{3}.$$

Po dosazení za x , y , z ze vztahů (1) obdržíme

$$\varrho(\cotg \frac{1}{2}\alpha + \cotg \frac{1}{2}\beta + \cotg \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}p\sqrt{3}$$

neboli

$$\varrho = \frac{1}{2}p\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cotg \frac{1}{2}\alpha + \cotg \frac{1}{2}\beta + \cotg \frac{1}{2}\gamma}.$$

Jestliže je tvrzení úlohy správné, musí být

$$\cotg \frac{1}{2}\alpha + \cotg \frac{1}{2}\beta + \cotg \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\tg \frac{1}{2}\alpha \tg \frac{1}{2}\beta \tg \frac{1}{2}\gamma}$$

neboli

$$\begin{aligned} \cotg \frac{1}{2}\alpha + \cotg \frac{1}{2}\beta + \cotg \frac{1}{2}\gamma &= \\ &= \cotg \frac{1}{2}\alpha \cotg \frac{1}{2}\beta \cotg \frac{1}{2}\gamma. \end{aligned}$$

Jestliže je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, pak tento vztah skutečně platí, jak ihned dokážeme.

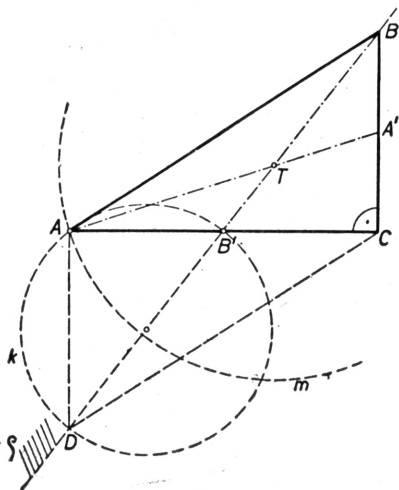
Důkaz. Podle textu úlohy platí $\frac{1}{2}\gamma = R - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta)$. Nyní postupně upravujeme:

$$\begin{aligned}
 & (\cotg \frac{1}{2}\alpha + \cotg \frac{1}{2}\beta) + \cotg \frac{1}{2}\gamma = \\
 &= \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta + \cos \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta} + \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \\
 &= \frac{\sin(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta} + \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \\
 &= \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma \cdot \sin [90^\circ - \frac{1}{2}\gamma] + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} = \\
 &= \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma \cdot \cos \frac{1}{2}\gamma + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} = \\
 &= \frac{[\sin \frac{1}{2}\gamma + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta] \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} = \\
 &= \frac{\{\sin [90^\circ - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta)] + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta\} \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} = \\
 &= \frac{[\cos (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta) + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta] \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} = \\
 &= \frac{[\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta - \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta] \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} = \\
 &= \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} = \cotg \frac{1}{2}\alpha \cotg \frac{1}{2}\beta \cotg \frac{1}{2}\gamma,
 \end{aligned}$$

což právě jsme měli dokázat. Tím je řešení úlohy provedeno.

3. ÚLOHY III. KOLA KATEGORIE A

1. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC (kde úhel $\sphericalangle BCA = 90^\circ$), jsou-li dány délky těžnic t_1, t_2 příslušných k vrcholům A, B . Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným číslům t_1, t_2 . (Lze řešit doplněním na rovnoběžník.)



Obr. 18

Řešení. *Rozbor* (obr. 18). Předpokládejme, že jsme našli trojúhelník, který splňuje požadavky úlohy. Označme T těžiště hledaného trojúhelníka a sestrojme

rovnoběžník $ABCD$; jeho střed B' je zároveň středem odvěsny CA hledaného trojúhelníku ABC . Tu platí

$$TA = \frac{2}{3}t_1, \quad TD = \frac{4}{3}t_2, \quad B'D = BB' = t_2, \quad TB' = \frac{1}{3}t_2.$$

Ze souměrnosti rovnoběžníka $ABCD$ podle jeho středu B' plyne, že

$$\sphericalangle B'AD = \sphericalangle B'CB = 90^\circ.$$

Bod A leží proto na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou DB' jako průměrem, přičemž je $TA = \frac{2}{3}t_1$. Odtud *konstrukce* (obr. 18):

Sestrojme úsečku BD délky $2t_2$; označme B' její střed a na polopřímce BD sestrojme úsečku $BT = \frac{2}{3}t_2$. Zvolme polorovinu ϱ o hranici BD . Nad úsečkou DB' jako průměrem sestrojme Thaletovu kružnici k a opišme kružnici $m \equiv (T, \frac{2}{3}t_1)$; označme A ten společný bod (pokud existuje) obou kružnic k, m , který padne dovnitř poloroviny ϱ . Dále sestrojme obraz C bodu A v souměrnosti o středu B' . Potom trojúhelník ABC vyhovuje požadavkům úlohy.

Důkaz. Podle konstrukce jsou D, B' různé body (čísla t_2 i t_1 jsou kladná). Předpokládali jsme, že bod A padne dovnitř poloroviny ϱ , která má hranici DB . Proto existuje trojúhelník ABD a tedy i trojúhelník ABC ; o něm podle konstrukce platí:

a) Bod B' je středem strany CA a úsečka BB'

(shodná s úsečkou $DB' = t_2$) je tedy těžnicí trojúhelníka ABC a má délku t_2 .

b) Podle konstrukce je $BT = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}t_2$; protože úsečka BB' je těžnicí trojúhelníka ABC , je T těžištěm tohoto trojúhelníka.

c) Podle konstrukce je $TA = \frac{2}{3}t_1$, přičemž T je těžištěm; proto těžnice trojúhelníka ABC příslušná k vrcholu A má délku t_1 .

d) Podle konstrukce leží bod A na kružnici k , je tedy $\sphericalangle DAB' = 90^\circ$; obrazem tohoto úhlu v souměrnosti o středu B' je úhel $\sphericalangle BCA$, který je proto rovněž pravý.

Trojúhelník ABC splňuje tedy všechny požadavky vyslovené v textu úlohy.

Diskuse. Řešitelnost úlohy podle provedené konstrukce a důkazu závisí na existenci bodu A uvnitř poloroviny ϱ . Zřejmě se tedy jedná o to, aby se kružnice k, m protínaly ve dvou různých bodech; tyto body jsou, pokud existují, souměrně sdružené podle přímky DB , takže jen jediný z průsečíků padne dovnitř poloroviny ϱ .

Kružnice k, m mají pořadě poloměry $r = \frac{1}{2}t_2$, $\varrho_0 = \frac{2}{3}t_1$ a střednou délky $\frac{5}{6}t_2$; kružnice k, m mají dva různé společné body právě tehdy, jestliže o jejich středné platí

$$\varrho_0 - r < \frac{5}{6}t_2 < \varrho_0 + r$$

neboli

$$\frac{2}{3}t_1 - \frac{1}{2}t_2 < \frac{5}{6}t_2 < \frac{2}{3}t_1 + \frac{1}{2}t_2.$$

Odtud dostáváme dvě nerovnosti

$$4t_1 < 8t_2, \quad 2t_2 < 4t_1$$

neboli

$$t_1 < 2t_2, \quad t_2 < 2t_1;$$

to lze vyslovit takto:

Každá z daných těžnic musí být menší než dvojnásobek druhé z nich. Jedině za tohoto předpokladu má úloha řešení, a to jedině; jinak úloha řešení nemá.

Tím je řešení dané úlohy provedeno.

Podle řešení s. Jitky Klánské,
11.b tř. 16. jsš, Praha 13-Vršovice,
a s. Jiřího Součka 10.a tř. 21. jsš,
Praha 16, Na Santošce 1.

2. Ak o reálnych číslach a, b, c platia tri nerovnosti

$$a + b + c > 0, \quad (1)$$

$$ab + bc + ca > 0, \quad (2)$$

$$abc > 0, \quad (3)$$

potom sú a, b, c kladné čísla. Dokážte to.

Riešenie. Z nerovnosti (3) vyplýva, že čísla a, b, c sú všetky rôzne od nuly a ďalej, že sú práve dve možnosti: [1] Čísla a, b, c sú všetky kladné. [2] Dve z čísel a, b, c sú záporné a tretie je kladné.

Dokážeme, že prípad [2] nemôže nastať, čím bude dokázaná správnosť tvrdenia danej úlohy.

Dôkaz. Nech je $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ (to možno v prípade [2] dosiahnuť vhodnou zámenou označenia uvažovaných čísel).

Zo vzťahu (2) vyplýva

$$ab > -c(a + b); \quad (4)$$

zo vzťahu (1) vyplýva

$$a + b > -c. \quad (5)$$

Znásobme obe strany nerovnosti (5) číslom $-c$, ktoré je kladné; dostaneme

$$-c(a + b) > c^2. \quad (6)$$

Z nerovností (4), (6) dostaneme

$$ab > c^2. \quad (7)$$

Avšak tento vzťah neplatí, lebo je $ab < 0$, ale $c^2 > 0$. Tým sme urobili dôkaz, že prípad [2] nemôže nastať.

Upravené podľa riešenie s. Čä
Zong Rjonga, žiaka 11.a tr. jss,
Brandýs nad Labem.

Jiné řešení. Necht' tvrzení úlohy neplatí, tj. necht' některé z čísel a , b , c není kladné (dokážeme, že to není možné); můžeme předpokládat, že je to číslo a (pro čísla b , c by se úvaha provedla podobně). Předpokládejme tedy, že platí

$$a \leq 0. \quad (4)$$

Nemůže být $a = 0$, jinak by neplatilo $abc > 0$. Je tedy

$$a < 0.$$

Ze vztahu $abc > 0$ potom dostaneme

$$bc < 0. \quad (5)$$

Z nerovnosti (1) dostaneme

$$a > -(b + c),$$

takže platí

$$-(b + c) < a < 0$$

a tedy též

$$-(b + c) < 0,$$

z čehož

$$b + c > 0.$$

Protože je $a < 0$, plyne z předchozí nerovnosti vztah

$$a(b + c) < 0; \quad (6)$$

ze vztahů (5), (6) vyplývá, že platí též nerovnost

$$a(b + c) + bc < 0$$

neboli

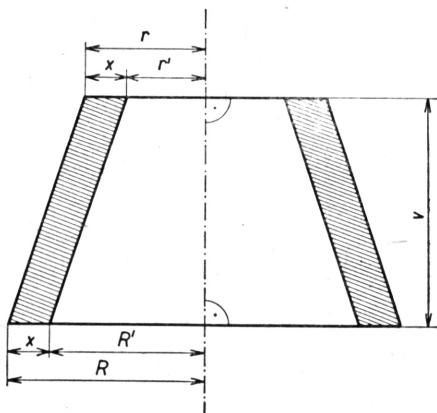
$$ab + bc + ca < 0.$$

To však není možné, neboť platí nerovnost (2).

Není tedy $a \leq 0$, tj. platí $a > 0$. Protože stejnou úvahu můžeme provést i pro čísla b, c , je důkaz tvrzení úlohy proveden.

Podle řešení s. Kamila Johna,
11.b tř. 14. jsš, Praha 12,
W. Piecka 2.

3. Z polotovaru tvaru komolého rotačního kužele, jehož podstavy mají poloměry R , r , byla zhotovena součástka tak, že do něho byla vyvrtána dutina tvaru souosého komolého kužele, jak je vidět z nákresu osového řezu; tím se hmota kusu zmenšila na polovinu. Vypočítejte poloměry otvorů vzniklých v podstavách součástky. Rozhodněte, pro který poměr $\frac{R}{r}$ má úloha řešení.



Obr. 19

Řešení (obr. 19). Předpokládejme, že vzhledem k významu čísel R , r je

$$R > r > 0. \quad (1)$$

Kuželová dutina má tvar rotačního komolého kužele o poloměrech podstav

$$R' = R - x, \quad r' = r - x; \quad (2)$$

jeho objem označme V_1 , objem daného kužele označme V_2 . Podle textu úlohy má platit

$$V_2 = 2V_1$$

neboli

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{3}\pi[(R - x)^2 + (R - x)(r - x) + (r - x)^2] = \\ = \frac{1}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2). \end{aligned}$$

Má-li úloha řešení, musí číslo x splňovat předchozí rovnici, kterou upravíme postupně takto:

$$\begin{aligned} 2(R^2 - 2Rx + x^2 + Rr - Rx - rx + x^2 + \\ + r^2 - 2rx + x^2) = R^2 + Rr + r^2, \\ 6x^2 - 6(R + r)x + R^2 + Rr + r^2 = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Diskriminant rovnice (3) je

$$\begin{aligned} D &= 36(R + r)^2 - 24(R^2 + Rr + r^2) = \\ &= 12(3R^2 + 6Rr + 3r^2 - 2R^2 - 2Rr - 2r^2) = \\ &= 12(R^2 + 4Rr + r^2); \end{aligned}$$

vzhledem k vztahům (1) je $D > 0$ a tedy

$$D = 2\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}.$$

Kořeny $x_{1,2}$ rovnice (3) jsou

$$x_{1,2} = \frac{6(R + r) \pm 2\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}}{12}$$

neboli

$$x_{1,2} = \frac{3(R + r) \pm \sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}}{6}. \quad (4)$$

Číslo x_1 (které přísluší ke znaménku plus) je větší než $\frac{3(R+r)}{6} = \frac{R+r}{2}$ a toto číslo je větší než r [viz (1)]; je tedy $x_1 > r$ a rozdíl $r - x_1$ je číslo záporné. Nepřichází tedy x_1 pro naši úlohu v úvahu.

Má-li úloha řešení, pak hledaným číslem x může být jen kořen x_2 . Platí, že $x_2 > 0$, jak ihned dokážeme. Užijeme této pomocné věty V: „Jsou-li a, b nezáporná čísla a platí-li $a^2 \geq b^2$, potom je $a \geq b$.“ Položme $a = 3(R+r)$, $b = \sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}$ a utvořme rozdíl $a^2 - b^2$; je

$$\begin{aligned} [3(R+r)]^2 - [\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}]^2 &= \\ = 9(R^2 + 2Rr + r^2) - 3(R^2 + 4Rr + r^2) &= \\ = 6R^2 + 6Rr + 6r^2, \end{aligned}$$

což je vzhledem k vztahům (1) kladné číslo. Je tedy $x_2 > 0$.

Pro čísla R', r' dostaneme pro $x = x_2$ ze (4) tyto výsledky

$$\begin{aligned} R' &= \frac{3(R-r) + \sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}}{6}, \\ r' &= \frac{-3(R-r) + \sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}}{6}. \end{aligned} \quad (5)$$

Číslo R' je vzhledem k (1) kladné. Jedná se o to, za kterých podmínek je též r' kladné číslo; to nastane právě tehdy, jestliže bude

$$\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)} > |-3(R-r)|.$$

Podle věty V utvořme rozdíl Q druhých mocnin čísla na levé a pravé straně poslední nerovnosti; je

$$\begin{aligned} Q &= [\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}]^2 - [-3(R - r)]^2 = \\ &= 3(R^2 + 4Rr + r^2) - 9(R^2 - 2Rr + r^2) = \\ &= -6R^2 + 30Rr - 6r^2 = \\ &= -6(R^2 - 5Rr + r^2). \end{aligned}$$

Číslo Q musí být kladné neboli musí být

$$R^2 - 5Rr + r^2 < 0. \quad (6)$$

Rovnice $y^2 - 5y + 1 = 0$ o neznámé y má kořeny $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21})$; proto lze vztah (6) psát ve tvaru

$$\left(R - \frac{5r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{21}\right)\left(R - \frac{5r}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{21}\right) < 0. \quad (7)$$

Přitom první činitel levé strany vztahu (7) je větší o $r\sqrt{21}$ než druhý; vztah (7) lze tedy splnit jedinečně takto

$$R - \frac{5r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{21} > 0,$$

$$R - \frac{5r}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{21} < 0$$

neboli

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{r} &> \frac{1}{2}(5 - \sqrt{21}), \\ \frac{R}{r} &< \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21}). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Obráceným postupem z obou vztahů (8) plyne, že je $Q > 0$ a tím $r' > 0$. Přitom první vztah (8) je vzhledem k vztahu (1) vždy splněn.

Odtud *výsledek*: Úloha má řešení právě tehdy, jestliže platí nerovnosti

$$1 < \frac{R}{r} < \frac{1}{2} (5 + \sqrt{21}).$$

Podle řešení s. Karla Šmuka, 11.b
tř. jsš, Ostrava VIII - Hladnov.

4. Najděte všechny dvojice čísel x, y (ve stupních), které vyhovují soustavě rovnic

$$\sin(x + 150^\circ) = \cos(y - 75^\circ) \quad (1)$$

$$\cos x + \sin(y - 225^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0. \quad (2)$$

Řešení. A. Předpokládejme, že dvojice čísel x, y splňuje obě dané rovnice (1), (2).

V dalším užijeme známého vzorce

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \quad (3)$$

a potom věty **V**: „Jestliže platí $\cos \beta = \cos \gamma$, potom o úhlech β, γ platí buď $\beta = \gamma + k \cdot 360^\circ$ anebo $\beta = -\gamma + k \cdot 360^\circ$, kde k je celé číslo.“

Užitím vzorce (3) na levou stranu rovnice (1) dostaneme

$$\cos[90^\circ - (x + 150^\circ)] = \cos(y - 75^\circ).$$

Musí tedy podle věty **V** platit:

a) buď

$$90^\circ - (x + 150^\circ) + k \cdot 360^\circ = y - 75^\circ,$$

kde k je libovolné celé číslo. Odtud

$$y = 15^\circ - x + k \cdot 360^\circ. \quad (4)$$

b) anebo

$$x + 150^\circ - 90^\circ + k \cdot 360^\circ = y - 75^\circ,$$

kde k je libovolné celé číslo. Odtud

$$y = x + 135^\circ + k \cdot 360^\circ. \quad (5)$$

B. Užitím vzorce (3) upravíme výraz $\sin(y - 225^\circ)$; platí $\sin(y - 225^\circ) = \cos(y - 225^\circ - 90^\circ) = \cos(y - 225^\circ - 90^\circ + 360^\circ) = \cos(y + 45^\circ)$.

Po dosazení tohoto výsledku za $\sin(y - 225^\circ)$ do rovnice (2) obdržíme

$$\cos x + \cos(y + 45^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}. \quad (6)$$

C. K této rovnici připojme jednou výsledek (4) [viz část I], podruhé výsledek (5) [viz část II].

I. Po dosazení ze (4) do (6) dostaneme

$$\cos x + \cos(60^\circ - x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

neboli

$$\cos x + \cos(x - 60^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

užitím vzorce pro součet kosinů dostáváme dále:

$$2\cos(x - 30^\circ) \cdot \cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$2\cos(x - 30^\circ) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$2\cos(x - 30^\circ) = -1,$$

$$\cos(x - 30^\circ) = -\frac{1}{2}.$$

Musí tedy platit: [a] buď

$$x - 30^\circ = 120^\circ + m \cdot 360^\circ \quad (7)$$

(kde m je libovolné celé číslo);

[b] anebo

$$x - 30^\circ = 240^\circ + p \cdot 360^\circ \quad (8)$$

(kde p je libovolné celé číslo).

Možnost [a]. Ze vztahu (7) plyne

$$x = 150^\circ + m \cdot 360^\circ;$$

po dosazení do (4)

$$\begin{aligned} y &= -135^\circ + n \cdot 360^\circ = 360^\circ - 135^\circ + p \cdot 360^\circ = \\ &= 225^\circ + p \cdot 360^\circ, \end{aligned}$$

kde $p = n - 1$ je libovolné celé číslo. Dostáváme dvojici

$$x = 150^\circ + m \cdot 360^\circ, \quad y = 225^\circ + p \cdot 360^\circ \quad (9)$$

(čísla m, p jsou libovolná celá), o níž se přesvědčíme dosazením do rovnic (1), (2), že je splňuje. Označme L_1, P_1 dosazení do levé, popř. pravé strany rovnice (1) a L dosazení do levé strany rovnice (2). Dostáváme:

$$L_1 = \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$P_1 = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\begin{aligned} L &= \cos 150^\circ + \sin 0 + \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\cos 30^\circ + \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0. \end{aligned}$$

Je tedy $L_1 = P_1$ a $L = 0$, takže všechny dvojice (9) jsou řešením dané soustavy rovnic (1), (2).

Možnost [b]. Ze vztahu (8) plyne

$$x = 270^\circ + p \cdot 360^\circ;$$

po dosazení tohoto výsledku do vztahu (4) dostáváme

$$y = -255^\circ + (k - p) \cdot 360^\circ$$

neboli

$$y = 105^\circ + q \cdot 360^\circ$$

(kde q je libovolné celé číslo). Dostáváme tedy dvojici

$$x = 270^\circ + p \cdot 360^\circ, y = 105^\circ + q \cdot 360^\circ \quad (10)$$

(kde p, q jsou libovolná celá čísla). Přesvědčíme se dosazením do jednotlivých stran rovnic (1), (2), že uvedená dvojice tyto rovnice splňuje; užijeme stejného označení jako při možnosti [a]:

$$L_1 = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$P_1 = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\begin{aligned} L &= \cos 270^\circ + \sin(-120^\circ) + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0. \end{aligned}$$

Platí tedy $L_1 = P_1$, $L = 0$, takže všechny dvojice (10) jsou řešením soustavy rovnic (1), (2). Tím je část I provedena.

II. Po dosazení z (5) do levé strany rovnice (6) dostaneme postupně

$$\cos x + \cos(x + 180^\circ) = \cos x - \cos x = 0;$$

naproti tomu je pravá strana rovnice (6) různá od nuly. Soustava rovnic (5), (6) tedy řešení nemá.

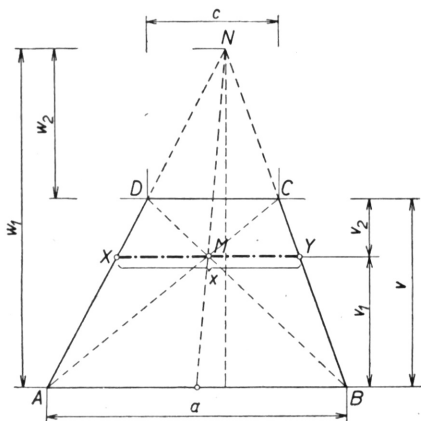
Závěr. Tím jsou všechny možnosti vyčerpány a všechna řešení dané soustavy rovnic jsou dána čísla x, y ze vztahů (9) a (10).

Podle řešení s. Jiřího Moudrého,
11.c tř. 1. jsš, Pardubice.

4. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE B

1. V lichoběžníku $ABCD$ s větší základnou AB označme M průsečík úhlopříček. Buď $XY \parallel AB$ příčka vedená bodem M (body X , Y leží pořadě uvnitř ramen AD , BC lichoběžníka).

Vyjádřete poměr obsahů lichoběžníků $ABYX$, $XYCD$ pomocí čísel $a = AB$, $c = CD$.



Obr. 20

Řešení (zavedme označení v obr. 20). Podle zavedeného označení o obsahích P_1 , P_2 lichoběžníků

ABYX, XYCD platí

$$P_1 = \frac{1}{2}(a + x)v_1, \quad (1)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x + c)v_2. \quad (2)$$

Protože je $AB \parallel CD \parallel XY$, platí

$$\triangle MAB \sim \triangle MCD \text{ (uu)}, \quad (3)$$

$$\triangle NAB \sim \triangle NDC \text{ (uu)}, \quad (4)$$

$$\triangle NAB \sim \triangle NXY \text{ (uu)}, \quad (5)$$

přičemž i příslušné výšky těchto trojúhelníků jsou v témže poměru jako příslušné strany [viz Geometrie pro 9. ročník, příklad 9, str. 63, vydání z r. 1955].

Podle obr. 20 platí

$$v = v_1 + v_2 = w_1 - w_2. \quad (6)$$

Ze vztahu (3) plyne

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a}{c}$$

neboli

$$v_1 = ka, \quad v_2 = kc, \quad (7)$$

kde $k > 0$ je poměr podobnosti; vzhledem k prvnímu vztahu (6) je $v = ka + kc$, neboli

$$k = \frac{v}{a + c}. \quad (7')$$

Ze vztahu (4) plyne

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a}{c}$$

neboli

$$w_1 = k'a, \quad w_2 = k'c, \quad (8)$$

kde $k' > 0$ je poměr podobnosti; vzhledem k druhému vztahu (6) je $v = k'a - k'c$, neboli

$$k' = \frac{v}{a - c} \quad (8')$$

(přitom je v lichoběžníku $a > c$ a tedy $a - c > 0$).

Ze vztahu (5) plyne

$$\frac{x}{a} = \frac{w_1 - v_1}{w_1}$$

neboli vzhledem k (7), (8)

$$x = a \cdot \frac{k'a - ka}{k'a}$$

a tedy

$$x = \frac{1}{k'} \cdot (k' - k)a.$$

Dosaďme sem za k' , k ze (7'), (8'); dostaneme postupně

$$\begin{aligned} x &= \frac{a - c}{v} \cdot \left(\frac{v}{a - c} - \frac{v}{a + c} \right) \cdot a = \\ &= a(a - c) \cdot \frac{a + c - (a - c)}{(a - c)(a + c)} = \frac{2ac}{a + c}, \end{aligned}$$

tj.

$$x = \frac{2ac}{a + c}. \quad (9)$$

Vzhledem k (1), (2) platí

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a + x}{c + x} \cdot \frac{v_1}{v_2}.$$

Po dosazení za v_1 , v_2 ze (7) obdržíme

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a + x}{c + x} \cdot \frac{a}{c}.$$

Nyní dosadíme za x ze vztahu (9), čímž dostaneme

$$\frac{P_1}{P_2} = \left[a \left(a + \frac{2ac}{a+c} \right) \right] : \left[c \left(c + \frac{2ac}{a+c} \right) \right],$$

neboli

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a[a(a+c) + 2ac]}{a+c} : \frac{c[c(a+c) + 2ac]}{a+c}$$

a postupně dále

$$\frac{P_1}{P_2} = [a(a^2 + 3ac)] : [c(c^2 + 3ac)] = [a^2(a + 3c)] : [c^2(c + 3a)];$$

odtud konečně dostáváme

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a^2(a + 3c)}{c^2(3a + c)}$$

čímž je řešení úlohy provedeno.

