

12. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 12. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1962-1963. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1964.

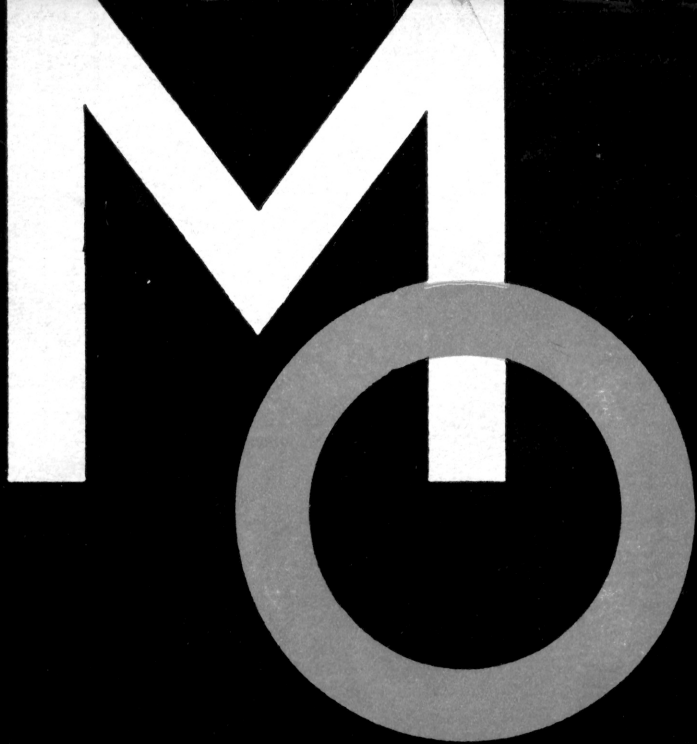
Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404515>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>



**Dvanáctý
ročník**

matematické olympiády

SPN

DVANÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva o řešení úloh ze soutěže,
konané ve školním roce 1962-1963*

PÁTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

PRAHA 1964

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín a Rudolf
Zelinka. Slovenské části textu přeložil Jozef Moravčík
Recenzovali doc. Josef Holubář, Vlastimil Macháček,
dr. Zbyněk Nádeník CSc. a Miroslav Šisler CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1964

I. K průběhu XII. ročníku Matematické olympiády

1. Ročník byl organizován tradičním způsobem. Žáci soutěžili ve čtyřech kategoriích, jak je vidět z tabulky (žáci 9. ročníků základních devítiletých škol byli zařazeni do kategorie D):

Kategorie	A	B	C
Ročník SVVŠ	3	2	1
Ročník střední odborné školy	3—4	2	1

Odchytky od tohoto rozdělení povoloval příslušný krajský výbor MO.

2. Podle organizačního řádu pořádalo soutěž *ministerstvo školství a kultury* (MŠK) ve spolupráci s *Matematickým ústavem ČSAV* (MÚ ČSAV), *Jednotou čs. matematiků a fyziků* (JČMF) a *ústředním výborem Čs. svazu mládeže* (ÚV ČSM).

Soutěž řídil *ústřední výbor Matematické olympiády* (ÚV MO). V každém kraji soutěž organizoval příslušný *krajský výbor Matematické olympiády* (KV MO); pro kategorii D byly v okresech zřízeny *okresní výbory MO* (OV MO). V těchto výborech, které jmenuje odbor škol-

ství a kultury KNV, popř. ONV, jsou vedle učitelů též zástupci zmíněného odboru, pobočky JČMF a krajského, popř. okresního výboru ČSM.

3. V průběhu ročníku vyšel nový *organizační řád* (viz Věstník ministerstva školství a kultury, roč. XIX, sešit 12, str. 126—127 — směrnice č. 37 — „Matematická olympiáda. Fyzikální olympiáda“), který byl uveřejněn dne 30. dubna 1963.

V novém organizačním řádu je řada nových opatření, která mají zkvalitnit soutěž; o některých z nich se zcela stručně zmíníme. Závažnou novinkou je zřizování oddělení odborné literatury z matematiky a fyziky při žákovských knihovnách škol I. a II. cyklu; tato oddělení budou obsahovat učebnice a různé jiné příručky školské matematiky a fyziky, brožury olympiád, sbírky úloh, cizojazyčnou literaturu určenou pro žáky, publikace edice „*Škola mladých matematiků*“ (bližší viz na str. 8), vyšlé ročníky časopisu *Rozhledy matematicko-fyzikální* apod.

Závažným opatřením je i další vydávání edice „*Škola mladých matematiků*“, o němž se ještě zmíníme. Dále uspořádá MŠK každoročně dvě celostátní soustředění nejlepších účastníků soutěže (což se vztahuje i na Fyzikální olympiádu); většinou se bude jednat o nejlepší účastníky kategorie B. Do jednoho soustředění se zařazuje 50 žáků; jedno soustředění se uspořádá v českých, druhé ve slovenských krajích. Přitom se doporučuje, aby podobná soustředění v rámci svého kraje organizovaly i krajské výbory MO, a to za podpory příslušného odboru školství a kultury KNV. KV MO Severomoravského kraje skutečně uspořádal takové soustředění pro žáky svého kraje.

Konečně velmi závažnou novinkou je zřizování speciálních tříd pro žáky, zajímající se o matematiku a fyziku; na základě toho byly od počátku školního roku 1963/64 zřízeny speciální třetí třídy na matematicko-fyzikálních větvích středních všeobecně vzdělávacích škol, a to jedna v Praze, jedna v Brně a jedna v Bratislavě. Tyto třídy mají svůj studijní plán, který je zaměřen především na prohloubení učiva, nikoli na jeho rozšiřování. Předpokládá se, že budou otevřeny i druhé třídy, popř. že podobná opatření se zavedou i v dalších městech. Výběr žáků pro tyto speciální třídy provádí MŠK na základě společného návrhu, který mu předloží předsedové ústředních výborů MO a FO.

4. *Ústřední výbor Matematické olympiády* (adresa: ÚV MO, Žitná 25, Praha 1-Nové Město, tel. 22 66 01 až 03) se skládal jednak z předsedů krajských výborů MO, jednak z pracovníků jmenovaných přímo ministerstvem školství a kultury. Pracoval v tomto složení:

Předseda: Akademik *Josef Novák*, vedoucí vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze

Místopředseda: *Jan Vyšín*, docent matem.-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze

Jednatel: *Rudolf Zelinka*, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze

Členové: *Dr. František Běloun*, vedoucí matematického kabinetu Ústavu pro další vzdělání učitelů v Praze

Karel Hnyk, odb. asistent Pedagogického institutu v Liberci

Doc. Josef Holubář, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze

František Hradecký, odb. asistent matem.-fyz. fakulty Karlovy university v Praze

Dr. *Karel Hruša*, pracovník Ústavu pro dálkové studium učitelů v Praze

Josef Bartůněk, ústřední inspektor ministerstva školství a kultury v Praze

Dr. *Milan Kolibiar*, docent přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě

Dr. *Josef Pírek*, ředitel základní devítileté školy v Brně
František Veselý, odb. asistent Vysoké školy strojní a elektrotechnické v Plzni

Dr. *Miloslav Zedek*, docent Palackého university v Olomouci

Dr. *Miroslav Fiedler* DrSc., vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze

Náhradník: *Miroslav Šisler* CSc., vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze

Členové-předsedové KV MO:

Dr. *Václav Pleskot*, profesor ČVUT v Praze

Dr. *Václav Vilímek*, odb. asistent katedry matematiky a deskriptivní geometrie fakulty strojní ČVUT v Praze

František Vejsada, učitel SVVŠ, České Budějovice

Josef Porcal, učitel zdravotnické školy, Teplice

Věra Rádlová, učitelka SVVŠ, Plzeň

Jan Laštovka, vedoucí kabinetu matematiky Ústavu pro další vzdělávání učitelů, Pardubice

Petr Benda, odborný asistent VÚT, Brno

Josef Andrys, odb. asistent Pedagogického institutu, Ostrava

Dr. *Cyril Palaj*, docent Vysoké školy lesní a dřevařské, Zvolen

Gejza Grega, odb. asistent Pedagogického institutu, Košice

Na tomto místě vzpomínáme památky zesnulého člena ÚV MO s. dr. *Josefa Pírka*, ředitele základní devítileté

školy v Brně. Zesnul krátce po soutěži III. kola MO, které se konalo v červnu 1963 v Brně a které dr. Pírek obětavě pomáhal organizovat. S. Pírek se po řadu let intenzívně věnoval zlepšování úrovně vyučování matematice, zvláště na Moravě. Proto od vzniku soutěžní kategorie D se usilovně zapojil i do práce pro Matematickou olympiádu. Svou obětavou pomocí nemálo přispěl k úspěchům naší soutěže.

5. Soutěž ve XII. ročníku měla v kategorii A tři kola, v ostatních kategoriích dvě. První kolo probíhalo od října 1962 do konce února 1963. Účastníci v rámci domácího studia řešili jednak šest přípravných úloh (žák musil svému učiteli předložit řešení všech šesti úloh, z toho alespoň čtyři dobře), jednak šest soutěžních úloh (z nich musili vyřešit alespoň čtyři správně). Opravu písemných řešení prvního kola prováděli učitelé matematiky za vedení referenta pro MO na škole a v dohodě s ředitelem školy; po opravě seznámil učitel své žáky s typickými nedostatky řešení. Podle kvality žákovských řešení úloh prvního kola rozhodoval KV MO a OV MO o pozvání žáka na druhé kolo soutěže. Texty úloh prvního kola s pokyny a dalšími úlohami k procvičování vydalo MŠK tiskem ve zvláštním letáku v 15 000 exemplářích o 32 stranách. Texty úloh otiskly vedle toho časopisy Rozhledy matematicko-fyzikální a Matematika ve škole. Vzorová řešení úloh byla pro opravovatele a pro žáky rozmnožena cyklostylem až v 1500 exemplářích.

6. V průběhu soutěže byla žákům poskytována pomoc v několika formách.

Vedle konzultací, které měli se svými žáky učitelé matematiky, to byly na prvním místě přípravné přednášky, pořádané pobočkami JČMF ve spolupráci s KV MO. Jejich počet byl 4–8 za rok; byly pořádány

i na několika místech kraje a většinou se soustřeďovaly na tato ústřední témata: dělitelnost celých čísel, školská teorie funkcí, konstruktivní a početní planimetrické úlohy, jednoduché úlohy stereometrické. Přípravné přednášky měly povahu pracovních besed a seminářů; zaměřovaly se proto především na řešení úloh s případnými doplňujícími výklady přednášejícího. To se mnohde provádělo v souvislosti s domácím studiem žáků ze svazeků edice „Škola mladých matematiků“.

Tuto edici pro potřeby MO vydává *nakladatelství Mladá fronta*; řídí ji redakční komise, ustavená při předsednictvu ÚV MO. Od podzimu roku 1961, kdy tato knihovnička byla na návrh člena ÚV MO s. Fr. Veselého zřízena, do konce roku 1963 v ní vyšly tyto svazky:

1. *Hradecký, Koman, Vyšín*: Několik úloh z geometrie jednoduchých těles

2. *Jiří Sedláček*: Co víme o přirozených číslech

3. *Jaroslav Šedivý*: Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách

4. *Šisler, Jarník*: O funkcích

5. *František Veselý*: O nerovnostech

6. *Rudolf Výborný*: Matematická indukce

7. *Jaroslav Šedivý*: Podobná zobrazení

8. *Jiří Váňa*: O rovnicích s parametrem

Vedle toho koncem roku 1963 vyšla druhá vydání tří z těchto svazků.

Knížky vycházejí nyní v nákladu 7 500 exemplářů, z čehož větší část vykupuje MŠK pro žákovské knihovny, určitou část zakupuje JČMF pro účastníky dalšího ročníku soutěže a jen zbytek 2 500 exemplářů přichází na volný trh. Knížky jsou oblíbené a je po nich i v širší veřejnosti značná poptávka, takže jejich dosavadní náklad

nepostačuje. Svazečky jsou koncipovány tak, aby je mohl samostatně studovat poměrně široký okruh zájemců, a to i účastníci z kategorie C. Aby pak čtenář plně pochopil vyloženou teorii, je do knížek zařazena řada řešených úloh a větší množství příkladů k samostatnému řešení čtenářů. Proto jsou tyto knížky i vhodným východiskem pro přípravné přednášky, jednak jako opora pro přednášejícího, jednak jako základní materiál pro pracovní náplň přednášek a žákovu domácí práci. Očekáváme, že tato edice i v budoucnosti bude jednou z hlavních opor pro samostatné studium žáků, kteří mají zájem o matematiku. ÚV MO uvítá všechny iniciativní návrhy, které se budou týkat náplně této edice.

7. Ve II. a III. kole řešili žáci po čtyřech úlohách, z nichž úspěšný řešitel musil rozřešit alespoň dvě. Soutěž II. kola kategorií A, B, C se konala v neděli 7. dubna 1963, v kategorii D v neděli 21. dubna 1963. Výbory MO při této příležitosti organizovaly tradiční besedy, na nichž se mimo jiné rozebíraly nedostatky žákovských řešení.

Za úspěšné výkony ve II. kole byli žáci odměněni pochvalnými uznáními a věcnými cenami. Pracovníci Severomoravského kraje místo toho uspořádali pro nejlepší žáky prázdninové internátní školení spojené s řízenou rekreací.

8. Soutěž III. kola se konala v sobotu 1. června 1963 v Brně na Vysoké škole zemědělské. Z přihlášených 54 účastníků bylo na soutěž III. kola pozváno 50 žáků, z toho bylo 8 dívek. V odpolední besedě konané s účastníky III. kola promluvil prorektor university J. E. Purkyně dr. *Jos. Hejl*, profesori této university člen korespondent ČSAV *Otakar Borůvka* a *Karel Koutský DrSc.*,

dále zástupci Vysoké školy technické, KV ČSM a pracovníci MO; ministerstvo školství a kultury zastupoval ústřední inspektor *Ladislav Krkavec*. Přítomní olympionici v závěru besedy diskutovali o svém dosavadním studiu, o zkušenostech s olympiádou a živě se zajímali o své studium na vysokých školách; na různé dotazy obdrželi od přítomných zástupců jednotlivých institucí informace.

Besedu řídil předseda akademik *Josef Novák*, který připomenul, že se soutěž III. kola tentokrát koná v Brně v rámci oslav 50. výročí vzniku brněnské pobočky JČMF; na závěr poděkoval jménem ÚV MO brněnským hostitelům za péči, kterou věnovali organizování III. kola soutěže v Brně a účastníkům olympiády přál hodně úspěchu na vysoké škole i v životě.

Téhož dne večer shlédli účastníci olympiády v Janáčkově divadle v Brně představení hry J. K. Tyla „Tvrdohlavá žena“. V neděli 2. června 1963 pracovníci KV MO a pobočky JČMF v Brně uspořádali dopolední autobusový zájezd účastníků III. kola na Macochu. V odpoledních hodinách se rozjeli olympionici do svých domovů.

U příležitosti III. kola se v Brně konala pracovní schůze ÚV MO, která projednala řadu závažných opatření, jako např. zajištění soutěže ve školním roce 1963/64, dále uspořádání obou celostátních soustředění pro nejlepší účastníky MO a FO, otevření tříd pro žáky nadané v matematice a fyzice apod.

9. Ve dnech od 17. června do 6. července 1963 uspořádalo ministerstvo školství a kultury dvě celostátní soustředění nejlepších účastníků kategorie B obou olympiád. Odbornou náplň těchto soustředění obstaraly ÚV MO a ÚV FO se svými spolupracovníky z krajských výborů.

Jedno soustředění se konalo na Richtrových boudách v Krkonoších, druhé v Ružomberku a v každém bylo padesát účastníků. Výběr účastníků provedlo ministerstvo školství a kultury podle společného návrhu předsedů ÚV MO a ÚV FO, při čemž se opíralo o zprávy předsedů krajských výborů.

Dopolední program na soustředěních byl věnován prohlubování znalostí žáků ve školské matematice a fyzice, kdežto odpoledne byla většinou věnována řízené tělovýchovné rekreaci. Večer se konaly besedy na různá odborná témata. Program z matematiky se střídal s fyzikálním. V matematice se přednášející zaměřili na soustavné řešení úloh, jak je patrné z těchto tematických celků: konstruktivní úlohy planimetrické, početní řešení stereometrických úloh, teorie čísel, řešení rovnic a nerovností, funkce, trigonometrie. Z fyzikálních témat uvádíme: sluneční soustava, děje v plynech, zákony ustáleného elektrického proudu, harmonický pohyb, zákony dynamiky, zákon zachování hybnosti, zákon zachování energie, setrvačné síly.

Přednášky a večerní besedy vedli učitelé středních a vysokých škol a pracovníci některých ústavů Československé akademie věd. V závěrečném hodnocení vyslovovali účastníci souhlas s matematickým programem; uvědomovali si, že v poměrně krátké době tří týdnů, které měli vyměřeny na doplnění mezer ve svých znalostech, je řešení úloh s příležitostnými výklady celkem to nejvhodnější. Pokud jde o vlastní soutěž, postrádají řešitelé těsnější spojení s opravovateli úloh, a to pokud jde o bližší rozbor nedostatků těchto řešení (máme tu na mysli opravené úlohy II. a III. kola). Touto problematikou se zabýval ÚV MO na své podzimní schůzi.

Souběžně s oběma soustředěními uspořádalo minis-

terstvo školství a kultury za organizačního přispění ústředního výboru MO instruktáž osmi žáků, kteří se měli za ČSSR účastnit V. mezinárodní matematické olympiády, konané v červenci 1963 v Polsku (viz str. 119). Tato instruktáž se konala rovněž na Richtrových boudách ve dnech od 20. června do 28. června 1963; na instruktáži přednášeli vysokoškolští učitelé a vědečtí pracovníci.

II. K výsledkům jednotlivých kol soutěže

1. Soutěž I. kola. Z tabulek č. 1 a 2*) je patrné, že počet účastníků v I. kole v kategoriích A, B je značně menší než v předchozím ročníku. Toto konstatování platí i o procentu úspěšných řešitelů I. kola v těchto kategoriích. Naproti tomu v kategorii C lze pozorovat značné zlepšení, pokud jde o počet účastníků i o jejich úspěchy. Lze tedy říci, že nepříznivá situace, která se v posledních letech projevila, jak v počtu účastníků, tak v kvalitě řešení, se dosud nezlepšila. Potěšitelné je, že už skoro nebylo potřeba přerazovat některé žáky do nižších kategorií, vzhledem k tomu, že navštěvují třídy, v nichž platí osnovy s nižšími požadavky.

2. Soutěž II. kola. Z tabulek č. 3 a 4*) vidíme, že někteří úspěšní řešitelé prvního kola se nedostavili k soutěži druhého kola. Stává se to z několika příčin: především proto, že se soutěž koná v neděli, kdy mnohé rodiny jezdí na rekreaci a kdy venkovští žáci mají špatné autobusové spojení, což platí zvláště o kategorii D. Mnozí žáci se nedostavili také proto, že si nebyli jisti tím, že by při soutěži II. kola úspěšně obstáli.

Výsledky II. kola jsou nepříznivé především v kategorii A, B, takže pro účast na třetím kole přicházeli v úvahu jen 54 žáci. Procento úspěšných řešitelů je však příznivé v obou z kategorií C, D. Celková situace v kategorii C je nadějná.

Úspěšní řešitelé II. kola za své výkony obdrželi po-

*) Tabulky 1 až 4 viz str. 20 až 23.

chvalná uznání a hodnotné věcné ceny; mezi věcné ceny náležela též odborná literatura.

V kategoriích B, C, D končí soutěž II. kolem. Uvádíme jmenný seznam prvních deseti nejlepších úspěšných řešitelů v kategoriích B a C za každý kraj:

*Pořadí úspěšných řešitelů II. kola
v kategoriích B, C*

SVVŠ = střední všeobecně vzdělávací škola
P = průmyslová škola

Praha - město

B. Švejda Jan, SVVŠ, Praha 3; Kabele Jiří, SVVŠ, Praha 6; Jisl Rudolf, P, Praha 1; Friš Martin, SVVŠ, Praha 7; Neubauerová Kamila, SVVŠ, Praha 1; Kroha Petr, P, Praha 2; Paroubek Jan, SVVŠ, Praha 3; Kaše Jaroslav, SVVŠ, Praha 4; Šmilauer Bohdan, SVVŠ, Praha 6; Pícek Pavel, SVVŠ, Praha 6.

C. Bečvář Jindřich, SVVŠ, Praha 4; Kubie Jiří, SVVŠ, Praha 3; Daňkovský Vladimír, SVVŠ, Praha 6; Karvánková Eva, SVVŠ, Praha 6; Vaníček Vladimír, SVVŠ, Praha 2; Kraemer Pavel, SVVŠ, Praha 6; Novotný Pravomír, SVVŠ, Praha 7; Benda Jan, SVVŠ, Praha 3; Košťálek Jaroslav, SVVŠ, Praha 4; Šoler Jiří, SVVŠ, Praha 3.

Středočeský kraj

B. Bednařík Karel, SVVŠ, Český Brod; Franěk J., SVVŠ, Český Brod; Hájek František, SVVŠ, Radotín; Hanuš Karel, SVVŠ, Říčany; Heller Jaroslav, SVVŠ, Rakovník; Klimentová Jarmila, SVVŠ, Radotín; Kolenský

Miroslav, SVVŠ, Český Brod; Kolín Jaroslav, SVVŠ, Příbram; Kopřiva Aleš, SVVŠ, Mladá Boleslav; Kulišová Libuše, SVVŠ, Mladá Boleslav.

C. Beránek Jiří, SVVŠ, Nymburk; Bunc Václav, SVVŠ, Kolín; Černý Pavel, SVVŠ, Nymburk; Červ Václav, SVVŠ, Votice; Frencl Miloslav, SVVŠ, Kladno; Hamza Jiří, SVVŠ, Čakovice; Hochman Jiří, SVVŠ, Hořovice; Hrdlička Jiří, P, Čáslav; Josková Marie, SVVŠ, Hořovice; Kácalová Jaroslava, P, Čáslav.

Jihočeský kraj

B. Kubeš Jaroslav, SVVŠ, České Budějovice; Pavlíček Pavel, SVVŠ, České Budějovice; Dráb František, SVVŠ, Písek; Komrska Pavel, SVVŠ, Týn nad Vltavou; Vobr Jan, SVVŠ, České Budějovice; Oharek Josef, SVVŠ, České Budějovice.

C. Vejvoda Pavel, SVVŠ, Hluboká nad Vltavou.

Západočeský kraj

B. Chvátal Václav, P, Plzeň; Verner Břetislav, SVVŠ, Rokycany.

C. Steiner Václav, SVVŠ, Stříbro; Kotinová Eva, SVVŠ, Plzeň; Novotný Jiří, SVVŠ, Plzeň; Lunácková Marcela, SVVŠ, Karlovy Vary; Bartoš Josef, SVVŠ, Aš; Barčí Petr, SVVŠ, Ostrov n. Ohří; Moschnerová Jarmila, SVVŠ, Karlovy Vary; Jelínek Zdeněk, SVVŠ, Plzeň; Brejcha Josef, SVVŠ, Domažlice; Kašpar Jaromír, SVVŠ, Ostrov n. Ohří.

Severočeský kraj

B. Jirsa Miloš, SVVŠ, Ústí nad Labem; Novák Václav, SVVŠ, Varnsdorf.

C. Snětivý Jiří, P, Liberec; Krpata Milan, SVVŠ, Ústí nad Labem; Stránský Emanuel, SVVŠ, Liberec; Šidlichovský Miloš, SVVŠ, Liberec; Čermák Karel, SVVŠ, Teplice; Peršín Jan, SVVŠ, Liberec; Kožíšek Karel, SVVŠ, Rumburk; Hořejš Milan, SVVŠ, Tanvald; Zábrodský Rostislav, SVVŠ, Teplice; Hilbertová Hana, SVVŠ, Liberec.

Východočeský kraj

B. Laštovka Jan, SVVŠ, Pardubice; Vojtišek Otakar, SVVŠ, Pardubice; Havel Miroslav, SVVŠ, Pardubice; Vecková Ivana, SVVŠ, Jičín; Rykrová Jaroslava, SVVŠ, Hradec Králové; Šikolová Zdeňka, SVVŠ, Jičín; Pácl Gustav, SVVŠ, Ústí nad Orlicí; Rasocha Václav, SVVŠ, Havlíčkův Brod; Kovářová Doubravka, SVVŠ, Turnov; Musil Stanislav, SVVŠ, Turnov.

jihomoravský kraj

B. Bureš Pavel, SVVŠ, Brno; Handlíř Jiří, P, Brno; Čech Antonín, SVVŠ, Třebíč; Wasserbauerová Ivana, SVVŠ, Třebíč; Znojil Miloslav, SVVŠ, Prostějov; Baláš Petr, SVVŠ, Brno; Bouška Dušan, SVVŠ, Telč; Dvořáková Miloslava, SVVŠ, Třebíč; Horáková Lada, SVVŠ, Třebíč; Kalvodová Jana, SVVŠ, Brno.

C. Brodský Jan, SVVŠ, Brno; Humlíček Josef, SVVŠ, Velké Meziříčí; Kesslerová Jitka, SVVŠ, Brno; Čechová Ludmila, SVVŠ, Moravské Budějovice; Kunčík Vlastimil, SVVŠ, Velké Meziříčí; Mikulášek Zdeněk, SVVŠ, Brno; Spíšek Richard, SVVŠ, Brno; Volný Jaromír, SVVŠ, Znojmo; Durma Jaromír, SVVŠ, Brno; Handlíř Jiří, P, Brno.

Severomoravský kraj

B. Opravil František, P, Rožnov p. R.; Blaťáka Jan, SVVŠ, Přerov; Lednický Richard, SVVŠ, Nový Bohumín; Juránek Josef, SVVŠ, Olomouc.

C. Charvát Jura, SVVŠ, Příbor; Jekerle Jiří, SVVŠ, Český Těšín; Kobělka Zdeněk, SVVŠ, Ostrava 1; Pazdziora Jaroslav, SVVŠ, Karviná; Fajkus Jindřich, SVVŠ, Frenštát p. R.; Zajíček Luděk, SVVŠ, Ostrava; Běták Emil, SVVŠ, Ostrava; Doležal František, SVVŠ, Olomouc; Zíka Miloslav, SVVŠ, Opava; Hanousková Zdena, P, Přerov.

Západoslovenský kraj

B. Králik Jaroslav, SVVŠ, Zvolen; Mihálik Ľubomír, SVVŠ, Žilina; Orgoník Peter, SVVŠ, Dubnica n. Váhom; Pfliegel Miloslav, SVVŠ, Žilina; Štěpánek Jaroslav, P, Dubnica n. Váhom.

C. Galádová Eleonóra, SVVŠ, Zvolen; Trnovský Karol, SVVŠ, Ružomberok; Porubský Štefan, P, Zvolen; Žatkuliaková Jana, SVVŠ, Ružomberok; Paulus Tibor, SVVŠ, Pov. Bystrica; Kubizňa Ján, P, Martin; Roth Miroslav, SVVŠ, Ružomberok; Králik Gabriel, SVVŠ, Prievidza; Sivák Bohuslav, ZDŠ, Zvolen; Paulínyová Eleonóra, SVVŠ, Čadca.

Středoslovenský kraj

B. Paučová Mária, SVVŠ, Bratislava; Klimo Pavol, SVVŠ, Bratislava.

C. Konrád František, Voj. šk. J. Žižku, Bratislava; Bodecká Ľubica, SVVŠ, Bratislava; Križan Igor, SVVŠ, Bratislava; Lajda Pavol, SVVŠ, Bratislava; Šujan Štefan,

SVVŠ, Bratislava; Marcisová Tamara, SVVŠ, Bratislava; Klein Martin, SVVŠ, Bratislava; Peter Fedor, SVVŠ, Bratislava; Zágorček B., SVVŠ, Bratislava; Rován Branislav, SVVŠ, Bratislava.

