

10. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 10. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1960-1961. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1962.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404494>

Terms of use:

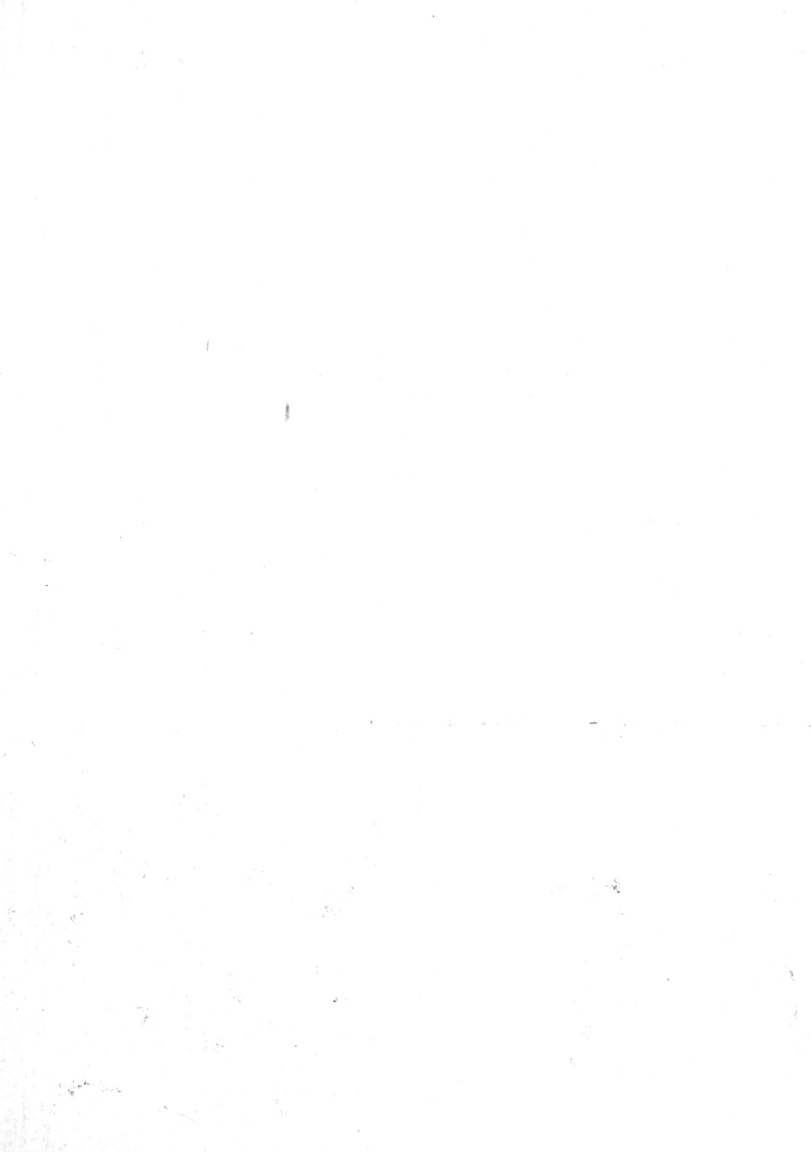
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

**desátý
ročník
matematické
olympiády**

SPN



DESÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva o řešení úloh ze soutěže,
konané ve školním roce 1960-1961*

PRAHA 1962

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Ve spolupráci s komisemi pro úlohy MO při pobočkách JČMF a za přispění spolupracovníků zpracovali *Jan Vyšín a Rudolf Zelinka*.

Slovenské části textu přeložil Jozef Moravčík.

Recenzovali doc. Josef Holubář, Vlastimil Macháček, dr. Zbyněk Nádeník CSc. a Miroslav Šisler CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1962.

I. Do druhého desetiletí MO

Bývá zvykem při takové příležitosti, jakou je desáté výročí založení Matematické olympiády, zamyslet se nad vykonanou prací a ujasnit si plány do budoucna. Nemyslím, že by bylo třeba obsírně hovořit o minulosti: historie naší Matematické olympiády je jistě valné většině čtenářů této brožury známa. Ve všech kulturních zemích a v každé době se pociťovala nutnost povzbuzovat zájem mladých lidí o matematiku a rozvíjet schopnosti nadaných žáků řešit samostatně úlohy, které přesahují svou náročností rámec školského učiva. Proto snad všechny matematické časopisy, určené žákům středních škol, otiskovaly a otiskují soutěžní úlohy a odměňují úspěšné řešitele: tak to činily odedávna i naše *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Takovéto soutěže však nemají žádný pevný řád a probíhají — možno říci — docela živelně; úlohy jsou často nevhodně voleny, jen podle záliby svých autorů; řešitel je tak přiveden k tomu, aby řešil úlohy, na které svými silami nestačí, není veden ani studiem, ani jinak k metodám řešení, nemá často možnost se poradit o svých nesnázích při řešení, není

poučen o chybách, kterých se dopustil, a jeho vzestup není sledován a usměrňován. Chybí ovšem i významná část soutěže, kdy řešitelé pracují na řešení úloh pod kontrolou a za stejných podmínek; chybí i vnější rámec soutěže, jako např. její slavnostní uzavření, který je pro mladé lidi často dosti přitažlivý. Naproti tomu naše Matematická olympiáda (a právě tak i obdobné soutěže v ostatních socialistických státech) má pevný organizační řád a snaží se být nejen soutěží, ale i akcí, v níž se její účastníci mají soustavnou plánovitou prací něčemu novému přiučit; v této formě je naše Matematická olympiáda výrazem soustavné péče naší socialistické vlasti o rozvoj naší mládeže. Proto je zcela přirozené, že pořadateli této soutěže jsou společně *ministerstvo školství a kultury, Matematický ústav ČSAV, Jednota čs. matematiků a fyziků a ústřední výbor Československého svazu mládeže.*

Naše Matematická olympiáda vznikla před deseti lety z iniciativy *akademiků Čecha a Hronce* a *profesora Vyčichla* podle vzoru obdobných soutěží v RSFSR a v Polské lidové republice a to po několika předchozích pokusech, které byly u nás provedeny v oblastním měřítku. V prvních deseti letech svého trvání prodělala MO některé dětské nemoci: měnila se její organizace, neboť se musila přizpůsobovat měnící se struktuře našeho školství, vyjasňovalo se i pojetí

soutěže. Šlo zejména o otázku, zda má být soutěž masovou nebo výběrovou. Celkem lze říci, že Matematická olympiáda se v prvním desetiletí svého trvání zakořeňovala v našem matematickém a školském životě a že se jí to přes mnohé počáteční obtíže podařilo; přitom si vytyčila určité matematické požadavky, neslevovala z nich a ukázalo se, že to byla správná a jediné možná cesta. O dobře vykonané práci svědčí řada bývalých účastníků Matematické olympiády, kteří se s úspěchem uplatňují v technických i vědeckých oborech, mluví o ní i deset svazků této brožury a archiv soutěžních úloh v Matematickém ústavě ČSAV. Naše olympiáda má kádr obětavých a věrných spolupracovníků, a to jak v ústředí, tak ve všech krajích republiky; přitom všichni tito lidé pracují pro olympiádu vedle svého zaměstnání. Neradi operujeme při argumentacích velkými čísly, ale zde se tomu nelze vyhnout: spolupracovníci Matematické olympiády mimo jinou činnost v této soutěži prostudovali a opravili v uplynulých deseti letech na milión žákovských řešení. Počítáme-li na jednu opravu jen čtvrt hodiny — a to je v průměru hodně málo — představují opravy úloh z olympiády pro jednoho pracovníka nepřetržitou práci třiceti let; takové práci je skutečně třeba vzdát čest.

Pohovořme si nyní o přítomnosti a budoucnosti soutěže. Pojetí soutěže se snad už nyní vykrystalizo-

valo: Předně je jasné, že účast na soutěži musí být zcela dobrovolná; nelze schvalovat počínání učitelů, kteří nutí k účasti žáky mající dobrý prospěch v matematice. Na druhé straně bychom si však přáli, aby soutěž zejména v nižších kategoriích byla co nejmasovější: aby podchytila pokud možno všechny žáky, kteří mají zájem a nadání pro matematiku. Přitom si ovšem musíme uvědomit, že zájem a nadání jsou spojité nádoby: u nadaného žáka se zpravidla snadno vzbudí zájem, a pracuje-li žák v matematice soustavně, rozvíjí se jeho nadání. Zvláště nejnižší kategorie D určená pro žáky devátého, výjimečně osmého ročníku základní školy, by měla získávat co nejširší okruh účastníků, měla by mít co nejvíce propagační ráz. V dalších kategoriích C, B, A určených pro žáky středních a odborných škol by měla soutěž stále více přecházet od masovosti k výběrovosti: to zcela odpovídá zvyšování náročnosti úloh, vyhraňujícimu se zájmu žáků o určité obory a konečně i ohledu na jejich časové možnosti. Proto nás nemrzí pokles počtu účastníků vyšších kategorií v posledních ročnících MO; je to i přirozený důsledek vzniku Fyzikální olympiády; tato soutěž v konečném cíli — tj. v rozvíjení matematicko-fyzikálního nadání žáků — není naším konkurentem nebo protivníkem, ale spojencem.

Z vyloženého pojetí vyplývají některé zásady pro

výběr soutěžních úloh. V nižších kategoriích (C, D) by se měly úlohy spíše obracet na vtip žáků, bez velkých nároků na jejich matematické vědomosti, které jsou tak jako tak skrovné. Ve vyšších kategoriích (A, B) by měly soutěžní úlohy klást větší nároky na matematický aparát a znalost metod řešení. V soutěži by se neměly vyskytovat úlohy s umělými obraty, které žáky nevedou k systematickému zkoumání problému. I když středoškolská matematika není příliš rozsáhlá, je snad vhodné — hlavně ze studijních důvodů — zúžit náplň každého ročníku na určitá témata, která nepokrývají celou středoškolskou látku. Takový pokus jsme učinili v desátém ročníku; budeme v něm pokračovat a budeme jej propracovávat. Deset minulých let ukazuje, že se dobře osvědčila organizace „kol“ soutěže: přípravné první kolo má charakter studijní, vlastní soutěží jsou kolo druhé a třetí. Přípravné úlohy prvního kola, které byly poprvé zavedeny v X. ročníku, jsou určeny k jakémusi opakování v okruhu školských poměrně snadných úloh. Další úlohy prvního kola mají připravovat účastníky na vlastní soutěž. Úlohy I. kola by měly žáky přimět k tomu, aby se podrobněji zajímali o příslušnou tematiku; proto byly zavedeny od X. ročníku soutěže tzv. přípravné přednášky. Tyto přednášky — i když v nich budeme pokračovat — jsou jen jedním z prostředků, kterými lze působit na žáky; jednak je na-

vštěvovat nemohou všichni účastníci soutěže, jednak odsuzují posluchače opět víceméně k trpné roli žáka. My však chceme, aby se nadaný žák učil pracovat samostatně a tvořivě, aby si zvykal studovat jednoduché matematické texty. Nedostatek vhodné populární studijní literatury přiměl ÚVMO k jednání s nakladatelstvím *Mladá Fronta*; jednání skončilo úspěšně a počínaje rokem 1961 vydává Mladá Fronta studijní sešity pro účastníky MO pod názvem „*Škola mladých matematiků*“. Sešity budou zaměřeny zpočátku hlavně k tomu, aby seznámily čtenáře přístupnou formou s metodami řešení úloh určité tematiky. Později by mohlo být prostudování některých vhodných brožur i jednou z podmínek, aby se žák vůbec mohl účastnit soutěže. Brožury jsou ovšem určeny hlavně pro žáky nejvyšších dvou kategorií; od mladších žáků bychom asi těžko mohli očekávat samostatné studium literatury. Právě tak přípravné přednášky se budou po loňských zkušenostech asi obracet hlavně k účastníkům kategorií A a B; později, až bude k dispozici více studijních sešitů, mohly by se změnit přednášky v konzultace a diskuse o obsahu některé brožury. V této věci může být ponechána volnost krajským výborům MO, aby se zařídily podle situace ve svém kraji.

Nyní věnujme několik poznámek *mezinárodním matematickým olympiádám*. Všecky dosavadní meziná-

rodní soutěže (v r. 1959 a 1960 v Rumunsku, kde i soutěž vznikla, a v r. 1961 v Maďarsku) patří zatím jen do pokusného stádia; totéž platí i o mezinárodní olympiádě, konané v Československu v roce 1962. Význam těchto olympiád není jen v soutěžení, neboť školské systémy a osnovy zúčastněných zemí se plně neshodují. Mezinárodní olympiády jsou zvláště po výchovné stránce neocenitelnou příležitostí k setkání mladých účastníků z různých států i jejich vedoucích pedagogických pracovníků. Tento politický význam mezinárodních matematických olympiád je třeba zvláště zdůraznit. Mimoto nám poskytují tato setkání jedinečnou příležitost porovnat naše poměry, pokud jde o stav vyučování matematice a péči o mladé nadané matematiky, s ostatními státy socialistického tábora. V tomto směru nejsou pro nás zkušenosti z posledních olympiád v r. 1961 a 1962 příliš potěšující. Zdá se, že děláme pro nadané žáky méně než některé jiné státy. Naše školy pečují sice o žáky zůstávající a snaží se dosáhnout doučovacími kroužky, konzultacemi a jinými opatřeními, aby všichni žáci zvládli minimum učiva. Je však třeba zvýšit péči i o nadané žáky. Vždyť právě žáci nadaní pro matematiku a přírodní vědy jsou nadějí našeho státu: oni budou vedoucími činiteli hospodářského, technického i vědeckého pokroku v příštím komunistickém státě.

Na schůzi ÚVMO v říjnu 1961 se zrodila myšlenka

soustředit každoročně nejlepší účastníky obou nejvyšších kategorií na 10—14 dní a věnovat se jejich individuálnímu školení. Takové soustředění ve vhodném rekreačním prostředí by bylo jistě velmi lákavé a velmi cenné jak pro žáky, tak pro jejich instruktory. Doufáme, že se nám podaří zavést tato soustředění olympioniků jako trvalou instituci.

Shrňme do několika bodů své záměry a přání pro řadu příštích let:

1. *Budeme usilovat o podchycení co největšího počtu matematicky nadaných žáků, pomáhat jim individuálně v soustředěních, sledovat jejich vzestup i další uplatnění v životě. Při vyhledávání talentů spoléháme ovšem na vydatnou pomoc učitelů.*

2. *Budeme zlepšovat náplň jednotlivých ročníků MO tak, aby úlohy přípravného kola i soutěžních kol spolu tématicky dobře souvisely a navazovaly na vyšlou studijní literaturu. Budeme usilovat o modernizaci úloh a jejich přiblížení životu. Také v organizaci soutěže lze leccos zlepšit, např. zajistit jednotnější posuzování řešení úloh, zejména v závěrečném kole.*

3. *Budeme věnovat všemožnou péči knižnici „Škola mladých matematiků“, pokud jde o výběr témat a o způsob jejich zpracování; budeme se snažit, aby se tato sbírka stala vhodnou studijní literaturou jak pro olympioniky, tak pro širší okruh zájemců.*

4. *Pro úspěch naší práce potřebujeme co největší sou-*

činnost všech složek, hlavně krajských výborů MO. Tyto výbory by se měly co nejaktivněji podílet na sestavování i kritice soutěžních úloh, měly by navrhnout vhodná témata studijních sešitů, měly by kritizovat zpracování vyšších svazečků a krajsští pracovníci MO by se měli vyskytovat stále častěji mezi jejich autory.

Přáli bychom si, aby i na odborných školách se Matematická olympiáda vžila tak jako na školách základních a středních. Věříme, že učitelé matematiky na těchto školách se o to přičiní; víme totiž, že je to možné, neboť mezi vítězi jednotlivých ročníků je řada žáků odborných škol, kteří jasně prokázali mimořádné nadání pro matematiku.

5. *již delší dobu se uvažuje o tom rozšířit Matematickou olympiádu i na studenty prvních ročníků vysokých škol technických, aby se v nich probouzel zájem o hlubší matematické vzdělání, které naše technická inteligence tolik potřebuje. Prozatím se dělají pokusné soutěže na některých školách; na základě jejich zkušeností snad bude možné organizovat v budoucnosti soutěž celostátně.*

Na závěr můžeme říci, že naše Matematická olympiáda si získala svou solidní práci za deset let dobré jméno doma i za hranicemi; bude jistě snahou všech nás jejich spolupracovníků, aby si tuto dobrou pověst udržela.

—

Oslavy *desátého výročí vzniku Matematické olympiády* vyvrcholily v úterý dne 10. října 1961 s l a v n o s t n í s c h ů z í ústředního výboru Matematické olympiády. Schůze se konala na ministerstvu školství a kultury a vedle členů ústředního výboru byli přítomni ti pracovníci v Matematické olympiádě, kteří měli obdržet uznání od ministerstva školství a kultury nebo od předsednictva ústředního výboru Jednoty čs. matematiků a fyziků. Po zahájení schůze předsedou ÚVMO *akademikem Josefem Novákem* promluvil k zasloužilým pracovníkům ministr školství a kultury *dr. František Kahuda*. Vzpomněl zakladatelů soutěže a vysoce zhodnotil dobrovolnou práci, kterou organizátoři Matematické olympiády během deseti let vykonali. Poděkoval všem přítomným pracovníkům za jejich dílo a vzpomněl i těch, kteří byli odměněni v rámci krajů a okresů.

Po projevu předal ministr školství a kultury 25 pracovníkům uznání a knižní dar. Poté místopředseda Jednoty čs. matematiků a fyziků *akademik Vlad. Kořínek* předal uznání této společnosti 56 pracovníkům a podaroval je knižními dary.

Jménem vyznamenaných poděkoval *s. František Vejsada*, předseda krajského výboru MO v Českých Budějovicích.

V dalším uvádíme j m e n n é s e z n a m y v y z n a m e n a n ý c h p r a c o v n í k ů:

UZNÁNÍ MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ
A KULTURY OBDRŽELI:

Josef Andrys, Ostrava; *Petr Benda*, Brno; *Vladislav Berger*, Žilina; *Jarolím Bureš*, Rakovník; *Fr. Diessl*, Karlovy Vary; *Anton Dubec*, Bratislava; *Karel Hnyk*, Liberec; *Miloš Jelínek*, Praha; *Ludvík Kapička*, Pardubice; *dr. Milan Kolibiar*, Bratislava; *Leo Krakówka*, Gottwaldov; *Jozef Krchňavý*, Košice; *Fr. Krsek*, Zvolen; *Rudolf Langhammer*, Praha; *Josef Mencl*, Hradec Králové; *dr. Cyril Palaj*, Zvolen; *Emanuel Pavlata*, Ústí n. Labem; *dr. Josef Pírek*, Brno; *Josef Porcal*, Teplice; *Věra Rádlová*, Plzeň; *Josef Stehlík*, Turnov; *Josef Svoboda*, Třebíč; *Fr. Vejsada*, České Budějovice; *Věra Vrtalová*, Prostějov; *Miroslava Žáčková*, Karlovy Vary.

UZNÁNÍ JEDNOTY ČS. MATEMATIKŮ
A FYZIKŮ OBDRŽELI:

a) Učitelé základních devítiletých škol: *K. Jakoubek*, Praha; *Fr. Kubal*, Třeboň; *Boh. Meloun*, Jindřichův Hradec; *Alois Terš*, České Budějovice; *ř. Turdek*, Vlachovo Březí; *ř. Vlček*, Netolice.

b) Učitelé středních a odborných škol: *Dr. Fr. Bacík*, Ledec nad Sázavou; *ř. Baran*, Bardiovéské Kúpele; *L. Beracková*, Rim. Sobota;

K. Brtek, Šumperk; *Ľ. Dittrich*, Louny; *Zd. Grundmann*, Ústí n. Labem; *A. Heinisch*, Nitra; *Margita Hrnčiriková*, Velké Kapušany; *Zdeněk Kalousek*, Jablonec nad Nisou; *Kornélia Kropilaková*, Bratislava; *Lud. Lájčín*, Púchov; *Oldřich Lanta*, Ostrava; *Boh. Macek*, Strakonice; *Ľar. Meduna*, Soběslav; *Ľar. Novák*, Praha; *K. Pavlas*, Velké Meziříčí; *A. Peterková*, Týn nad Vltavou; *Vl. Polesný*, České Budějovice; *Fr. Púchovský*, Dolní Kubín; *Vlad. Sedláček*, Poděbrady; *V. Šimčísková*, Bratislava; *Vl. Šteffko*, Turč. Teplice; *Oldřich Tomeš*, Ostrava; *Karel Trnovský*, Ružomberok; *Inž. A. Vaňo*, Nitra; *Vlad. Večeřa*, Velké Meziříčí; *Alojz Viskupič*, Trenčín, *Fr. Živný*, Ostrava.

c) Učitelé vysokých škol, školští a vědeční pracovníci: *Dr. Fr. Běloun*, Praha; *Oldřich Černý*, Plzeň; *Fr. Dušek*, Liberec; *dr. Mir. Fiedler* CSc., Praha; *Ondr. Gabor*, Banská Bystrica; *Ľos. Holubář*, Praha; *Fr. Hradecký*, Praha; *dr. M. Ľiroušek*, Olomouc; *dr. E. Ľucovič*, Prešov; *St. Kopellent*, Plzeň; *dr. Ľosef Korous*, Žilina; *Ľán Lešo*, Prešov; *Stanislav Liška*, Olomouc; *dr. L. Městková*, Praha; *Inž. Ľindřich Mikeska*, Ostrava; *Ľuraj Molčan*, Prešov; *Mir. Němec*, Suchá; *Vilém Okřina*, Jihlava; *Ľirí Sedláček* CSc., Praha; *Ondr. Strečko*, Prešov; *Václav Volf*, Ústí nad Labem; *dr. Mir. Zedek*, Olomouc.

II. K průběhu X. ročníku Matematické olympiády

1. Jubilejní X. ročník soutěže Matematická olympiáda (zkratkou MO) probíhal ve školním roce 1960/61. Žáci byli zařazeni do čtyř soutěžních kategorií, jak je patrné z tabulky:

Kategorie	A	B	C
Ročník střední všeobecně vzdělávací školy	3	2	1
Ročník odborné školy	3—4	2	1

V kategorii D soutěžili žáci 8. a 9. ročníků základní devítileté školy. Jestliže osnovy školy neodpovídaly požadavkům kladeným na kategorii, mohl krajský výbor MO zařadit žáky těchto škol i do nižší kategorie, než jakou v předchozí tabulce uvádíme. Zvláště pokročilí žáci mohli být naopak zařazeni i do vyšší kategorie.

2. Soutěž se řídila týmž organizačním řádem jako v předchozím ročníku (viz instrukci č. 70 ve Věstníku ministerstva školství a kultury, roč. XV, str. 289

ze dne 31. 10. 1959). Uspořádali ji *ministerstvo školství a kultury, Matematický ústav ČSAV, Jednota čs. matematiků a fyziků a ústřední výbor ČSM*.

Soutěž řídil *ústřední výbor Matematické olympiády (ÚVMO)*. V každém kraji byly zřízeny *krajské výbory* a v okresech *okresní výbory Matematické olympiády (KVMO a OVMO)*; jmenovaly je odbory pro školství a kulturu KNV a ONV. Členy výborů MO byli učitelé matematiky středních, odborných a vysokých škol, školští a vědečtí pracovníci, jakož i pracovníci ČSM. Členy ÚVMO byli předsedové krajských výborů MO a dále osoby jmenované ministerstvem školství a kultury na návrh Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Ústřední výbor MO (sídlo: Žitná 25, Praha 1 — Nové Město, tel. 24 11 93) měl toto složení:

Předseda: *Akademik Josef Novák*, vedoucí vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Místopředseda: *Jan Vyšín*, docent matem.-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze.

Jednatel: *Rudolf Zelinka*, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Členové: *Dr. Fr. Běloun*, vedoucí matematického kabinetu Ústavu pro další vzdělání učitelů v Praze.

Karel Hnyk, odb. asistent pedagogického institutu v Liberci.

Doc. Josef Holubář, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Fr. Hradecký, odb. asistent matem.-fyz. fakulty Karlovy university v Praze.

Dr. Karel Hruša, pracovník Ústavu pro dálkové studium učitelů v Praze.

Miloš Jelínek, ústřední inspektor ministerstva školství a kultury v Praze.

Dr. Milan Kolibiar, docent přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě.

Dr. Josef Pírek, ředitel základní devítileté školy v Brně.

Fr. Veselý, odb. asistent Vysoké školy strojní a elektrotechnické v Plzni.

Dr. Miloslav Zedek, docent Palackého university v Olomouci.

Dr. Miroslav Fiedler CSc., vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Náhradník:

Miroslav Šisler CSc., vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Členové — předsedové KVMO:

Stanislav Horák, odb. asistent katedry matematiky a deskr. geometrie fakulty strojní ČVUT v Praze.

Dr. Václav Pleskot, profesor ČVUT v Praze.

Věra Rádllová, učitelka SVVŠ, Plzeň.

Josef Porcal, učitel zdravotnické školy, Teplice.

Jan Laštovka, vedoucí kabinetu matematiky Ústavu pro další vzdělávání učitelů, Pardubice.

Petr Benda, odb. asistent VŠP, Brno.

Inž. Jindřich Mikeska, docent vysoké školy báňské, Ostrava.

Dr. Cyril Palaj, docent Vysoké školy lesní a dřevařské, Zvolen.

Dr. Ján Jakubík, docent Vysoké školy technické, Košice.

3. Podle organizačního řádu měla soutěž v kategorii A tři soutěžní kola, v ostatních kategoriích dvě kola. Od října 1960 do konce února 1961 probíhalo I. kolo soutěže. V něm žáci předložili řešení všech šesti přípravných úloh (z toho musili podat úspěšná řešení alespoň čtyř úloh) a šest soutěžních úloh (musili dobře

rozřešit alespoň čtyři úlohy). Úspěšní řešitelé I. kola se mohli přihlásit do soutěže II. kola, a to na návrh ředitele školy; o zařazení rozhodoval KVMO, popř. OVMO. Žákovská řešení úloh I. kola opravoval žákův učitel matematiky; řešení úloh II. kola opravovali členové KVMO a OVMO. Počet přihlášených žáků do II. kola nesměl v každé z kategorií překročit 10 % celkového počtu žáků příslušného ročníku na škole.

Texty úloh připravovaly komise při některých pobočkách Jednoty čs. matematiků a fyziků (Č. Budějovice, Plzeň, Liberec, Brno) spolu s předsednictvem ÚVMO. Texty úloh I. kola otiskly časopisy Rozhledy matematicko-fyzikální a Matematika ve škole. Vedle toho ministerstvo školství a kultury vydalo svým nákladem zvláštní leták o 30 stranách v celkovém počtu 15 000 exemplářů. V letáku byly uvedeny organizační pokyny a informace pro účastníky soutěže, přípravné a soutěžní úlohy I. kola pro všechny kategorie, seznam pomocné a studijní literatury, výběr snazších úloh z předchozích ročníků soutěže a některé matematické věty. Pro opravovatele žakovských řešení rozeslal ÚVMO vzorová řešení ve velkém počtu exemplářů; pomocí nich byli instruováni žáci o nedostacích ve svých řešeních I. a II. kola.

Pobočky Jednoty čs. matematiků a fyziků v rámci svých rozpočtů uskutečnily s pracovníky KVMO pro

žáky kategorií A až C tzv. *přípravné přednášky* pro olympioniky v počtu 4—8 za školní rok. V těchto přednáškách se žáci seznámili s některými odlehlejšími partiemi školské matematiky nebo s těmi úseky učiva, na které se soutěž soustředila; jednalo se o tyto úseky:

1. teorie dělitelnosti celých čísel; 2. základy školské teorie funkcí (jejich vyšetřování a znázorňování); 3. planimetrické konstruktivní úlohy; 4. planimetrické početní úlohy. Pro přípravné přednášky připravilo předsednictvo ÚVMO sylaby i s příklady k procvičování v přednáškách vyložené teorie. Posláním přednášky bylo nejen určitou školskou partii vyložit nebo prohloubit, ale za aktivní spolupráce žáků především řešit příklady z této partie.

Podle referátů KVMO se tyto přednášky osvědčily, i když se v cestu stavěly různé nesnáze, jako dojíždění žáků, nutnost ukončit včas přednášky, aby se žáci mohli rozjet do domovů, současná přítomnost žáků z různých kategorií atd.

Aby se vylíčené nesnáze překonaly, hledal ÚVMO další způsoby jak pomoci žákům. Jedním způsobem pomoci je zvláštní knihovnička brožurek pro účastníky Matematické olympiády; sbírku vydává pod názvem „*Škola mladých matematiků*“ nakladatelství Mladá Fronta v Praze. Na podzim roku 1961 vyšly první dvě brožury formátu B6: *Hradecký—Koman—*

Vyšín, „Několik úloh z geometrie jednoduchých těles“, 85 stran; cena Kčs 3,10. Jiří Sedláček, „Co víme o přirozených číslech“, 45 stran; cena Kčs 1,70. Každoročně mají vyjít tři brožurky. Posláním brožur především je přístupnou formou připoutat žáka k samostatnému studiu snadného matematického textu a řešit úlohy, které navazují na výklad teorie, vyložené v brožuře; dále mají být brožury i pomocným textem, pro přípravné přednášky zvláště jako zásobárna vhodných úloh, které by žáci řešili a rozbírali na přípravné přednášce.

Některé KVMO těsně spolupracovaly s ČSM a Pionýrskými organizacemi; v tomto rámci např. v Teplicích se ustavil klub mladých matematiků. Dále byly pořádány besedy a instruktáže pro žáky.

4. Ve II. a III. kole řešili žáci 4 úlohy; úspěšný řešitel musil podat správná řešení alespoň dvou úloh. Druhé kolo v kategoriích A až C se konalo v neděli 16. dubna 1961 v krajských městech a v kategorii D v neděli 23. dubna 1961 v okresních městech; někde se však soutěž konala na několika různých místech kraje nebo okresu, aby se žákům zkrátila cesta. Po soutěži II. kola se zpravidla konala se žáky beseda, v níž se rozbíraly typické nedostatky v žákovských řešeních, mluvilo se o důležitosti hlubokého studia matematiky, především pro rozvoj našeho průmyslu

a věd atd. Vedle toho zhlédli žáci různé kulturní podniky nebo navštívili továrny apod.

Za své úspěšné výkony v II. kole dostali žáci pochvalná uznání a věcné ceny.

5. Celkem bylo do III. kola přihlášeno 96 žáků. Komise ÚVMO z nich vybrala nejlepších 80 žáků, kteří byli pozváni na soutěž III. kola. Toto závěrečné kolo soutěže se konalo v sobotu 20. května 1961 v době od 8 do 12 hodin ve velké posluchárně matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze 2 — Nové Město, Ke Karlovu 3.

Téhož dne odpoledne se na témže místě konala s olympioniky beseda, které se účastnila řada hostů v čele s ministrem školství a kultury dr. *Fr. Kahudou*.

Předseda ÚVMO akademik *Josef Novák* v úvodním proslovu k besedě stručně vyličil historii vzniku soutěže, její nesnáze i úspěchy. Ocenil i značný vliv, který olympiáda má na žáky a jejich učitele, a dále, že nachází odezvu i v rodičovské veřejnosti. Není proto divu, že se stala vzorem i pro jiné školské předměty, aby se v nich včas podchytili a soustavně je studovali ti žáci, kteří mají o předmět zájem a vlohy. Statistické údaje za první desetiletí jsou velmi zajímavé. Závěrečné statistiky soutěže zaregistrovaly celkem na 40 000 účastníků v kategoriích A až C a v kategorii D za osmiletou dobu jejího trvání na 100 000 žáků v I. kole soutěže; k tomu přistupuje na 800 účastníků

III. kola, z nichž dnes již mnozí zastávají platné služby na vysokých školách a ve výzkumných a vědeckých ústavech. Zhodnotil pak velké dílo, které dobrovolně konají pro společnost učitelé matematiky; síť spolupracovníků olympiády je vsutku rozsáhlá a dosud žádná jiná akce tak nespojila učitele matematiky ke společné práci jako Matematická olympiáda.

Hlavní projev pronesl ministr školství *dr. Fr. Ka-huda*, který zhodnotil desetileté dílo Matematické olympiády pod zorným úhlem *40. výročí založení Komunistické strany Československa*. Ukázal, jak se v socialistické společnosti stala matematika významným vědním oborem pro smělé budovatelské cíle komunistického zítřka a jak potřebujeme, aby stále větší množství pracujících dovedlo při své práci využívat matematiky. Načrtl perspektivy této budoucnosti a významné poslání, které má pro jejich uskutečňování dobře matematicky vyškolený technik a vědecký pracovník. Na besedě dále promluvili akademik *VI. Kořínek* za matematicko-fyzikální fakultu Karlovy university, prorektor Českého učení technického v Praze *dr. B. Kvasil* a pracovnice ústředního výboru Československého svazu mládeže *Ilona Pietropaolová*. V průběhu besedy byli na základě předběžně provedené klasifikace soutěžních prací zjištěni první tři nejúspěšnější řešitelé úloh III. kola a představeni přítomným; byli to soudruzi *Karel Příkrý*, *Tomáš Jech* a *Jan Lusk*.