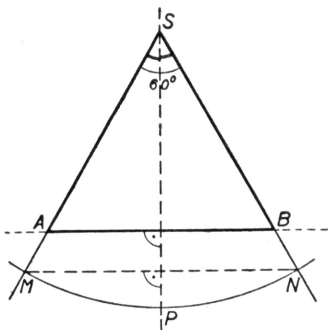
2. Kruhový výsek so stredovým uhlom 60° rozdelíme priamkou kolmou k osi tohto uhla na dve časti, ktorých obvody sa navzájom rovnajú.

Ktorá z týchto dvoch častí má menší obsah?

Riešenie. Zaveďme označenie ako na obr. 21, kde S je stred kruhového oblúka výseku, $SM = SN = r$ (polomer výseku), SP je os stredového uhla výseku. Obvod rovnostranného trojuholníka SMN je $3r$, obvod úseče odťatej priamkou MN je $r + \frac{1}{6} \cdot 2\pi r = \frac{1}{3}r \cdot (3 + \pi)$. Teraz platí

$$3r - r \cdot \frac{3 + \pi}{3} = \frac{9 - (3 + \pi)}{3} r = \frac{6 - \pi}{3} r;$$

je teda obvod trojuholníka SMN väčší než obvod úseče (MPN). Predpokladajme, že daná úloha má riešenie. Potom hľadaná priamka $AB \perp SP$ musí



Obr. 21

podľa predošlého mať od bodu S menšiu vzdialenosť než priamka MN (pozri obr. 21). Táto priamka teda rozdeľuje výsek na dve časti, z ktorých jednou je rovnostranný trojuholník SAB , ktorého strany majú veľkosť x . Jeho obvod je $3x$; obvod druhej časti je $x + 2(r - x) + \frac{1}{3}\pi r$. Podľa textu úlohy sa oba obvody rovnajú, t. j. platí

$$3x = x + 2(r - x) + \frac{1}{3}\pi r.$$

To je rovnica prvého stupňa pre neznámu x . Po-

stupne dostaneme

$$4x = 2r + \frac{1}{3} \pi r ,$$

$$x = \frac{1}{12} (6 + \pi) r .$$

Obsah trojuholníka SAB je $P_1 = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3}$; obsah druhej časti je $P_2 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4}x^2\sqrt{3}$. Vypočítame $P_1 - P_2$; platí

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= \frac{1}{2} x^2 \sqrt{3} - \frac{1}{6} \pi r^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12^2} (6 + \pi)^2 r^2 \sqrt{3} - \frac{1}{6} \pi r^2 = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{48} (36 + 12\pi + \pi^2) \sqrt{3} - \pi \right] r^2 = \\ &= \frac{1}{6 \cdot 48} [(36 + 12\pi + \pi^2) \sqrt{3} - 48\pi] r^2 . \quad (1') \end{aligned}$$

Stačí rozhodnúť, či výraz V v lomenej zátvorke vo vzťahu (1') je kladný alebo záporný, alebo sa rovná nule. Platí

$$V = (36\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\pi + \pi^2\sqrt{3}) - 48\pi . \quad (1)$$

Pokúsime sa dokázať, že V je záporné číslo. Za tým účelom si pripomeňme, že je

$$3 < \pi , \quad (2)$$

$$\pi < 3,2 , \quad (3)$$

$$\sqrt{3} < 1,733 . \quad (4)$$

Keď niektoré z čísel v zátvorke na pravej strane vzťahu (1) zväčšíme, dostaneme namiesto čísla V

nové číslo, ktoré je väčšie než V . Tento postup použijeme niekoľkokrát. Postupne teda platí

$$\begin{aligned}
 V &= 12 \cdot 3 \sqrt[3]{3} + 12 \sqrt[3]{3} \pi + \pi^2 \sqrt[3]{3} - 48\pi < \\
 &< \underline{12\pi} \sqrt[3]{3} + 12 \sqrt[3]{3} \pi + \pi^2 \sqrt[3]{3} - 48\pi = [\text{pozri (2)}] \\
 &= 24 \sqrt[3]{3} \pi + \pi^2 \sqrt[3]{3} - 48\pi = \\
 &= \pi \sqrt[3]{3} (24 + \pi) - 48\pi < \\
 &< \pi \sqrt[3]{3} (24 + \underline{3,2}) - 48\pi = [\text{pozri (3)}] \\
 &= \pi \sqrt[3]{3} \cdot 27,2 - 48\pi < \\
 &< \pi \cdot 1,733 \cdot 27,2 - 48\pi = [\text{pozri (4)}] \\
 &= \pi (1,733 \cdot 27,2 - 48),
 \end{aligned}$$

čiže

$$V < \pi (1,733 \cdot 27,2 - 48). \quad (5)$$

Urobme výpočet:

$$\begin{array}{r}
 1,733 \cdot 27,2 \\
 \hline
 3\,466 \\
 1\,2131 \\
 3466 \\
 \hline
 47,1376
 \end{array}$$

Číslo z vyjadrené v zátvorke vo vzťahu (5) sa teda rovná

$$z = 47,1376 - 48$$

a je zrejmé záporné. Je teda aj číslo $\pi z < 0$ a preto je aj $V < 0$. Je teda záporný aj výraz (1') a teda

$$P_1 - P_2 < 0,$$

čiže

$$P_1 < P_2 .$$

Záver. Časť podoby rovnostranného trojuholníka má menší obsah než druhá časť výseku.

Iný spôsob odhadu výrazu V . V zátvorke vzťahu (1) nahradíme čísla $\sqrt{3}$ a π podľa vzťahov

$$\sqrt{3} < 1,74 ,$$

$$\pi < 3,15$$

a číslo -48π nahradíme číslom $-48 \cdot 3,14$. Namiesto V dostaneme číslo väčšie. Teda

$$\begin{aligned} V &< (36 + 12 \cdot 3,15 + 3,15^2) \cdot 1,74 - 48 \cdot 3,14 < \\ &< 83,73 \cdot 1,74 - 48 \cdot 3,14 = \\ &= 145,6902 - 150,72 < 0 , \end{aligned}$$

[pozri „Výpočty“ dolu]

čiže $V < 0$.

Je teda $P_1 - P_2 < 0$, t. j.

$$P_1 < P_2 .$$

Výpočty:		Súčet:
3,15 . 12	3,15 ²	36
630	94 5	37,80
37,80	1 575	9,9225
	9,9225	83,7225 < 83,73
	83,73 . 1,74	48 . 3,14
	58 611	1256
	3 3492	2512
	145,6902	150,72

3. Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže jsou dány velikosti strany $AB = c$, úhlu $\sphericalangle CAB = \alpha$ a jestliže platí, že průsečík V jeho výšek pólí výšku procházející vrcholem A .

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k velikosti úhlu α .

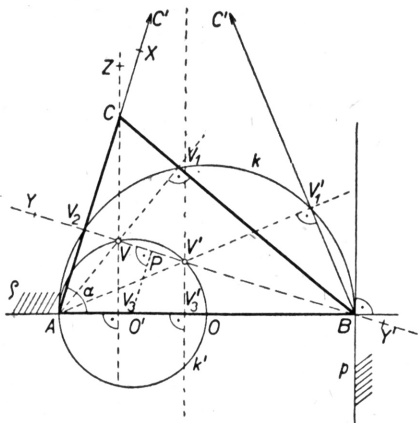
Řešení. *Rozbor.* Zaveďme označení jako v obr. 22, 23, kde V_1, V_2, V_3 jsou pořadě paty výšek na stranách BC, CA, AB trojúhelníka ABC . Předpokládejme, že jsme sestrojili trojúhelník ABC , v němž je $\sphericalangle A = \alpha$, $AB = c$ a v němž o průsečíku V výšek platí (obr. 22)

$$AV = VV_1. \quad (1)$$

Označme $k \equiv (O, \frac{1}{2}c)$ kružnici sestrojenou nad úsečkou $AB = c$ jako průměrem, takže O je středem úsečky AB . Na kružnici k leží body V_1, V_2 , což plyne z věty Thaletovy.

Uvažujme stejnolehlost o středu A a koeficientu stejnolehlosti $\lambda = \frac{AV}{AV_1} = \frac{1}{2}$. Tato stejnolehlost vzhledem k vztahu (1) převádí bod V_1 v bod V a kružnici k v kružnici $k' \equiv (O', \frac{1}{4}c)$ opsanou nad úsečkou AO jako průměrem; bod O' je tedy středem úsečky AO . Obraz V bodu V_1 v této stejnolehlosti vzhledem ke vztahu (1) leží nutně na kružnici k' . Přitom je V bodem přímky $BV_2 \perp AC$ a tedy společným bodem kružnice k' a přímky BV_2 . Odtud plyne konstrukce.

Konstrukce (obr. 22). Sestrojme úsečku $AB = c$ a označme ϱ jednu z polorovin vyřatých přímkou AB . Označme O střed úsečky AB a nad úsečkou AO jako



Obr. 22

průměrem sestrojíme kružnici $k' \equiv (O', \frac{1}{4}c)$. V polorovině ϱ sestrojíme úhel $\sphericalangle BAX = \alpha$ a označme V_2 patu kolmice vedené bodem B k přímce AX . Společné body přímky BV_2 s kružnicí k' označme V , V' (pokud existují).

Další část konstrukce provedme pro bod V (pro bod V' se provede obdobně). Na polopřímce AV sestrojíme úsečku

$$AV_1 = 2AV.$$

Společný bod polopřímek AX , BV_1 označme C ; potom trojúhelník ABC vyhovuje požadavkům úlohy.

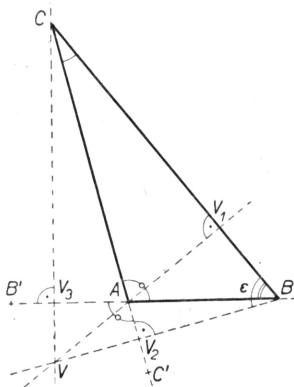
Důkaz. V trojúhelníku ABC (pokud existuje) je $BV_2 \perp AC$, $AV_1 \perp BC$, takže AV_1 , BV_2 jsou jeho výšky a o jejich průsečíku V platí podle konstrukce $AV = VV_1$. Přitom, pokud C leží v polovině ρ , je $\sphericalangle BAC = \alpha$, $AB = c$. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. I. Nejprve dokážeme: „Úloha nemá řešení, je-li v trojúhelníku ABC úhel $\alpha \geq 90^\circ$, tj. má-li úloha řešení, musí být úhel α nutně ostrý.“
Rozeznávejme dva případy:

Případ [1]. Nechť je $\alpha = 90^\circ$. V takovém trojúhelníku je $V \equiv A$ a požadavek (1) nelze splnit.

Případ [2] (obr. 23). Nechť je $180^\circ > \alpha > 90^\circ$. Potom jsou úhly $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ trojúhelníka ABC ostré. Proto pata V_1 kolmice vedené bodem A k přímce BC padne dovnitř úsečky BC [viz příklad 17 na str. 112 učebnice Geometrie pro 7. ročník, vyd. z r. 1955; bod V_1 musí totiž padnout dovnitř každé z obou polopřímek BC , CB]. Proto přímka AV_1 prochází úhlem $\sphericalangle BAC$ a úhlem $\sphericalangle B'AC'$ k němu vrcholovým. Protože je $\sphericalangle A$ trojúhelníka ABC tupý, padne pata B_2 kolmice vedené bodem B k přímce CA na polopřímku opačnou k polopřímce AC , takže bod A leží uvnitř úsečky CV_2 . Z trojúhelníka BCV_2 plyne, že úhel

$\sphericalangle B = \varepsilon$ v tomto trojúhelníku je ostrý, takže součet úhlů $\sphericalangle AV_1B = 90^\circ$, ε je menší než 180° ; podle Euklidova axiómu mají polopřímky V_1A , BV_2 spo-



Obr. 23

lečný bod V . Ten však nutně leží v úhlu $\sphericalangle B'AC'$, neboť úsečky AV_1 , BV_2 nemohou mít společný bod (jsou odděleny přímkou AB); bod A odděluje tedy body V , V_1 a bod V nemůže být středem úsečky AV_1 .

Tím je důkaz proveden.

II. V dalším proto předpokládáme, že úhel α je ostrý, takže polopřímka $BV_2 \perp AX$ až na bod B padne dovnitř poloroviny ρ . Nejprve rozhodneme o exis-

tenci bodů V , V' . Platí: Přímka BV_2 je a) sečnou, b) tečnou, c) nesečnou kružnice k' podle toho, zda platí (obr. 22)

$$a) O'P < \frac{1}{4}c, \quad b) O'P = \frac{1}{4}c, \quad c) O'P > \frac{1}{4}c, \quad (2)$$

kde P je pata kolmice vedené bodem O' k přímce BV_2 [známá věta o vzájemné poloze přímky a kružnice; viz učebnice Geometrie pro 8. ročník, vydání z r. 1958, věta 6, str. 44]; bod P s polopřímku BV_2 leží zřejmě uvnitř poloroviny ϱ . Ze stejnolehlosti trojúhelníků $BO'P$, BAV_2 (koeficient stejnolehlosti je $\frac{3}{4}$) podle středu B plyne, že $O'P = \frac{3}{4}AV_2 = = \frac{3}{4}c \cdot \cos \alpha$, jak plyne z pravoúhlého trojúhelníka ABV_2 o přeponě $AB = c$; po dosazení do (2) dostaneme pořadě podmínky

$$\cos \alpha \leq \frac{1}{3}$$

neboli pro ostrý úhel α dostáváme pořadě podmínky

$$\alpha \leq \varepsilon,$$

kde ostrý úhel ε je dán vztahem

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{3} \quad (3)$$

(platí $65^\circ 40' < \varepsilon < 65^\circ 50'$).

V případě $\alpha > \varepsilon$ existují body $V \neq V'$, v případě $\alpha = \varepsilon$ existuje jediný bod V společný přímce BV_2 a kružnici k' . Přímky BV_2 , AV_1 jsou různoběžky o průsečíku V ; jsou tedy i přímky $AV_2 \perp BV_2$, $BV_1 \perp AV_1$ různoběžky o společném bodě C [viz

větu 6 v učebnici Geometrie pro 7. ročník, vydání z r. 1955, str. 134]. Bod C tedy existuje a leží zřejmě uvnitř poloroviny ϱ [to plyne z Euklidova axiómu].

Závěr. Úloha má při zvoleném umístění úsečky AB a úhlu α dvě řešení (viz trojúhelníky ABC , ABC' na obr. 22), jestliže je $\alpha > \varepsilon$; má řešení jediné, jestliže je $\alpha = \varepsilon$, jinak nemá řešení. Přitom ε je ostrý úhel daný vztahem (3).

4. Určete všechna reálná čísla x , pro která platí

$$\frac{1}{\sqrt{x+p}} + \frac{1}{\sqrt{x-p}} = \frac{x+p^2}{x-p^2}, \quad (1)$$

kde p je dané reálné číslo.

Řešení. Buď x reálné číslo, které splňuje rovnici (1); tu platí postupně

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x-p} + \sqrt{x+p}}{(\sqrt{x+p})(\sqrt{x-p})} &= \frac{x+p^2}{x-p^2}, \\ \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+p})(\sqrt{x-p})} &= \frac{x+p^2}{(\sqrt{x-p})(\sqrt{x+p})}. \end{aligned} \quad (1')$$

Znásobíme-li obě strany této rovnice číslem $(\sqrt{x-p}) \cdot (\sqrt{x+p})$, dostaneme postupně rovnice

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} &= x + p^2, \\ x - 2\sqrt{x} + p^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Položme

$$\sqrt{x} = y \text{ neboli } y^2 = x; \quad (3)$$

dostaneme tak rovnici

$$y^2 - 2y + p^2 = 0$$

o kořenech

$$y_1 = 1 + \sqrt{1 - p^2}, \quad y_2 = 1 - \sqrt{1 - p^2}. \quad (4)$$

Protože $y = \sqrt{x}$, musí být čísla y_1, y_2 nezáporná, tedy jistě reálná. Proto musí být především $1 - p^2 \geq 0$, jinak by číslo $\sqrt{1 - p^2}$ nebylo reálné. Ze vztahu $1 - p^2 \geq 0$ neboli $(1 - p)(1 + p) \geq 0$ plyne, že o číslu p platí

$$-1 \leq p \leq 1. \quad (5)$$

Je tedy za předpokladu (5)

$$y_1 > 0. \quad (6)$$

Protože je nutně $y_2 \geq 0$, musí vzhledem ke (4) platit $1 - \sqrt{1 - p^2} \geq 0$ neboli $1 \geq \sqrt{1 - p^2}$; obě strany této nerovnosti jsou nezáporná čísla a proto i o jejich druhých mocninách musí platit $1 \geq 1 - p^2$ neboli $p^2 \geq 0$; to je vzhledem k (5) splněno. Platí-li tedy (5), je $y_2 \geq 0$.

Podle (3) příslušejí k číslům y_1, y_2 podle vztahu (3) pořadě čísla $x_1 = y_1^2, x_2 = y_2^2$ neboli

$$x_1 = (1 + \sqrt{1 - p^2})^2 = 2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2}, \quad (7)$$

$$x_2 = (1 - \sqrt{1 - p^2})^2 = 2 - p^2 - 2\sqrt{1 - p^2}. \quad (8)$$

Jestliže rovnice (1) má řešení, mohou to být jen čísla x_1, x_2 .

Abyste tato čísla splňovala rovnici (1), musí mít především tyto vlastnosti:

Čísla $\sqrt{x} + p, \sqrt{x} - p, x - p^2 = (\sqrt{x} - p)(\sqrt{x} + p)$ pro $x = x_1, x = x_2$ musí být různá od nuly; jinak by některý ze zlomků v rovnici (1) neměl smysl. Zřejmě stačí požadovat, aby bylo $x - p^2 \neq 0$ a dále $x \geq 0$.

Podle (7), (8) je

$$x - p^2 = 2(1 - p^2 + \varepsilon\sqrt{1 - p^2}),$$

kde $\varepsilon = 1$ pro x_1 a $\varepsilon = -1$ pro x_2 . Dále platí

$$x - p^2 = 2\sqrt{1 - p^2}(\sqrt{1 - p^2} + \varepsilon). \quad (9)$$

Protože toto číslo musí být různé od nuly, musí být každý z činitelů na pravé straně různý od nuly. Je-li však $\sqrt{1 - p^2} = 0$, je $1 - p^2 = 0$ neboli

$(1 - p)(1 + p) = 0$, tj. buď $p = 1$ nebo $p = -1$.

Proto vzhledem k (5) musí o číslu p platit

$$-1 < p < 1. \quad (10)$$

Rovněž druhý činitel na pravé straně vztahu (9) musí být různý od nuly. Rovnost

$$\sqrt{1 - p^2} + \varepsilon = 0$$

však nenastane pro $\varepsilon = 1$, neboť je $\sqrt{1 - p^2} \geq 0$. Pro $\varepsilon = -1$ máme pak rovnici

$$\sqrt{1 - p^2} - 1 = 0$$

neboli postupně

$$\sqrt{1 - p^2} = 1,$$

$$1 - p^2 = 1,$$

$$p = 0.$$

Skutečně pro $p = 0$ je $x_2 = 0$ a jmenovatelé v (1) jsou rovny nule.

Čísla x_1, x_2 mohou být kořeny rovnice (1) pro všechna čísla p ze vztahů (10) s výjimkou čísla x_2 , které se dostane pro $p = 0$. To ovšem platí za předpokladu, že je $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, o čemž se musíme ještě přesvědčit:

a) Protože nutně platí vztah (10), je $2 - p^2 > 0$ a protože je $2\sqrt{1 - p^2} \geq 0$, je zřejmě $x_1 > 0$.

b) Čísla $a = 2 - p^2, b = 2\sqrt{1 - p^2}$ jsou nezáporná (první je dokonce kladné); rozhodněme, které je větší. Platí věta V: „Jsou-li a, b nezáporná čísla, pak ze vztahu $a \geq b$ plyne $a^2 \geq b^2$ a obráceně.“

Platí

$$(2 - p^2)^2 = 4 - 4p^2 + p^4, \quad (2\sqrt{1 - p^2})^2 = 4 - 4p^2,$$

takže je

$$a^2 - b^2 = p^4.$$

Protože je $p^4 \geq 0$, je $a^2 \geq b^2$ a tím $a \geq b$; je tedy $x_2 \geq 0$.

Nyní provedeme zkoušku, že čísla x_1, x_2 (za předpokladů, o nichž jsme mluvili) jsou kořeny rovnice (1). Stačí, když se omezíme na porovnání čítelů v rovnici

(1'), neboť jsme zjistili, že jmenovatelé v (1') jsou si rovni a různí od nuly. Dokážeme tedy, že platí $2\sqrt{x} = x + p^2$ pro $x = x_1$ a $x = x_2$. Víme však, že je $x_1 > 0, x_2 \geq 0$; proto čísla $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, x_1 + p^2, x_2 + p^2$ jsou nezáporná čísla a pro vzájemné porovnání uži-
jeme věty **V** (ovšem pro případ rovnosti), tj. porov-
náme druhé mocniny těchto čísel, tj. čísla $4x, (x + p^2)^2$.
Pro stručnost píšme

$$x = 2 - p^2 + 2\varepsilon\sqrt{1 - p^2},$$

kde pro $\varepsilon = 1$ dostaneme x_1 a pro $\varepsilon = -1$ dostaneme x_2 . Je:

$$\begin{aligned}(x + p^2)^2 &= (2 + 2\varepsilon\sqrt{1 - p^2})^2 = \\&= 4(2 - p^2 + 2\varepsilon\sqrt{1 - p^2}), \\4x &= 4(2 - p^2 + \varepsilon\sqrt{1 - p^2}),\end{aligned}$$

čímž je zkouška provedena. *Výsledek* je přehledně
patrný z tabulky:

Číslo p je v intervalu	Řešení rovnice (1)
$p \leq -1$	nemá řešení
$-1 < p < 0$	$x_1 = 2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2},$ $x_2 = 2 - p^2 - 2\sqrt{1 - p^2}$
$p = 0$	$x_1 = 4$
$0 < p < 1$	$x_1 = 2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2},$ $x_2 = 2 - p^2 - 2\sqrt{1 - p^2}$
$1 \leq p$	nemá řešení

5. Jsou dány dvě různé přímky $a \parallel b$; na přímce a je dán bod A , na přímce b bod B .

Sestrojte všechny kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$, které mají tyto vlastnosti:

(1) Kružnice k_1 se dotýká přímky a v bodě A , kružnice k_2 se dotýká přímky b v bodě B .

(2) Obě kružnice k_1, k_2 se navzájem dotýkají.

(3) Platí $r_1 = 2r_2$.

Řešení. V dalším podáváme stručné řešení úlohy; zevrubněji provedeme jen poslední možnost označenou [2b] (δ). Viz obr. 24–34.

Vzdálenost přímek $a \parallel b$ označme $v > 0$, dále $AB = d > 0$; je tedy $v \leq d$. Poloroviny aB , bA označme pořadě ϱ, σ a ϱ', σ' poloroviny k nim opačné. Kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$ musí ležet v jedné z polorovin ϱ, ϱ' , kružnice $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ musí ležet v jedné z polorovin σ, σ' . Kružnice k_1, k_2 mají dotyk v bodě T , v němž mají společnou tečnu $t \perp S_1S_2$ (jistě je $S_1 \neq S_2$); bod T leží na přímce S_1S_2 .

Kombinujeme každou z polorovin ϱ, ϱ' s každou z polorovin σ, σ' , přičemž hned vyloučíme kombinaci (ϱ', σ') , neboť poloroviny ϱ', σ' nemají společný bod; dostaneme tři dvojice

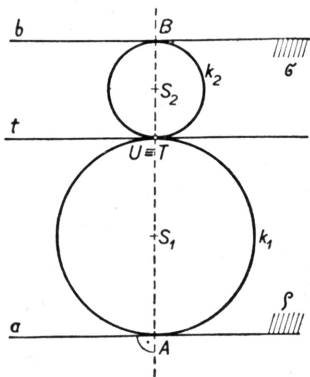
$$(\varrho, \sigma), (\varrho, \sigma'), (\varrho', \sigma). \quad (1)$$

K těmto kombinacím přistupuje ještě požadavek, aby kružnice k_1, k_2 měly dotyk vnější anebo vnitřní.

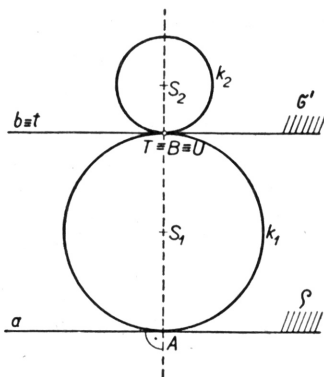
Ještě zavedme toto označení: Nechť značí U , V pořadě vnitřní a vnější střed stejnolehlosti kružnic k_1 , k_2 ; koeficienty těchto stejnolehlostí jsou pořadě $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. V dalším uvidíme, že jeden z bodů U , V lze sestrojit ihned; podstata konstrukce spočívá v určení druhého z obou bodů U , V .