Východoslovenský kraj

B. Boháčik Juraj, SVVŠ, Košice; Neuwirth Petr, SVVŠ, Košice.

C. Muraközy Koloman, SVVŠ, Košice; Andrejková Gabriela, SVVŠ, Kežmarok; Doktor Alexandr, SVVŠ, Košice; Kortanová Katerina, SVVŠ, Košice; Malár Peter, SVVŠ, Košice; Sokolová Eva, SVVŠ, Košice; Šimko Pavol, SVVŠ, Košice; Vašo Dušan, SVVŠ, Košice; Redner Tomáš, P, Košice; Daniel-Sabol Ondrej, P, Košice; Jančík Miloš, P, Košice; Dravecký Jozef, SVVŠ, Spišská Nová Ves.

3. Soutěž III. kola. Mezi padesáti pozvanými účastníky III. kola bylo 8 dívek; ze středních odborných škol bylo 5 žáků. Mezi 30 úspěšnými řešiteli III. kola byli 4 žáci z průmyslových škol a 2 dívky.

Z úspěšných řešitelů bylo vybráno 18 nejlepších a prohlášeno za vítěze XII. ročníku Matematické olympiády; mezi nimi je 1 dívka. 8 z těchto vítězů se účastnilo V. mezinárodní matematické olympiády v Polsku (viz str. 119). Dále uvádíme jmenný seznam vítězů XII. ročníku.

POŘADÍ VÍTĚZŮ XII. ROČNÍKU MO

ve šk. r. 1962/63

1. *Josef Daneš*, 3. d tř. SVVŠ, nám. Lidových milicí 19, Praha 9 - Vysočany
2. *Vladimír Pohánka*, 3. e tř. SVVŠ, Novohradská ul., Bratislava

3. *Vladimír Souček*, 3. tř. SVVŠ, Na Zatlance 11, Praha 5
4. *Zdeněk Jiráček*, 3.b tř. SVVŠ J. K. Tyla, Hradec Králové
5. *Drahomíra Šimková*, 3.d tř. SVVŠ, nám. Komenského 4, Znojmo
- 6.—8.
 - Jan Blaták*, 3.d tř. SVVŠ, Komenského ul. 29, Přerov
 - Josef Karásek*, 3. tř. SVVŠ, Česká Lípa
 - Jaroslav Zemánek*, 2.c tř. SVVŠ, Na Zatlance 11, Praha 5 - Smíchov
- 9.—10.
 - Vladislav Kocbach*, 3.e tř. SVVŠ, Dimitrovovo nám. 34, Praha 7
 - Zdeněk Vít*, 3.a tř. SVVŠ, Praha 2 - Vinohrady, tř. W. Piecka 2
- 11.—14.
 - Miloš Božek*, 3.b tř. SVVŠ, Bytča, Revolučná ul.
 - Richard Lednický*, 3.a tř. SVVŠ, Nový Bohumín
 - Pavel Rehák*, 4.a tř. SPŠ jaderné techniky, Praha 2, Ječná 30
 - Jiří Vorlíček*, 3.b tř. SVVŠ, Praha 2 - Vinohrady, W. Piecka 2
15. *Jan Vrbík*, 3.a tř. SVVŠ, Vyškov, Komenského 1
- 16.—18.
 - Miroslav Bartůšek*, 3.d tř. SVVŠ, Lerchova ul. 63, Brno
 - Karel Sandler*, 3.a tř. SVVŠ, Tyršovo nám., Česká Třebová
 - František Šefrna*, 3. tř. SVVŠ, Blatná

Tabulka č. 1
Přehled účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

Kraj	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Celkem	
	P	U	P	U	P	U	P	U
Praha-město	71	40	65	27	187	55	323	122
Středočeský	16	14	20	19	31	31	67	64
Jihočeský	13	9	30	30	70	61	113	100
Západočeský	35	23	15	6	64	40	114	69
Severočeský	14	9	17	11	48	48	79	68
Východočeský	35	35	67	51	123	98	225	184
Jihomoravský	88	43	94	67	203	147	385	257
Severomoravský	52	14	36	20	201	102	289	136
Západoslovenský	50	39	46	25	176	57	272	121
Středoslovenský	65	39	58	43	128	84	251	166
Východoslovenský	17	12	23	22	75	54	115	88
Celkem	456	277	471	321	1 306	777	2 233	1 375

*) P = celkový počet účastníků; U = počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 2

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategorii D*)

Kraj	Kategorie D	
	P	U
Praha-město	1 149	745
Středočeský	543	334
Jihočeský	1 110	581
Západočeský	556	243
Severočeský	217	206
Východočeský	1 042	503
Jihomoravský	1 161	587
Severomoravský	1 149	521
Západoslovenský	717	543
Středoslovenský	853	513
Východoslovenský	450	278
Celkem	8 947	5 054

*) P = celkový počet účastníků; U = počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 3

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategorii A, B, C*)

Kraj	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Celkem	
	P	U	P	U	P	U	P	U
Praha-město	39	17	25	13	50	31	114	61
Středočeský	14	3	14	4	30	8	58	15
Jihočeský	9	4	27	7	53	26	89	37
Západočeský	22	4	5	2	40	22	67	28
Severočeský	9	2	11	2	46	29	66	33
Východočeský	35	7	49	21	94	66	178	94
Jihomoravský	39	6	64	19	138	72	241	97
Severomoravský	13	4	20	4	94	62	127	70
Západoslovenský	39	1	25	2	57	32	121	35
Středoslovenský	27	2	33	5	49	13	109	20
Východoslovenský	12	2	22	2	54	12	88	16
Celkem	258	52	295	81	705	373	1 258	506

*) P = celkový počet účastníků; U = počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 4

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategorii D*)

Kraj	Kategorie D	
	P	U
Praha-město	589	475
Středočeský	293	205
Jihočeský	479	279
Západočeský	202	120
Severočeský	180	140
Východočeský	429	333
Jihomoravský	588	325
Severomoravský	449	279
Západoslovenský	453	315
Středoslovenský	392	261
Východoslovenský	258	181
Celkem	4 312	2 913

P = počet všech účastníků; U = počet úspěšných řešitelů

Ministerstvo školství a kultury odměnilo vítěze velmi hodnotnými věcnými cenami a dále jim poskytlo poukázky na nákup odborné studijní literatury. Každý z vítězů obdržel čestný diplom podepsaný ministrem školství a kultury a předsedou ústředního výboru MO.

4. Z předchozího je patrné, že výsledky XII. ročníku nejsou uspokojivé. Příznivá situace je v kategorii C a částečně v kategorii D. Vážné nedostatky našich žáků se projevily nejenom ve III. kole kategorie A, ale i na mezinárodní matematické olympiádě.

Na malou účast v soutěži měla jistě značný vliv i nedostatečná propagace mezi žáky; řada škol nevěnuje olympiádě tu pozornost, kterou si tato soutěž zaslouhuje. Jinak by se např. nemohlo stát, že někteří žáci vůbec nedostali letáky s texty úloh a že si museli tyto letáky opatřovat jinde. Na průběh I. kola velmi nepříznivě působilo i prodloužení pololetních prázdnin. V kategorii A časné výběrové řízení na vysoké školy mělo za následek, že se žáci věnovali přípravě na pohovory a někteří z nich pak již neměli zájem o další práci a úspěch v olympiádě. Samozřejmě, že olympiádě konkurují některé jiné méně náročné soutěže.

Neuspokojivou připraveností našich žáků v matematice se budou muset zabývat nejen pracovníci olympiády, ale i školské orgány. Bude třeba učitelům poskytnout veškerou pomoc v řešení této otázky, neboť především v jeho rukou jsou možnosti, jak tuto nepříznivou situaci překonat. Jinak se octneme v těžkých nesnázích a naše hospodářství nebude mít dobře připravené odborné kádry. Nepříznivé výsledky našich žáků v matematice se zřejmě projevují nejenom mezi účastníky olympiády, ale v mnohem širším měřítku vůbec, jak o tom konečně svědčí studijní nesnáze posluchačů vysokých škol, kteří

zápasí nejen s matematikou, ale i s jinými disciplínami, které se o matematiku opírají. Patrně ještě méně příznivá situace, pokud jde o připravenost ve školské matematice, je mezi těmi absolventy středních škol, kteří odcházejí ze školy přímo do praxe.

III. Přípravné úlohy I. kola

1. Kategorie A

1. Určete všechna celá čísla x, y , která vyhovují rovnici

$$(3x + y)(x + y) = p,$$

kde p je dané prvočíslo.

2. Určete pět po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti, jejichž součet je $5a$ a součin b^5 . Proveďte diskusi.

3. Určete oblast všech bodů v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice vyhovují nerovnostem

$$2x + y \geq 2,5, \quad \sin(y - x) < 0.$$

4. Vyjádřete délky úhlopříček tětiového čtyřúhelníku pomocí délek jeho stran. (Použijte kosinové věty.)

5. V rovině je dán svou polohou čtverec $ABCD$ a pevný bod Q , který neleží na obvodu čtverce. Buď P libovolný bod obvodu čtverce. Nad úsečkou QP sestrojme rovnostranný trojúhelník PQR .

Vyšetřte, jaký útvar vyplní body R , když bod P probíhá obvod daného čtverce.

6. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$. Vyšetřte geometrické místo bodů této krychle, jejichž vzdálenosti od rovin ABC , ABA' , ADA' mají součet AB .

2. Kategorie B

1. Vypočtete kolika nulami končí dekadický zápis čísla $100!$ (100 faktoriál).

2. Vyšetřte průběh funkce

$$y = x + \sqrt{1 - x^2}$$

a načrtněte její graf. Dokažte, že platí $y \leq \sqrt{2}$ pro všechna x , pro něž je funkce definována.

3. Určete koeficienty a, b, c, d dvojčlenů $ax + b, cx + d$ tak, aby byly splněny zároveň tyto podmínky:

a) $(ax + b)^2 + (cx + d)^2 = x^2 + 1$ pro všechna x ;

b) $(ax + b)(cx + d) = 2$ pro $x = 2$.

4. Vyjádřete délky stran pravoúhlého trojúhelníku pomocí jeho obvodu $2x$ a obsahu y^2 .

5. Je dán pevný bod A , přímka p a kladné číslo r . Kružnice k prochází bodem A , má poloměr r a tečna směru p se jí dotýká v bodě X . Vyšetřte geometrické místo bodů X .

6. Buďte m, n, p velikosti tří stěnových úhlopříček kváдру, které vycházejí z téhož vrcholu.

Vypočtete jeho a) objem, b) obsahy stěn, c) rozměry. Diskuse vzhledem k m, n, p .

3. Kategorie C

1. Jestliže přirozené číslo n není dělitelné sedmi, pak jedno z čísel $n^3 + 1$ a $n^3 - 1$ je dělitelné sedmi.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\frac{x+y}{2p+4} + \frac{y+p^2-4}{p^2-4} = 1,$$

$$(p-2)^2x - 2py = 2p^2x$$

o neznámých x, y , je-li dáno reálné číslo p .

3. Jestliže pro čísla a, b platí $a + b = -5$, potom výraz

$$\left[\frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 + 2a^2b + ab^2} + \frac{1}{a + b} - \frac{a^2 - ab - 2b^2}{(a + b)^3} \right] \cdot \frac{a}{a - b} - \frac{2a}{a^2 - b^2}$$

má pro všechna a, b stále touž hodnotu; stanovte ji.

4. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a přímka p , jejíž vzdálenost od středu S je d . Sestrojte čtverec, jehož jedna strana leží v přímce p a jehož protější strana je tětivou kružnice k . Diskuse.

5. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky p a v něm dvě čtvrtkružnice o středech A, B (A, C jsou krajní body jedné, B, D krajní body druhé). Vypočtěte poloměr x kružnice k , která leží ve čtverci, dotýká se obou čtvrtkružnic a úsečky BC . Potom kružnici k sestrojte.

6. Jsou dány délky a, b odvěsen pravoúhlého trojúhelníku ABC . Osa jeho pravého úhlu protne přeponu v bodě M , kolem něhož opíšeme kružnici $k \equiv (M, x)$ tak, aby se dotýkala obou odvěsen.

Vypočtěte poloměr x této kružnice, délky úseček AM, BM a jejich poměr.

4. Kategorie D

1. Je-li n libovolné přirozené číslo liché, je číslo $(n^2 - 1)(n + 3)$ dělitelné číslem 24; dokažte.

2. Pěticiferné číslo $*378*$, kde hvězdičky znamenají neznámé cifry, je dělitelné číslem 72. Určete úsudkem a

výpočtem chybějící cifry. (Návod: Rozložte 72 v součin dvou nesoudělných čísel.)

3. Dokažte, že hodnota výrazu

$$V = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$
$$(a \neq b; \quad a \neq c; \quad b \neq c)$$

nezávisí na číslech a, b, c .

4. Nádražní chodba dlouhá 42,8 m a široká 9,2 m je vydlážděna čtvercovými dlaždicemi dvojího druhu: strana větší dlaždice je o 10 cm větší než strana menší dlaždice. Obrubu dlažby tvoří jedna řada menších dlaždic; celkem je jich 332. Ostatní část chodby je vydlážděna většími dlaždicemi. Vypočtete rozměry dlaždic a počet větších dlaždic.

5. Je dána kružnice $k \equiv (S, r = 4 \text{ cm})$. Vepište do ní rovnoramenný lichoběžník tak, aby se z bodů S jevila jeho ramena pod úhlem 90° a aby prodloužená ramena svírala úhel 45° .

6. Jsou dány 3 různé body A, B, C . Narýsujte všechny takové přímky, z nichž každá má od bodů A, B, C stejné vzdálenosti.

Rozhodněte, za kterých podmínek je úloha řešitelná a kolik má řešení.

IV. Řešení úloh ze soutěže

1. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE A

1. Je dána velikost výšky v příslušné k přeponě pravoúhlého trojúhelníku a poloměr ϱ kružnice tomuto trojúhelníku vepsané.

a) Vypočtete délku přepony c pomocí čísel v, ϱ .

b) Sestavte kvadratickou rovnici (o jedné neznámé), jejímiž kořeny jsou délky odvěsen a, b uvažovaného trojúhelníku.

Pro které hodnoty v a ϱ existuje takový pravoúhlý trojúhelník?

Řešení. a) Mezi délkami ϱ, v, a, b, c jsou tyto vztahy:

$$2\varrho + c = a + b, \quad (1a)$$

$$vc = ab, \quad (1b)$$

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1c)$$

První rovnost se odvodí z délek tečen vedených k vepsané kružnici z vrcholů trojúhelníku, druhá plyne ze vzorce pro obsah, třetí z věty Pythagorovy. Na základě rovnosti $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ sestavíme rovnici pro c

$$(2\varrho + c)^2 = c^2 + 2vc$$

a odtud

$$c = \frac{2\varrho^2}{v - 2\varrho}, \quad (2)$$

neboť $v > 2\varrho$.

b) Z (1ab) vypočteme s použitím vzorce (2)

$$a + b = 2\rho \frac{v - \rho}{v - 2\rho}, \quad ab = \frac{2\rho^2 v}{v - 2\rho}.$$

Délky odvěsen a , b jsou tedy kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - 2\rho \frac{v - \rho}{v - 2\rho} x + \frac{2\rho^2 v}{v - 2\rho} = 0. \quad (3)$$

Nyní odpovíme na otázku, pro které hodnoty v , ρ existuje takový pravoúhlý trojúhelník.

Má-li být úloha řešitelná, musí vyjít $c > 0$; podle (2) pak musí být $v - 2\rho > 0$ neboli

$$v > 2\rho. \quad (4)$$

Diskriminant rovnice (3) je

$$\begin{aligned} D &= 4 \left[\rho^2 \frac{(v - \rho)^2}{(v - 2\rho)^2} - \frac{2\rho^2 v}{v - 2\rho} \right] = \\ &= \frac{4\rho^2}{(v - 2\rho)^2} (\rho^2 + 2\rho v - v^2) = \\ &= \frac{4\rho^2}{(v - 2\rho)^2} [2\rho^2 - (\rho - v)^2] = \\ &= \frac{4\rho^2}{(v - 2\rho)^2} (\rho\sqrt{2} + \rho - v)(\rho\sqrt{2} - \rho + v). \end{aligned}$$

Podle (4) je $\rho\sqrt{2} - \rho + v > 0$; platí tedy $D \geq 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $\rho(\sqrt{2} + 1) - v \geq 0$ neboli

$$v \leq \rho(1 + \sqrt{2}). \quad (5)$$

Dokážeme, že nerovnosti (4), (5) udávají nejen nutnou, ale i postačující podmínku řešitelnosti úlohy.

Platí-li totiž (4) i (5), vypočteme kořeny rovnice (3)

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varrho(v - \varrho)}{v - 2\varrho} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D} = \\ &= \frac{\varrho}{v - 2\varrho} (v - \varrho \pm \sqrt{\varrho^2 + 2\varrho v - v^2}). \end{aligned} \quad (6)$$

Oba tyto kořeny jsou kladná čísla, neboť podle (4) je $v - \varrho > 0$ a $v - \varrho > \sqrt{\varrho^2 + 2\varrho v - v^2}$; platí totiž podle (4)

$$\begin{aligned} (v - \varrho)^2 - (\sqrt{\varrho^2 + 2\varrho v - v^2})^2 &= \\ = v^2 - 2\varrho v + \varrho^2 - \varrho^2 - 2\varrho v + v^2 &= \\ = 2v^2 - 4\varrho v = 2v(v - 2\varrho) > 0. \end{aligned}$$

Existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délky

$$\begin{aligned} a' &= \frac{\varrho}{v - 2\varrho} (v - \varrho + \sqrt{\varrho^2 + 2\varrho v - v^2}) = \\ &= \frac{\varrho(v - \varrho)}{v - 2\varrho} + \frac{1}{2}\sqrt{D}, \\ b' &= \frac{\varrho}{v - 2\varrho} (v - \varrho - \sqrt{\varrho^2 + 2\varrho v - v^2}) = \\ &= \frac{\varrho(v - \varrho)}{v - 2\varrho} - \frac{1}{2}\sqrt{D}. \end{aligned}$$

Jeho přepona c' má pak délku [opět s použitím (4)]

$$\begin{aligned} c' &= \sqrt{2 \frac{\varrho^2(v - \varrho)^2}{(v - 2\varrho)^2} + \frac{1}{2}D} = \\ &= \sqrt{\frac{2\varrho^2}{(v - 2\varrho)^2} [(v - \varrho)^2 + \varrho^2 + 2\varrho v - v^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{4\varrho^4}{(v - 2\varrho)^2}} = \frac{2\varrho^2}{v - 2\varrho}. \end{aligned}$$

Tento pravouhlý trojúhelník má výšku v' danou vzorcem

$$\begin{aligned} v' &= \frac{a'b'}{c'} = \left[\frac{\varrho^2(v - \varrho)^2}{(v - 2\varrho)^2} - \frac{1}{4}D \right] \cdot \frac{v - 2\varrho}{2\varrho^2} = \\ &= \frac{\varrho^2}{(v - 2\varrho)^2} [(v - \varrho)^2 - \varrho^2 - 2\varrho v + v^2] \cdot \frac{v - 2\varrho}{2\varrho^2} = \\ &= \frac{\varrho^2}{(v - 2\varrho)^2} \cdot 2v(v - 2\varrho) \cdot \frac{v - 2\varrho}{2\varrho^2} = v. \end{aligned}$$

Poloměr ϱ' vepsané kružnice se vypočte podle vzorce

$$\varrho' = s' - c' = \frac{1}{2}(a' + b' - c'),$$

tj.

$$\varrho' = \frac{1}{2} \left[\frac{2\varrho(v - \varrho)}{v - 2\varrho} - \frac{2\varrho^2}{v - 2\varrho} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\varrho(v - 2\varrho)}{v - 2\varrho} = \varrho.$$

Tím je dokázána postačitelnost podmínek řešitelnosti (4) a (5).

Jsou-li splněny podmínky (4) a (5), má úloha b) jediné řešení.

2. Buď dána kružnice k a její určitý průměr AB délky $2r$. Z bodu A se dá do pohybu bod X a s ním v téže okamžiku z bodu B bod Y ; přitom se body X, Y pohybují po kružnici k v téže smyslu. Bod X se pohybuje rovnoměrně zrychleně a při prvním průchodu bodem B je jeho rychlost v ; bod Y se pohybuje rovnoměrně rychlostí c .

Určete rychlosti c, v tak, aby byly splněny tyto dva požadavky:

(1) Bod X dostihne poprvé bod Y za bodem A , ale před bodem B .

(2) Když po třech obězích bod X dospěje do polohy A , tu současně bod Y dospěje do polohy B .

Řešení. Označíme s_1 (s_2) dráhu, kterou vykoná bod X (Y) za t vteřin; pak je

$$s_1 = \frac{1}{2}at^2, \quad s_2 = ct,$$

kde a je zrychlení pohybu bodu X . Urazí-li bod X polokružnici AB za t_0 vteřin, platí za předpokladu, že $r = 1$:

$$\pi = \frac{1}{2}at_0^2, \quad v = at_0;$$

odtud plyne

$$a = \frac{v^2}{2\pi}.$$

Nechť bod X dostihne bod Y poprvé po t vteřinách; pak platí

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{2\pi} t^2 = ct + \pi$$

neboli

$$v^2 t^2 - 4\pi ct - 4\pi^2 = 0. \quad (1)$$

Rovnice (1) má jediný kladný kořen

$$t = \frac{2\pi}{v^2} (c + \sqrt{c^2 + v^2}). \quad (2)$$

Doby, které potřebuje bod Y k tomu, aby poprvé dospěl do bodu A , resp. B , jsou $\frac{\pi}{c}$, resp. $\frac{2\pi}{c}$. Podle (2) tedy má platit

$$\frac{\pi}{c} < \frac{2\pi}{v^2} (c + \sqrt{c^2 + v^2}) \leq \frac{2\pi}{c}. \quad (3)$$

Označme $\frac{c}{v} = \lambda$, kde $\lambda > 0$. Podmínky (3) lze pak psát ve tvaru

$$1 < 2\lambda^2 + 2\lambda\sqrt{1 + \lambda^2} < 2. \quad (3')$$

Z pravé části nerovností (3') plyne

$$\lambda < \frac{1}{3}\sqrt{3} \doteq 0,577. \quad (4)$$

Z levé části nerovností (3') plyne

$$1 - 2\lambda^2 < 2\lambda\sqrt{1 + \lambda^2}. \quad (5)$$

Rozeznáme dvě možnosti:

Případ [1]. Nechť je $1 - 2\lambda^2 < 0$ neboli $\lambda > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (tj. $\lambda > 0,708$); protože je $\frac{1}{3}\sqrt{3} < \frac{1}{2}\sqrt{2}$, nedostaneme vzhledem ke (4) žádné řešení nerovností (3').

Případ [2]. Nechť je $1 - 2\lambda^2 > 0$ neboli $\lambda < \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Potom z (5) řešením obdržíme $\frac{1}{4}\sqrt{2} < \lambda$, kde $\frac{1}{4}\sqrt{2} \doteq 0,353$. Se zřetelem na (4) tedy nutně platí

$$\frac{1}{4}\sqrt{2} < \lambda < \frac{1}{3}\sqrt{3}; \quad (6)$$

obráceně je pro tato λ vztah (4) zřejmě splněn. Z druhé podmínky textu úlohy plynou vztahy $6\pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{2\pi} t^2$, $2n\pi = ct$, kde n je jisté přirozené číslo, které máme určit. Vyloučením t z těchto vztahů plyne

$$24\pi^2 = v^2 \cdot \frac{4\pi^2 n^2}{c^2}$$

neboli $n = \lambda\sqrt{6}$. Znásobíme strany nerovností (6) číslem $\sqrt{6}$; obdržíme $\frac{1}{2}\sqrt{3} < n < \sqrt{2}$ (tj. přibližně $0,866 < n < 1,42$). Tomu vyhovuje jediné přirozené číslo $n = 1$. Je tedy $\frac{c}{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ neboli $v = c\sqrt{6}$, kde kladné číslo c lze volit libovolně; tím jsou určeny všechny dvojice čísel c, v , pro něž nastává v textu popsaná situace.

3. Určete velikosti všech ostrých úhlů α , pro něž

obě čísla

$$\operatorname{tg} \alpha, \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 3 \alpha}$$

jsou přirozená.

Řešení. Ze vzorce $\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ se odvodí vzorec

$$\operatorname{tg} 3 \alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad (1)$$

který platí pro všechna přípustná α , 3α .

[Je-li 2α nepřipustná hodnota, je třeba vzorec (1) ověřit přímo dosazením.]

Označme $\operatorname{tg} \alpha = a$; pak je podle (1):

$$\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} 3 \alpha = \frac{3 a^2 - 1}{a^2 - 3}. \quad (2)$$

Označme $\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} 3 \alpha = b$. Z (2) vyplývá

$$a^2 = \frac{3 b - 1}{b - 3}. \quad (3)$$

Rovnost (3) přepíšeme do tvaru

$$a^2 = 3 + \frac{8}{b - 3}. \quad (3')$$

Protože a , a^2 jsou celá čísla, je i číslo $\frac{8}{b - 3}$ celé, tj. $b - 3$ je dělitel čísla 8. Mimoto je $b \geq 1$, tedy $b - 3 \geq -2$. Pro $b - 3$ máme tudíž jen tyto možnosti: $-2, -1, 1, 2, 4, 8$.

Protože a^2 je kladné číslo, které je druhou mocninou přirozeného čísla, vyhovuje podle tabulky na str. 37 jen $a^2 = 4$, $a = 2$, $b = 11$. Z rovnice $\operatorname{tg} \alpha = 2$ dostaneme podle tabulek jediné řešení $\alpha \doteq 63^\circ 26'$.

Tabulka:

$b - 3$	-2	-1	1	2	4	8
b	1	2	4	5	7	11
$\frac{8}{b-3}$	-4	-8	8	4	2	1
a^2	-1	-5	11	7	5	4

4. Ak (nekonečná) aritmetická postupnosť prirodzených čísel obsahuje tretiu mocninu prirodzeného čísla, potom obsahuje nekonečne mnoho takých mocnín. Dokážte!

Uveďte príklad (nekonečnej) aritmetickej postupnosti prirodzených čísel, ktorej žiadny člen nie je tretou mocninou prirodzeného čísla.

Riešenie. a) Nech aritmetická postupnosť s diferenciou $d > 0$ obsahuje mocninu a^3 (a prirodzené). Potom obsahuje tiež mocninu $(a + kd)^3$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo. Platí totiž

$$(a + kd)^3 - a^3 = kd[(a + kd)^2 + (a + kd)a + a^2] = md,$$

($m > 0$ celé),
tj.

$$(a + kd)^3 = a^3 + md,$$

čím je tvrdenie dokázané.

b) Príkladom nekonečnej aritmetickej postupnosti, ktorej žiadny člen nie je tretou mocninou prirodzeného čísla, je postupnosť

$$5, 105, 205, 305, \dots \quad (1)$$

s diferenciou 100. Jej všeobecný člen možno napísať v tvare

$$5 + 100n \text{ (kde } n \geq 0 \text{ je ľubovoľné celé číslo).}$$

Ak je $5 + 100n = a^3$, kde a je prirodzené číslo, končí číslo a cifrou 5, t. j.

$$a = 10\alpha + 5 \text{ (} \alpha \geq 0 \text{ celé).}$$

Ďalej je

$$a^3 = (10\alpha + 5)^3 = 1000\alpha^3 + 1500\alpha^2 + 750\alpha + 125. \quad (2)$$

Ak je α nepárne, vyplýva z (2)

$$a^3 = 100\beta + 75 \text{ (kde } \beta \geq 0 \text{ je celé),}$$

ak je α párne, vyplýva z (2)

$$a^3 = 100\gamma + 25 \text{ (kde } \gamma \geq 0 \text{ je celé).}$$

Žiadne z týchto čísel nie je však v tvare $100n + 5$ ($n \geq 0$ celé) čiže nemôže byť členom postupnosti (1).

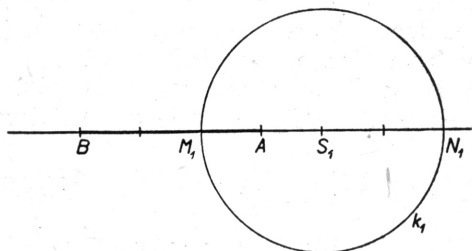
5. Je daný rovnostranný trojuholník ABC se stranou dĺžky 1.