Na závěr besedy přednesli olympionici přítomným zástupcům vysokých škol své dotazy. Večer po besedě shlédli účastníci III. kola v Tylově divadle Hrubínovu Srpnovou neděli. Druhého dne v neděli si prohlédli pamětihodnosti Prahy a navštívili jubilejní výstavu 40 let KSČ; odpoledne toho dne se účastníci III. kola rozjeli do svých domovů.

III. O výsledcích jednotlivých kol soutěže

A. SOUTĚŽ I. KOLA

V tabulkách č. 1 a 2 je podle jednotlivých krajů uveden počet účastníků I. kola, a to těch, kteří předložili řešení všech šesti přípravných úloh a alespoň čtyř soutěžních úloh I. kola. Nejsou zde uváděni ti, kteří se soutěže účastnili jen z části. Dále je zde uveden počet úspěšných řešitelů prvního kola, tj. těch, kteří ze šesti přípravných úloh rozřešili alespoň čtyři správně a odevzdali alespoň čtyři správná řešení soutěžních úloh I. kola.

Účast je proti IX. ročníku MO značně slabší; ve vyšších kategoriích poklesl počet účastníků až na polovinu, v kategorii D je úbytek jen asi 15 %. Příčiny tohoto zjevu jsou různé. Především je tu značné mimoškolní časové zatížení žáků různými akcemi, což platí zvláště o vyšších kategoriích. V těchto kategoriích však také matematické olympiáde značně konkuruje fyzikální olympiáda. V tomto ročníku působila značnou nesnáz nestejná předběžná připravenost žáků stejně starých v různých typech škol, vzhledem k tomu, že se osnovy matematiky na těchto školách značně lišily od osnov normálních. Proto mohli učitelé mate-

Tabulka č. I

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

K r a j	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			C e l k e m		
	P	Z toho dívek	U	P	Z toho dívek	U	P	Z toho dívek	U	P	Z toho dívek	U
Praha město	77	15	30	68	19	24	155	41	54	300	75	108
Středočeský	28	8	23	13	5	7	24	8	21	65	21	51
Jihočeský	17	4	17	23	7	23	24	7	24	64	18	64
Západočeský	15	2	15	32	19	21	57	17	35	104	38	71
Severočeský	38	15	20	94	23	36	161	63	58	293	101	134
Východočeský	74	22	64	53	20	43	73	28	59	200	70	166
Jihomoravský	139	39	98	83	18	58	176	68	109	398	125	265
Severomoravský	60	14	36	41	14	14	76	31	44	177	59	94
Západoslovenský	70	23	32	96	40	42	121	59	63	287	122	137
Středoslovenský	61	23	26	105	42	57	145	69	82	311	134	165
Východoslovenský	19	6	8	37	16	5	37	12	9	93	34	22
C e l k e m	598	171	369	645	223	330	1049	403	558	2292	797	1257

*) P = Počet všech účastníků, U = počet úspěšných řešitelů

matiky se svolením KVMO zařadit své žáky i do nižších kategorií. Tak např. někteří žáci, kteří by svým ročníkem patřili do kategorie C, soutěžili v kategorii D. V celé této otázce počtu účastníků případná nevhodnost některých soutěžních úloh I. kola rozhodně nehrála podstatnou roli.

Přitom je potěšující, že procento úspěšných řešitelů prvního kola ve vyšších kategoriích se blíží číslu 55, v nejvyšší kategorii A dokonce číslu 65. To je podstatné zlepšení proti předchozímu ročníku, kde se v těchto případech setkáváme s čísly 40 a 43. To do jisté míry asi znamená, že absolutní úbytek počtu řešitelů je vyvážen zlepšením kvality, pokud ovšem předpokládáme, že nároky na soutěžící v obou ročnících byly zhruba stejné. V kategorii D procento úspěšných řešitelů je asi 55, tedy jako v předchozím ročníku.

Lze očekávat, že v organizaci našeho školství nastane v příštích letech určitý klid a jednotnost v požadavcích, čímž budou i požadavky soutěže na žáky celkem jednotné.

B. SOUTĚŽ II. KOLA

1. Výsledky II. kola jsou patrný z tabulek č. 3 a 4. Je vidět, že všichni úspěšní řešitelé I. kola nebyli pozváni výbory MO k soutěži II. kola. Také někteří pozvaní se nedostavili. Jednou z příčin tu bývá i to, že někteří žáci nepracovali v I. kole zcela samostatně

Tabulka č. 2

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategorii D)*

K r a j	K a t e g o r i e D		
	P	Z toho dívek	U
Praha město	1 212	601	761
Středočeský	1 170	643	773
Jihočeský	1 082	550	600
Západočeský	982	524	534
Severočeský	1 136	573	586
Východočeský	1 809	1036	865
Jihomoravský	1 768	806	1063
Severomoravský	1 601	796	828
Západoslovenský	868	468	495
Středoslovenský	1 156	624	633
Východoslovenský	323	173	224
C e l k e m	13 107	6794	7362

*) P = celkový počet účastníků; U = počet úspěšných řešitelů

a chtěli se vyhnout neúspěchu ve II. kole. Tato situace je patrna i v kategorii D, kde se často v I. kole vyskytovaly stížnosti na opisování žáků.

Úbytek účastníků v II. kole při porovnání s předchozím ročníkem je větší než 30 %, zato procento úspěšných řešitelů je asi 40 % oproti 32 % v před-

Tabulka č. 3

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	Z toho dívek	U	P	Z toho dívek	U	P	Z toho dívek	U	P	Z toho dívek	U
Praha město	30	5	12	24	3	17	52	19	22	106	27	51
Středočeský	24	7	12	7	1	2	19	5	9	50	13	23
Jihočeský	17	4	6	22	7	6	22	6	9	61	17	21
Západočeský	12	2	8	20	9	1	32	9	13	64	20	22
Severočeský	20	6	15	34	8	9	54	16	38	108	30	62
Východočeský	60	16	13	39	12	17	53	19	32	152	47	62
Jihomoravský	89	16	29	61	14	8	101	39	59	251	69	96
Severomoravský	35	6	12	14	2	4	38	14	28	87	22	44
Západoslovenský	32	9	15	42	17	5	62	28	18	136	54	38
Středoslovenský	14	6	6	37	13	23	48	18	11	99	37	40
Východoslovenský	8	3	1	5	1	—	9	5	1	22	9	2
Celkem	341	80	129	305	87	92	490	178	240	1136	345	461

*) P = celkový počet účastníků; U = počet úspěšných řešitelů.

Tabulka č. 4

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategorii D)*

K r a j	K a t e g o r i e D		
	P	Z toho dívek	U
Praha město	626	286	477
Středočeský	415	214	296
Jihočeský	141	75	65
Západočeský	442	240	311
Severočeský	522	257	321
Východočeský	723	389	465
Jihomoravský	842	427	421
Severomoravský	666	335	379
Západoslovenský	452	247	273
Středoslovenský	191	90	126
Východoslovenský	167	91	147
C e l k e m	5187	2651	3281

*) P = počet všech účastníků; U = počet úspěšných řešitelů.

chozím ročníku; v kategorii D je asi 60 % úspěšných řešitelů proti 68 % v předchozím ročníku. Je tedy klasifikace ve vyšších kategoriích příznivější, kdežto v kategorii D ostřejší, což je k prospěchu věci, i když posláni kategorii D je značně odlišné od posláni ostatních kategorií.

2. Výbory MO odměnily úspěšné řešitele II. kola

pochvalnými uznáními a hodnotnými věcnými cenami, zvláště pak odbornými knihami.

V kategoriích B, C, D končí soutěž II. kolem. Uvádíme jména deseti nejlepších řešitelů v kategoriích B a C za každý kraj. Pokud není jinak uvedeno, jedná se v tomto seznamu o žáky střední všeobecně vzdělávací školy.

*POŘADÍ ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ II. KOLA
V KATEGORIÍCH B, C*

SVVŠ = střední všeobecně vzdělávací škola

P = průmyslová škola

P r a h a — m ě s t o

B. Durdil Jiří, 23. SVVŠ, Prah 8; Veselý Karel, 6. SVVŠ, Bílá ul., Praha; Ježek Jaroslav, 17. SVVŠ, Křesomyslova, Praha; Vaněček Milan, SVVŠ, Školní, Praha 1; Tvrdý M., 20. SVVŠ, Praha 5; Cibulka Josef, 36. SVVŠ, V úžlabině, Praha; Běrák Jaroslav, 21. SVVŠ, Praha 5; Holzbecher J., 20. SVVŠ, Praha 5; Hojdar Josef, 9. SVVŠ, Praha 8; Sobínová Zdeňka, 15. SVVŠ, Praha 3.

C. Zemánek Jaroslav, 20. SVVŠ, Praha 5; Vít Zdeněk, 14. SVVŠ, Praha 2; Fried Viktor, 2. P, Praha 1; Vodičková Ludmila, 14. SVVŠ, Praha 2; Čtyroký Jiří, 27. SVVŠ, Praha 4; Frič Martin, 7. SVVŠ, Praha 7; Beránek Václav, 5. P, Cyrilometodějské n. 8, Praha;

Hudcová Marie, 24. SVVŠ; Souček Vladimír, 21. SVVŠ, Praha 5; Vorlíček J., 14. SVVŠ, Praha 2.

S t ř e d o č e s k ý k r a j

B. Kunc, Kladno; Špetlík, Mnichovo Hradiště.

C. Procházka Jindřich, Čelákovice; Lišková Marie, Říčany; Kobylka, Hořovice; Mužík J., Hořovice; Šimerka Ivan, Mladá Boleslav; Kroupa K., Říčany; Hloušek, Vlašim; Svoboda, P, Kladno; Nešetřil, Rakovník.

J i h o č e s k ý k r a j

B. Cvach Jaroslav, Soběslav; Zavadil Jiří, Pelhřimov; Parma Ludvík, Tábor; Ostrý Ladislav, P, Tábor; Nedvěďová Zděna, Strakonice; Hronková Eva, Strakonice.

C. Limpouch Václav, Strakonice; Hájková Jarmila, Blatná; Turek Zdeněk, P, Písek; Hora Jan, Tábor; Komrska Pavel, Týn nad Vltavou; Matzner Jan, České Budějovice; Macek Bohuslav, Strakonice; Milička Eduard, Strakonice; Kloužek Jan, Český Krumlov.

Z á p a d o č e s k ý k r a j

B. Vacek Jiří, Plzeň;

C. Štveráček Josef, Sokolov; Fleissig Jiří, Plzeň; Opatrný Jaroslav, Nepomuk; Paidar Václav, P, Klatovy; Mertl Petr, Plzeň; Klička Jan, Přeštice; Zemandl Milan, P, Klatovy; Švík Václav, Přeštice; Dvořák Josef, Cheb; Sluka Zdeněk, Horaždovice.

Severočeský kraj

B. Fejtková Pavla, Liberec; Starý Petr, Ústí n. Labem; Novotný Jiří, P, Most; Čmelík Jiří, Liberec; Jaeger Vladimír, Most; Bureš Václav, Ústí n. Labem; Thоровský Ctibor, Ústí n. Labem; Andrllová Miroslava, Tanvald; Balcar Rudolf, Liberec; Procházka Antonín, Litoměřice.

C. Hovorková M., Liberec; Görlich P., Ústí n. Labem; Růžička A., Ústí n. Labem; Marek Jan, Liberec; Kněžourková D., Č. Líba; Poláček K., P, Ústí n. Labem; Karásek J., Česká Líba; Ryšánek F., P, Ústí n. Labem; Kykalová I., P, Liberec; Ryšavý Jan, P, Liberec.

Východočeský kraj

B. Netuka Ivan, Hradec Králové; Přidal Jaroslav, Hradec Králové; Hrnčíř Fr., Nová Paka; Hrdlička Milan, 1. SVVŠ, Pardubice; Bryknar Zd., Nová Paka; Kudrnovský Pavel, Dvůr Králové n. Lab.; Fořtová Květa, Přelouč; Martincová Marta, Rychnov nad Kněžnou; Richter Antonín, Dvůr Králové nad Labem; Loučný Zbyněk, Lanškroun.

C. Chaloupek Karel, Kostelec nad Orlicí; Kapička Aleš, 1. SVVŠ, Pardubice; Veverka René, 3. SVVŠ, Pardubice; Hartman Miroslav, Hradec Králové; Mou-drá Milena, Pardubice; Plašil Jan, Hořice v Podkrkonoší; Hlaváček Ladislav, Kostelec nad Orlicí; Holoub-

ková Marie, P, Havlíčkův Brod; Zima Miroslav, Trutnov; Semerák Václav, Přelouč.

J i h o m o r a v s k ý k r a j

B. Sobotka Jan, Blansko; Bartůšek M., Brno; Kolouch Jaromír, P, Gottwaldov; Vítek Pavel, Jihlava; Bendová Jitka, Brno; Černý Václav, M. Budějovice; Poustka Jiří, Brno; Jičínský Miloš, P, Brno.

C. Šimková Drah., Znojmo; Vašek Lub., Gottwaldov; Kubín Miloš, Brno; Chyba Jaroslav, Brno; Lenc Michal, Brno; Rybář Pavel, Brno; Svoboda Karel, Brno; Znojil Mir., Prostějov; Mikula Milan, Třebíč; Vrbík Jan, Vyškov.

S e v e r o m o r a v s k ý k r a j

B. Josífko J., Opava; Vrána L., Nový Jičín; Kunčický P., P, Ostrava; Cimalová K., Orlová.

C. Blaťák J., Přerov; Poruba F., P, Val. Meziříčí; Roch J., P, Val. Meziříčí; Ženčáková L., Olomouc; Gryczová H., Jablunkov; Rozum Z., Opava; Krumpholzová J., P, Val. Meziříčí; Ondřejová L., P, Val. Meziříčí; Borůvka M., Ostrava I; Bědajánek I., Ostrava 3.

Z á p a d o s l o v e n s k ý k r a j

B. Hatala Peter, Bratislava; Lesyk Peter, Bratislava; Komrska Peter, P, Bratislava; Tarábek Pavol, Bratislava; Veselý Marián, Bratislava.

C. Voda Pavol, Bratislava; Janeková Dagmar, Bratislava; Kedro Martin, Trenčín; Pišútová Anna, Bratislava; Pohanka Vladimír, Bratislava; Kováčiková Naděžda, Trenčín; Krňan Pavol, Bratislava; Mardiaková Anna, Bratislava; Plachetka Ján, Trenčín; Tóth Štefan, Trnava.

Stredoslovenský kraj

B. Jirásek Juraj, Žilina; Vnadrík Stanislav, T. Teplice; Holmová Augustina, Námestovo; Krško Ján, T. Teplice; Füzy Dušan, Ružomberok; Jaroš Štefan, Ružomberok; Rusnák Ivan, Ružomberok; Bystrický Kamil, P, Dubnica; Reich Rudolf, P, Zvolen; Kozík Tomáš, P, Dubnica.

C. Francen Jozef, Handlová; Hovorková Darina, Zvolen; Moravčík Jozef, Zvolen; Kudlička Ján, P, Martin; Jablonská Marta, P, Ružomberok; Heisová Zdena, Zvolen; Szenesyová Elena, Zvolen; Králik Jaroslav, Zvolen; Hrdina Milan, Žilina; Hlaváč Ivan, Ružomberok.

Východoslovenský kraj

C. Košík Štefan, Košice; Neuwirth Peter, Košice; Poništ Jozef, Košice; Sitárová Anna, Košice; Forgáč Ladislav, Prešov; Zachar Juraj, P, Košice.

C. SOUTĚŽ III. KOLA

Mezi 80 účastníky III. kola bylo 7 žáků průmyslových škol, ostatní byli ze středních všeobecně vzdělávacích škol; přitom jeden úspěšný účastník byl ze II. ročníku SVVŠ. Soutěže se účastnilo 11 děvčat.

Mezi 44 úspěšnými řešiteli byli 3 žáci z průmyslových škol. Úspěšné řešitelky byly 3.

Nejlepších 20 úspěšných řešitelů III. kola se podle organizačního řádu stalo vítězi X. ročníku MO; jeden z nich je z průmyslové školy, 4 jsou Slováci. Osm z vítězů MO se účastnilo III. mezinárodní matematické olympiády, konané v červenci 1961 v Maďarsku (viz část VI této brožury).

V dalším uvádíme pořadí vítězů X. jubilejního ročníku matematické olympiády.

Pořadí vítězů X. jubilejního ročníku MO ve šk. r. 1960/61

1. *Karel Příkrý*, 3.a tř. SVVŠ, Vyškov
2. *Tomáš Jech*, 3.b tř. SVVŠ, Hellichova ul., Praha 1
3. — 4. *Alexandr Groda*, 3.b tř. SVVŠ, Kollárova ul., Praha 8
Jan Lusk, 3.d tř. SVVŠ, České Budějovice
5. — 6. *Michal Kretschmer*, 3.b tř. SVVŠ, Omská ul., Praha-Vršovice

Přemysl Svoboda, 3.b tř. SVVŠ, Roudnice n. Lab.

7. *Pavel Obložinský*, 3.a tř. SVVŠ, Bratislava-Palisády

8.—9. *Karel Hrbáček*, 3.a tř. SVVŠ, Nymburk
Emil Kraemer, 3.b tř. SVVŠ, Žukovova, Praha 6

Jiří Lauda, 3.a tř. SVVŠ, Havlíčkův Brod

10.—13. *Belomír Lonek*, 4.a roč. průmyslové školy jaderné techniky, Ječná ul., Praha

Miroslav Šmuk, 3.c tř. SVVŠ, Ostrava 5 — Hladnov

Zdeněk Výborný, 3.b tř. SVVŠ, ul. Pionýrů, Praha 6

14.—15. *Bohumil Král*, 3.a tř. SVVŠ, Bratislava-Novohradská

Ladislav Lukšan, 3.a tř. SVVŠ, Ústí n. Lab. — Na skřivánku

Jan Dobeš, 3.a tř. SVVŠ, Český Těšín

16.—19. *Pavel Krbec*, 3.b tř. SVVŠ, Beroun

Karol Macák, 3.c tř. SVVŠ, Bratislava-Novohradská

Dušan Mikloš, 3.c tř. SVVŠ, Bratislava-Novohradská

20. *Josef Daneš*, 1.d tř. SVVŠ, Praha 9

Vítězové X. ročníku matematické olympiády byli odměněni ministerstvem školství a kultury velmi hod-

notnými věcnými cenami, jejichž druh si sami určili. Vedle toho dostali poukázky na nákup odborné studijní literatury (až do výše Kčs 250,—); seznam pro výběr vhodných publikací v jazyce českém, slovenském a ruském každý z nich obdržel. Vedle toho každému vítězi byl doručen umělecky provedený čestný diplom o úspěchu ve III. kole; diplom podepsal ministr školství a kultury *dr. Fr. Kahuda* a předseda ÚVMO *akademik Josef Novák*.

Přípravné úlohy I. kola

KATEGORIE A

1. Zostrojte pravouhlý trojuholník, ak je daný polomer kružnice trojuholníku opísanej a polomer kružnice vpísanej. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na veľkosti oboch daných polomerov.

(P o k y n. Vypočítajte súčet odvesien pomocou daných polomerov a výsledku použite ku konštrukcii.)

2. V rovině jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 (o poloměrech R, r , kde $R \geq r = 1$), které mají vnější dotyk.

Vypočítejte poloměr x kružnice k , která se každé z kružnic k_1, k_2 dotýká vně a zároveň se dotýká jedné společné vnější tečny kružnic k_1, k_2 .

Rozhodněte, při které hodnotě R je x nejmenší.

3. Narýsujte graf funkce:

$$\text{a) } y = \frac{x^2}{|x|}; \quad \text{b) } y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}}; \quad \text{c) } y = \frac{x}{|x|} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{|x^2 - 9|}};$$

$$\text{d) } y = \frac{x}{|x|} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{|x^2 + x - 6|}};$$

$$\text{e) } y = |x| \cdot \sqrt{\frac{4 - x^2}{|4 - x^2|}}; \quad \text{f) } y = |x| \cdot \sqrt{\frac{x^2 - 4}{|4 - x^2|}}.$$

Podějte odůvodnění.

4. Určete všechna reálná čísla p , pro která rovnice

$$x^2 - 2(p + 4)x + p^2 + 6p = 0$$

o neznámé x má:

a) oba kořeny různé a záporné; b) jeden záporný kořen, druhý nezáporný.

5. Výroba podniku sa každým rokom zvyšuje o p %. V priebehu ktorého roku vzrastie výroba o np % (kde n je dané prirodzené číslo) proti počiatocnému stavu? Na záver urobte výpočet pre $p = 20$, $n = 5$.

6. Označme D průsečík osy úhlu $\sphericalangle BCA$ trojúhelníku ABC se stranou AB ; dále označme $CB = a$, $CA = b$, $CD = u$.

a) Dokažte, že platí $\frac{BD}{AD} = \frac{a}{b}$.

b) Vypočtete obsah trojúhelníku ABC , jestliže jsou dána čísla a , b , u .

(Je výhodné užít trigonometrických vzorců pro obsah trojúhelníka.)

KATEGORIE B

1. Dané sú celá čísla A , B . Potom aspoň jedno z čísel A , B , $A + B$, $A - B$ je deliteľné tromi; dokažte. (P o k y n. Existuje jediná dvojica celých čísel a , z , kde $0 \leq z < 3$, taká, že platí $A = 3a + z$.)

2. V rovině jsou dány dva různé body C , P a na přímce CP bod V .

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC , v němž je bod P středem základny AB a bod V průsečíkem výšek.

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy vzhledem k poloze

bodu V na přímce CP . (P o k y n. Vypočtete velikost úsečky $x = \frac{1}{2}AB$.)

3. V rovině je dán kosočtverec $ABCD$.

Sestrojte kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ těchto vlastností:

(1) kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk,

(2) platí $r_2 = 2r_1$,

(3) kružnice k_1 se dotýká ramen úhlu $\sphericalangle DAB$ a kružnice k_2 se dotýká ramen úhlu $\sphericalangle BCD$,

(4) obě kružnice k_1, k_2 leží v kosočtverci $ABCD$.

4. V rovině jsou dány dva pravé přilehlé úhly $\sphericalangle QMN$ $\sphericalangle MNP$. Uvažujme čtverec $ABCD$, kde bod A leží na polopřímce MQ , bod B je bodem úsečky MN , bod C leží na polopřímce NP .

Vyjádřete délku úsečky AB pomocí dané délky $MN = 2d$ a vzdálenosti x bodů O, B (je tedy $x \geq 0$), kde O je střed úsečky MN . Jestliže bod B probíhá úsečku MN , vyšetřte, co přitom vyplní:

a) střed S čtverce $ABCD$; b) vrchol D čtverce $ABCD$.
(Ke zvolenému bodu B příslušný bod C je průsečíkem přímky NP a přímky, kterou dostaneme otočením přímky MQ o pravý úhel kolem bodu B .)

5. Řešte rovnici

$$\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} = 3,$$

kde a, b, c sú dané reálne čísla a x je neznáma. Zistite,

pre ktoré trojice čísel a, b, c nemá rovnica vyhovujúce riešenie; ďalej, kedy má jediné riešenie a kedy má nekonečne mnoho riešení.

6. Výraz

$$V = \frac{p-2}{p+2} - \frac{p^2-4p+4}{p^2+4p+5} + \frac{p^3-6p^2+12p-8}{p^3+6p^2+12p+8},$$

kde $p \neq -2$ je dané reálne číslo, je záporný pre ta čísla p , o nichž platí

$$-2 < p < 2;$$

inak je nezáporný; dokažte a udejte všechna čísla p , pro něž je daný výraz roven nule.

(P o k y n. Lze řešit tak, že nejprve dokážete: $1 - x + x^2 > 0$ pro všechna reálná čísla x ; přitom položte $x = \frac{p-2}{p+2}$.)

KATEGORIE C

1. Mořská voda obsahuje 5 % soli. Kolik kilogramů obyčejné vody musíme přilít do m kg mořské vody, abychom dostali dvouprocentní roztok soli ve vodě? (Ostatní látky rozpuštěné ve vodě přitom zanedbáme.) Proveďte též příklad pro $m = 40$.

2. V rovine je daná úsečka CP a priamka $p \perp CP$, ktorá prechádza bodom P . Uvažujme rovnoramenný trojuholník ABC , ktorého vrcholy A, B ležia na priamke p .

Vyšetrite, čo vyplnia ťažiska T všetkých trojuholníkov ABC .

(P o z n á m k a. Pre polohu hlavného vrcholu trojuholníka ABC sú dve podstatne rozdielne možnosti.)

3. V rovině jsou dány dvě různé rovnoběžky a , c a uvnitř jimi určeného pásu je dán bod B .

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod A ležel na přímce a a bod C na přímce c .

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

(P o k y n. Otočte přímku c kolem bodu B o pravý úhel.)

4. Narýsujte trojúhelník SMN , kde $SM = 5$ cm, $SN = 4$ cm, $MN = 6$ cm.

Sestrojte kosočtverec $ABCD$ o středu S , aby platilo:

(1) Délka stran kosočtverce je 7,5 cm.

(2) Přímka AB prochází daným bodem M .

(3) Přímka CD prochází daným bodem N .

Dokažte, že úloha má dvě řešení.

(Užijte souměrnosti o středu S .)

5. Najdite všetky prirodzené čísla p , q , o ktorých platia:

$$\text{a) } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \quad \text{b) } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}.$$

(Dokážte, že úlohe a) vyhovujú jedine čísla $p = q = 2$, úlohe b) tieto tri dvojice: $p = 6$, $q = 3$; $p = q = 4$; $p = 3$, $q = 6$.]

6. Jsou dána reálná čísla a, b, c , o nichž platí $a + b + c = 0$.

Má-li výraz

$$V = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

smysl, potom platí

$$V = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc};$$

dokažte.

Dále udejte všechny trojice čísel a, b, c , pro něž daný výraz ztrácí smysl.

KATEGORIE D

1. Udajte všetkých deliteľov (tj. prirodzené čísla) čísla 180. Uveďte postup, ako ste túto úlohu riešili.

2. JZD mělo v r. 1959 dodat 2670 q obilí; plán splnilo na 115 % (takže plán dodávky obilí překročilo o 15 %).

Kolik obilí musí dodat v roce 1960, jestliže chce překročit o 15 % svou dodávku z minulého roku?

3. Narýsujte dvě rovnoběžky p, q o vzdálenosti 4 cm; na přímce p zvolte bod P .

Sestrojte kružnici, která se přímkou p dotýká v bodě P a která na přímce q vytíná tětivu délky 5 cm.

4. Počítajte dvojakým spôsobom, najskôr podľa poučky o druhej mocnine mnohočlenu, potom podľa poučky o rozdielu štvorcov

$$(2x + y)^2 - (x + 2y)^2.$$

5. Narýsujte úhel $\sphericalangle MPN = 60^\circ$.

Na polopřímce PM sestrojte bod A a na přímce PN sestrojte body B, C tak, aby o trojúhelníku ABC platilo: $AC = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $\sphericalangle BCA = 75^\circ$.

Úloha má dvě řešení; z provedené konstrukce rozhodněte, zda oba sestrojené trojúhelníky padnou do úhlu $\sphericalangle MPN$.

6. V rovnoběžníku $ABCD$ je strana $AB = 4,9$ cm, strana $AD = 7$ cm a výška příslušná ke straně AB má délku 5 cm; přitom úhel $\sphericalangle DAB$ je ostrý.

Výpočtem rozhodněte, zda pata P výšky vedené bodem D ke straně AB padne dovnitř úsečky AB či nikoli.

V. Řešení úloh ze soutěže

1. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE A

1. a) Dokažte, že je-li $0 < x < 1$, potom platí

$$1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1-x} < \frac{1}{2}x^2. \quad (1)$$

b) Narýsujte (např. na milimetrový papír pomocí tabulky hodnot) graf funkcí $y = 1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1-x}$, $y = \frac{1}{2}x^2$ v intervalu $(0, 1)$; za jednotku délky zvolte 20cm.

c) Vypočítejte (na čtyři desetinná místa), o kolik se liší hodnoty pravé a levé strany dokazované nerovnosti v úloze a) pro $x = \frac{1}{2}$.

Řešení. a) Pro číslo x podle textu úlohy platí

$$0 < x < 1, \quad (2)$$

takže

$$1 - x > 0; \quad (3)$$

má tedy odmocnina v (1) smysl. Úpravami (1) dostaneme $2 - x - x^2 < 2\sqrt{1-x}$ neboli

$$(2+x)(1-x) < 2\sqrt{1-x}. \quad (4)$$

Vzhledem ke vztahům (2), (3) jsou čísla $2+x$, $1-x$ kladná; proto obě strany ve (4) jsou kladná čísla; umocněním obou stran (4) na druhou dostáváme po úpravě $x^4 + 2x^3 - 3x^2 < 0$ neboli

$$x^2(x+3)(x-1) < 0.$$

Tento vztah vzhledem ke (2) vskutku platí pro všechna uvažovaná x ; obrácením postupu dostaneme správnost vztahu (1), což jsme měli dokázat.

b) Položme $y_1 = \frac{1}{2}x^2$, $y_2 = 1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1-x}$; souřadnice bodů grafu první funkce budou $[x, y = y_1]$, $[x, y = y_2]$. Grafem první funkce je oblouk paraboly (grafem funkce $y = ax^2$, jak známo, je parabola); dá se dokázat, že i grafem druhé funkce je oblouk paraboly. Sestavme tabulku hodnot ke každé z obou funkcí (sloupce označené $\star$) jsou mimo uvažovaný interval):

x	$\star$) 0	0,2	0,44	0,5	0,6	0,8	$\star$) 1
y_1	0	0,02	0,08	0,125	0,18	0,32	0,5

x	$\star$) 0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	$\star$) 1	Poznámka
$1 - \frac{1}{2}x$	1	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	přesně
$1 - x$	1	0,8	0,6	0,5	0,4	0,2	0	přesně
$\sqrt{1-x}$	1	0,89	0,77	0,70	0,63	0,44	0	dolní hranice
y_2	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,16	0,50	horní hranice

c) Pro $x = 0,5$ mají funkce $y_1 = \frac{1}{2}x^2$, $y_2 = 1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1-x}$ hodnoty:

$$y_1 = \frac{1}{8} = 0,125,$$

$$y_2 = 1 - \frac{1}{4} - \sqrt{0,5} = 0,75 - \sqrt{0,5};$$

rozdíl

$$d = y_1 - y_2 = 0,125 - (0,75 - \sqrt{0,5}) = \sqrt{0,5} - 0,625.$$

Přitom je

$$0,707106 < \sqrt{0,5} < 0,707107,$$

tj.

$$0,707106 - 0,625 < d < 0,707107 - 0,625$$

neboli

$$0,082106 < d < 0,082107.$$

Je tedy

$$d = 0,0821 + k \cdot 10^{-5},$$

kde $0 < k < 1$ je jisté reálné číslo, které nemá vliv na cifru 1 stojící na 4. desetinném místě.

2. Ak sú a, b, c dĺžky strán trojuholníka ABC a s jeho polovičný obvod, potom pre dĺžku u osi vnútorného uhla pri vrchole A tohto trojuholníka platí vzťah

$$u^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} s(s-a);$$

dokážte.

Ak je trojuholník ABC pravouhlý s preponou BC , potom s použitím predchádzajúceho výsledku dokážte, že

$$u = \frac{1}{2}a \sqrt{2} \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega + \cos \omega},$$

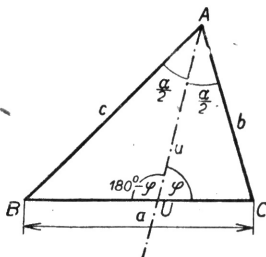
pričom je ω veľkosť hociktorého z oboch ostrých uhlov trojuholníka ABC .