Řešení úlohy rozdělíme na dvě části: [1] Je $v = d$, tj. $AB \perp a$. [2] Je $v < d$, tj. přímky AB , a jsou kosé.

Případ [1], kdy $v = d$, jen načrtne. Body S_1 , S_2 leží nutně na přímce AB , neboť přímky a , b jsou pořadě tečnami kružnic k_1 , k_2 ; tím i bod T leží na přímce AB . Nyní uvažujme kombinace (1) a druh dotyku:

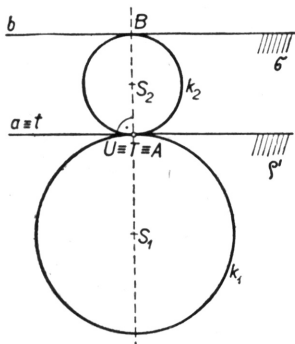


Obr. 24

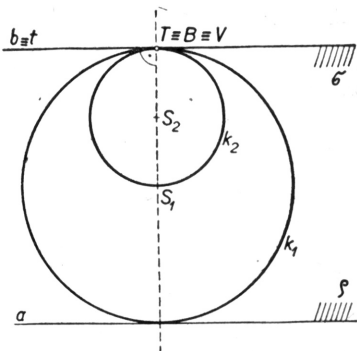


Obr. 25

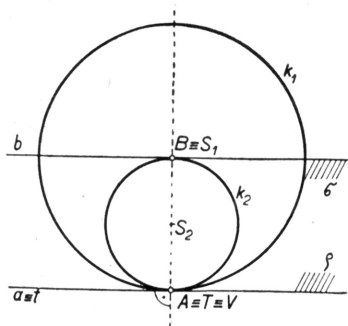
[1a] Necht k_1, k_2 mají vnější dotyk, takže je $T \equiv U$. Pak každá z dvojic (1) vede k řešení. Viz obr. 24, kde $r_2 = \frac{1}{6}v$; dále viz obr. 25, kde $r_2 = \frac{1}{4}v$, a konečně viz obr. 26, kde $r_2 = \frac{1}{2}v$.



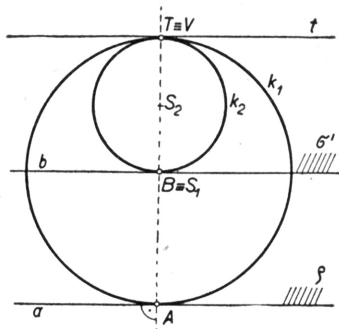
Obr. 26



Obr. 27



Obr. 28



Obr. 29

[1b] Necht k, k_2 mají *dotyk vnitřní*, takže je $T \equiv V$. Tu dvojice (ϱ', σ) nevede k řešení, neboť kružnice k_2 — až na bod T — musí ležet uvnitř kružnice k_1 , která má větší poloměr. Dostáváme: a) řešení z obr. 27, kde $r_2 = \frac{1}{4}v$; b) řešení z obr. 28, kde $r_2 = \frac{1}{2}v$; c) řešení z obr. 29, kde $r_2 = \frac{1}{2}v$.

Případ [2], kdy je $v < d$; označme $s \perp a$ přímkou jdoucí bodem A . Ze stejnolehlosti kružnic k_1, k_2 plynou vztahy

$$VS_2 = \frac{1}{2}VS_1, \quad US_2 = \frac{1}{2}US_1,$$

přičemž bod V leží na prodloužení úsečky S_1S_2 za bod S_2 , kdežto bod U leží uvnitř úsečky S_1S_2 . Nyní rozlišme možnosti podle druhu dotyku kružnic k_1, k_2 .

[2a] *Dotyk vnější*; je $T \equiv U$.

(a) Kombinace (ϱ, σ) — viz obr. 30. Nutně je $AS_1 \uparrow \downarrow BS_2$, přičemž přímka b s bodem B jsou obrazy přímky a s bodem A ve stejnolehlosti (T) o středu T a koeficientu — $\frac{1}{2}$. Odtud konstrukce:

Uvnitř úsečky AB sestrojme bod T tak, že je

$$\frac{BT}{AT} = \frac{1}{2};$$

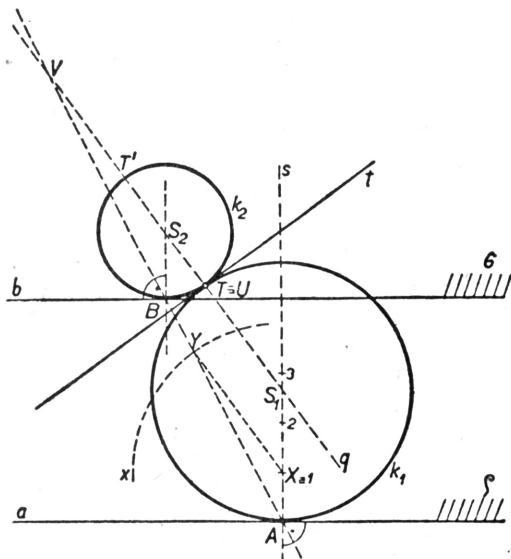
bod S_1 , je společným bodem přímek s, p , kde p je

(β) Kombinace (ϱ, σ') , (ϱ', σ) znázorněné pořadě v obr. 31, 32. Nutně je $AS_1 \uparrow \uparrow BS_2$ a jedná se o stejno-
lehlost (V) o středu V a o koeficientu $\frac{1}{2}$. Buď T'
obraz bodu T ve stejnolehlosti (V) ; odtud plynou
vztahy

111

takže T' je středem úsečky VT , tj. $VT' = 2r_2 = S_1A = r_1$, $VS_1 = 6r_2$. O stranách trojúhelníka AS_1V platí

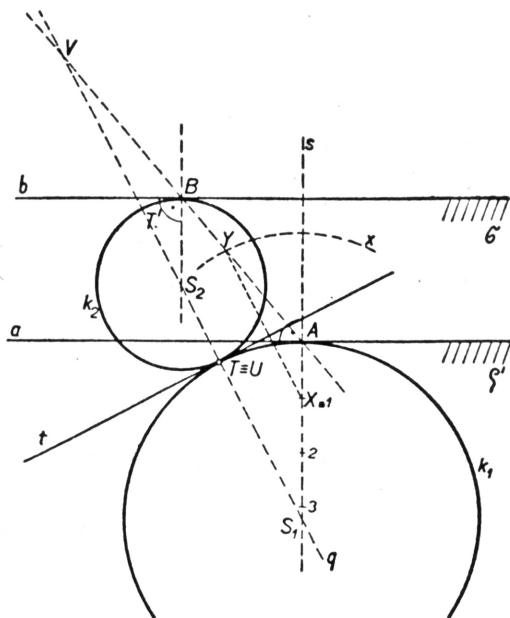
$$\frac{S_1A}{S_1V} = \frac{1}{3}.$$



Obr. 31

Odtud *konstrukce*: Na prodloužení úsečky AB za bod B určíme bod V tak, aby $BV = AB$, takže $VA = 2VB$. Na přímce s zvolíme úsečku AX (viz obr. 31

v polorovině ϱ ; dále obr. 32 v polorovině ϱ'). Podle věty Ssu o určenosti trojúhelníka sestrojme trojúhelník AXY , kde Y leží na polopřímce AB a platí $XY =$



Obr. 32

$= 3AX$; ke konstrukci užijeme kružnice $x \equiv (X, 3AX)$. Bodem V vedme přímku $q \parallel XY$ a označme S_1 společný bod přímek q, s . Ke kružnici

o středu V a o koeficientu $\frac{1}{2}$ sestrojme obraz k_2 kružnice $k_1 \equiv (S_1, S_1A)$; kružnice k_2 prochází zřejmě bodem S_1 . Úloha má jediné řešení.

(δ) Kombinace (ϱ , σ) je znázorněna v obr. 34. *Rozbor.* Nutně je $AS_1 \uparrow \downarrow BS_2$ a vnitřní střed U stejno-
lehlosti (U) kružnic k_1 , k_2 leží uvnitř úsečky AB tak, že platí

$$UB = \frac{1}{2}UA.$$

Protože je $r_1 = 2r_2$ a kružnice k_1 , k_2 mají vnitřní dotyk, leží bod S_1 na kružnici k_2 . Bud' $T' \equiv S_1$ obrazem bodu $T \equiv V$ ve stejnolehlosti (U) s koeficientem $-\frac{1}{2}$, takže je $S_1U = \frac{1}{3}S_1T = \frac{2}{3}r_2$, $S_1A = 2r_2$. Je tedy

$$\frac{S_1U}{S_1A} = \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Bud' X patou kolmice s vedené bodem A k přímce b , takže je $AX = v$. Ve stejnolehlosti o středu A nechť bodu S_1 přísluší bod X a bodu U bod Y polopřímky AB , takže podle (2) je

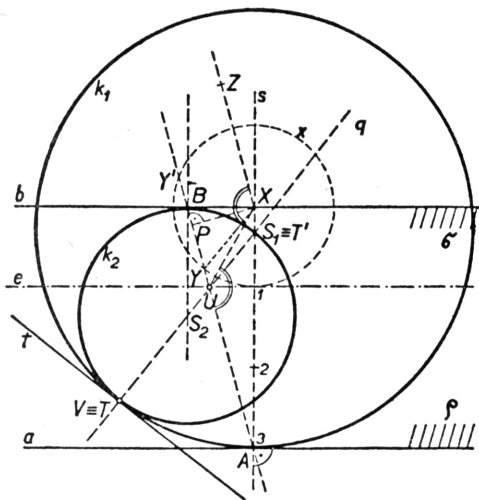
$$\frac{XY}{AX} = \frac{S_1U}{S_1A} = \frac{1}{3} \text{ neboli } XY = \frac{1}{3}AX$$

a tedy

$$XY = \frac{1}{3}v, \quad AX = v. \quad (3)$$

Odtud *konstrukce* (obr. 34): Uvnitř úsečky AB sestrojme úsečku $BU = \frac{1}{2}UA = \frac{1}{3}AB$ a opišme kružnici $x \equiv (X, \frac{1}{3}v)$; označme Y jeden ze společných bodů kružnice x a polopřímky AB (pokud existuje).

Bodem U vedme přímku $q \parallel XY$ a označme S_1 společný bod přímek q, s . Označme k_2 obraz kružnice $k_1 \equiv (S_1, S_1A)$ ve stejnolehlosti (U) s koeficientem $-\frac{1}{2}$. Pak k_1, k_2 je dvojice hledaných kružnic.



Obr. 34

Důkaz. Podle provedené konstrukce platí (3) neboli $S_1U = \frac{1}{3}r_1$ (je $r_1 = S_1A$), $S_2U = \frac{1}{2}S_1U = \frac{1}{6}r_1$, $r_2 = \frac{1}{2}r_1$. Bod U leží uvnitř úsečky S_1S_2 a tedy $S_1S_2 = S_1U + S_2U = \frac{1}{2}r_1$, takže k_2 prochází bodem S_1 . Označme

$T \neq S_1$ společný bod polopřímky S_1S_2 s kružnicí k_1 ; je $S_1T = r_1$ a protože je $S_1S_2 = \frac{1}{2}r_1$, je S_2 středem úsečky TS_1 a kružnice k_1, k_2 mají vskutku v bodě T vnitřní dotyk. Ve stejnolehlosti (U) je b s bodem B obrazem přímky a s bodem A ; proto se kružnice k_2 dotýká přímky b v bodě B .

Diskuse. Nejprve vypočteme velikost výšky $y = XP$ v trojúhelníku ABX , kde $\sphericalangle X = 90^\circ$. Je $\triangle XBP \sim \triangle ABX$ (uu) a tedy

$$\frac{XP}{XB} = \frac{AX}{AB}$$

neboli

$$\frac{y}{\sqrt{d^2 - v^2}} = \frac{v}{d}$$

a tedy

$$y = \frac{v}{d} \sqrt{d^2 - v^2}. \quad (4')$$

Nyní rozhodněme, kdy je přímka AB sečnou, tečnou nebo nesečnou kružnice x , jejíž poloměr je $\frac{1}{3}v$; to nastane, jak známo, jestliže platí pořadě vztah

$$y < \frac{1}{3}v, y = \frac{1}{3}v, y > \frac{1}{3}v. \quad (4)$$

Užitím (4') lze tyto podmínky uvést na tvar

$$d \leq \frac{3}{4}\sqrt{2}v.$$

Ještě dokážeme, že bod S_1 padne skutečně dovnitř polopřímky AX (jinak by kružnice k_1 neexistovala). Označme $e \parallel a$ přímkou vedenou bodem U (přímka e

leží uvnitř pásu rovnoběžek a, b , takže má od přímky b vzdálenost $\frac{1}{3}v$); ta je tečnou kružnice x . Proto bod Y padne dovnitř polopřímky eX , tj. dovnitř polopřímky UB . Buďte $\sphericalangle XUA, \sphericalangle UXZ$ dva shodné střídavé úhly, tj. platí $XZ \updownarrow UA$; bod Y leží zřejmě uvnitř úhlu $\sphericalangle UXZ$. Proto bod S_1 (kde $US_1 \updownarrow XY$) padne dovnitř úhlu $\sphericalangle XUA$ a tedy dovnitř úsečky AX , čímž je důkaz proveden.

Závěr. Je-li $AB \perp a$, lze sestavit šest dvojic kružnic. Není-li $AB \perp a$, existují takové dvojice alespoň čtyři; k nim se řadí další dvě, jedna nebo žádná dvojice podle toho, zda platí první, druhý či třetí vztah (4).

6. Určte všechny reálné čísla x , pro které platí vztah

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq \sqrt{2}. \quad (1)$$

Riešenie. Nech reálné číslo x je řešením nerovnosti (1). Potom musí platit $1-x > 0$, $1+x > 0$, t. j.

$$-1 < x < 1, \quad (2)$$

inak by zlomky na ľavej strane vzťahu (1) nemali zmysel. Upravme ľavú stranu nerovnosti (1). Dostaneme

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}} \geq \sqrt{2}. \quad (1')$$

Vzhľadom na požiadavku (2) je menovateľ na ľavej strane (1') kladné číslo. Pretože na pravej strane (1') je kladné číslo, musí byť číateľ zlomku na ľavej strane (1') tiež kladný, t. j. musí platiť $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} > 0$, čiže $\sqrt{1+x} > \sqrt{1-x}$. Pretože obe čísla v poslednej nerovnosti sú kladné, musí o ich druhých mocninách platiť $1+x > 1-x$, čiže $x > 0$. Ak pripojíme k tomu požiadavku (2), musí o čísle x platiť

$$0 < x < 1. \quad (3)$$

Znásobme teraz obe strany nerovnosti (1') číslom $\sqrt{1-x}$. $\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} > 0$; dostávame

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \geq \sqrt{2}\sqrt{1-x^2}. \quad (4)$$

Vzhľadom na požiadavky (3) sú obe strany tejto nerovnosti kladné čísla; preto po umocnení oboch strán vzťahu (4) na druhú dostaneme postupne

$$1+x+1-x-2\sqrt{1-x^2} \geq 2(1-x^2), \\ x^2 \geq \sqrt{1-x^2}.$$

Obe strany tejto nerovnosti sú vzhľadom na (3) kladné čísla. Umocnením na druhú postupne dostávame

$$x^4 \geq 1-x^2, \\ x^4 + x^2 - 1 \geq 0. \quad (5)$$

Trojčlen $y^2 + y - 1$ možno rozložiť na súčin

$$[y + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)][y - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)];$$

nerovnosť (5) možno teda napísať v tvare

$$[x^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)][x^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)] \geq 0.$$

Prvý činiteľ ľavej strany je kladný; preto druhý činiteľ musí byť nezáporný, t. j. platí nevyhnutne

$$x^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \geq 0. \quad (6)$$

Pretože je $\sqrt{5} - 1 > 0$, je číslo

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)} \quad (7')$$

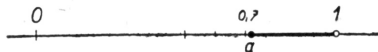
kladné. Nerovnosť (6) možno písať v tvare

$$(x + a)(x - a) \geq 0. \quad (7)$$

Vzhľadom na požiadavku (3) je prvý činiteľ na ľavej strane vzťahu (7) kladný; preto musí byť $x - a \geq 0$, čiže $x \geq a$. Ak pripojíme k tomu požiadavku (3), dostaneme, že o čísle x nevyhnutne platí

$$a \leq x < 1, \quad (8)$$

kde číslo a je dané vzťahom (7').



Obr. 35

Ešte ide o to, či je skutočne $a < 1$, t. j. či je $a^2 < 1$. Tu platí $a^2 - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 3) < 0$, t. j. skutočne je $a^2 < 1$ a teda $a < 1$. Interval (8) teda existuje.

Číslo x zo vzťahu (8) splňuje požiadavky (2), (3). Pri našich úpravách sme všade prihliadali k ekvivalencii; preto všetky čísla x z intervalu (8) sú riešenia nerovnosti (1) a neexistuje žiadne ďalšie (pozri obr. 35).

1. V oboru reálných čísel řešte nerovnost

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leq 1; \quad (1)$$

dále určete všechna x , pro která nastává rovnost.

Řešení. Nechť je x řešením nerovnosti (1); nutně je

$$x \neq 0. \quad (2)$$

Aby odmocnina $\sqrt{1 - 2x^2}$ měla smysl, je dále nutně $1 - 2x^2 \geq 0$ neboli

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ kde } \frac{\sqrt{2}}{2} < 1; \quad (3)$$

pro tato x má odmocnina skutečně smysl.

Platí tyto ekvivalentní úpravy nerovnosti (1):

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} - 1 &\leq 0, \\ \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} &\leq 0, \\ \frac{\sqrt{1 - 2x^2} + x - 1}{x} &\geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Jsou dvě možnosti: [1] Je $x > 0$; [2] je $x < 0$.

Případ [1]. Nechť je [viz (3)].

$$0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (5)$$

Ze (4) plyne, že nutně je

$$\sqrt{1 - 2x^2} \geq 1 - x.$$

Poněvadž je $1 - x \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, plyne odtud postupně

$$\begin{aligned} 1 - 2x^2 &\geq 1 - 2x + x^2, \\ 0 &\geq x(3x - 2), \\ 0 &\geq 3x - 2, \\ \frac{2}{3} &\geq x. \end{aligned} \quad (6)$$

Protože $\frac{1}{2}\sqrt{2} > 0,7 > \frac{2}{3}$, plyne z (5), (6), že o čísle x nutně platí

$$0 < x \leq \frac{2}{3}. \quad (7)$$

V tomto případě nastane v (1) rovnost pro $x = \frac{2}{3}$.

Případ [2]. Nechť je [viz (3)]

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 0; \quad (8)$$

potom ze (4) plyne

$$\sqrt{1 - 2x^2} \leq 1 - x,$$

kde $1 - x > 0$. Odtud dostaneme postupně

$$\begin{aligned} 1 - 2x^2 &\leq 1 - 2x + x^2 \\ 0 &\leq x(3x - 2), \\ 0 &\geq 3x - 2 \\ \frac{2}{3} &\geq x. \end{aligned}$$

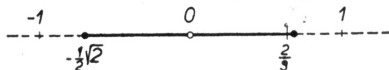
Toto je splněno pro každé x z (8). V tomto případě [2] nemůže v (1) nastat rovnost.

Čísla x daná vztahem (7) nebo (8) jsou skutečně řešením dané nerovnosti.

Závěr (obr. 36). Všechna řešení x nerovnosti (1) jsou dána intervaly

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 0, \quad 0 < x \leq \frac{2}{3}.$$

Rovnost v (1) nastane právě tehdy, je-li $x = \frac{2}{3}$.



Obr. 36

2. Do daného obdélníka $ABCD$, kde $AB > BC$, je vepsán osmiúhelník $JKLMNO$, jak je naznačeno na obrázku 37; osmiúhelník vznikl ze dvou obdélníků $JKNO$, $JMNO$ o společné úhlopříčce JN , přičemž bod J je středem úsečky AD a N středem úsečky BC .

Vypočítejte obsah osmiúhelníka pomocí rozměrů $a = AB$, $b = BC$ daného obdélníka.

Řešení. Konstrukce osmiúhelníka je patrná z obr. 37. Při označení z obr. 37 položíme $LT = x$, $LS = y$, $KT = t$. Obsah p obdélníka $JKNO$ je $p = JN \cdot JD$ neboli

$$p = \frac{1}{2}ab.$$

Obsah r kosočtverce $JLNP$ je

$$r = ay,$$

takže obsah s osmiúhelníka je $s = 2p - r$ neboli

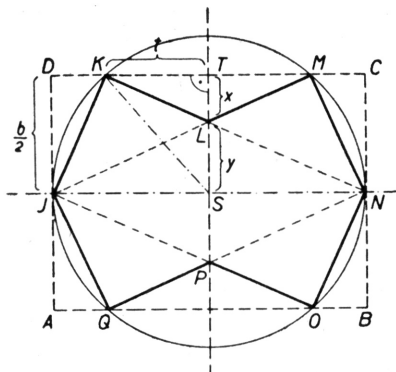
$$s = a(b - y). \quad (1)$$

Vypočítáme y . V trojúhelníku SKT je $\sphericalangle T = 90^\circ$, $SK = \frac{1}{2}a$; podle Pythagorovy věty dostaneme

$$t^2 = SK^2 - ST^2$$

neboli

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}. \quad (2)$$



Obr. 37

Ze stejnosti o středu L trojúhelníků LNS , LKT plyne

$$\frac{TL}{TK} = \frac{SL}{SN}$$

neboli

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{\frac{1}{2}a}.$$

Po dosazení ze (2) a snadné úpravě obdržíme

$$x = \frac{2yt}{a} = \frac{y\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

neboli

$$x = \frac{y\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (3)$$

Vedle toho platí $TL + LS = \frac{1}{2}b$ neboli

$$x + y = \frac{b}{2};$$

dosadíme-li sem ze vztahu (3), dostáváme postupně

$$y \left(1 + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) = \frac{b}{2},$$

$$y \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{b}{2},$$

$$y = \frac{ab}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})}.$$

Po dosazení do (1) dostaneme

$$s = a \left(b - \frac{ab}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})} \right)$$

neboli

$$s = \frac{ab(a + 2\sqrt{a^2 - b^2})}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})},$$

což lze popřípadě násobením $a - \sqrt{a^2 - b^2}$ v čitateli i jmenovateli upravit na tvar

$$s = \frac{a(2b^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - b^2})}{2b}.$$

Tím je řešení provedeno.

3. Dokážte, že pre každú trojicu kladných čísel a, b, c platí vzťah

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9. \quad (1)$$

Nájdite všetky trojice, pre ktoré nastáva rovnosť.

Riešenie. Daná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 9 \geq 0 ;$$

jej ľavú stranu označme L . Postupne platí:

$$\begin{aligned} L &= (a + b + c) \cdot \frac{bc + ca + ab}{abc} - 9 = \\ &= \frac{a^2c + a^2b + b^2c + ab^2 + bc^2 + ac^2 + 3abc - 9abc}{abc} = \\ &= \frac{a^2c + ac^2 + b^2a + ba^2 + c^2b + cb^2 - 6abc}{abc} = \\ &= \frac{a^2c - 2abc + b^2c + b^2a - 2abc + ac^2 + c^2b - 2abc + ba^2}{abc} = \\ &= \frac{c(a^2 - 2ab + b^2) + a(b^2 - 2bc + c^2) + b(c^2 - 2ac + a^2)}{abc} = \\ &= \frac{c(a - b)^2 + a(b - c)^2 + b(c - a)^2}{abc}. \end{aligned}$$

Je teda

$$L = \frac{a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2}{abc}, \quad (2)$$

kde a, b, c sú kladné čísla. Menovateľ abc zlomku je kladné číslo. Čitateľ zlomku je súčet troch nezáporných čísel, lebo napr. $a(b - c)^2$ je súčin čísla $a > 0$

a čísla $(b - c)^2 \geq 0$. Preto je čitateľ nezáporný a tým aj zlomok (2). Tým je platnosť vzťahu (1) dokázaná.

Rovnosť vo vzťahu (1) nastane práve vtedy, keď sú tri nezáporné sčítance v čitateli zlomku (2) všetky rovné nule, t. j. keď platí

$$a(b - c)^2 = 0, \quad b(c - a)^2 = 0, \quad c(a - b)^2 = 0.$$

Pretože je $a > 0, b > 0, c > 0$, je nevyhnutne

$$b - c = 0, \quad c - a = 0, \quad a - b = 0,$$

čiže

$$a = b = c.$$

Rovnosť vo vzťahu (1) skutočne nastane, ak trojica má tvar (a, a, a) , kde a je ľubovoľné kladné číslo. Tým je riešenie ukončené.

4. Daná je úsečka AB veľkosti 1. Označme P obsah spoločnej časti dvoch kruhov opísaných okolo bodov A, B s polomerom $r = 1$.

Vyjadrite obsah P v percentách (s presnosťou na jednotky) vzhľadom na obsah jedného z uvažovaných kruhov ako základ.