Vyšetrite geometrické miesto bodov X v priestore, pre ktorých vzdialenosti od bodov A, B, C platí

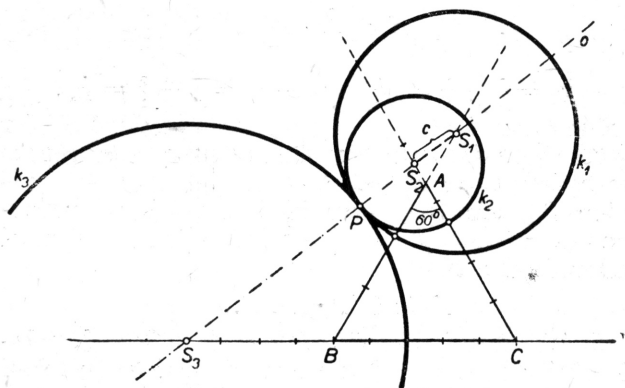
$$AX : BX : CX = 1 : 2 : 3.$$

Riešenie. Vyšetrujme najskôr geometrické miesto bodov X roviny $\varrho \equiv ABC$, pre ktorých vzdialenosti od bodov A, B platí $AX : BX = 1 : 2$. Toto geometrické miesto bodov je — ako je známe — Apolloniova kružnica k_1 so stredom S_1 a polomerom r_1 . Určenie stredu S_1 a polomeru r_1 sa prevedie pomocou obr. 1. Priemerom kružnice k_1 je úsečka M_1N_1 taká, že platí $AM_1 : BM_1 = AN_1 : BN_1 = 1 : 2$. Preto je $AS_1 = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}$, $BS_1 = \frac{2}{3}$, $r_1 = \frac{2}{3}$. Geometrické miesto všetkých bodov X

v priestore, pre ktorých vzdialenosti od bodov A, B platí $AX:BX = 1:2$, je útvar, ktorý vznikne rotáciou kružnice k_1 okolo priamky AB ; je to guľová plocha κ_1 so stredom S_1 a polomerom $r_1 = \frac{2}{3}$.



Obr. 1



Obr. 2

Analogicky nájdeme geometrické miesto bodov X v rovine ϱ , pre ktorých vzdialenosti od bodov A, C platí $AX:CX = 1:3$. Je to kružnica k_2 so stredom S_2 a

polomerom $r_2 = \frac{3}{8}$; pritom platí $AS_2 = \frac{1}{8}$, $CS_2 = \frac{9}{8}$. Rotáciou kružnice k_2 okolo priamky AC vznikne guľová plocha κ_2 so stredom S_2 a polomerom $r_2 = \frac{3}{8}$. Situácia v rovine ϱ je nakreslená na obr. 2. Hľadané geometrické miesto bodov **M** je prienik guľových plôch κ_1 , κ_2 . Útvár **M** nájdeme, ak určíme spoločné body kružníc k_1 , k_2 a necháme ich rotovať okolo priamky S_1S_2 .

Treba teda výpočtom vyšetriť vzájomnú polohu kružníc k_1 , k_2 . Z trojuholníka AS_1S_2 dostaneme podľa kosínusovej vety

$$c^2 = S_1S_2^2 = AS_1^2 + AS_2^2 - 2 AS_1 \cdot AS_2 \cos 60^\circ,$$

čiže

$$c^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{64} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{9 \cdot 64},$$

t. j.

$$c = \frac{7}{24}.$$

Ďalej je

$$r_1 + r_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{25}{24}, \quad r_1 - r_2 = \frac{2}{3} - \frac{3}{8} = \frac{7}{24}.$$

Platí teda rovnosť $c = r_1 - r_2$, a preto sa guľové plochy κ_1 , κ_2 navzájom dotýkajú v bode P . Hľadané geometrické miesto bodov je jediný bod P .

Bodom P prechádza aj kružnica k_3 , ktorá je geometrickým miestom bodov X roviny ϱ , pre ktorých vzdialenosti od bodov B , C platí

$$BX : CX = 2 : 3.$$

Stred S_3 leží na priamke BC , $BS_3 = \frac{4}{5}$, $CS_3 = \frac{9}{5}$, polomer kružnice k_3 je $r_3 = \frac{6}{5}$. Pretože hľadané geometrické miesto má jediný bod P , dotýkajú sa tiež dvojice kružníc k_1 , k_3 a k_2 , k_3 ; preto ležia body S_1 , S_2 , S_3 na priamke.

Iné riešenie. Označme M päťu kolmice spustenej z hľadaného bodu X na rovinu ϱ , ďalej označme $d_1 = AM$,

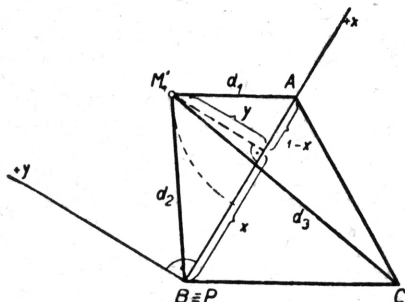
$d_2 = BM$, $d_3 = CM$, $z = XM$. Podľa podmienky úlohy je (obr. 3):

$$2\sqrt{d_1^2 + z^2} = \sqrt{d_2^2 + z^2},$$

$$3\sqrt{d_1^2 + z^2} = \sqrt{d_3^2 + z^2},$$

čiže

$$3z^2 = d_2^2 - 4d_1^2, \quad 8z^2 = d_3^2 - 9d_1^2. \quad (1)$$



Obr. 3

V rovine ρ umiestnime sústavu kartézskych súradníc tak, aby kladná poloos x bola polpriamka BA (je teda bod B počiatkom P súradníc) a aby bod C mal zápornú súradnicu y . Súradnice bodu M v tejto sústave označíme $[x, y]$. Potom je

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (1-x)^2 + y^2, & d_2^2 &= x^2 + y^2, \\ d_3^2 &= (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + \tfrac{1}{2}\sqrt{3})^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Ak vylúčime z^2 z oboch rovníc (1), dostaneme

$$8d_2^2 = 5d_1^2 + 3d_3^2. \quad (3)$$

Ak do vzťahu (3) dosadíme z (2), po úprave dostaneme

$$13x - 3\sqrt{3}y = 8. \quad (4)$$

Ak zo vzťahu (4) vyjadríme

$$x = \frac{8 + 3\sqrt{3}y}{13}, \quad 1 - x = \frac{5 - 3\sqrt{3}y}{13} \quad (5)$$

a dosadíme do prvých dvoch rovníc (2), bude

$$d_1^2 = \frac{25}{169} - \frac{30\sqrt{3}}{169}y + \frac{196}{169}y^2,$$

$$d_2^2 = \frac{64}{169} + \frac{48\sqrt{3}}{169}y + \frac{169}{196}y^2.$$

Z týchto dvoch vzťahov dosadíme teraz do prvej rovnice (1). Po vynásobení číslom 169, sčítaní a krátení trocha dostaneme

$$12 - 56\sqrt{3}y + 196y^2 + 169z^2 = 0,$$

čiže

$$(13z)^2 + (14y - 2\sqrt{3})^2 = 0.$$

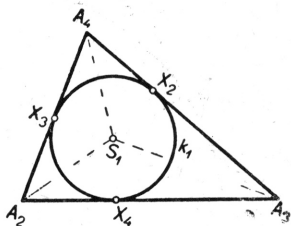
Stadiaľ vyplýva $z = 0$, $y = \frac{1}{7}\sqrt{3}$ a ďalej z prvej rovnosti (5) $x = \frac{5}{7}$.

Úloha má teda jediné riešenie — bod X so súradnicami $x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{7}$; mimo to je $z = 0$.

6. Buď dán čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$, který má tyto vlastnosti: Lze sestavit dvě (různé) kulové plochy, z nichž se každá dotýká všech šesti přímek, na nichž leží hrany daného čtyřstěnu. Přitom každá z těchto kulových ploch se dotýká přímky A_3A_4 ve vnitřním bodě úsečky A_3A_4 , kdežto přímky A_1A_2 se dotýká v bodě, který nenáleží úsečce A_1A_2 .

Dokažte, že každé dvě protější hrany daného čtyřstěnu mají touž délku.

Řešení. Každá z uvedených dvou kulových ploch protíná rovinu $A_1A_3A_4$ v kružnici, která se dotýká všech tří přímk A_1A_3 , A_3A_4 a A_4A_1 ; je to tedy buď kružnice k_2 vepsaná trojúhelníku $A_1A_3A_4$, nebo kružnice h_2 vně vepsaná ke straně A_3A_4 . Obdobně protíná každá z uvedených dvou kulových ploch rovinu $A_2A_3A_4$ buď v kružnici k_1 vepsané trojúhelníku $A_2A_3A_4$ nebo v kružnici h_1 vně vepsané ke straně A_3A_4 . Žádná z našich kulových ploch nemůže obsahovat kružnice k_1 , k_2 , neboť v tomto případě by kulová plocha obsahovala vnitřní body pěti hran čtyřstěnu (A_1A_3 , A_1A_4 , A_3A_4 , A_2A_3 , A_2A_4), protála by rovinu $A_1A_2A_3$ v kružnici vepsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$, a tudíž by se dotýkala přímky A_1A_2 ve vnitřním bodě hrany A_1A_2 , což odporuje předpokladu. Také žádná z uvedených kulových ploch nemůže obsahovat obě kružnice h_1 , h_2 , neboť v tomto případě by se dotýkala obou přímk A_1A_3 , A_2A_3 v bodech ležících mimo úsečky A_1A_3 , A_2A_3 , protála by rovinu $A_1A_2A_3$ v kružnici vně vepsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$ ke straně A_1A_2 , a tudíž by opět obsahovala vnitřní bod úsečky A_1A_2 .



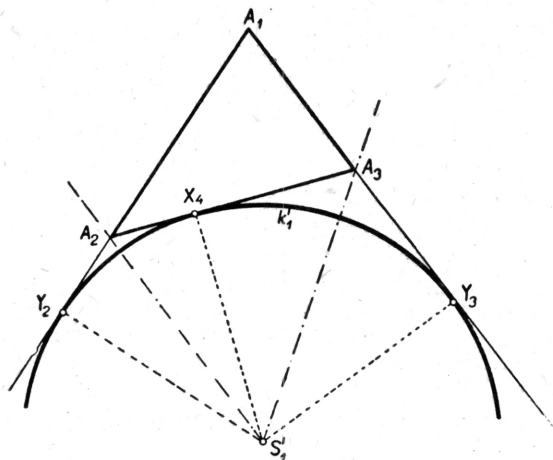
Obr. 4

Naše kulové plochy obsahují tedy kružnice k_1 , h_2 (plocha κ_1) a kružnice k_2 , h_1 (plocha κ_2). Plocha κ_1 protíná tedy rovinu $A_2A_3A_4$ v kružnici k_1 vepsané trojúhelníku $A_2A_3A_4$ (obr. 4); body dotyku označme X_2 , X_3 , X_4 . Dále označme a_{ik} délku hrany A_iA_k (indexy uspořádáme tak, aby bylo $i < k$). Podle známého planimetrického vzorce platí

$$A_2X_3 = A_2X_4 = \frac{1}{2}(a_{23} + a_{24} - a_{34}). \quad (1)$$

Plocha κ_1 protíná dále rovinu $A_1A_2A_3$ v kružnici k'_1 vně vepsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$ ke straně A_2A_3 ; body dotyku na přímkách A_1A_2 , A_1A_3 označíme Y_2 , Y_3 podle obr. 5; bod dotyku s přímkou A_2A_3 je už výše zmíněný bod X_4 . Podle známého planimetrického vzorce je

$$A_2Y_2 = A_2X_4 = \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23} - a_{12}). \quad (2)$$



Obr. 5

Spojením vzorců (1), (2) dostaneme po úpravě vztah

$$a_{24} + a_{12} = a_{34} + a_{13}. \quad (3)$$

Obdobný vztah dostaneme pro kulovou plochu κ_2 ; odvodíme jej z rovnosti (3) jednoduše tím, že indexy

1, 2, 3, 4 nahradíme po řadě indexy 2, 3, 4, 1. Vyjde $a_{31} + a_{23} = a_{41} + a_{24}$ neboli po úpravě

$$a_{24} + a_{14} = a_{23} + a_{13}. \quad (4)$$

Spojením rovností (3), (4) dostaneme po úpravě

$$a_{12} - a_{34} = a_{14} - a_{23}. \quad (5)$$

Vyměníme-li v rovnosti (5) indexy 1, 2 (kulové plochy κ_1, κ_2) nebo indexy 3, 4 nebo oboje zároveň, dostaneme zřejmě opět platnou rovnost, kterou lze odvodit stejně jako rovnost (5); tím vyjdou tři další rovnosti

$$a_{12} - a_{34} = a_{24} - a_{13}, \quad (5a)$$

$$a_{12} - a_{34} = a_{13} - a_{24}, \quad (5b)$$

$$a_{12} - a_{34} = a_{23} - a_{14}. \quad (5c)$$

Spojením rovností (5), (5c) vyjde $a_{12} - a_{34} = 0$, $a_{23} - a_{14} = 0$; spojením rovností (5a), (5b) vyjde $a_{12} - a_{34} = 0$, $a_{13} - a_{24} = 0$, tj. úhrnem

$$a_{12} = a_{34}, \quad a_{23} = a_{14}, \quad a_{13} = a_{24},$$

jak jsme měli dokázat.

2. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE A

1. Ve čtyřstěnu $ABCX$ je stěna ABC daný rovnostranný trojúhelník o straně délky a . Označme Y střed kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCX$.

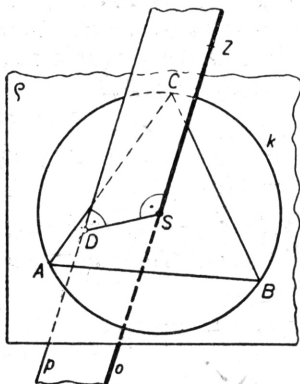
Vyšetřte geometrické místo středů Y , jestliže bod X probíhá přímku p kolmou k rovině ABC s výjimkou průsečíku D přímky p s rovinou ABC .

Proveďte diskusi vzhledem k vzdálenosti d bodu D od středu trojúhelníku ABC .

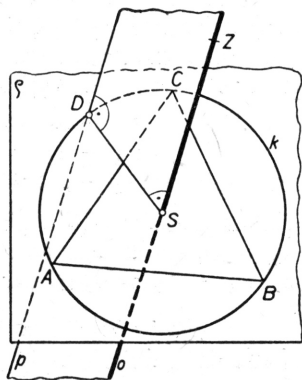
Řešení. Označme ρ rovinu ABC . Všecky středy Y leží na kolmici o k rovině $\rho \equiv ABC$, vedené středem S

kružnice k opsané trojúhelníku ABC . Je zřejmé, že kulová plocha, opsaná každému ze čtyřstěňů $ABCX$, obsahuje kružnici k . Nyní je třeba rozlišit 3 případy:

- [1] bod D leží uvnitř kružnice k (obr. 6);
- [2] bod D leží na kružnici k (obr. 7);
- [3] bod D leží vně kružnice k (obr. 8).



Obr. 6



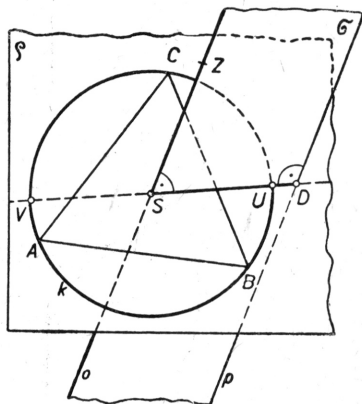
Obr. 7

V případě [1] je každý bod Z přímky o středem plochy kulové, která obsahuje kružnici k a protíná přímku p ve dvou bodech X_1, X_2 , z nichž žádný neleží v rovině ϱ . Tato kulová plocha je tedy opsaná čtyřstěňům $ABCX_1, ABCX_2$. Hledaná množina bodů je přímka o .

V případě [2] zvolíme nejprve bod $Z \neq S$; pak je přímka p sečnou kulové plochy; jeden z bodů X_1, X_2 , např. bod X_1 leží mimo rovinu ϱ , kulová plocha je opsaná čtyřstěňu $ABCX_1$, tj. bod Z náleží hledané množině bodů. Je-li $Z \equiv S$, je přímka p tečnou příslušné kulové

plochy, nevznikne čtyřstěn $ABCX$, tj. bod S nenáleží hledané množině bodů. V případě [2] je tedy hledaná množina bodů přímka o bez bodu S .

V případě [3] sestrojíme nejprve obě kulové plochy, které obsahují kružnici k a dotýkají se přímky p . Za tím účelem vedeme rovinu $\sigma \equiv Sp$ (obr. 9) a určíme její průsečíky U, V s kružnicí k . V rovině σ sestrojíme obě kružnice k_1, k_2 , které procházejí body U, V a dotýkají se přímky p . Body dotyku označíme po řadě X_1, X_2 , středy



Obr. 8

kružnic označíme Y_1, Y_2 . V případě [3] je hledaná množina bodů přímka o bez vnitřku úsečky $Y_1 Y_2$.

Skutečně, body Y_1, Y_2 zřejmě náležejí hledané množině bodů.

Leží-li bod Z přímky o vně úsečky $Y_1 Y_2$, pak kružnice k' se středem Z , procházející body U, V , protne přímku p , neboť má poloměr větší než kružnice k_1 . Průsečíky přímky p s kružnicí k' leží mimo rovinu σ , vzniknou tedy dva čtyřstěny $ABCX$, pro něž je bod Z středem opsané kulové plochy. Je-li T bod uvnitř úsečky $Y_1 Y_2$, má kružnice $(T; TU)$ menší poloměr než kružnice k_1 ; proto je přímka p její nesečnou, tj. bod T nenáleží hledané množině bodů.

Tím je úloha rozřešena.

$$\begin{aligned}
-2\sin\frac{1}{2}(x+y) \sin\frac{1}{2}(x-y) &= 2\sin\frac{1}{2}(x-y) \cos\frac{1}{2}(x-y), \\
\sin\frac{1}{2}(x-y) [\sin\frac{1}{2}(x+y) + \cos\frac{1}{2}(x-y)] &= 0, \\
\sin\frac{1}{2}(x-y) \{\sin\frac{1}{2}(x+y) + \sin[\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(x-y)]\} &= 0, \\
\sin\frac{1}{2}(x-y) \sin(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\pi) \cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi) &= 0, \\
\sin\frac{1}{2}(x-y) \sin(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\pi) \sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi) &= 0.
\end{aligned}$$

Nutně platí jedna z rovnic (písmena k, l, m, n apod. dále značí libovolné celé číslo):

a) $\frac{1}{2}(x-y) = k'\pi$ neboli
 $y = x - 2k'\pi = x + 2k\pi$ (kde $k = -k'$); (1)

b) $\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\pi = l\pi$ neboli
 $y = -\frac{1}{2}\pi + 2l\pi = \frac{3}{2}\pi + 2s\pi$; (2)

c) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = m'\pi$ neboli
 $x = -\frac{1}{2}\pi + 2m'\pi = -\frac{1}{2}\pi + 2(m+1)\pi =$
 $= \frac{3}{2}\pi + 2m\pi$ ($m' = m+1$). (3)

Obráceně snadno zjistíme, že řešení rovnic (1) až (3) splňují první rovnici (S).

II. Úprava druhé rovnice (S). Postupně platí:

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{1}{2}(x-y) \cos\frac{1}{2}(x+y) &= 2\cos\frac{1}{2}(3x+y) \sin\frac{1}{2}(x-y), \\
\sin\frac{1}{2}(x-y) [\cos\frac{1}{2}(3x+y) - \cos\frac{1}{2}(x+y)] &= 0, \\
\sin\frac{1}{2}(x-y) \sin(x + \frac{1}{2}y) \sin\frac{1}{2}x &= 0.
\end{aligned}$$

Nutně platí jedna z rovnic:

d) $\frac{1}{2}(x-y) = k'\pi$ neboli rovnice (1);

e) $x + \frac{1}{2}y = n\pi$ neboli
 $y = -2x + 2n\pi$; (4)

f) $\frac{1}{2}x = p\pi$ neboli
 $x = 2p\pi$. (5)

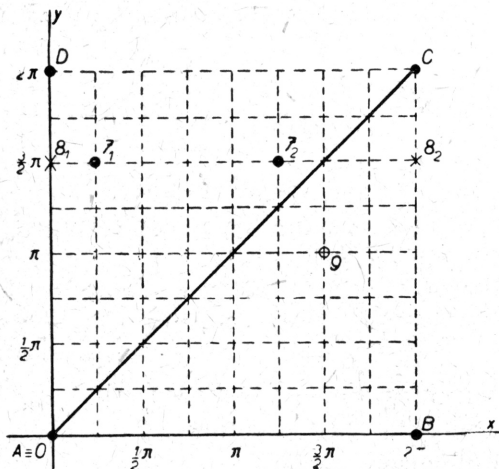
Obráceně výsledky (1), (4), (5) splňují druhou rovnici (S).

III. Nyní stanovíme řešení dané soustavy tím, že kombinujeme výsledky (1), (2), (3) a výsledky (1), (4), (5). Jsou tyto možnosti:

Případ [1]. Řešení

$$y = x + 2k\pi \quad (6)$$

vyhovuje oběma daným rovnicím. Jeho grafem je přímka; ve čtverci $ABCD$, kde $A \equiv [0, 0]$, $B \equiv [2\pi, 0]$, $C \equiv [2\pi, 2\pi]$, $D \equiv [0, 2\pi]$ dostáváme jako graf úsečku AC a body B , D (obr. 10). Tím je případ [1] vyřízen.



Obr. 10

Případ [2]. Výsledky (2), (4) vyžadují, aby $-2x + 2n\pi = -\frac{1}{2}\pi + 2l\pi$, neboli $x = \frac{1}{4}\pi + q\pi$, takže máme řešení

$$x = \frac{1}{4}\pi + q\pi, \quad y = \frac{3}{2}\pi + 2s\pi. \quad (7)$$

Viz body $7_1, 7_2$ v grafu.

Případ [3]. Výsledky (2), (5) dávají

$$x = 2p\pi, \quad y = \frac{3}{2}\pi + 2s\pi. \quad (8)$$

Viz body $8_1, 8_2$ v grafu.

Případ [4]. Výsledky (3), (4) dávají

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2m\pi, \quad y = \pi + 2n\pi. \quad (9)$$

Viz bod 9 v grafu.

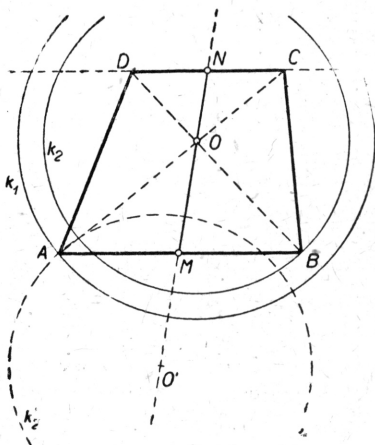
Případ [5]. Výsledky (3), (5) nedávají řešení soustavy.

Závěr. Řešení soustavy je dáno výsledky (6) až (9).

3. V rovině je dána úsečka MN délky d a uvnitř této úsečky je dán bod O tak, že platí $OM > ON$. Dále jsou dána kladná čísla p, q .

Sestrojte lichoběžník $ABCD$ takový, že bod M pólí jeho základnu AB , bod N pólí základnu CD a že bod O je průsečíkem úhlopříček AC, BD , jejichž délky po řadě jsou p, q .

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným číslům d, p, q .



Obr. 11

Řešení (obr. 11). Stejnolehlost se středem O , která převádí vrchol A ve vrchol C , převádí body B, M po řadě v body D, N . Je totiž $AB \parallel CD$ a spojnice středů

obou základů lichoběžníku prochází — jak známo — průsečíkem obou úhlopříček.*)

Dovedeme tedy určit vzdálenosti OA , OB konstruktivně i početně tím, že rozdělíme úsečky délek p , q po řadě v poměru $OM:ON = k$. Protože je $OM + ON = d$, platí

$$OM = \frac{kd}{k+1}, \quad ON = \frac{d}{k+1}, \quad (1)$$

$$OA = \frac{kp}{k+1}, \quad OB = \frac{kq}{k+1}. \quad (2)$$

Bod A náleží tedy kružnici $k_1 \equiv \left(O; \frac{kp}{k+1}\right)$, bod B

kružnici $k_2 \equiv \left(O; \frac{kq}{k+1}\right)$. Mimoto jsou body A , B

souměrně sdruženy podle středu M ; sestrojíme-li tedy obraz k'_2 kružnice k_2 v souměrnosti se středem M , náleží bod A kružnicím k_1 , k'_2 . Mají-li tyto kružnice společný bod A mimo přímku MO , tj. protnou-li se, lze sestrojit další vrcholy B , C , D , tj. lichoběžník žádaných vlastností.

Kružnice k'_2 má střed O' ležící na přímce OM , pro který platí $OO' = 2 \cdot OM$, poloměry kružnic k_2 , k'_2 jsou si rovny. Je tedy podmínka pro to, aby se kružnice k_1 , k'_2 protýaly, dána podle (1), (2) nerovnostmi

$$\left| \frac{kp}{k+1} - \frac{kq}{k+1} \right| < \frac{2kd}{k+1} < \frac{kp}{k+1} + \frac{kq}{k+1}.$$

Uvedené nerovnosti lze dělit kladným číslem $\frac{k}{k+1}$;

*) Bod O je vnitřním středem stejnolehlosti kružnic sestrojených nad průměry AB , CD ; tyto kružnice mají středy v bodech M , N .

dostaneme

$$|p - q| < 2d < p + q. \quad (3)$$

Z podmínky (3) je patrné, že riešiteľnosť úlohy nezávisí na čísle k , tj. na tom, v jakom pomere delí bod O úsečku MN .

4. Nájdite všetky reálne čísla p , pre ktoré nerovnosť

$$x + \sqrt{1 + px - 2p} \leq 1$$

má aspoň jedno reálne riešenie x .

Riešenie. Úpravami danej nerovnosti dostaneme postupne

$$\sqrt{px - 2p + 1} \leq 1 - x, \quad (1)$$

$$px - 2p + 1 \leq 1 - 2x + x^2,$$

$$x^2 - (p + 2)x + 2p \geq 0. \quad (2)$$

Kvadratický trojčlen na ľavej strane (2) možno rozložiť:

$$x^2 - (p + 2)x + 2p = (x - p)(x - 2).$$

Nerovnosť (2) nahradíme teda nerovnosťou

$$(x - p)(x - 2) \geq 0. \quad (3)$$

Riešenia nerovnosti (3) sú dané vzťahmi

$$x \geq p, \quad x \geq 2 \quad (4a)$$

alebo

$$x \leq p, \quad x \leq 2. \quad (4b)$$

Skúška. Ak majú byť čísla dané vzťahmi (4a), (4b) riešeniami danej nerovnosti, resp. nerovnosti (1), musí platiť

$$px - 2p + 1 \geq 0, \quad 1 - x \geq 0$$

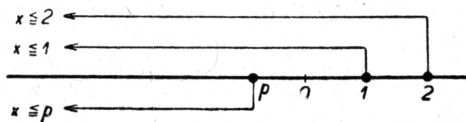
čiže

$$p(x - 2) + 1 \geq 0, \quad (5a)$$

$$x \leq 1. \quad (5b)$$

Za týchto predpokladov možno obrátiť predchádzajúci postup a odvodiť z nerovnosti (3) nerovnosť (1).

Druhá nerovnosť (4a) a nerovnosť (5b) sú v spore. Preto vzťahy (4a) nedávajú žiadne riešenie úlohy.



Obr. 12

Vyšetríme čísla dané vzťahmi (4b) a (5b). Na číselnej osi sú znázornené bodmi troch súhlasných polpriamok (viď obr. 12). Tieto polpriamky majú vždy nekonečne mnoho spoločných bodov, teda nerovnosti (4b), (5b) majú nekonečne mnoho spoločných riešení. Záleží ešte na nerovnosti (5a).