Riešenie. I. Zavedieme označenie podľa obr. 1. Po užití sinusovej vety na trojuholníky ABU , ACU dostaneme

$$\frac{BU}{c} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\sin \varphi}; \quad \frac{CU}{b} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\sin \varphi}. \quad (1)$$

Porovnaním vzťahov (1) dostaneme

$$\frac{BU}{CU} = \frac{c}{b}. \quad (2)$$



Obr. 1

Pretože je $BU + CU = a$, je podľa (2) $\frac{c}{b} \cdot CU + CU = a$, tj.

$$CU = \frac{ab}{b + c} \quad (3a)$$

a podobne (výmenou strán b a c)

$$BU = \frac{ac}{b + c}. \quad (3b)$$

Teraz použijeme kosínusovou vetu na trojuholníky ABU , ACU ; podľa vzorcov (3a), (3b) je

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= u^2 + \frac{a^2 b^2}{(b+c)^2} - 2u \frac{ab}{b+c} \cdot \cos \varphi, \\ c^2 &= u^2 + \frac{a^2 c^2}{(b+c)^2} + 2u \frac{ac}{b+c} \cdot \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

pretože $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$. Rovnosti (4) vynásobíme po rade číslami c , b a sčítame. Dostaneme

$$bc(b+c) = u^2(b+c) + \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} (b+c). \quad (5)$$

Rovnosť (5) delíme kladným číslom $b+c$ a po úprave dostaneme

$$u^2 = bc \left(1 - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} \right). \quad (6)$$

Vzťah (6) je jeden tvar hľadaného vzorca. Môžeme ho ďalej upraviť takto:

$$u^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} [(b+c)^2 - a^2] \quad (7)$$

Pretože je

$$\begin{aligned} (b+c)^2 - a^2 &= (b+c+a)(b+c-a) = \\ &= 2s(2s-2a) = 4s(s-a), \end{aligned}$$

kde s znamená dĺžku polovičného obvodu trojuholníka, dostaneme z rovnosti (7) rovnosť

$$u^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} s(s-a), \quad (*)$$

čo je už hľadaný vzorec.

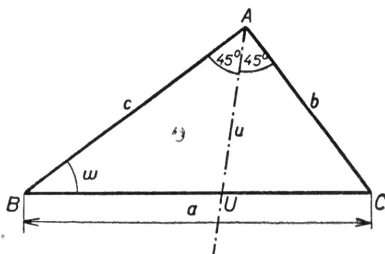
II. Nech je teraz $\sphericalangle CAB = 90^\circ$. Pri odvodení vzťahu (*) vyjdeme zo vzorca (6). Ak je $\omega = \sphericalangle ABC$, je $\sin \omega = \frac{b}{a}$, $\cos \omega = \frac{c}{a}$. (Vid' obr. 2.) Dosadíme do (6) $b = a \sin \omega$, $c = a \cos \omega$ a postupne dostaneme

$$u^2 = a^2 \sin \omega \cos \omega \left(1 - \frac{a^2}{a^2 (\sin \omega + \cos \omega)^2} \right),$$

$$u^2 = \frac{a^2}{2} \sin 2\omega \left(1 - \frac{1}{1 + \sin 2\omega} \right),$$

$$u^2 = \frac{a^2}{2} \sin 2\omega \frac{\sin 2\omega}{1 + \sin 2\omega},$$

$$u^2 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\omega}{(\sin \omega + \cos \omega)^2}.$$



Obr. 2

Pretože je $\omega < 90^\circ$, je $\sin \omega > 0$, $\cos \omega > 0$, $\sin 2\omega > 0$, a teda

$$u = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega + \cos \omega},$$

čo je už vzorec (*) z druhej časti úlohy. Pretože pre

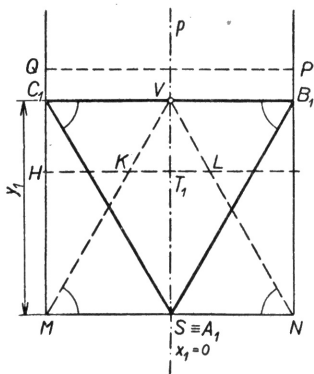
$0 < \omega < 90^\circ$ je $\sin(180^\circ - 2\omega) = \sin 2\omega$,
 $\sin(90^\circ - \omega) = \cos \omega$, $\cos(90^\circ - \omega) = \sin \omega$,
 vyplýva z predchádzajúceho vzorca, že platí pre obidva
 ostré uhly ω , $90^\circ - \omega$ pravouhlého trojuholníka ABC .

3. Je dán čtverec $MNPQ$. Uvažujme všetky rovnostranné trojuholníky ABC , ktoré majú tyto dvě vlastnosti:

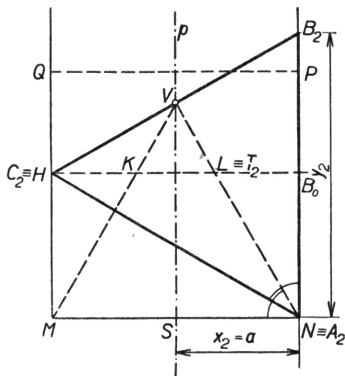
- (1) Vrchol A leží na úsečke MN .
- (2) Vrcholy B, C leží po řadě na polopřímkách NP , MQ .

Zjistěte, který útvar je geometrickým místem:

a) vrcholů B ; b) středů úseček BC ; c) těžišť trojúhelníků ABC . Potom sestrojte ten z trojúhelníků ABC , jehož těžiště padne na úsečku MP .



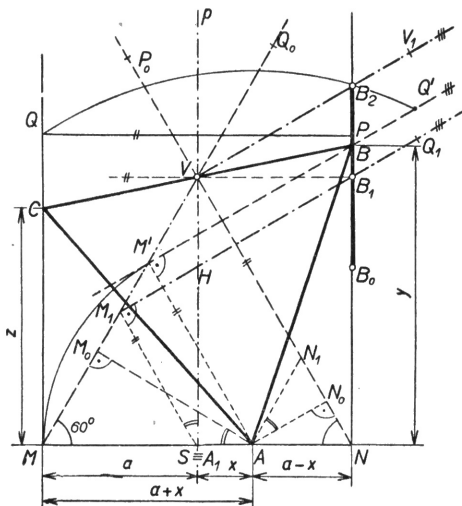
Obr. 3



Obr. 4

Řešení (viz označení z obr. 5, kde $MN = 2a$). Označme p osu úsečky MN a S střed této úsečky. Předpokládejme, že vrchol A hledaného trojúhelníka ABC leží na úsečce SN (možnost, že bod A padne na úsečku SM dostaneme z předchozího pomocí souměrnosti o ose p).

Případy, že je $A \equiv S$ nebo $A \equiv N$ jsou jednoduché, jak je vidět z obr. 3, 4.



Obr. 5

Nechť nadále je A bod ležící uvnitř úsečky SN .

a) Bod B v obr. 5 dostaneme otočením bodu C okolo bodu A o 60° v záporném smyslu; toto otáčení označme

Ω a otáčení obrácené nazveme Ω' . S bodem C se přitom otáčí i polopřímka MQ do polohy $M'Q'$, takže bod B je společným bodem polopřímek $M'Q'$, NP . Protože v otáčení Ω platí $AM' = AM$, $\sphericalangle MAM' = 60^\circ$, je trojúhelník MAM' rovnostranný, takže bod M' leží uvnitř strany MV rovnostranného trojúhelníka MNV sestrojeného v polorovině MNP (bod V padne na přímku p). Přesněji řečeno, jestliže bod A probíhá úsečku SN , probíhá bod M' úsečku M_1V , kde M_1 je střed strany MV trojúhelníka MNV (viz obr. 5). Protože pro každou polohu bodu A je úhel $\sphericalangle MAM' = 60^\circ$, jsou přímky AM' rovnoběžné s přímkou SM_1 pro všechny polohy bodu A ; jsou tedy rovnoběžné i polopřímky $M'Q'$, které stojí kolmo na AM' . Polopřímky $M'Q'$ leží tedy v pásu rovnoběžek M_1Q_1 , VV_1 , které stojí kolmo k přímce SM_1 (počátky M' padnou na úsečku M_1V). Společná část pásu rovnoběžek M_1Q_1 , VV_1 s polopřímkou NP je jistá úsečka B_1B_2 . Jak patrně z obr. 5 je vzdálenost bodu B_2 od přímky MN větší o délku úsečky VH než NB_1 , kde H je společný bod přímky p s polopřímkou M_1Q_1 ; zřejmě je $\sphericalangle VM_1Q_1 = 30^\circ = \sphericalangle M_1VS$, takže $VH = M_1H = SM_1 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$ (neboť úhel $\sphericalangle M_1SV = 30^\circ$), tj. $VH = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot MS = \frac{1}{3}\sqrt{3}a$. Dále je $SV = \frac{1}{2}MN$. $\sqrt{3} = a/\sqrt{3}$. Je tedy $NB_2 = VH + SV = \frac{4}{3}\sqrt{3}a$, neboť $NB_1 = SV = a/\sqrt{3}$ (bod B_1 je právě o délku VH blíže k přímce MN); viz též obr. 3, 4. Obráceně od každého bodu B vnitřku úsečky B_1B_2 obráceným postupem přes bod M'

vnitřku úsečky M_1V a otočením Ω' okolo bodu A můžeme dospět k bodu C polopřímky MQ .

Výsledek I. Geometrickým místem bodů B , odpovídajícím bodům A úsečky SN , je úsečka B_1B_2 , ležící v polopřímce NP ; přitom je $NB_1 = a\sqrt{3}$; $NB_2 = \frac{4}{3}a\sqrt{3}$, $MN = 2a$. Probíhá-li pak bod A celou úsečkou MN , vyplní bod B úsečku B_0B_2 o středu B_1 .

b) Střed O úsečky BC dostaneme otočením bodu C kolem bodu A v záporném smyslu otáčení o úhel velikosti 30° a stejnolehlostí s konstantou $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (viz vzorec pro výšku rovnostranného trojúhelníka). Toto otáčení převede polopřímku MQ v polopřímku M_0Q_0 , kde bod M_0 je zřejmě patou kolmice vedené bodem A na přímku MV ; přímky MV , M_0Q_0 tedy splývají. Podobným způsobem dostaneme bod O z bodu B ; příslušné otáčení o úhel velikosti 30° má kladný smysl a polopřímku NP převádí v polopřímku N_0P_0 , ležící v přímce NV . Společný bod polopřímek M_0Q_0 , N_0P_0 je společným bodem přímek MV , NV , tj. bod V ; je tedy $O \equiv V$.

Výsledek II. Geometrickým místem středů úseček BC je jediný bod V , tj. vrchol rovnostranného trojúhelníka MNV , který leží v polovině MNP .

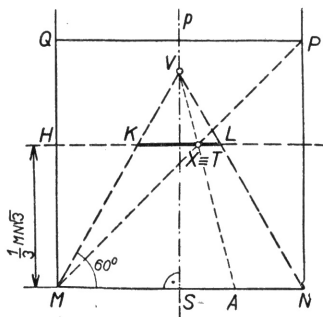
c) Těžiště T trojúhelníka ABC splňuje vztah $\frac{VT}{VA} = \frac{1}{3}$, bod T je tedy obrazem bodu A ve stejnolehlosti se středem V a koeficientem $\frac{1}{3}$. Obrazy bodů úsečky MN vyplní úsečku KL rovnoběžnou s přímkou MN (viz obr. 6);

vzdálenost přímek KL , MN je $\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot MN$. Tu je $HK = \frac{1}{3} \cdot MN$, $HL = \frac{2}{3}MN$. Úhlopříčka MP čtverce $MNPQ$ protne přímku HK v bodě X , jehož vzdálenost od bodu H je $HX = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot MN \doteq 0,577MN$. Platí však

$$\frac{1}{3} < 0,577 < \frac{2}{3};$$

proto bod X náleží úsečce KL . Obráceně, ze zvoleného bodu X na úsečce KL odvodíme snadno vrchol A a další vrcholy B , C rovnostranného trojúhelníka ABC .

Výsledek III. Těžiště vyplní úsečku KL , jejíž konstrukce je patrna z obr. 6.



Obr. 6

Poznámka. Řešení úlohy užitím výpočtu (geometricky opřeném o předchozí postup) je patrné z obr. 5: Nechť bod A je bodem úsečky SN ; označme x vzdálenost

bodů S, A , dále y, z vzdálenosti bodů B, C od přímky MN . Snadno zjistíme, že $SV = \frac{1}{2}(y + z) = a\sqrt{3}$, kde $2a = MN$, čímž je odvozeno geometrické místo středů V úseček BC .

4. Necht' α, β, γ jsou velikosti úhlů trojúhelníka; označme

$$p = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma,$$

$$q = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1.$$

a) Je-li trojúhelník pravoúhlý, potom je $p = q$; dokažte.

b) Je-li $p = q$, potom je trojúhelník pravoúhlý; dokažte.

c) Které největší hodnoty může nabýt číslo p pro pravoúhlé trojúhelníky?

Řešení. a) Předpokládejme, že jsme označení trojúhelníka ABC zařídili tak, že platí

$$0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < 180^\circ. \quad (1)$$

Vztah $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ užijeme zvláště ve tvaru

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma. \quad (2)$$

Je-li $\gamma = 90^\circ$, je

$$\sin \frac{1}{2}\gamma = \cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \gamma = 1, \cos \gamma = 0. \quad (3)$$

Utvořme výraz $x = p - q$; platí postupně užitím vzorců pro součet funkcí, přičemž položíme

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos \gamma, \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \sin \frac{1}{2}\gamma:$$

$$\begin{aligned}
 x &= (\sin\alpha + \sin\beta) + \sin\gamma - [(\cos\alpha + \cos\beta) + \\
 &+ \cos\gamma + 1] = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + 1 - \\
 &- [2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + 1] = \\
 &= 2\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)[\cos\frac{1}{2}\gamma - \sin\frac{1}{2}\gamma] = 0 \text{ [viz (3)]}.
 \end{aligned}$$

Platí $x = 0$ neboli $p = q$, neboť poslední činitel je roven nule. Tím je tvrzení úlohy a) dokázáno.

b) Nechť platí $p = q$ [předpokládejme, že platí (1)] neboli

$$\sin\alpha - \sin(90^\circ - \alpha) + \sin\beta - \sin(90^\circ - \beta) + \sin\gamma - \sin(90^\circ - \gamma) = 1.$$

Pomocí vzorce $\sin x - \sin y$ pro rozdíl funkcí dostaneme

$$(\text{přitom } 2\cos 45^\circ = \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ):$$

$$\begin{aligned}
 2\cos 45^\circ \sin(\alpha - 45^\circ) + 2\cos 45^\circ \sin(\beta - 45^\circ) + \\
 + 2\cos 45^\circ \sin(\gamma - 45^\circ) = 1
 \end{aligned}$$

neboli

$$\sin(\alpha - 45^\circ) + \sin(\beta - 45^\circ) = \sin 45^\circ - \sin(\gamma - 45^\circ).$$

Pomocí vzorce $\sin x + \sin y$ pro součet funkcí dostaneme

$$\begin{aligned}
 2\sin[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 45^\circ] \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \\
 = 2\cos\frac{1}{2}\gamma \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\gamma);
 \end{aligned}$$

odtud pomocí vztahu (2) dostaneme

$$\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\gamma) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \cos\frac{1}{2}\gamma \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\gamma),$$

tj.

$$\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\gamma) [\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos \frac{1}{2}\gamma] = 0. \quad (4)$$

Platí

$$\begin{aligned} z &= \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos \frac{1}{2} \gamma = \\ &= -2\sin \frac{1}{4}(\alpha - \beta + \gamma) \cdot \sin \frac{1}{4}(\alpha - \beta - \gamma); \end{aligned}$$

avšak

$$\alpha + \gamma = 180^\circ - \beta, \quad -\beta - \gamma = \alpha - 180^\circ,$$

proto

$$\begin{aligned} z &= -2\sin \frac{1}{4}(180^\circ - 2\beta) \sin \frac{1}{4}(2\alpha - 180^\circ) = \\ &= 2\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\beta) \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha). \end{aligned}$$

Po dosazení do (4) máme, že pro úhly α, β, γ vedle $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ platí

$$\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\beta) \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\gamma) = 0.$$

Protože úhly $\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta, \frac{1}{2}\gamma$ jsou ostré, platí nutně jeden ze vztahů $\alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ$, tj. trojúhelník je pravoúhlý.

c) Pro $\gamma = 90^\circ$ je $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 45^\circ$; předpokládejme, že je $0 < \alpha \leq \beta$, takže je

$$0 \leq \beta - \alpha < 90^\circ. \quad (5)$$

Přitom je

$$p = \sin \alpha + \sin \beta + \sin 90^\circ =$$

$$2\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha) + 1 = 1 + \sqrt{2} \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha);$$

vzhledem k (5) je p při $\gamma = 90^\circ$ maximální pro $\beta - \alpha = 0$, tj. pro $\alpha = \beta = 45^\circ$, tedy pro pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

5. Nájdite všetky prirodzené čísla n , pre ktoré je číslo $2^n - 1$ druhou alebo vyššou mocninou (s celým exponentom) prirodzeného čísla.

Riešenie. *Rozbor.* Podľa textu úlohy máme nájsť prirodzené čísla n , $m > 1$, a , aby pre ne platilo

$$2^n - 1 = a^m. \quad (1)$$

Prípád [1]. Nech je $a = 1$. Potom vzťah (1) má tvar $2^n = 2$ pre všetky prirodzené čísla m . Z toho vyplýva, že nutne $n = 1$. Skutočne pre $a = n = 1$, $m > 1$ (ľubovoľné) je vzťah (1) splnený.

Prípád [2]. Nech je $a > 1$. Rozoznávajme možnosti [2a], [2b].

[2a] Nech je $n = 1$. Vzťah (1) má tvar $1 = a^m$ a nemožno ho splniť, pretože pre všetky prirodzené $m \geq 1$, $a > 1$ je vždy $a^m > 1$. Tým je táto možnosť vylúčená.

[2b] Nech je $n > 1$. V tomto prípade je $2^n > 2$ párne číslo a $2^n - 1$ číslo nepárne. Zo vzťahu (1) vyplýva, že číslo a je nutne nepárne (inak by číslo a^m nebolo nepárne). Rozoznávajme dve možnosti (α) , (β) :

(α) Nech je $m > 1$ číslo párne. Položme $a = 2k + 1$, $m = 2p$, kde k , p sú prirodzené čísla. Po dosadení do (1) dostaneme $2^n - 1 = [(2k + 1)^2]^p$ čiže

$$2^n - 1 = [4(k^2 + k) + 1]^p; \quad (2)$$

po umocnení dostaneme na pravej strane číslo tvaru

$4Q + 1$, kde $Q \neq 0$ je prirodzené číslo. Vzťah (1) možno teda uviesť na tvar

$$2^n = 4Q + 2. \quad (3)$$

Pretože je $n > 1$, je číslo 2^n deliteľné štyrmi. Keďže pravá strana vzťahu (3) nie je štyrmi deliteľná, dospeli sme k sporu.

Zostáva m o ť n o s ť:

(β) Číslo $m > 1$ je nutne nepárne. Vzťah (1) možno písať v tvare $2^n = a^m + 1$ (kde je teda $m \geq 2$). Na pravú stranu použijeme vzorec $x^b + y^b = (x + y) \cdot P$, kde $P = x^{b-1} - x^{b-2}y + \dots - xy^{b-2} + y^{b-1}$, ktorý platí pre všetky nepárne prirodzené čísla $b \geq 3$, pričom počet členov mnohočlena P je práve b .

Vzťah (1) potom prejde do tvaru

$$2^n = (a + 1) \cdot A, \quad (4)$$

kde $A = a^{m-1} - a^{m-2} + \dots - a + 1$ je súčtom nepárneho počtu m nepárnych čísel. Je to teda nepárne číslo. Pritom pre prirodzené $2 \leq k \leq m - 1$ je $z_k = a^k - a^{k-1} = a^{k-1}(a - 1) > 0$. Keďže číslo A je súčtom aspoň jedného čísla z_k a čísla 1, je $A > 1$, teda $A \geq 3$. No, ľavá strana vo vzťahu (4) nie je deliteľná nepárnym číslom $A \geq 3$; tým sme dosiahli spor.

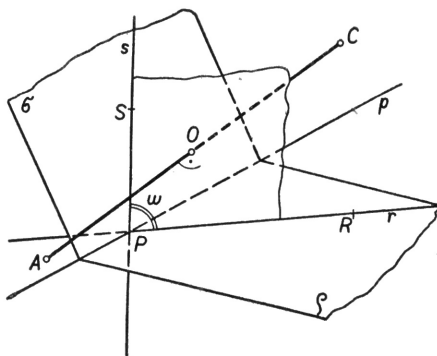
Záver. Jediné prirodzené číslo n , ktoré splňuje požiadavky úlohy, je číslo $n = 1$ a dané číslo $2^n - 1$ sa rovná 1.

6. Jsou dány dvě různoběžné roviny ϱ, σ a úsečka AC , která nemá s žádnou z obou rovin ϱ, σ společný bod a která není kolmá k průsečnici rovin ϱ, σ .

Sestrojte rovnoramenný rovnoběžník (kosočtverec nebo čtverec) $ABCD$ těchto vlastností:

- (1) Body A, C jsou jeho protější vrcholy.
- (2) Bod B leží v rovině ϱ a bod D leží v rovině σ .

Proveďte prostorové řešení úlohy a diskusi řešitelnosti.



Obr. 7

Řešení (viz obr. 7). Označme p průsečnici rovin ϱ, σ . Podle textu úlohy neplatí $p \perp AC$; proto rovina $\omega \perp AC$, která prochází středem O úsečky AC , je s přímkou p různoběžná (tj. má s ní jediný společný bod). Kdyby platilo $p \parallel \omega$, existovala by přímka $p' \parallel p$

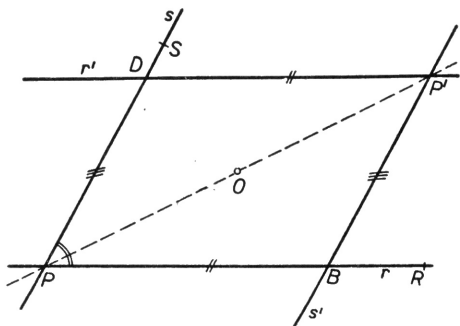
jdoucí bodem O a ležící v rovině ω ; pak by ale bylo $p' \perp AC$ a $p \perp AC$, což je proti znění úlohy.

Je-li $ABCD$ hledaný rovnostranný rovnoběžník, je $BD \perp AC$, takže body B, D i s přímkou BD leží v rovině ω . Označme r, s průsečnice roviny ω po řadě s rovinami ϱ, σ . Bod O leží v jednom ze čtyř dutých úhlů, v něž rovinu ω dělí různoběžky r, s (přímky r, s jsou jistě různé, protože přímka p protíná rovinu ω v bodě P , jímž procházejí i přímky r, s); tento úhel označme $\angle RPS$. Tím je úloha převedena na planimetrickou úlohu **U**: „V rovině ω je dán dutý úhel $\angle RPS$ a uvnitř tohoto úhlu bod O . Na polopřímkách RP, PS určete po řadě body B, D tak, aby úsečka BD měla střed O .“ Odtud *konstrukce*:

Sestrojíme středem O úsečky AC rovinu $\omega \perp AC$ a označíme P její průsečík s přímkou p a r, s průsečnice dvojic rovin ω, ϱ a ω, σ . Označme $\angle RPS$ ten z dutých úhlů, v něž přímky r, s dělí rovinu ω , uvnitř něhož leží bod O (takový úhel je zřejmě jediný); přitom body R, S leží po řadě v rovinách ϱ, σ . Nyní v rovině ω rozřešíme úlohu **U**, a to takto (obr. 8): Označme r', s' obrazy přímek r, s v souměrnosti o středu O a B, D průsečíky dvojic různoběžek r, s' a s, r' .

Protože bod O leží uvnitř úhlu $\angle RPS$, existuje rovnoběžník omezený přímkami $r \parallel r', s \parallel s'$ o středu O a bod O pólí jeho úhlopříčku BD . Přitom přímka BD leží v rovině $\omega \perp AC$, takže je $BD \perp AC$. Ve čtyř-

úhelníku $ABCD$ podle sestrojení jsou úhlopříčky AC , BD navzájem kolmé a navzájem se půlí; z těchto dvou vlastností se užitím osové a středové souměrnosti snadno



Obr. 8

dokáže, že je to rovnostranný rovnoběžník (za osy souměrnosti volíme úhlopříčky, za střed souměrnosti střed O úseček AC , BD). Přitom existence řešení vyplývá z toho, že neplatí $AC \perp p$, jak je patrné z rozboru úlohy. Tím je dokázáno, že úloha má jediné řešení.

2. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE A

1. Daný je trojúhelník ABC , o kterého vnitřních úhlech α , β při vrcholech A , B platí vztah $\alpha = 2\beta$. Na prodloužení strany AB za bod B je daný bod D tak, že platí $BD = \frac{1}{3}AB$.

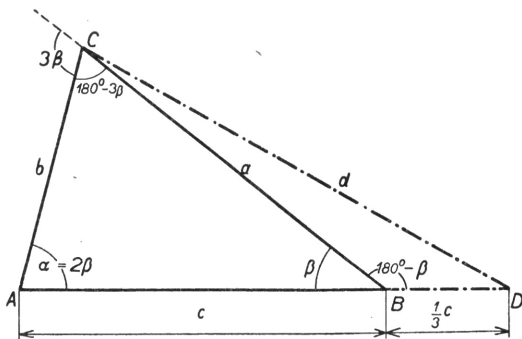
Vypočítajte rozdiel $CD - CA$ pomocou dĺžky c strany AB a uhla β .

Riešenie. Vonkajší úhol pri vrchole C trojuholníka ABC je $\alpha + \beta = 3\beta < 180^\circ$, t.j.

$$\beta < 60^\circ. \quad (1)$$

Označme $CA = b$, $CB = a$, $CD = d$. Veľkosti úsečiek a , b určíme použitím sinusovej vety z trojuholníka ABC . Je (obr. 9)

$$b = c \frac{\sin \beta}{\sin 3\beta}, \quad a = c \frac{\sin 2\beta}{\sin 3\beta}. \quad (2)$$



Obr. 9

Platí

$$\begin{aligned} \sin 3\beta &= \sin(2\beta + \beta) = \sin 2\beta \cos \beta + \cos 2\beta \sin \beta = \\ &= 2\sin \beta \cos^2 \beta + (1 - 2\sin^2 \beta) \sin \beta = \\ &= 2\sin \beta (1 - \sin^2 \beta) + \sin \beta (1 - 2\sin^2 \beta) = \\ &= 3\sin \beta - 4\sin^3 \beta; \end{aligned}$$

čiže

$$\sin 3\beta = 3\sin \beta - 4\sin^3 \beta.$$

Po dosadení do (2) dostaneme

$$b = \frac{c}{3 - 4\sin^2\beta}, \quad a = \frac{2c\cos\beta}{3 - 4\sin^2\beta}. \quad (3)$$

Aby sme určili veľkosť úsečky d , použijeme na trojuholník BCD kosínusovú vetu. Vzhľadom k (3) dostaneme

$$\begin{aligned} d^2 &= 4c^2 \frac{\cos^2\beta}{(3 - 4\sin^2\beta)^2} + \frac{c^2}{9} - \\ &- 2 \cdot \frac{2c\cos\beta}{3 - 4\sin^2\beta} \cdot \frac{c}{3} \cdot \cos(180^\circ - \beta) \end{aligned}$$

čiže

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{c^2}{9(3 - 4\sin^2\beta)^2} [36\cos^2\beta + (3 - 4\sin^2\beta)^2 + \\ &+ 12\cos^2\beta(3 - 4\sin^2\beta)] = \\ &= \frac{c^2}{9(3 - 4\sin^2\beta)^2} [81 - 144\sin^2\beta + 64\sin^4\beta] = \\ &= \frac{c^2}{9(3 - 4\sin^2\beta)^2} (9 - 8\sin^2\beta)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Vzhľadom k (1) je $0 < \sin\beta < \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a teda

$$3 - 4\sin^2\beta > 3 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 0. \quad (5)$$

Pretože je $\sin^2\beta < 1$, je zrejmé

$$9 - 8\sin^2\beta > 0. \quad (6)$$

Výsledok (4) možno vzhľadom k (5) a (6) upraviť takto:

$$d = \frac{c}{3(3 - 4\sin^2\beta)} (9 - 8\sin^2\beta).$$

Odtiaľ a z (3) dostávame

$$\begin{aligned}d - b &= \frac{c}{3(3 - 4 \sin^2 \beta)} [(9 - 8 \sin^2 \beta) - 3] = \\&= \frac{2c(3 - 4 \sin^2 \beta)}{3(3 - 4 \sin^2 \beta)} = \frac{2c}{3},\end{aligned}$$

takže je

$$d - b = \frac{2}{3}c.$$

Tým je úloha vyriešená.

Riešila Marta Kasalická,
3. g tr. SVVŠ,
Zátkova ul., České Budějovice.

2. Určete parametr p tak, aby funkce

$$y = \frac{6x - 6}{x^2 - 2x + p} \quad (1)$$

byla definována pro všechna reálná čísla x a aby pro $x = 2$ nabývala své největší hodnoty.

Načrtněte přibližný graf funkce a dokažte o něm, že je středově souměrný podle bodu $X \equiv [1, 0]$.

Řešení I. Aby funkce (1) byla definována pro všechna reálná čísla x , nesmí být trojčlen $x^2 - 2x + p$ roven nule pro žádné x . Rovnice $x^2 - 2x + p = 0$ nesmí mít tedy reálné kořeny, tj. její diskriminant $4 - 4p$ musí být záporný; musí platit $4 - 4p < 0$ neboli

$$p > 1. \quad (2)$$

Pro $p > 1$ skutečně je

$$x^2 - 2x + p = (x - 1)^2 + (p - 1) > 0,$$

neboť je $(x - 1)^2$ nezáporné číslo a $p - 1 > 0$.

Označme $f(x)$ hodnotu zlomku na pravé straně (1) pro dané reálné číslo x . Aby funkce (1) pro $x = 2$ nabývala své největší hodnoty, je nutné, aby platilo $f(2) > f(2 + k)$ pro všechna reálná čísla $k \neq 0$; máme tedy určit, pro která čísla p platí vztah

$$\frac{6}{p} > \frac{6(1 + k)}{k(2 + k) + p},$$

jestliže je $k \neq 0$. Dokázali jsme již, že oba jmenovatelé v této nerovnosti jsou kladná čísla; ekvivalentními úpravami dospějeme ke vztahu

$$k^2 + 2k > pk. \quad (3)$$

Rozeznávejme $k > 0$ a $k < 0$.

P ř í p a d [1]. Necht' je $k > 0$; potom ze (3) plyne pro číslo p požadavek $k + 2 > p$, který musí platit pro libovolné $k > 0$, tj. musí být

$$p \leq 2. \quad (3')$$

P ř í p a d [2]. Necht' je $k < 0$; ze (3) podobně dostáváme požadavek $k + 2 < p$ neboli

$$p \geq 2. \quad (3'')$$

Má-li být $f(2)$ maximum, musí platit (3) pro všechna reálná $k \neq 0$ neboli musí být $p = 2$ [viz (3'), (3'')], tj. jedná se o funkci

$$y = \frac{6(x-1)}{x^2 - 2x + 2}. \quad (1')$$

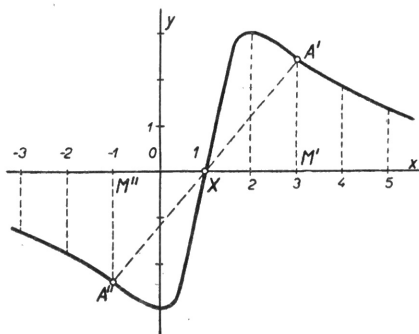
Ta pro $x = 2$ nabývá hodnoty 3; to je maximum naší funkce, jak plyne z obrácení postupu v případech [1], [2].

II. Nyní dokažme, že graf funkce (1') je středově souměrný podle bodu $X \equiv [1, 0]$ neboli, že platí $f(1+k) = -f(1-k)$, kde $k \neq 0$; přitom je $f(1) = 0$.

Dosaďme do (1) jednak $x = 1+k$, jednak $x = 1-k$; dostaneme

$$f(1+k) = \frac{6k}{k^2+1},$$

$$f(1-k) = -\frac{6k}{k^2+1}$$



Obr. 10

Tím je důkaz proveden, nebo body $[1 + k, f(1 + k)]$, $[1 - k, f(1 - k)]$ jsou souměrně sdružené ve středové souměrnosti o středu X .

Na základě toho snadno sestojíme graf (obr. 10), k jehož sestojení užijeme tabulky:

x	1	2	3	4	5	1,5
y	0	3	2,4	1,8	113	2,4

Řešil Tomáš Jech,

žák 3. tř. SVVŠ Jana Nerudy,

Praha 1 — Malá Strana, Hellichova ul. 3.

II. Náčrt jiného řešení. Jako v přechozím řešení usoudíme, že nutně platí $p > 1$. První derivace funkce (1) je

$$y' = \frac{6x^2 + 12x + 6p - 12}{(x^2 - 2x + p)^2}. \quad (6)$$

Má-li funkce (1) pro $x = 2$ maximum, pak podle známých vět pro $x = 2$ platí $y' = 0$. Avšak jmenovatel ve zlomku pravé strany (6) je pro $p > 1$ pro všechna x kladný, proto je nutně pro $x = 2$ čitatel tohoto zlomku roven nule; po dosazení $x = 2$ dostáváme, že nutně je $6(p - 2) = 0$ neboli

$$p = 2.$$

Pro $p = 2$ funkce (1) zní

$$y = \frac{6(x-1)}{(x-1)^2 + 1}. \quad (7)$$

Pro $x = 2$ ze (7) dostáváme

$$f(2) = 3. \quad (8)$$

Pro $x \neq 2$ položíme $x = 2 + k$, kde $k \neq 0$ je libovolné číslo; je

$$f(1+k) = \frac{6(1+k)}{(1+k)^2 + 1}. \quad (9)$$

Pomocí (8) a (9) dostaneme

$$f(2) - f(1+k) = \frac{3k^2}{(1+k)^2 + 1},$$

což je kladné číslo pro všechna $k \neq 0$; pro $x = 2$ má tedy funkce (7) vskutku maximum.