Riešenie (pozri obr. 38). Označme X, Y priesečníky kružníc $(A, 1), (B, 1)$, takže ABX je rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 1. Jeho obsah je

$$t = \frac{1}{4}\sqrt{3}. \quad (1)$$

Preto je $\alpha \equiv \angle XAY = 120^\circ = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ$. Obsah p úseče s tetivou XY a oblúkom $XB Y$ je (obsah q jedného z oboch kruhov je $q = \pi$)

$$p = \frac{1}{3}\pi - t,$$

lebo trojuholníky ABX , AXY majú rovnaké obsahy. Po dosadení zo vzťahu (1) máme

$$p = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}.$$

Obsah P spoločnej časti oboch kruhov je $2p$, čiže

$$P = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Pomer $\frac{P}{q}$ násobený číslom 100 udáva hľadaný počet x percent, t. j. platí

$$x = 100\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) : \pi,$$

čiže

$$x = 100\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right);$$

pritom je

$$\frac{2}{3} = 0,\bar{6}; \quad 1,732 < \sqrt{3} < 1,733; \quad 3,141 < \pi < 3,142.$$

Číslo $y = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ máme určiť na dve desatinné miesta presne. Platí

$$a = 0,666 - \frac{1,733}{2 \cdot 3,141} < y < 0,667 - \frac{1,732}{2 \cdot 3,142} = b.$$

Vypočítame približné hodnoty oboch zlomkov z predošlých výrazov:

$$\begin{array}{r} 1,733 : 6,282 < 0,276 \\ \hline 1,2564 \\ \hline 47660 \\ 43974 \\ \hline 36860 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1732 : 6284 > 0,275 \\ \hline 12568 \\ \hline 47520 \\ 43988 \\ \hline 35320 \end{array}$$

Platí teda

$$\begin{aligned} 0,666 - 0,276 &< a, \\ b &< 0,667 - 0,275, \end{aligned}$$

čiže

$$\begin{aligned} 0,390 &< a, \\ b &< 0,392. \end{aligned}$$

Je teda

$$0,390 < a < y < b < 0,392;$$

čiže

$$0,390 < y < 0,392$$

a teda

$$39,0 < x < 39,2.$$

Odpoveď. Obsah P je asi 39 % obsahu kruhu s polomerom $r = 1$.

6. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE C

1. Máme v zásobě litrové láhve 14%ního, 11%ního a 9%ního roztoku kyseliny octové (dostatečný počet od každého druhu).

Kolik plných lahví každého z těchto roztoků bude třeba smísit, abychom dostali 30 litrů 12%ního roztoku, přičemž máme použít roztoků všech tří druhů. Udejte všechny možnosti.

Řešení. Předpokládejme, že úloha má řešení a že přirozená čísla x, y, z udávají pořadě počet lahví roztoku 14%ního, 11%ního a 9%ního, jichž při mísení užijeme. Láhve jsou litrové a obsahují tedy celkem $x + y + z$ litrů roztoku; tento součet je podle požadavku úlohy roven 30 litrům. Platí tedy

$$x + y + z = 30. \quad (1'')$$

Láhve s prvním roztokem obsahují $\frac{14}{100}x$ litrů kyseliny octové,

láhve s druhým roztokem obsahují $\frac{11}{100}y$ litrů kyseliny octové,

láhve s třetím roztokem obsahují $\frac{9}{100}z$ litrů kyseliny octové.

Vzniklá směs obsahuje celkem $\frac{12}{100} \cdot 30$ litrů kyseliny octové.

Musí platit

$$\frac{14}{100}x + \frac{11}{100}y + \frac{9}{100}z = \frac{12}{100} \cdot 30 \quad (2'')$$

neboli po znásobení obou stran této rovnice číslem 100

$$14x + 11y + 9z = 360.$$

Dostáváme dvě rovnice

$$x + y + z = 30, \quad (1)$$

$$14x + 11y + 9z = 360, \quad (2)$$

které musí přirozená čísla x, y, z splňovat. Nyní je naším úkolem najít všechny trojice x, y, z přirozených čísel, z nichž každé musí být menší než 30; dokonce každé z nich musí být menší než 29.

Vylučme z rovnic (1), (2) číslo z [obě strany rovnice (1) znásobme číslem -9 a přičtíme je k příslušným stranám rovnice (2)]; dostaneme

$$5x + 2y = 90$$

neboli

$$y = 45 - \frac{5}{2}x. \quad (3)$$

Odtud plyne, že x musí být sudé; položíme proto

$$x = 2n,$$

kde n je přirozené číslo. Ze (3) a (1) po dosazení $x = 2n$ dostáváme celkem

$$x = 2n, \quad (1')$$

$$y = 5(9 - n), \quad (2')$$

$$z = 3(n - 5). \quad (3')$$

Z (2') vidíme, že $9 - n$ musí být přirozené číslo, tj. $9 - n > 0$ (jinak by y nebylo kladné číslo) a dále $9 - n < 6$ (jinak by y bylo větší než 29). Z obou nerovností plyne

$$3 < n < 9. \quad (4)$$

Ze (3') vidíme, že musí být $n - 5 > 0$ a $n - 5 < 10$ (jinak by z bylo větší než 29). Z obou nerovností dostáváme

$$5 < n < 15. \quad (5)$$

Spojením (4) a (5) obdržíme požadavek, který nutně splňuje číslo n :

$$5 < n < 9.$$

V úvahu tedy přicházejí jen čísla 6, 7, 8. Dosazujeme za n do (1'), (2'), (3') postupně čísla 6, 7, 8. Výsledky jsou v této tabulce:

n	6	7	8
x	12	14	16
y	15	10	5
z	3	6	9

Trojice čísel x, y, z z této tabulky skutečně splňuje rovnice (1), (2), jak se přesvědčíme dosazením; proto splňuje i výchozí rovnice (1''), (2''), neboť (1''), (1) je táž rovnice a (2'') vznikne z (2) násobením obou jejích stran číslem $\frac{1}{100}$.

Odpoveď. Požadovanou smes obdržíme tak, že vezmeme poradě

12, 15, 3 lahvi

nebo

14, 10, 6 lahvi

nebo

16, 5, 9 lahvi

jednotlivých druhů.

2. Daný je lichobežník $ABCD$, v ktorom je $AB \parallel CD$, $AB > CD$.

Aký geometrický útvar vyplnia všetky body X roviny lichobežníka, o ktorých platia vzťahy

$$AX < BX < CX < DX. \quad (1)$$

Urobte diskusiu vzhľadom na veľkosti uhlov $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

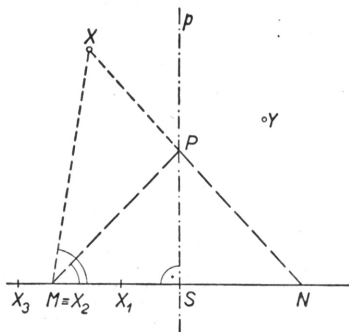
Riešenie. Najprv dokážeme dve pomocné vety U , V .

Veta U : „V rovine nech je daná úsečka MN so stredom S a s osou p . Množinou všetkých bodov v rovine, ktoré majú od bodu M menšiu vzdialenosť než od bodu N , je vnútro polroviny pM .“

Dôkaz (obr. 39). Toto tvrdenie sa ľahko dokáže pre body priamky MN (všetky body požadovanej vlastnosti na tejto priamke ležia vnútri polpriamky

SM ; pozri body X_1, X_2, X_3 v obr. 39). Nech teraz X je bod vnútri polroviny pM , ktorý neleží na priamke MN . Potom priamka p oddeľuje body N, X a vnútri úsečky NX leží bod P priamky p . Úsečky PM, PN sú súmerne združené podľa p a teda

$$MP = NP. \quad (2)$$



Obr. 39

O stranách trojuholníka MPX platí

$$MX < MP + PX$$

(súčet dvoch strán je väčší než tretia strana). Po dosadení z (2) dostaneme

$$MX < NP + PX,$$

čiže

$$MX < NX. \quad (3)$$

Ak je Y bod vnútri polroviny pN , potom sa rovnako dokáže vzťah

$$MY > NY. \quad (4)$$

Pre bod P osi p platí

$$MP = NP. \quad (5)$$

Vzťahmi (3), (4), (5) je veta **U** dokázaná, lebo sme tým vyčerpali všetky body roviny.

Ďalej dokážeme vetu **V** (pozri obr. 41—43): „Nech $ABCD$ je lichobežník, v ktorom AB je väčšia základňa, P_1, P_3 stredy a p_1, p_3 osi základní. Potom platí:

a) $p_1 \parallel p_3$ (pozri učebnicu Geometrie pro 7. ročník, vydanie z r. 1955, příklad 7, str. 134).

b) Ak o uhloch α, β pri vrcholech A, B lichobežníka platí:

[1] $\alpha = \beta$, potom je $p_1 \equiv p_3$;

[2] $\alpha < \beta$, potom bod P_3 a s ním priamka p_3 leží vnútri polroviny p_1B ;

[3] $\alpha > \beta$, potom bod P_3 a s ním priamka p_3 leží vnútri polroviny p_1A .

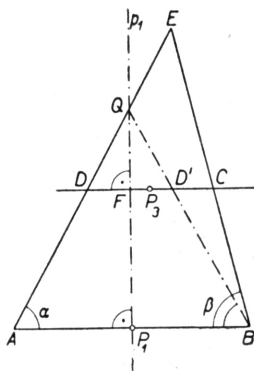
Dôkaz. Tvrdenie [1] vyplýva zo súmernosti lichobežníka $ABCD$ podľa p_1 .

Dôkaz tvrdenia [2] (pozri obr. 40). V trojuholníku ABE platí

$$BE < AE, \quad (6)$$

lebo je $\alpha < \beta$ (proti väčšiemu uhlu trojuholníka ABE leží väčšia strana). Zo vzťahu (6) vyplýva podľa vety **U**,

že bod E padne dovnútra polroviny p_1B ; preto vnútri úsečky AE leží bod Q priamky p_1 . Ak je D bodom úsečky QE , je tvrdenie [2] samozrejmé, lebo celá úsečka DC leží v polrovine p_1B . Nech D leží vnútri



Obr. 40

úsečky AQ . Označme $D' \neq D$ jeho obraz v súmernosti s osou p_1 a F stred úsečky DD' (ten leží na p_1). Polpriamka BQ leží v uhle β a teda D' vnútri úsečky FC . Je teda

$$DD' < DC$$

a

$$\frac{1}{2}DD' < \frac{1}{2}DC,$$

t. j.

$$DF < DP_3.$$

Z toho vyplýva, že P_3 leží vnútri úsečky FC a tým vnútri polroviny p_1B a s ním aj priamka $p_3 \parallel p_1$. Tým je tvrdenie [2] dokázané.

Dôkaz tvrdenia [3] sa prevedie na dôkaz tvrdenia [2] pomocou súmernosti podľa osi p_1 .

Poznámka. Dôkaz tvrdenia [2] možno urobiť použitím faktu, že bod P_3 leží vnútri úsečky P_1E , ktorá s výnimkou bodu P_1 leží celá vnútri polroviny p_1B . To predpokladá znalosť vety o podobnosti trojuholníkov AP_1E , DP_3E a BP_1E , CP_3E .

Riešenie danej úlohy (pozri obr. 41, 42, 43). (Pre jednoduchosť predpokladajme, že vo vzťahoch (1), ktoré máme skúmať, sa jedná o vzdialenosti bodov, takže pripúšťame napr. aj možnosť $AX = 0$, t. j. $A \equiv X$ atď.) Označme p_1, p_2, p_3 (v tomto poradí) osi strán AB, BC, CD lichobežníka $ABCD$.

Bod X , o ktorom podľa (1) platí $AX < BX$, leží podľa vety **U** vnútri polroviny p_1A ;

bod X , o ktorom platí $BX < CX$, leží vnútri polroviny p_2B ;

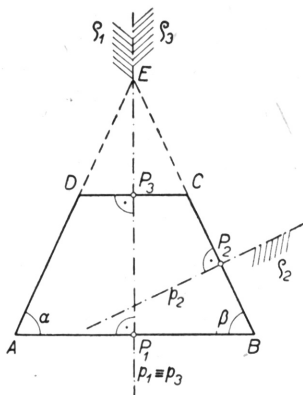
bod X , o ktorom platí $CX < DX$, leží vnútri polroviny p_3C .

Ide o to, či vnútrajšky polrovín p_1A, p_2B, p_3C majú spoločné body. O tom rozhodneme podľa vety **V**.

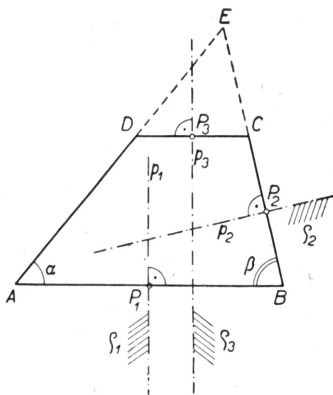
Prípád [1]. Nech je $\alpha = \beta$ (obr. 41). Potom je $p_1 \equiv p_3$ a p_1A, p_3C sú opačné polroviny, ktoré nemajú

žiadny vnútorný bod spoločný. Bod X , o ktorom platí (1), teda neexistuje.

Prípad [2]. Nech je $\alpha < \beta$ (obr. 42). Priamka p_3 a s ňou celá polrovina p_3C leží vnútri polroviny p_1B , takže polroviny p_1A , p_3C nemajú žiadny spoločný bod. Preto bod X s vlastnosťami (1) neexistuje.



Obr. 41

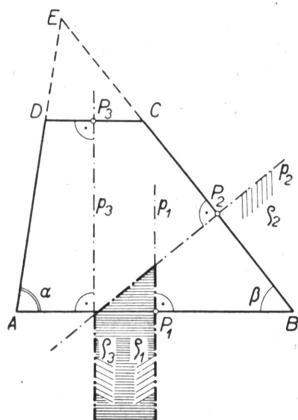


Obr. 42

Prípad [3]. Nech je $\alpha > \beta$ (pozri obr. 43). Priamka p_3 leží vnútri polroviny p_1A a vnútrajšky polrovín p_1A , p_3C majú spoločné tie body, ktoré ležia vnútri pásu rovnobežiek p_1 , p_3 . Priamky BA , BC sú rôznobežné; preto sú rôznobežné aj priamky $p_1 \perp BA$, $p_2 \perp BC$ [pozri Geometrii pro 7. ročník, vydanie z r. 1955, veta 6, str. 134] (a teda aj priamky p_2 , p_3

sú rôznobežné). Vnútrajšok polroviny p_2B má s vnútrajškom pásu rovnobežiek p_1, p_3 spoločné body, ktoré sú v obrázku 43 naznačené šrafovaním.

Tým je úloha rozriešená.



Obr. 43

Záver. Body požadovanej vlastnosti existujú jedine v prípade, keď je $\alpha > \beta$.

3. Určte všetky reálne čísla x , pre ktoré je zlomok

$$Z = \frac{12x^2 - 36x + 27}{8x^2 - 18}$$

väčší než číslo $\frac{3}{2}$.

Riešenie. Daný zlomok Z upravujeme postupne takto:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{12x^2 - 36x + 27}{8x^2 - 18} = \frac{3(4x^2 - 12x + 9)}{2(4x^2 - 9)} = \\ &= \frac{3(2x - 3)^2}{2(2x + 3)(2x - 3)} = \frac{3(2x - 3)}{2(2x + 3)} = \frac{3(2x + 3 - 6)}{2(2x + 3)} = \\ &= \frac{3(2x + 3)}{2(2x + 3)} - \frac{3 \cdot 6}{2(2x + 3)} = \frac{3}{2} - \frac{9}{2x + 3} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{9}{2}}{x + \frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Aby platilo $Z > \frac{3}{2}$, musí byť

$$- \frac{\frac{9}{2}}{x + \frac{3}{2}} \quad (1)$$

kladné číslo; to znamená, že číslo $x + \frac{3}{2}$ musí byť záporné, t. j. $x < -\frac{3}{2}$.

Pre $x < -\frac{3}{2}$ je každý z výrazov $2x + 3$, $2x - 3$ rôzny od nuly (prvý výraz sa rovná nule pre $x = -\frac{3}{2}$, druhý pre $x = \frac{3}{2}$) a zlomok Z má zmysel. Pre tieto x je zlomok (1) kladný a teda $Z > \frac{3}{2}$.

Tým je úloha rozriešená.

Iné riešenie. Podľa predošlého riešenia je

$$Z = \frac{3(2x - 3)}{2(2x + 3)},$$

čiže

$$Z = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x - 3}{2x + 3}. \quad (2)$$

Požadujeme, aby platilo $Z > \frac{3}{2}$. O zlomku

$$z = \frac{2x - 3}{2x + 3} \quad (3)$$

musí teda platiť, že je väčší než 1. Obrátene, ak bude $z > 1$, bude tiež $Z > \frac{3}{2}$. Určíme preto všetky čísla x také, že pre ne je $z > 1$. Vzhľadom na to, že čitateľ aj menovateľ zlomku (3) musia byť súčasne kladné čísla alebo súčasne záporné čísla, rozdeľme úlohu na dve časti:

Časť [1]. Nech sú $2x - 3$, $2x + 3$ kladné čísla. Ak má byť $z > 1$, musí byť $2x - 3 > 2x + 3$. To však nie je možné splniť, lebo číslo $2x - 3$ je o 6 menšie než $2x + 3$.

Časť [2]. Nech $2x - 3$, $2x + 3$ sú záporné čísla. Číslo $2x + 3$, čiže číslo $3 + 2x$ je záporné pre všetky čísla $2x < -3$, t. j. pre $x < -\frac{3}{2}$ (to ľahko nahliadneme, keď na číselnej osi znázorníme číslo 3). Pre tieto čísla je záporný nielen výraz $2x + 3$, ale aj výraz $2x - 3 = 2x + (-3)$, ktorý je totiž potom súčtom záporných čísel $2x$, -3 .

Ešte ide o to, či pre

$$x < -\frac{3}{2}$$

je zlomok z väčší než číslo 1. Rozšírme zlomok (3) číslom -1 . V zlomku

$$z = \frac{3 - 2x}{-3 - 2x}$$

sú potom čitateľ aj menovateľ kladné čísla. Aby bolo $z > 1$, musí byť čitateľ väčší než menovateľ a to sku-

točne pre $x < -\frac{3}{2}$ je, lebo rozdiel

$$3 - 2x - (-3 - 2x)$$

sa rovná číslu 6, ako sa ľahko presvedčíme.

Záver. Zlomok Z je väčší než $\frac{3}{2}$ pre všetky čísla $x < -\frac{3}{2}$ a žiadne iné.

4. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a v ní stredový úhel $\omega \equiv ASB$ (dutý alebo priamy), pričom A i B jsou body kružnice k .

Na její tečně t sestrojené v bodě B najděte bod X tak, aby druhý průsečík Y přímky AX s kružnicí k byl hlavním vrcholem rovnoramenného trojúhelníka YBX .

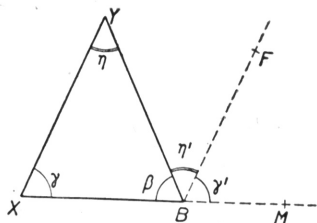
Rozhodněte o řešitelnosti úlohy vzhledem k velikosti úhlu ω .

Řešení. Užijme této věty **P** (viz označení v obr. 44): V rovnoramenném trojúhelníku BXY o hlavním vrcholu Y vedme polopřímku $BF \uparrow\uparrow XY$. Potom je $\eta' = \eta$, $\gamma' = \gamma$. Obráceně, jestliže v polorovině MBY , kde bod M leží na prodloužení úsečky XB za bod B , sestrojíme úhel $\gamma' \equiv \sphericalangle MBF = \gamma$, potom je $XY \parallel BF$. (Důkaz je snadný.)

Jsou dvě možnosti: a) Je $0 < \omega < 180^\circ$; b) $\omega = 180^\circ$ (řešení jen naznačíme).

Nechť je ω dutý úhel (obr. 45 až 47): Druhý středový úhel ASB označme ω' ; platí

$$\omega + \omega' = 360^\circ, \quad \omega < \omega'.$$



Obr. 44

Příslušné obvodové a dále úsekové úhly při vrcholu B označme φ , φ' a ε , ε' ; platí

$$\varphi = \varepsilon = \frac{1}{2}\omega, \quad \varphi' = \varepsilon' = \frac{1}{2}\omega', \quad \varepsilon < 90^\circ < \varepsilon'.$$

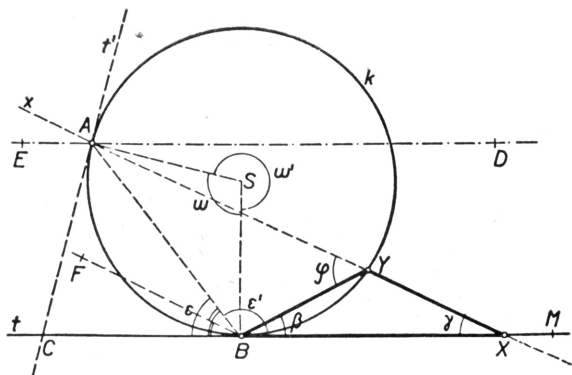
Tečny t , t' v bodech B , A kružnice k mají společný bod C , přičemž je $\varepsilon = \sphericalangle CBA$; BC , BM jsou opačné polopřímky. Dále je $DAE \uparrow \uparrow MBC$.

Nyní jsou možné dvě situace: Bod X padne dovnitř: [1] polopřímky BM ; [2] polopřímky BC (přitom musí být X různý od bodů B , C ; pro $X \equiv C$ je přímka $AX \equiv t'$ a nemá s kružnicí k další společný bod).

Případ [1] (viz obr. 45). V rovnoramenném trojúhelníku YBX je φ vnějším úhlem, neboť Y leží uvnitř úsečky AX ; je tedy

$$\beta = \gamma = \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Osa BF úhlu ε je tedy podle věty **P** rovnoběžná s $x \equiv AYX$. Odtud *konstrukce* (viz obr. 45):

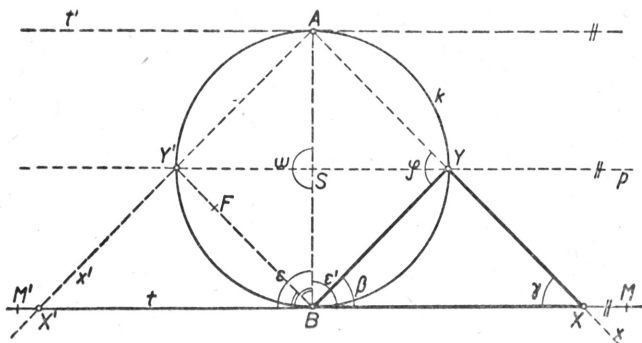


Obr. 45

Bodem A vedme $x \parallel BF$, kde BF je osa úhlu ε . Označme pořadě $X, Y \not\equiv A$ společné body přímky x s t, k ; pak X vyhovuje požadavkům úlohy.

Důkaz a diskuse. Je $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAD$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Protože BF je osou prvního z těchto úhlů, leží v přímce x osa druhého úhlu

✧ *BAD*; z toho plyne, že x, t jsou různoběžky a bod X existuje, takže i bod $Y \not\equiv A$ existuje. Podle konstrukce je $\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon$, $\beta = \varphi - \gamma$ (podle věty o vnějším úhlu trojúhelníka) a tedy $\frac{1}{2}\varepsilon = \gamma$.



Obr. 46

Výsledek [1]. Na polopřímce BM leží právě jeden požadovaný bod.

Poznámka. K témuž výsledku dospějeme i v tom případě, že $\omega = 180^\circ$ (viz obr. 46); ze souměrnosti kružnice k a přímky t podle osy SB plyne, že úloha má v tomto případě dvě řešení. Bod Y leží na průměru $p \parallel t$ vedeném bodem S a bod Y' je na kružnici k k bodu Y protilehlý.

Případ [2] (viz obr. 47, 48). Vyloučili jsme možnost,

že by platilo $X \equiv C$ (pak přímka AX nemá s k další společný bod a je nutně $\beta = \gamma = \sphericalangle BAC = 60^\circ$, $\omega = 120^\circ$).

Jsou dvě možné situace: a) Viz obr. 47, kde X je vnitřní bod úsečky BC a Y vnitřní bod menšího oblouku AB kružnice k ; v hledaném rovnoramenném trojúhelníku YBX platí

$$\beta = \gamma = \frac{1}{2}\varphi' = \frac{1}{2}\varepsilon'. \quad (1)$$

Je-li BF' osou úhlu ε' , je $\sphericalangle MBF' = \frac{1}{2}\varepsilon'$ a podle věty P je

$$XA \parallel BF'. \quad (2)$$

b) Viz obr. 48, kde X je na prodloužení úsečky BC za bod C a bod Y pak nutně leží na větším oblouku AB kružnice k . Označme φ' úhel vedlejší k obvodovému úhlu $\varphi \equiv \sphericalangle AYB$; pak je $\varphi' = \varepsilon'$, kde $\varepsilon' \equiv \sphericalangle MBA$. Platí stejně jako v předchozí situaci vztahy (1) a o ose BF' úhlu ε' platí

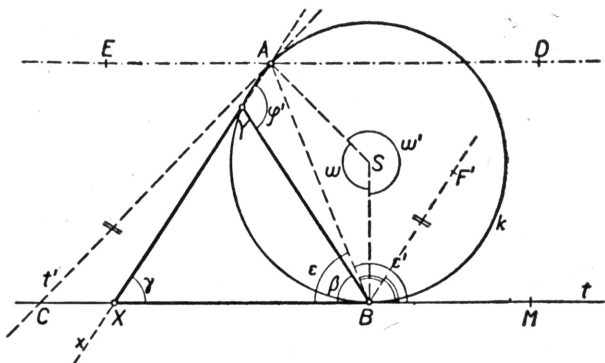
$$XA \parallel BF'. \quad (3)$$

Ze vztahů (2), (3) plyne táž *konstrukce*: Bodem A vedme přímku $x \parallel BF'$, kde BF' je osou úsekového úhlu ε' ; nechť přímka x má s přímkou t společný bod $X \neq C$, s kružnicí k společný bod $Y \neq A$. Potom bod X vyhovuje požadavkům úlohy.