Pre $p = 0$ je táto nerovnosť zrejme splnená pre každé x . Ak je $p < 0$, je nerovnosť (5a) ekvivalentná s nerovnosťou

$$x \leq 2 - \frac{1}{p};$$

nerovnosti (4b), (5a), (5b) majú teda aspoň jedno spoločné riešenie. Ak je $p > 0$, je nerovnosť (5a) ekvivalentná s nerovnosťou

$$x \geq 2 - \frac{1}{p}. \quad (6)$$

Nerovnosť (6) má aspoň jedno spoločné riešenie s nerovnosťami (4b), (5b) práve vtedy, ak súčasne platí

$$2 - \frac{1}{p} \leq p, \quad 2 - \frac{1}{p} \leq 1. \quad (7)$$

Prvá nerovnosť (7) je ekvivalentná s nerovnosťou $(p - 1)^2 \geq 0$ a je splnená pre každé p . Druhá nerovnosť (7) má riešenie $p \leq 1$.

Výsledok. Daná nerovnosť (resp. nerovnosť (1)) má aspoň jedno reálne riešenie práve pre všetky p , pre ktoré platí $p \leq 1$.

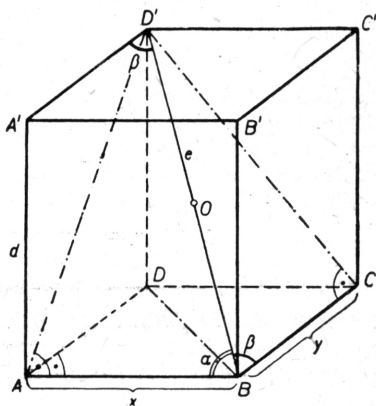
3. ÚLOHY III. KOLA KATEGORIE A

1. V kvádru $ABCD A' B' C' D'$ (kde $ABCD$ je obdĺžnik a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) je $AA' = d$, $\sphericalangle ABD' = \alpha$, $\sphericalangle A'D'B = \beta$.

Vypočítajte oba zbývajúce rozmery kváдру, jestliže je dáno číslo d a oba ostré uhly α , β . Stanovte podmienky riešiteľnosti.

Riešení (viz označení v obr. 13). Předpokládejme, že kvádr daných vlastností existuje. Všimněme si, že oba dané uhly α , β jsou uhly pravoúhlých trojúhelníků $BD'A$, $BD'C$, a proto tedy ostré (je $\sphericalangle BAD' = \sphericalangle BCD' = 90^\circ$).

Označme O střed kváдру, tj. střed úsečky BD' . Úsečky BC , $D'A'$ jsou souměrně sdružené podle středu O , a proto je $\sphericalangle CBD' = \beta$.



Obr. 13

Označme $BD' = e$; z pravoúhlých trojúhelníků $BD'A$, $BD'C$ pro délky $x = AB$, $y = BC$ dostaneme vztahy

$$x = e \cos \alpha, \quad y = e \cos \beta. \quad (1)$$

Z pravoúhlého trojúhelníku ABD , kde $\sphericalangle A = 90^\circ$, dostaneme pomocí Pythagorovy věty

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = x^2 + y^2 = e^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta).$$

Z pravoúhlého trojúhelníku $BD'D$, kde $\sphericalangle D = 90^\circ$, dostaneme pomocí Pythagorovy věty $BD'^2 = BD^2 + DD'^2$. Dosadíme sem z předchozího vztahu a položíme $BD' = e$, $DD' = d$; obdržíme

$$e^2 = e^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) + d^2$$

neboli

$$e = \frac{d}{\sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}}.$$

Po dosazení za e do (1) zjistíme, že o číslech x, y platí

$$\begin{aligned} x &= \frac{d \cos \alpha}{\sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}}, \\ y &= \frac{d \cos \beta}{\sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Tyto vzorce mají smysl jedině v případě, že čísla x, y jsou kladná. Vzhledem k tomu, že α, β jsou ostré úhly, je $d \cos \alpha > 0$, $d \cos \beta > 0$; jmenovatelé zlomků ve (2) mají smysl jedině pro $1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) > 0$. Lze však psát

$$\begin{aligned} 1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) &= (1 - \cos^2 \alpha) - \cos^2 \beta = \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2(\tfrac{1}{2}\pi - \beta). \end{aligned}$$

Musí tedy platit $\sin^2 \alpha > \sin^2(\tfrac{1}{2}\pi - \beta)$; protože α, β jsou ostré úhly, je $\sin \alpha > 0$, $\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \beta) > 0$, takže z předchozího vztahu dostáváme, že nutně platí

$$\sin \alpha > \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \beta),$$

neboli

$$\alpha > \frac{1}{2}\pi - \beta,$$

tj.

$$\alpha + \beta > \frac{1}{2}\pi. \quad (3)$$

Tento fakt je patrný i geometricky z trojhranu o hranách BA, BC, BD' .

Obráceně, platí-li o číslech d, α, β , kde $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$, vztah (3), dospějeme obráceným postupem od (3) k závěru, že existují kladná čísla x, y daná vzorcí (2). Potom kvádr o rozměrech $AB = x, BC = y, AA' = d$ [kde x, y je dáno vzorcí (2) za předpokladu, že o ostrých úhlech α, β platí (3)] skutečně splňuje požadavek, že $\sphericalangle ABD' = \alpha, \sphericalangle A'D'B = \beta$.

Důkaz. Podle vzorce pro délku úhlopříčky BD' kváдру je totiž

$$\begin{aligned} BD'^2 &= AB^2 + BC^2 + AA'^2 = \\ &= \frac{d^2}{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)} [\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 1 - \\ &- (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)] = \frac{d^2}{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}, \end{aligned}$$

takže

$$BD' = \frac{d}{\sqrt{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}}. \quad (4)$$

Z pravoúhlého trojúhelníku $BD'A$ plyne, že

$$\cos \sphericalangle ABD' = \frac{AB}{BD'}$$

a po dosazení za $AB = x$ ze vztahu (2) a za BD' ze vztahu (4) máme

$$\cos \sphericalangle ABD' = \cos\alpha.$$

Protože jde o kosiny ostrých úhlů, je $\sphericalangle ABD' = \alpha$; podobně je $\sphericalangle CBD' = \beta$.

Tím je řešení provedeno.

2. Dané párne prirodzené číslo $2k$ rozložte na súčet dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel x, y tak, aby súčin xy bol čo najväčší.

Riešenie. Dané párne prirodzené číslo $2k$ (kde k je nejaké dané prirodzené číslo) rozložme na súčet prirodzených čísel $x, y = 2k - x$. Označenie zvolme tak, aby platilo $x \leq y$. Potom je

$$xy = x(2k - x) = k^2 - (k - x)^2.$$

Prirodzené číslo x je najväčšie práve vtedy, ak je $k - x = 0$ čiže $x = k$, takže máme rozklad k, k .

Tento rozklad vyhovuje ďalšej požiadavke úlohy jedine pre $k = 1$, pretože vtedy sú čísla $1, 1$ nesúdeliteľné.

Vyšetrujme teraz prípady, keď je $k > 1$. Označme $k - x = p$ (p prirodzené); súčin $xy = k^2 - p^2$ je tým väčší, čím je p menšie. Rozlišujme prípady, keď k je párne, resp. nepárne.

Nech je k párne. Potom pre $p = 1$ sú $k - 1, k + 1$ nepárne čísla s rozdielom 2 . Z toho vyplýva, že majú len spoločného deliteľa 1 čiže sú nesúdeliteľné. Tento rozklad vyhovuje teda požiadavkám úlohy.

Nech je $k > 1$ číslo nepárne. Čísla $k - 1, k + 1$ sú párne a teda nevyhovujú požiadavkám úlohy. No, čísla $k - 2, k + 2$ sú nepárne, majú rozdiel 4 , pričom čísla $2, 4$ nie sú ich deliteľmi. Čísla $k - 2, k + 2$ sú teda nesúdeliteľné a vyhovujú požiadavkám úlohy.

Záver. Pri párnom k je hľadaný rozklad

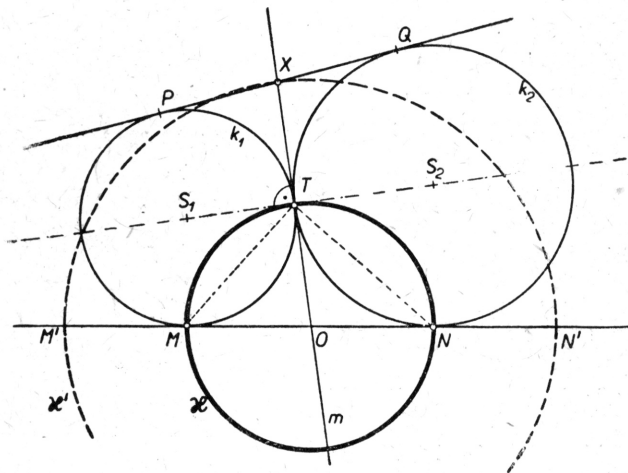
$$(k - 1) + (k + 1).$$

Pre $k = 1$ je hľadaný rozklad $1 + 1$.

Pre nepárne $k > 1$ je hľadaný rozklad
 $(k - 2) + (k + 2)$.

3. V rovině je dána přímka MN . Uvažujme dvojici kružnic k_1, k_2 , které se dotýkají přímky MN po řadě v bodech M, N a přitom se navzájem dotýkají vně. Označme X střed úsečky PQ , kde P, Q jsou dotykové body druhé společné vnější tečny kružnic k_1, k_2 .

Najděte geometrické místo bodů X pro všechny dvojice kružnic uvedených vlastností.



Obr. 14

Řešení (obr. 14). a) Označme S_1, S_2 středy kružnic k_1, k_2 , T jejich bod dotyku. Souměrnost podle osy S_1S_2 převede body M, N po řadě v body P, Q . Společná

(vnitřní) tečna m obou kružnic v bodě T je kolmá k přímkce S_1S_2 a protne společnou tečnu MN v bodě O , z něhož lze vést ke kružnicím k_1, k_2 tečny téže délky OT ; je tedy $OM = ON$, tj. bod O je středem úsečky MN . Souměrnost podle osy S_1S_2 převede bod O ve střed X úsečky PQ ; přitom body O, T, X leží na přímkce m a T je středem úsečky OX , tj. platí

$$OX = 2OT. \quad (1)$$

b) Z rovnoramenných trojúhelníků OMT, ONT dostaneme

$$\begin{aligned} \sphericalangle MTO &= 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle MOT, \\ \sphericalangle NTO &= 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle NOT. \end{aligned} \quad (2)$$

Sečtením rovností (2) vyjde

$$\begin{aligned} \sphericalangle MTN &= \sphericalangle MTO + \sphericalangle NTO = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle MOT + \sphericalangle NOT) = \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Bod T leží tedy na kružnici κ sestrojené nad průměrem MN ; kružnice κ má střed O .

Zvolíme-li obráceně libovolný bod $T \neq M, N$ na kružnici κ , je $OM = ON = OT$. Lze tedy sestrojit kružnici k_1 , která se dotýká přímk OM, OT po řadě v bodech M, T . Obdobně lze sestrojit kružnici k_2 , která se dotýká přímk ON, OT po řadě v bodech N, T . Kružnice k_1, k_2 mají zřejmě v bodě T vnější dotyk (OT je společná tečna), jsou to tudíž dvě kružnice vyhovující podmínkám úlohy.

Zjistili jsme tedy, že geometrické místo bodů dotyku T vyšetřovaných dvojic kružnic k_1, k_2 je kružnice κ s vyloučením bodů M, N .

c) Vzhledem k rovnosti (1) dostaneme každý bod X z příslušného bodu T stejnohlostí o středu O a koeficientu 2. Tato stejnohlost převede kružnici κ v kruž-

nici $\kappa' \equiv (O; MN)$; protože z kružnice κ byly vyloučeny body M, N , je hledané geometrické místo bodů kružnice κ' bez bodů M', N' (viz obr. 14).

4. Jsou dány dvě kvadratické rovnice

$$x^2 + ax + b = 0,$$

$$x^2 + cx + d = 0$$

s reálnými koeficienty.

Najděte nutné a postačující podmínky mezi koeficienty daných rovnic pro to, aby obě rovnice měly jeden společný kladný kořen a aby zbývající kořen první rovnice byl větší než zbývající kořen druhé rovnice.

Řešení. Nechtě dané rovnice splňují podmínky úlohy; pak jejich společný kladný kořen x vyhovuje rovnici

$$x^2 + ax + b - (x^2 + cx + d) = 0$$

neboli

$$(a - c)x + (b - d) = 0. \quad (1)$$

Z toho vyplývá, že buď

I. čísla $a - c, b - d$ jsou obě rovna nule, nebo

II. obě čísla $a - c, b - d$ jsou různá od nuly a mají opačná znamení.

Zbývající kořen první rovnice je $x_1 = \frac{b}{x}$, zbývající kořen druhé rovnice je $x_2 = \frac{d}{x}$. Protože platí $x_1 > x_2$, je $\frac{b - d}{x} > 0$; protože je $x > 0$, je

$$b > d. \quad (2)$$

Z toho vyplývá, že případ I nenastane; nastane tedy případ II a je

$$a < c. \quad (3)$$

Společný kladný kořen je pak podle (1) dán vzorcem

$$x = \frac{b - d}{c - a}. \quad (4)$$

Dosadíme-li z (4) do kterékoli z daných rovnic, dostaneme po úpravě rovnost

$$(b - d)^2 = (c - a)(ad - bc). \quad (5)$$

Vztahy (2), (3), (5) udávají hledané nutné podmínky pro koeficienty daných rovnic. Tyto podmínky jsou však také postačující. Platí-li totiž (2) a (3), pak kladné číslo x dané vzorcem (4) je podle (5) kořenem každé z daných rovnic. Zbývající kořeny jsou $x_1 = \frac{b}{x}$, $x_2 = \frac{d}{x}$ a platí podle (4), (2)

$$x_1 - x_2 = \frac{b - d}{x} = c - a > 0,$$

neboli $x_1 > x_2$.

4. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE B

1. Najděte všechna alespoň trojčíferná přirozená čísla x , která mají tuto vlastnost: Číslo x a jeho druhá mocnina x^2 končí (v desítkové soustavě) stejným posledním trojčíslím.

Řešení. Hledané číslo x lze napsat v tvaru

$$x = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c, \quad (1)$$

kde celá čísla a, b, c splňují nerovnosti

$$1 \leq a, \quad 0 \leq b \leq 9, \quad 0 \leq c \leq 9.$$

Z (1) vypočteme x^2 :

$$x^2 = a^2 \cdot 10^4 + 2ab \cdot 10^3 + (2ac + b^2) \cdot 10^2 + 2bc \cdot 10 + c^2. \quad (2)$$

Podle požadavku úlohy je číslo $x^2 - x$ dělitelné tisícem; použijeme-li vztahů (1), (2), vyjde, že číslo

$$a^2 \cdot 10^4 + 2ab \cdot 10^3 + (2ac + b^2 - a)10^2 + (2bc - b)10 + c^2 - c$$

je dělitelné tisícem. Odtud plyne

$$(2ac + b^2 - a) \cdot 10^2 + (2bc - b) \cdot 10 + c^2 - c = k \cdot 10^3, \quad (3)$$

kde k je nezáporné celé číslo.

Z rovnosti (3) vyplývá, že $c^2 - c$ je dělitelné deseti; z podmínky $0 \leq c \leq 9$ dostaneme pro c čtyři možnosti:

$$c = 0, 1, 5, 6.$$

Probereme nyní jednotlivé případy:

1. Pro $c = 0$ dá vztah (3)

$$(b^2 - a)10^2 - b \cdot 10 = k \cdot 10^3$$

neboli

$$(b^2 - a) \cdot 10 - b = k \cdot 10^2.$$

Odtud plyne, že b je dělitelné deseti, tj. $b = 0$ a dále $a = 10 \cdot \lambda$ (λ přirozené číslo). Máme tedy první možné řešení000, tj. čísla (aspoň čtyřciferná) končící třemi nulami.

2. Pro $c = 1$ dá vztah (3) po úpravě

$$(b^2 + a)10 + b = k \cdot 10^2.$$

Jako v případě 1 odtud dostaneme $b = 0$, $a = 10\lambda$ (λ přirozené číslo). Druhé možné řešení je tedy ...001, tj. čísla (aspoň čtyřciferná) končící trojčíslím 001.

3. Pro $c = 5$ dá vztah (3) po úpravě

$$(b^2 + 9a)10 + (9b + 2) = k \cdot 10^2. \quad (4)$$

Číslo $9b + 2$ je tedy dělitelné deseti, $9b$ končí cifrou 8. Jediný možný násobek čísla 9 je $9 \cdot 2 = 18$, tj. $b = 2$. Ze vztahu (4) pak vyjde $6 + 9a = k \cdot 10$. Číslo $2 + 3a$ je tedy dělitelné deseti, $3a$ končí cifrou 8. Příпустné násobky čísla 3 jsou 18, 48, ..., tj. $a = 6 + 10\lambda$ (λ celé nezáporné číslo). Třetí možná skupina řešení jsou aspoň trojčiferná čísla končící trojčíslím 625.

4. Pro $c = 6$ dostaneme jako v případě 3

$$(b^2 + 11a) \cdot 10 + (11b + 3) = k \cdot 10^2.$$

Odtud plyne $b = 7$, $57 + 11a = k \cdot 10$ a dále $a = 3 + 10\lambda$ (λ nezáporné celé číslo). Čtvrtá možná skupina řešení jsou aspoň trojčiferná čísla končící trojčíslím 376.

Zkouška ukáže, že všechna čtyři možná řešení vyhovují podmínce úlohy.

2. V rovině je dán dutý úhel $\sphericalangle MON$ a uvnitř tohoto úhlu bod P ; dále je dána úsečka velikosti r .

Sestrojte trojúhelník ABC , který má tyto vlastnosti:

(1) Body A, B, C leží po řadě uvnitř polopřímek OM, ON, OP .

(2) Kružnice, která se dotýká přímky AB a je trojúhelníku ABC vně vepsaná, má střed O a poloměr r .

Řešení (obr. 15). a) Označíme $\sphericalangle MOP = \omega$, $\sphericalangle NOP = \varepsilon$.

Úhly hledaného trojúhelníku označme obvyklým způsobem α, β, γ . Protože O je střed kružnice k vně vepsané ke straně AB , je

$$\sphericalangle ACO = \sphericalangle BCO = \frac{1}{2}\gamma. \quad (1)$$

Polopřímky AO, BO jsou osy vnějších úhlů trojúhelníku

ABC , proto platí

$\sphericalangle OAB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, $\sphericalangle OBA = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$,
a odtud dále

$$\sphericalangle OAC = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha, \quad \sphericalangle OBC = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta. \quad (2)$$

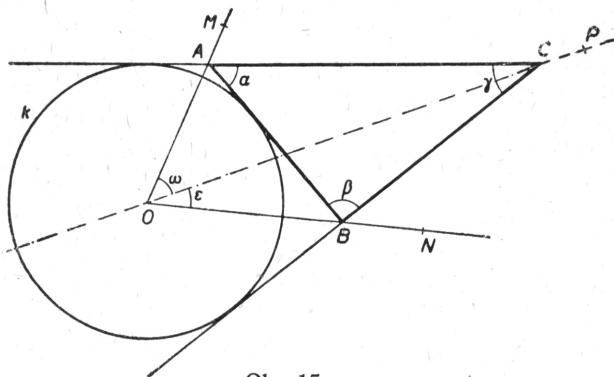
Ze vztahů (1), (2) vypočteme snadno

$$\omega = 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}\beta,$$

$$\varepsilon = 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}\alpha,$$

tj.

$$\alpha = 2\varepsilon, \quad \beta = 2\omega. \quad (3)$$



Obr. 15

b) Rovnosti (3) jsou výsledkem rozboru úlohy; z nich odvodíme konstrukční předpis. Sestrojíme libovolný trojúhelník $A_0B_0C_0$ (obr. 16)* tak, aby jeho vnitřní úhly měly velikosti α , β dané vztahy (3) a aby kružnice k_0 se středem O_0 , vně vepsaná ke straně A_0B_0 , měla poloměr r .

Použijeme-li předchozího postupu na trojúhelníky $A_0C_0O_0$, $B_0C_0O_0$, dostaneme

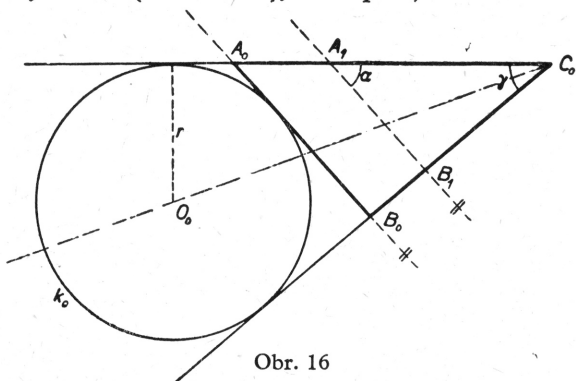
Obr. 16 je na str. 66.

$$\sphericalangle A_0 O_0 C_0 = \frac{1}{2}\beta = \omega, \quad \sphericalangle B_0 O_0 C_0 = \frac{1}{2}\alpha = \varepsilon.$$

Stačí nyní přenést narýsovaný obrazec tak, aby polopřímky $O_0 A_0$, $O_0 B_0$, $O_0 C_0$ splynuly po řadě s polopřímkami OM , ON , OP a úloha je rozřešena.

c) Konstrukce trojúhelníku $A_0 B_0 C_0$ se provede takto: Do úhlu velikosti $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$, jehož vrchol označíme C_0 , vepíšeme kružnici k_0 o daném poloměru r . Sestrojíme trojúhelník $C_0 A_1 B_1$ (viz obr. 16), jehož vnitřní úhly mají velikosti γ , α , β , a vedeme tečnu $A_0 B_0$ kružnice k_0 rovnoběžnou s přímkou $A_1 B_1$ tak, aby k_0 byla kružnicí vně vepsanou trojúhelníku $A_0 B_0 C_0$.

d) Úloha je zřejmě řešitelná právě tehdy, jsou-li oba úhly ω , ε ostré (viz obr. 15), a má pak jediné řešení.



Obr. 16

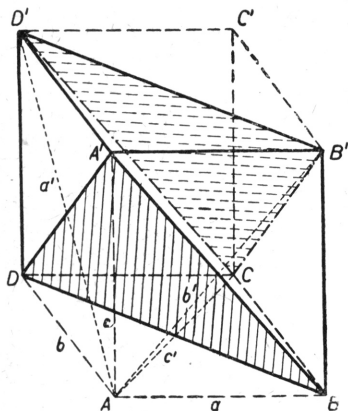
3. Daný je kváder $ABCD A' B' C' D'$ ($ABCD$ je jedna jeho stena a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) s rozměry $a = AB$, $b = AD$, $c = AA'$. Roviny BDA' a $CB'D'$ oddeľujú od kvádra dva štvorsteny $ABDA'$ a $C'CB'D'$.

Vypočítajte objem a povrch tělesa, ktoré zostalo, pomocou čísel a , b , c .

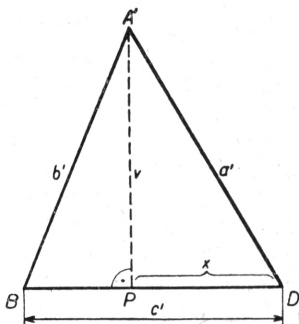
Riešenie. Označme (obr. 17)

$$a' = AD' = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad b' = AB' = \sqrt{c^2 + a^2},$$

$$c' = AC = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Obr. 17



Obr. 18

Štvorsteny $ABDA'$, $C'CB'D'$ sú zhodné (vyplýva to napr. zo stredovej súmernosti daného kvádra podľa jeho stredy). Označme P povrch a V objem každého z nich a P' , V' povrch a objem telesa, ktoré dostaneme odňatím oboch štvorstenov.

Je $V = \frac{1}{3}Zv$, kde Z je obsah trojuholníka ABA' a $v = AD = b$; no $Z = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AA' = \frac{1}{2}ac$, takže $V = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2}ac)b = \frac{1}{6}abc$.

Teda je

$$V' = \frac{2}{3}abc.$$

Povrch P' skúmaného telesa vypočítame, keď k povrchu P_1 daného kvádra pripočítame dvojnásobný

obsah P_2 trojuholníka $A'BD$ a odčítame dvojnásobný „plášť“ P_3 štvorstena $AA'BD$, t. j. číslo

$$P_3 = \triangle ABA' + \triangle ABD + \triangle ADA' = \frac{1}{2}(ab + bc + ca). \quad (1)$$

Pretože $P_1 = 2(ab + bc + ca)$, stačí vypočítať P_2 .

Označme strany trojuholníka $A'BD$ (obr. 18) $a' = DA'$, $b' = A'B$, $c' = BD$; potom platí

$$a'^2 = b^2 + c^2, \quad b'^2 = c^2 + a^2, \quad c'^2 = a^2 + b^2, \quad (2)$$

pretože úsečky a' , b' , c' sú stenové uhlopriečky kvádra. Trojuholník $A'BD$ má aspoň dva ostré vnútorné uhly. Nech sú to napr. uhly $\sphericalangle A'BD$, $\sphericalangle A'DB$. Potom päta P výšky v spustenej z vrcholu A' na stranu BD leží medzi bodmi B , D . Označíme $DP = x$; potom je $BP = c' - x$ a podľa Pythagorovej vety platí:

$$v^2 = a'^2 - x^2 = b'^2 - (c' - x)^2. \quad (3)$$

Po dosadení z (2) dostaneme po úprave

$$x = \frac{b^2}{c'}. \quad (4)$$

Z rovnosti (3) vypočítame v^2 dosadením z (2) a (4). Vyjde

$$v^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^4}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2}. \quad (5)$$

Pretože je $2P_2 = c'v = v\sqrt{a^2 + b^2}$, vyplýva z (5)

$$2P_2 = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \quad (6)$$

a konečne podľa vzorca $P' = P_1 + 2P_2 - 2P_3$ a podľa (1), (6)

$$P' = ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

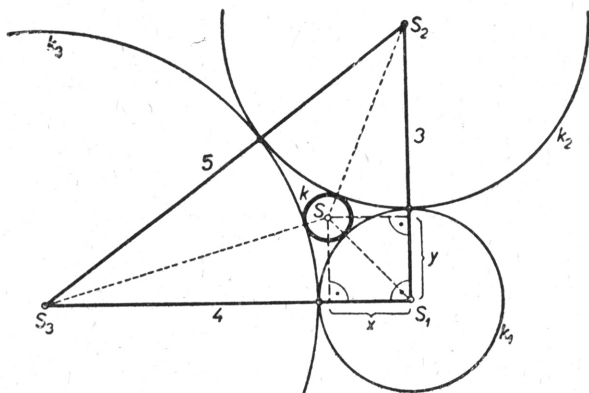
4. V rovine jsou dány tři kružnice o poloměrech délek 1, 2, 3; každé dvě z těchto kružnic mají vnější dotyk.

Určete, kolik kružnic se zároveň dotýká vně každé ze tří daných kružnic, a vypočtete jejich poloměry.

Řešení (obr. 19). Pro vzdálenosti středů S_1, S_2, S_3 kružnic k_1, k_2, k_3 platí při vhodném označení $S_1S_2 = 3$, $S_2S_3 = 5$, $S_3S_1 = 4$.

Označme S střed hledané kružnice k , ϱ její poloměr; pak platí

$$\begin{aligned} S_1S &= 1 + \varrho, \\ S_2S &= 2 + \varrho, \\ S_3S &= 3 + \varrho. \end{aligned} \quad (1)$$



Obr. 19

Dále označme x, y vzdálenosti bodu S od přímek S_1S_2, S_1S_3 . Pak dostaneme z pravoúhlých trojúhelníků

$$\begin{aligned} SS_1^2 &= x^2 + y^2, \\ SS_2^2 &= x^2 + (3 - y)^2, \\ SS_3^2 &= (4 - x)^2 + y^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Spojením (1), (2) vyjde

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - \varrho^2 &= 1 + 2\varrho, \\x^2 + y^2 - \varrho^2 &= 6y + 4\varrho - 5, \\x^2 + y^2 - \varrho^2 &= 8x + 6\varrho - 7;\end{aligned}\quad (3)$$

z první a třetí rovnosti (3) vyjde $8x = 8 - 4\varrho$, tj.

$$x = 1 - \frac{1}{2}\varrho. \quad (4)$$

Z první a druhé rovnosti (3) vyjde $6y = 6 - 2\varrho$, tj.

$$y = 1 - \frac{1}{3}\varrho. \quad (5)$$

Dosazením za x, y z (4), (5) do první rovnice (3) dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici

$$23\varrho^2 + 132\varrho - 36 = 0,$$

která má jediný kladný kořen $\varrho = \frac{6}{23}$. Existuje tedy jediná kružnice žádaných vlastností.