Souměrnost grafu se dokáže jako v předchozím řešení.

Řešení podal Michal Kretschmer,

žák 3. tř. SVVŠ,

Praha 10 — Vršovice, Omská ul. 1300.

3. Určíte všechny dvojice prirodzených čísel, kterých nejmenší společný násobek je o pět větší ako ich najväčší spoločný deliteľ.

Riešenie. Nech je D najväčší spoločný deliteľ hľadaných čísel r, s , o ktorých môžeme predpokladať, že je

$$r \geq s. \quad (1)$$

Predovšetkým je

$$r = r_1 D, \quad s = s_1 D, \quad (2)$$

kde r_1, s_1 sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, o ktorých vzhľadom k (1) platí

$$r_1 \geq s_1. \quad (3)$$

Označme n najmenší spoločný násobok čísel r, s , takže podľa známej vety platí

$$n = r_1 s_1 D. \quad (4)$$

Podľa textu úlohy má byť $n = D + 5$, takže po dosadení do (4) dostaneme

$$r_1 s_1 D = D + 5$$

čiže

$$r_1 s_1 = 1 + \frac{5}{D}.$$

Číslo $r_1 s_1$ je prirodzené a preto je nutne $\frac{5}{D}$ tiež prirodzené číslo, čiže je buď $D = 1$ alebo $D = 5$.

P r í p a d [1]. Nech je $D = 1$, takže vzhľadom k (5) máme $r_1 s_1 = 6$. Je teda buď $r_1 = 6, s_1 = 1$ a teda vzhľadom k (2)

$$r = 6, \quad s = 1 \quad (6)$$

alebo $r_1 = 3, s_1 = 2$ a teda vzhľadom k (2)

$$r = 3, \quad s = 2. \quad (7)$$

P r í p a d [2]. Nech je $D = 5$, takže vzhľadom k (5) máme $r_1 s_1 = 2$ čiže $r_1 = 2$, $s_1 = 1$ a teda vzhľadom k (2)

$$r = 10, \quad s = 5. \quad (8)$$

Tým sú všetky možnosti vyčerpané.

Záver. Požiadavkám úlohy vyhovujú jedine dvojice čísel 6,1; 3,2 a 10,5.

Riešenie podali: Alexander Groda,
žiak 3. tr. SVVŠ.

Kollárova 5, Praha 8 — Karlín a
Ján Lusk,
žiak 3. tr, SVVŠ,
České Budějovice, Zátkova ul. 29.

4. Je dán pravoúhlý trojuholník ABC , o jehož odvesnách platí $CB < CA$. Určete množinu všech bodů X trojuholníka ABC , pro něž platí zároveň tyto vztahy:

$$XA \geq XB \geq XC, \quad x_1 \geq x_2 \geq x_3,$$

kde x_1, x_2, x_3 po řadě značí vzdálenosti bodu X od stran BC, CA, AB trojuholníka ABC .

Řešení (viz označení v obr. 11). Při řešení úlohy uijeme těchto vět:

Věta U. Bud' dán dutý úhel $\sphericalangle CAB$; označme X libovolný bod tohoto úhlu a x_2, x_3 po řadě jeho vzdálenosti od přímek AC, AB . Potom množinou všech

bodů X , o nichž platí $x_2 \geq x_3$, je ostrý úhel $\sphericalangle BAK$, kde polopřímka AK je osou daného úhlu $\sphericalangle BAK$.

Věta V. Bud' dána úsečka AB ; označme o_3 její osu. Množinou všech bodů v rovině, o nichž platí $XA \geq XB$ (včetně nulových vzdáleností), je polorovina o_3B .

Věta W. Je-li $\sphericalangle BCM$ daný dutý úhel a prochází-li polopřímka CK vnitřkem tohoto úhlu, protne polopřímka CK úsečku BM v jejím vnitřním bodě.

Řešení úlohy rozdělme na části I, II; v první části vyšetříme množinu všech bodů X trojúhelníka ABC , o nichž platí $XA \geq XB \geq XC$, v druhé části dokončíme řešení úlohy.

I. Označme po řadě o_1, o_2, o_3 osy stran a, b, c daného trojúhelníka ABC , dále M', M'', M středy těchto stran, AK, BK, CK osy jeho vnitřních úhlů, při čemž K je střed kružnice trojúhelníku ABC vepsané (o něm víme, že leží uvnitř trojúhelníka). Podle textu úlohy platí

$$a < b; \quad (1)$$

proto o ostrých úhlech α, β trojúhelníka ABC platí

$$0 < \alpha < 45^\circ < \beta < 90^\circ. \quad (2)$$

Z věty **V** vyplývá: Každý bod X trojúhelníka ABC , o němž platí $XA \geq XB$, leží v polorovině o_3B ; každý bod X trojúhelníka ABC , o němž platí $XB \geq XC$, leží v polorovině o_1C . Bod X , o němž platí

$$XA \geq XB \geq XC, \quad (3)$$

leží zároveň v pravém úhlu $\sphericalangle BCA$ a v ostrém úhlu $\sphericalangle QMM'$, kde Q je průsečík přímek AC , o_3 ; úhel $\sphericalangle QMM'$ je totiž společnou částí polorovin o_1C a o_3B . Než stanovíme, co body X vyplní, provedme dvě va-
šetřování:

[1] Platí $o_1 \parallel AC$, neboť je $AC \perp CB$, $o_1 \perp CB$.

[2] Platí $MA = MB = MC$, (4)

neboť M je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC . Je tedy trojúhelník MAC rovnoramenný a o_2 je jeho osa souměrnosti; odtud plyne: $\sphericalangle CMM'' = \sphericalangle AMM'' = \beta$ (neboť v trojúhelníku AMM'' je $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle M'' = 90^\circ$, $\sphericalangle M = \beta$). Úhel $\sphericalangle QMM'' = \alpha$, takže je $\sphericalangle XMM'' > \sphericalangle QMM''$ [viz (2)]; leží tedy polopřímka MQ v úhlu $\sphericalangle CMM''$ a tím bod Q uvnitř úsečky CM'' . Body X trojúhelníka ABC , o nichž platí (3) tedy vyplní lichoběžník $CQMM'$ o větší základně

$$MM' = \frac{1}{2}b. \quad (5)$$

II. Z věty **U** vyplývá: Každý bod X trojúhelníka ABC , pro nějž platí $x_1 \geq x_2$,

leží v ostrém úhlu $\sphericalangle ACK$; (6)

každý bod X trojúhelníka ABC , pro nějž platí $x_2 \geq x_3$,

leží v ostrém úhlu $\sphericalangle BAK$. (7)

Označme L průsečík osy CK úhlu $\sphericalangle BCA$ s přímkou o_1 . Podle (4) je trojúhelník MBC rovnoramenný a platí

$$\text{lichoběžník } CQML. \quad (8)$$

The diagram illustrates the Mohr's circle method for finding principal stresses. It features a coordinate system with horizontal axis \$o_1\$ and vertical axis \$o_2\$. A third axis \$o_3\$ is shown at an angle. Points \$A\$, \$B\$, and \$C\$ are vertices of a triangle. Point \$M\$ is the center of a circle passing through \$A\$ and \$B\$. Other points like \$L\$, \$K\$, \$P\$, \$Q\$, \$N\$, \$M'\$, and \$M''\$ are also marked. Angles \$\alpha\$, \$\beta\$, \$\gamma/2\$, and \$45^\circ\$ are indicated. Dimensions \$1/2 \cdot a\$ and \$1/2 \cdot b\$ are shown along the vertical and horizontal axes respectively.

$CQML$ [viz (8)] a úhlu $\sphericalangle BAK$ [viz (7)]. Polopřímka AK leží uvnitř úhlu $\sphericalangle CAB$ neboli úhlu $\sphericalangle QAM$ a podle věty **W** má s úsečkou QM společný bod P , který leží mezi body Q, M . Dále bod K (střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC) jistě leží uvnitř trojúhelníka

ABC ; dokážeme však, že bod K padne dovnitř úsečky CL .

V trojúhelníku KBC platí $\sphericalangle B = \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle C = 45^\circ$; polovina ostrého úhlu β je však menší než 45° , takže je $\sphericalangle B < \sphericalangle C$. Proti většímu úhlu $\sphericalangle C$ trojúhelníka KBC leží větší strana, tj. je $KC < KB$ a podle věty **V** (užité pro ostrou nerovnost) padne bod K dovnitř poloroviny o_1C , a tím nutně dovnitř úsečky CL ; tím je důkaz proveden.

Bod P tedy leží uvnitř úsečky QM a bod K leží uvnitř úsečky CL ; proto společnou částí lichoběžníka $CQML$ a úhlu $\sphericalangle BAK$ je čtyřúhelník (vypuklý) $KPML$.

V našem vyšetřování jsme se opírali o věty **U**, **V**, které jednají o množinách *všech bodů* jisté vlastnosti. Proto je čtyřúhelník $KPML$ množinou všech bodů, které splňují požadavky úlohy. Tím je řešení úlohy provedeno.

3. ÚLOHY III. KOLA KATEGORIE A

1. Je dána posloupnost

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5,

Vypočítejte její tisící člen.

Řešení. Členy dané posloupnosti zařadme do skupin podle tohoto vzoru:

Členy posloupnosti	1	2, 2	3, 3, 3	...	$n, n, \dots, n$
Index skupiny	1	2	3	...	n

Všimněme si toho, že index skupiny udává zároveň skupinu a počet členů, které má skupina. Prvních n skupin obsahuje

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

členů dané posloupnosti.

Jestliže tisící člen dané posloupnosti se nachází v n -té skupině, je $s_n \geq 1000$
neboli

$$\frac{1}{2}n(n + 1) \geq 1000;$$

po úpravě dostaneme pro číslo n požadavek

$$n^2 + n - 2000 \geq 0. \quad (1)$$

Po rozkladu levé strany této nerovnosti dostaneme

$$(n - n_1)(n - n_2) \geq 0, \quad (2)$$

kde $n_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{8001}) > 0$, $n_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{8001}) < 0$;
je tedy $n - n_1 > 0$, a proto musí platit

$$n \geq n_1. \quad (3)$$

Avšak $90 > \sqrt[3]{8001} > 89$; proto je

$$n_1 > \frac{-1 + 89}{2} = 44, \quad n_1 < \frac{-1 + 90}{2} = 44,5.$$

Vztah (3) tedy platí pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovná číslu 45, tj. tisící člen je ve skupině s_{45} , a je tedy roven číslu 45.

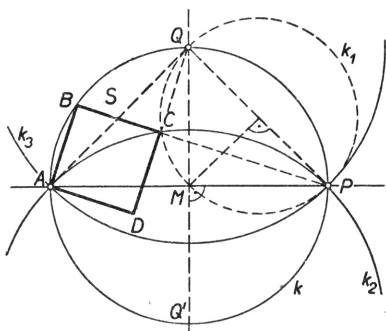
Podle řešení Michala Kretschmera,
11.b SVVŠ,
Omská 1300, Praha 10 a
Svatopluka Fučíka,
11.b SVVŠ J. K. Tyla,
Hradec Králové.

2. Daný je pravouhlý rovnoramenný trojúhelník APQ s preponou AP . Zostrojte štvorec $ABCD$ tak, aby priamky BC , CD prechádzali po rade bodmi P , Q . Vyjadrite dĺžku strany štvorca $ABCD$ pomocou dĺžky a odvesny daného trojúhelníka.

Riešenie. Označme $k \equiv (M, MA)$ kružnicu opísanú trojúhelníkom APQ . Rozoznávajme tieto dva prípady: [1] Bod B leží vo vnútri polroviny APQ . [2] Bod B leží vo vnútri polroviny opačnej k polrovine APQ .

Prípad [1]. Rozbor (obr. 12). Je $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ a bod B leží vo vnútri štvrtkružnice AQ (inak priamka CD neprechádza bodom Q). Bod C zrejme leží vo vnútri

úsečky BP . Označme S spoločný bod úsečiek AQ , PB . V pravouhlom trojuholníku PSQ je C päta výšky QC , je teda $\sphericalangle SQC = \sphericalangle SPQ$ a $\triangle AQD \cong \triangle QPC$ (usu), lebo je $AQ = QP = a$. Platí teda: $AD = QC = b$. Ďalej platí $b = DC = AD$ (pretože $ABCD$ je štvorec). Musí preto platiť: $QC = DC$. Je teda C stred úsečky QD a S stred úsečky AQ (je $CS \parallel AD$ a CS je stredná prieka v trojuholníku AQD).



Obr. 12

Konštrukcia (obr. 12). Zostrojme stred S úsečky AQ a označme $B \equiv P$ spoločný bod polpriamky PS a kružnice k . Označme C obraz bodu B v súmernosti so stredom S , takže platí $SC = SB$. Trojuholník ABC (kde $\sphericalangle ABC = 90^\circ$) doplníme na rovnobežník $ABCD$, ktorý vyhovuje požiadavkám úlohy, ako hneď dokážeme.

Dôkaz. Zo súmernosti so stredom S vyplýva, že

$\triangle SQC \cong \triangle SAB$ a teda $\sphericalangle SCQ = 90^\circ$. Preto strana CD rovnobežníka $ABCD$ prechádza bodom Q a všetky jeho uhly sú pravé.

Ďalej je $SA = SQ$ a teda aj

$$CD = CQ. \quad (1)$$

No, $\triangle AQD \cong \triangle QPC$ (usu) — viď rozbor — a teda

$$CQ = DA. \quad (2)$$

Z (1) a (2) vyplýva, že $CD = DA$ a teda rovnobežník $ABCD$ má všetky strany i uhly rovnaké, t. j. je štvorec.

Diskusia. Bod S možno vždy zostrojiť a preto existuje práve jeden štvorec $ABCD$ s vrcholom B vo vnútri polroviny APQ .

Z trojuholníka QSC , kde $\sphericalangle QCS = 90^\circ$, $SC = \frac{1}{2}b$, $QC = AB = b$, pomocou Pythagorovej vety dostaneme $QS^2 = SC^2 + QC^2$ čiže

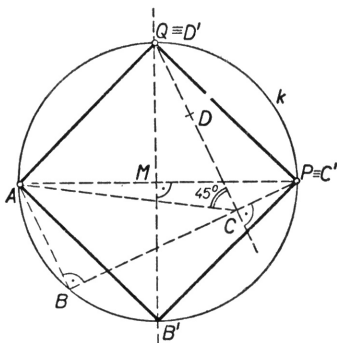
$$\frac{a^2}{4} = \frac{5}{4} b^2,$$

odkiaľ

$$b = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

P r í p a d [2] (obr. 13). Nech bod B leží vo vnútri polroviny opačnej k polrovine APQ . Pritom nutne padne na kružnicu $k \equiv (M, MA)$ a uhol $\sphericalangle ABP = 90^\circ$. Bod C leží teda na geometrickom mieste bodov, z ktorých vidno úsečku AQ pod uhlom 45° . To je v našom

prípade väčší oblúk kružnice $k \equiv (M, MA)$ s koncovými bodmi A, Q . Bod $C \equiv B$ leží na PB a k , takže nutne je $C \equiv P$ a teda aj $D \equiv Q$. Konštrukcia je samozrejماً (viď obr. 13 — na ňom štvorec $AB'C'D'$). V tomto prípade je strana štvorca $AB' = a$.



Obr. 13

Záver. Úloha má práve dve riešenia.

Podľa riešenia Dušana Mikloša,
3c tr. SVVŠ,
Novohradská ul. Bratislava.

Iné riešenie (n á č r t — viď obr. 14). Ak je bod C rôzny od P, Q , potom je
 $\sphericalangle PCQ = 90^\circ$, $\sphericalangle ACP = 135^\circ$ alebo $\sphericalangle ACP = 45^\circ$.
Zostrojme kružnicu k_1 nad úsečkou PQ ako priemerom



1

c_2 m/vt. Kolikrát se potkají v době, v které první cyklista objede kruhovou dráhu n -krát?

Provedte výpočet pro $c_1 = 10$, $c_2 = 7$, $n = 11$.

Řešení. Označme T čas (ve vteřinách), který uplynul od vyjetí cyklistů až do jejich prvního střetnutí; dále označme o obvod kruhové dráhy.

Platí

$$Tc_1 + Tc_2 = o$$

neboli

$$T = \frac{o}{c_1 + c_2}. \quad (1)$$

Za dobu xT , kde x je přirozené číslo, dojde k x setkáním; označíme-li t čas od vyjetí cyklistů až do určitého okamžiku mezi x -tým a $(x + 1)$ -tým setkáním, potom platí

$$xT \leq t < (x + 1)T. \quad (2)$$

Jestliže v okamžiku t objel 1. cyklista obvod právě n -krát, pak platí $o \cdot n = c_1 t$ neboli

$$t = \frac{o \cdot n}{c_1}.$$

Po dosazení z (1), (3) do (2) máme

$$x \cdot \frac{o}{c_1 + c_2} \leq \frac{o \cdot n}{c_1} < (x + 1) \cdot \frac{o}{c_1 + c_2};$$

po znásobení číslem $\frac{c_1 + c_2}{o}$ pro číslo x dostaneme

$$x \leq n \cdot \frac{c_1 + c_2}{c_1} < x + 1$$

neboli

$$x = \left[n \cdot \frac{c_1 + c_2}{c_1} \right],$$

kde symbol $[a]$ značí tzv. celistvou část čísla a (pro celá a je $[a] = a$, pro necelé a je $[a]$ nejbližší celé číslo menší než a).

V daném příkladě je

$$x = \left[11 \cdot \frac{17}{10} \right] = [18,7] = 18;$$

cyklista objel dráhu 11krát, cyklisté se setkali 18krát.

Řešil Antonín Lukš, 3.c tř.
SVVŠ, tř. Jiřího z Poděbrad,
Olomouc.

4. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku 1. Vrchol X proměnného rovnostranného trojúhelníka XYZ leží na polopřímce AB , vrchol X na úsečce AD , vrchol Z na polopřímce DC .

Zjistěte, jak závisí délka strany trojúhelníka XYZ na vzdálenosti AX . Odtud vypočtěte, který z trojúhelníků XYZ má nejmenší a který má největší obsah.

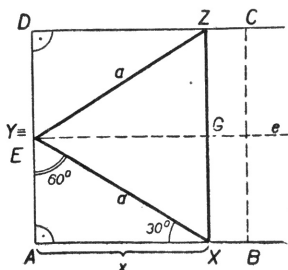
Řešení (viz obr. 15, 16). Omezíme se na případ, že bod Y probíhá úsečku ED , kde E je střed úsečky AB (to lze učinit vzhledem k souměrnosti o ose e , kde $e \perp AD$ je osou úsečky AD).

Označme $AD = 1$, $XY = YZ = ZX = a$, x vzdá-

lenost bodů A, X , $\sphericalangle A Y X = \alpha$; při našem omezení polohy bodu Y snadno v dalším ukážeme, že je $30^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$.

Uvažujme dvě možnosti: [1] Je $Y \equiv E$; [2] $Y \neq E$ je bodem úsečky ED .

Případ [1]. Platí $x = AX = AE \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ a obsah P trojúhelníka XYZ je $P = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ (viz obr. 15).



Obr. 15

Případ [2] (viz obr. 16). Označme G střed strany XZ trojúhelníka XYZ , dále F patu kolmice vedené bodem X na přímku DC a H střed úsečky XF .

Označme T bod uvnitř čtverce $ABCD$ takový, že $\sphericalangle TYA = 90^\circ$; bod G zřejmě leží uvnitř úhlu $\sphericalangle AYT$. Protože je $\sphericalangle XYG = 30^\circ$, je $\sphericalangle A Y X < 60^\circ$; zřejmě platí $30^\circ \leq \sphericalangle A Y X < 60^\circ$.

Platí $\sphericalangle YXF = \sphericalangle A Y X = \alpha$ (střídavé úhly); proto

polopřímka XF leží v úhlu $\sphericalangle YXZ$, takže bod H padne dovnitř úsečky EG a bod F dovnitř úsečky DZ .

Z trojúhelníka XZF (kde $\sphericalangle F = 90^\circ$, $XF = 1$) plyne

$$XZ = XF \cdot \frac{1}{\cos(60^\circ - \alpha)}$$

neboli

$$a = \frac{1}{\cos(60^\circ - \alpha)}. \quad (1)$$

Dále je

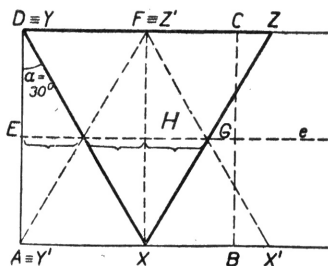
$$EG = YG \cdot \cos(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot \cos(60^\circ - \alpha);$$

po dosazení z (1) máme

$$EG = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad (2)$$

takže bod G , který leží na přímce e , je též pro všechny trojúhelníky XYZ (i pro případ [1]). Snadno zjistíme, že o číslu x platí (viz obr. 15a, 16).

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} \leq x \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}. \quad (3')$$



Obr. 15a

Mějme čísla $x_1 > x_2$ taková, že

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad (5)$$

a označme y_1, y_2 hodnoty funkce (4) po řadě pro x_1, x_2 . Platí

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= (\sqrt{3} - 2x_2)^2 - (\sqrt{3} - 2x_1)^2 = \\ &= 4(x_1 - x_2) \cdot (\sqrt{3} - x_2 - x_1) = \\ &= 4(x_1 - x_2)[(\frac{1}{2}\sqrt{3} - x_2) + (\frac{1}{2}\sqrt{3} - x_1)]. \end{aligned}$$

Vzhledem k (5) je $x_1 - x_2 < 0$, $\frac{1}{2}\sqrt{3} - x_2 \geq 0$, $\frac{1}{2}\sqrt{3} - x_1 > 0$ a tedy $y_2 - y_1 < 0$ neboli $y_2 > y_1$, což jsme měli dokázat.

Minimum tedy nastane pro $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, maximum pro $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ a pro $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (uvažujme trojúhelník $Z'Y'X'$ souměrně sdružený s trojúhelníkem XYZ z obr. 15a vzhledem k ose e úsečky AD).

Podle řešení Jana Luska,
žáka 3.d tř. SVVŠ,
České Budějovice.

4. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE B

1. Závod dodává p procent svých výrobků pro vývoz, zbytek na domácí trh.

a) Závod dostane za úkol zvýšit vývoz o $q\%$, domácí dodávky o $r\%$. O kolik procent musí zvýšit celkem výrobu?

b) Závod zvýší celkovou výrobu o $s\%$; z tohoto zvýšení dodá třikrát více vývozu než na domácí trh. O kolik procent vzrostly jeho dodávky pro vývoz a o kolik procent dodávky pro domácí trh?

Řešení. a) Označme n původní počet výrobků (v jistém období). Z toho připadlo vývozu $\frac{p}{100}n$ výrobků, domácímu trhu $\left(1 - \frac{p}{100}\right)n$ výrobků. Při zvýšení výroby připadne vývozu $\left(1 + \frac{q}{100}\right)\frac{p}{100}n$ výrobků, domácímu trhu $\left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)n$ výrobků. Je-li celková zvýšení výroby dáno x procenty, je zvýšené množství výrobků $\left(1 + \frac{x}{100}\right)n$. Podle podmínky úlohy a) je

$$\left(1 + \frac{q}{100}\right)\frac{p}{100}n + \left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)n = \left(1 + \frac{x}{100}\right)n.$$

Znásobíme-li tuto rovnost číslem $\frac{100}{n}$, dostaneme

$$\left(1 + \frac{q}{100}\right)p + \left(1 + \frac{r}{100}\right)(100 - p) = 100 + x.$$

Po vynásobení

$$p + \frac{pq}{100} + 100 + r - p - \frac{pr}{100} = 100 + x,$$

a odtud

$$x = r + \frac{p}{100}(q - r). \quad (1)$$

Pro $p = 40$, $q = 20$, $r = 25$ vyjde $x = 23$,

b) V druhé úloze platí mezi čísly p , s a q , r (to jsou hledané počty procent zvýšení dodávek) podle (1) vztahu:

$$s = r + \frac{p}{100}(q - r) \quad (2a)$$

Vzrůst dodávek pro vývoz je $\frac{q}{100} \cdot \frac{p}{100} n = \frac{pq}{100^2} n$ výrobků, vzrůst dodávek pro domácí trh je $\frac{r}{100} \left(1 - \frac{p}{100}\right) n$ výrobků. Podle podmínky je

$$\frac{pq}{100^2} n = 3 \cdot \frac{r}{100} \left(1 - \frac{p}{100}\right) n.$$

Znásobíme-li tuto rovnici číslem $\frac{100^2}{n}$, vyjde

$$pq = 3r(100 - p). \quad (2b)$$

Rovnice (2a), (2b) tvoří soustavu dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé q , r .

Rovnici (2a) znásobíme číslem 100, rovnici (2b) uspořádáme podle q , r ; tím uvedeme soustavu na tvar:

$$\begin{aligned} pq + (100 - p)r &= 100s, \\ pq - 3(100 - p)r &= 0. \end{aligned}$$

Vyloučíme-li r , dostaneme

$$q = \frac{75s}{p}, \quad (3a)$$

vyloučíme-li q , dostaneme

$$r = \frac{25s}{100 - p}. \quad (3b)$$

Vzorce (3a), (3b) dávajú řešení úlohy b).

2. Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané veľkosti výšok v_a , v_b a veľkosť ťažnice t_a .

Udajte podmienky riešiteľnosti.

Riešenie. *Rozbor* (obr. 18–20). Musí zrejme platiť

$$v_a \leq t_a. \quad (1)$$

Nech sú M , N po rade päty výšok trojuholníka ABC vedených bodmi A , B a S stred strany BC , takže je

$$AM = v_a, BN = v_b, AS = t_a.$$

Opíšme kružnicu $k \equiv (S, \frac{1}{2}v_b)$. Táto sa dotýka priamky AC v bode T . Pritom je ST strednou priečkou v trojuholníku BCN , takže je T stredom úsečky CN alebo je $N \equiv C \equiv T$ (viď obr. 20).

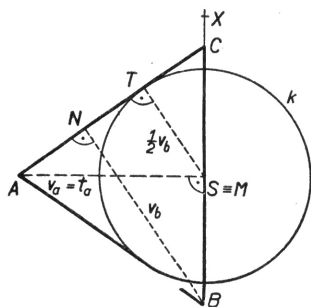
Pri konštrukcii treba rozoznávať dva prípady:

[1] Je $v_a = t_a$, t. j. $M \equiv S$ (obr. 17);

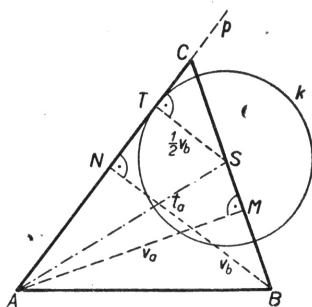
[2] je $v_a < t_a$, t. j. $M \neq S$ (obr. 18–20).

P r í p a d [1] (viď obr. 17). Zvolme úsečku $AS = t_a = v_a$, uhol $\sphericalangle ASX = 90^\circ$ a opíšme kružnicu $k \equiv (S, \frac{1}{2}v_b)$. Požadujeme, aby bod C padol do polroviny ASX čiže na polpriamku SX . Označme T dotykový bod dotýčnice vedenej z bodu A ku kružnici k , ktorý leží v polrovine ASX . Spoločný bod polpriamek AT , SX

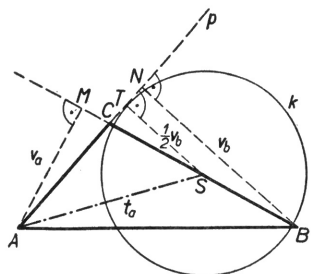
označme C a jeho obraz v súmernosti so stredom S nech je B . Potom je ABC hľadaný trojuholník.



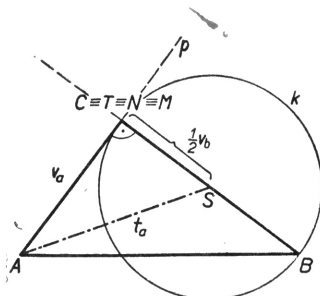
Obr. 17



Obr. 18



Obr. 19



Obr. 20

Dôkaz konštrukcie nebudeme prevádzať, pretože sa zrejme jedná o rovnoramenný trojuholník s hlavným vrcholom A .

Podmienkou riešiteľnosti je, aby bod A ležal mimo kružnice k (nie na kružnici k) čiže $\frac{1}{2}v_b < v_a = t_a$, t. j.

$$v_b > 2v_a = 2t_a. \quad (2)$$

P r í p a d [2] (viď obr. 18–20). Ak je $t_a > v_a$, zostrojme trojuholník ASM tak, aby platilo $\sphericalangle AMS = 90^\circ$, $AM = v_a$, $AS = t_a$. Ďalšia konštrukcia je takmer taká istá ako v prípade [1]. Označíme C priesečník priamky MS a dotýčnice p vedenej bodom A ku kružnici k a zostrojíme obraz B bodu C v súmernosti so stredom S . Potom trojuholník ABC splňuje požiadavky úlohy.

Dôkaz a diskusia. V trojuholníku ABC má ťažnica AS dĺžku t_a a výška AM dĺžku v_a . Ak bod A leží mimo kružnice k (t. j. pre $2t_a > v_b$), je dotýčnica p rôzno-
bežná s priamkou MS a bod $C \equiv S$ existuje. Pritom je $BN = 2 \cdot TS = v_b$ (viď obr. 18–20), pretože TS je stredná priečka v trojuholníku BCN . Má teda výška trojuholníka ABC vedená bodom B dĺžku v_b .

Z bodu A možno viesť ku kružnici k dve rôzne dotýčnice. Sú teda dve riešenia práve vtedy, keď je

$$2t_a > v_b.$$

Inak úloha riešenie nemá.

Záver. Ak platí: [1] $v_a = t_a$, $v_b < 2t_a$, má úloha dve riešenia.

[2] $v_a < t_a$, $v_b < 2t_a$ má úloha taktiež dve riešenia. Inak úloha riešenie nemá.

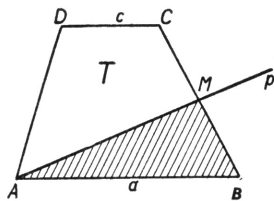
Riešenie zaslal s. Karol Trnovský,
učiteľ SVVŠ, Ružomberok.

3. Máme rozdeliť lichoběžník ve tři nepřekrývající se trojúhelníky o stejných obsahích.

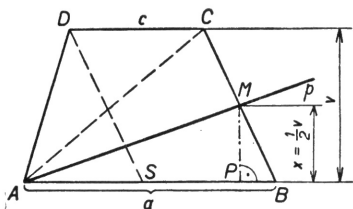
Zjistěte, zda je úloha řešitelná pro každý lichoběžník.

V případech, kdy je úloha řešitelná, najděte všechny způsoby takového rozdělení.

Řešení. Označme $a = AB$, $c = CD$ základny a v výšku uvažovaného lichoběžníka $ABCD$; nechť přitom platí $a > c$ (toho lze dosáhnout vhodným označením vrcholů lichoběžníka). Obsah každého z hledaných dílčích trojúhelníků pak je $\frac{1}{6}(a + c)v$.



Obr. 21



Obr. 21 a

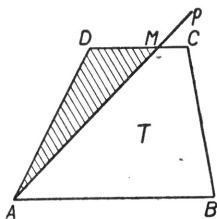
Přímka, která neobsahuje žádný vrchol trojúhelníka, zřejmě úloze nevyhovuje; taková přímka dělí lichoběžník buď ve dva čtyřúhelníky, nebo na trojúhelník a pěti-

úhelník (ten nelze jednou další přímkou rozdělit ve dva trojúhelníky). Proto musí hledaná přímka p obsahovat alespoň jeden vrchol lichoběžníka. Jsou dvě možnosti: Přímka p oddělující dílčí trojúhelník prochází vrcholem:

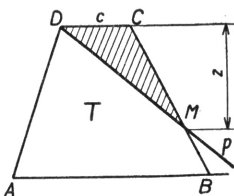
[1] větší základny a a protíná rameno lichoběžníka (srovnej s obr. 21).

[2] větší základny a a protíná menší základnu c (srovnej s obr. 22).

[3] menší základny a protíná rameno (srovnej s obr. 23).