Důkaz a diskuse (obr. 47, 48). Je $\sphericalangle BAE = \sphericalangle MBA \equiv \varepsilon'$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami

$BM \updownarrow AE$); jejich osy leží pořadě v přímkách x , BF' . Odtud plyne, že bod X padne dovnitř polopřímky BC . Je $\sphericalangle BAC = \varepsilon$, $\sphericalangle BAX = \frac{1}{2}\varepsilon'$. Jsou tři možnosti:

a) Je $\varepsilon > \frac{1}{2}\varepsilon'$ neboli postupně $\omega > \frac{1}{2}\omega'$,



Obr. 47

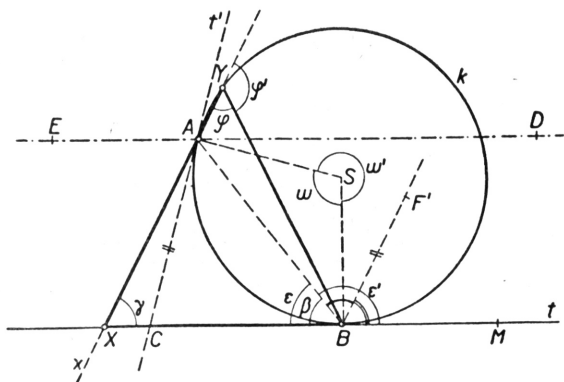
$\omega > \frac{1}{2}(360^\circ - \omega)$, $\omega > 120^\circ$; potom vskutku X leží mezi body B , C a Y na menším oblouku AB (obr. 47). Platí $\beta = \varphi' - \gamma$ (věta o vnějším úhlu trojúhelníka YBX) neboli $\beta = \varepsilon' - \frac{1}{2}\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon' = \gamma$.

β) Je $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon'$ a tedy $\omega = 120^\circ$; pak je $Y \equiv A$, což jsme vyloučili; trojúhelník ABC je rovnostranný.

γ) Je $\varepsilon < \frac{1}{2}\varepsilon'$ neboli $\omega < 120^\circ$ (viz obr. 48); potom leží přímka x v úhlu $\sphericalangle CAE$ i v úhlu k němu vrcho-

lovém. Bod X padne na prodloužení úsečky BC za bod C a bod Y na větší oblouk $\widehat{AB}$ kružnice k .

Je $\beta = \varphi' - \gamma$ (viz označení z obr. 48) neboli $\beta = \varepsilon' - \frac{1}{2}\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon' = \gamma$.



Obr. 48

Závěr. Na každé z opačných polopřímek BC , BM leží právě jeden bod X , který má požadované vlastnosti. Jedině v případě $\omega = 120^\circ$ je $X \equiv C$ a $Y \equiv A$, což jsme vyloučili, kdežto řešení na polopřímce BM existuje.

5. Kolik čtveřic celých čísel a, b, c, d má tyto vlastnosti:

- (1) Žádná dvě z čísel a, b, c, d si nejsou rovna.
 (2) Platí $a + b + c + d = 0$.
 (3) Každé z čísel a, b, c, d má absolutní hodnotu menší než pět. (Čtveřici 1, 2, -3, 4 považujte za různou od čtveřice 2, -3, 4, 1 apod.)

Řešení. Úlohu rozdělme na dvě části: [1] Hledejme čtveřice, o nichž platí, že jedna dvojice čísel ze čtveřice má součet nula. [2] Žádná dvě čísla čtveřice nemají součet nula.

Případ [1]. Necht' o dvou číslech čtveřice, např. o číslech c, d , platí, že jejich součet je nula.

Tu nemůže být např. $d = 0$; jinak by bylo $c + d = 0$, tj. $c = 0$. Dvojici $c = 0, d = 0$ vylučujeme, neboť čísla čtveřice mají být vesměs navzájem různá.

Tabulka č. 1

I	II	III	IV
$5 > a > d$	b	c	$5 > d > 0$
2	-2	-1	1
3	-3	-1	1
4	-4	-1	1
3	-3	-2	2
4	-4	-2	2
4	-4	-3	3

Sestavme nyní tabulku (číslo 1) čísel a, b, c, d tak, aby bylo $d > 0$ (tj. hledejme čtveřice, v nichž je $d > 0$) a aby v tabulce postupně d vzrůstalo; dále učiníme úmluvu, že v tabulce je $a > d$.

Za daných předpokladů dostaneme právě 6 čtveřic (a, b, c, d) . Nyní uvažujme takto:

Vlastnost čísla d , kterou jsme požadovali, může mít kterékoli z čísel a, b, c, d ; to tedy jsou

$$4 \text{ možnosti.} \quad (1)$$

Zbudou nám tři z čísel a, b, c, d ; vlastnosti, které jsme připsali číslu c (tj. $c + d = 0$), mohou mít kterákoli tři z nich; to jsou

$$3 \text{ možnosti,} \quad (2)$$

přičemž kteroukoli možnost (1) lze spojit s kteroukoli možností (2); to je tedy

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ možností.} \quad (3)$$

Nyní nám zbývají ze čtveřice a, b, c, d dvě čísla; vlastnost, jež mělo číslo a může mít jedno z nich; to jsou

$$2 \text{ možnosti,}$$

z nichž každou lze spojit s 12 možnostmi (3). Dostaneme tedy

$$12 \cdot 2 = 24 \text{ možností.}$$

Dostaneme tedy celkem 24 tabulek typu č. 1. To je

$$6 \cdot 24$$

různých čtveřic dané vlastnosti.

Případ [2]. Nechť o číslech čtveřice (a, b, c, d) platí

$$|a| > |b| > |c| > |d|. \quad (4)$$

Sestavujme tabulku (číslo 2) tak, že volíme číslo a , k němu volme číslo b tak, aby platilo (4) a pak volme číslo c zase podle (4), načež číslo d určíme podle vztahu $a + b + c + d = 0$; přitom čísla a, b, c, d musí být různá. Dostaneme:

Tabulka č. 2

I	II	III	IV
a	b	c	d
4	-3	-2	1
-4	3	2	1
4	-3	-1	0
-4	3	1	0
3	-2	-1	0
-3	2	1	0

V tabulce je tedy 6 čtveřic čísel. Vlastnost, kterou má číslo a v tabulce č. 2, může mít opět kterékoli z čísel a, b, c, d ; to jsou 4 možnosti. Vlastnost čísla b může mít kterékoli ze tří zbývajících čísel, to jsou 3 možnosti; tedy $4 \cdot 3 = 12$ možností. Zbudou dvě čísla a jedno z nich volíme (jako číslo c v tabulce číslo 2); to jsou dvě možnosti, tedy $12 \cdot 2 = 24$ mož-

ností. Dostaneme tedy 24 tabulek tvořených týmž postupem jako tabulka čís. 2; obdržíme tedy

$$6 \cdot 24 \text{ čtveřic.} \quad (5)$$

Protože uvedenými případy [1], [2] jsou všechny možnosti vyčerpány, dostaneme [viz (4), (5)] celkem

$$6 \cdot 24 + 6 \cdot 24 = (6 + 6) \cdot 24$$

čtveřic neboli $12 \cdot 24 = 288$ různých čtveřic.

Odpověď. Různých čtveřic, majících vlastnosti požadované textem dané úlohy, je 288.

6. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a v ní průměr AB ; dále je dáno kladné číslo m .

Na tečně t sestrojené v bodě B kružnice k určete bod X tak, že pro druhý průsečík Y přímky AX s kružnicí k platí vztah

$$XY = m.$$

(Nejprve vypočítejte velikost úsečky XA a na základě výpočtu proveďte konstrukci.)

Řešení. V obr. 49 označme

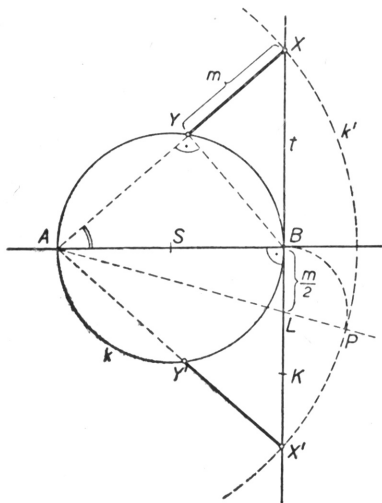
$$\begin{aligned} SA = SB = r, \quad XY = m, \quad AX = x, \\ AY = x - m; \end{aligned} \quad (1)$$

přitom r, m jsou daná kladná čísla a $x > 0$ je neznámé číslo, jež vypočítáme.

Platí

$$\Delta ABY \sim AXB \text{ (uu)}, \quad (2)$$

neboť se tyto pravoúhlé trojúhelníky shodují v úhlech.



Obr. 49

Ze vztahu (2) plyne

$$\frac{AY}{AB} = \frac{AB}{AX} \quad (2')$$

neboli vzhledem k (1)

$$\frac{x - m}{2r} = \frac{2r}{x}.$$

Znásobme obě strany této rovnice číslem $2rx$;
postupně dostaneme

$$\begin{aligned}x(x - m) &= 4r^2, \\x^2 - mx &= 4r^2, \\x^2 - 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot x + \left(\frac{m}{2}\right)^2 &= 4r^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2, \\ \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 &= D, \end{aligned} \tag{3}$$

kde jsme položili

$$4r^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = D > 0. \tag{3'}$$

Rovnici (3) lze upravit dále takto:

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 &= (\sqrt{D})^2, \\ \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - (\sqrt{D})^2 &= 0, \\ \left[\left(x - \frac{m}{2}\right) + \sqrt{D}\right] \cdot \left[\left(x - \frac{m}{2}\right) - \sqrt{D}\right] &= 0.\end{aligned}$$

Jeden z obou činitelů na levé straně této rovnice musí být roven nule [viz učebnici Algebra pro 9. ročník, vydání z r. 1955, str. 8, řádek 4; str. 78, odstavec 1], tj.

$$x - \frac{m}{2} + \sqrt{D} = 0, \quad x - \frac{m}{2} - \sqrt{D} = 0$$

neboli

$$x = \frac{m}{2} - \sqrt{D}, \tag{4}$$

$$x = \frac{m}{2} + \sqrt{D}. \tag{5}$$

Případ (4) nepřichází v úvahu; ze (3') totiž plyne, že je $D > (\frac{1}{2}m)^2$ a tedy $\sqrt{D} > \frac{1}{2}m$, takže ve (4) je $x < 0$ a proto nemá geometrický význam.

Případ (5) má význam, neboť x je součtem dvou kladných čísel; na základě výsledku (5) provedeme konstrukci.

Konstrukce (viz obr. 49). Sestrojíme trojúhelník ABL , kde $\sphericalangle B = 90^\circ$, $AB = 2r$, $BL = \frac{1}{2}m$. Podle věty Pythagorovy z tohoto trojúhelníka plyne

$$AB^2 + BL^2 = AL^2$$

neboli

$$4r^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = AL^2,$$

přičemž porovnáním se vztahem (3') dostáváme

$$AL = \sqrt{D}.$$

Na prodloužení úsečky AL za bod L sestrojíme úsečku $LP = \frac{1}{2}m$, takže je $AP = x$, kde x je dáno vztahem (5). Dále opišme kružnici $k' \equiv (A, r' = AP)$, která protíná přímku t v hledaných bodech X, X' . Uvnitř úseček AX, AX' a na kružnici k leží pak pořadě body Y, Y' , přičemž platí

$$XY = X'Y' = m.$$

Důkaz. Stačí se omezit na úsečku XY , neboť úsečka $X'Y'$ je obrazem úsečky XY v souměrnosti o ose AB .

Podle konstrukce je $AX = AP = x$, což je číslo ze vztahu (5). Vztahy (2), (2') platí, neboť trojúhelníky ABY , AXB jsou pravoúhlé a mají společný úhel při vrcholu A . Musíme dokázat, že je $XY = m$.

Ze vztahu (2') plyne $AX \cdot AY = AB^2$ neboli

$$AY = \frac{4r^2}{AX}. \quad (6)$$

Uvažujme úsečku $AY_0 = AX - m$, takže vzhledem k (5) je

$$AY_0 = \sqrt{D} - \frac{m}{2}, \quad AX = \sqrt{D} + \frac{m}{2}.$$

Proto je

$$AY_0 \cdot AX = (\sqrt{D})^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

neboli

$$AY_0 \cdot AX = 4r^2;$$

je tedy

$$AY_0 = \frac{4r^2}{AX}. \quad (7)$$

Porovnáním (6), (7) dostáváme

$$AY_0 = AY,$$

takže rozdíl velikostí sestrojených úseček AX , AY je skutečně m .

Diskuse. Úloha má vždy dvě řešení, neboť podle konstrukce je $AB < AL < AP$, takže vzdálenost bodu A od přímky t je menší než poloměr r' kružnice

k' ; je tedy t sečnou kružnice k' . Protože přímka AX není kolmá k přímce AB , není tečnou kružnice k v bodě A , tj. je sečnou (bodem A na kružnici k prochází jediná tečna, ostatní přímky jsou sečny kružnice).

7. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE C

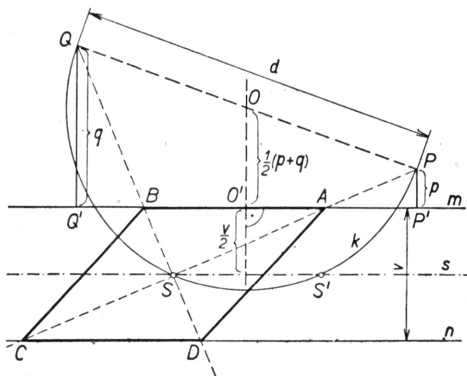
1. Daná je priamka m . Vnútri jednej z polrovín vyŕaťatých priamkou m je vo vzdialenosti v daná priamka $n \parallel m$; vnútri opačnej polroviny sú dané dva rôzne body P, Q . Vzdialenosti bodov P, Q od priamky m označme (v tomto poradí) p, q ; ďalej označme $PQ = d$.

Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, ktorého strana AB leží na priamke m a strana CD na priamke n ; pritom bod P leží na priamke AC a bod Q na priamke BD . Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na čísla (kladné) d, p, q, v .

Riešenie. *Rozbor* (obr. 50). Označme S stred hľadaneho kosoštvorca $ABCD$ (presnejšie: rovnostranného rovnobežníka). Potom je $\sphericalangle PSQ = 90^\circ$. Pritom bod S leží na strednej priečke $s \parallel AB$, čiže $s \parallel m$. Vzdialenosť priamok s, m je $\frac{1}{2}v$. Z toho vyplýva *konštrukcia*:

Zostrojme os $s \parallel m$ súmernosti páru rovnobežiek m, n . Označme O stred úsečky PQ a opíšme kružnicu

$k \equiv (O, \frac{1}{2}d)$ nad úsečkou PQ ako priemerom. Ďalej označme S spoločný bod (ak existuje) priamky s s kružnicou k . Zostrojme priamky SP, SQ . Označme A, C spoločné body priamky SP (v tomto poradí)



Obr. 50

s priamkami m, n a ďalej B, D spoločné body priamky SQ (v tomto poradí) s tými istými priamkami m, n . Potom štvoruholník $ABCD$ vyhovuje požiadavkám úlohy.

Dôkaz. Bod S má podľa konštrukcie priamky s navzájom rovnaké vzdialenosti od rovnobežiek m, n . V súmernosti so stredom S sú priamky m, n súmerne združené a tým aj dvojica bodov A, C a dvojica bodov B, D . Bod S teda rozpoľuje uhlopriečky AC, BD

štvoruholníka $ABCD$, takže je to rovnobežník. Pretože S leží na Thaletovej kružnici k , je $\sphericalangle PSQ = 90^\circ$ a uhlopriečky AC , BD rovnobežníka $ABCD$ sú na seba kolmé. Je teda napr. priamka AC osou súmernosti tohto rovnobežníka, t. j. platí $AB = AD$ a rovnobežník je rovnostranný. Tým je dôkaz hotový.

Diskusia (pozri označenia z obr. 50). Riešiteľnosť úlohy závisí od toho, či priamka s a kružnica k majú spoločné body. Pokiaľ nie je $PQ \perp m$, existuje lichobežník (resp. obdĺžnik keď $PQ \parallel m$) $PQQ'P'$, kde $PP' \perp m$, $QQ' \perp m$ a body P' , Q' ležia na priamke m . Jeho stredná priečka $OO' = \frac{1}{2}(PP' + QQ') = \frac{1}{2}(p + q)$. Vzdialenosť stredu O od priamky m je teda $\frac{1}{2}(p + q)$. Pretože body P , Q ležia vnútri tej istej polroviny mP (opačnej k polrovine mC), vzdialenosť bodu O od priamky s sa rovná $o = \frac{1}{2}(p + q) + \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}(p + q + v)$. Polomer kružnice k je $\frac{1}{2}d$. Úloha má dve rôzne, jedno alebo žiadne riešenie, podľa toho, či vzdialenosť bodu O od priamky s je menšia, rovná sa alebo je väčšia než polomer $\frac{1}{2}d$ kružnice k , t. j. či platí (v tomto poradí):

$$o < \frac{1}{2}d, \quad o = \frac{1}{2}d, \quad o > \frac{1}{2}d,$$

kde $o = \frac{1}{2}(p + q + v)$.

Avšak to platí aj pre prípad, že je $PQ \perp m$, kedy úloha nemá riešenie.

Tým je úloha rozriešená.

2. Písačka píše na psacím stroji těsně za sebou přirozená čísla

123456789101112 atd.

bez mezer a čárek; celkem takto napsala 1000 číslic.

Vypočítejte, kolik přitom napsala sedmiček.

Řešení. Nejprve určíme to přirozené číslo, jehož cifra při uvedeném psaní číslic bude stát na tisícím místě. Počítejme postupně napsané cifry:

Napišme čísla:	Napsali jsme tím tento počet číslic:
1 až 9	9
10 až 99	180
100 až 199	300
200 až 299	300
Přitom jsme napsali celkem $\overline{789}$ číslic.	

Máme ještě napsat 211 číslic. Napíšeme-li $\frac{210}{3} = 70$ dalších (trojciferných) čísel, napíšeme 210 číslic; jedná se o napsání čísel od 300 až do 369. Zbývá napsat ještě další číslici (tisíce) a tou je číslice 3 čísla 370.

Nyní vypočítáme, kolik napíšeme sedmiček, když napíšeme bezprostředně po sobě následující přirozená čísla od 1 až do 369.

V každé desítce od 1 do 100 napíšeme jednu sedmičku, která stojí na místě jednotek, tj. celkem 10 sedmiček; při psaní desítek čísel 70, 71 atd. až 79 napíšeme rovněž celkem 10 sedmiček. Při psaní čísel od 1 do 100 napíšeme tedy úhrnem 20 sedmiček. Totéž platí při psaní čísel od 101 do 200 a od 201 do 300.

K napsání čísel od 1 do 300 napíšeme 60 sedmiček. Při napsání čísel 301 až 369 napíšeme 7 sedmiček.

Odpověď. Při výkonu popsaném v úloze napíše písarka 67 sedmiček.

3. Jsou dány dva přilehlé úhly $\sphericalangle MPQ$, $\sphericalangle PQN$, z nichž každý je pravý; dále je dáno kladné číslo p .

Na polopřímkách PM , QN sestrojte pořadě body A , B a na úsečce PQ bod C tak, aby trojúhelník ABC byl rovnostranný se stranou velikosti p .

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslům p , $d = PQ$.

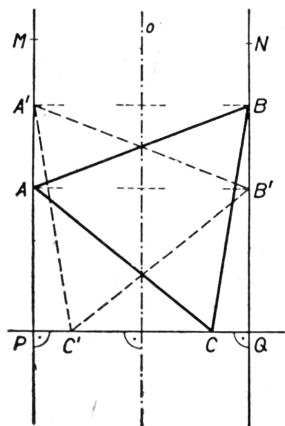
Řešení (obr. 51). Při řešení užijeme známé věty **V**: Je-li $\sphericalangle PQY = 90^\circ$ (viz obr. 52) a $QY < QT$, potom je $PY < PT$ a $\sphericalangle PYQ > \sphericalangle PTQ$ a obráceně.

Rozbor. Necht' ABC je trojúhelník, který splňuje požadavky dané úlohy. Označme o osu úsečky PQ ; přímka o je osou souměrnosti útvaru, který se skládá z úsečky PQ a obou polopřímek PM , QN . Označme $B'A'C'$ (v napsaném pořadí) obraz trojúhelníka ABC v souměrnosti o ose o ; body B' , A' , C' leží pořadě na polopřímkách QN , PM a úsečce PQ . Trojúhelník tedy také splňuje požadavky úlohy. Označme a , b pořadě vzdálenosti bodů A , B od přímky PQ ; tu tedy B' , A' mají od přímky PQ pořadě rovněž vzdálenosti a , b .

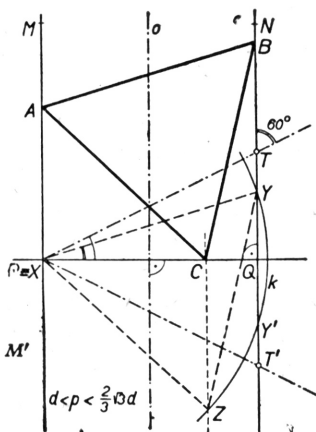
Proto v celém dalším řešení můžeme předpokládat, že je

$$a \leq b;$$

jinak totiž místo trojúhelníka ABC stačí uvažovat jeho obraz $B'A'C'$ v souměrnosti o ose o .



Obr. 51



Obr. 52

Posuňme trojúhelník ABC o délku a ve směru MP (i co do smyslu — viz obr. 52), čímž dostaneme shodný trojúhelník XYZ (je $X \equiv P$). Jsou dvě možnosti: [1] Je $a = b$ a tedy $Y \equiv Q$, tj. $d = p$; v tomto případě je zřejmě jediné řešení ABC (viz obr. 53) a je $AB \parallel PQ$, přičemž je $C \equiv (PQ \cdot o)$. [2] Je $a < b$,

takže existuje pravoúhlý trojúhelník PYQ s přeponou $PY = p$ a odvěsnou $PQ = d$, takže je

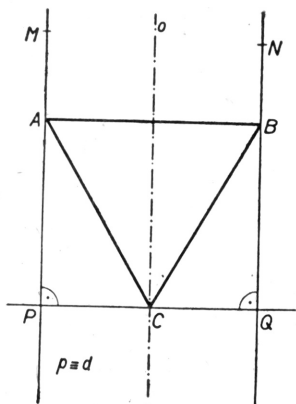
$$d < p. \quad (1)$$

(Je zřejmé, že pro $d > p$ nemá úloha řešení.) Přitom bod C leží na úsečce PQ a tudíž bod Z v pásu rovnoběžek PM, QN . Bod Z náleží úhlu $\sphericalangle PYQ$, neboť musí být $60^\circ = \sphericalangle PYZ \leq \sphericalangle PYQ$; je tedy $\sphericalangle YPQ \leq \leq 30^\circ$ a proto polopřímka PZ prochází vnitřkem pravého úhlu $\sphericalangle QPM'$, kde PM', PM jsou opačné polopřímky. Sestrojíme rovnostranný trojúhelník PTT' , v němž je úsečka PQ výškou a bod T leží na polopřímce QN ; je $PQ = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot PT$ neboli $d = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot PT$ a tedy

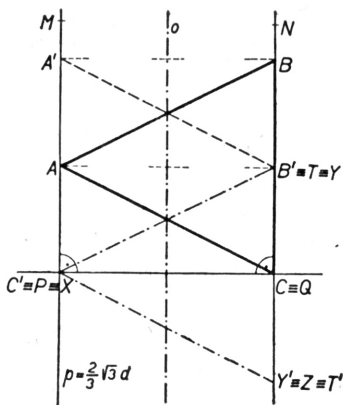
$$PT = \frac{2\sqrt{3}}{3} d.$$

Protože $\sphericalangle QTP = 60^\circ$, padne nutně bod $Y \neq Q$ na úsečku QT . Podle věty **V** pro $Y \equiv T$ je totiž $PT = p$, $\sphericalangle PYZ \equiv \sphericalangle PYQ = 60^\circ$, kdežto pro vnitřní bod Y úsečky QT je $p = PY < PT$, $\sphericalangle PYQ > > \sphericalangle PTQ = 60^\circ$; v prvním případě padne bod Z na polopřímku TQ , v druhém případě padne bod Z dovnitř úhlu $\sphericalangle PTQ$. Vzhledem k (1) a právě odvozeným vztahům je

$$d < p \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} d. \quad (2)$$



Obr. 53



Obr. 54

Konstrukce (viz obr. 52, 54). Kolem bodu $P \equiv X$ opíšeme kružnici $k \equiv (P, p)$; vzhledem k (2) je přímka QN sečnou této kružnice. Označme Y společný bod polopřímky QN s touto kružnicí. Bod $Y \neq Q$ náleží úsečce QT , takže podle věty **V** je $\sphericalangle PYQ \geq 60^\circ$. Rovnostranný trojúhelník XYZ sestrojený v polorovině XYQ má stranu p ; bod Z náleží úhlu $\sphericalangle PYQ$ a tím pásu rovnoběžek PM, QN . Označme C patu kolmice vedené bodem Z k přímce PQ a posuňme trojúhelník XYZ o délku ZC ve směru PM (i co do smyslu) do polohy ABC . Z předchozího plyne, že trojúhelník ABC vyhovuje požadavkům úlohy. Obraz $B'A'C'$ trojúhelníka ABC

v souměrnosti o ose o vyhovuje rovněž úloze, přičemž oba trojúhelníky jsou různé; úsečka XY a její obraz v souměrnosti o ose o jsou totiž dvě různé úsečky a tím i úsečky AB , $B'A'$ jsou různé, přičemž úsečka $B'A'$ není stranou trojúhelníka ABC .