5. V rovině leží čtyři body. Pět z jejich šesti vzájemných vzdáleností (v cm) je rovno číslům 1, 2, 3, 4, 5. Načrtněte všechny možné případy vzájemné polohy těchto čtyř bodů a vyložte jejich odvození.

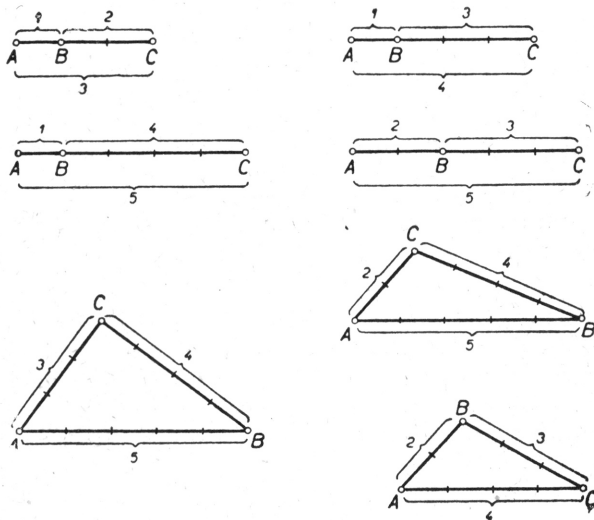
Řešení. a) Při sestrojování hledaných skupin čtyř bodů budeme užívat stále této známé věty:

Tři kladná čísla x, y, z jsou vzdálenosti tří dvojic, utvořených z tří bodů právě tehdy, když největší z čísel x, y, z je menší nebo rovno součtu obou ostatních.

b) Hledané čtyři body A, B, C, D určují celkem šest vzdáleností, z nichž jedna je neznámá. Bod, jehož jedna vzdálenost od ostatních je neznámá, označme D . Pak všechny tři vzdálenosti AB, BC, CA jsou daná čísla a máme pro ně těchto 10 možností:

$$\left. \begin{array}{cccccc} 123, & (124), & (125), & 134, & (135), & \\ 145, & 234, & 235, & 245, & 345. & \end{array} \right\} \quad (1)$$

Případy 124, 125, 135 nemohou podle odstavce a) nastat. Zbývajících sedm případů je znázorněno na obr. 20.



Obr. 20

Přitom je třeba připomenout, že označení bodů A , B , C můžeme volit libovolně a dále, že trojice ABC v případech 123, 134, 145 a 235 leží v přímce.

c) Nyní budeme postupně vyšetřovat všechny možné případy (1). Ze vzdáleností AD , BD , CD jsou vždy dvě známy, třetí hledáme. Tyto dvě známé vzdálenosti spolu s jedním z čísel AB , BC , CA budou splňovat podmínku z odstavce a); tak určíme možné polohy bodu D .

Začneme s posledním případem (1), tj. s trojicí 345. Zbývající známé vzdálenosti jsou 1, 2: připojíme-li

k nim jedno z čísel 3, 4, 5, dostaneme trojice

$$123, 124, 125. \quad (2a)$$

Poslední dva případy (2a) jsou podle odst. a) nemožné. Zbývá tedy jen případ 123, který nám dá dvě různá řešení znázorněná obrázky 21. Různost obou řešení vyplývá z toho, že neznámá vzdálenost (BD) je při prvním řešení $BD = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$, kdežto při druhém řešení je $BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.

d) Obdobně nyní vyšetříme další případy (1). V případě 245 jsou zbývající vzdálenosti 1, 3 a dostaneme tedy trojice

$$132, 134, 135. \quad (3a)$$

Z těchto případů je poslední nemožný, první a druhý dají po dvou řešeních zachycených na obr. 22. Všechna tato řešení jsou zřejmě navzájem různá a odlišná i od obou řešení z obr. 21.

V případě 235 jsou zbývající známé vzdálenosti 1, 4. Dostaneme tedy trojice

$$142, 143, 145. \quad (4a)$$

Z nich první je nepřipustná, další dvě dají po dvou řešeních znázorněných na obr. 23.

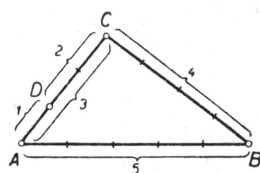
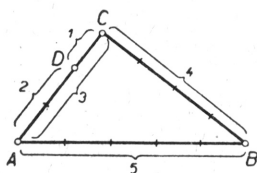
Z těchto řešení jsou však jen tři různá; jinak jsou všechna tři řešení z obr. 23 odlišná od předchozích šesti řešení.

V případě 234 jsou zbývající známé vzdálenosti 1, 5; dostaneme tedy trojice

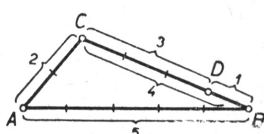
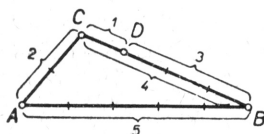
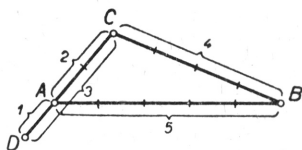
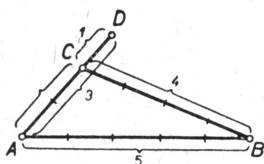
$$152, 153, 154. \quad (5a)$$

První dvě trojice jsou nepřipustné, poslední dá dvě řešení znázorněná na obr. 24.

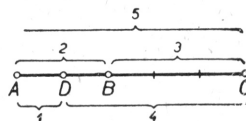
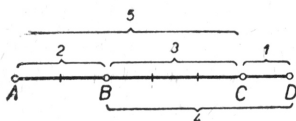
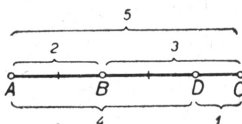
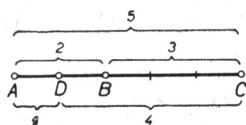
Je zřejmé, že obě tato řešení jsou navzájem různá a liší se i od řešení z obr. 21 i od řešení z obr. 22 a 23.



Obr. 21



Obr. 22

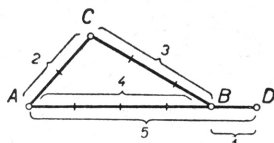
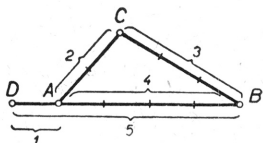


Obr. 23

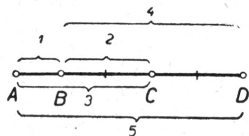
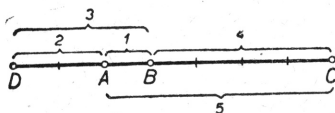
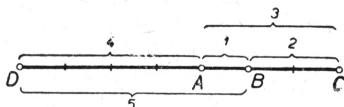
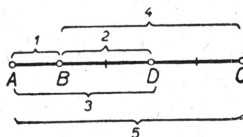
e) V případě 145 jsou další známé vzdálenosti 2,3. Možné trojice jsou tedy

231, 234, 235. (6a)

Trojice 234, 235 byly již vyšetřeny v odst. d). Trojice 231 dá dvě řešení zachycená na obr. 25. Z nich první se však shoduje s jedním řešením z obr. 23; zbývá tedy jediné další řešení.



Obr. 24



Obr. 25

Obr. 26

V případě 134 jsou další známé vzdálenosti 2, 5. Možné trojice jsou tedy

251, 253, 254.

První trojice je však podle odst. a) nepřipustná, ostatní dvě byly vyšetřeny v odst. d) jako trojice 235, 245.

f) Ze všech případů (1) zbývá tedy případ 123. Ostatní dvě známé vzdálenosti jsou 4, 5; dostaneme tedy trojice

451, 452, 453.

Trojice 452, 453 byly již vyšetřeny v odst. c), d) jako trojice 245, 345. Trojice 451 dá dvě řešení naznačená na obr. 26. Obě se však shodují s dvěma řešeními z obr. 23. Nedostáváme tedy žádné další řešení.

Celkem máme tedy 12 různých řešení; přitom za různá pokládáme taková dvě řešení (čtveřice bodů), která se liší aspoň v jedné vzdálenosti. Z těchto 12 řešení jsou čtyři taková, že všechny čtyři body A, B, C, D leží v přímce.

6. Sú dané tri kvadratické rovnice

$$\begin{aligned}x^2 + ax + b &= 0, \\x^2 + bx + a &= 0, \\x^2 + x - a + b + 1 &= 0,\end{aligned}$$

kde x je neznáma.

Reálne čísla a, b určite tak, aby každé dve z týchto rovníc mali spoločný aspoň jeden reálny koreň.

Riešenie. Odčítaním prvej a druhej rovnice dostaneme

$$(a - b)x = a - b.$$

Rozlišujeme dve možnosti [1] a [2].

[1] Nech je $a \neq b$. Potom z tejto rovnice vyplýva $x = 1$. Prvá rovnica má potom korene 1, $-a - 1$; druhá rovnica má korene 1, $-b - 1$.

Keď dosadíme $x = 1$ do ktorejkoľvek z prvých dvoch daných rovníc, obdržime

$$a + b + 1 = 0. \quad (1)$$

Odčítaním prvej a tretej rovnice dostaneme

$$(a - 1)x + (a - 1) = 0. \quad (2)$$

Ďalej rozlišujeme dva prípady a), b):

a) Nech je $a \neq 1$. Potom je $x = -1$, prvá a tretia rovnica majú teda koreň -1 . Prvá rovnica má korene $1, -1$ a platí $-a - 1 = -1$ čiže $a = 0$. Z (1) potom dostaneme $b = -1$; druhá rovnica má teda korene $1, 0$. Tretia rovnica znie $x^2 + x = 0$; má teda korene $-1, 0$. Daná sústava má v tomto prípade tvar:

$$x^2 - 1 = 0,$$

$$x^2 - x = 0,$$

$$x^2 + x = 0.$$

Požiadavka, aby každé dve z týchto rovníc mali spoločný aspoň jeden reálny koreň, je v tomto prípade splnená.

b) Nech je $a = 1$; potom z (1) vyplýva $b = -2$ a daná sústava má tvar:

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Prvá a tretia rovnica sú totožné; obe majú korene $1, -2$. Druhá rovnica má dvojnásobný koreň 1 . Všetky tri rovnice majú teda spoločný koreň $x = 1$.

[2] Nech je $a = b$. Potom má daná sústava tvar

$$x^2 + ax + a = 0,$$

$$x^2 + ax + a = 0,$$

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Pretože posledná rovnica nemá žiadny reálny koreň, je úloha v tomto prípade neriešiteľná.

Celkom má teda úloha riešenie jedine v dvoch prípadoch:

a) Pre $a = 0, b = -1$;

b) pre $a = 1, b = -2$.

5. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE B

1. Součet více než dvou bezprostředně za sebou následujících přirozených čísel není nikdy prvočíslo. Dokažte.

Řešení. První z čísel označme a , přičemž je

$$a \geq 1. \quad (1)$$

Další čísla jsou (přitom $n > 2$)

$$a + 1, a + 2, \dots, a + n - 1.$$

Součet s všech n čísel je

$$s = \frac{1}{2}[a + (a + n - 1)]n = \frac{1}{2}(2a + n - 1)n;$$

přitom je s přirozené číslo. Proto je nutně jedno z čísel $2a + n - 1$, n sudé; potom však je druhé liché. Jsou dvě možnosti:

[1] Je-li n sudé, je $\frac{1}{2}n > 1$ (viz text úlohy); avšak i $2a + n - 1 > 1$, neboť $2a > 1$ a $n - 1 > 1$. Je tedy s součinem dvou přirozených čísel, z nichž každé je větší než 1; tj. s je číslo složené.

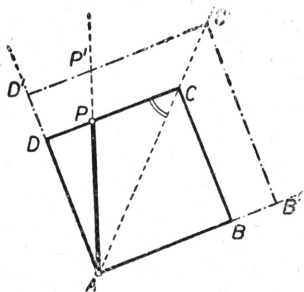
[2] Je-li n liché, je $2a + (n - 1)$ sudé a větší než dvě; jeho polovina je větší než 1; zároveň je $n \geq 3$. Je tedy s opět číslo složené.

Tím je důkaz proveden.

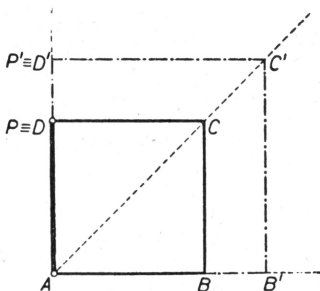
2. V rovině jsou dány dva různé body A , P . Najděte geometrické místo vrcholů C všech čtverců $ABCD$, které obsahují bod P (uvnitř anebo na obvodu).

Řešení. I. Označme γ , σ obě opačné poloroviny s hranicí $p \equiv AP$ (obr. 30 na str. 79). Ihned nahlédneme, že se při dalším vyšetřování můžeme omezit na ty čtverce $ABCD$ z naší úlohy, v nichž bod P padne na

úsečku CB nebo CD : Jestliže totiž bod P leží uvnitř čtverce $AB'C'D'$ z naší úlohy, popř. uvnitř některé ze stran AD' nebo AB' , potom polopřímka AP má s jednou ze stran $C'B'$, $C'D'$ společný bod P' (obr. 27 až 29);

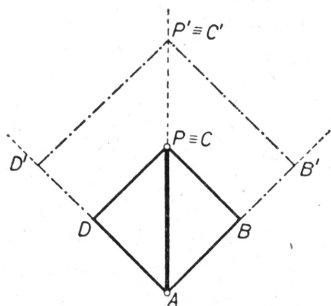


Obr. 27



Obr. 28

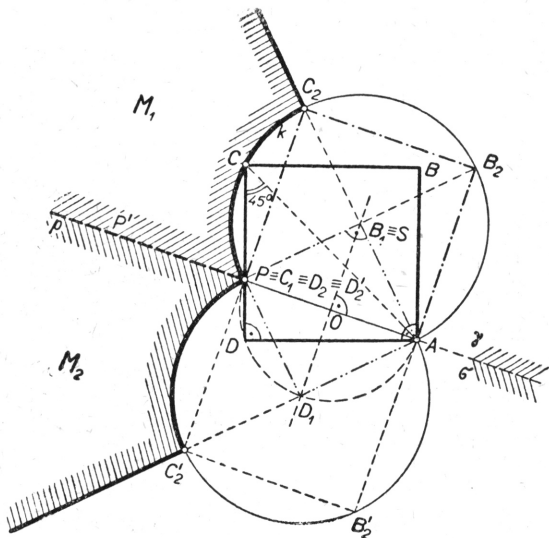
stejnolehlost o středu A a koeficientu $\frac{AP}{AP'} \leq 1$ převádí bod P' v bod P a čtverec $AB'C'D'$ ve čtverec $ABCD$, v němž bod P leží na některé z úseček CB , CD . Tím je tvrzení dokázáno.



Obr. 29

Dále se můžeme omezit na čtverce $ABCD$ s bodem P na úsečce CD , neboť leží-li bod P na úsečce CB , vyměníme názvy bodů B , D . Přitom stačí vyšetřovat případy, že bod C padne do polo-

roviny γ , neboť souměrnost o ose p převede takový čtverec, v němž bod C leží v polorovině σ , ve čtverec z naší úlohy, ale v němž obraz bodu C padne do poloroviny γ . Všimněme si zvláště dvou případů takových čtverců: čtverec $AB_1C D_1$, kde $C_1 \equiv P$ a čtverec



Obr. 30

$AB_2C_2D_2$, kde $D_2 \equiv P$ (obr. 30). V každém jiném případě padne bod P dovnitř strany CD hledaného čtverce $ABCD$ s bodem C v γ ; na tyto čtverce se nyní omezíme.

Všimněme si, že v trojúhelníku APC je

$$\angle ACP = 45^\circ, \quad (1)$$

$\sphericalangle APC > 90^\circ$ (neboť vedlejší úhel $\sphericalangle APD < 90^\circ$ je totiž ostrý úhel pravoúhlého trojúhelníku APD , kde $\sphericalangle D = 90^\circ$); proto je úhel

$$\sphericalangle PAC < 45^\circ. \quad (2)$$

Množinou všech bodů C v polorovině γ , o nichž platí (1), je kruhový oblouk $\widehat{AP}$ se středovým úhlem $ASP = 270^\circ$, kde $S \equiv B_1$; vzhledem ke vztahu (2) se však uplatní z tohoto oblouku $\widehat{AP}$ jen vnitřek oblouku $\widehat{PC}_2$. Avšak i krajní body C_2, P k tomu musíme přibrat vzhledem k oběma čtvercům $AB_1C_1D_1, AB_2C_2D_2$.

II. Nyní již snadno usoudíme, že hledané geometrické místo **N** bodů C uvedených v textu úlohy (tedy bez našich pomocných omezení) se skládá ze dvou množin **M**₁, **M**₂ navzájem souměrně sdružených podle přímky p , přičemž body množiny **M**₁ leží v polorovině γ a množina **M**₁ se skládá z bodů úhlu $\sphericalangle PAC_2$, od něhož musíme odejmout jednak body trojúhelníku AC_2P (kde $\sphericalangle P = 90^\circ$), s výjimkou vrcholů C_2, P , jednak body kruhové výseče o středu S , poloměru SP a středovém úhlu $\sphericalangle PSC_2 (= 90^\circ)$, přičemž však body výseč omezujícího kruhového oblouku $\widehat{PC}_2$ k množině **M**₁ patří. Hranici množiny **M** tedy tvoří souměrně sdružené kruhové oblouky $\widehat{PC}_2, \widehat{PC}_2'$ a souměrně sdružené polopřímky opačné k polopřímkám $C_2A, C_2'A$.

Obráceně, je-li C' libovolný bod právě popsané množiny **M**, dovedeme sestavit čtverec $AB'C'D'$, který obsahuje bod P . Úvaha je podobná jako na počátku řešení, stačí se omezit na bod C' z poloroviny γ . Úsečka AC' má jistě s obloukem $\widehat{PC}_2$ z předchozích úvah společný jediný bod C a k němu snadno sestojíme čtverec $ABCD$, na jehož straně CD leží bod P . Stejnolehlost o středu A

koefficientu $\frac{AC'}{AC} \geq 1$ převede čtverec $ABCD$ v hledaný čtverec $AB'C'D'$.

Tím je řešení provedeno.

3. Je daná sústava rovníc

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ bx + cy + az &= d, \\ cx + ay + bz &= d \end{aligned} \quad (1)$$

s neznámými x, y, z , v ktorej sú a, b, c, d dané reálne čísla také, že $a + b + c = 0$.

Určite všetky riešenia danej sústavy.

Riešenie. Sčítame všetky tri rovnice. Dostaneme

$$(a + b + c)x + (a + b + c)y + (a + b + c)z = 3d$$

čiže

$$0 = 3d.$$

Ak je $d \neq 0$, je sústava (1) neriešiteľná.

Ak je $d = 0$, dosadíme za c do prvých dvoch rovníc $c = -a - b$ (pretože $a + b + c = 0$); dostaneme

$$\begin{aligned} ax + by - (a + b)z &= 0, \\ bx - (a + b)y + az &= 0. \end{aligned}$$

Elimináciou z z týchto dvoch rovníc vyjde

$$x(a^2 + b^2 + ab) - y(a^2 + b^2 + ab) = 0. \quad (2)$$

Ak je $a = b = 0$, a teda tiež $c = 0$, vyhovujú rovniciam (1) všetky trojice čísel x, y, z . Ak je aspoň jedno z čísel a, b rôzne od nuly, je $a^2 + b^2 + ab \neq 0$. Ak je totiž $a = b (\neq 0)$, je $a^2 + b^2 + ab = 3a^2 \neq 0$; ak je $a \neq b$, potom je $a^2 + b^2 + ab = \frac{a^3 - b^3}{a - b} \neq 0$.

V rovnici (2) krátíme koeficientom $a^2 + b^2 + ab$ a vyjde $x = y$. Analogicky dostaneme $y = z, z = x$. V tomto prípade sú riešeniami sústavy (1) všetky trojice sebe rovných čísel.

Výsledok:

Prípád	Podmienka	Riešenie x, y, z
1	$a + b + c = 0,$ $a = b = c = 0, d = 0$	ľubovoľná trojica čísel
2	$a + b + c = 0, d = 0;$ aspoň jedno z čísel a, b, c je rôzne od nuly	ľubovoľná trojica sebe rovných čísel
3	$a + b + c = 0, d \neq 0$	žiadne

4. V rovině je dán rovnostranný trojúhelník PQR o straně délky p . Dále je dána úsečka délky d .

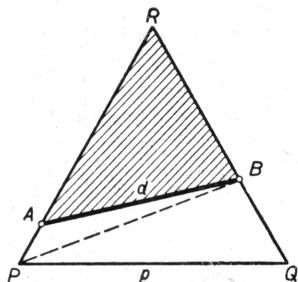
Na obvodu trojúhelníku PQR sestrojte body A, B takové, že platí $AB = d$ a že body A, B půlí obvod daného trojúhelníku PQR .

Vyšetřte podmínky řešitelnosti vzhledem k daným číslům d, p . (Pro konstrukci lze užít výpočtu.)

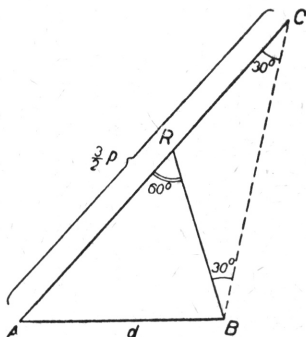
Řešení. Budiž AB úsečka žádaných vlastností; zvolme označení vrcholů daného trojúhelníku tak, aby bod A ležel na straně RP , bod B na straně RQ a aby bylo $RA \geq RB$ (obr. 31). Pak plyne z trojúhelníku PQR , že $PB \leq p$; dále plyne z trojúhelníku PRB , že $AB \leq p$ neboli

$$d \leq p. \quad (1)$$

Máme-li sestrojit body A, B , musíme sestrojit trojúhelník RAB , v němž je znám úhel $\sphericalangle ARB = 60^\circ$, protější strana $AB = d$ a součet obou zbývajících stran $AR + BR = \frac{3}{2}p$ (podle podmínky úlohy). Pro konstrukci



Obr. 31



Obr. 32

použijeme přenesení úsečky RB na polopřímku opačnou k polopřímce RA (viz obr. 32); tak dostaneme bod C , pro který platí $RC = RB$. Je tedy

$$AC = AR + RC = AR + BR = \frac{3}{2}p.$$

Protože je $RA \geq RB$, vyplývá z trojúhelníku ARB vztah pro úhly

$$\sphericalangle RBA \geq \sphericalangle RAB, \quad (2)$$

dále pak pro čtyřúhelník $ABQP$ dostaneme (viz obr. 31):

$$60^\circ + 60^\circ + 180^\circ - \sphericalangle RBA + 180^\circ - \sphericalangle RAB = 360^\circ,$$

$$\sphericalangle RAB + \sphericalangle RBA = 120^\circ *)$$

*) Tato rovnost platí, i když čtyřúhelník $ABQP$ přejde v trojúhelník.

a vzhledem k (2)

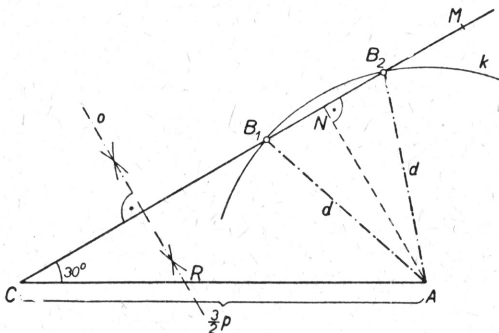
$$\angle RBA \geq 60^\circ. \quad (3)$$

V trojúhelníku ABC pak platí vzhledem k (3)

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABR + \sphericalangle RBC \geq 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ. \quad (4)$$

Konstrukce trojúhelníku ABC ze dvou stran a úhlu proti menší z nich ležícího je známa [skutečně je $AB < AC$, neboť platí (1)]. Kružnice $k \equiv (A; d)$ má s ramenem CM úhlu $\sphericalangle ACM = 30^\circ$ (viz obr. 33) společný bod jen v případě, že je

$$d \geq AN = \frac{1}{2}AC = \frac{3}{4}p; \quad (5)$$



Obr. 33

přítom N značí patu kolmice spuštěné z bodu A na přímku CM . Protne-li kružnice k polopřímku CM ve dvou bodech B_1, B_2 , má pro řešení význam jen jeden z nich (na obr. 33 bod B_1 , pro který platí $CB_1 < CB_2$), neboť podle (4) musí být $\sphericalangle ABC$ tupý nebo pravý.

Při pokračování konstrukce sestrojíme osu o úsečky CB_1 a určíme její průsečík R s polopřímku CA . Bod R leží

zřejmě vždy mezi body A , C . Aby bylo možné doplnit trojúhelník RPQ , je nutné a stačí, aby platil vztah

$$AR \leq p$$

neboli

$$CR \geq \frac{1}{2}p. \quad (6)$$

Upravíme nerovnost (6) tím, že vyjádříme CR ; zřejmě je

$$CB_1 = 2CR \cdot \cos 30^\circ \quad (7)$$

a dále z trojúhelníků ACN , AB_1N je

$$CB_1 = CN - B_1N = \frac{3}{2}p \cos 30^\circ - \sqrt{d^2 - \left(\frac{3}{4}p\right)^2}. \quad (8)$$

Spojíme-li (6), (7), (8), dostaneme

$$\frac{3}{2}p \cos 30^\circ - \sqrt{d^2 - \left(\frac{3}{4}p\right)^2} \geq p \cos 30^\circ$$

neboli

$$\sqrt{d^2 - \left(\frac{3}{4}p\right)^2} \leq \frac{1}{2}p \cos 30^\circ = \frac{1}{4}p\sqrt{3}. \quad (9)$$

Po umocnění a úpravě dostaneme z (9) vztah $d^2 \leq \frac{3}{4}p^2$ neboli

$$d \leq \frac{1}{2}p\sqrt{3}. \quad (10)$$

Spojením (5) a (10) vyjde podmínka řešitelnosti úlohy:

$$\frac{3}{4}p \leq d \leq \frac{1}{2}p\sqrt{3}.$$

6. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE C

1. Jestliže přirozené číslo n je druhou mocninou přirozeného čísla, potom součin dvou posledních cifer (dekadického zápisu) čísla n je číslo sudé. Dokažte.

Řešení. Položme $n = (10a + b)^2$, kde $a \geq 0$, $0 \leq b \leq 9$, a , b jsou celá čísla. Číslo a a předposlední cifra

čísla n jsou buď obě lichá, nebo obě sudá. Potom platí

$$n = 100a^2 + 20ab + b^2. \quad (1)$$

Je-li b sudé číslo, je věta správná. Je-li b liché ($b = 1$ nebo 3 nebo 5 nebo 7 nebo 9), končí b^2 lichou cifrou, počet d desítek čísla b^2 je sudý (0 nebo 2 nebo 4 nebo 8). Protože $20ab = (2ab) \cdot 10$, je podle (1)

$$n = 100a^2 + (2ab) \cdot 10 + (10d + l)$$

neboli

$$n = 100a^2 + (2ab + d) \cdot 10 + l,$$

kde l je liché, $2ab + d$ sudé. Tím je věta dokázána.

2. Je daný obdlžnik $ABCD$. Označme M pätu kolmice spustenej z bodu B na priamku AC .

a) Vypočítajte vzdialenosti AM , BM , CM , DM pomocou rozmerov $a = AB$, $b = AD$ daného obdlžnika.

b) Rozhodnite, či existuje taký obdlžnik $ABCD$, v ktorom platí $DM = 3BM$.