Obr. 22



Obr. 23

[4] menší základny a protíná větší základnu (srovnej s obr. 24). (Výrokem „p ř í m k a p r o t í n á ú s e č k u“ tu rozumíme, že má s úsečkou jediný společný bod, který leží uvnitř uvažované úsečky.)

Případy [1] až [4] prozkoumáme ve sledu [2], [4], [1], [3]:

P ř í p a d [2] nevede k řešení, neboť čtyřúhelník T

v obr. 22 je lichoběžník a ten nelze rozdělit přímkou, která obsahuje úhlopříčku, ve dva rovnoploché trojúhelníky.

Případ [4] povede k řešení právě tehdy, je-li v obr. 24 čtyřúhelník $T \equiv BCDM$ rovnoběžníkem, tj. platí-li

$$cv = 2 \cdot \frac{1}{6}(a + c)v$$

neboli

$$a = 2c. \quad (1)$$

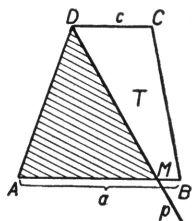
Skutečně, tato podmínka je nejen nutná, ale i postačující; tím je tento případ vyřízen (viz obr. 21, 24a, 24b).

Případ [1]. Označme v obr. 21a x výšku trojúhelníka ABM ; tu platí

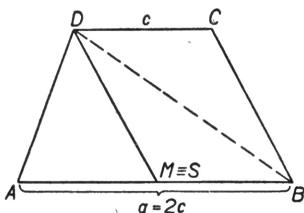
$$\frac{1}{2} ax = \frac{1}{6} (a + c)v,$$

tj.

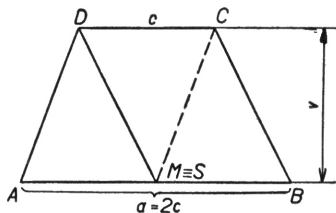
$$x = \frac{a + c}{3a} \cdot v.$$



(2) Obr. 24



Obr. 24a



Obr. 24b

Máme dvě možnosti pro rozdělení čtyřúhelníka T ve dva rovnoploché trojúhelníky:

a) Čtyřúhelník T v obr. 21a rozdělme úhlopříčkou AC ve dva trojúhelníky; pro obsah P trojúhelníka ACD platí

$$P = \frac{1}{2}cv = \frac{1}{6}(a + c)v$$

neboli

$$a = 2c. \quad (1')$$

Po dosazení (2) dostáváme

$$x = \frac{1}{2}v \quad (3)$$

což vede k řešení (viz obr. 21a) a trojúhelníky mají obsah cv .

b) Úhlopříčka DM (viz obr. 21) vzhledem k (1'), (3) nedělí čtyřúhelník T ve dva rovnoploché trojúhelníky, neboť obsah Q trojúhelníka CDM je

$$Q = \frac{1}{2}c(v - x) = \frac{1}{6}(a + c)v; \quad (4)$$

pomocí vztahu (2) však je

$$v - x = \frac{2a - c}{3a} v \text{ a po dosazení do (4) máme}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{(2a - c)}{a} \cdot cv = \frac{1}{6} (a + c)v$$

neboli

$$a^2 - ac + c^2 = 0,$$

tj.

$$\frac{a^2}{c^2} - \frac{a}{c} + 1 = 0.$$

Trojčlen $y^2 - y + 1 = (y - 1)^2 + y$ je pro všechna kladná čísla y kladný; avšak $\frac{a}{c}$ je kladné číslo, proto rovnice (5) nemá reálné řešení a dělení lichoběžníka je nemožné.

P ř í p a d [3]. Označme z výšku příslušnou ke straně CD trojúhelníka CDM v obr. 23; pak musí být

$$\frac{1}{2}cz = \frac{1}{6}(a + c)v,$$

tj.

$$z = \frac{a + c}{3c} v.$$

Celé další vyšetřování dostaneme z případu [1] výměnou písmen a, c . Protože je $a > c$, je vztah $c = 2a$ [obdobný ke vztahu (1')] nemožný; proto případ [3] nemůže nastat.

Závěr. Úloha je při $a > c$ řešitelná jedině, platí-li $a = 2c$; pak má tři řešení — viz obr. 21a, 24a, b.

4. Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prirodzených čísel x, y, z , ktoré majú tu vlastnosť, že súčet každých dvoch čísel trojice je deliteľný zostávajúcim tretím číslom trojice.

Riešenie. Predpokladajme, že sme našli prirodzené čísla, ktoré splňujú požiadavky úlohy. Najmenšie z nich označme x , najväčšie z a stredné, čo do veľkosti, označme y . Platí teda

$$0 < x < y < z. \quad (1)$$

Z nerovností

$$x < z, y < z \quad (1')$$

dostaneme sčítaním

$$x + y < 2z. \quad (2)$$

Podľa textu úlohy je súčet $x + y$ deliteľný číslom z , teda platí

$$x + y = kz, \quad (3)$$

kde k je nejaké prirodzené číslo. Pomocou vzťahu (3) prejde vzťah (2) do tvaru

$$kz < 2z, \quad \text{čiže} \quad 0 < (2 - k)z.$$

Pretože je $z > 0$, je nutne $2 - k > 0$ čiže $2 > k$. Pretože k je prirodzené číslo, je nutne $k = 1$ a vzťah (3) má preto tvar

$$x + y = z. \quad (3')$$

Podľa textu úlohy pre čísla x, y, z okrem vzťahu (3) platia ešte vzťahy

$$x + z = ny, \quad (4)$$

$$y + z = mx; \quad (5)$$

pričom m, n sú určité prirodzené čísla. Ak do (4) a (5) dosadíme za z z (3'), dostaneme

$$2x + y = ny, \quad (4')$$

$$x + 2y = mx. \quad (5')$$

Zo vzťahu (5') vyplýva, že x je deliteľom čísla $2y$, tj.

$$2y = px, \quad (6)$$

kde p je nejaké prirodzené číslo. Zo vzťahu (4') vyplýva, že y je deliteľom čísla $2x$, t. j.

$$2x = qy, \quad (7)$$

kde q je prirodzené číslo. Vynásobme navzájom ľavé a pravé strany vzťahov (6) a (7). Dostaneme

$$4xy = pqxy.$$

Keďže je $xy \neq 0$, vyplýva z tejto rovnice

$$pq = 4.$$

Prirodzené čísla p, q nemôžu byť $p = q = 2$, lebo potom zo (7) vyplýva $x = y$, čo je v spore s predpokladom (1). Taktiež nie je možné, aby bolo $p = 1; q = 4$, pretože potom zo (7) vyplýva $x = 2y$, čo je opäť v spore s predpokladom (1). Zostáva teda posledná možnosť: $p = 4, q = 1$. Zo vzťahov (6) a (7) dostaneme $y = 2x$ a stadiaľ a z (3') obdržíme $z = 3x$. Dostali sme trojicu čísel

$$x, y = 2x, z = 3x,$$

kde x je ľubovoľné prirodzené číslo. Tieto čísla vyhovujú požiadavkám úlohy, ako sa ľahko presvedčíme. Opravdu čísla

$$\frac{x+y}{z} = 1, \quad \frac{y+z}{x} = 5, \quad \frac{z+x}{y} = 2$$

sú prirodzené.

Hľadaná trojica čísel je teda

$$r, 2r, 3r,$$

pričom r je ľubovoľne zvolené prirodzené číslo.

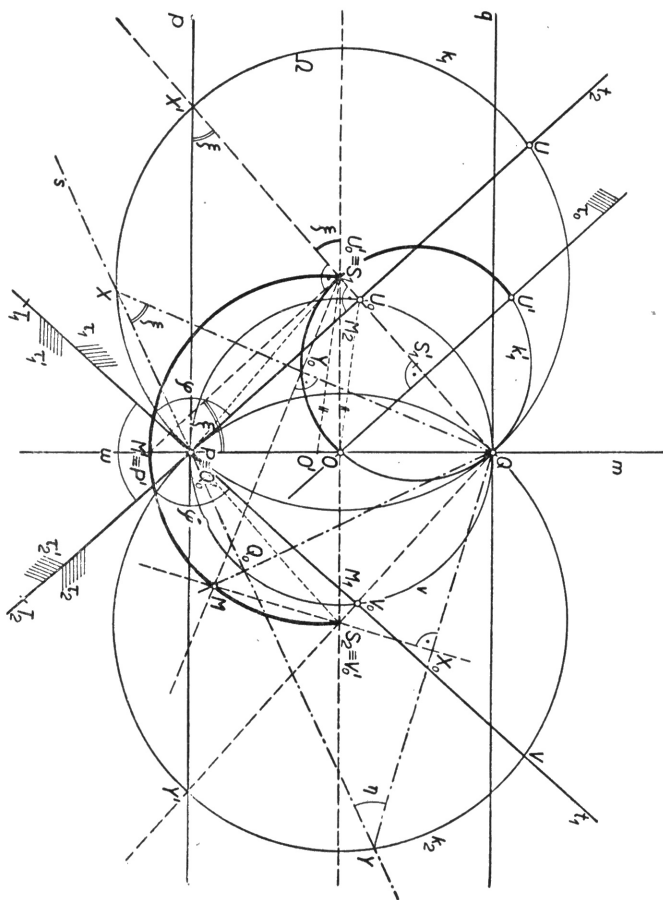
5. Jsou dány dvě shodné kružnice k_1, k_2 , které se protínají ve dvou různých bodech P, Q . Bodem P vedme přímku, která protne obě kružnice ještě v dalších bodech X, Y navzájem oddělených bodem P .

a) Vyšetřte geometrická místa středů stran trojúhelníka QXY .

b) Vyšetřte, který útvar vyplní středy kružnic opsaných trojúhelníkům QXY .

Řešení. Užijeme označení z obrázku 25, kde $t_1 \equiv PT_1$, $t_2 \equiv PT_2$ jsou po řadě tečny daných kružnic $k_1 \equiv (S_1, r)$, $k_2 \equiv (S_2, r)$ ve společném jejich bodě P . Přitom kružnice k_1 leží v polorovině $\tau_1 \equiv t_1O$, kde O je střed úseček PQ, S_1S_2 . Přímky p, q jsou rovnoběžné s S_1S_2 a po řadě procházejí body P, Q . Dutý úhel $\omega \equiv \sphericalangle T_1PT_2$ je společnou částí polorovin τ'_1, τ'_2 ; úhly $\varphi \equiv \sphericalangle T_1PU$, $\varphi' \equiv \sphericalangle T_2PV$ jsou vrcholové a k úhlu ω vedlejší. Přímka t_2 je různá od t_1 ; obě přímky mají společný bod P , takže jsou různoběžné a protože je $t_2 \neq t_1$, je t_2 sečnou kružnice k_1 . Průsečíky přímky t_2 s k_1 označme $P, U \neq P$; podobně je V druhý průsečík přímky t_1 s k_2 .

Označme $s \equiv XPY$ přímku, která má vedle bodu P



Obr. 25

s kružnicemi k_1, k_2 po řadě další společný bod X , popř. Y , a to takový, že bod P odděluje body X, Y . Dokážeme, že každá přímka, která prochází bodem P a vnitřkem úhlu φ , je přímkou typu s ; všechny ostatní přímky jdoucí bodem P nejsou přímkami typu s .

Především přímky t_1, t_2 nejsou typu s ; každá přímka o , která prochází vnitřkem úhlu ω , nemá s žádnou z kružnic k_1, k_2 uvnitř úhlu ω společný bod; úhel ω je společnou částí polorovin τ'_1, τ'_2 a např. uvnitř poloroviny τ'_1 neleží žádný bod kružnice k_1 , proto bod P nemůže oddělovat body X, Y , které padnou do úhlu ω' , který je k úhlu ω vrcholový.

Zbývají nám přímky, které procházejí bodem P a vnitřky vrcholových úhlů φ, φ' . Buď s jedna taková přímka; dokažme, že má např. s kružnicí k_1 společný bod X , ležící uvnitř úhlu φ . Přímka s prochází bodem P a není tečnou t_1 kružnice k_1 , je tedy nutně sečnou této kružnice; druhý její průsečík $X \equiv P$ však nemůže padnout dovnitř poloroviny τ'_1 (v této polorovině má kružnice k_1 pouze bod P). Padne tedy bod X nutně dovnitř úhlu φ . Stejně dokážeme, že druhý průsečík $Y \equiv P$ přímky s s kružnicí k_2 padne dovnitř úhlu φ' . Úhly φ, φ' jsou vrcholové, nemají žádný společný vnitřní bod a proto bod P odděluje body X, Y .

Protože přímka typu s neprochází vnitřkem úhlu ω' , v němž leží bod Q , nepadne bod Q na přímku s a ke každé přímce $s \equiv XPY$ existuje tudíž trojúhelník QXY ,

o němž se mluví v textu úlohy. Označme $\xi \equiv \sphericalangle PXQ$, $\eta \equiv \sphericalangle PYQ$; platí $\xi = \eta$, což ihned dokážeme. Úhel ξ má vrchol na k_1 a uvnitř poloroviny τ'_2 , jeho ramena procházejí body P, Q kružnice k_1 ; je tedy ξ obvodový úhel v kružnici k_1 a úhel $\sphericalangle PS_1Q$ je k němu příslušný úhel středový, takže je $\xi = \frac{1}{2} \sphericalangle PS_1Q$. Stejně se dokáže, že $\eta = \frac{1}{2} \sphericalangle PS_2Q$; avšak je $\sphericalangle PS_1Q = \sphericalangle PS_2Q$ (úhly souměrně sdružené vzhledem k ose m úsečky S_1S_2), a tím $\xi = \eta$. Je tedy trojúhelník QXY rovnoramenný s hlavním vrcholem Q . Dále je patrné, že všechny trojúhelníky QXY jsou navzájem podobné, neboť se shodují v úhlech; toho užijeme v části b) této úlohy.

a) Označme Q_0, X_0, Y_0 po řadě středy stran XY, YQ, QX trojúhelníka QXY . Dokážeme dvě věty.

Věta V_1 : Geometrickým místem bodů Q_0 je vnitřek oblouku U_0PV_0 kružnice $v \equiv (O, OP)$, kde O je střed úseček S_1S_2, PQ ; body U_0, V_0 jsou po řadě středy úseček PU, PV .

Věta V_2 : Geometrickým místem bodů Y_0 je vnitřek oblouku OS_1U' kružnice k'_1 , která je obrazem kružnice k_1 ve stejnolehlosti o středu Q s koeficientem $\frac{1}{2}$; přitom je U' středem úsečky QU . (Podobná věta platí o bodu X_0 .)

Důkaz vět V_1, V_2 : Je-li přímka typu s kolmá k přímce PQ (v obr. je to přímka p), je $Q_0 \equiv P$ a bod Q_0 leží na oblouku U_0PV_0 . Je-li $s \neq p$, vzniká pravoúhlý trojúhelník PQQ_0 s přeponou PQ ; podle Thaletovy věty

leží bod Q_0 na kružnici v opsané nad úsečkou PQ jako průměrem. Z bodů kružnice v mohou přijít v úvahu pro bod Q_0 jen vnitřní body oblouku U_0PV_0 (kde U_0, V_0 jsou středy tětiv PU, PV), neboť ty body leží v jednom z úhlů φ, φ' (jer. vnitřky těchto úhlů procházejí přímkou typu s). Je-li $Q_0 \equiv P$ bod tohoto oblouku, potom přímka PQ_0 je typu s a Q_0 je zřejmě středem příslušné úsečky XY . Tím je věta V_1 dokázána.

D ů k a z v ě t y V_2 : Libovolná přímka typu s má s k_1 společný bod $X \equiv P$; bod X leží uvnitř úhlu φ a uvnitř oblouku $\Omega \equiv PU$, tj. toho, který neobsahuje bod Q . Bod Y_0 je však obrazem bodu X ve stejnolehlosti o středu Q s koeficientem $\frac{1}{2}$; body O, U' jsou obrazy bodů P, U v této stejnolehlosti. Obrazy bodů X oblouku Ω v této stejnolehlosti leží na oblouku OS_1U' kružnice sestrojené nad úsečkou S_1Q jako průměrem (bod S_1 je obrazem bodu X' diametrálního k bodu Q na kružnici k_1). Ve stejnolehlosti k předchozí obrácené je vnitřek oblouku Ω obrazem vnitřku oblouku OS_1U' ; každý bod vnitřku oblouku OS_1U' je tedy středem Y_0 strany QX jistého trojúhelníka našeho typu QXY . Tím je věta V_2 dokázána a řešení části a) dané úlohy provedeno.

b) Již jsme dokázali, že každé dva rovnoramenné trojúhelníky $QXY, Q'X'Y'$, které vyhovují požadavkům textu úlohy, jsou navzájem podobné (podle věty uu). Označme M, M' středy kružnic těmito trojúhelníkům opsaných; ty leží po řadě na polopřímkách QQ_0, QQ'_0 ,

kde Q_0 , Q'_0 jsou středy základů XY , $X'Y'$. Proto platí

$$\frac{QM}{QQ_0} = \frac{QM'}{QQ'_0} = \lambda, \quad (1)$$

kde $\lambda > 0$ je konstanta; je tedy $QM = \lambda \cdot QQ_0$. Body M , $M' \equiv P'$ jsou tedy po řadě obrazy bodů Q_0 , P ve stejnoolehlosti o středu Q s konstantou λ stejnoolehlosti. Bod M proto vyplní vnitřek oblouku $U'_0M'V'_0$, který je v této stejnoolehlosti obrazem již dříve vyšetřovaného oblouku U_0PV_0 .

O b r á c e n ě, ke zvolenému bodu M uvnitř oblouku $U_0M'_0V_0$ přísluší v obrácené stejnoolehlosti bod Q_0 uvnitř oblouku U_0PV_0 ; víme již, že ke každému takovému bodu Q_0 přísluší jediný trojúhelník QXY a ten má zřejmě bod M za střed opsané kružnice.

Geometrickým místem středů M kružnic opsaných trojúhelníkům QXY je vnitřek jistého oblouku $S_1P'S_2$, který má sečnu PQ za osu souměrnosti, přitom je $S_1 \equiv U'_0$, $S_2 \equiv V'_0$.

Poznámka. Konstanta λ se dá jednoduše vyjádřit pomocí čísel r , t , kde $2t = PQ$ je délka společné tětivy kružnic k_1 , k_2 . Je

$$\lambda = \frac{QU'_0}{QU_0}; \quad QU'_0 \equiv QS_1 = r, \quad QU_0 = PQ \cdot \sin \xi = \frac{2t^2}{r},$$

takže

$$\lambda = \frac{r^2}{2t^2}.$$

Nebo označme $QX'Y'$ ten z uvažovaných trojúhelníků, který má přímku $m \equiv PQ$ za osu souměrnosti (takže je $X'Y' \perp m$); tu bod S_1 je středem ramene QX' a střed M' kružnice trojúhelníku $QX'Y'$ opsané je průsečíkem přímky m a kolmice vedené bodem S_1 k přímce QS_1 . Bod P je středem základny $X'Y'$ rovnoramenného trojúhelníka $QX'Y'$, tj. $Q_0' \equiv P$. Poměr λ ze vztahu (1) je

$$\lambda = \frac{QM'}{QQ_0'} = \frac{QS_1 : \sin \xi}{2t} = \frac{r}{2t \cdot \sin \xi}$$

a protože je

$$\sin \xi = \frac{OQ}{QS_1} = \frac{t}{r},$$

dostaneme

$$\lambda = \frac{r^2}{2t^2}.$$

6. Je-li x nezávisle proměnná, dokažte:

a) Funkce $y = x + 2\sqrt{1-x}$ je klesající v intervalu $(0, 1)$.

b) Funkce $y = \frac{10x}{x^2 + 25}$ je v intervalu $\langle -5, 5 \rangle$ rostoucí, kdežto v obou intervalech $(-\infty, -5\rangle, \langle 5, \infty)$ je klesající; načrtněte přibližný graf funkce.

V y s v ě t l e n í. Funkce $y = f(x)$ se nazývá v určitém intervalu klesající, jestliže pro každá dvě čísla $x_1 < x_2$ tohoto intervalu platí $f(x_1) > f(x_2)$; nazývá se v intervalu rostoucí, jestliže pro každá dvě čísla $x_1 < x_2$ tohoto intervalu platí $f(x_1) < f(x_2)$.

Řešení. a) Mějme čísla x_1, x_2 , o nichž platí

$$0 < x_1 < x_2 < 1; \quad (1)$$

máme dokázat, že potom platí

$$x_1 + 2\sqrt{1-x_1} > x_2 + 2\sqrt{1-x_2}. \quad (2')$$

Podle (1) mají pro uvažovaná čísla x_1, x_2 odmocniny $\sqrt{1-x_1}, \sqrt{1-x_2}$ význam a jsou kladné.

Důkaz provedme nepřímou; nechť platí

$$x_1 + 2\sqrt{1-x_1} \leq x_2 + 2\sqrt{1-x_2}; \quad (2)$$

případ rovnosti se snadno vyloučí. Vyloučíme-li tedy ve vztahu (2) rovnost, potom platí postupně

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{1-x_1} - \sqrt{1-x_2}) &> x_2 - x_1, \\ 2 \cdot \frac{(\sqrt{1-x_1})^2 - (\sqrt{1-x_2})^2}{\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2}} &< x_2 - x_1, \\ 2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2}} &< x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Po znásobení obou stran číslem $\frac{1}{x_2 - x_1} > 0$ dostaneme

$$\frac{2}{\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2}} < 1.$$

Znásobme obě strany této nerovnosti číslem $\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} > 0$; dostaneme

$$2 < \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2}. \quad (3)$$

Avšak pro x z intervalu $(0,1)$ platí $0 < 1 - x < 1$ a tím též $0 < \sqrt[3]{1 - x} < 1$; je proto pravá strana ve vztahu (3) menší než 2 a vztah (3) vyjadřuje spor, k němuž vede předpoklad (2). Tím je důkaz proveden.

Náčrt jiného řešení úlohy. a) Položme $y = \sqrt[3]{1 - x}$ pro $0 < x < 1$; zřejmě je

$$0 < y < 1. \quad (4)$$

Odtud plyne $x = 1 - y^3$. Pro x_1, x_2 z intervalu (1) máme dokázat vztah (2'); položíme $y_1 = \sqrt[3]{1 - x_1}$, $y_2 = \sqrt[3]{1 - x_2}$. Potom lze (2') psát ve tvaru $1 - y_1^3 + 2y_1 > 1 - y_2^3 + 2y_2$, jehož platnost máme dokázat.

Platí-li tento vztah, platí postupně $(1 - y_2)^2 > (1 - y_1)^2$, $1 - y_2 > 1 - y_1$ [viz (4)], $y_2 > y_1$, $\sqrt[3]{1 - x_2} < \sqrt[3]{1 - x_1}$, $1 - x_2 < 1 - x_1$, $x_1 < x_2$. Obrácením postupu dostaneme naše tvrzení.

b) Mějme reálná čísla $x_1 > x_2$, takže je

$$x_2 - x_1 > 0. \quad (5)$$

Utvořme rozdíl r funkčních hodnot $f(x_2) - f(x_1)$ funkce

$$f(x) = \frac{10x}{x^2 + 25}.$$

Platí

$$\begin{aligned} r &= \frac{10x_2}{x_2^2 + 25} - \frac{10x_1}{x_1^2 + 25} = \frac{10[x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + 25x_2 - 25x_1]}{(x_2^2 + 25)(x_1^2 + 25)} = \\ &= \frac{10(x_2 - x_1)(25 - x_1x_2)}{(x_2^2 + 25)(x_1^2 + 25)}. \end{aligned}$$

V jmenovateli posledního zlomku jsou kladná čísla; též číslo $10(x_2 - x_1)$ je kladné. Znaménko čísla r je tedy shodné se znaménkem čísla $u = 25 - x_1x_2$.

Platí jednak

$$u = 25 - x_1x_2 < 25 + 5(x_2 - x_1) - x_1x_2 = (5 - x_1)(5 + x_2), \quad (6)$$

jednak

$$u = 25 - x_1x_2 > 25 - 5(x_2 - x_1) - x_1x_2 = (5 + x_1)(5 - x_2). \quad (7)$$

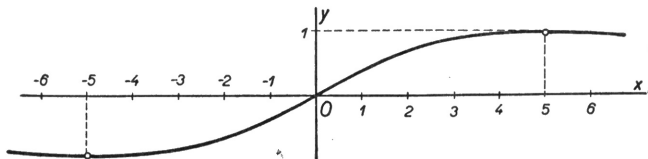
Uvažujme tyto možnosti:

[1] Je $x_1 < x_2 \leq -5$. Potom je $5 - x_1 > 0$, $5 + x_2 \leq 0$; odtud a z (6) plyne, že je $u < 0$ a tím $r < 0$.

[2] Je $5 \leq x_1 < x_2$. Potom je $5 - x_1 \leq 0$, $5 + x_2 > 0$; odtud a ze (6) plyne, že je $u < 0$ a tím $r < 0$.

[3] Je $-5 \leq x_1 < x_2 \leq 5$. Potom je $5 + x_1 \geq 0$, $5 - x_2 \geq 0$; odtud a ze (7) plyne, že je $u > 0$ a tím $r > 0$.

Tím je dokázáno, že v intervalech $(-\infty, -5\rangle, \langle 5, \infty)$ je daná funkce klesající (možnosti [1], [2]), kdežto v intervalu $\langle -5, 5 \rangle$ je tato funkce rostoucí (možnost [3]).



Obr. 26

Protože je $f(-x) = -f(x)$, je graf (obr. 26) funkce souměrný podle počátku O pravouhlých souřadnic. Stačí sestavit tabulku hodnot funkce pro $x \geq 0$.

x	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	0	$\frac{1}{5,05} < 0,2$	$\frac{5}{13} \doteq 0,4$	$\frac{20}{29} \doteq 0,7$	$\frac{15}{17} \doteq 0,9$	$\frac{40}{41} < 1$	1	$\frac{60}{61} < 1$

Je patrné, že v bodě $[5,1]$ je maximum, v bodě $[-5, -1]$ minimum. S rostoucím $x > 5$ se graf blíží ose x shora; pro $x < -5$, která rostou v absolutní hodnotě, se graf blíží ose x zdola.

5. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE B

1. Nákladní vlak projede trať dlouhou 100 km za 2 hodiny 50 minut, z toho stráví 20 minut čekáním, takže se za jízdy pohybuje průměrnou rychlostí 40 km/h.

Při nové úpravě jízdního řádu vzrostla doba čekání o p %. O kolik procent je třeba zvýšit průměrnou rychlost jízdy vlaku, aby zůstala celková doba jízdy vlaku (tj. včetně čekání) nezměněna?

Řešení. Původní doba jízdy je

$$\frac{100}{40} + \frac{1}{60} \cdot 20. \quad (1)$$

Nová doba jízdy je

$$\frac{100}{40 \left(1 + \frac{q}{100}\right)} + \frac{1}{60} \cdot 20 \left(1 + \frac{p}{100}\right); \quad (2)$$

přítom q značí počet procent, o nějž je třeba zvýšit rychlost jízdy. Podle podmínky úlohy jsou si čísla (1), (2) rovna. Po úpravě dostaneme

$$\frac{17}{6} = \frac{5}{2 \left(1 + \frac{q}{100}\right)} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Po další úpravě

$$15 = 15 \cdot \frac{1}{1 + \frac{q}{100}} + \frac{p}{50}$$

a odtud

$$q = \frac{100p}{750 - p}.$$

Např. pro $p = 50$ (10 min) je $q = \frac{50}{7} \doteq 7$ (%) (zvýšení rychlosti jízdy je tedy asi o 2,8 km/h).

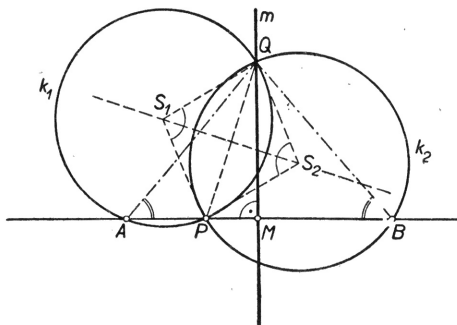
2. V rovině je dána úsečka AB a uvnitř této úsečky je dán bod P tak, že platí $AP < PB$.

Najděte geometrické místo bodů Q té vlastnosti, že oba trojúhelníky APQ , PBQ mají shodné opsané kružnice.

Označte Q_0 ten z bodů Q , kterým jsou určeny nejmenší z těchto opsaných kružnic, a sestrojte všechny

takové body Q_0 . Vyšetřte, jakou polohu má kružnice opsaná každému trojúhelníku APQ_0 vzhledem k nalezenému geometrickému místu bodů Q .

Řešení (viz obr. 27). I. Nechť APQ , BPQ je jedna dvojice trojúhelníků, jimž opsané kružnice k_1 , k_2 o středech S_1 , S_2 jsou navzájem shodné; přitom je nutně $P \equiv Q$, takže se jedná o protínající se kružnice. Oba



Obr. 27

úhly $\sphericalangle PS_1Q$, $\sphericalangle PS_2Q$ jsou souměrně sdružené podle přímky PQ , je tedy $\sphericalangle S_1 = \sphericalangle S_2$; proto je též $\sphericalangle A$ trojúhelníka PQA roven úhlu $\sphericalangle B$ trojúhelníka PQB (obvodové úhly příslušné ke středovým úhlům $\sphericalangle S_1 = \sphericalangle S_2$). Proto je trojúhelník QAB rovnoramenný (proti shodným úhlům $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ leží shodné strany), tj. platí $QA = QB$. Osa m souměrnosti tohoto trojúhelníka prochází bodem Q a středem M základny AB , přičemž je $m \perp AB$.

Leží tedy každý bod Q na přímce m právě popsané.

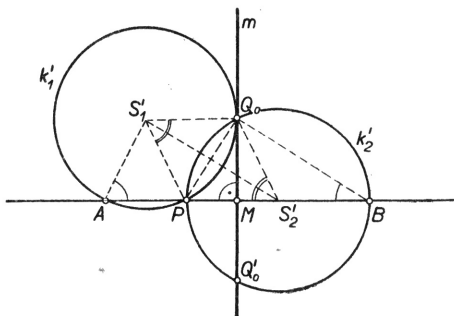
II. Obráceně, nechť Q je libovolný bod přímky m . Je-li $Q \equiv M$, pak lze oběma trojúhelníkům APQ , BPQ po řadě opsat kružnice k_1 , k_2 , které zřejmě nemohou splynout (bod P odděluje body A , B). Přitom je $QA = QB$ (neboť m je osa úsečky AB) a tudíž $\sphericalangle A$ prvního trojúhelníka je shodný s úhlem $\sphericalangle B$ druhého; obvodové úhly $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ jsou ostré (úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka), takže body A , B leží po řadě na větších obloucích (s krajními body P , Q) kružnic k_1 , k_2 . Středové úhly $\sphericalangle S_1$, $\sphericalangle S_2$, příslušné po řadě v kružnicích k_1 , k_2 k obvodovým úhlům $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, jsou tedy shodné, a proto je $\triangle PQS_1 \cong \triangle PQS_2$ (rovnoramenné trojúhelníky o společné základně PQ a shodných úhlech $\sphericalangle S_1$, $\sphericalangle S_2$ proti základnám); je tedy $S_1P = S_2Q$ a obě kružnice k_1 , k_2 jsou shodné.

Protože je $AP < PB$, padne střed M úsečky AB dovnitř úsečky PB . Kružnice k_1 jdoucí body A , P nemůže procházet bodem $Q \equiv M$. Z toho plyne, že bod M nepatří k hledanému geometrickému místu bodů.

Závěr. Geometrickým místem bodů Q je osa m úsečky AB , přičemž z ní musíme vyloučit střed M úsečky AB .

III. Kružnice, která je z určité množiny kružnic nejmenší (obr. 28), má nejmenší průměr. Nejmenší z kružnic, které v úloze uvažujeme, je nutně kružnice k'_2 opsaná nad úsečkou PB jako průměrem (všechny její tětivy

nejsou větší než PB); kružnici k'_1 shodnou s k'_2 lze body A, P proložit, neboť je $AP < PB$. Označme k'_1, k'_2 shodné kružnice, z nichž první jde body A, P a druhá má úsečku PB za průměr. Tyto kružnice se protínají v bodech P, Q_0 (nemohou se v P dotýkat, jinak by středy S'_1, S'_2 těchto kružnic ležely v přímce AB a nutně by bylo $AP = PB$, což je proti předpokladu); přitom je Q_0 jeden z průsečíků přímky m s kružnicí k'_2 (tento bod



Obr. 28

existuje, neboť m prochází vnitřním bodem M kružnice k'_2 , takže m je sečnou kružnice k'_2). Čtyřúhelník o úhlopříčkách $PQ_0, S'_1S'_2$, který určují středy S'_1, S'_2 a průsečíky P, Q_0 dvou shodných kružnic, je nutně kosoúhelník (úhlopříčky se totiž navzájem půlí a jsou k sobě kolmé). Je tedy $PS'_2 = Q_0S'_1$ (jsou to poloměry shodných kružnic k_2, k_1) a $Q_0S'_1 \parallel PS'_2$ neboli $Q_0S'_1 \perp$

$\perp m$; z toho však plyne, že kružnice k_1 se dotýká přímky m v bodě Q_0 .