Důkaz konstrukce vyplývá z předchozího. Podmínkou řešitelnosti je vztah (2).

Protože od trojúhelníka ABC lze k pomocnému trojúhelníku XYZ přejít jediným způsobem (příslušné posunutí je zcela určeno) a protože od sestrojeného trojúhelníka XYZ lze podle naznačené konstrukce dospět opět jediným způsobem k trojúhelníku ABC , který úloze vyhovuje, má úloha dvě různá řešení.

Závěr. Je-li $d = p$, má úloha jediné řešení. Platí-li vztahy (2) jsou dvě různá řešení. Pro $d > p$ nebo pro $p > \frac{2}{3}\sqrt{3}d$ není řešení.

4. Rozhodnite, ktorý zo zlomkov

$$\frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1}, \quad \frac{100^{99} + 1}{100^{89} + 1}$$

je väčší. (Návod: Utvorte napr. ich rozdiel.)

Riešenie. Rozdiel zlomkov sa postupne rovná

$$\begin{aligned} r &= \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} - \frac{100^{99} + 1}{100^{89} + 1} = \\ &= \frac{(100^{100} + 1)(100^{89} + 1) - (100^{99} + 1)(100^{90} + 1)}{(100^{90} + 1)(100^{89} + 1)}. \end{aligned}$$

Ak bude čitateľ posledného zlomku kladné číslo, bude prvý z daných zlomkov väčší. Označme tohto čitateľa x . Platí postupne:

$$\begin{aligned}x &= 100^{189} + 100^{100} + 100^{89} + 1 - \\&\quad - (100^{189} + 100^{99} + 100^{90} + 1) = \\&= 100^{100} + 100^{89} - 100^{99} - 100^{90} = \\&= 100^{100} \left(1 + \frac{1}{100^{11}} - \frac{1}{100} - \frac{1}{100^{10}} \right).\end{aligned}$$

Číslo v zátvorke je zrejme kladné, takže x je kladné číslo.

Odpoveď. Prvý z daných zlomkov je väčší než druhý.

8. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE D

1. Je dán výraz

$$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Zjednodušte jej a dokažte, že je kladný. Co musí platit o číslech a, b, c , aby daný výraz měl smysl?

Řešení. I. Označme V daný výraz. Upravme menovatele ve zlomcích výrazu V pořadě takto:

$$\left. \begin{aligned} (a-b)(a-c) &= -(a-b)(c-a), \\ (b-a)(b-c) &= -(a-b)(b-c), \\ (c-a)(c-b) &= -(c-a)(b-c). \end{aligned} \right\} (1)$$

Vidíme nyní, že jmenovatelé našich zlomků vznikly jako součiny vždy dvou z těchto výrazů

$$a-b, \quad b-c, \quad c-a \quad (1')$$

a ještě dalšího činitele, jímž je číslo -1 . Výraz

$$n = (a-b)(b-c)(c-a) \quad (2)$$

je zřejmě společným násobkem výrazů (1), neboť platí např.

$$\frac{n}{(a-b)(a-c)} = -(b-c) \quad (3)$$

atd. Je tedy výraz n skutečně společným násobkem našich jmenovatelů.

Převedme nyní zlomky ve výrazu V na jmenovatele n ; musíme je vzhledem k (1) a (3) rozšířit

pořadě těmito výrazy:

$$-(b-c), \quad -(c-a), \quad -(a-b);$$

postupně pak obdržíme tyto úpravy:

$$\begin{aligned} V &= \frac{-(b-c)(a-1)^2}{n} + \frac{-(c-a)(b-1)^2}{n} + \\ &\quad + \frac{-(a-b)(c-1)^2}{n} = \\ &= -\frac{1}{n} [(b-c)(a^2-2a+1) + (c-a)(b^2-2b+1) + \\ &\quad + (a-b)(c^2-2c+1)]; \end{aligned} \quad (4)$$

tu jsme ze zlomků vytkli $-\frac{1}{n}$. Provedme nyní násobení v lomené závorce a potom sečtěme. Označme L výraz v lomené závorce; dostaneme postupně

$$\begin{aligned} L &= a^2b - 2ab + b - a^2c + 2ac - c + \\ &\quad + b^2c - 2bc + c - ab^2 + 2ab - a + \\ &\quad + ac^2 - 2ac + a - bc^2 + 2bc - b = \\ &= (a^2b - ab^2) + (b^2c - bc^2) + (c^2a - a^2c). \end{aligned} \quad (5)$$

Provedme dále násobení na pravé straně rovnosti (2); dostaneme postupně

$$\begin{aligned} n &= (a-b)(b-c)(c-a) = \\ &= (ab - ac - b^2 + bc)(c-a) = \\ &= abc - ac^2 - b^2c + bc^2 - \\ &\quad - a^2b + a^2c + ab^2 - abc = \\ &= -(a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2) = -L \end{aligned}$$

[viz vztah (5)]. Platí tedy

$$n = -L.$$

Dosaďme tento výsledek do (4); obdržíme

$$V = -\frac{1}{-L} \cdot L = 1, \quad (6)$$

tj.

$$V = 1.$$

Výsledek. Výraz V je roven číslu 1 a tím kladný pro všechna čísla a, b, c , pro něž má smysl.

Obdobné řešení vypracoval
Lubomír Vašek, 8.d tř. 1. jsš,
Gottwaldov.

II. Musíme ještě zjistit, kdy výraz V ztrácí smysl. To nastane tehdy, je-li jeden z jmenovatelů (1) daného výrazu roven nule, tj. jestliže platí alespoň jeden ze vztahů

$$\left. \begin{aligned} (a-b)(c-a) &= 0, \\ (a-b)(b-c) &= 0, \\ (c-a)(b-c) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Z rovnic (7) plyne, že nutně musí platit alespoň jedna rovnost [viz učebnice Algebra pro 8. roč., str. 24 a následující, vydání z r. 1959]

$$a-b=0, \quad b-c=0, \quad c-a=0$$

neboli

$$a=b, \quad b=c, \quad c=a. \quad (8)$$

Skutečně, když platí jeden ze vztahů (8), je jeden ze jmenovatelů (1) roven nule a výraz V nemá pak smyslu.

Odpověď. Jestliže současně platí

$$a \neq b, \quad b \neq c, \quad c \neq a, \quad (9)$$

má výraz V smysl; jinak smysl nemá.

Za předpokladu, že platí (9), je vzhledem ke vztahu (2) číslo n různé od nuly (tím je též $L \neq 0$) a proto lze provést krácení naznačené ve vztazích (6).

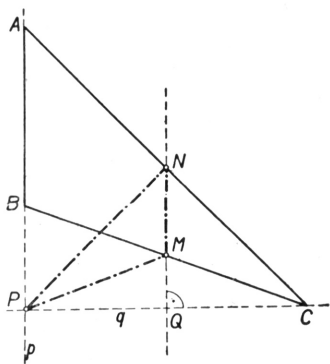
Tím je úloha rozřešena.

Obdobné řešení vypracovala
Jitka Državová, 8. tř. 4. osš,
Přerov.

2. Zvolte trojuholník MNP . Narysujte také trojuholník ABC , aby bod M bol stredom strany BC , bod N stredom strany CA , a aby bod P bol päťou výšky vedenej: a) bodom C , b) bodom A . (Každú z oboch úloh narysujte zvlášť.)

Riešenie. a) Na obrázku 55 máme trojuholník ABC a body M , N , ktoré sú (v tomto poradí) stredmi strán BC , CA , takže MN je strednou priečkou; preto je $MN \parallel AB$. Ďalej P je päta výšky vedenej bodom C . Bod P môže splynúť nanajvýš s jedným z bodov A , B . Predpokladajme, že je napr. $P \neq B$. Potom v troj-

uholníku BCP je úsečka $MQ \parallel BP$ (Q je priesečník priamok MN a CP), lebo je $MN \parallel AB$. Je teda MQ stredná priečka v tomto trojuholníku a Q je teda stred úsečky CP . Vedľa toho je $MQ \parallel BP$, $CP \perp BP$; ak je priamka CP kolmá k jednej z rovnobežiek, je kolmá aj k druhej [pozri učebnicu Geometrie pro 7. ročník, vydanie z r. 1955, str. 134, druhá veta zhora]. V trojuholníku CMQ je teda $\sphericalangle Q = 90^\circ$. Podľa toho urobíme konštrukciu.



Obr. 55

Konstruktia (obr. 55). Zvoľme trojuholník MNP . Bodom P vedme priamku $p \parallel MN$. V bode P zostrojme kolmicu q k priamke p a označme Q spoločný bod priamok q, MN . Na predĺžení úsečky PQ za bod

Q zostrojme úsečku $QC = QP$. Zostrojme polpriamky CM, CN ; ďalej označme (v tomto poradí) B, A spoločné body týchto polpriamok s priamkou p . Potom ABC je hľadaný trojuholník.

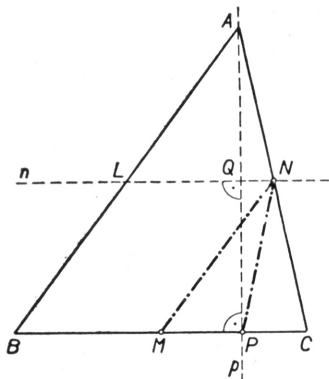
Dôkaz správnosti konštrukcie. Pretože MNP je trojuholník, neleží bod P na priamke MN a preto MN, p sú dve rôzne rovnobežky a tým aj body P, Q sú rôzne; bod C sa dá teda zostrojiť. Priamka CM pretína priamku MN v bode M ; preto pretína aj priamku p , ktorá je s MN rovnobežná [keď CM pretína jednu z rovnobežiek, pretína aj druhú; pozri učebnicu Geometrie pro 7. roč., vydanie z r. 1955, str. 133, veta 5]. Bod B sa teda dá zostrojiť a rovnako aj bod A .

Úloha má teda riešenie, a to jediné.

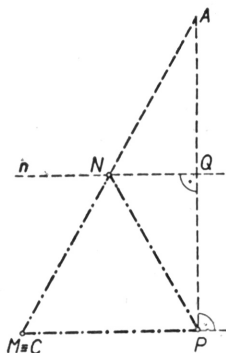
b) V obrázku 56 máme trojuholník ABC ; body M, N sú (v tomto poradí) stredy strán BC, CA . Bod P je päťou výšky vedenej bodom A , t. j. $p \perp PM$. Úsečka MN je strednou priečkou a preto je $MN \parallel AB$. Priamka $n \parallel MP$ (čiže $n \parallel BC$) prechádza bodom N a preto na nej leží stredná priečka $LN \parallel BC$, kde L je stred strany AB . Bod P môže splynúť nanajvýš s jedným z bodov B, C . Predpokladajme, že je $P \neq B$. Potom v pravouhlom trojuholníku ABP ($\sphericalangle P = 90^\circ$) je $LQ \parallel BP$ a bod Q je stredom úsečky PA . Z toho vyplýva konštrukcia.

Konštrukcia (obr. 56). Zvoľme trojuholník MNP .

Bodom N vedme priamku $n \parallel MP$. Bodom P zostrojme priamku $p \perp MP$. Priesečník priamok n, p označme Q . Na predĺžení úsečky PQ za bod Q zo-



Obr. 56



Obr. 57

strojme úsečku $QA = QP$. Polpriamka AN má s priamkou MP spoločný bod C . Na predĺžení úsečky CM za bod M zostrojme úsečku $MB = MC$. Potom ABC je hľadaný trojuholník.

Dôkaz správnosti konštrukcie. Bod Q je podľa konštrukcie stredom úsečky PA a preto je N stredom úsečky AC [buď je $N \equiv Q$, alebo, ak je $N \neq Q$, je QN strednou priečkou v trojuholníku CAP a teda N je stred strany AC]. Podľa konštrukcie sú body M, N

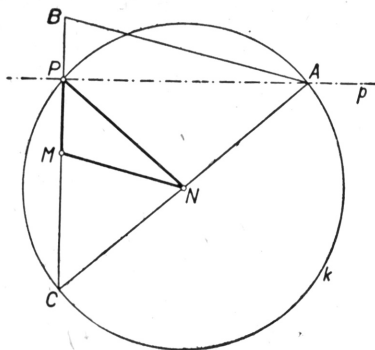
středmi stran a a P pátá výšky vedenej bodom A . Avšak ak je $C \equiv M$, čo nastane, keď je $MN = NP$ (pozri obr. 57), nemá úloha riešenie (bolo by $B \equiv C$). Inak má úloha jediné riešenie (to platí aj v prípade, keď je $\sphericalangle PMN = 90^\circ$, t. j. $P \equiv B$).

Jiné řešení. Rozbor. Na obr. 57a máme hledaný trojúhelník ABC . Trojúhelník ACP má úhel $\sphericalangle P = 90^\circ$ a proto je bod N středem jeho přepony AC . Proto kružnice $k \equiv (N, NP)$ prochází body A, C (kružnice Thaletova). Přitom přímka $p \perp PM$, která prochází bodem P , prochází zároveň bodem A . Odtud *konstrukce* (obr. 57a):

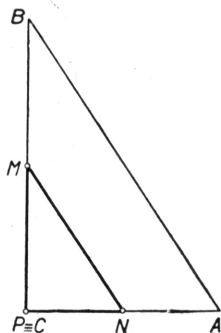
Opišme kružnici $k \equiv (N, NP)$ a bodem P vedme přímku $p \perp MP$. Jestliže přímka p protne kružnici k v bodě A různém od P , potom sestrojme průměr ANC kružnice k , kde C je druhý průsečík přímky NA s kružnicí k . Na přímce MC sestrojme bod B tak, aby bod M byl středem úsečky CB . Pak je ABC hledaný trojúhelník.

Důkaz. Podle konstrukce platí: (1) Bod A leží na kolmici p , takže AP je výškou trojúhelníka ABC . (2) Bod N je středem úsečky AC . (3) Bod M je středem úsečky BC .

Diskuse. Přímka p není tečnou kružnice k (takže je $A \neq P$), neboť jinak by bod M ležel na přímce NP , což je proti předpokladu, že je dán trojúhelník MNP .



Obr. 57a



Obr. 57b

Bod B se dá sestrojit právě tehdy, je-li $M \neq C$. Jestliže je M bodem kružnice k (tj. $MN = NP$), nemá úloha řešení.

V našem rozboru jsme předpokládali, že je $P \neq C$, tj., že není $\sphericalangle NPM = 90^\circ$; v tomto případě však je jediné řešení, jak se snadno zjistí (viz obr. 57b).

Podle řešení Jana Šenftuka, 8.b
tř. osš „Julia Fučíka“, Kladno.

3. Pomyslite si, že máte napísať všetky prirodzené čísla od 1 do 5555. Koľko deviatok pritom napíšete?

Riešenie. K napísaniu čísel od 1 do 100 potrebujeme 20 deviatok. Ten istý počet deviatok je potrebný k napísaniu čísel od 101 do 200. To isté platí o číslach

od 201 do 300, od 301 do 400, ..., od 701 do 800. K napísaniu čísel od 1 do 800 treba $20 \cdot 8$ deviatok, t. j. 160 deviatok.

Ak však píšeme čísla od 801 do 900, potrebujeme 21 deviatok (číslo 900 potrebuje k zápisu jednu deviatku).

Každé číslo od 901 do 999 (je ich 99) sa začína deviatkou; podľa predošlého (pozri čísla od 1 do 99) treba teda $20 + 99$, t. j. 119 deviatok

K napísaniu čísel od 1 do 1000 treba teda $160 + 21 + 119 = 300$ deviatok.

Rovnaký počet deviatok treba k napísaniu čísel od 1001 do 2000, ďalej od 2001 do 3000, ďalej od 3001 do 4000 a konečne od 4001 do 5000. Teda celkom $300 \cdot 5 = 1500$ deviatok.

K napísaniu čísel od 5001 do 5500 treba ten istý počet deviatok, ako k napísaniu čísel od 1 do 500, t. j. $20 \cdot 5 = 100$ deviatok.

K napísaniu čísel od 5501 do 5555 potrebujeme ten istý počet deviatok ako k napísaniu čísel od 1 do 55, t. j. 5 deviatok.

K napísaniu čísel od 1 do 5555 treba preto

$$1500 + 100 + 5 = 1605 \text{ deviatok.}$$

Tým je úloha rozriešená.

4. V našom obrázku 58 jsou dány soustředné kružnice $k_1 \equiv (S, x)$, $k_2 \equiv (S, y)$, přičemž je $x > y$.

Úsečka AB je průměrem kružnice k_1 , bod C leží na kružnici k_2 a uvnitř úsečky SB . Nad úsečkami AC , BC jako průměry opíšeme kružnice k_3 , k_4 .

Součet $P_1 + P_2$ obsahů vodorovně vyčárkovaných ploch je roven součtu $M + N$ obsahů ploch vyčárkovaných svisle. Dokažte.

Řešení (viz obr. 58). Obsahy kružnic k_1 , k_2 , k_3 , k_4 označme pořadě p_1 , p_2 , p_3 , $p_4 = N$. Poloměry kružnic k_3 , k_4 jsou pořadě $r_3 = \frac{1}{2}AC$, $r_4 = \frac{1}{2}CB$, kde $AC = AS + SC = x + y$, $CB = SB - SC = x - y$; proto je

$$r_3 = \frac{1}{2}(x + y), \quad r_4 = \frac{1}{2}(x - y).$$

Je proto

$$p_1 = \pi x^2, p_2 = \pi y^2, p_3 = \frac{\pi}{4}(x + y)^2, p_4 = \frac{\pi}{4}(x - y)^2.$$

Je tedy

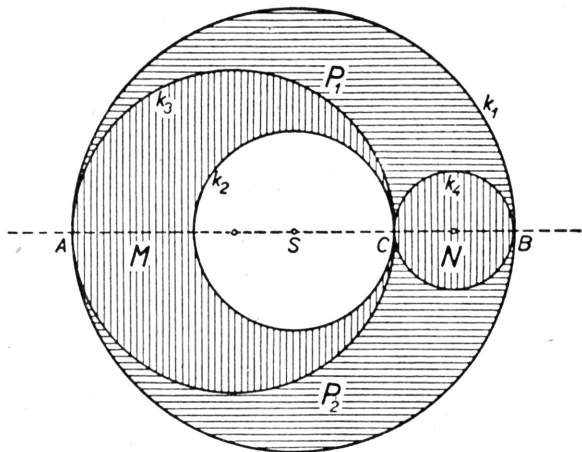
$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= p_1 - p_3 - p_4 = \\ &= \frac{\pi}{4} [4x^2 - (x + y)^2 - (x - y)^2] = \\ &= \frac{\pi}{4} [2x^2 - 2y^2] = \frac{\pi}{2} (x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (1)$$

Dále je

$$\begin{aligned} M &= p_3 - p_2 = \frac{\pi}{4} (x + y)^2 - \pi y^2 = \\ &= \frac{\pi}{4} [(x + y)^2 - 4y^2], \\ N &= p_4 = \frac{\pi}{4} (x - y)^2 \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{M} + \mathbf{N} &= \frac{\pi}{4} [(x + y)^2 - 4y^2 + (x - y)^2] = \\ &= \frac{\pi}{4} [2x^2 - 2y^2] = \frac{\pi}{2} (x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (2)$$



Obr. 58

Porovnáním výsledků (1), (2) vyplývá

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{M} + \mathbf{N},$$

což jsme měli dokázat.

Obdobné řešení vypracoval
V. Klouček, 8. tř. 81. osš, Praha 13.

5. Načrtněte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby odvěsna BC byla menší než odvěsna CA . Uvnitř úsečky BC zvolte bod X a uvnitř úsečky AB najděte bod Y tak, že platí $XY = XB$. Bodem Y vedte kolmici k přímce XY ; její průsečík s přímkou AC označte Z .

Přesvědčte se o tom, že obvod čtyřúhelníka $CXYZ$ je stále týž, ať zvolíme bod X kdekoli uvnitř úsečky BC .

Vypočítejte tento obvod pomocí stran trojúhelníka ABC .

Řešení (viz označení z obr. 59). **I.** Označme $BC = a$, $CA = b$; podle textu úlohy je

$$a < b. \quad (1'')$$

Bod X jsme podle textu úlohy zvolili uvnitř úsečky BC . Mysleme si, že sestrojení bodů X , Z lze provést tak, jak je naznačeno v obrázku 58, tj., že je

$$XY = XB, \quad (*)$$

přičemž bod Y leží uvnitř úsečky BA , a dále, že je

$$YZ \perp XY,$$

přičemž bod Z padne dovnitř úsečky CA . Podle (*) je trojúhelník XYB rovnoramenný a úhly β , β' při jeho základně BY jsou shodné; je tedy

$$\beta' = \beta. \quad (1)$$

Dále podle konstrukce kolmice k je

$$\gamma' = 90^\circ. \quad (2)$$

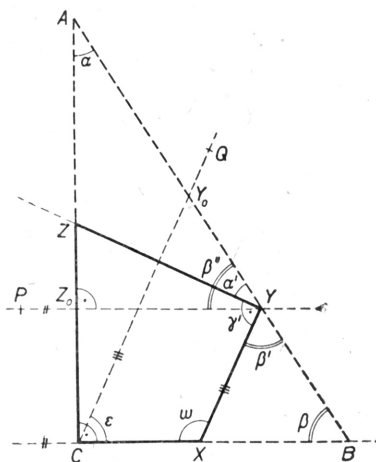
Vypočítejme nyní velikost úhlu α' . Víme, že

v daném trojúhelníku ABC je $\gamma = 90^\circ$ a tedy

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad (3)$$

(součet ostrých úhlů v pravoúhlém trojúhelníku je 90°). Je tudíž

$$\alpha' = 180^\circ - \beta' - \gamma'$$



Obr. 59

neboli [dosazujeme sem ze vztahů (1), (2)]

$$\alpha' = 180^\circ - \beta - 90^\circ$$

a tedy

$$\alpha' = 90^\circ - \beta.$$

Ze vztahu (3) plyne, že $\alpha = 90^\circ - \beta$; odtud po-

rovnáním obou posledních vztahů dostáváme

$$a' = a. \quad (3')$$

Z této rovnosti (podle známé věty o úhlech a protějších stranách trojúhelníka) plyne pro trojúhelník AYZ , že je

$$ZY = ZA. \quad (**)$$

Nyní vyjádříme obvod p čtyřúhelníka $CXYZ$; je

$$p = (CX + XY) + (CZ + ZY).$$

Dosaďme sem za XY ze vztahu (*) a za ZY ze vztahu (**); dostaneme

$$p = (CX + XB) + (CZ + ZA). \quad (4)$$

Podle obr. 59 však platí

$$CX + XB = CB = a,$$

$$CZ + ZA = CA = b.$$

Dosaďme tyto výsledky do (4); dostaneme

$$p = a + b.$$

Odpověď. Obvod čtyřúhelníka $CXYZ$ je roven součtu odvěsen daného pravoúhlého trojúhelníka ABC .

II. Než ukončíme řešení, musíme ještě dokázat, že při volbě bodu X uvnitř úsečky CB (viz obr. 59)

[1] bod Y padne dovnitř úsečky AB ,

[2] bod Z padne dovnitř úsečky CA .

Důkaz (viz označení z obrázku 59). V polorovině BCA sestrojíme polopřímku $CQ \parallel XY$. Vnější úhel ω rovnoramenného trojúhelníka XYB je roven $\beta + \beta'$

a protože je $\beta' = \beta$ [viz (1)], platí

$$\omega = 2\beta. \quad (5)$$

O přilehlých úhlech ε , ω mezi rovnoběžkami CQ , YX platí $\varepsilon + \omega = 180^\circ$; dosadíme sem ze vztahu (5). Dostaneme $\varepsilon + 2\beta = 180^\circ$; proto je

$$\varepsilon = 2\alpha,$$

neboť $2(\alpha + \beta) = 2 \cdot 90^\circ$ [viz vztah (3)]. Ale $\alpha < 45^\circ$, $\beta > 45^\circ$, neboť v daném trojúhelníku ABC je $a < b$, $\gamma = 90^\circ$; je tedy $\varepsilon = 2\alpha < 90^\circ$ a polopřímka CQ leží v pravém úhlu γ . Proto společný bod Y_0 polopřímky CQ a úsečky AB padne dovnitř této úsečky. Leží tedy celá přímka $XY \parallel CY_0$ uvnitř poloroviny CY_0B a bod Y padne tudíž vždy dovnitř úsečky Y_0B a tím také dovnitř úsečky AB .

Nyní sestrojme přímku $YP \parallel BC$; je tedy $CA \perp \perp YP$. Protože přímka YP leží uvnitř poloroviny BCA a protože bod Y je vnitřním bodem úsečky AB , padne společný bod Z_0 kolmic CA , YP dovnitř úsečky CA . V trojúhelníku AYZ_0 je úhel $\sphericalangle Z_0 = 90^\circ$ a úhel $\beta'' = 90^\circ - \alpha$, tj. $\beta'' = \beta$. Protože je $\alpha < \beta$, je podle (3') též $\alpha' < \beta''$ a polopřímka YZ leží v úhlu β'' a tudíž bod Z padne dovnitř úsečky Z_0A ; tato úsečka však padne do úsečky CA a proto bod Z leží též uvnitř úsečky CA , což jsme měli dokázat.

Tím je důkaz proveden.

Podobné řešení podal Karel Tregl,
8. tř. osš, Stráž nad Bečvou.

6. Máme 12 stejných kostek, z nichž každá je kvádrem o rozměrech 2 cm, 3 cm a 4 cm. Ze všech těchto kostek sestavíme velký kvádr tak, že přikládáme vždy shodné stěny dvou kostek k sobě tak, aby se jedna stěna s druhou kryla. Takových velkých kvádrů je možno sestavit větší počet. Udejte rozměry všech těchto kvádrů. Zároveň rozhodněte, které z nich je možno sestavit několika odlišnými způsoby.