Riešenie (obr. 34). a) Označme rozmery obdlžnika $AB = a$, $BC = b$; ďalej označme body P , Q , R podľa obrázka. Podľa Euklidovej vety potom platí

$$AM = \frac{AB^2}{AC} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$CM = \frac{BC^2}{AC} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

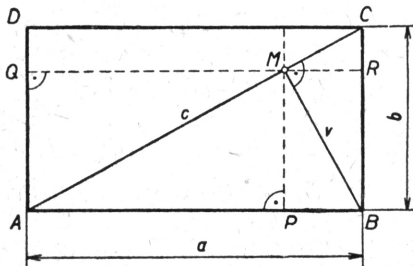
Zo vzorcov pre obsah trojuholníka ABC ďalej vyplýva

$$BM = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zostáva ešte určiť vzdialenosť DM . K tomu použijeme

trojuholník DMQ . Určíme

$$MP = \frac{AM \cdot BM}{AB} = \frac{a^3 b}{a(a^2 + b^2)} = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}.$$



Obr. 34

Ďalej je

$$\begin{aligned} DQ &= AD - AQ = AD - MP = \\ &= b - \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} = \frac{b^3}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Ďalej vypočítame z pravouhlého trojuholníka ABM

$$MQ = AP = \frac{AM^2}{AB} = \frac{a^4}{a(a^2 + b^2)} = \frac{a^3}{a^2 + b^2}.$$

Podľa Pythagorovej vety je

$$\begin{aligned} DM^2 &= DQ^2 + MQ^2 = \\ &= \frac{a^6 + b^6}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{(a^2 + b^2)(a^4 - a^2 b^2 + b^4)}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{a^4 - a^2 b^2 + b^4}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - 3a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Ak zavedieme označenie $AC = c$, $BM = v$, je $c^2 = a^2 + b^2$, $v = \frac{ab}{c}$; platí teda

$$DM^2 = c^2 - 3 \frac{a^2 b^2}{c^2} = c^2 - 3v^2.$$

b) Ak je $DM = 3BM$, je $\sqrt{c^2 - 3v^2} = 3v$ a obrátene. Umocnením tejto rovnosti dostaneme $c^2 = 12v^2$, $c = 2v\sqrt{3}$, čiže $c = \frac{2ab\sqrt{3}}{c}$, skadiaľ $c^2 = 2ab\sqrt{3}$ čiže

$a^2 - 2ab\sqrt{3} + b^2 = 0$. Položme $\frac{a}{b} = x$; potom pre pomer x rozmerov a, b dostaneme rovnicu

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0,$$

ktorú upravíme takto:

$(x - \sqrt{3})^2 - 3 + 1 = 0$ čiže $(x - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$. Z toho použitím vzorca pre rozdiel štvorcov dostaneme

$$(x - \sqrt{3} + \sqrt{2})(x - \sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0.$$

Tomuto vzťahu vyhovujú čísla:

$$x = \sqrt{3} - \sqrt{2}, \quad x = \sqrt{3} + \sqrt{2},$$

ktoré sú kladné. Máme teda dva typy obdĺžnikov. Jeden

typ má pomer $\frac{a}{b}$ rozmerov rovný číslu $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, druhý číslu $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Tieto čísla skutočne vyhovujú požiadavkám úlohy, ako sa ľahko presvedčíme skúškou.

3. Jsou dány tři lineární rovnice

$$px - 2y = 2p - 1,$$

$$2x + py = p - 1,$$

$$(p - 1)x + y = p + 1$$

s neznámými x, y .

Najděte všechna reálná čísla p , pro něž mají uvedené tři rovnice společné řešení; vypočtete tato řešení.

Řešení. a) Je-li x, y dvojice čísel, která jsou řešením všech tří rovnic, pak číslo x vyhovuje oběma rovnicím, které dostaneme, dosadíme-li za y z třetí rovnice do prvních dvou. Vyjde po úpravě

$$\begin{aligned}(3p - 2)x &= 4p + 1, \\ (p^2 - p - 2)x &= p^2 + 1.\end{aligned}\tag{1}$$

Znásobíme-li obě strany první rovnice (1) číslem $p^2 - p - 2$ a obě strany druhé rovnice číslem $3p - 2$, budou levé strany totožné; dostaneme tedy rovnost

$$(4p + 1)(p^2 - p - 2) = (p^2 + 1)(3p - 2).$$

Po vynásobení a úpravě vyjde

$$p^3 - p^2 - 12p = 0$$

neboli

$$p(p^2 - p - 12) = 0.\tag{2}$$

Trojčlen $p^2 - p - 12$ lze rozložit v součin dvojčlenů $p - 4$, $p + 3$. Užijeme-li tohoto rozkladu, uvedeme podmínku (2) na tvar

$$p(p - 4)(p + 3) = 0.\tag{3}$$

Dokázali jsme: Mají-li dané tři rovnice společné řešení, vyhovuje parametr p podmínce (3). Rovnici (3) však vyhovují jediné tři čísla: $p = 0$, $p = 4$ a $p = -3$. Jsou tedy možné nejvýše tři hodnoty parametru žádané vlastnosti.

b) Pro $p = 0$ dostaneme rovnice

$$-2y = -1, \quad 2x = -1, \quad -x + y = 1,$$

které mají skutečně společné řešení $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

Pro $p = 4$ mají dané rovnice tvar

$$4x - 2y = 7, \quad 2x + 4y = 3, \quad 3x + y = 5.$$

Řešením prvních dvou rovnic dostaneme $x = 1,7$, $y = -0,1$; toto řešení skutečně vyhovuje i třetí rovnici.

Pro $p = -3$ mají dané rovnice tvar

$$-3x - 2y = -7, \quad 2x - 3y = -4, \quad -4x + y = -2.$$

Řešením druhé a třetí rovnice dostaneme $x = 1$, $y = 2$; toto řešení skutečně vyhovuje i první rovnici.

4. Najdite všetky trojice prirodzených čísel, ktorých súčet sa rovná ich súčinu.

Riešenie. Ak označíme hľadané čísla x, y, z , môžeme podmienku úlohy vyjadriť takto:

$$x + y + z = xyz. \quad (1)$$

Označenie hľadaných troch prirodzených čísel môžeme zvoliť tak, že platí

$$0 < x \leq y \leq z. \quad (2)$$

Potom je $x + y + z \leq 3z$. Z danej rovnice (1) potom vyplýva podmienka $xyz \leq 3z$ čiže

$$xy \leq 3. \quad (3)$$

Podmienky (3) a (2) možno splniť len tromi spôsobmi:

a) $x = 1, y = 1$; b) $x = 1, y = 2$; c) $x = 1, y = 3$.

V prípade a) má rovnica (1) tvar $2 + z = z$ a je neriešiteľná.

V prípade b) má rovnica (1) tvar $3 + z = 2z$ a má koreň $z = 3$. Stadiaľ dostávame jedno riešenie úlohy

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3. \quad (4)$$

V prípade c) má rovnica (1) tvar $4 + z = 3z$ a má koreň $z = 2$, ktorý však nevyhovuje podmienke (2).

Úloha má teda jediné riešenie (4).

Všimnite si, že podstatné zjednodušenie pri riešení

úlohy vyplynulo z toho, že sme ohraňili neznáme x, y zhora podmienkou (3).

5. V rovině je dán trojúhelník ABC ; vně tohoto trojúhelníku jsou sestaveny čtverce $ABMN$, $BCPQ$ se středy O_1, O_2 .

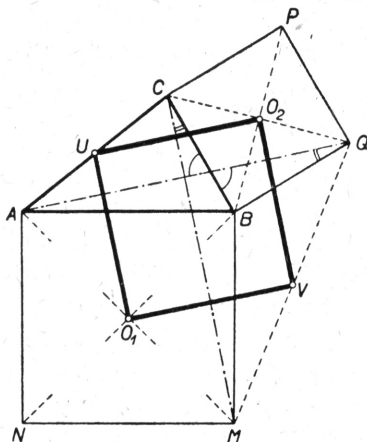
Dokažte, že středy úseček AC , MQ a body O_1, O_2 jsou vrcholy jistého čtverce.

Řešení (obr. 35). a) Předpokládejme, že je $\angle CBA < 90^\circ$. Označme U střed strany AC , V střed úsečky MQ . Úsečka UO_1 je střední příčkou trojúhelníku ACM , proto je

$$UO_1 \parallel CM, \quad UO_1 = \frac{1}{2}CM. \quad (1)$$

Obdobně je úsečka UO_2 střední příčkou trojúhelníku ACQ , proto je

$$UO_2 \parallel AQ, \quad UO_2 = \frac{1}{2}AQ. \quad (2)$$



Obr. 35

Podle věty *sus* plyne

$$\triangle ABQ \cong \triangle MBC. \quad (3)$$

Skutečně je $AB = BM$, $BQ = BC$, $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle MBC = \sphericalangle ABC + 90^\circ$. Podle (3) je dále $AQ = CM$, tudíž též

$$UO_1 = UO_2. \quad (4)$$

Obdobně jako dříve dokážeme z vlastností střední příčky, že platí

$$\begin{aligned} VO_2 &\parallel CM, & VO_2 &= \tfrac{1}{2}CM, \\ VO_1 &\parallel AQ, & VO_1 &= \tfrac{1}{2}AQ. \end{aligned} \quad (5)$$

Spojením vztahů (1), (2), (4), (5) dostaneme

$$UO_1 \parallel VO_2, \quad UO_2 \parallel VO_1, \quad UO_1 = UO_2 = VO_1 = VO_2,$$

tj. obrazec UO_1VO_2 je kosočtverec.

Protože trojúhelník BCM vznikne otočením trojúhelníku BQA o pravý úhel,*⁾ je $AQ \perp CM$, tudíž také $UO_1 \perp UO_2$, tj. rovnoběžník UO_1VO_2 je čtverec.

b) Je-li $\sphericalangle CBA > 90^\circ$, provede se důkaz jako v případě a).

c) Je-li $\sphericalangle CBA = 90^\circ$, je tvrzení zřejmě platné.

Tím je řešení provedeno.

6. V rovině je dán kruhový oblouk s krajními body A a B .

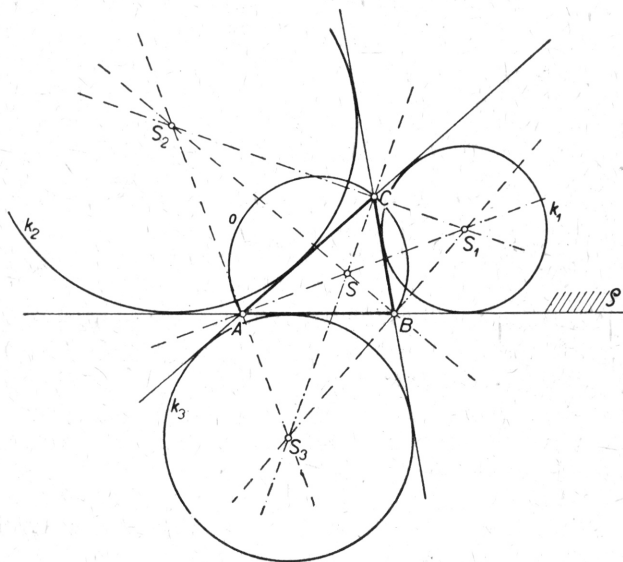
Vyšetřte geometrická místa středů kružnic vepsaných a vně vepsaných trojúhelníku ABC , jestliže bod C probíhá vnitřek daného oblouku.

Řešení (obr. 36). I. Budiž o daný oblouk $\widehat{AB}$, ρ polovina s hranicí AB , v níž leží oblouk o , C jeden jeho bod různý od A , B , dále bod S střed kružnice vepsané

*⁾ Odtud přímo plyne shodnost obou trojúhelníků.

trojúhelníku ABC a S_1, S_2, S_3 středy kružnic vně vepsaných tomuto trojúhelníku po řadě k stranám BC, CA, AB . Je zřejmé, že body S, S_1, S_2 leží v polorovině ϱ , bod S_3 v polorovině opačné k ϱ . Označíme-li vnitřní úhly trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α, β, γ , je

$$\sphericalangle SAB = \frac{1}{2}\alpha, \quad \sphericalangle SBA = \frac{1}{2}\beta;$$



Obr. 36

z trojúhelníku SAB pak plyne, že je

$$\sphericalangle ASB = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma. \quad (1)$$

Dále je

$$\sphericalangle S_2AC = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha;$$

proto platí

$$\sphericalangle S_2AB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + \alpha = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha.$$

Protože je $\sphericalangle S_2BA = \frac{1}{2}\beta$, dostaneme z trojúhelníku S_2AB vztah

$$\sphericalangle AS_2B = \frac{1}{2}\gamma. \quad (2)$$

Výměnou vrcholů A, B vyplývá z (2) vztah

$$\sphericalangle BS_1A = \frac{1}{2}\gamma. \quad (3)$$

Protože polopřímka AS_3 je osou vnějšího úhlu trojúhelníku ABC , je

$$\sphericalangle S_3AB = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$$

a obdobně

$$\sphericalangle S_3BA = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta.$$

Z trojúhelníku S_3AB pak dostaneme

$$\sphericalangle AS_3B = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma. \quad (4)$$

Probíhá-li bod C oblouk o , je — podle věty o obvodovém úhlu — velikost úhlu γ konstantní. Podle (1), (2), (3), (4) leží tedy

a) bod S na jistém oblouku o_0 sestrojeném nad tětívou AB v polorovině ϱ a daném velikostí obvodového úhlu $90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$;

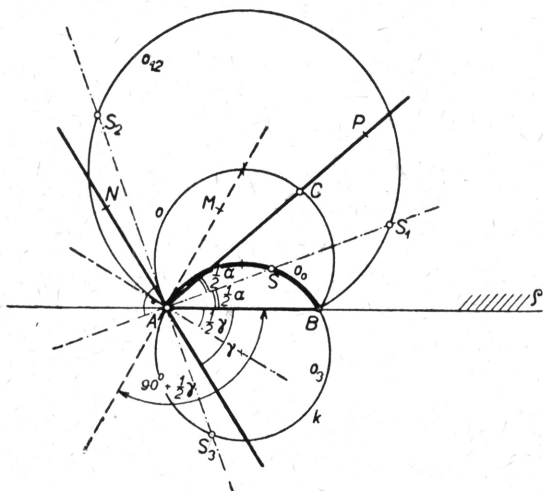
b) body S_1, S_2 na jistém oblouku o_{12} sestrojeném nad tětívou AB v polorovině ϱ a daném velikostí obvodového úhlu $\frac{1}{2}\gamma$;

c) bod S_3 na jistém oblouku o_3 sestrojeném nad tětívou AB v polorovině opačné k ϱ a daném velikostí obvodového úhlu $90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$.

Hledaná geometrická místa bodů náleží tedy uvedeným třem obloukům o_0, o_{12}, o_3 (viz obr. 37).

Poznámka. Je bezprostředně patrné, že oblouky o_0, o_3 tvoří dohromady kružnici k .

II. Zbývá zjistit, zda hledaná geometrická místa bodů jsou celé oblouky o_0 , o_{12} , o_3 (bez krajních bodů A , B) nebo jen jejich části, a které.

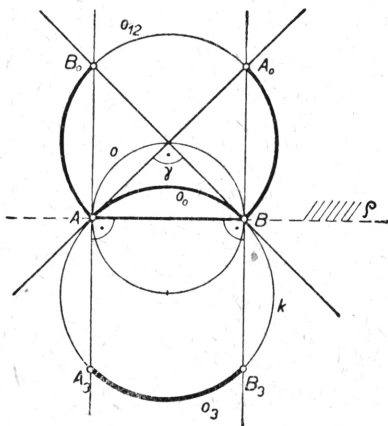


Obr. 37

Sestrojíme v bodě A tečnu ke kružnici k a na této tečně zvolíme v polorovině ϱ bod M . Pak je — jak známo — $\sphericalangle MAB = 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\gamma) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma < 90^\circ$. Je-li S libovolný bod oblouku o_0 různý od A , B , je $\sphericalangle SAB < \sphericalangle MAB < 90^\circ$; označíme $\alpha = 2\sphericalangle SAB$.

Dále sestrojíme v bodě A tečnu ke kružnici obsahující daný oblouk o a na této tečně zvolíme bod N uvnitř poloroviny ϱ ; snadno odvodíme, že je $\sphericalangle NAB = 180^\circ - \gamma$. Vedeme-li tedy v polorovině ϱ bodem A polopřímku AP tak, aby platilo $\sphericalangle PAB = \alpha$, protne polo-

přímka AP oblouk o v jistém bodě C různém od A, B . Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC má pak střed S (odůvodněte podrobně). To znamená, že celý oblouk o_0 (mimo body A, B) náleží hledanému geometrickému místu.

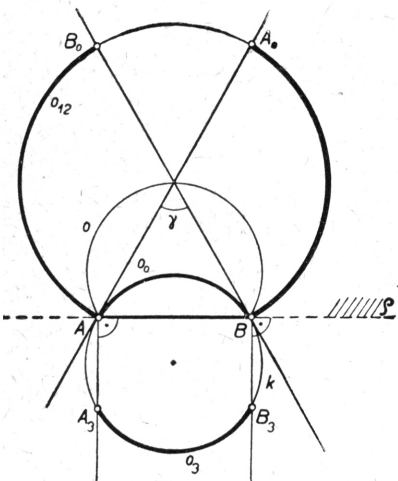


Obr. 38

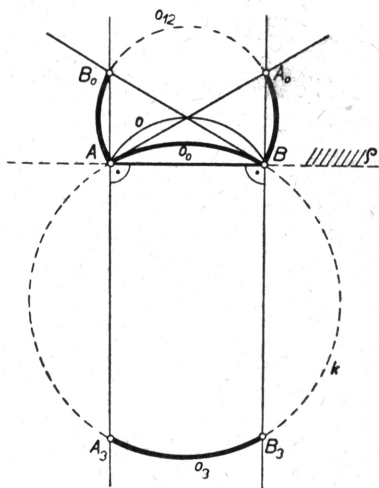
Středy S_1, S_2 kružnic vně vepsaných dostaneme jako průsečíky oblouku o_{12} s polopřímkami AS, BS . Hledané geometrické místo bodů obsahuje tedy jen ty části oblouku o_{12} , které jsou omezeny tečnami vedenými ke kružnici k v bodech A, B ; jsou to vnitřky oblouků AB_0, BA_0 (viz obr. 38).

Konečně bod S_3 dostaneme, vedeme-li bodem A kolmici k přímce AS a určíme její zbývající průsečík s kružnicí k . Hledané geometrické místo se skládá tedy

z té části $\widehat{A_3B_3}$ oblouku o_3 , která je omezena kolmicemi vedenými k přímce AB body A, B (body A_3, B_3 ke geometrickému místu nenáleží).



Obr. 39



Obr. 40

Na obr. 38 až 40 je sestrojeno geometrické miesto pro
 $\gamma < 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ a $\gamma > 90^\circ$.

7. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE C

1. Řešte rovnici

$$\left| \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9x + 20} \right| = 10.$$

Řešení. Platí $x^2 + 2x - 24 = (x + 6)(x - 4)$, $x^2 - 9x + 20 = (x - 5)(x - 4)$. Je-li x řešením dané rovnice, potom platí

$$\left| \frac{(x + 6)(x - 4)}{(x - 5)(x - 4)} \right| = 10. \quad (1)$$

Zloměk na levé straně (1) zkrátíme číslem $x - 4$ a dostaneme

$$\left| \frac{x + 6}{x - 5} \right| = 10. \quad (2)$$

Z rovnice (2) plyne $|x + 6| = 10|x - 5|$, neboli buď

$$x + 6 = 10(x - 5) \quad (3a)$$

nebo

$$x + 6 = 10(5 - x). \quad (3b)$$

Řešením rovnice (3a) dostaneme

$$x = \frac{56}{9}; \quad (4a)$$

řešením rovnice (3b) dostaneme

$$x = 4. \quad (4b)$$

Zkouška. Dosadíme kořen (4a) do rovnice (1) a zjistíme, že je splněna. Kořen (4b) nelze do (1) dosadit, neboť je $x - 4 = 0$. Daná rovnice má tedy jediné řešení (4a).

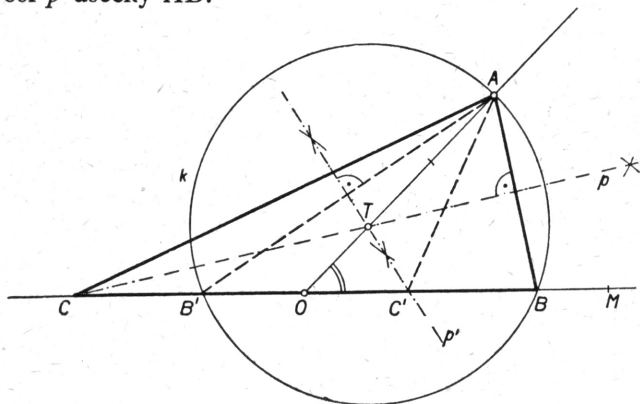
2. V rovine je daný uhol $\sphericalangle AOM$. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB taký, že úsečka AO je jeho ťažnica a body B, C ležia na priamke OM .

Riešenie (obr. 41). *Rozbor.* Nech je zostrojený hľadaný rovnoramenný trojuholník so základňou AB . Úsečka AO je jeho ťažnica, takže na nej nutne leží ťažisko T trojuholníka. Platí o ňom

$$AT = 2 \cdot TO. \quad (1)$$

Bodom T prechádza ťažnica CT , ktorá je podľa známej vety osou súmernosti hľadaného trojuholníka ABC . Pritom sú úsečky TA, TB súmerne združené podľa osi CT a platí o nich $AT = BT$. Z toho vyplýva *konštrukcia*:

Úsečku OA rozdelíme na tri zhodné úsečky a vyznačíme hľadané ťažisko T . Opíšme kružnicu $k \equiv (T, TA)$ a označíme B jeden z priesečníkov kružnice k s priamkou OM . Bod C je priesečníkom priamky OM a osi p úsečky AB .



Obr. 41

Správnosť konštrukcie vyplýva z vety, že ťažisko T trojuholníka ABC delí jeho ťažnicu AO tak, že platí vzťah (1). Trojuholník ABC je skutočne rovnoramenný, pretože bod C leží na osi strany AB , ale neleží na priamke AB .

Diskusia. Dokážeme, že kružnica k má s priamkou OM dva rôzne spoločné body.

Dôkaz. Polomer TA kružnice k je dvojnásobkom úsečky TO , ktorá je väčšia alebo rovná vzdialenosti bodu T od priamky OM . Preto priamka OM pretína kružnicu k a dostávame dva rôzne priesečníky B, B' kružnice k a priamky OM . Pretože je $OT < OB, OT < OB'$, leží bod O vo vnútri úsečky BB' . Bod O oddeľuje teda body B, B' a tým aj body C, C' . Ak napr. bod B leží na polpriamke OM , leží tam aj bod C' , zatiaľ čo body B', C ležia na polpriamke opačnej. Ak je napr. $B \equiv C'$, je $TB' = TB$ a bod O je stredom úsečky BB' , t. j. $TO \perp BB'$ čiže daný uhol $\sphericalangle AOM$ je pravý. Potom je v pravouhlom trojuholníku TCO prepona $TC = 2 \cdot TO$, a preto je $\sphericalangle OCT = 30^\circ$, takže uhol $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ a trojuholník ABC je rovnostranný. Pritom trojuholník $AB'C'$ s ním splýva. Ak daný uhol $\sphericalangle AOM$ nie je pravý, dostaneme dva rôzne trojuholníky $ABC, AB'C'$.

3. Žák měl vypočítat aritmetický průměr daných čísel a, b, c, d . Počítal jej tímto způsobem: Nejprve našel aritmetický průměr p čísel a, b , potom aritmetický průměr q čísel p, c a nakonec aritmetický průměr čísel q, d .

- Ukažte, že způsob, kterého žák použil, není správný.
- Jestliže však žák přesto dostal správný výsledek, splňovala čísla a, b, c, d nutně určitý vztah. Najděte jej.

Řešení. Označme

$$r = \frac{1}{4}(a + b + c + d) \quad (1)$$

hledaný aritmetický průměr čísel a, b, c, d a r' průměr, který vypočítal žák. Platí $p = \frac{1}{2}(a + b)$, $q = \frac{1}{2}(p + c) = \frac{1}{4}(a + b + 2c)$,

$$r' = \frac{1}{2}(d + q) = \frac{1}{8}(a + b + 2c + 4d). \quad (2)$$

Budiž

$$r' = r$$

neboli

$$\frac{1}{8}(a + b + 2c + 4d) = \frac{1}{4}(a + b + c + d),$$

tj.

$$a + b + 2c + 4d = 2a + 2b + 2c + 2d,$$

tj.

$$d = \frac{1}{2}(a + b). \quad (3)$$

Žák mohl tedy dostat správný výsledek jen za předpokladu, že daná čísla splňovala rovnost (3); jinak by dostal výsledek nesprávný. Proto postup výpočtu není správný.

Zkouška. Ze vztahu (2) po dosazení za d ze (3) dostaneme $r' = \frac{1}{8}[a + b + 2c + 2(a + b)] = \frac{1}{8}[3(a + b) + 2c]$. Ze vztahu (1) po dosazení za d ze (3) dostaneme $r = \frac{1}{4}[a + b + c + \frac{1}{2}(a + b)] = \frac{1}{8}[2(a + b) + 2c + (a + b)] = \frac{1}{8}[3(a + b) + 2c]$, takže žák skutečně za předpokladu, že platí (3), dostal správný výsledek.

4. V rovině je dána polokružnice s krajními body A, B . Dále je dáno kladné číslo $c < AB$.

Najděte geometrické místo průsečíků úhlopříček všech čtyřúhelníků $ABCD$, jejichž zbylé dva vrcholy C, D leží na dané polokružnici, a to tak, že strana CD má stálou velikost c .

Řešení (obr. 42). a) Označme S střed polokružnice o . Pro každou polohu tětivy CD konstantní délky je velikost 2φ středového úhlu $\sphericalangle CSD$ příslušného k menšímu oblouku CD táž; je tedy i

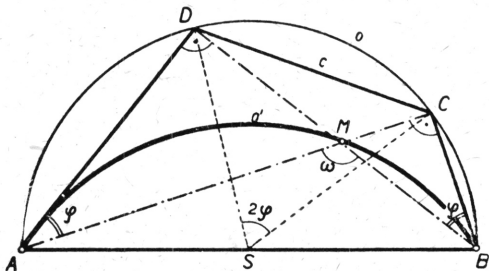
$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \varphi < 90^\circ \quad (1)$$

(obvodové úhly nad menším obloukem CD). Dále je

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = 90^\circ \quad (2)$$

(věta Thaletova).

je tedy $\omega = \varphi + 90^\circ < 180^\circ$ (úhel φ je totiž ostrý).



Obr. 42

Hledáme tedy, jaký útvar vyplní bod M , z něhož je vidět danou (pevnou) úsečku AB pod konstantním úhlem $\varphi + 90^\circ$. Podle známé věty je to kruhový oblouk o' o krajních bodech A, B (tyto body k nalezenému geometrickému místu bodů nepatří), přičemž leží v téže polorovině vyřezané přímkou AB jako daná polokružnice; oblouk přísluší k obvodovému úhlu velikosti $\varphi + 90^\circ > 90^\circ$, což je úhel tupý. Vyšetřovaný oblouk AB je tedy menší oblouk příslušné kružnice.

b) Zbývá zjistit, zda každý bod oblouku o' (mimo body A, B) náleží hledanému geometrickému místu.

Oblouk o' náleží jistě kružnici k' , jejíž střed leží v polovině opačné k ABC . Středový úhel nad tětivou AB v kružnici k' má velikost $180^\circ - 2\varphi$. Z toho snadno od-

vodíme, že tečna ke kružnici k' v bodě A svírá s přímkou AB ostrý úhel velikosti $90^\circ - \varphi$.

Zvolme nyní libovolný bod $M \neq A, B$ oblouku o' a označme C průsečík polokružnice o s polopřímkou AM . Podle předcházejícího je $\sphericalangle MAB < 90^\circ - \varphi$.

Z rovnoramenného trojúhelníku ACS dostaneme

$$\sphericalangle ASC = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle MAB > 2\varphi.$$

Lze tedy sestavit na polokružnici o mezi body C, A bod D tak, aby bylo $CD = c$, a zvolený bod M je průsečíkem úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$.

8. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE D

1. Je daná kružnice $k \equiv (S, r = 5 \text{ cm})$ a v nej tetiva AC délky 9 cm. Zostrojte rovnoramenný lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD tak, aby body B, D ležali na kružnici k a aby uhlopriečka AC rozpolovala jeden z uhlov lichobežníka $ABCD$.