Konstrukce (obr. 28): Nad průměrem PB sestrojíme kružnici k'_2 (ta existuje právě jedna) a označíme Q_0, Q'_0 její průsečíky s přímkou m ; oba tyto body jsou různé a souměrně sdružené podle přímky AB . Obě různé kružnice k'_1, k''_1 , opsané trojúhelníkům APQ_0, APQ'_0 , jsou podle předchozího shodné s k'_2 ; dvojice k'_1, k'_2 a dvojice k''_1, k'_2 jsou všechna řešení úlohy. Tím je řešení úlohy provedeno; úloha má vždy dvě řešení (pokud jde o body Q_0 a dvojice shodných kružnic).

3. Je dána funkce

$$V = \frac{1}{2} (|1 + \sqrt{4 - x^2}| + |1 - \sqrt{4 - x^2}|). \quad (1)$$

Sestrojte její graf v intervalu $-2 \leq x \leq 2$ a dokažte, že se skládá ze dvou úseček a kruhového oblouku.

Řešení. Funkce (1) nabývá vesměs kladných hodnot (neboť člen $|1 + \sqrt{4 - x^2}|$ je kladné číslo, člen $|1 - \sqrt{4 - x^2}|$ je číslo nezáporné) pro všechna x , pro něž je $4 - x^2 < 0$ neboli

$$-2 \leq x \leq 2. \quad (2)$$

Protože pro čísla $x, -x$ dostáváme z rovnice (1) touž funkční hodnotu, je graf této funkce souměrný podle osy y .

Pro další vyšetřování je třeba rozlišit dvě možnosti.

Případ [1]. Nechť je $1 - \sqrt[3]{4 - x^2} \geq 0$ neboli $1 \geq \sqrt[3]{4 - x^2}$; umocněním obou stran této nerovnosti na druhou dostaneme, že tento vztah platí právě pro tato x :

bud'

$$x \geq \sqrt[3]{3},$$

anebo

$$x \leq -\sqrt[3]{3}. \quad (3)$$

Potom je $|1 - \sqrt[3]{4 - x^2}| = 1 - \sqrt[3]{4 - x^2}$ a ze vztahu (1) dostáváme

$$y = \frac{1}{2} [1 + \sqrt[3]{4 - x^2} + 1 - \sqrt[3]{4 - x^2}] = 1 \quad (4)$$

neboli

$$y = 1.$$

Spojením vztahů (2), (3) a výsledku (4) máme (viz obr. 29): Grafem funkce (1) v intervalech $\langle -2, -\sqrt[3]{3} \rangle$, $\langle \sqrt[3]{3}, 2 \rangle$ jsou úsečky MN , PQ , kde

$$M \equiv [-2, 1], N \equiv [-\sqrt[3]{3}, 1], P \equiv [\sqrt[3]{3}, 1], Q \equiv [2, 1].$$

Případ [2]. Nechť je $1 - \sqrt[3]{4 - x^2} \leq 0$ neboli $1 \leq \sqrt[3]{4 - x^2}$; umocněním obou stran této nerovnosti na druhou dostaneme, že tento vztah platí právě pro tento interval:

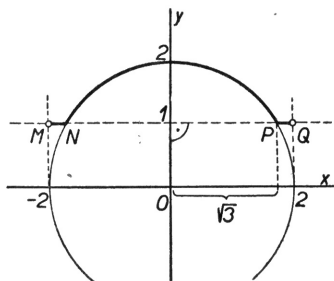
$$-\sqrt[3]{3} \leq x \leq \sqrt[3]{3} \quad (5)$$

Potom je $|1 - \sqrt{4 - x^2}| = \sqrt{4 - x^2} - 1$ a ze vzta-
hu (1) dostáváme

$$y = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - x^2} - 1] = \sqrt{4 - x^2}$$

neboli

$$y = \sqrt{4 - x^2}.$$



Obr. 29

Umocněním obou stran této rovnice na druhou obdrží-
me

$$x^2 + y^2 = 4, \quad (6)$$

takže příslušné body grafu funkce (1) leží na kružnici
opsané kolem počátku souřadnic poloměrem 2. Přitom
je $y > 0$ a jedná se o body této kružnice, pokud pří-
slušné souřadnice x náleží do intervalu (5); pro $x =$
 $= \pm\sqrt{3}$ a $y > 0$ z rovnice (6) dostáváme $y = 1$. Tedy
(obr. 29) grafem funkce (1) v intervalu $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$ je
oblouk NP kružnice o středu v počátku souřadnic a po-
loměru 2; tento oblouk leží nad osou x .

4. Daný je lichobežník $ABCD$ s väčšou základnou AB .

Zostrojte vo vnútri úsečky AD bod P a vo vnútri úsečky BC bod Q tak, aby súčasne platilo: $PQ \parallel AB$, $AQ \parallel PC$. Vypočítajte veľkosti úsečiek AP , BQ pomocou veľkostí strán daného lichobežníka.

Riešenie (viď označenie v obr. 30). *Rozbor.* Označme M priesečník priamok AD , BC . Všimnime si toho, že rovnolahlosť (M) so stredom M , ktorá prevádza bod A do bodu P , prevádza úsečku AB do úsečky PQ , bod B do bodu Q . Ďalej prevádza úsečku AQ do úsečky PC (pretože je $PC \parallel AQ$), takže bod Q prevádza do bodu C . Z toho však vyplýva, že úsečku QP prevádza do úsečky CD a teda bod P do bodu D . Označme $x > 0$ koeficient rovnolahlosti (M). Potom platí:

$$MP = x \cdot MA, \quad MD = x \cdot MP.$$

Z toho delením odpovedajúcich si strán oboch rovností dostaneme

$$\frac{MP}{MD} = \frac{MA}{MP},$$

t. j.

$$MP^2 = MA \cdot MD.$$

Je teda dĺžka úsečky MP strednou geometrickou úmernou zostrojenou z dĺžok MA , MD .

Z toho vyplýva *konštrukcia*: Nad úsečkou MA ako

$MP = MR$, čím je bod P zostrojený. Bod Q leží na úsečke BC a na rovnobežke vedenej bodom P k priamke AB . Tým je konštrukcia úsečky PQ prevedená.

$$MP = \sqrt{MA \cdot MD}$$
$$MQ = \sqrt{MB \cdot MC}, \quad (1)$$

121

$$\frac{MA}{MP} = \frac{MQ}{MC}, \quad (2)$$

čiže $MA \cdot MC = MP \cdot MQ$. Podľa (1) je

$$MP \cdot MQ = \sqrt{MA \cdot MD \cdot MB \cdot MC}. \quad (3)$$

No, z homotetie so stredom M , ktorá prevádza úsečku AB do úsečky DC , vyplýva

$$\frac{MD}{MA} = \frac{MC}{MB},$$

t. j.

$$MB \cdot MD = MA \cdot MC. \quad (4)$$

Po dosadení výsledku (4) do (3) dostaneme

$$MP \cdot MQ = MA \cdot MC,$$

čím je dokázaný vzťah (2) a platí teda $AQ \parallel PC$, čo sme mali dokázať.

Z konštrukcie vyplýva, že úloha má jediné riešenie.

Ešte vypočítame dĺžky úsečiek AP , BQ . Označme $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

Z rovnolahlosti (**M**) vyplýva $DP = x \cdot PA$, $PQ = x \cdot AB$, $CD = x \cdot PQ$, čiže

$$DP = x \cdot PA, \quad PQ = ax, \quad c = x \cdot PQ. \quad (5)$$

Po dosadení druhého vzťahu do tretieho dostaneme $c = ax^2$ a teda

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}. \quad (6)$$

Ďalej platí $DP + PA = AD$, t. j. $DP + PA = d$. Ak sem dosadíme z prvého vzťahu (5), dostaneme

$$PA(x + 1) = d$$

a stadiaľ po dosadení za x zo (6)

$$PA\left(\sqrt{\frac{c}{a}} + 1\right) = d,$$

t. j.

$$PA(\sqrt{c} + \sqrt{a}) = d\sqrt{a}.$$

Stadiaľ vypočítame, že

$$PA = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.$$

Podobne dostaneme

$$QB = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.$$

Tým je riešenie úlohy prevedené.

6. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE C

1. Rozhodněte, který z obou zlomků

$$\frac{5678901234}{6789012345}, \quad \frac{5678901235}{6789012347}$$

je větší.

Řešení. Položme $x = 5678901234, y = 6789012345$; potom rozdíl r zlomků daných v úloze (v napsaném pořádku) lze psát

$$r = \frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} = \frac{xy + 2x - (xy + y)}{y(y+2)} = \frac{2x - y}{y(y+2)}.$$

Zřejmě platí $2x > y$ neboli $2x - y > 0$; je tedy
 $r > 0$.

Odpověď. První zlomek je větší než druhý.

2. Z cihelny v místě A se vozí nákladními auty cihly na stavbu v místě B . Řidič nákladního vozu nastupuje a končí práci v místě A ; jezdí průměrnou rychlostí 45 km/h s vozem plným a 48 km/h s vozem prázdným. Při každé jízdě trvá nakládání vozu 35 minut, jeho vyložení 20 minut.

Vypočtete vzdálenost místa A od místa B , víte-li, že řidič při osmihodinové pracovní době odvezl z cihelny na staveniště 5 vozů cihel.

O kolik minut při každé jízdě je nutno zkrátit dobu nakládání a skládání (počítáno dohromady), aby neklesl osmihodinový výkon řidiče, je-li nakládané auto nuceno jet z místa A do B (i zpět) objížďkou, která je o čtvrtinu delší než původní silnice.

Řešení. Označme d vzdálenost (v km) míst A , B (měřeno na původně užívané si nici); potom cesta prázdným vozem trvá $\frac{d}{48}$ hodiny, cesta plným vozem trvá $\frac{d}{45}$ hodiny. Na naložení a vyložení jednoho vozu je třeba $\frac{55}{60}$ hodiny. Na jednu okružní cestu vozu (včetně naložení, vyložení a návratu) je třeba

$$\frac{d}{45} + \frac{d}{48} + \frac{55}{60} \text{ hodin};$$

na pět okružních cest za den bylo třeba celkem 8 hodin
neboli platí

$$5\left(\frac{d}{45} + \frac{d}{48} + \frac{55}{60}\right) = 8;$$

odtud postupně dostáváme

$$\frac{31d}{9 \cdot 16} = \frac{41}{12},$$

$$d = \frac{41 \cdot 12}{31},$$

$$d = \frac{492}{31} = 15\frac{27}{31}.$$

Vzdálenost míst A , B je skoro 16 km ($15\frac{27}{31}$ km).

V případě objížďky koná auto při cestě tam i při cestě
zpět dráhu o $\frac{1}{4}d$ delší, čímž se doba jízdy prodlužuje o

$$x = \frac{1}{4}d \cdot \frac{1}{45} + \frac{1}{4}d \cdot \frac{1}{48} = \frac{1}{4}d \cdot \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{48}\right) \text{ hodin},$$

kde

$$\frac{1}{45} + \frac{1}{48} = \frac{16 + 15}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 16};$$

je tedy

$$x = \frac{1}{4} \cdot \frac{41 \cdot 12}{31} \cdot \frac{31}{9 \cdot 5 \cdot 16} = \frac{41}{3 \cdot 5 \cdot 16} = \frac{41}{240}$$

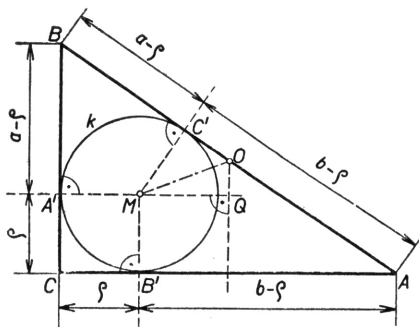
neboli v minutách

$$\frac{41}{240} \cdot 60 = \frac{41}{4} = 10\frac{1}{4}.$$

Odpověď. Dobu 55 minut potřebnou na nakládání a vykládání auta musí zkrátit o $10\frac{1}{4}$ minuty, tj. asi na 45 minut ($44\frac{3}{4}$ min).

3. Jsou dány poloměry r , ϱ opsané a vepsané kružnice pravoúhlému trojúhelníku.

Vyjádřete vzdálenost středů obou těchto kružnic pomocí čísel r , ϱ .



Obr. 31

Řešení. Je-li ABC daný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a , b a přeponou c , potom pro poloměr r kružnice tomuto trojúhelníku opsané platí $r = \frac{1}{2}c$; označme $2s$ obvod daného trojúhelníka ABC . Z obr. 31 je patrné, že délky tečen vedené z bodů C , B , A k vepsané kružnici k po řadě jsou ϱ , $a - \varrho$, $b - \varrho$. Podle Pythagorovy věty platí

$$a^2 + b^2 = c^2 = 4r^2. \quad (1)$$

V obr. 31 jsou A' , B' , C' dotykové body vepsané kružnice se stranami trojúhelníka ABC , M střed kružnice vepsané a O střed kružnice opsané (bod O je středem úsečky AB a bod P středem úsečky AC); je tedy $OP \parallel BC$ střední příčka daného trojúhelníka. Označme Q patu kolmice vedené bodem M k přímce OP . Zřejmě je $BA' > A'C$, tj. $a - \varrho > \varrho$, takže je $a - \varrho > 0$; proto je $\frac{1}{2}a = OP > CA' = QP = \varrho$. Z toho plyne, že bod Q padne dovnitř úsečky OP a existuje trojúhelník MOQ s pravým úhlem $\sphericalangle Q$; označme $x = OM$ vzdálenost, kterou podle textu úlohy máme zjistit. Je $OQ = OP - PQ = \frac{1}{2}a - \varrho$; stejně se vyšetří, že $MQ = CP - CB' = \frac{1}{2}b - \varrho$. Užitím Pythagorovy věty na trojúhelník MOQ obdržíme $MO^2 = MQ^2 + OQ^2$ neboli

$$x^2 = (\tfrac{1}{2}a - \varrho)^2 + (\tfrac{1}{2}b - \varrho)^2,$$

tj.

$$x^2 = \tfrac{1}{4}[a^2 + b^2 - 4\varrho(a + b) + 8\varrho^2]. \quad (2)$$

Přitom podle obr. 31 je $a + b = (a - \varrho) + (b - \varrho) + 2\varrho = c + 2\varrho = 2(r + \varrho)$; tento výsledek a výsledek (1) dosadíme do (2); dostaneme

$$x^2 = r^2 - 2\varrho(r + \varrho) + 2\varrho^2$$

neboli

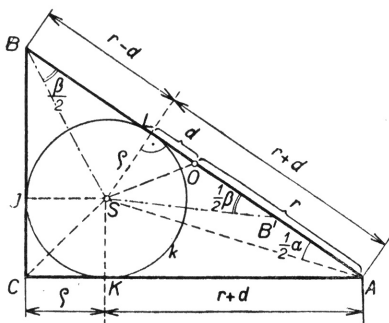
$$x^2 = r^2 - 2r\varrho,$$

čímž je řešení provedeno.

Je tedy

$$x = \sqrt{r(r - 2\rho)}.$$

Jiné řešení (viz označení v obr. 32). Můžeme předpokládat, že je $\alpha < \beta$, neboli $BC < AC$ (případ $BC = AC$ vyřídíme na závěr). Označme J, K, L dotykové body kružnice $k \equiv (S, \rho)$ vepsané trojúhelníku ABC



Obr. 32

s jednotlivými stranami a O střed přepony AB , jejíž délka je $2r$ (průměr opsané kružnice). Platí

$$SJ = SK = SL = CK = CJ = \rho, \quad OL = d \quad (1)$$

a tedy

$$AL = AK = r + d, \quad BL = BJ = r - d \quad (2)$$

(délky tečen vedených po řadě z bodů A, B ke kružnici k); zřejmě je totiž $BL < AL$ (stačí určit obraz B' bodu

B v souměrnosti o ose SL a všimnout si toho, že je $\sphericalangle SB'L = \frac{1}{2}\beta > \frac{1}{2}\alpha = \sphericalangle SAL$, kde $\sphericalangle SB'L$ je vnější a $\sphericalangle SAL$ vnitřní nesousední úhel v trojúhelníku ASB' .

Pomocí Pythagorovy věty užité na trojúhelník ABC vzhledem k (1) dostáváme

$$(AK + CK)^2 + (B\check{f} + C\check{f})^2 = (AL + BL)^2;$$

po dosazení z (2)

$$(r + d + \varrho)^2 + (r - d + \varrho)^2 = (r + d + r - d)^2$$

neboli

$$d^2 = r^2 - \varrho^2 - 2r\varrho. \quad (3)$$

Z trojúhelníka OSL , kde $\sphericalangle L = 90^\circ$, pomocí Pythagorovy věty pro hledanou délku $x = OS$ dostaneme $OS^2 = SL^2 + OL^2$ neboli

$$x^2 = \varrho^2 + d^2;$$

odtud po dosazení ze (3) plyne

$$x = \sqrt{r(r - 2\varrho)}. \quad (4)$$

Řešení podal Jaroslav Jerhout,
žák 1.b SVVŠ J. Fučíka,
nám. Odborářů, Plzeň.

4. Ak sú p, q prirodzené čísla, potom je číslo

$$\frac{10^{p+q} + 2 \cdot 10^p + 2 \cdot 10^q + 4}{36}$$

celé. Dokážte.

Riešenie. O číse $y = 10^{p+q} + 2 \cdot 10^p + 2 \cdot 10^q + 4$ platí

$$\begin{aligned} y &= 10^p(10^q + 2) + 2(10^q + 2) = \\ &= (10^2 + 2)(10^q + 2). \end{aligned}$$

Pretože p, q sú prirodzené čísla, sú čísla $10^p, 10^q$ párne a práve tak sú párne aj čísla $10^p + 2$ a $10^q + 2$. Zápis čísla $10^p + 2$ v dekadickej sústave obsahuje jednu číslicu 1, jednu číslicu 2, ostatné číslice sú pre $p > 1$ všetko nuly. Preto je súčet číslic tohto čísla $1 + 2 = 3$ a číslo $10^p + 2$ je deliteľné tromi. Číslo $10^p + 2$ je teda deliteľné dvoma a tromi a preto aj šiestimi. To isté platí aj o číse $10^q + 2$. Číslo y je teda deliteľné číslom $6 \cdot 6 = 36$. Tým je dokázané, že číslo $\frac{y}{36}$ je prirodzené.

Iné riešenie. Zápis čísla $y = 10^{p+q} + 2 \cdot 10^p + 2 \cdot 10^q + 4$ v dekadickej sústave má súčet číslic $1 + 2 + 2 + 4 = 9$ (to platí aj v tom prípade, keď $p = q$). Číslo y je teda deliteľné deviatimi. Každé z čísel $10^{p+2}, 2 \cdot 10^p, 2 \cdot 10^2, 4$ je deliteľné štyrmi: Číslo $10^{p+q} = 10^p \cdot 10^q$ je súčinom dvoch párných čísel, čo je zrejmé z uvedeného zápisu, kde p, q sú prirodzené čísla. Podobne číslo $2 \cdot 10^p$ i číslo $2 \cdot 10^2$ sú súčiny dvoch párných čísel. Číslo y je teda deliteľné nesúdeliteľnými číslami 9 a 4 a podľa známej vety je deliteľné aj ich súčinom. Číslo $\frac{y}{36}$ je teda prirodzeným číslom.

5. Zvolte ostrý úhel $\sphericalangle PVQ$ a uvnitř tohoto úhlu

bod C . Uvažujme všechny trojúhelníky ABC , kde A je vnitřní bod polopřímky VP a B vnitřní bod polopřímky VQ .

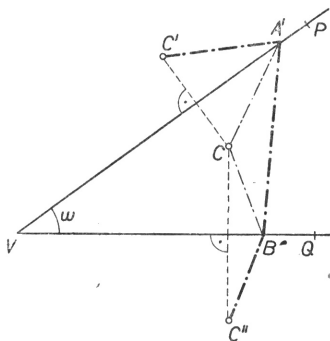
Sestrojte body A, B tak, aby trojúhelník ABC , který tak vznikne, měl ze všech uvažovaných trojúhelníků nejmenší obvod.

Dokažte, že se takový trojúhelník dá sestavit právě jeden.

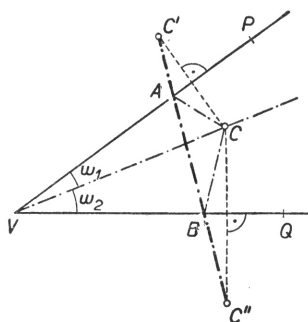
Řešení (obr. 33, 34). *Rozbor.* Buďte C', C'' obrazy bodu C v souměrnostech o osách VP, VQ ; jsou-li A', B' po řadě libovolně zvolené body přímek VP, VQ , potom platí

$$A'C' = A'C, \quad B'C'' = B'C.$$

Délka x obvodu trojúhelníka $A'B'C$ je $x = CA' + A'B' + B'C$ a tedy $x = C'A' + A'B' + B'C''$;

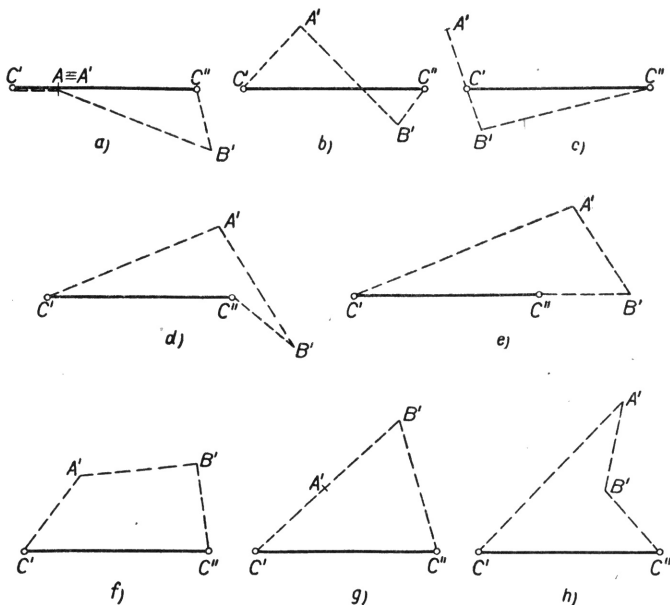


Obr. 33



Obr. 34

jedná se tedy o délku lomené čáry $C'A'B'C''$. Máme body A' , B' určit tak, aby délka této čáry byla nejkratší. Podle známé věty z planimetrie (důkaz se opírá o větu, že součet dvou stran trojúhelníka je větší než strana třetí — viz obr. 35a—h) je známo, že úsečka $C'C''$ je nejkratší lomená čára, která spojuje body C' , C'' . Odtud *konstrukce*:



Obr. 35a—h

Sestrojíme tedy body C' , C'' (viz nahoře) a určíme společné body A , B úsečky $C'C''$ s polopřímkami VP , VQ (obr. 34); existují-li tyto body, potom je ABC hledaný trojúhelník. Důkaz vyplývá z rozboru.

Diskuse. Dokážeme, že body A , B existují a leží po řadě uvnitř polopřímek VP , VQ . Označme $\omega \equiv \sphericalangle PVQ$ podle textu úlohy je $\omega < 90^\circ$. Dále označme $\omega_1 \equiv \sphericalangle PVC$, $\omega_2 \equiv \sphericalangle CVQ$, přičemž je $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Body C' , C'' jsou zřejmě různé a existuje úsečka $C'C''$. Přitom je $\sphericalangle C'VC = 2\omega_1$, $\sphericalangle CVC'' = 2\omega_2$, a tedy $180^\circ > 2\omega = 2\omega_1 + 2\omega_2 = \sphericalangle C'VC + \sphericalangle VCC''$ (dva úhly styčné a duté), tj. $\sphericalangle C'VC'' < 180^\circ$, takže se jedná skutečně o dutý úhel, ve kterém leží ostrý úhel $\sphericalangle PVQ$; polopřímky VP , VQ procházejí vnitřkem úhlu $\sphericalangle C'VC''$, a proto protínají úsečku $C'C''$ v bodech A , B . Tím je důkaz proveden; úloha má tedy právě jedno řešení.

6. Dané sú dve zhodné kružnice $k_1 \equiv (S_1, r)$, $k_2 \equiv (S_2, r)$, ktoré sa navzájom pretínajú. Označme O stred úsečky S_1S_2 .

Bodom O vedte takú priamku, aby jej priesečníky s kružnicami k_1 , k_2 boli krajnými bodmi troch navzájom zhodných úsečiek bez spoločných vnútorných bodov.

Udajte podmienky riešiteľnosti pomocou čísel r , c , kde $c = S_1S_2$.

Riešenie (obr. 36). Označme si P , Q priesečníky kružníc k_1 , k_2 ($P \neq Q$). Zrejme je $S_1S_2 < PS_1 + PS_2$ (čo

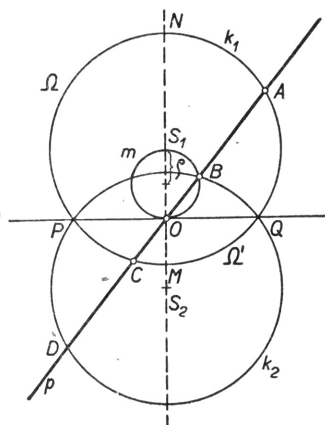
platí o stranách trojuholníka PS_1S_2) čiže $S_1S_2 < 2r$. Preto je $S_1O < r$, $S_2O < r$ a bod O leží vo vnútri každej z kružníc k_1 , k_2 . Kružnice k_1 , k_2 sú súmerne združené podľa bodu O a podľa priamky PQ . Priamka PQ rozdeľuje kružnicu k_1 na dva oblúky Ω , Ω' s krajnými bodmi P , Q . Bod O leží vo vnútri k_1 a preto oddeľuje oba krajné body A , C každej tetivy AC kružnice k_1 , pokiaľ priamka AC prechádza bodom O a je rôzna od priamky PQ . Body A , C oddeľuje teda aj priamka PQ , takže patria vnútrajškom oboch rôznych oblúkov Ω , Ω' . Zo súmernosti so stredom O vyplýva, že to isté platí o obrazoch D , B bodov A , C , a to vzhľadom ku kružnici k_2 . Z tej istej súmernosti vyplýva, že je

$$OA = OD, AB = CD, OB = OC. \quad (1)$$

Našou úlohou je zostrojiť body A , B , C na priamke p idúcej bodom O tak, aby platilo $AB = CD$ a aby bod B ležiaci na kružnici k_2 delil tetivu AC kružnice k_1 na dve rovnaké časti. Je známe, že geometrickým miestom stredov tetív AC kružnice k_1 idúcich vnútorným bodom O tejto kružnice je kružnica m zostrojená nad úsečkou OS_1 ako priemerom (vyplýva to z Thaletovej vety, pričom aj body S_1 , O patria ku geometrickému miestu m ako stred tetivy MN , resp. PQ — viď obr. 36).

Konštrukcia (obr. 36). Zostrojme kružnicu m nad

úsečkou OS_1 ako priemerom. Označme B spoločný bod kružníc m, k_2 (pokiaľ bod B existuje). Potom priamka $p \equiv OB$ je jedným riešením úlohy, pretože bod B patrí ku geometrickému miestu m a teda je stredom tetivy



Obr. 36

AC , ktorú na kružnici k_1 vytína priamka p . Súmernosť so stredom O prevádza kružnicu k_1 na k_2 a obrátene, body B, C, A po rade do bodov C, B, D , takže platí: $BA = BC, CD = CB$ a teda $BA = BC = CD$.

Diskusia. Treba rozhodnúť o počte spoločných bodov kružníc k_2, m , ktorých polomery si označíme r, ϱ . Je $\varrho = \frac{1}{4}S_1S_2$. Spojnica stredov kružníc k_2, m má dĺžku 3ϱ . Kružnice k_1, k_2 sa podľa predpokladu pretínajú

(v dvoch rôznych bodoch), preto platí $0 > S_1 S_2 > 2r$ čiže $0 < 4\rho < 2r$, t. j. $2\rho < r$. Je teda $0 < \rho < r - \rho$ a preto $r > \rho$.

Pretože bod O ležiaci na kružnici m je vnútorným bodom kružnice k_2 , môžu pre vzájomnú polohu kružníc k_2, m nastať tri rôzne prípady.

Nech o dĺžke 3ρ spojnice stredov kružníc k_2, m platí:

[1] $r - \rho < 3\rho < r + \rho$ čiže $r < 4\rho$, $2\rho < r$ (tento vzťah už platí). Potom existujú dva rôzne spoločné body kružníc k_2, m a úloha má dve rôzne riešenia (súmerne združené vzhľadom k priamke $S_1 S_2$).

[2] $r - \rho = 3\rho$ čiže $4\rho = r$. Úloha má jediné riešenie: priamka $S_1 S_2$ je hľadaná priamka.

[3] $r - \rho > 3\rho$ čiže $r > 4\rho$. V tomto prípade úloha riešenie nemá.

Pretože $S_1 S_2 = 4\rho$, možno záver vysloviť takto:

Ak je dĺžka spojnice stredov daných kružníc k_1, k_2 väčšia ako ich polomer r (pritom je nutne menšia ako $2r$), má úloha dve rôzne riešenia. Ak sa dĺžka spojnice stredov rovná polomeru r , má úloha jediné riešenie. Inak úloha riešenie nemá.

P o z n á m k a. Jednoduché riešenie úlohy sa dostane použitím rovnolahlosti so stredom O a koeficientom $\frac{1}{3}$.

7. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE C

1. Jsou dány rovnoběžky b , c a uvnitř pásu jimi určeného je dán bod A .

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby jeho vrchol B ležel na přímkce b a vrchol C ležel na přímkce c . Kolik řešení má úloha?

Řešení (viz obr. 37). *Rozbor.* Je-li $ABCD$ hledaný čtverec, potom existuje pravoúhlý trojúhelník ABM o přeponě $AB = d$, kde M je pata kolmice vedené bodem A k přímkce b . Označme v něm $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$ (viz obr. 37); je tedy $\alpha + \beta = 90^\circ$. Dále označme N patu kolmice vedené z bodu C na přímkku b . Potom je úhel označený v obr. 37 písmenem α' nutně roven α . Úhel označený ω v obr. 37 je pravý, a tedy $\alpha' + \beta' = 90^\circ$ neboli $\alpha' = \alpha$. Je tedy α' úhel ostrý, a proto pata N kolmice vedené z bodu C na jeho rameno padne dovnitř tohoto ramene, tj. na prodloužení úsečky MB za bod B .

Označme ještě $AM = a$, $CN = v$. Platí

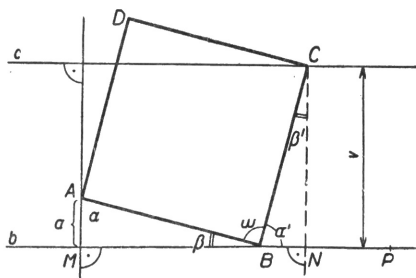
$$\triangle ABM \cong \triangle BCN \text{ (usu),}$$

neboť je $AB = BC = d$ (strana čtverce $ABCD$), $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Odtud plyne:

$$MB = NC = v, \quad BN = AM = a$$

Z tohoto odvodíme *konstrukci* (viz obr. 37): Sestrojme

patu M kolmice vedené bodem A na přímku b ; bod M dělí přímku b ve dvě opačné polopřímky MP , MQ . Další konstrukci provedeme pro polopřímku MP (pro polopřímku MQ je konstrukce obdobná).



Obr. 37

Na polopřímce MP sestrojme úsečku $MB = v$, kde v je vzdálenost daných rovnoběžek b , c . Na prodloužení úsečky MB za bod B sestrojme úsečku $BN = a$, kde $a = AM$; v bodě N sestrojme kolmici k přímce b a označme C její průsečík s přímkou c . Trojúhelník ABC doplníme na rovnoběžník $ABCD$, což je hledaný čtverec.

Důkaz. Podle konstrukce je

$$\triangle ABM \cong \triangle BCN \text{ (sus),}$$

neboť jsme sestrojili $AM = BN$, $MB = NC$, $\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90^\circ$. Je tedy $AB = BC$ a $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$

(viz obrázek); proto je $\beta + \alpha' = 90^\circ$, a tudíž $\sphericalangle ABC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ neboli $AB \perp BC$. Je tedy rovnoběžník $ABCD$ pravoúhlý a rovnostranný neboli je to čtverec.

Diskuse. Právě popsané řešení $ABCD$ existuje. Obraz $A'B'C'D'$ čtverce $ABCD$ v souměrnosti o ose AM je rovněž řešením úlohy (které odpovídá polopřímce MQ). Body B, B' jsou odděleny bodem M , a tedy je $B \neq B'$, a tím i oba čtverce $ABCD, A'B'C'D'$ jsou různé.