Řešení. Všechna čísla, o nichž budeme v dalším mluvit, jsou přirozená. Označme x, y, z rozměry některého z velkých kvádrů, který dostaneme skládáním kostek; x, y, z jsou přirozená čísla, jak snadno usoudíme. Přitom x označme rozměr, který vzniká tím, že přikládáme ty hrany kostek, které mají délku $a = 2$ cm; podobně y je rozměr, který vzniká přikládáním hran délky $b = 3$ cm a potom je z ten rozměr, který dostaneme přikládáním hran délky $c = 4$ cm. Je tedy nutně x součinem čísla 2 a jakéhosi čísla x_1 , které je přirozené (toto číslo udává, kolik kostek jsme ve směru hrany délky x k sobě přiložili). Je proto $x = 2x_1$; podobně je $y = 3y_1, z = 4z_1$, takže máme

$$x = 2x_1, \quad y = 3y_1, \quad z = 4z_1. \quad (1)$$

Čísla x_1, y_1, z_1 pořadě udávají, že jsme hranu délky $a = 2$ cm „nastavili“ v celkovém počtu x_1 , hranu $b = 3$ cm v počtu y_1 a hranu c v počtu z_1 . (Dále neuvádíme již rozměry; velikosti délek udáváme v centi-

metrech, objemy kvádrů v cm^3 .) Objem jedné kostky je $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ (cm}^3\text{)}$, kostek je 12; proto objem V velkého kvádru je

$$V = 24 \cdot 12. \quad (2)$$

Protože velký kvádr má podle (1) rozměry x, y, z , je jeho objem xyz neboli podle (1)

$$V = 2x_1 \cdot 3y_1 \cdot 4z_1$$

a tedy

$$V = 24x_1y_1z_1. \quad (3)$$

Když porovnáme výsledky (2), (3), dostaneme

$$x_1y_1z_1 = 12. \quad (4)$$

Naším úkolem je najít tři přirozená čísla x_1, y_1, z_1 taková, aby měla součin 12. Nehledíme-li na pořádek činitelů, existují právě tyto čtyři rozklady čísla 12 v součin tří přirozených čísel: $1 \cdot 1 \cdot 12$; $1 \cdot 2 \cdot 6$; $1 \cdot 3 \cdot 4$; $2 \cdot 2 \cdot 3$; přitom v našem případě je třeba pro součin $x_1y_1z_1$ v těchto rozkladech vystřídat všechna možná pořadí činitelů. Příslušné kvádry budeme hledat postupně, jak je patrné z tabulky č. 1; v ní uvádíme nejprve pořadové číslo kvádrů, dále čísla x_1, y_1, z_1 a konečně rozměry velkého výsledného kvádrů, který k těmto číslům přísluší.

Tabulka

Kvadr číslo	Originál typu	x_1	y_1	z_1	x ($2x_1$)	y ($3y_1$)	z ($4z_1$)	Počet způsobů, jimiž lze takový kvadr složit
1	I	1	1	12	2	3	48	1
2	II	1	12	1	2	36	4	1
3	III	12	1	1	24	3	4	2
4	IV	1	2	6	2	6	24	1
5	V	1	6	2	2	18	8	1
6	(III)	2	1	6	4	3	24	viz č. 3
7	VI	2	6	1	4	18	4	1
8	VII	6	1	2	12	3	8	2
9	VIII	6	2	1	12	6	4	3
10	IX	1	3	4	2	9	16	1
11	X	1	4	3	2	12	12	1
12	XI	3	1	4	6	3	16	1
13	(VIII)	3	4	1	6	12	4	viz č. 9
14	(VII)	4	1	3	8	3	12	viz č. 8
15	XII	4	3	1	8	9	4	2
16	(VIII)	2	2	3	4	6	12	viz č. 9
17	(XII)	2	3	2	4	9	8	viz č. 15
18	XIII	3	2	2	6	6	8	1
	13 typů							18 případů

Výsledek. Lze tedy z daných kostek složit 18 kvádrů, ale některé z nich mají stejné rozměry; je 13 kvádrů, které nemají stejné rozměry, tj. nejsou shodné. Počet způsobů, jimiž lze kvádr určitých rozměrů z kostek složit, je uveden v posledním sloupci tabulky.

Obdobná řešení podali Monika Fetterová, 8. tř. 81. osš, Praha 13 a Karel Tregl, 8. tř. osš, Strážnice. Bečvou, který zhotovil i příslušné modely.

9. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D

1. Je dán výraz

$$\frac{a^3 - b^2c - bc^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^3 - c^2a - ca^2}{(b - a)(b - c)} + \frac{c^3 - a^2b - ab^2}{(c - a)(c - b)}.$$

Zjednodušte jej.

Co musí platit o číslech a , b , c , aby daný výraz měl smysl?

Řešení. I. Označme V daný výraz. Jmenovatelé jeho tří zlomků jsou

$$\left. \begin{aligned} x &= (a - b)(a - c) = -(a - b)(c - a), \\ y &= (b - a)(b - c) = -(b - c)(a - b), \\ z &= (c - a)(c - b) = -(c - a)(b - c). \end{aligned} \right\} (1)$$

Z pravých stran těchto rovností vidíme, že tyto výrazy vznikly jako součiny vždy dvou z těchto tří čísel

$$a - b, \quad b - c, \quad c - a$$

a třetího čísla, jímž je číslo -1 . Proto výraz

$$n = (a - b)(b - c)(c - a)$$

je společným násobkem čísel (1). Přitom platí

$$\left. \begin{aligned} n &= -x(b - c), \\ n &= -y(c - a), \\ n &= -z(a - b). \end{aligned} \right\} (2)$$

Abychom zlomky daného výrazu V uvedli na společného jmenovatele, rozšíříme je pořadě čísla

$$-(b - c), \quad -(c - a), \quad -(a - b).$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{n} [(a^3 - b^2c - bc^2)(b - c) + (b^3 - c^2a - ca^2)(c - a) + \\ &\quad + (c^3 - a^2b - ab^2)(a - b)] = -\frac{1}{n} \cdot U, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} U &= a^3b - b^3c - b^2c^2 - a^3c + b^2c^2 + bc^3 + \\ &\quad + b^3c - ac^3 - a^2c^2 - ab^3 + a^2c^2 + a^3c + \\ &\quad + ac^3 - a^3b - a^2b^2 - bc^3 + a^2b^2 + ab^3 = \\ &= a^3b - a^3b + b^2c^2 - b^2c^2 + bc^3 - bc^3 + \\ &\quad + b^3c - b^3c + a^2c^2 - a^2c^2 + a^3c - a^3c + \\ &\quad + ac^3 - ac^3 + a^2b^2 - a^2b^2 + ab^3 - ab^3 = 0, \end{aligned}$$

tj. $U = 0$.

Je tedy
$$V = -\frac{1}{n} \cdot 0 = 0$$

pro všechna čísla a, b, c , pro která má každý ze zlomků daného výrazu význam.

II. Jestliže jmenovatel některého zlomku výrazu V je roven nule, ztrácí výraz V smysl. Ptáme se tedy, pro která čísla a, b, c je některé z čísel x, y, z [viz (1)] rovno nule. Ze vztahů

$$(a - b)(c - a) = 0,$$

$$(b - c)(a - b) = 0,$$

$$(c - a)(b - c) = 0$$

plyne, že musí platit jedna z těchto rovností:

$$a - b = 0, \quad b - c = 0, \quad c - a = 0$$

neboli jedna z rovností

$$a = b, \quad b = c, \quad c = a. \quad (3)$$

Platí-li jedna z uvedených rovností, jsou dvě z čísel x, y, z [viz (1)] rovna nule; tím ztrácejí dva zlomky ve výrazu V smysl.

— Jestliže neplatí ani jeden vztah (3), má výraz V smysl.

Odpověď. Daný výraz V má smysl pro každá tři čísla a, b, c , z nichž žádná dvě si nejsou rovna; pro tato čísla je $V = 0$. Jsou-li dvě z čísel a, b, c sobě rovna, ztrácí výraz V smysl.

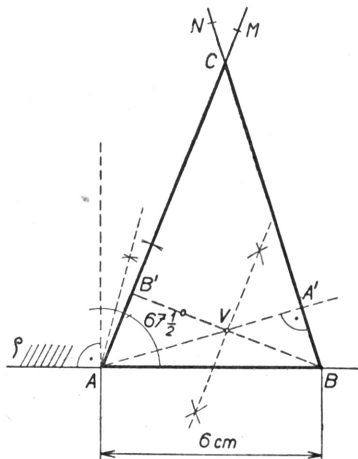
Řešení podala P. Goliášová, 8. tř.
2. jsš, Gottwaldov.

2. Zostrojte trojuholník ABC , ak je dané $AB = 6$ cm, $\sphericalangle CAB = 67\frac{1}{2}^\circ$, ak viete, že priesečník všetkých troch výšok tohto trojuholníka ABC rozpoluje výšku vedenú vrcholom B .

Riešenie. Rozbor. Myslíme si, že trojuholník ABC v obr. 60 vyhovuje požiadavkám úlohy, t. j. že platí

$$AB = 6 \text{ cm}, \sphericalangle CAB = 67\frac{1}{2}^\circ, VB = VB', \quad (1)$$

kde V je priesečník výšok a B' je pätá výšky vedenej bodom B na stranu CA . Potom je $BC \perp AV$. Podľa toho urobíme *konštrukciu*:



Obr. 60

Zvolíme úsečku AB dĺžky 6 cm. Jednu z polrovín vyŕatých priamkou AB označíme ϱ . V polrovine ϱ zostrojíme euklidovsky (pomocou pravítka a kružidla) uhol $\sphericalangle MAB = 67\frac{1}{2}^\circ$. Bodom B zostrojíme kolmicu k priamke AM a označíme B' jej päť. Zostrojíme stred V úsečky BB' . Bodom B zostrojíme kolmicu k priamke AV a označíme na nej bod N , ktorý leží vnútri polroviny ϱ . Spoločný bod C polpriamok AM , BN je tretí vrchol hľadaného trojuholníka.

Dôkaz. Podľa konštrukcie o trojuholníku ABC platia vzťahy (1); ďalej je $BB' \perp AC$, $AA' \perp BC$, takže priesečník V priamok AA' , BB' je priesečníkom výšok trojuholníka ABC .

Diskusia. Uhol $\sphericalangle MAB = 67\frac{1}{2}^\circ$ je ostrý; preto bod B' leží vnútri polpriamky AM [pozri učebnicu Geometrie pro 7. roč., vydanie z r. 1955, str. 112, príklad 17]. Bod B' a s ním aj stred V úsečky BB' leží preto vnútri polroviny ϱ . Bod V a s ním polpriamka AV leží v uhle $\sphericalangle BAM$; je teda uhol $\sphericalangle BAV$ menší než $67\frac{1}{2}^\circ$ a preto pravouhlý trojuholník ABA' s preponou AB leží v polrovine ϱ . Pritom je uhol $\sphericalangle ABA'$ tretím vrcholom pravouhlého trojuholníka ABA' a je teda ostrý. Súčet ostrých uhlov $\sphericalangle BAM$, $\sphericalangle ABA'$ je preto menší než 180° . Z toho podľa Euklidovej axiomy vyplýva, že polpriamky AM , BN

majú v polrovine ϱ spoločný bod C . Trojuholník ABC sa teda z daných prvkov dá zostrojiť. Pri zvolenom umiestení sa teda dá zostrojiť jediný trojuholník ABC .

Tým je riešenie úlohy hotové.

Pekné riešenie vypracovala Adéla Benešová, 8. tr. 5. osš, Gottwaldov a ďalej Pavel Bureš, 8. tr. školy pri Gottwaldovej detskej liečebni v Luži-Košumberku.

3. Narysujte pravouhlý rovnoramenný trojuholník ABC s preponou $AB = 0,7$ dm. Okolo bodov A a B opíšte kružnice s polomerom $\frac{1}{2}AB$. Označte x obsah (v dm^2) tej časti trojuholníka ABC , ktorá leží zvonku oboch týchto kružníc.

a) Vypočítajte číslo x .

b) Koľko percent z obsahu trojuholníka ABC je obsah x ?

Riešenie (obr. 61). a) Obsah P trojuholníka ABC je

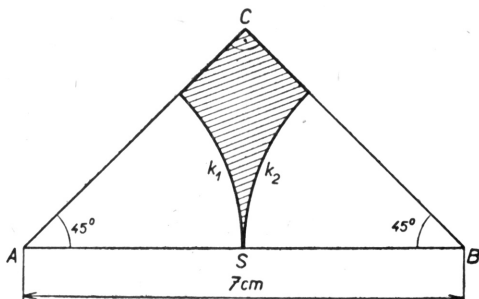
$$P = \frac{1}{2}AB \cdot SC,$$

kde $AB = 0,7$, $SC = \frac{1}{2} \cdot 0,7$. Je teda

$$P = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,7,$$

čiže $P = \frac{1}{4} \cdot 0,7^2$. (1)

Výseky so stredmi A, B majú polomer $r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 0,7$. Ich stredové uhly sú 45° . Súčet oboch výsekov je štvrtkruh s obsahom



Obr. 61

$$Q = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{1}{2} \cdot 0,7\right)^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,7^2 = \frac{1}{16}\pi \cdot 0,7^2,$$

t. j.

$$Q = \frac{1}{16}\pi \cdot 0,7^2.$$

Obsah

$$x = P - Q, \text{ čiže}$$

$$x = \frac{1}{16} \cdot 0,7^2 (4 - \pi). \quad (2)$$

Platí

$$4 - \pi \doteq 4 - 3,1416 = 0,8584 \quad (2')$$

a teda

$$x \doteq \frac{1}{16} \cdot 0,7^2 \cdot 0,8584 = \frac{1}{16} \cdot 0,49 \cdot 0,8584.$$

Výpočty:

$$\begin{array}{r} 0,49 \cdot 0,8584 \\ \hline 3\,4336 \\ 77256 \\ \hline 0,4\,20616 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,4206\,16 : 16 = 0,026\,288\,5 \\ 100 \\ 46 \\ 141 \\ 136 \\ 80 \end{array}$$

$$x \doteq 0,0262885 \doteq 0,0263 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Odpoveď. Obsah $x \doteq 0,0263 \text{ dm}^2$, t. j. asi $2,6 \text{ cm}^2$.

b) Označme p hľadaný počet percent. Percentová časť je daná vzťahom (2), základ P je daný vzťahom (1).

Platí
$$p = \frac{x}{P} \cdot 100 = 100x \cdot \frac{1}{P}. \quad (3)$$

Zo vzťahu (1) vyplýva, že

$$\frac{1}{P} = \frac{4}{0,7^2}. \quad (4)$$

Dosaďme zo vzťahov (2), (4) do vzťahu (3); dostaneme

$$p = 100 \cdot \frac{1}{16} \cdot 0,7^2 (4 - \pi) \cdot \frac{4}{0,7^2} = 25(4 - \pi).$$

Podľa (2') je teda

$$p \doteq 25 \cdot 0,8584.$$

Výpočet:

$$\begin{array}{r} 25 \cdot 0,8584 \\ \hline 1\,7168 \\ 42920 \\ \hline 21,4600 \end{array}$$

Je teda $p \doteq 21,46 \doteq 21,5$.

Odpověď. Obsah x uvažovaného obrazca je asi 21,5% obsahu daného trojúhelníka ABC .

Riešenia podali Juraj Milian, 8. tr.
jsš, Štúrovo a B. Martišová,
8. tr. 4. osš, Gottwaldov.

4. Pavel měl u sebe přesně 40 Kčs (vesměs v papírových penězích). Chtěl si koupit knížku za 30 Kčs. Nemohl ji však zaplatit, protože prodavač neměl nazpět drobné a částka 30 Kčs se nedala Pavlovými penězi vyplatit.

Určete, kolik korun, tříkorun, pětikorun atd. měl Pavel u sebe. Odpověď odůvodněte.

Řešení. I. V dalším značka $\frac{3}{10}$ znamená tři desetikoruny; podobně $\frac{4}{3}$ značí čtyři tříkoruny a $\frac{5}{1}$ značí pět jednokorunových státovek.

Zjistíme všechny možnosti, jimiž lze ze čtyřiceti korun (v československých papírových penězích) vyplatit částku 10 Kčs nebo částku 30 Kčs; částka 10 Kčs by totiž po zaplacení nákupu Pavlovi zbyla. Nebudeme však všechny tyto možnosti vyhledávat se vši zevrubností, spokojíme se s určitými skupinami možností, kdy lze provést výplatu 30 Kčs popřípadě 10 Kčs (ostatně viz tabulku č. 1).

Vyjdeme od takové situace, kdy je počet papírových peněz co nejmenší, takže k sestavení částky 40 Kčs

užíváme peněz co největších. Pod názvem např. „možnost č. 1“ rozumíme řadu možností, kdy je mezi penězi $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{10}$ a kdy nás další peníze nezajímají; stejně tomu je i u dalších možností.

Při našich úsudcích uijeme několikrát této věty **P**: „Máme-li částku alespoň 10 Kčs v tříkorunách a v jednokorunách, přičemž počet jednokorun je alespoň jedna, potom můžeme vyplatit částku 10 Kčs.“

Důkaz. Představme si, že postupně z dané částky vytváříme hromádky po třech korunách (to znamená, že na hromádce je buď jedna tříkoruna anebo tři jednokoruny); pak na poslední hromádce jsou buď tři koruny nebo jen dvě anebo pouze jedna. Přitom můžeme vytvoření hromádek provést tak, že tu jednokorunovku, která podle předpokladu je v dané částce (viz předpoklad naší věty **P**), zařadíme právě do poslední hromádky. Protože máme částku alespoň 10 Kčs, vzniknou nejméně 4 hromádky, přičemž jedině poslední hromádka může být neúplná. Vezmeme 3 první hromádky a připojíme k nim jednu jednokorunovku z poslední hromádky; tím vznikne hledaná částka 10 Kčs, čímž je důkaz věty **P** proveden.

II. Řešení dané úlohy. V připojené tabulce máme vypsány možnosti složení Pavlových peněz. Otazníky v tabulce značí zcela určité přirozené číslo nebo nulu; jeden takový řádek přitom popřípadě značí řadu mož-

Tabulka

Pořadové číslo možnosti	Máme tento počet						Způsob jak vyplatíme částku		Poznámka
	25-korun	10-korun	5-korun	3-korun	1-korun		10 Kčs	30 Kčs	
	1	1	alespoň 1	?	?		1/10	1/25 + 1/5	
1	1	1	0	—	—				
2	1	0							
3	1	0	0	právě 5	0		nejde	nejde	To je právě hledaný případ, kdy nelze vyplatit ani 30 Kčs ani 10 Kčs
4	1	0	0	?	?				Máme alespoň 10 Kčs ve 3-korunách a v 1-korunách; viz větu P
5	0	alespoň 1			?		podle věty P		
6	0	0	alespoň 2	?	?		1/10		
7	0	0	právě 1	?	?)		2/5		*) Pavel má právě 1/5 a ještě 35 Kčs (tj. třikoruny a jednokoruny); nemůže mít jen samé třikoruny (tj. má alespoň 1/1).
8	0	0	0	?	?)		podle P		**) Pavel má jen třikoruny a jednokoruny, ale má nutně alespoň 1/1.

ností, neboť otazníky lze různým způsobem vhodně doplnit, aby hodnota peněz byla v řádku právě 40 Kčs.

Tím jsou všechny možnosti vyčerpány. Podle tabulky Pavel měl tedy právě jednu dvacetipětikorunu a 5 tříkorun; skutečně je

$$25 + 15 = 40.$$

Částku 30 Kčs však Pavel nemůže ze svých peněz vyplatit, neboť je $25 + 3 = 28$ a $25 + 3n > 30$ pro přirozené číslo $n > 1$. Tím je řešení úlohy provedeno.

Jiný postup řešení. I. Dokážeme, že situace líčená v textu úlohy může nastat jedině tehdy, má-li Pavel $1/_{25}$.

Důkaz. Předpokládejme, že nemá $1/_{25}$; dokážeme, že může vyplatit 10 Kčs nebo 30 Kčs.

Má-li alespoň $1/_{10}$ nebo alespoň $2/_{5}$, může vyplatit 10 Kčs.

Má-li $1/_{5}$ a nemá ani $1/_{25}$ ani $1/_{10}$, má částku 35 Kčs ve tříkorunách a korunách; protože je $35 = 33 + 2$, musí mít alespoň $2/_{1}$. Ze zbytku peněz (33 Kčs) si udělá hromádky po 3 Kčs (buď pomocí $1/_{3}$ nebo $3/_{1}$) vezme 3 hromádky a $1/_{1}$, čímž dostane 10 Kčs.

Nechť nemá ani $1/_{25}$ ani $1/_{10}$ ani $1/_{5}$, tj. má jen tříkoruny a koruny. Protože je $40 = 39 + 1$, má alespoň $1/_{1}$ a stejně jako v předchozím odstavci pomocí tříkorunových hromádek a $1/_{1}$ vytvoří částku 10 Kčs.

Tím je důkaz proveden.

II. Necht' Pavel má $\frac{1}{25}$.

Má-li $\frac{1}{10}$ nebo alespoň $\frac{1}{5}$, může vyplatit částku 10 Kčs, popřípadě 30 Kčs (je $25 + 5 = 30$).

Necht' nyní má $\frac{1}{25}$, ale nemá ani $\frac{1}{10}$ ani $\frac{1}{5}$, tj. má jen tříkoruny a koruny. Má-li alespoň $\frac{1}{1}$, tj. má $\frac{1}{25}$ a $\frac{1}{1}$, tedy dohromady 26 Kčs, zbývá mu 14 Kčs; z této částky utvoří 3 tříkorunové hromádky a ke třem z nich připojí $\frac{1}{1}$, takže může vyplatit 10 Kčs. Zbývá nám tedy možnost, že nemá ani $\frac{1}{1}$, takže musí mít $\frac{1}{25}$ a $\frac{5}{3}$.

Tu platí skutečně $25 + 3 \cdot 5 = 40$.

Částku 10 Kčs nelze vyplatit pomocí tříkorun a proto nelze vyplatit ani částku 30 Kčs.

Odpověď. Pavel měl dvacetipětikorunu a pět tříkorun.

IV. Zpráva o první mezinárodní matematické olympiádě

1. O VZNIKU A PRŮBĚHU PRVNÍ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

V této kapitole uveřejňujeme zprávu o první mezinárodní olympiádě, která byla uspořádána v Rumunsku z iniciativy rumunských matematiků. Autorem 1. části této zprávy je generální tajemník Společnosti pro matematické a fyzikální vědy Rumunské lidové republiky, s. docent Tiberiu Roman; jeho příspěvek přeložil hlavní autor této brožury, který jako vedoucí československé delegace na I. mezinárodní olympiádě zpracoval 2. část této zprávy.

I. Společnost pro matematické a fyzikální vědy Rumunské lidové republiky¹⁾ se snažila v průběhu svého desetiletého trvání získat zájem mládeže o matematiku těmito prostředky: Od svého založení vydává pro mládež měsíčník „*Gazeta Matematică și Fizică*“, řada B (též maďarsky s názvem *Matematikas es Fizikai Lapok*), pořádá olympiády a zájmové kroužky ve městech a organizuje v rámci mimoškolní činnosti žáků soutěže mezi jednotlivými školami. Tuto výchovnou práci mezi mládeží převzala SSMF jako tradici časopisu *Gazeta Matematică*²⁾ a přetvořila ji

¹⁾ Societatea de Științe Matematice și Fizice din R. P. R., str. Academiei Nr. 44, București I; v dalším pro název této společnosti užíváme zkratky SSMF — *poznámka překladatele*

²⁾ Časopis byl založen r. 1895 a má ještě dvě další řady; z nich řada A je určena pro studenty a kandidáty učitelství matematiky a fyziky na středních školách — *poznámka překladatele*

v činnost masovou. Soutěže se dnes účastní stovky učitelů a desetitisíce žáků, přičemž se za dobu jejího trvání okruh účastníků i počet odborných disciplín podstatně rozšířil.

V r. 1950 byla uspořádána první matematická soutěž pro žáky středních škol (tj. 8.—10. třídu), a to nejprve jen v některých krajích. V dalších letech se soutěž rozšířila na všechna nejdůležitější města a v r. 1954 i na žáky 5. až 7. tříd středních škol³⁾. Roku 1955 bylo provedeno dvojí rozšíření soutěže: jednak přešla i na odborné a technické mistrovské školy a jednak vedle matematiky byla do okruhu soutěžní látky přibrána i fyzika. Roku 1957 pak se začalo s organizováním soutěže z matematiky a fyziky pro vysokoškolské studenty.

Návrh na uspořádání mezinárodní matematické olympiády podal autor těchto řádků v květnu 1956 na IV. mezinárodním kongresu matematiků (ve svém příspěvku „O mimoškolní matematické činnosti žáků na všeobecně vzdělávacích školách“).

Tento podnět byl pojat do pracovního plánu SSMF a podařilo se jej uskutečnit díky trvalé pomoci, kterou kultuře, vědě, vyučování a výchově věnují Rumunská dělnická strana a vláda Rumunské lidové republiky

³⁾ Do škol. r. 1958/59 včetně byla rumunská střední škola desetiletá jako v SSSR — *poznámka překladatele*

a díky přátelským vztahům, které existují mezi jednotlivými zeměmi socialistického tábora.