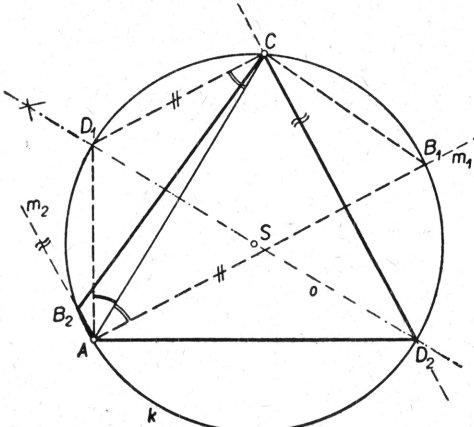
Riešenie. a) *Rozbor.* Predpokladajme, že je zostrojený taký lichobežník (napr. AB_1CD_1), ktorého uhlopriečka AC rozpoluje vnútorný uhol $\sphericalangle B_1AD_1$. Pretože je $AB_1 \parallel CD_1$ a body B_1, D_1 ležia v opačných polrovinách s hranicou AC , sú striedavé uhly $\sphericalangle B_1AC, \sphericalangle D_1CA$ zhodné. Okrem toho je podľa predpokladu

$$\sphericalangle B_1AC = \sphericalangle D_1AC.$$

Platí teda $\sphericalangle D_1AC = \sphericalangle B_1AC = \sphericalangle D_1CA$ a trojuholník ACD_1 je rovnoramenný so základňou AC . Vrchol D_1 leží teda na osi o úsečky AC .

b) *Konstruktoria a skúška* (obr. 43). Zostrojíme priesečníky D_1, D_2 osi o s kružnicou k a bodom A vedieme priamky $m_1 \parallel CD_1, m_2 \parallel CD_2$. Zistíme, že priamky m_1, m_2

..... $\lambda = 10^{-3}$ $\lambda = 10^{-1}$ $\lambda = 10^{-2}$ $\lambda = 10^{-1}$ $\lambda = 10^{-1}$



Obr. 43

a $\sphericalangle B_1AC$ sú striedavé a pretože platí $CD_1 \parallel AB_1$, je $\sphericalangle D_1CA = \sphericalangle B_1AC$. Polpriamka AC rozpoluje teda skutočne uhol $\sphericalangle B_1AD_1$, t. j. lichobežník AB_1CD_1 vyhovuje podmienkam úlohy. Analogický dôkaz platí aj pre lichobežník AB_2CD_2 .

c) Zostáva ešte rovnakým spôsobom zostrojiť tie lichobežníky, ktorých uhlopriečka AC rozpoluje uhol $\sphericalangle BCD$. Tie dostaneme zrejme predchádzajúcou konštrukciou, ak vymeníme body A, C (a potom ovšem aj body B, D). Zostrojíme ich teda ako lichobežníky súmerne združené

podľa osi o s obidvoma lichobežníkmi AB_1CD_1 , AB_2CD_2 .
Úloha má teda štyri rôzne riešenia.

2. Najdte všechna trojčiferná (přirozená) čísla s touto vlastností: Napíšeme-li před hledané číslo stejnou cifru, jako je ta, která stojí na místě jeho jednotek, dostaneme čtyřčiferné číslo, které je o 18 menší než sedminásobek hledaného čísla.

Řešení. Trojčiferné číslo v dekadickém vyjádření lze symbolicky zapsat (xyz) , kde o celých číslech x, y, z platí $0 < x \leq 9$ (dané číslo je trojčiferné), $0 \leq y \leq 9$, $0 \leq z \leq 9$. Číslo (xyz) zapíšeme jako trojčlen

$$100x + 10y + z.$$

Nové číslo lze symbolicky psát $(zxyz)$ nebo jako čtyřčlen

$$1000z + 100x + 10y + z,$$

po úpravě

$$100x + 10y + 1001z. \quad (1)$$

Sedminásobek hledaného čísla je $700x + 70y + 7z$; odečteme-li od něho číslo 18, dostaneme číslo dané výrazem (1), tj. platí

$$700x + 70y + 7z - 18 = 100x + 10y + 1001z$$

neboli

$$600x + 60y = 994z + 18. \quad (2)$$

Pomocí této rovnice a vztahů

$$0 < x \leq 9, \quad 0 \leq y \leq 9, \quad 0 \leq z \leq 9$$

určíme v několika krocích čísla x, y, z .

[1] Levá strana rovnice (2) je dělitelná deseti, proto i pravá strana $994z + 18$ je tímto číslem dělitelná. Ale $994z + 18 = (990z + 10) + (4z + 8)$; proto číslo $4z + 8$ musí končit nulou. Dosazujeme do výrazu $4z + 8$

za z postupně čísla $0, 1, \dots, 9$; číslo $4z + 8$ končí nulou jen pro $z = 3$ nebo $z = 8$. Pro $z = 8$ však dostaneme z (2)

$$60x + 6y = 797;$$

této rovnici nevyhovují žádná nezáporná celá čísla x, y menší než 10. Je tedy nutně $z = 3$.

[2] Do (2) dosadíme $z = 3$, takže napravo dostaneme 3000 a obě strany rovnice znásobíme číslem $\frac{1}{60}$; dostaneme rovnici

$$10x + y = 50. \quad (3)$$

[3] Čísla $10x, 50$ jsou dělitelná deseti; proto jednociferné číslo y musí být též dělitelné deseti neboli je nutně $y = 0$. Pak (3) zní

$$10x = 50;$$

odtud plyne $x = 5$.

Hledané číslo (když vůbec existuje) musí být rovno 503.

Číslo, které z něho vznikne, je 3503 a skutečně platí $503 \cdot 7 = 3521 = 3503 + 18$.

Tím je řešení provedeno.

3. Kvádr $ABCD A' B' C' D'$ (o stěně $ABCD$, přičemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) má dané rozměry $a = AB$, $b = AD$, $c = AA'$. Rovnoběžné roviny BDA' a $CB'D'$ oddělují od daného kváдру dva čtyřstěny $ABDA'$ a $C'CB'D'$.

Vyjádřete objem zbylého tělesa pomocí a, b, c . Narysujte jeho síť pro $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm.

Řešení (obr. 44). a) Objem čtyřstěnu vypočítáme podle vzorce pro objem V jehlanu, tj. $V = \frac{1}{3}Pv$, kde P je obsah podstavy a v velikost příslušné výšky. Považujme ve čtyřstěnu $ABDA'$ trojúhelník ABD za podstavu, pak ve $v = AA' = c$. Obsah pravoúhlého trojúhelníku ABD

o odvěsnách a, b je $P = \frac{1}{2}ab$.
Proto je

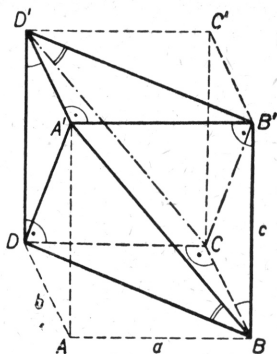
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ab \cdot c = \frac{1}{6}abc.$$

I čtyřstěn $C'CB'D'$ má objem $\frac{1}{6}abc$, takže součet obou objemů je $\frac{1}{3}abc$. Protože objem daného kvádry je abc , je objem zbylého tělesa

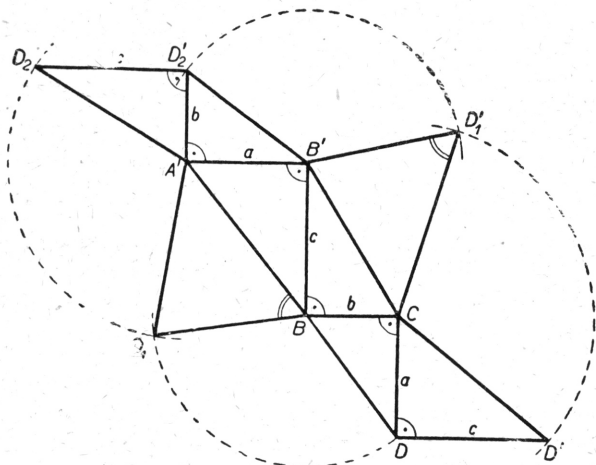
$$abc - \frac{1}{3}abc = \frac{2}{3}abc.$$

Výsledek: Objem zbylého tělesa je $\frac{2}{3}abc$.

b) Síť zbylého tělesa je v obr. 45.



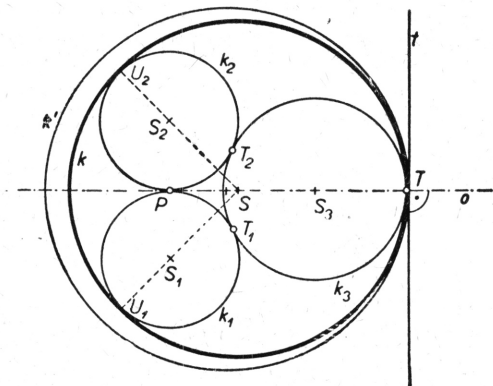
Obr. 44



Obr. 45

4. Jsou dány tři kružnice $k_1 \equiv (S_1, 4 \text{ cm})$, $k_2 \equiv (S_2, 4 \text{ cm})$, $k_3 \equiv (S_3, r)$, z nichž každá se dotýká vně obou zbývajících kružnic.

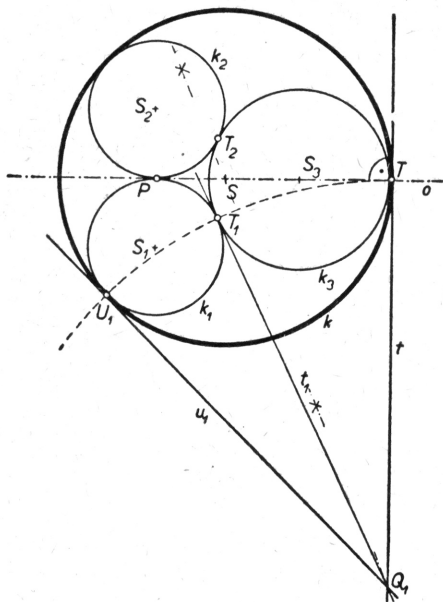
Sestrojte všechny kružnice, které mají s každou z daných kružnic vnitřní dotyk. Provedte diskusi řešitelnosti vzhledem k poloměru r .



Obr. 46

Řešení (obr. 46). a) Označme P bod dotyku kružnic k_1 , k_2 , o jejich společnou tečnu. Protože pro střed S_3 kružnice k_3 platí $S_1S_3 = S_2S_3 = r + 4$, leží bod S_3 na přímce o . Budiž $k \equiv (S; x)$ hledaná kružnice; pro její střed platí $S_1S = S_2S = x - 4$ (kružnice k_1 , k_2 se totiž dotýkají zevnitř kružnice k). Oba středy S_3 , S leží tedy na přímce o a na ní leží i bod dotyku T kružnic k , k_3 ; je to ten z průsečíků přímky o a kružnice k_3 , který má větší vzdálenost od bodu P . Tečna t kružnice k_3 v bodě T je společnou tečnou kružnic k , k_3 .

b) Názor napovídá, že existuje-li řešení úlohy, je jen jediné; to snadno dokážeme. Necht' jsou k, k' dvě různá řešení (viz obr. 46) a necht' kružnice k má menší poloměr



Obr. 47

než k' . Kružnice k, k' se dotýkají obě v bodě T kružnice k_3 i navzájem; leží tedy kružnice k (až na bod T) uvnitř k' . Protože obě kružnice k_1, k_2 leží (až na dotykové body U_1, U_2 , které nesplynou s T) uvnitř k , leží celé uvnitř k'

a tedy žádná z nich se nemůže dotýkat kružnice k' . Kružnice k' není proto řešením úlohy.

c) Nyní sestrojíme řešení úlohy (obr. 47). V bodě dotyku T_1 kružnic k_1, k_3 vedeme jejich společnou tečnu t_1 a najdeme její průsečík Q_1 s tečnou t . Bod Q_1 vždy vznikne, protože bod T_1 neleží na přímce o , a není tudíž $t_1 \parallel t$. Z bodu Q_1 vedeme zbývající tečnu u_1 ke kružnici k_1 a označíme U_1 její bod dotyku.

Nyní sestrojíme kružnici k , která se dotýká v bodě T přímky t a prochází bodem U_1 . Kružnice k se dotýká zřejmě kružnice k_3 v bodě T . Mimo bod T existuje na kružnici k jediný bod, jehož vzdálenost od bodu Q_1 je rovna Q_1T ; je to bod dotyku druhé tečny vedené z Q_1 ke kružnici k . Tento bod je však U_1 ; přímka $Q_1U_1 \equiv u_1$ je tedy tečnou kružnice k , tj. kružnice k_1, k se dotýkají v bodě U_1 . Protože útvar složený z kružnic k, k_1, k_2, k_3 je souměrný podle přímky o , dotýká se k také kružnice k_2 . Je tedy kružnice k řešením úlohy.

d) Úloha má řešení právě tehdy, je-li úhel TQ_1U_1 , obsahující bod S_1 , dutý. To nastane právě tehdy, je-li vzdálenost přímky t od bodu P menší než 4 neboli platí-li

$$PT > 4.$$

5. Výraz

$$V = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

rozložte na součinitele a potom určíte všechny trojice čísel x, y, z , pro které $V = 0$.

Riešenie. Platí postupne

$$\left. \begin{aligned} V = & x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + \\ & + y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3 + \\ & + z^3 - 3z^2x + 3zx^2 - x^3. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Stadiaľ vypočítame

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}V &= -xy(x-y) + z(x^2 - y^2) - z^2(x-y) = \\ &= (x-y)[-xy + (xz + yz) - z^2] = \\ &= (x-y)[y(z-x) - z(z-x)] = \\ &= (x-y)(y-z)(z-x).\end{aligned}$$

Je teda

$$V = 3(x-y)(y-z)(z-x),$$

čo po vynásobení súhlasí s výrazom V [viď (1)].

$V = 0$ práve vtedy, keď platí aspoň jedna z rovností:

$$x - y = 0, \quad y - z = 0, \quad z - x = 0$$

čiže

$$x = y \quad \text{alebo} \quad y = z \quad \text{alebo} \quad z = x.$$

Výsledok: $V = 0$ práve vtedy, keď sú hoci dve z čísel x, y, z sebe rovné.

6. Je dán pravoúhlý trojuholník ABC s odvesnami veľkostí $a = BC, b = AC$. Označme D bod, ve ktorom se priamky AB dotýka kružnice trojuholníku ABC vepsaná.

a) Vypočítajte pomocí čísel a, b veľkosť polomeru kružnice danému trojuholníku ABC vepsané.

b) Dokažte, že obsah trojuholníku ABC je roven obsahu obdĺžniku o rozměrech DA, DB .

Řešení (viz obr. 48). O délkách tečen vedených ke kružnici $k \equiv (S, r)$, vepsané danému trojuholníku ABC , platí (přitom x je délka tečen vedených z bodu C ke k a zároveň poloměr vepsané kružnice):

$$AD = b - x = AC - x, \quad (1)$$

$$BD = a - x = BC - x. \quad (2)$$

a) Přitom o délce c přepony AB platí

$$c = BD + AD,$$

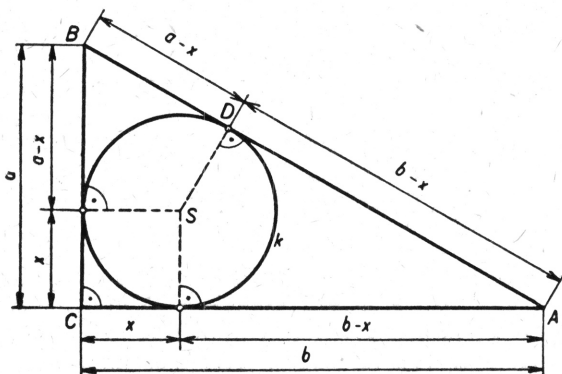
neboli

$$c = a - x + b - x;$$

odtud vypočteme číslo x :

$$x = \frac{1}{2}(a + b - c) = \frac{1}{2}(a + b - \sqrt{a^2 + b^2}), \quad (3)$$

což jsme měli vypočítat.



Obr. 48

b) Ze vztahů (1), (2) dostaneme

$$AD = b - x = b - \frac{1}{2}(a + b - c) = \frac{1}{2}(-a + b + c), \quad (3)$$

$$BD = a - x = a - \frac{1}{2}(a + b - c) = \frac{1}{2}(a - b + c); \quad (4)$$

vedle toho podle věty Pythagorovy platí

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (5)$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned}AD \cdot BD &= \frac{1}{4}[c - (a - b)][c + (a - b)] = \\&= \frac{1}{4}[c^2 - (a - b)^2] = \\&= \frac{1}{4}[a^2 + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)] = \\&= \frac{1}{4} \cdot 2ab = \frac{1}{2}ab,\end{aligned}$$

což je skutečně obsah daného trojúhelníku.

9. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D

1. Při omezování odběru elektrického proudu v době špiček se 35 závodů zavázalo k snížení spotřeby. Celkem byly tři skupiny těchto závodů: V první skupině dosáhl každý závod snížení na 50 % svého pravidelného odběru, ve druhé skupině snížil každý závod spotřebu o $\frac{1}{3}$ a ve třetí skupině o $\frac{1}{4}$ pravidelného odběru.

Tím se dosáhlo úspory 40 % celkové pravidelné spotřeby. Přitom v první skupině byl počet závodů dvojnásobný než ve druhé. Kolik závodů bylo v každé skupině, jestliže každý z těchto 35 závodů měl původně stejnou pravidelnou spotřebu proudu?

Řešení. Označme $m \neq 0$ (v kWh) množství elektrického proudu, odbírané pravidelně každým z uvedených 35 závodů v době špičky. Dále označme $2x$, x , y počet závodů v jednotlivých skupinách, takže platí

$$3x + y = 35. \quad (1)$$

Spotřeba závodů v době špičky pak v jednotlivých skupinách je:

$$m \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x = mx; \quad \frac{2}{3}mx; \quad \frac{3}{4}my.$$

Celková spotřeba v době špičky je $\frac{3}{5}m(2x + x + y) = \frac{3}{5}m(3x + y)$. Přitom podle textu platí

$$mx + \frac{2}{3}mx + \frac{3}{4}my = \frac{3}{5}m(3x + y).$$

Po znásobení obou stran této rovnice číslem $\frac{60}{m}$ dostáváme postupně

$$\begin{aligned} 60x + 40x + 45y &= 36(3x + y), \\ 9y &= 8x, \\ y &= \frac{8}{9}x. \end{aligned} \quad (2)$$

Po dosazení výsledku (2) do (1) dostáváme postupně

$$\begin{aligned} 3x + \frac{8}{9}x &= 35, \\ x &= 9; \end{aligned}$$

odtud a ze (2) obdržíme

$$y = 8.$$

Odpověď. V první skupině bylo 18, ve druhé 9 a ve třetí 8 závodů.

Zkouška. V době špičky závody jednotlivých skupin spotřebovaly:

$$m \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 = 9m; \quad \frac{2}{3}m \cdot 9 = 6m; \quad \frac{3}{4}m \cdot 8 = 6m,$$

takže celková spotřeba v době špičky podle toho byla $(9 + 6 + 6)m = 21m$. Na druhé straně podle textu úlohy celková spotřeba byla $\frac{3}{5}m \cdot (18 + 9 + 8) = 21m$, což souhlasí.

2. V rovině je dána úsečka AM a uvnitř této úsečky bod V .

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB tak, aby úsečka AM byla jeho výškou a bod V průsečíkem výšek. Stanovte podmínku řešitelnosti.

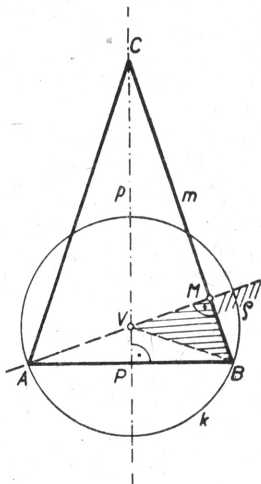
Narýsujte, je-li $AM = 82$ mm, $AV = 45$ mm.

Řešení (obr. 49). *Rozbor.* Označme M, N, P paty výšek vedených body A, B, C v hledaném trojúhelníku. Přímka $CP \equiv p$ je osou souměrnosti tohoto trojúhelníku,

a proto je $VB = VA$. V pravoúhlém trojúhelníku VBM (je $\sphericalangle M = 90^\circ$) tedy známe odvěsnu VM a přeponu VB . Odtud *konstrukce*:

Označme o jednu z polorovin vyřatých přímkou AM a v ní nad úsečkou VM jako odvěsnu sestrojíme pravoúhlý trojúhelník VBM , kde $\sphericalangle M = 90^\circ$ a $VB = VA$. Bod C je průsečík přímek m, p , kde $m \equiv MB$, p je osa úsečky AB . Tím je sestrojen hledaný trojúhelník ABC , který splňuje požadavky úlohy.

Důkaz. Podle konstrukce je VAB rovnoramenný trojúhelník o základně AB a o ose p , která prochází bodem V . Bod C podle konstrukce leží na ose p úsečky AB a na přímce m , kde $m \not\equiv p$, a proto trojúhelník ABC existuje a je rovnoramenný. Podle konstrukce je $AM \perp BC$, $CP \perp AB$, takže bod V je v trojúhelníku ABC průsečíkem výšek. Tím je důkaz proveden.



Obr. 49

Diskuse. Řešitelnost úlohy zřejmě závisí na možnosti sestrojení pravoúhlého trojúhelníku VBM s přeponou VB , která je v pravoúhlém trojúhelníku největší stranou, takže nutně musí být $VB > VM$ neboli $VA > VM$. Jestliže tento vztah platí, dovedeme trojúhelník VBM sestrojit, neboť pak je přímka m sečnou kružnice $k \equiv (V; VA)$. V pravoúhlém trojúhelníku ABM (kde $\sphericalangle M = 90^\circ$) je úhel $\sphericalangle B$ ostrý, a proto je $\sphericalangle VPB + \sphericalangle PBM < 180^\circ$,

takže podľa Euklidova axiómu se priamky p , m protínajú v bode C .

Pri umluvené volbe poloroviny ϱ dostaneme jediný trojuholník ABC ; jeho obraz v súmernosti o ose AM je druhé riešenie. Tyto trojuholníky splynú, jestliže je AM osa úsečky BC neboli je-li ABC rovnostranný trojuholník; to zrejme nastane práve tehdy, je-li $AV = 2 \cdot VM$.

3. Nájdite všetky prirodzené čísla deliteľné ôsmimi, ktorých ciferný súčet v desiatkovej sústave je sedem a súčin ich číslic je šesť.

Riešenie. Hľadané číslo je deliteľné ôsmimi, a preto je nutne párne. Na konci môže mať len cifru 2 alebo 6 (pri cifrách 0, 4, 8 by bol súčin cifier iný ako 6). Vytvárajme súčiny hľadaných cifier tak, aby boli rovné číslu 6 a aby ich súčet bol 7 (buď je jedna cifra 6; ak nie, je nutne jedna cifra 2):

Prípad [1]: Platí $6 = 6 \cdot 1$; prípad [2]: Platí $6 = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$.

Iné prípady nie sú možné. Zostavujme z cifier, ktoré sme tu dostali, príslušné čísla:

Prípad [1]. Číslo 16 vyhovuje požiadavkám úlohy; číslo 61 nie.

Prípad [2]. Máme zostaviť všetky štvorciferné čísla z cifier 1, 1, 2, 3, pričom na mieste jednotiek musí byť cifra 2 a čísla majú byť deliteľné ôsmimi. Stačí teda uvažovať o tých posledných trojčísliach, ktoré končia dvojkou a sú deliteľné ôsmimi.

Nech na mieste desaťtisíciek je cifra:

a) 3; potom máme jediné posledné trojčíslenie: 112. Hľadané číslo je 3112 a vyhovuje požiadavkám úlohy:

je deliteľné ôsmimi a platí:

$$3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 6, \quad 3 + 1 + 1 + 2 = 7.$$

b) 1; potom máme tieto posledné trojčísli: 132, 312. Z nich vyhovuje 312 a číslo 1312 vyhovuje požiadavkám úlohy, pretože je deliteľné ôsmimi a platí $1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$, $1 + 3 + 1 + 2 = 7$.

Výsledok: Požiadavkám úlohy vyhovujú práve tri čísla, a to: 16; 1312; 3112.

4. V rovine sú dané dve kružnice $k_1 \equiv (S_1; 25 \text{ mm})$, $k_2 \equiv (S_2; 25 \text{ mm})$; pričom vzdialenosť $S_1S_2 = 120 \text{ mm}$.

Narysujte všetky kružnice, ktoré majú s každou z daných kružníc k_1 , k_2 vonkajší dotyk a zároveň sa dotýkajú priamky S_1S_2 . Vypočítajte polomery zostrojených kružníc.

Riešenie (obr. 50). Nech je $k \equiv (S; r)$ hľadaná kružnica. Podľa podmienok úlohy je $S_1S = S_2S = r + 25$; preto bod S leží na osi m úsečky S_1S_2 . Os m prechádza stredom M úsečky S_1S_2 . Tento bod je bodom dotyku kružnice k a priamky S_1S_2 , pretože je $S_1S_2 \perp SM$. Vypočítajme polomer r kružnice k . Z pravouhlého trojuholníka S_1MS vyplýva podľa Pythagorovej vety $S_1S^2 = S_1M^2 + SM^2$ čiže

$$(r + 25)^2 = 60^2 + r^2, \quad (1)$$

pretože $S_1M = 60 \text{ (mm)}$. Z rovnice (1) vypočítame

$$r = 59,5 \text{ (mm)}.$$

Konštrukciu prevedieme na základe výpočtu: Na priamke m zostrojíme oba body S , S' , pre ktoré platí $MS = MS' = r$. Kružnice $k \equiv (S; r)$, $k' \equiv (S'; r)$ sú riešením úlohy, pretože sa dotýkajú priamky S_1S_2 (v bode M) a každej z kružníc k_1 , k_2 . Z (1) totiž vyplýva, že $S_1S = S_2S = S_1S' = S_2S' = r + 25$.

The diagram shows a horizontal dashed line m . Above it, a solid circle k is tangent to m at point M . Below m , there are two circles k_1 and k_2 tangent to m at points S_1 and S_2 respectively. A point S is located above m , from which dashed lines connect to S_1 , S_2 , and M . The distances SS_1 and SS_2 are labeled r . A dashed line bs passes through S . A point P is located below m , from which dashed lines connect to S_1 , S_2 , and M . An angle at P is marked with an arc. The diagram illustrates the geometric construction of a circle k tangent to a line m and two circles k_1 and k_2 .

SP tak, aby platilo $SP = SS_1$, vznikne rovnoramenný trojuholník S_1PS so základňou S_1P . Vrchol S je priesečníkom priamky m a osi o úsečky S_1P . Os o vieme zostrojiť, pretože vieme zostrojiť bod P . Je to bod polpriamky opačnej k MS , pre ktorý platí $MP = 25$ mm.

V. Zpráva o páté mezinárodní matematické olympiádě

1. Pořadatelem V. mezinárodní matematické olympiády (V. MMO) byla v roce 1963 polská vědecká matematická společnost *Towarzystwo Matematyczne*. Program spojený s vlastní soutěží trval od pátku 5. července 1963 do neděle 14. července 1963. Československá delegace, která se skládala z osmi žáků, vedoucího delegace a pedagogického průvodce, přijela do Varšavy 5. července 1963 o 8.30 hod. VEČ a odcestovala 14. července 1963 o 4.15 hod. VEČ z Vratislavi do vlasti. Naše žakovská delegace byla vybrána z vítězů XII. ročníku československé celostátní matematické olympiády.

Soutěže se účastnilo celkem 8 socialistických zemí a každá byla zastoupena osmi žáky, takže celkový počet účastníků byl 64. Vedoucími delegací a pedagogickými průvodci podle jednotlivých zemí byly tyto osoby:

BLR (Bulharsko): *prof. A. Mateev; S. Budurov*, inspektor ministerstva osvěty BLR.

ČSSR: *doc. Jan Vyšín; Fr. Zitek* CSc.

SFRJ (Socialistická federativní republika Jugoslávie): *prof. M. Dajovićová; asistent M. Marjanović*.

MLR (Maďarsko): *prof. E. Hódi; redaktor T. Bakos*.

NDR: *prof. W. Engel; doc. H. Titze*.

PLR (Polsko): *Mgr. A. Makowski; Mgr. K. Wiśniewski*.