Úloha má právě dvě řešení.

2. Uvažujme číslo

$$x = 1 \cdot 10^{p+q+r} + 2 \cdot 10^{p+q} + 4 \cdot 10^q + 8,$$

kde p, q, r jsou daná přirozená čísla (např. zvolíme-li $p = 2, q = 1, r = 3$, obdržíme číslo 1 002 408).

Dokažte, že číslo x je dělitelné číslem 24, ať zvolíme přirozená čísla p, q, r jakkoliv.

Řešení. Platí v ě t a: Je-li číslo dělitelné dvěma nesoudělnými čísly, je dělitelné i jejich součinem. Pro dělitelnost 24 máme tedy v ě t u: Číslo je dělitelné 24, je-li dělitelné třemi a osmi.

Protože mocnitély $p + q + r, p + q, p$ čísla 10 v zápise čísla x jsou různá přirozená čísla [je $p + q + r - (p + q) = r > 0, p + q + r - p = q + r > 0, p + q - p = q > 0$], vyskytují se v zápise čísla x v dekadické soustavě jen cifry 1, 2, 4, 8 a nuly (popřípadě

žádná nula); ciferný součet čísla x tedy je $1 + 2 + 4 + 8 = 15$, tj. je dělitelný třemi.

Uvažujme, jak v dekadickém zápise čísla x vypadá poslední trojčíslí tohoto zápisu. Jsou tyto možnosti (vesměs pro $r \geq 1$):

Pro $p = 1, q = 1$ je to 248.

Pro $p = 1, q = 2$ je to 048.

Pro $p = 2, q = 1$ je to 408.

Pro $p = 2, q = 2$ je to 008; totéž trojčíslí dostaneme pro $p > 2, q > 2$. Avšak každé z čísel: 248; 48; 408; 8 je dělitelné osmi. Je tedy číslo x dělitelné osmi.

Číslo x je tedy dělitelné čísly 3 a 8, a tím i číslem 24.

3. V roce 1960 měl únor pět pondělků. Který nejbližší rok bude mít tutéž vlastnost?

Řešení. Má-li být v únoru 5 pondělků, musí to být přestupný rok. Protože se v každém novém obyčejném roce posune např. pondělí (pokud jde o datum) o jeden den dopředu, kdežto v přestupném roce o dva dny dopředu, znamená to za 4 roky přesun o 5 dní dopředu.

Hledaný rok musí být tedy přestupný a musí na 1. února padnout pondělí; jedná se tedy o to, ve kterém prvním roce po roce 1960 se pondělek posune opět na 1. února. Posunutí za 1. čtyřletí je o 5 dní, za dvě čtyřletí je posunutí o 10 dní, za tři čtyřletí o 15 dní atd. Hledáme tedy první násobek pěti, který je dělitelný

sedmi (abychom dostali posunutí pondělku zase na pondělek); je to zřejmě 35 dní = 5 dní $\cdot$ 7 neboli nastane to za 7 čtyřletí, tj. za $4 \cdot 7 = 28$ let (viz tabulku — čti ji ve vodorovných řádcích).

Po	Ú	St	Č	Pá	So	Ne
1960					1964	
....			1968			
....	1972					1976
....				1980		
....		1984				
1988						

Hledaný rok, který bude mít 5 pondělků v únoru jako rok 1960, je rok 1988.

Řešil Václav Limponek, žák 1. tř.
SVVŠ, Strakonice.

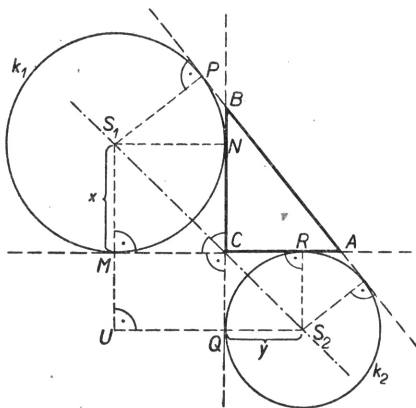
4. Daný je pravouhlý trojúhelník ABC s preponou AB . Označme k_1 , k_2 kružnic zvonku vpísané trojúhelníku ABC , které sa po rade dotýkajú úsečiek BC , CA .

Pomocou dĺžek a , b , c strán trojúhelníka ABC vyjadrite dĺžku dotýčnic vedených z bodu C ku kružniciam k_1 , k_2 a vypočítajte vzdialenosť stredov kružnic k_1 , k_2 .

Riešenie (viď označenie na obr. 38). Označme $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Dĺžky dotýčnic vedených z bodu C ku kružnici k_1 sú rovnaké. Označme ich $x = CM = CN$. Dĺžky dotýčnic BN , BP z bodu B ku kružnici k_1 sú si tiež rovné, teda platí $BP = BN = a - x$.

Je teda $AP = AB + BP = c + (a - x)$ čiže

$$AP = a + c - x. \quad (1)$$



Obr. 38

Dĺžky dotýčnic vedených ku kružnici k_1 z bodu A sú taktiež rovnaké, teda $AP = AM$, kde AP je dané vzťahom (1) a $AM = AC + CM$, t. j.

$$AM = b + x. \quad (2)$$

Porovnaním vzťahov (1) a (2) dostaneme

$$b + x = a + c - x$$

čiže

$$x = \frac{1}{2}(a - b + c) = s - b,$$

kde s je polovičný obvod trojuholníka ABC . Pritom je CMS_1N štvorec a jeho strana x je polomer kružnice k_1 .

Je teda

$$x = s - b. \quad (3)$$

Rovnako sa zistí, že polomer $y = CR = CQ$ kružnice k_2 je

$$y = s - a. \quad (4)$$

Polpriamky CS_1 , CS_2 sú osami vrcholových pravých uhlov $\sphericalangle MCN$, $\sphericalangle QCR$ a sú preto navzájom opačné, takže bod C leží vo vnútri úsečky S_1S_2 . Priamky S_1M , S_2Q sú na seba kolmé a s priamkou S_1S_2 ohraničujú pravouhlý trojuholník S_1S_2U s preponou S_1S_2 . Jeho odvesny sú zhodné úsečky a platí

$$S_1U = S_2U = x + y = 2s - a - b = c.$$

Prepona $S_1S_2 = S_1U \cdot \sqrt{2}$ (ako uhlopriečka štvorca)
čiže

$$S_1S_2 = c\sqrt{2}.$$

Záver. Vzdialenosť stredov kružníc k_1, k_2 je $c\sqrt{2}$, kde c je dĺžka prepony daného trojuholníka ABC .

8. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE D

1. V zápise dělení dvou přirozených čísel chybí některé cifry. Nahradte chybějící cifry tak, aby zápis byl správný. Zápis zní: $12^* 76 : 23^* = ^*2$ (každá hvězdička značí jednu chybějící cifru).

Řešení. Označme x, y, z po řadě chybějící cifry. Platí tedy

$$(12x76) = (23y) \cdot (z2).$$

Číslo $(z2)$, a tím i hledanou cifru z , dostaneme dělením $(12x76) : (23y)$. Přitom dělenec je větší než 12 000 a menší než 13 000, dělitel je přirozené číslo mezi 230 a 239 (popříp. jedno z těchto čísel). Tu platí

$$5 < \frac{12\,000}{239} < 6, \quad 5 < \frac{13\,000}{230} < 6;$$

je proto nutně $z = 5$ (dělili jsme největšího z možných dělců nejmenším dělitelem a nejmenšího dělence největším dělitelem).

Součin čísel $y, 2$, která stojí na místě jednotek v činitelích $(23y)$, 52, je $2y$; na místě jednotek součinu $(12x76)$ stojí číslo 6. Znásobením čísel 0, 1, 2, ..., 9 číslem 2 dostaneme v součinu na místě jednotek číslo 6 jen ve dvou případech:

$$3 \cdot 2 = 6, \quad 8 \cdot 2 = 16.$$

Musí tedy být buď $y = 3$ anebo $y = 8$; avšak pro $y = 3$ máme

$$233 \cdot 52 = 12\,116,$$

čož nevyhovuje. Pro $y = 8$ dostávame

$$238 \cdot 52 = 12\,376,$$

takže je $x = 3$. Je tedy jediné řešení $x = 3$, $y = 8$, $z = 5$.

Uvažovaný součin tedy je $238 \cdot 52 = 12\,376$.

2. Daná je úsečka AB so stredom S . Označme a , b kolmice zostrojené po rade v bodoch A, B k priamke AB . Ďalej zvolme bod M na predĺžení úsečky AB za bod A .

Bodom M zostrojte priamku p tak, aby jej priesečníky X, Y s priamkami a, b a bod S boli vrcholmi pravouhlého trojuholníka s preponou XY .

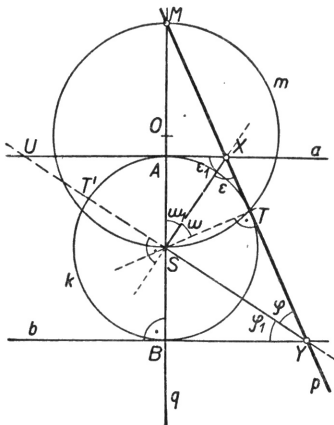
Riešenie. *Rozbor* (obr. 39a). Nech MXY je hľadaná priamka, takže je $\sphericalangle XSY = 90^\circ$. Označme U priesečník priamok SY, a . Je $\triangle SBY \cong \triangle SAU$ (usu), pretože je $SA = SB$, $\sphericalangle BSY = \sphericalangle ASU$ (uhly vrcholové), $\sphericalangle YBS = \sphericalangle UAS = 90^\circ$. Preto je $SU = SY$. (To možno dokázať tiež pomocou súmernosti so stredom S , v ktorej sú priamky a, b súmerné združené.) Podľa textu úlohy je $\sphericalangle XSY = 90^\circ$. Preto je trojuholník XYU rovnoramenný so základňou YU a osou súmernosti XS , ktorá rozpoluje uhol $\sphericalangle UXY$. V osovej súmernosti s osou XS je obrazom polpriamky XU polpriamka XY a obraz T bodu A padne teda na polpriamku XY . Z tejto súmernosti vyplýva, že

$$ST = SA. \quad (1)$$

Obrazom pravého uhla $\sphericalangle XAS$ je uhol $\sphericalangle XTS$, ktorý je teda tiež pravý a platí:

$$ST \perp MX. \quad (2)$$

Zo vzťahu (1) vyplýva, že body A, B, T ležia na kružnici $k \equiv (S, SA)$. Pretože platí (2), je priamka MX dotýčnicou kružnice k .



Obr. 39a

Z toho *konštrukcia*: Opíšme kružnicu $k \equiv (S, SA)$ a s použitím známej konštrukcie vedme z bodu M dotýčnice ST, ST' ku kružnici k . [Nad priemerom MS opíšme kružnicu $m \equiv (O, OM)$ a označíme T, T' priesečníky kružníc m, k .] Priamka $p \equiv MT$ pretne priamky a, b po rade v bodoch X, Y , ako hneď dokážeme.

K dôkazu použijeme túto vetu **V**: „Ak sú A , T dotykové body dotýčnic XA , XT vedených z bodu X ku kružnici $k \equiv (S, SA)$, potom je priamka XS osou súmernosti štvoruholníka $SAXT$ aj kružnice k . Je teda na obrázku $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\omega = \omega_1$, pričom je $\omega + \varepsilon = 90^\circ$ (súčet ostrých uhlov v trojuholníku SXT).“

Podľa vety **V** je $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\omega = \omega_1$, $\varphi = \varphi_1$ (v tomto prípade ide o dotýčnice YB , YT ku kružnici k). Platí však

$$\sphericalangle BYX + \sphericalangle YXA = 180^\circ \quad (3)$$

(uhly priľahlé medzi rovnobežkami a , b , preťatými pričkou $p \equiv MXY$). Ale $\sphericalangle BYX = \varphi + \varphi_1 = 2\varphi$, $\sphericalangle YXA = \varepsilon + \varepsilon_1 = 2\varepsilon$. Po dosadení do (3) máme $2\varphi + 2\varepsilon = 180^\circ$ čiže

$$\varphi + \varepsilon = 90^\circ.$$

Preto v trojuholníku $XY S$ je

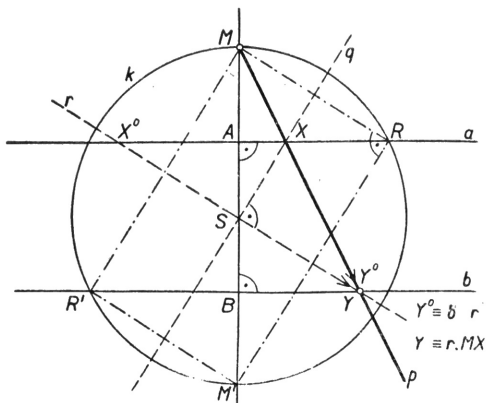
$$\sphericalangle XSY = 180^\circ - (\varphi + \varepsilon) = 90^\circ.$$

Je teda $SX \perp SY$, čo sme mali dokázať.

Diskusia. Pretože bod M leží na predĺžení úsečky AB za bod A , padne mimo kružnice k a podľa známej vety možno z bodu M zostrojiť dve rôzne dotýčnice MT , MT' , z ktorých každá vyhovuje požiadavkám úlohy. Úloha má teda dve riešenia.

Iný spôsob riešenia (n á č r t — obr. 39b). Zostrojme pomocnú kružnicu $k \equiv (S, SM)$ a jej druhý priesečník s priamkou AB označme M' . Niektorý

z priesečníkov kružnice k s priamkou a označme R . Stredom S úsečky AB vedme priamky $r \parallel MR$, $q \parallel \parallel RM'$. Je teda $r \perp q$ (podľa Thaletovej vety je $\sphericalangle MRM' = 90^\circ$). Priesečník priamok a , q označme X , priesečník priamok MX , r označme Y . Potom X , Y sú bodmi hľadanej priamky p .



Obr. 39b

Dôkaz (viď obr. 39b). Uvažujme o rovnobežníku $MRM'R'$. Keďže je $\sphericalangle MRM' = 90^\circ$, je to obdĺžnik. Priamky r , q sú jeho stredné priečky. Podľa konštrukcie je trojuholník XYS pravouhlý ($\sphericalangle XSY = 90^\circ$).

Označme Y^0 priesečník priamok b , r . Dokážeme, že je $Y^0 \equiv Y$: V osovej súmernosti podľa osi $q \equiv SX$ je priamka a obrazom priamky MY^0 , lebo priamka q

je stredná priečka obdĺžnika $MRM'R'$. Bod Y pritom prejde do priesečníka X^0 priamok a, r a platí $X^0Y \perp \perp q$. Zrejme je $SY = SX^0$. Vieme, že bod S je stredom súmernosti, ktorá prevádza priamku b do priamky a a obrátene. Táto stredová súmernosť prevádza spoločný bod X^0 priamok a, r do spoločného bodu priamok b, r . Je teda $Y^0 \equiv Y$, čo sme mali dokázať. Priamka MX prechádza teda bodom Y a je hľadanou priamkou p .

3. Majme tri prirodzené čísla a, b, c . Utvorme

$$\begin{aligned} &(a + b + c)^2, (a + b - c)^2, (a - b + c)^2, \\ &(-a + b + c)^2, (a - b - c)^2, (-a + b - c)^2, \\ &(-a - b + c)^2, (-a - b - c)^2 \end{aligned}$$

a označme s súčet týchto ôsmich čísel.

a) Napište súčet s v najjednoduchšom tvare.

b) Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c tak, aby výsledný súčet s bol rovný 240.

Riešenie. Platí vzorec $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$. Ak tu položíme napr. $-b$ namiesto b , dostaneme

$$\begin{aligned} &(a - b + c)^2 = \\ &= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2[a(-b) + (-b)c + ca] = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab - bc + ca). \end{aligned}$$

Kvôli stručnosti bude vhodné označiť $X = a^2 + b^2 +$

$+c^2$. Označme ďalej výrazy uvedené v texte úlohy po rade $V_1, V_2, V_3, \dots, V_8$. Platí:

$$V_1 = X + 2(ab + bc + ca),$$

$$V_2 = X + 2(ab - bc - ca),$$

$$V_3 = X + 2(-ab - bc + ca),$$

$$V_4 = X + 2(-ab + bc - ca),$$

$$V_5 = X + 2(-ab + bc - ca),$$

$$V_6 = X + 2(-ab - bc + ca),$$

$$V_7 = X + 2(ab - bc - ca),$$

$$V_8 = X + 2(ab + bc + ca).$$

a) Ihneď je zrejmé, že $s = 8X$, čiže

$$s = 8(a^2 + b^2 + c^2).$$

b) Máme nájsť prirodzené čísla a, b, c tak, aby platilo $8(a^2 + b^2 + c^2) = 240$ čiže

$$a^2 + b^2 + c^2 = 30.$$

Tieto čísla nájdeme pomocou tabuľky. Je zrejmé, že každé z čísel a, b, c musí byť menšie ako 6, pretože $6^2 = 36 > 30$. Pri hľadaní čísel a, b, c môžeme predpokladať, že je

$$a \leq b \leq c$$

(ostatné možnosti určíme na záver). Hneď môžeme vylúčiť tiež prípad, že sú všetky tri čísla párne; potom by totiž druhé mocniny čísel a teda aj ich súčet boli deliteľné štyrmi. Musia byť preto nutne dve z čísel a, b, c

nepárne a tretie párne (v tabuľke uvádzame len také trojice).

a	1	1	1	2	2	3	4
b	1	2	2	3	3	3	5
c	2	3	5	3	5	4	5
a^2	1	1	1	4	4	9	16
b^2	1	4	4	9	9	9	25
c^2	4	9	25	9	25	16	25
$a^2 + b^2 + c^2$	6	14	30	22	38	34	66

Z posledného stĺpca tabuľky je vidieť, že musí byť $a < 4$. Jediná vyhovujúca trojica v tabuľke je $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$. Z nej dostaneme zámenou ďalších 5 trojíc.

Našej požiadavke vyhovujú teda iba tieto trojice (o tom, že vyhovujú, sa ľahko presvedčíme skúškou):

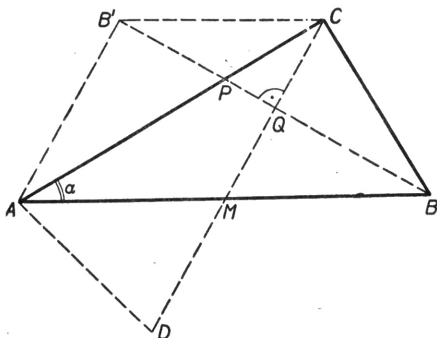
a	1	1	2	2	5	5
b	2	5	1	5	1	2
c	5	2	5	1	2	1

Tým je riešenie prevedené.

4. Na obrázku 40 je ABC pravoúhlý trojúhelník o přeponě AB ; M je střed přepony, $CD = CA$; B' je bod souměrně sdružený s bodem B vzhledem k přímce CD , přičemž je $\alpha < 45^\circ$.

Vnitřní úhly všech trojúhelníků, které se vyskytují na obr. 40, vyjádřete pomocí úhlu α .

Na závěr proveďte výpočet pro $\alpha = 42^\circ$.



Obr. 40

Řešení. Užijeme označení z obrázku 41. Trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB , takže je

$$\sphericalangle ABC = 90^\circ - \alpha; \quad (1)$$

bod M je středem přepony AB a kružnice opsaná kolem bodu M poloměrem MA je trojúhelníku ABC opsána (Thaletova kružnice), takže je

$$MC = MA.$$

Je tedy trojúhelník MAC rovnoramenný se základnou AC , při které má shodné úhly; je tedy

$$\sphericalangle ACM = \alpha, \quad \sphericalangle AMC = 180^\circ - 2\alpha. \quad (2)$$

Dále

$$\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC = 2\alpha \quad (3)$$

(vnější úhel v trojúhelníku AMC).

Trojúhelník CAD je rovnoramenný (neboť podle textu úlohy je $CA = CD$) o základně AD ; proto platí

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ACD) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha, \text{ tj.}$$

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle CAD = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha. \quad (4)$$

Je tedy

$$\begin{aligned} \sphericalangle MAD &= \sphericalangle CAD - \sphericalangle CAM = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \alpha = \\ &= 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha, \end{aligned}$$

tj.

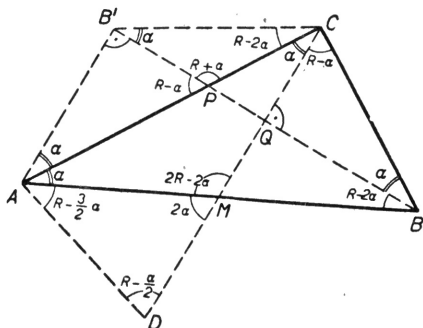
$$\sphericalangle MAD = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha. \quad (5)$$

Trojúhelník MBC je rovnoramenný (je $MA = MB = MC$) se základnou BC , takže $\sphericalangle C = \sphericalangle B$, tj. [viz druhý vztah (2)]

$$\left. \begin{aligned} \sphericalangle BCM &= \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha, \\ \sphericalangle CBM &= 90^\circ - \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

což souhlasí s tím, že je $\sphericalangle BCM + \sphericalangle ACM = 90^\circ$ [viz první vztah (2)].

Všechny čtyři úhly o vrcholu Q jsou podle textu úlohy pravé; na základě toho snadno vypočítáme dosud neznámé velikosti úhlů o vrcholech B, C, P, B' .



Obr. 41

Z trojúhelníka PCQ (kde $\sphericalangle Q = 90^\circ$) plyne

$$\sphericalangle QBC = 90^\circ - \sphericalangle BCM = \alpha \text{ [viz(6)]}. \quad (7)$$

Z trojúhelníka BMQ (kde $\sphericalangle Q = 90^\circ$) plyne

$$\sphericalangle MBQ = 90^\circ - \sphericalangle BMC = 90^\circ - 2\alpha \text{ [viz vztah (3)]}.$$

Z trojúhelníka CPQ (kde $\sphericalangle Q = 90^\circ$) o úhlech $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle APB'$ plyne

$$\sphericalangle APB' = \sphericalangle CPB = 90^\circ - \sphericalangle ACM = 90^\circ - \alpha \quad (8)$$

[viz první vztah (2)]; o úhlech k nim vedlejších platí

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CPB' = 90^\circ + \alpha. \quad (9)$$

Ze souměrnosti o ose CM vyplývá, že Q je středem úsečky BB' a že je

$$\sphericalangle QB'C = \sphericalangle QBC = \alpha \text{ [viz (7)]}, \quad (8')$$

dále, že $\sphericalangle QCB' = \sphericalangle QCB$ neboli

$$\sphericalangle QCB' = \sphericalangle BCM = 90^\circ - \alpha \quad (9)$$

[viz první vztah (6)].

Avšak [viz (9') a první vztah (2)]

$$\begin{aligned} \sphericalangle ACB' &= \sphericalangle QCB' - \sphericalangle ACM = \\ &= 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Protože bod M je středem úsečky AB a Q je středem úsečky BB' , je úsečka MQ střední příčkou v trojúhelníku ABB' , tj. platí

$$MQ \parallel AB'.$$

Odtud plyne, že přilehlé úhly $\sphericalangle MQB' = 90^\circ$ a $\sphericalangle AB'Q$ mezi rovnoběžkami AB' , MQ prořatými příčkou QB' mají součet 180° ; je tedy

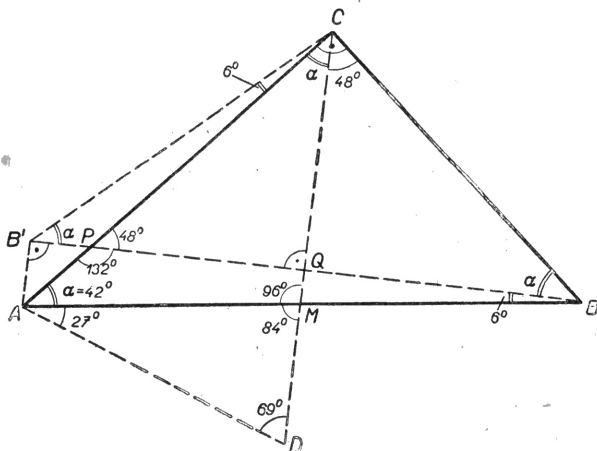
$$\sphericalangle AB'Q = 90^\circ. \quad (11)$$

Poslední úhel, který máme vypočítat, je úhel $\sphericalangle PAB'$ v pravoúhlém trojúhelníku APB' [kde $\sphericalangle B' = 90^\circ$ – viz (11)]; v něm je úhel $\sphericalangle APB' = 90^\circ - \alpha$ [viz (8)]. Je tedy

$\sphericalangle PAB' = 90^\circ - \sphericalangle APB' = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$,
tj.

$$\sphericalangle PAB' = \alpha; \quad (12)$$

odtud plyne, že polopřímka AC je osou úhlu $\sphericalangle BAB'$. Tím je výpočet velikostí úhlů proveden. Velikosti všech úhlů (až na vrcholové) jsou zapsány v obr. 41, pro případ, že je $\alpha = 42^\circ$, pak na obr. 42.

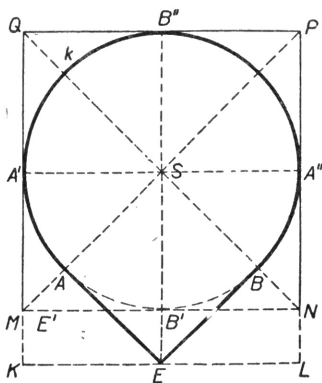


Obr. 42

Zkoušku správnosti výpočtů můžeme např. provést tak, že si ověříme, zda je součet úhlů v každém z trojúhelníků na obr. 41 roven 180° a součet úhlů ve čtyřúhelníku $APQM$ roven 360° .

5. Tenký drát jsme stočili do tvaru číslice 8 tak, že se skládá ze dvou shodných smyček. Smyčku tvoří oblouk $\widehat{AB}$ kružnice k a části tečen sestrojených v bodech A, B ke kružnici k ; délka oblouku $\widehat{AB}$ je $\frac{3}{4}$ délky kružnice k . Víme, že výška zhotovené číslice je 48 cm. Vypočtete šířku číslice a délku spotřebovaného drátu.

Řešení. Buď x délka (v cm) spotřebovaného drátu. Označme r poloměr a p obvod kružnice k , jejíž větší



Obr. 43

oblouk $\widehat{AB}$ tvoří část jedné smyčky číslice 8 (viz označení v obr. 43). Oblouk $\widehat{AB}$ se skládá ze tří čtvrtkružnic, neboť úsečky $A'A''$, $B'B''$ jsou středními příčkami čtverce $MNPQ$ a platí $A'A'' \perp B'B''$; je tedy délka

o oblouku AB dána výrazem $o = \frac{3}{4} p$. Oblouk na druhé smyčce má touž délku a oba dohromady mají délku

$$2o = \frac{3}{2} p = \frac{3}{2} \cdot 2\pi r = 3\pi r$$

neboli

$$2o = 3\pi r. \quad (1)$$

Jedna smyčka je vedle oblouku $\widehat{AB}$ tvořena úsečkami AE , BE (viz obr. 43). Protože je $SA = SB = r$ a $SA \perp SB$, je čtyřúhelník $SAEB$ čtverec; je tedy $AE = BE = r$ a $AE + BE = 2r$. Stejnou délku mají obdobně dvě úsečky na druhé smyčce; abychom dostali délku drátu spotřebovaného na osmičku, musíme k výsledku (1) přičíst číslo $4r$. Je tedy $x = 2o + 4r$ neboli [viz (1)] $x = 3\pi r + 4r = r(3\pi + 4)$.

Položme $\pi \doteq \frac{22}{7}$; pak je

$$x \doteq r \left(\frac{66}{7} + \frac{28}{7} \right) = \frac{94}{7} r.$$

Označme $y = MN$ šířku číslice 8; zřejmě je

$$y = 2r. \quad (3)$$

Pro další výpočet potřebujeme určit délku r pomocí výšky $v = 48$ cm zhotovené číslice. Z obrázku 43 je vidět, že $\frac{1}{2} v = SB'' + SE$; přitom je $SB'' = r$, $SE = r\sqrt{2}$, kde $\sqrt{2} \doteq 1,4$ (což plyne ze vzorce pro úhlopříčku SE čtverce $SAEB$, jehož strana má délku r). Je tedy

$$\frac{1}{2}v = r + r\sqrt{2}$$

neboli

$$\frac{1}{2}v = r(1 + \sqrt{2}).$$

Znásobme obě strany této rovnice o neznámé r číslem

$\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$; dostaneme

$$\frac{v}{2(1 + \sqrt{2})} = r.$$

Přibližně tedy je

$$r \doteq \frac{48}{2(1 + 1,4)} = \frac{24}{2,4} = 10.$$

Ze vztahů (2) a (3) po dosazení za $r = 10$ dostaneme

$$x \doteq \frac{940}{7} = 134 \frac{2}{7} \doteq 134, \quad y \doteq 20.$$

Odpověď. Šířka číslice je asi 20 cm, délka spotřebovaného drátu asi 134 cm.

6. Je dán výraz

$$V = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right) : \left(\frac{a + b}{a - b} - \frac{a - b}{a + b} \right). \quad (1)$$

a) Zjednodušte daný výraz V .

b) Udejte, pro která čísla a, b nemá výraz V smysl.

c) Udejte, pro která čísla a, b je $V = 0$; dále, kdy je kladný a kdy záporný.

Řešení. a) Provedeme postupně tuto úpravu výrazu V [zvláště uijeme vzorce $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$]:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)} : \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{(a - b)(a + b)} = \\
 &= \frac{[a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)][a^2 + b^2 + a^2 - b^2]}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{(a - b)(a + b)}{[a + b - (a - b)][a + b + a - b]} = \\
 &= \frac{4a^2b^2}{(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)} \cdot \frac{(a - b)(a + b)}{4ab}.
 \end{aligned}$$

Po zkrácení obou zlomků dostaneme

$$V = \frac{ab}{a^2 + b^2}. \quad (2)$$

b) Výraz V nemá smysl především tehdy, je-li roven nule některý ze jmenovatelů na pravé straně rovnosti (1). Platí $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; ze vztahu

$$(a - b)(a + b) = 0$$

vyplývá, že jeden z činitelů $a - b$, $a + b$ je roven nule. Tedy $a - b = 0$ anebo $a + b = 0$; odtud plyne

$$a = b \quad \text{anebo} \quad a = -b. \quad (3)$$

Tím je rozhodnuto i o obou jmenovatelích $a - b$, $a + b$ ve výrazu (1). Výraz $a^2 + b^2$ je součtem dvou nezáporných čísel a ten je roven nule jedině tehdy, jsou-li obě čísla a^2 , b^2 rovna nule, tj. platí-li $a^2 = 0$, $b^2 = 0$. Avšak zde ze vztahu $a^2 = 0$ plyne $a = 0$; podobně se najde i vztah $b = 0$. Je tedy $a^2 + b^2$ rovno nule jedině pro $a = b = 0$, což je již zahrnuto ve vztazích (3).

Výraz V nemá dále smysl tehdy, je-li dělitel $d = \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$ na pravé straně (1) roven nule; podle provedeného výpočtu však je

$$d = \frac{4ab}{(a-b)(a+b)}.$$

Jestliže je $4ab = 0$, je $d = 0$ (a obráceně); ze vztahu $4ab = 0$ plyne buď $a = 0$, nebo $b = 0$. Musí tedy být obě čísla a, b různá od nuly, tj. $a \neq 0, b \neq 0$.

Odpověď. Výraz V ztrácí smysl, jestliže je $a = b$ nebo $a = -b$ nebo je-li jedno z čísel a, b rovno nule.

c) Výraz (1), pokud má smysl, je roven číslu

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} \quad (4)$$

[viz (2)]; má-li být $V = 0$, musí být ve zlomku (4) číselník roven nule (avšak jmenovatel různý od nuly), tj. musí platit $ab = 0$. Odtud dostaneme, že musí platit buď $a = 0$ nebo $b = 0$. Avšak v žádném z obou případů nemá výraz (1) smysl.

Odpověď. Výraz V je různý od nuly pro všechna čísla a, b , pro něž má smysl.

O znaménku výrazu (1) rozhodneme pomocí vztahu (2). Jmenovatel $a^2 + b^2$ je součtem dvou kladných čísel, neboť např. a^2 je druhá mocnina čísla různého od nuly, a tedy kladné číslo. Proto o znaménku zlomku rozhodne číselník ab zlomku (2).

Snadno usoudíme, že je správná tato o d p o v ě ěď:

Jsou-li čísla a , b týchž znamének (tedy i různá od nuly), je ab kladné číslo; jsou-li čísla a , b různých znamének, je ab záporné číslo. Tedy: jsou-li a , b různá čísla týchž znamének, potom je V číslo kladné; jsou-li a , b čísla opačných znamének a mají-li různé absolutní hodnoty, potom je V záporné číslo.

Závěr. Jsou-li a , b různá čísla a mají-li též znaménka, je $V > 0$; jsou-li a , b čísla různých znamének a není-li $a = -b$, je $V < 0$.

9. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D

1. Daný je štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky d . Zo stredu každej jeho strany opíšme polkružnicu, ktorá prechádza stredom štvorca $ABCD$ (viď obrázok 44).

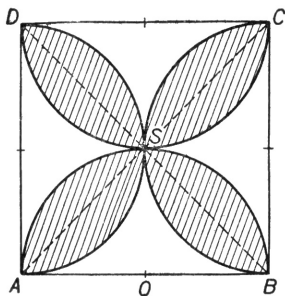
Koľko percent z obsahu štvorca je obsah vyčiarkovaného obrazca?

Riešenie (obr. 44). Obsah daného obrazca dostaneme, keď obsah obrazca na obr. 45 vynásobíme štyrmi, t. j. obsah polkruhu s polomerom $\frac{1}{2}d$ zmenšený o $\frac{1}{4}$ obsahu štvorca so stranou d . Teda

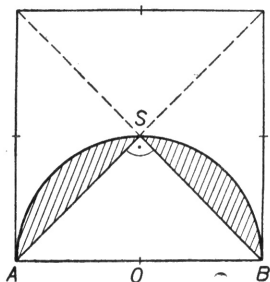
$$P = 4[\frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2}d)^2 - \frac{1}{4}d^2] = d^2(\frac{1}{2}\pi - 1).$$

Obsah štvorca $ABCD$ je $P' = d^2$. Pre hľadaný počet p percent platí:

$$p = P : \frac{P'}{100} = \frac{100P}{P'}.$$



Obr. 44



Obr. 45

Po dosadení za P a P' dostaneme

$$p = \frac{100d^2}{d^2} (\frac{1}{2}\pi - 1) = 100(\frac{1}{2}\pi - 1) \doteq 57.$$

Obsah vyčiarkovaného obrazca je približne 57 % obsahu štvorca.

Riešila Viera Kožiaková,
8. b tr. ZDŠ,
Hnúšťa, okr. Rimavská Sobota.

2. V továrňe pracovalo 1440 zamestnanců (mužů a žen). Za vzorně vykonanou práci obdrželo prémie $18\frac{3}{4}\%$ ze všech mužů a $22\frac{1}{2}\%$ ze všech žen. Vedení továrny vyhlásilo, že prémiemi bylo odměněno 20 % zamestnanců.

Kolik mužů a kolik žen bylo zamestnáno v továrně?

Řešení. Označme x počet mužů, kteří pracovali v továrně; potom počet žen, které pracovaly v továrně je $1440 - x$. Bylo odměněno:

$$18\frac{3}{4} \% \text{ z počtu všech mužů je } \frac{x}{100} \cdot 18\frac{3}{4} = \frac{75x}{400},$$

$$\begin{aligned} 22\frac{1}{2} \% \text{ z počtu všech žen je } & \frac{1440 - x}{100} \cdot 22\frac{1}{2} = \\ & = \frac{1440 - x}{100} \cdot \frac{45}{2} = \frac{45(1440 - x)}{200}; \end{aligned}$$

$$20 \% \text{ ze všech zaměstnanců je } \frac{1440}{100} \cdot 20 = \frac{1440}{5}.$$

Součet počtu odměněných mužů a počtu odměněných žen je roven počtu odměněných zaměstnanců, tj. platí

$$\frac{75x}{400} + \frac{45(1440 - x)}{200} = \frac{1440}{5}.$$

Dostali jsme rovnici pro neznámou x ; budeme ji řešit. Znásobme obě strany rovnice číslem 400 a postupně ji upravujeme:

$$\begin{aligned} 75x + 90(1440 - x) &= 80 \cdot 1440, \\ 1440 \cdot (90 - 80) &= (90 - 75)x, \\ 14400 &= 15x, \\ x &= \frac{14400}{15} = \frac{2880}{3} = 960. \end{aligned}$$

Počet mužů je tedy $x = 960$; počet žen je $1440 - 960 = 480$.

Zkouška. Platí $960 + 480 = 1440$. Dále je:

$18\frac{3}{4}\%$ z 960 je $\frac{960}{100} \cdot \frac{75}{4} = 180$ (počet odměněných mužů);

$22\frac{1}{2}\%$ z 480 je $\frac{480}{100} \cdot \frac{45}{2} = 108$ (počet odměněných žen);

20% z 1440 je $1440 \cdot \frac{1}{5} = 288$ (počet odměněných zaměstnanců).

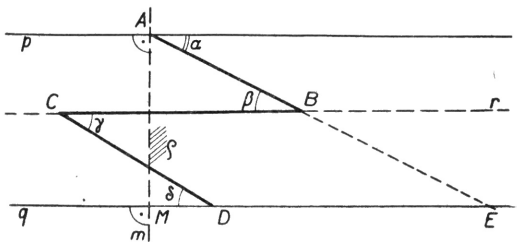
Skutečně je $180 + 108 = 288$.

3. Dané sú dve rovnobežky p, q o vzdialenosti $v = 6$ cm. Na priamke p je daný bod A .

Zostrojte lomenú čiaru $ABCD$ takého tvaru ako na obrázku 46, aby štyri uhly na obrázku vyznačené (oblúčkami) boli zhodné a aby úsečky AB, BC, CD mali tieto dĺžky:

$$AB = 4 \text{ cm}, \quad BC = 7 \text{ cm}, \quad CD = 6 \text{ cm}.$$

Je táto úloha riešiteľná pre $AB = 2$ cm, $BC = 7$ cm, $CD = 3$ cm? Odôvodnite.



Obr. 46

Riešenie (viď označenie na obr. 46). *Rozbor.* Podľa textu úlohy je $\alpha = \beta = \gamma = \delta$. Uhly α, β sú striedavé uhly medzi priamkami p, BC , preťatými priamkou AB . Z rovnosti $\alpha = \beta$ vyplýva podľa známej vety, že je $BC \parallel p$. Pretože však je $p \parallel q$, vyplýva z toho, že je

$$p \parallel BC \parallel q. \quad (1)$$

Taktiež uhly β, γ sú striedavé medzi priamkami AB, CD , preťatými priamkou BC . Z rovnosti $\beta = \gamma$ preto vyplýva, že je

$$AB \parallel CD. \quad (2)$$

Označme E priesečník priamok q, AB . Potom podľa (1), (2) sú protilahlé strany štvoruholníka $EBCD$ navzájom rovnobežné, takže $EBCD$ je rovnobežník. Preto je

$$\begin{array}{l} ED = BC = 7 \text{ cm}, \\ BE = CD = 6 \text{ cm}. \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} ED = BC = 7 \text{ cm}, \\ BE = CD = 6 \text{ cm}. \end{array}} \right\} \quad (3)$$

Keďže $AE = AB + BE$, je $AE = 4 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$, t. j.

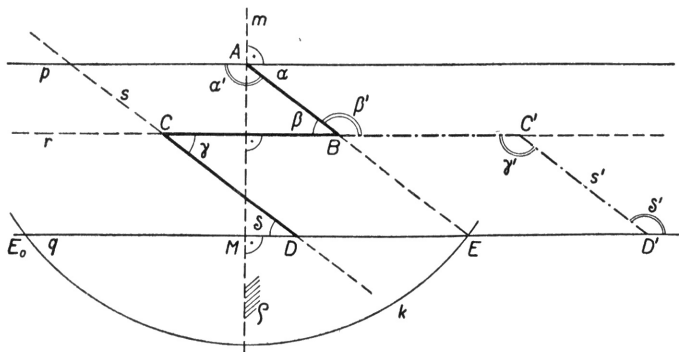
$$AE = 10 \text{ cm}. \quad (4)$$

Na základe výsledkov (4), (3) a (1), (2) prevedieme *konštrukciu* (viď obr. 47):

Označme m kolmicu vedenú bodom A k priamke q . Jej päťu označme M . Konštrukciu bodu E prevedieme

v polrovine ϱ , čo je jedna z polrovín vyťatých priamkou m . Výsledok v polrovine opačnej k ϱ dostaneme pomocou osovej súmernosti podľa priamky m .

Pretože je $AE = 10$ cm, je bod E jedným z priesečníkov priamky q a kružnice $k \equiv (A, 10 \text{ cm})$. Na polpriamke EM a polpriamke k nej opačnej zostrojme podľa vzťahu (3) po rade úsečky $ED = 7$ cm a $ED' = 7$ cm. Na polpriamke AE zostrojme úsečku $AB = 4$ cm. Bodom B vedme priamku $r \parallel q$. Bodmi D, D' vedme rovnobežky s, s' k priamke AE a označme po



Obr. 47

rade C, C' ich priesečníky s priamkou r . Potom lomené čiary $ABCD, ABC'D'$ vyhovujú požiadavkám úlohy.

Dôkaz prevedieme pre čiaru $ABCD$ (označenie vid' na obr. 47). (Pre čiaru $ABC'D'$ sa dôkaz prevedie po-

dobne.) Podľa konštrukcie je $BCDE$ rovnobežník a preto je

$$\beta = \gamma \quad (5)$$

(uhly striedavé medzi rovnobežkami BE , CD pretáťmi priamkou BC). Ďalej je

$$\gamma = \delta \quad (6)$$

(uhly striedavé medzi rovnobežkami q , r pretáťmi priamkou DC). Konečne je

$$\alpha = \beta \quad (7)$$

(uhly striedavé medzi rovnobežkami r , p pretáťmi priamkou AE). Spojením (5), (6), (7) dostávame $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.

Podľa konštrukcie je $AE = 10$ cm, $AB = 4$ cm, takže $BE = AE - AB = 6$ cm. Pretože CD , BE sú protiľahlé strany rovnobežníka $BCDE$, je $CD = BE = 6$ cm. Podľa konštrukcie je $ED = 7$ cm, pričom protiľahlé strany BC , ED rovnobežníka $BCDE$ sú zhodné, t. j. $BC = ED = 7$ cm. Majú teda časti lomenej čiary $ABCD$ dĺžky predpísané v texte úlohy. Tým je dôkaz prevedený.

Diskusia. Vzdialenosť $v = 6$ cm stredu A kružnice k od priamky q je menšia ako jej polomer, ktorý je 10 cm. Preto je q sečnicou kružnice k a vo vnútri polroviny q leží priesečník $E \equiv M$ čiar q , k (druhý priesečník čiar

q , k dostaneme ako obraz bodu E v súmernosti podľa priamky m).

Dostali sme dve riešenia $ABCD$, $ABC'D'$ prislúchajúce k bodu E . Ďalšie dve riešenia dostaneme ako obrazy týchto riešení v súmernosti podľa priamky m .

Úloha má teda celkom štyri riešenia.

Pre údaje $AB = 2$ cm, $CD = 3$ cm nemá úloha riešenie, pretože úsečka AE , pomocou ktorej sme úlohu riešili, by mala dĺžku $AE = AB + CD = 5$ cm. No, kružnica $k' \equiv (A, 5 \text{ cm})$ nepretína priamku q , pretože $v > 5$ cm.

Podrobné riešenie tejto úlohy podal Ján Lupták,
9. a tr. SVVŠ,
Vazovova 6, Bratislava.

4. Je dán výraz

$$V = \left[\frac{4x}{x^2 + 4} \cdot \left(\frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{x}{2x - 4} \right) - \frac{4}{x^2 - 4} \right] : \frac{x}{x - 2}.$$

a) Daný výraz zjednodušte a určete všetky čísla x , pro která ztrácí daný výraz smysl.

b) Najdte všechna celá čísla x , pro která je výraz V roven celému číslu.

Řešení. a) V okrouhlé závorce máme zlomky o jmenovatelích

$$x(x - 2), \quad 2(x - 2);$$

jejich společný násobek je

$$2x(x - 2).$$

Proto první zlomek v okrouhlé závorce rozšíříme číslem 2 a druhý číslem x ; dostaneme nyní postupně:

$$V = \left[\frac{4x}{x^2 + 4} \cdot \left(\frac{4}{2x(x - 2)} + \frac{x^2}{2x(x - 2)} \right) - \frac{4}{x^2 - 4} \right] : \\ : \frac{x}{x - 2} = \left[\frac{4x}{x^2 + 4} \cdot \frac{x^2 + 4}{2x(x - 2)} - \frac{4}{x^2 - 4} \right] : \frac{x}{x - 2}.$$

V lomené závorce první člen zkrátíme číslem

$$2x(x^2 + 4);$$

tím dostaneme

$$V = \left[\frac{2}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right] : \frac{x}{x - 2}.$$

Společný jmenovatel obou zlomků v lomené závorce je $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$; proto musíme první zlomek v lomené závorce rozšířit číslem $x + 2$. Dostáváme postupně:

$$V = \left[\frac{2(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{4}{(x - 2)(x + 2)} \right] : \frac{x}{x - 2} = \\ = \frac{2x}{(x - 2)(x + 2)} : \frac{x}{x - 2}.$$

Po provedení dělení pak máme

$$V = \frac{2x}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x - 2}{x}.$$

Po zkrácení čísla x , $x - 2$ je

$$V = \frac{2}{x + 2}. \quad (1)$$

Provedená úprava výrazu je správná, pokud daný výraz V má smysl, tj. jsou-li jmenovatelé všech zlomků, jež se v daném výrazu vyskytují, různé od nuly; tito jmenovatelé jsou $x(x - 2)$, $2(x - 2)$, $x^2 + 4$, $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Musí tedy být $x \neq 0$, $x - 2 \neq 0$, $x^2 + 4 \neq 0$ (což vždy platí, neboť je $x^2 \geq 0$), $x + 2 \neq 0$. Odtud plyne, že x musí být různé od čísel

$$0, 2, -2.$$

Vedle toho dělitel $\frac{x}{x - 2}$ musí být různý od nuly, tj. musí být $x \neq 0$.

Závěr a). Daný výraz V je roven zlomku $\frac{2}{x + 2}$ a má smysl pro každé číslo x různé od čísel $-2, 0, 2$.

b) Dosadíme-li do výrazu $\frac{2}{x + 2}$ za x celé číslo, je $x + 2$ rovněž celé číslo; naším úkolem nyní je najít celé číslo $x + 2$, které je dělitelem čísla 2. Avšak číslo 2 je dělitelné právě těmito čtyřmi čísly:

$$2, 1, -1, -2. \quad (3)$$

Musí tedy platit jedna z rovnic

$$x + 2 = 2, \quad x + 2 = 1, \quad x + 2 = -1, \quad x + 2 = -2.$$

Jejich řešení po řadě jsou:

$$x = 0; \quad x = -1; \quad x = -3; \quad x = -4.$$

První případ ve (3) jsme však v části a) vyloučili [viz (2)]. Zbývá tedy provést zkoušku pro ostatní tři čísla.

$$\text{Pro } x = -1 \text{ je } V = \frac{2}{-1 + 2} = 2.$$

$$\text{Pro } x = -3 \text{ je } V = \frac{2}{-3 + 2} = -2.$$

$$\text{Pro } x = -4 \text{ je } V = \frac{2}{-4 + 2} = -1.$$

Závěr b). Je-li x celé číslo, pak výraz V je roven celému číslu jedině pro $x = -1$ nebo pro $x = -3$ nebo pro $x = -4$.

VI. Zpráva o třetím ročníku mezinárodní matematické olympiády

1. Pořadatelem *III. mezinárodní matematické olympiády* byla maďarská *Matematická společnost Jánose Bolyaie* (János Bolyai Matematikai Tarsulát, dále zkratkou *JBMT*); soutěž uspořádala pod záštitou a za podpory maďarského ministerstva osvěty v červenci 1961.

Čs. osmičlenná žákovská delegace byla vybrána z vítězů *III. kola* čs. celostátní *Matematické olympiády*. Celkem se soutěže účastnilo 48 žáků ze šesti zemí.

Jednotlivé delegace měly vedoucího a pedagogického vedoucího; byli to:

Alipi Mateev, profesor university v Sofii a *Alexander Nikolov*, inspektor matematiky města Sofie (*Bulharsko*).

Rudolf Zelinka, pracovník *Matematického ústavu ČSAV*, Praha a *Petr Benda*, odborný asistent *VŠP v Brně* (*Československo*).

Herbert Titze, vědecký pracovník, Berlín a *Johannes Gronitz*, hlavní referent ministerstva školství, Berlín (*NDR*).

Endre Hódi, vědecký pracovník *Optického ústavu*, Budapešť a *Férenc Késedi*, pracovník ministerstva kultury, Budapešť (*Maďarsko*).

Mieczyslaw Czyżykowski, profesor polytechniky ve Varšavě a *Edward Otto*, profesor polytechniky ve Varšavě (*Polsko*).

Gheorghe D. Simionescu, profesor polytechnického institutu, Bukurešť a *Ioan Mușat*, inspektor matematiky v ministerstvu vyučování a kultury, Bukurešť (*Rumunsko*).

Vedoucí delegací tvořili *mezinárodní komisi soutěže*, která soutěž řídila a schvalovala závěrečnou kvalifikaci pro stanovení vítězů soutěže. Předsedou komise byl profesor Matematického ústavu Eötvösovy university v Budapešti *János Surányi*, který zastává funkci generálního sekretáře JBMT. Vedle toho účinně komisi pomáhali *Endréné Gáderová*, vedoucí katedry matematiky Pedagogického institutu v Budapešti, a *Tamás Varga*, odborný asistent Matematického institutu Eötvösovy university v Budapešti.

Šestičlenná komise složená z vedoucích delegací za pomoci maďarských organizátorů soutěže vybrala ve dnech 5. až 7. 7. 1961 šest soutěžních úloh z příkladového materiálu, které již v květnu 1961 zaslaly jednotlivé země. Tři úlohy první písemné práce se týkaly školské algebry a trigonometrie, úlohy druhé písemné práce měly reprezentovat jednak geometrickou úlohu důkazovou, jednak konstruktivní planimetrickou úlohu, jednak úlohu stereometrickou. Stanoven byl i maximální počet bodů, které mohl žák získat řešením úlohy

(viz Přílohu). Celkem mohl žák získat 20×2 , tj. 40 bodů; družstvo jednotlivé země mohlo tedy maximálně získat 320 bodů (viz Tabulku č. 1).

Žákovské delegace se sjely ve dnech 7. až 8. 7. 1961 v *Budapešti* a odjely 8. 7. 1961 do *Veszprému* poblíže Blatenského jezera; v tomto krajském městě je technická universita (chemická fakulta) a jejího zařízení se použilo pro ubytování a stravování. Ve volném čase zájžděli žáci z *Veszprému* na koupání k Blatenskému jezeru. Vlastní soutěžní písemné zkoušky se konaly v pondělí 10. 7. a v úterý 11. 7. 1961 v dopoledních hodinách.

V turistickém programu shlédli žáci celé pobřeží nádherného *Blatenského jezera*, zvláště města *Tihány*, *Badacsóny*, *Keszthely* a *Siófok* a ve dnech 14. až 16. 7. pamětihodnosti hlavního města *Budapešti*, mimo jiné pozorovali noční osvětlení *Budapešti* z rozhledny na hoře *Sct. Jánose*. Bohatý kulturní a zájezdový program a vzorné pohostinství a všechna péče maďarských přátel se zapsala trvale do mysli všech zahraničních hostů.

V pátek 14. 7. 1961 odpoledne bylo provedeno slavnostní rozdělení cen podle jednomyslného rozhodnutí mezinárodní komise. Stalo se tak v Domě techniky v *Budapešti*, v němž má své sídlo *JBMT*. Slavnostními řečníky byli čestný předseda *JBMT* akademik *G. Alexits* a *dr. József Fékété*, náměstek vedoucího oddělení středních škol v maďarském ministerstvu osvěty. Za

T a b u l k a č. 1

Země	Počet bodů, které získal žák č.								Delegace získala celkem bodů
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Maďarsko	40	37	36	34	34	33	29	27	270
Polsko	39	29	29	24	23	23	20	16	203
Rumunsko	34	30	28	27	26	26	14	12	197
ČSSR	33	25	24	21	16	15	13	12	159
NDR	31	23	22	20	14	13	12	11	146
Bulharsko	28	18	15	14	14	13	4	2	108

zahraniční žáky poděkoval žák polské delegace *Maciej Skwarczyński*, který získal jednu ze tří prvních cen. Za vedoucí delegáty poděkoval maďarskému ministerstvu osvěty a Matematické společnosti Jánose Bolyaie profesor *Gh. D. Simionescu*. Po slavnosti se za předsednictví akademika *G. Alexitse* konala slavnostní večeře.

V neděli 16. 7. 1961 se delegace rozjely do svých vlastí.

2. *Výsledky soutěže.* Počet bodů, které za řešení úloh získali jednotliví žáci i celá družstva je patrný z tabulky č. 1.

Rozdělení cen a čestných uznání mezi jednotlivé země je vidět z tabulky č. 2.

T a b u l k a č. 2

I. cenu dostali 3 žáci s počty 40, 39, 37 bodů (2 Maďaři, 1 Polák);
II. cenu dostali 3 žáci s počty 36, 34, 34, 34 bodů (3 Maďaři, 1 Rumun);
III. cenu dostali 4 žáci s počty 33, 33, 31, 30 bodů (1 Českoslovák, 1 Maďar, 1 Němec, 1 Rumun).

Velkého úspěchu v soutěži dobyli maďarští žáci, z nichž každý byl odměněn cenou nebo uznáním. Absolutním vítězem se stal žák *Béla Bollobás* z Budapešti, který jediný z žáků získal maximální počet bodů; již v loňské mezinárodní olympiádě dobyl jednu z prvních cen. Naši žáci získali jednu III. cenu a tři čestná uznání.

Ťmenný seznam řáků odměněných na III. mezinárodní olympiádě.

I. cenu získali:

Béla Bollobás, IV. ročník gymnasia „Apáczai Csero János“, Budapeř, (Mařarsko).

Maciej Skuarczyński, 11. tř. I. stř. školy, Varřava (Polsko).

József Kóta, III. ročník gymnasia Tatbánya (Mařarsko).

II. cenu získali:

István Ţuhász, IV. ročník gymnasia „Madácha Imre“, Budapeř (Mařarsko).

Miklós Simonovits, III. roč. gymnasia „Radnóti Miklóse“, Budapeř (Mařarsko).

Constantin Năstăescu, 11. tř. stř. školy, Pucioasa (Rumunsko).

Gerzson Kéry, III. ročník gymnasia, Sopron (Mařarsko).

III. cenu získali:

Tomáš Ţech, III.b ročník SVVř Jana Nerudy, Praha 1 (ČSSR).

László Gálfi, III. ročník gymnasia „I. Istvána“, Budapeř (Mařarsko).

Thomas Görnitz, 12. tř. stř. školy „Thomas“ Schule,
Lipsko (NDR).

Tudor Zamfirescu, 11. tř. stř. školy „G. H. Lazar“, Bu-
kurešť (Rumunsko).

I. čestné uznání obdrželi:

Atanas Ivanov Atanasov, XI. tř. polytechnické školy,
Gabrovo (Bulharsko).

Alexandru Buimovici, X. tř. 18. střední školy „M.
Eminescu“, Bukurešť (Rumunsko).

Radu Diaconescu, X. tř. střední školy, Pucioasa (Ru-
munsko).

József Fritz, IV. tř. gymnasia, Mosonmagyaróvár (Ma-
ďarsko).

László Góth, III. tř. gymnasia, Budapešť (Maďarsko).

Michal Kretschmer, III. tř. SVVŠ, Praha, Omská ul.
(ČSSR).

Marcin Kuczma, X. tř. I. lycea, Katowice (Polsko).

Marian Oziewicz, XI. tř. I. lycea, Inowrocław (Polsko).

Nicolae Popa, XI. tř. střední školy, Focsani (Rumun-
sko).

Serban Strătilă, XI. tř. lycea, Pitești (Rumunsko).

II. čestné uznání obdrželi:

Mikołaj Jagielka, XI. tř. I. lycea, Inowrocław (Polsko).

Jerzy Jurkiewicz, IX. tř. lycea, Varšava (Polsko).

Gerd Nass, XII. tř. střední školy, Halle (NDR).

Karel Příkrý, III. tř. SVVŠ, Vyškov (ČSSR).

Mary Schleifstein, XII. tř. střední školy, Berlín —
Friedrichsheim (NDR).

Andrzej Skowron, XI. tř. lycea, Bielsko-Biala (Polsko).

Stanislav Špiez, X. tř. lycea, Kalisz (Polsko).

Přemysl Svoboda, III. tř. SVVŠ, Roudnice n. L. (ČSSR)

Wenzel Heike, XII. tř. střední školy, Berlín-Lichten-
berg (NDR).

Z tohoto přehledu vyplývá, že Maďaři se stali favority soutěže. Jejich mužstvo mělo žáky, kteří se účastnili již loňské soutěže; přípravě družstva maďarští pracovníci věnovali zřejmě velkou pozornost a podařilo se jim vskutku zajistit svým žákům zasloužený úspěch.

Někteří žáci podali dvě i více odlišných řešení nebo načrtli řešení zobecněné úlohy; to platí vedle Maďarů zvláště o Rumunech. Rovněž Poláci tvořili velmi úspěšný celek.

Nesnáze našim žákům nejvíce působilo rychlé, obratné a jisté počítání, identické úpravy algebraických a goniometrických výrazů a řešení soustav rovnic, tedy 1. písemná práce; velké nesnáze působila zvláště 3. úloha, ač se dala celkem jednoduše a vtipně řešit. Z toho je patrné, že nesmíme podceňovat pohotové a hbité provádění numerických výpočtů; bez tohoto základního předpokladu nelze totiž zajistit ani úspěch vyučování

matematice ve škole. Přitom je zajímavé, že i s mnohem menšími a méně hlubokými znalostmi, než měli naši žáci, se dalo docílit úspěchu. Pro naše žáky bylo překvapením, že se na nich požadovalo, aby prováděli v soutěži soustavně a zevrubně výpočty, aby se přitom nezatěžovali z důvodů časových zbytečně zevrubnými úvahami nebo otázkami, o kterých se text úlohy nezmiňoval. Mnohem lépe než první písemná práce dopadla našim žákům 2. práce, i když i tu došlo k řadě zbytečných ztrát bodů, především pro nesprávnou soutěžní taktiku. Žáci si ponechávali až na konec řešení těch úloh, které se jim zdály být snadné a pokoušeli se netakticky dříve rozřešit úlohy obtížné; v časové tísni pak někteří již nemohli řešení zformulovat. Rovněž podcenili obtížnost diskuse v 5. úloze, kterou zadalo samo Československo a která jim byla tematicky blízká; přitom i výsledek diskuse byl uveden v textu úlohy. Šlo tu o důkaz toho, že za daných podmínek má jistý kruhový oblouk s jistou kružnicí dva různé společné body; důkaz se snadno podařil tomu, kdo řešil úlohu co nejjednodušeji. Ti, kdo užili k řešení kružnice Apolloniovy (jejíž střed lze lokalizovat jen pomocí dosti komplikovaného výpočtu), nebyli s to diskusi úplně provést; i tento fakt je poučný. Již před detailní formulací konstrukce a důkazu její správnosti se musíme zamyslet nad nesnázemi, k nimž nás přivede diskuse.

Je tedy patrné, že nám soutěž přinesla řadu poučení,

tentokrát většinou jiného druhu než poučení z prvního a druhého ročníku, kdy největší slabinou našich žáků byla školská číselná teorie a důkazové geometrické úlohy a k tomu příslušný řádný zápis. Z těchto zkušeností si musí nejen naši žáci, ale i učitelé matematiky a organizátoři olympiády vzít poučení.

Texty písemných prací ze III. mezinárodní matematické olympiády, pořádané v červenci 1961 v Maďarsku.

V závorce uvádíme zemi, která úlohu zaslala, a počet bodů, které řešením úlohy mohl žák maximálně získat.

1. písemná práce

(na 4 hod. čistého času)

1. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + y + z &= a, \\x^2 + y^2 + z^2 &= b^2, \\xy &= z^2,\end{aligned}$$

kde a, b jsou daná čísla.

Udejte podmínky, které musí čísla a, b splňovat, aby čísla x, y, z (která jsou řešením soustavy rovnic) byla kladná a navzájem různá.

(*Maďarsko* 6)

2. Budte a, b, c délky stran trojúhelníka a S jeho obsah.

Dokažte, že potom vždy platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

Ve kterém případě nastává rovnost?

(*Polsko* 7)

3. Řešte rovnici

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

kde n je dané přirozené číslo.

(Bulharsko 7)

2. písemná práce

(na 4 hod. čistého času)

4. Je dán trojúhelník $P_1P_2P_3$ a uvnitř tohoto trojúhelníka je dán libovolný bod P . Přímky P_1P , P_2P , P_3P protínají protější strany trojúhelníka po řadě v bodech Q_1 , Q_2 , Q_3 .

Dokažte, že z čísel

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

nejméně jedno není větší než 2 a nejméně jedno není menší než 2.

(NDR 6)

5. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $AC = b$, $AB = c$ a úhel $\sphericalangle AMB = \omega$, kde M je střed úsečky BC ; přitom je $\omega < 90^\circ$.

Dokažte, že úloha má řešení tehdy a jen tehdy, platí-li

$$b \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leq c < b.$$

Ve kterém případě platí rovnost?

(ČSSR 7)

6. Je dána rovina ε a po téže straně této roviny jsou dány tři body A, B, C , které neleží v téže přímce; přitom rovina těmito body určená není rovnoběžná s rovinou ε . V rovině ε zvolme tři libovolné body A', B', C' . Označme L, M, N středy úseček AA', BB', CC' ; dále označme G těžiště trojúhelníka LMN . (Nebudeme uvažovat takové polohy bodů A', B', C' , pro které příslušné body L, M, N netvoří vrcholy trojúhelníka.)

Co je geometrickým místem bodů G , když body A', B', C' nezávisle na sobě probíhají rovinou ε ?

(Rumunsko 7)

Doslov

Organizační komisi při ÚV MO při sestavování úloh v X. ročníku MO svým dílem přispěly komise při pobočkách Jednoty čs. matematiků a fyziků v Praze, Č. Budějovicích, Plzni, Liberci, Brně a Bratislavě. Všem těmto spolupracovníkům patří náš dík; úlohy, kterých nebylo v tomto ročníku užito, jsou v archivu pro další ročníky. V organizační komisi ÚV MO vedle podepsaných obětavě pracovali dr. Miroslav Fiedler CSc., doc. Josef Holubář, Miloš Jelínek, Jiří Sedláček CSc., Miroslav Šisler CSc.

Recenzi knížky provedli s velkým porozuměním doc. Josef Holubář, Miloš Jelínek, Vlastimil Macháček, doc. dr. Zbyněk Nádeník CSc. a Miroslav Šisler CSc.; s. Macháčkoví patří zásluha za vzorné narýsování obrázků. Redaktorce SPN Kvěť Brázdové děkujeme za všechnu pomoc při redakčních pracích a recenzních úpravách. Náš dík vedle všech zmíněných soudruhů patří i s. Marii Jarošové za spolupráci při organizování soutěže a za práce stenotypistické.

U příležitosti desátého výročí vzniku soutěže zdravíme všechny naše spolupracovníky na celém území naší vlasti a těšíme se na další jejich práci pro zdar této významné žákovské soutěže.

Září 1962

Jan Vyšín a Rud. Zelinka

Obsah

<i>I. Do druhého desetiletí MO</i>	<i>3</i>
<i>II. K průběhu X. ročníku Matematické olympiády</i>	<i>15</i>
<i>III. O výsledcích jednotlivých kol soutěže</i>	
A. Soutěž I. kola	25
B. Soutěž II. kola	28
C. Soutěž III. kola (kategorie A)	36
<i>IV. Přípravné úlohy I. kola</i>	<i>39</i>
<i>V. Řešení úloh ze soutěže</i>	
1. Úlohy I. kola kategorie A	46
2. Úlohy II. kola kategorie A	64
3. Úlohy III. kola kategorie A	77
4. Úlohy I. kola kategorie B	89
5. Úlohy II. kola kategorie B	112
6. Úlohy I. kola kategorie C	123
7. Úlohy II. kola kategorie C	137
8. Úlohy I. kola kategorie D	144
9. Úlohy II. kola kategorie D	162
<i>VI. Zpráva o třetím ročníku mezinárodní matematické olympiády</i>	<i>173</i>

*Edice Pomocné knihy pro žáky
Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín
a Rudolf Zelinka*

DESÁTÝ
ROČNÍK
MATEMATICKÉ
OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1962 — Počet stran 186
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Technická redaktorka: Jana Týlová

Vytiskl Tisk, knižní výroba, n. p., Brno, závod 3,
Český Těšín, AA 5,68 (text 5,16 — grafika 0,52) —
VA 6,00 — D — 10*20439

Náklad 3500 výtisků

Tematická skupina a podskupina 02/57

Cena brož. výtisku Kčs 3,80

63/II 13

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
v Praze jako svou publikaci č. 25-0-06

14 - 919 - 62 Kčs 3,80



SPN

25-0-06

14-919-62
02/57 Kčs 3,80