Pozvání k účasti na mezinárodní matematické olympiádě byla zaslána těmto společnostem: *Moskevské matematické společnosti, Jednotě čs. matematiků a fyziků, Polské matematické společnosti, Matematické společnosti Jánose Bolyaie v Budapešti a ministerstvům školství a kultury Albánské lidové republiky, Bulharské lidově demokratické republiky a Německé lidově demokratické republiky.*

Poslání mezinárodní matematické olympiády spatřujeme v těchto směrech:

1. Umožnit osobní setkání a navázání přátelských vztahů mezi mládeží téhož věku, která je v našich spřátelených socialistických zemích vychovávána v témže duchu.

2. Položit základ k budoucí vzájemné vědecké spolupráci těch příslušníků mládeže, kteří se mají v budoucnu stát vědeckými pracovníky v oboru matematických věd.

3. Umožnit účastněným učitelům vzájemnou výměnu názorů na budoucí vývoj vyučování matematice na středních školách.

4. Organizovat tyto matematické olympiády postupně ve všech zúčastněných socialistických zemích.

5. Účastníkům dát příležitost, aby dobře poznali zemi, ve které je právě mezinárodní MO pořádána.

Kladné odpovědi se sliby spoluúčasti na I. mezinárodní matematické olympiádě jsme obdrželi od všech pozvaných zemí s výjimkou Albánské lidové republiky.

II. Účastníci na mezinárodní matematické olympiádě, žáci z Československa, Maďarska, Polska, Rumunska a Sovětského svazu, byli vybráni na základě úspěchů, jichž dosáhli při národních matematických olympiádách ve svých zemích, kdežto žáci z Bulharska a Německé demokratické republiky byli vysláni na základě svých úspěchů v matematice při zkouškách dospělosti.

Vedoucími delegací na mezinárodní matematické olympiádě byli (podle abecedního pořádku zemí):

Stoian Budurov, inspektor metodiky ministerstva školství a kultury, Sofie (Bulharsko); *Rudolf Zelinka*, zástupce ředitele Matematického ústavu Československé akademie věd, Praha (Československo); *Endre Hodi*, vědecký pracovník Laboratoře pro optiku a jemnou mechaniku, Budapešť (Maďarsko); *Rudolf Nitz*, učitel vyšší střední školy Otty Guericke, Magdeburg (Německá demokratická republika); *Mieczysław Czyżykowski*, profesor polytechniky, Varšava (Polsko); *G. D. Simionescu*, docent polytechniky, Bukurešť (Rumunsko); *Anatol Michajlovič Vladimírski*, ředitel střední školy č. 450, Moskva (Sovětský svaz).

Písemné zkoušky účastníků mezinárodní mate-

matické olympiády se konaly ve dnech 24. a 25. července 1959 ve velké posluchárně Polytechnického ústavu v městě Oraşul Stalin. Byly zadány úlohy, které vybrala mezinárodní komise⁴⁾ z celkem 70 návrhů, které dodali jednotliví vedoucí sedmi delegací ze svých zemí.

Pro první písemnou práci byly zvoleny tři úlohy z těchto oborů školské matematiky: aritmetika (Polsko); algebra (Rumunsko); trigonometrie (Maďarsko).

Druhá písemná práce měla tři úlohy s tematikou: planimetrie (Maďarsko, Rumunsko); stereometrie (Československo).

Mezinárodní komise provedla nejen výběr témat úloh a jejich překlad do sedmi jazyků (což si vyžádalo mnoho hodin intenzivní práce), ale i opravy písemných soutěžních prací a určila vyznamenané účastníky soutěže (což si vyžádalo ještě víc času a námahy⁵⁾).

Je třeba zdůraznit, že všechny tyto práce byly provedeny za obětavé soudružské spolupráce a v ovzduší plném vzájemného pochopení.

Při obou písemných zkouškách šlo o to, aby olympionici prokázali své znalosti, které pak mohly být na podkladě daných úloh spravedlivě oceněny

⁴⁾ Ta byla sestavena z vedoucích jednotlivých delegací.

⁵⁾ Při této příležitosti znovu děkuji s. Güntheru Bachovi, odbornému asistentu university v Bukurešti, za pomoc, kterou mi při těchto pracích poskytoval. — *Překladatel*

(znalost matematických pouček, početních metod atd.).

Vybraná témata umožňovala, aby soutěžící prokázali své vědomosti v klasické školské matematice (znalost pouček, početních metod), aby ukázali své objevitelské nadání a vynalézavost i schopnost matematicky dokázat všechna svá tvrzení; vedle toho měli soutěžící i možnost u každé úlohy podat více řešení, připojit závažné poznámky nebo podat zobecnění příslušné úlohy. To vše umožnilo mezinárodní komisi vybrat mezi soutěžícími nejlépe připravené a nejnadanější žáky.

Přestože směrnice pro organizaci mezinárodních matematických olympiád, pokud jde o pořadí jednotlivých zemí, nebyly vůbec sjednávány, lze přece jen podle získaných výsledků neoficiálně udat toto pořadí: 1. Rumunsko, 2. Maďarsko, 3. Československo, 4. Sovětský svaz, 5. Bulharsko, 6. Polsko, 7. Německá demokratická republika.

Program mezinárodní matematické olympiády měl vedle vlastní soutěže tuto další náplň:

a) Slavnostní zahájení soutěže v Oraşul Stalin. Za předsednickým stolem zasedli vedoucí delegací a za vedení SSMF promluvil profesor *dr. N. Teodorescu*, člen korespondent Rumunské akademie věd.

b) Shlédnutí některých přírodních krás Rumunska (lázně Tuşnad a cesta tam dne 23. 7.; Poiana Stalin a Postăvarul dne 25. 7.; údolí Timiše a Prahové

dne 26. 7.; Snagov dne 30. 7.). Dále návštěva významných průmyslových podniků („Steagul Roșu“ — továrna na nákladní vagóny, prohlídka města Orașul Stalin, naftové rafinerie č. 1 v Ploești, závody „23. Augusta“ a kombinát „Casa Scînetii“).

c) Návštěva některých kulturně historických míst (muzeum v Peleși, muzeum v Doftaně; Vesnické muzeum a Palác pionýrů v Bukurešti).

d) Návštěva některých měst (Orașul Stalin, Cîmpina, Ploești, București).

e) Slavnost, konaná u příležitosti zakončení mezinárodní matematické olympiády, spojená se slavnostním rozdělením cen (dne 28. 7.), na níž promluvil akademik profesor *dr. Gr. Moisil* jako prezident SSMF, dále ředitel *A. M. Vladimírski* jménem zahraničních delegací, žák *Nicolescu Besarab* za Rumunskou mládež a žák *Bohuslav Diviš* z Československa jménem vyznamenaných zahraničních žáků.

f) Slavnostní večeři, pořádanou v „Casa Universitarilor“ (společenský dům universitních učitelů) pro účastníky mezinárodní matematické olympiády za účasti ústředních orgánů Rumunské dělnické strany, orgánů UTM (Rumunská organizace mládeže), zástupců rumunského ministerstva školství a kultury a pracovníků SSMF. Na večeři promluví: Akademik profesor *dr. Gr. Moisil*, generální ředitel *Ţ. Borca* a inspektor *S. Budurov*.

III. V době, kdy žáci pracovali na soutěžních úlohách v městě Oraşul Stalin, konaly se diskuse o vyučování matematice. Vedle vedoucích delegací se jich účastnili členové vedení SSMF, zástupci pedagogického institutu, Nakladatelství pro pedagogiku a didaktiku, zástupci redakcí matematických časopisů a učitelé z Oraşul Stalin.

V úvodu k těmto diskusím přednesl z pověření předsednictva SSMF profesor *A. Hollinger* z Bukurešti referát, v němž podal v historické zkratce přehled o vyučování matematice na rumunských středních školách; přitom se zvláště podrobně zabýval nynějšími osnovami matematiky.

Na dotaz některých vedoucích delegací vysvětlil docent *T. Roman* organizační strukturu olympiád v Rumunsku (pro 5. až 7. třídu, dále pro střední školy, pro odborné školy atd. a pro vysokoškolské studenty); zmínil se o spoluúčasti ministerstva školství a kultury a UTM (Rumunská mládežnická organizace) a seznámil přítomné se způsoby propagace této soutěže mezi učiteli a žáky, jakož i o pomoci, již poskytují v této věci národní výbory.

Vedoucí delegací Bulharska a Německé demokratické republiky se rozhodli, že budou ve svých zemích usilovat o zavedení podobných olympiád, přičemž jim budou za základ sloužit zkušenosti, s nimiž se v průběhu diskusí seznámili.

Vedoucí delegací Bulharska, Československa, Maďarska, Německé demokratické republiky, Rumunska a Sovětského svazu se těchto diskusí účastnili a poukazovali na charakteristické rysy struktury všeobecně vzdělávacích škol svých zemí, přičemž zároveň podali informace o počtu vyučovacích hodin matematických předmětů v jednotlivých ročnících a o základním pojetí orientace vyučování vůbec.

Značné pozornosti v průběhu diskusí se těšila otázka spojení školy s praxí, se životem a problematika s tím spojená. Vedoucí delegací Československa, Německé demokratické republiky, Maďarska a Sovětského svazu tu podali informace, jak se tato otázka řeší u nich na školách — a to jak v zásadě, tak i v náplni vyučovacích hodin matematiky.

Krátce bylo diskutováno i o modernizaci vyučování matematice na školách, přičemž někteří vedoucí delegací zaujímali k této otázce rezervované stanovisko. Učitel *St. Mărculescu* z Oraşul Stalin podal sdělení o poradách, organizovaných SSMF, a informoval o tom, co bylo v této otázce podniknuto v Rumunsku.

Československý delegát informoval o pokusech, které byly v tomto směru podniknuty v jeho zemi a zdůraznil, že celý problém nebude ještě dlouho zcela rozřešen. Maďarský delegát projevil mínění, že bude nutno nejprve rozhodnout o tom, které dosavadní partie školských osnov matematiky bude třeba vyloučit, a to

ještě dříve, než budou zaváděny partie nové. Sovětský a bulharský delegát vysvětlovali svou zdrženlivost v této otázce tím, že v současné době lze skutečně mluvit o přetěžování žáků, a že už plnění požadavků nynějších osnov působí obtíže.

Ačkoli při této příležitosti ani při námětech předchozích nebyly formulovány určité závěry, lze přece říci, že výměna názorů byla užitečná a že by se v ní mělo pokračovat, zvláště pak se zřetelem na výsledky pokusů, které v tomto směru jednotlivé země učinily.

IV. Ze strany SSMF byl dán podnět k výměně časopisů, který se hned realizoval. Maďarský delegát dovezl řadu učebnic a Rumunská společnost dala k dispozici svou literaturu. Každý přítomný vedoucí delegace dostal od SSMF vydanou část souboru učebnic, které se zavádějí na rumunských školách od školního roku 1959—60, dále řadu děl o vyučování matematice, která vyšla v Nakladatelství pro pedagogiku a didaktiku, dále soubory čísel časopisu „*Gazeta Matematică si Fizică*“, řady A a řady B z roku 1958/59. Napříště bude SSMF spřáteleným zemím zasílat též nově vyšlé učebnice, jakož i výtisky školních osnov pro nový školní rok. Očekává pak, že organizace, které byly na mezinárodní matematické olympiádě zastoupeny, budou rovněž zasílat příslušná díla svých zemí.

Jsme toho názoru, že tato výměna bude jistě užitečná

a že bude v budoucnu přispívat k vzájemným informacím učitelů socialistických zemí.

V. Závěry ze zmíněných skutečností první mezinárodní matematické olympiády.

Zahraniční účastníci mezinárodní matematické olympiády, stejně jako pracovníci rumunského ministerstva školství a kultury, označují tuto mezinárodní akci za zdařilou, oceňující přitom iniciativu i její výsledky.

Vědecké společnosti i ministerstva lidové osvěty všech zemí, které se soutěže účastnily, hledí na ni sympaticky nejen pro tento rok, ale i pro léta příští. Z diskusí s vedoucími zahraničních delegací vyplývá, že budou doma přesvědčovat příslušné orgány o tom, aby v nejbližší příštích letech postupně přebíraly organizaci takových soutěží.

Delegáti těch zemí, kde se dosud národní olympiády nekonají, prohlásili, že se budou snažit svá ministerstva k uspořádání podobných soutěží přimět.

Mezinárodní komise soutěže pracovala objektivně, v duchu vzájemného porozumění a soudružské spolupráce, přičemž vykonaná práce byla opravdu náročná a podstatně omezila hodiny odpočinku a zájezdového programu členů této komise.

Bylo započato s přímou výměnou informací a ná-

zorů o vyučování matematice, v kteréžto výměně se bude i v budoucnu pokračovat.

Členové rumunské delegace i zahraničních delegací (žáci i učitelé) měli při této akci příležitost uzavřít družbu ve znamení přátelství a ideové jednoty.

K tomu přistupuje seznámení se s některými významnými rumunskými podniky a s mnohými krásami našeho venkova.

Ministerstvo vyučování a kultury⁶⁾ přispělo všestranně při organizování matematické olympiády a má velkou zásluhu na jejím uskutečnění.

Řada stranických a státních orgánů i průmyslové podniky se přičinily morálně i hmotně o zajištění úspěchu soutěže.

VI. Je třeba zde ocenit všechny návrhy, které byly podány v průběhu mezinárodní matematické olympiády:

a) Návrhy týkající se olympiády samé:

— Každá delegace bude napříště vedena dvěma odbornými učiteli, z nichž jeden se bude zabývat jen otázkami a úkoly soutěže, druhý povede žákovskou skupinu v rámci všeobecného programu.

— Výběr úloh musí být proveden urychleně tím, že

⁶⁾ Rozumí se: Rumunské lidové republiky.

Poznámka překladatele

mezinárodní komise začne pracovat již před příjezdem soutěžících žáků.

— Práce kolem olympiády se budou konat na počátku července.

b) Návrhy k programu, který se pojí k olympiádě:

— Rozdělit program na řadu dní tak, aby všichni účastníci soutěže získali celkový obraz o hostitelské zemi.

— Připravit informující a obrazový materiál o zemi, v níž je olympiáda pořádána, kterýžto materiál každý host obdrží hned po svém příjezdu.

— Organizovat diskusi žáků o matematických časopisech pro mládež.

— Poskytnout návštěvníkům přehledný obraz o všech druzích umění a o literatuře hostitelské země.

c) Návrhy vyplývající z diskuse na jedno až dvě témata, přičemž by každý účastník dostal úvodní referát již předem.

— Uskutečnit pravidelnou výměnu učebních plánů, učebnic i časopisů a jiného vhodného materiálu mezi příslušnými orgány jednotlivých zemí.

— Seznamovat učitele matematiky jednotlivých zemí s úlohami s praktickou náplní ze života socialistických zemí.

d) Aby byl materiál z každé mezinárodní matematické olympiády zhodnocen, bude vydána brožura s touto náplní:

Přehledná zpráva a získané výsledky. Texty zadaných úloh a jejich žákovská řešení s příslušnými komentáři, úlohy zadané v jednotlivých národních a domácích olympiádách s úplnými řešeními nebo jejich náčrtu.

Tato brožura by měla vyjít současně ve všech zúčastněných zemích.

První mezinárodní matematická olympiáda splnila v podstatných bodech dobře své poslání.

Přejeme budoucím mezinárodním matematickým olympiádám plný úspěch!

Docent Tiberiu Roman,
generální tajemník Společnosti pro
vědy matematické a fyzikální RLR

2. NĚKTERÉ DALŠÍ ÚDAJE O SOUTĚŽI

1. Československou osmičlennou žákovskou delegaci na první mezinárodní matematickou olympiádu navrhl předseda ústředního výboru naší celostátní matematické olympiády.

Žáci byli vybráni z vítězů VIII. ročníku soutěže; přitom byl brán zřetel jednak na umístění, jednak na rovnoměrné zastoupení jednotlivých krajů, jakož i na politickou vyspělost každého žáka. Předložený návrh delegace i jejího vedoucího byl pak projednán s příslušnými činiteli ministerstvem školství a kultury

a s Jednotou čs. matematiků a fyziků, na niž bylo pozvání adresováno. Náklady spojené s cestou hradilo ministerstvo školství a kultury, pobyt v Rumunsku hradila SSMF.

Jednotlivé delegace se skládaly z osmi žáků a vedoucího delegace; sovětská delegace měla však vedle vedoucího jen čtyři žáky. Celkem tedy se účastnilo soutěže 52 žáků.

2. V tomto odstavci podáváme další údaje o výsledcích soutěže.

V tabulce č. 1 je uveden počet bodů, které mohl soutěžící maximálně získat za řešení jednotlivých úloh.

Tabulka č. 1

Příkl. č.	1	2	3	4	5	6	Součet
Max. počet bodů	5	8	7	5	8	7	40

V tabulce č. 2 je přehledně uvedeno ocenění jednotlivých žáků podle delegací; čísla udávají celkový počet bodů, které jednotlivý žák získal. Náš žák *Bohuslav Diviš* z Prahy-Michle získal maximální počet bodů a stal se prvním absolutním vítězem soutěže.

Za úspěchy bylo uděleno celkem 21 cen, a to:

- a) 3 ceny první; b) 3 ceny druhé; c) 5 cen třetích;
- d) 10 čestných uznání.

Tabulka č. 2

Počet bodů, které získali jednotliví žáci

Jméno země	Žák čís.								Celkový počet bodů delegace
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Bulharsko	30	22	20	17	15	10	9	8	131
ČSR	40	29	28	28	25	21	12	9	192
Maďarsko	37	36	35	34	31	24	21	15	233
NDR	9	6	6	6	4	4	3	2	40
Polsko	25	20	19	18	16	11	8	5	122
Rumunsko	37	36	36	35	33	28	23	21	249
SSSR	34	32	30	15	—	—	—	—	111 (222)*

*) Vzhledem k tomu, že se za SSSR zúčastnili soutěže jen 4 žáci, byl při konečném hodnocení počet všech jimi dosažených bodů násoben dvěma.

Tabulka č. 3

Přehled o cenách udělených jednotlivým zemím

I. cena	II. cena	III. cena	Čestné uznání
1. ČSR 2. Maďarsko 3. Rumunsko	1. Maďarsko 2. Rumunsko 3. Rumunsko	1. Maďarsko 2. Rumunsko 3. Maďarsko 4. SSSR 5. Rumunsko	1. SSSR 2. Maďarsko 3. Bulharsko 4. SSSR 5. ČSR 6. ČSR 7. ČSR 8. Rumunsko 9. ČSR 10. Polsko

V tabulce č. 3 je uvedeno, jak se o tyto ceny jednotlivé země podělily.

Českoslovenští žáci získali první cenu a čtyři čestná uznání, tedy celkem 5 cen; vyznamenáni byli žáci: *Bohuslav Diviš*, 11. tř. jsš, Praha 14- Michle, Ohradní 5. *Karel Šmuk*, 11. b tř. jsš, Ostrava VIII- Hladnov.

Jiří Votava, 11. d tř. 14. jsš, Praha 12, ul. W. Piecka 2.

Jiří Moudrý, 11. c tř. jsš, Pardubice, ul. Slovenského povstání.

Zdislav Kovářík, 11. a tř. jsš, Hodonín.

Žáci od SSMF vedle diplomů obdrželi i věcné ceny, především z národního folklóru. I všichni ostatní účastníci a vedoucí delegací byli obdarováni upomínkovými předměty, zvláště pak knihami, takže slavnost, na níž se udílely ceny, měla velmi radostný průběh, jako vůbec celý pobyt naší delegace v Rumunsku.

3. Dále uvádíme texty úloh zadaných na první mezinárodní matematické olympiádě; v závorce je uvedena země, která úlohu dodala. Většinu z těchto úloh jsme zařadili mezi úlohy I. kola IX. ročníku (škol. r. 1959/60) matematické olympiády, jednak proto, aby se s úlohami naši žáci seznámili, jednak proto, aby jak žáci, tak i naši pracovníci v KVMO a s nimi i ostatní učitelé poznali, jakou tematikou se v národních olympiádách jednotlivých spřátelených zemí ponejvíce zabývají. Lze říci, že se

značná pozornost věnuje číselné teorii a v planimetrii vedle konstruktivních úloh též úlohám důkazovým.

TEXTY ÚLOH ZADANÝCH
NA I. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÉ
OLYMPIÁDĚ V RUMUNSKU

1. ~~písemná práce~~ (dne 24. 7. 1959).

1. Dokažte, že zlomek

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

v němž n je přirozené číslo, nelze zkrátit. (Polsko)

2. Pro která reálná čísla x platí:

a) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2};$

b) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 1;$

c) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2.$

(Přitom odmocnina má smysl jen pro nezáporná čísla.)

(Rumunsko)

3. Pro číslo x platí rovnice

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0,$$

kde a, b, c jsou daná reálná čísla.

Napište rovnici druhého stupně, kterou splňuje příslušné číslo $\cos 2x$.

Výsledek výpočtu užíjte na případ, kdy je $a = 4$,
 $b = 2, c = -1$.

(Maďarsko)

Celá tato práce byla rozvržena na 3 hod. čistého času.

2. písemná práce (dne 25. 7. 1959).

4. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC , je-li dána jeho přepona $c = AB$, přičemž ^{velikost} víme, že těžnice příslušná k přeponě je rovna střední geometrické úměrné obou odvěsen. *geometrickému průměru* (Maďarsko)

5. V rovině je dána úsečka AB a uvnitř úsečky je ⁿⁱ dán pohyblivý bod M ; nad úsečkami AM , BM jako stranami sestrojíme dva čtverce $AMCD$, $BMEF$ tak, aby ležely v téže polorovině vyřáté přímkou AB . Těmto čtvercům opišme kružnice; ty se vedle bodu M protínají ještě v dalším bodě N .

a) Dokažte, že přímky AE , BC procházejí bodem N .

b) Dokažte, že přímka MN prochází určitým pevným bodem. *Určete množinu všech*

c) Vyšetřte geometrické místo středů úseček, které spojují středy obou uvažovaných čtverců. (Rumunsko)

6. Jsou dány dvě různoběžné roviny P , Q o průsečnici p ; v rovině P je dán bod A a v rovině Q je ^{průmětem} dán bod C , přičemž žádný z bodů A , C neleží na přímce p .

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ (kde $AB \parallel CD$), jemuž lze (kružnici vepsat) a to takový, aby bod B ležel v rovině P a bod D v rovině Q . (Československo)

Rovněž tato práce byla rozvržena na 3 hod. čistého času.

4. Na závěr je nutno podotknout, že vzájemné setkání mládeže účastněných zemí bylo dojemné a srdečné. Mladí si toho měli mnoho co říci, což bylo usnadněno zvláště tím, že většina z nich mluvila dobře rusky. Jedním z velmi kladných momentů byla právě tato politická škola mládeže, která se ve svých rozhovorech zevrubně informovala o budovatelském úsilí jednotlivých zemí, zvláště pak o rozvoji průmyslu a jeho výrobcích, o školství a studiu vůbec, o sportu a na neposledním místě i o národních matematických olympiádách. Tento výchovný moment velmi vysoce oceňujeme.

OBSAH

I. <i>K průběhu VIII. ročníku matematické olympiády</i>	3
II. <i>Zpráva o výsledcích jednotlivých kol soutěže</i>	
A. Soutěž I. kola	11
B. Soutěž II. kola	14
C. Soutěž III. kola (kategorie A)	27
III. <i>Řešení úloh ze soutěže</i>	
1. Úlohy I. kola kategorie A	30
2. Úlohy II. kola kategorie A	61
3. Úlohy III. kola kategorie A	74
4. Úlohy I. kola kategorie B	89
5. Úlohy II. kola kategorie B	121
6. Úlohy I. kola kategorie C	130
7. Úlohy II. kola kategorie C	157
8. Úlohy I. kola kategorie D	167
9. Úlohy II. kola kategorie D	186
IV. <i>Zpráva o první mezinárodní matematické olympiádě</i>	
1. O vzniku a průběhu první mezinárodní matematické olympiády	199
2. Některé další údaje o soutěži	212

Doslov

Děkuji všem spolupracovníkům z kraje i okresů, kteří mi nej-různějším způsobem pomáhali při organizování VIII. ročníku MO. Zvláště děkuji vědeckým pracovníkům Matematického ústavu ČSAV, soudruhům dr. M. Fiedlerovi CSs, doc. J. Holubářovi a Jiřímu Sedláčkovi CSs; z ostatních jmenuji jen s. doc. Jana Vyšína z Vysoké školy pedagogické a s. doc. dr. M. Kolibiara z Komen-ského university v Bratislavě.

Dále děkuji recenzentům, kteří nemálo přispěli k zdokonalení rukopisu, z nichž s. Vlastimil Macháček s velkým porozuměním a vzornou pečlivostí narýsoval obrázky. Nemálo mou práci ulehčil i s. M. Jelinek, ústřední inspektor MŠK. Na závěr děkuji redak-toru SPN s. Jaromíru Dubskému, který rukopisu věnoval zvláště po stránce jazykové mimořádnou péči a pozornost.

V Praze dne 1. dubna 1960

Rud. Zelinka

Za přispění spolupracovníků zpracoval Rudolf Zelinka

OSMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhla Eva Feiglová

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 05-0-06 — Vydání 1. — Rok vydání 1960 —
Počet stran 220

Edice Pomocné knihy pro žáky

Odpovědný redaktor: Jaromír Dubský

Technická redaktorka: Eva Duchečková

Vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 4, Ostrovní 30,
Praha 2 — AA 7,17 — VA 7,52 — D-11*01078

Náklad 2500 výtisků — Tematická skupina a podskupina 02/57

Cena brož. výtisku Kčs 4,75

56/II-13





05-0-06 02/57

Cena brož. výtisku Kčs 4,75
56/II-13