RLR (Rumunsko): *prof. G. D. Simionescu*.

SSSR: *doc. A. Morozovová; pedagog I. S. Petrakov*.

Předsedou polského přípravného komitétu

V. MMO byl známý *prof. St. Straszewicz*, jednatelem pak *prof. Mieczysław Czyżykowski*, oba z Varšavy. Profesor Straszewicz zároveň předsedal mezinárodní komisi soutěže (MK), jejímiž členy byli vedoucí delegací a jejíhož zasedání se účastnili i pedagogičtí průvodci.

Přípravný komitét vypracoval návrh na dvě šestice soutěžních úloh; k tomu užil textu úloh, které mu na jaře roku 1963 jednotlivé zúčastněné země zaslaly (z ČSSR bylo zasláno pět úloh). Ve dnech 4.—6. července 1963 pak MK vybrala šest soutěžních úloh, z nichž jedna je československého původu. Přitom byl zároveň stanoven maximální počet bodů pro klasifikaci jednotlivých úloh (žák mohl získat maximálně 40 bodů).

Neděle 7. července byla věnována jednak výletu do okolí Varšavy, jednak prohlídce historických pamětihodností města. V pondělí 8. července odjely delegace do Vratislavi, kde byly ubytovány v internátě Inspekce práce. V úterý 9. července dopoledne byl první soutěžní den. Ve středu 10. července měli žáci volno, kdežto vedoucí delegací a pedagogičtí průvodci prováděli hodnocení žákovských řešení; večer pro ně uspořádali profesori vratislavské university večeri. Ve čtvrtek 11. července dopoledne byl druhý soutěžní den; dva jugoslávští žáci pracovali svá řešení v nemocnici vzhledem k jejich virovému onemocnění. Hodnocení žákovských řešení skončilo v pátek 12. července 1963 v 16.00 hod. Hned nato o 18. hod. se konalo závěrečné zasedání MK a schváleno hodnocení prací tak, jak se na tom dohodli vedoucí delegací s koordinátory; funkci koordinátorů konali členové Mezinárodní komise spolu s pedagogickými průvodci. Byl stanoven tento počet bodů pro udělení cen: první cena: 35—39 bodů (40 bodů nikdo

nezískal); druhá cena: 28—34 bodů; třetí cena: 21 až 27 bodů.

Čs. žáci získali jednu první cenu (*Josef Daneš* — 35 bodů) a jednu třetí cenu (*Jaroslav Zemánek* — 23 bodů). V příloze č. 1 uvádíme jmenný seznam vítězů V. MMO.

V tabulce č. 1 je uveden celkový počet bodů, které získali jednotliví žáci a jednotlivá družstva celkem; v tabulce č. 2 uvádíme, kolik bodů získali jednotliví čs. žáci za každou ze šesti soutěžních úloh. V příloze II uvádíme texty a nástin řešení šesti soutěžních úloh; za každou úlohou v závorce je uvedena země, která úlohu zadala, a dále maximální počet bodů, které při řešení úlohy mohl žák získat.

Na závěr zasedání MK poděkoval *prof. Straszewicz* všem delegátům za jejich přátelskou spolupráci; *prof. Simionescu* pak poděkoval jménem zahraničních delegací hostitelům za družné přijetí.

V sobotu 13. července měli účastníci volno. Závěrečné slavnostní vyhlášení vítězů se konalo toho dne o 15.30 hod. v historické síni vratislavské radnice. Stalo se tak za předsednictví *prof. Straszewicze*. Hlavní projev k olympionikům měl *prof. Sikorski*, jako místopředseda Towarzystwa Matematycznego; mluvil o charakteru a významu matematiky. Po jeho projevu dostali žáci ceny a dárky. Jménem zahraničních delegací pak poděkoval *prof. E. Hódi*.

Závěrečný projev pronesl předseda Národní rady města Vratislavi *prof. Iwaskiewicz*. Poté se konala přátelská beseda, která skončila po 18. hod.

Tabulka č. 1
Celkový počet bodů, které získali žáci jednotlivých zemí

Země Žák číslo	BLR	ČSSR	SFRJ	MLR	NDR	PLR	RLR	SSSR
1	26	35	2	33	12	20	18	27
2	17	15	16	23	13	19	16	35
3	10	20	27	26	22	14	27	30
4	19	15	36	29	14	16	25	39
5	18	15	31	25	23	7	31	29
6	22	14	15	34	17	14	16	39
7	21	14	7	32	21	21	37	38
8	12	23	28	32	18	23	21	34
součet	145	151	162	234	140	134	191	271

Tabulka č. 2
Klasifikace řešení jednotlivých úloh čs. žáků
(v závorkách je uveden maximální počet bodů za dokonalé řešení úlohy)

Žák č.	Úloha č.						Získal celkem bodů (celkem max. 40 bodů)
	1 (6)	2 (7)	3 (7)	4 (6)	5 (6)	6 (8)	
1	6	7	5	5	6	6	35
2	4	3	0	1	0	7	15
3	3	7	1	0	5	4	20
4	4	5	0	3	0	3	15
5	2	3	2	2	1	5	15
6	2	4	0	2	0	6	14
7	2	5	0	1	0	6	14
8	5	5	5	0	1	7	23
celkem							151

Příloha I.

Jmenný seznam vítězů V. mezinárodní matematické olympiády

I. cena

G. Maloletkin (SSSR); *R. Sarkisjan* (SSSR); *A. Zajcev* (SSSR); *A. Tolpygo* (SSSR); *L. Zsido* (RLR); *F. Dacar* (SFRJ); *Ľ. Daneš* (ČSSR).

II. cena

V. Fišman (SSSR); *L. Lovász* (MLR); *F. Szidarovszky* (MLR); *L. Gerencsér* (MLR); *Ľ. Pelikán* (MLR); *I. Boljevski* (SFRJ); *G. Lusztig* (RLR); *A. Zvjagincev* (SSSR); *P. Fazekas* (MLR); *S. Smirnov* (SSSR); *P. Petek* (SFRJ).

III. cena

K. Andreev (SSSR); *G. Eckstein* (RLR); *M. Mršević* (SFRJ); *G. Corradi* (MLR); *V. Zaimov* (BLR); *S. Grigorescu* (RLR); *E. Makai* (MLR); *A. Mate* (MLR); *R. Riedel* (NDR); *B. Wajnryb* (PLR); *Ľ. Zemánek* (ČSSR); *S. Bilcev* (BLR); *U. Kühler* (NDR); *G. Gancev* (BLR); *H. Schwarz* (NDR); *T. Spircu* (RLR); *H. Toruńczyk* (PLR).

2. Všimněme si stručně soutěžních úloh i nesnází, s nimiž žáci při jejich řešení museli zápasit.*)

K jednotlivým úlohám poznamenáváme stručně toto: Úlohy č. 1, 2, 4 byly vhodné pro soutěž. Přitom úloha

*) Texty a řešení soutěžních úloh jsou uvedeny v příloze II.

č. 4 si vyžadovala rozklad mnohočlenu třetího stupně, jehož jeden kořen byl znám. Tato látka není v osnovách většiny zúčastněných zemí; avšak podle mínění vedoucích delegátů by měl každý olympionik nabýt potřebných znalostí toho druhu z vlastního studia. Úloha č. 3 sváděla žáky k tomu, aby používali intuitivních prvků (žáci nebyli s to matematicky zvládnout pojem konvexního mnohoúhelníku); cosi podobného bylo i při úloze č. 2. Úloha č. 5 vyžadovala určitého speciálního obratu, načež řešení bylo zcela krátké; to si však vyžadovalo jistou zkušenost a vynalézavost. Úloha č. 6 měla dlouhý text (dala se totiž nesnadno formulovat); sváděla k experimentálnímu řešení a vyžadovala obšírný výklad; to působilo nesnáze při hodnocení a koordinaci klasifikace (podobná nesnáz byla i při úloze č. 2).

3. K výkonům žáků v průběhu soutěže poznamenáváme toto: Všeobecně lze říci, že např. žáci sovětsí byli mnohem pohotovější než naši. Je to především proto, že byli ze speciálních tříd a dovedli řešit úlohy podstatně rozličnými metodami. Při úloze č. 4 se např. ukázaly základní nedostatky při eliminaci neznámých z většího počtu rovnic. Obratnost řešitelů se např. jasně projevovala při řešení úlohy č. 2, kde u mnohých řešitelů chyběl důkaz. Úloha č. 5 mnoho neukázala; většina žáků ji snadno rozřešila pomocí vhodného obratu, avšak mnozí přes značnou námahu nedospěli ke kladnému závěru. Při úloze č. 6 asi žádný z řešitelů neodvodil jistou větu o permutacích, jak to předpokládalo autorské řešení; většinou se řešila experimentálně a tu ovšem záleželo na tom, aby řešitel provedl zručným způsobem analýzu.

Posuzujeme-li československé družstvo, pak jen asi polovina žáků měla skutečně mezinárodní úroveň, kdežto

druhá polovina nebyla na soutěž patřičně připravena. Náš nejlepší žák zřejmě způsobil, že jsme se jako celek nedostali na poslední místo. Soutěž je závodem jednotlivců, ale přesto výkony celého družstva ukazují na kvalitu a připravenost nejlepších mladých matematiků té které země. A tak při porovnávání vidíme, že všichni žáci ze SSSR a MLR získali ceny, žáci z RLR až na jednoho. Zatímco průměrný počet bodů na jednoho sovětského žáka je 34, připadá na našeho jen 19; jako celek jsme se umístili téměř na spodní hranici výkonů.

Uveďme přehledně nejzákladnější a nejtypičtější nedostatky většiny našich žáků: malá znalost metod řešení, nedostatek pohotovosti zvolit správnou metodu; nedostatečná zručnost v úpravách výrazů a malá znalost školské algebry; nedostatečná znalost provádění rozboru (dichotomické třídění); žáci „odvodili“ pomocné věty, které zřejmě neplatí, a užívali jich při řešení; malá zručnost v řešení geometrických polohových úloh.

Uvedené neznalosti netkví v nedostatku nadání, ale v nedostatečné přípravě žáka. Vlekou se pak v průběhu jeho celého studia a ani nejlépe organizovaná příležitostná školení (přípravné přednášky, soustředění olympioniků před odjezdem na MMO) nemohou nahradit soustavné a pečlivé vedení žáka učitelem po celou dobu jeho studia. V zahraničí zřejmě věnují nejlepším mladým matematikům mnohem větší pozornost než u nás; pečují o ně soustavně organizátoři soutěže i vysokoškolští pracovníci. Naším žákům zatím chybí určitá samostatnost, jsou zvyklí plnit své povinnosti poněkud formálně a nejsou vychováni k tomu, aby sami intenzívně usilovali o to, aby nabyli co nejhlubších znalostí v matematice vlastním úsilím. K těmto závěrům naši žáci sami dospěli při diskusích se zahraničními žáky, u nichž obdivovali nejen

hloubku a šířku vědomostí, ale i vážnost, s jakou jsou upjati na studium matematiky.

Pro nás z předchozího vyplývá, že musíme hledat cesty, jak máme žáky vést odpovědně, plánovitě a soustavně, aby si zvykali na poctivou práci, aby sami v sobě potlačovali jakoukoli polovičatost a plně si uvědomovali, že jejich úkolem ve škole je uvědoměle a usilovně studovat. Čím dříve se nám podaří vnést do myslí našich žáků tyto zásady, tím dříve překonáme nesnáze, které dnes máme při výchově mladých kádří.

Příloha II.

Soutěžní úlohy

z V. mezinárodní matematické olympiády

1. Najděte všechny reálné kořeny rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

kde p je reálný parametr. (ČSSR — max. 6 bodů)

Řešení. Danou rovnici upravíme na tvar

$$2\sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{x^2 - p}$$

a obě strany této rovnice umocníme dvěma; vyjde po úpravě

$$2x^2 + (p - 4) = -2x\sqrt{x^2 - p}.$$

Po dalším umocnění a úpravě dostaneme:

$$4(4 - 2p)x^2 = (p - 4)^2. \quad (1)$$

Je-li daná rovnice řešitelná, je i rovnice (1) řešitelná; proto je $p \neq 2, 4$ [v případě $p = 4$ dá (1) kořen $x = 0$, který nevyhovuje rovnici (1)]. Je-li $p \neq 2, 4$, plyne z (1) $4 - 2p > 0$ neboli $p < 2$. V úvahu pak přichází kořen

rovnice (1) daný vzorcem

$$x = \frac{|p - 4|}{2\sqrt{4 - 2p}}, \quad (2)$$

neboť z dané rovnice vyplývá, že x musí být nezáporné číslo. Je ovšem ještě třeba provést zkoušku. Vypočteme

$$x^2 - p = \frac{(p - 4)^2}{4(4 - 2p)} - p = \frac{(3p - 4)^2}{4(4 - 2p)};$$

odtud

$$\sqrt{x^2 - p} = \frac{|3p - 4|}{2\sqrt{4 - 2p}}.$$

Dále vypočteme

$$x^2 - 1 = \frac{(p - 4)^2}{4(4 - 2p)} - 1 = \frac{p^2}{4(4 - 2p)};$$

odtud

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{|p|}{2\sqrt{4 - 2p}}.$$

Kořen (2) bude tedy splňovat danou rovnici právě pro ty hodnoty p , pro něž bude platit

$$|3p - 4| + 2|p| = |p - 4|. \quad (3)$$

Při řešení rovnice (3) rozlišíme čtyři intervaly:

- a) $p \leq 0$,
- b) $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$,
- c) $\frac{4}{3} \leq p \leq 4$,
- d) $p \geq 4$.

V případě a) má rovnice (3) tvar $-3p + 4 - 2p = 4 - p$ a má jediné řešení $p = 0$. V případě b) má rovnice (3) tvar $-3p + 4 + 2p = 4 - p$ a vyhovuje jí

kterékoli p z tohoto intervalu. V případě c) má rovnice (3) tvar $3p - 4 + 2p = 4 - p$ a má jediné řešení $p = \frac{4}{3}$. Konečně v případě d) má rovnice (3) tvar $3p - 4 + 2p = p - 4$ a vyhovuje jí jediné číslo $p = 0$.

Výsledek *zkoušky*: jediný možný kořen (2) vyhovuje dané rovnici jen v případě, že jsou splněny nerovnosti $p < 2$ a $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$. Podmínka řešitelnosti tedy je

$$0 \leq p \leq \frac{4}{3}.$$

2. Je dán bod A a úsečka BC . Určete geometrické místo všech bodů v prostoru, které jsou vrcholy pravých úhlů, jejichž jedno rameno obsahuje bod A a druhé rameno má s úsečkou BC společný aspoň jeden bod.

(SSSR — max. 7 bodů)

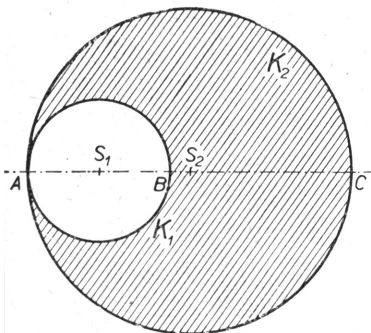
Řešení (jednoho ze sovětských účastníků). Je zřejmé, že bod A náleží vyšetřovanému geometrickému místu $\mathbf{M}$. Je-li $X \neq A$ bod útvaru $\mathbf{M}$, pak rovina ϱ kolmá k přímce $p \equiv AX$ a procházející bodem X má s úsečkou BC aspoň jeden společný bod Y . Obráceně: vedeme-li libovolným bodem Y úsečky BC rovinu ϱ kolmou k libovolné přímce p procházející bodem A , pak průsečík X roviny ϱ s přímkou p náleží útvaru $\mathbf{M}$.

Všecky body X útvaru $\mathbf{M}$ ležící na pevné přímce p procházející bodem A dostaneme, vedeme-li příslušné roviny ϱ všemi body Y úsečky BC . Průsečíky X přímky p s rovinami ϱ buď splynou v jediný bod, nebo vyplní úsečku omezenou průsečíky přímky p s rovinami β, γ k ní kolmými, vedenými body B, C .

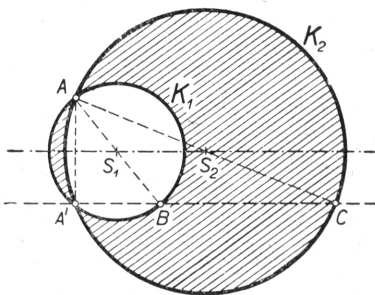
Vedeme-li ke všem přímkám p příslušné roviny β , vyplní příslušné body X kulovou plochu $\mathbf{K}_1$, sestrojenou nad průměrem AB . (Je-li $A \equiv B$, redukuje se tato plocha na jediný bod A .) Obdobně: vedeme-li ke všem přímkám p příslušné roviny γ , vyplní příslušné body X kulovou

plochu K_2 , sestavenou nad průměrem AC . (Je-li $A \equiv C$, redukuje se tato plocha na jediný bod A .)

Útvar M popíšeme takto: skládá se z obou kulových ploch K_1, K_2 a ze všech bodů prostoru, které leží vně jedné z nich a uvnitř druhé.



Obr. 51



Obr. 52

Příklady: Leží-li bod A uvnitř úsečky BC , skládá se útvar M z obou koulí určených plochami K_1, K_2 . Leží-li bod A na přímce BC mimo úsečku BC , vznikne útvar M rotací vyšrafovaného obrazce (i s hranicí) kolem přímky BC (viz obr. 51). Obdobně se vytvoří útvar M , když bod A neleží na přímce BC (viz obr. 52); v tomto případě je osou rotace osa úsečky AA' , kde A' je pata kolmice spuštěné z bodu A na přímku BC .

3. Konvexní n -úhelník, jehož po sobě následující strany mají délky $a_1, a_2, \dots, a_n$ má tyto vlastnosti:

a) všechny jeho vnitřní úhly jsou shodné;

b) pro délky jeho stran platí nerovnosti

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n. \quad (1)$$

Pak je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Dokažte.

(MLR — max. 7 bodů)

Řešení (autorské). Označme $P_1 P_2 \dots P_{n-1} P_n$ daný konvexní n -úhelník; přitom platí $P_i P_{i+1} = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ ($P_{n+1} \equiv P_1$). Myšlenka důkazu je v tom, že se pokoušíme sestrojít kružnici opsanou n -úhelníku (ukáže se, že n -úhelník je pravidelný), a to tak, že vycházíme postupně ze všech jeho stran.

Nad stranou $P_i P_{i+1}$ jako základnou sestrojíme rovno-ramenný trojúhelník $P_i P_{i+1} S_i$ tak, aby úhel $\angle P_i S_i P_{i+1}$ proti základně měl velikost $\frac{360^\circ}{n}$; trojúhelník sestrojíme

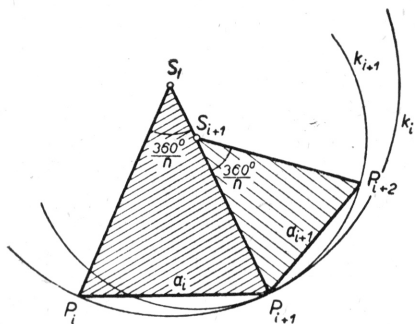
v té polorovině s hranicí $P_i P_{i+1}$, v níž leží daný n -úhelník (n -úhelník je podle předpokladu konvexní). Kružnice $k_i \equiv (S_i; S_i P_i)$ by měla být kružnicí n -úhelníku opsanou.

Vyšetříme vzájemnou polohu kružnic k_i, k_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n, k_{i+1} \equiv k_1$). Je-li $a_i = a_{i+1}$ neboli $P_i P_{i+1} = P_{i+1} P_{i+2}$, splynou body S_i, S_{i+1} , a tedy i kružnice k_i, k_{i+1} .

Je-li $a_i > a_{i+1}$, leží bod S_{i+1} mezi S_i, P_{i+1} (viz obr. 53), kružnice k_1, k_{i+1} mají pak vnitřní dotyk v bodě P_{i+1} , a to tak, že k_{i+1} leží (s výjimkou bodu P_{i+1}) uvnitř k_i . Z předchozího vyplývá, že kruh k_{i+1} náleží kruhu k_i ($i = 1, 2, \dots, n$), tj., že kruh k_n náleží kruhu k_1 . Nyní provedeme nepřímý důkaz. Necht' mezi vztahy (1) platí aspoň v jednom případě nerovnost. Pak kruh k_n leží uvnitř k_1 s možnou výjimkou jediného bodu, totiž bodu P_n .*) To znamená, že bod $P_1 \neq P_n$ leží zároveň

*) Ta by nastala v případě, kdyby platilo $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} > a_n$.

na kružnici k_1 a zároveň uvnitř k_1 (na k_n). Tím je nalezen spor s předpokladem; závěr: platí $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, jak jsme měli dokázat.



Obr. 53

4. Určete všechna řešení x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 soustavy rovnic

$$\left. \begin{aligned} x_5 + x_2 &= yx_1, \\ x_1 + x_3 &= yx_2, \\ x_2 + x_4 &= yx_3, \\ x_3 + x_5 &= yx_4, \\ x_4 + x_1 &= yx_5, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

kde y je parametr.

(SSSR — max. 6 bodů)

Řešení. Eliminujeme nejprve x_5 z první, čtvrté a páté rovnice; dostaneme novou soustavu

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= y(x_1 - x_4), \\ x_4 + x_1 &= y(yx_1 - x_2), \\ x_1 + x_3 &= yx_2, \\ x_2 + x_4 &= yx_3; \end{aligned}$$

po úpravě

$$\left. \begin{aligned} yx_1 - x_2 + x_3 - yx_4 &= 0, \\ (1 - y^2)x_1 + yx_2 + x_4 &= 0, \\ x_1 + x_3 &= yx_2, \\ x_2 + x_4 &= yx_3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Nyní eliminujeme z první, druhé a čtvrté rovnice soustavy (2) neznámou x_4 ; vyjde

$$\begin{aligned} yx_1 - x_2 + x_3 - y^2x_3 + yx_2 &= 0, \\ (1 - y^2)x_1 + yx_2 + yx_3 - x_2 &= 0, \\ x_1 + x_3 &= yx_2; \end{aligned}$$

po úpravě

$$\left. \begin{aligned} yx_1 + (y - 1)x_2 + (1 - y^2)x_3 &= 0, \\ (1 - y^2)x_1 + (y - 1)x_2 + yx_3 &= 0, \\ x_1 + x_3 &= yx_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dále eliminujeme x_3 ; vyjde po úpravě

$$\left. \begin{aligned} (y^2 + y - 1)x_1 + (-y^3 + 2y - 1)x_2 &= 0, \\ (1 - y - y^2)x_1 + (y^2 + y - 1)x_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Rozložíme

$$-y^3 + 2y - 1 = (y^2 + y - 1)(1 - y); \quad (5)$$

soustava (4) přejde užitím (5) v soustavu

$$\left. \begin{aligned} (y^2 + y - 1)[x_1 - (y - 1)x_2] &= 0, \\ (y^2 + y - 1)(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

a) Je-li $y^2 + y - 1 \neq 0$, plyne z (6) $x_1 = x_2$, $x_1(2 - y) = 0$. Je-li $y \neq 2$, pak $x_1 = x_2 = 0$, a dále $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Toto řešení skutečně vyhovuje soustavě (1), jak ukazuje zkouška.

b) Je-li $y^2 + y - 1 \neq 0$, ale $y = 2$, je opět $x_2 = x_1$, a dále $x_3 = x_1$, $x_4 = x_1$, $x_5 = 2x_1 - x_2 = x_1$; číslo x_1 je možno volit libovolně, jak ukazuje zkouška.

c) Je-li $y^2 + y - 1 = 0$, tj. $y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$, lze zvolit x_1, x_2 libovolně, x_3, x_4, x_5 se určí ze soustavy (1) pomocí vztahů:

$$\begin{aligned}x_3 &= yx_2 - x_1, \\x_4 &= yx_3 - x_2 = (y^2 - 1)x_2 - yx_1, \\x_5 &= yx_4 - x_3.\end{aligned}$$

Zkouška se provede buď obrácením předchozího postupu, nebo dosazením.

Řešení lze zkrátit, odvodíme-li ze soustavy (1) další rovnici sečtením všech pěti rovnic.

5. Dokažte, že platí

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

(NDR — max. 6 bodů)

Řešení (vedoucího bulharské delegace). Důkaz se velmi zjednoduší, použijeme-li umělého obratu: levou stranu dokazované rovnosti znásobíme číslem

$$2\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{7}\right) = 2\cos \frac{\pi}{14}.$$

S použitím vzorce

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

dostaneme

$$\begin{aligned}2\cos \frac{\pi}{14} \left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right) &= \cos \frac{3\pi}{14} + \\+ \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{5\pi}{14} - \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} &= \\= \cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{2} &= \cos \frac{\pi}{14}.\end{aligned}$$

Je tedy

$$\cos \frac{\pi}{14} \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right) - 1 \right] = 0.$$

Protože je $\cos \frac{\pi}{14} \neq 0$, vyplývá odtud dokazovaná rovnost.

6. Soutěže se zúčastnilo pět žáků A, B, C, D, E . Kdosi předpověděl, že výsledné umístění bude $ABCDE$. Tato předpověď se však nesplnila: žádný soutěžící nebyl na předpověděném místě a žádná dvojice bezprostředně za sebou následujících soutěžících nebyla předpověděna správně.

Kdosi jiný předpověděl umístění $DAECB$. Tato předpověď byla správnější: právě dva soutěžící byli na předpověděných místech a právě dvě dvojice bezprostředně za sebou následujících soutěžících byly předpověděny správně.

Určete, jaké bylo skutečně výsledné umístění.

(MLR — max. 8 bodů)

Řešení. I. Úlohu lze řešit ryze experimentálně, tj. napsat všech 120 permutací pěti prvků a vyškrtat všechny nevyhovující. Zůstane jediná permutace

$$EDACB, \quad (1)$$

která je skutečně řešením úlohy (prvky C, B jsou na předpověděných místech, správně byly předpověděny sledy DA, CB).

Toto experimentální řešení trvá asi půl hodiny.

II. „Matematictější“ řešení (autorské) se opírá o tuto snadno odvoditelnou pomocnou větu **V**:

Nechť permutace $XYZTU$ (pěti prvků) má vzhledem k permutaci $KLMNP$ tento vztah: právě dva z prvků K, L, M, N, P jsou na týchž místech a právě dvě dvojice bezprostředně za sebou jdoucích prvků (tj. KL, LM, MN, NP) jsou zachovány.

Pak je buď $X = K, Y = L$, nebo $T = N, P = U$.

Důkaz pomocné věty V. Experimentálně zjistíme, že permutace $XYZTU$ nemůže mít žádný z tvarů

$K.M..; K..N.; K...P; .LM..;$
 $.L.N.; .L...P; ..MN.; ..M.P.$

Zbývají tedy jediné permutace, v nichž první dva nebo poslední dva prvky zůstávají na svých místech.

III. Podle pomocné věty **V** má v našem případě hledaná permutace tvar buď $DA...$, nebo $...CB$. V prvním případě jsou možnosti:

$\underline{DACBE}, \underline{DACEB}, \underline{DABCE}, \underline{DAEBC},$
 $\underline{DABEC}, \underline{DAEBC},$

z nichž žádná nevyhovuje (důvod vyznačen podtržením). Vyplývá to ze srovnání s první předpovědí.

V druhém případě jsou možnosti:

$\underline{ADECB}, \underline{AEDCB}, \underline{DAECB},$
 $\underline{EADCB}, \underline{DEACB}, \underline{EDACB}.$

Z nich první, druhá a pátá opět odpadají (důvod vyznačen podtržením), třetí je předpověděná permutace — proto také nevyhovuje. Čtvrtá permutace zachovává sled jen jediné dvojice CB ; proto také nevyhovuje.

Zbývá jen šestá permutace, která je skutečně řešením úlohy.

Jak je patrné, je toto řešení kombinací pokusů a deduktivních úvah, jichž se použilo k rychlejší eliminaci nevyhovujících permutací.

OBSAH

<i>I. K průběhu XII. ročníku Matematické olympiády</i>	<i>3</i>
<i>II. K výsledkům jednotlivých kol soutěže</i>	<i>13</i>
<i>III. Přípravné úlohy I. kola</i>	<i>26</i>
<i>IV. Řešení úloh ze soutěže</i>	
1. Úlohy I. kola kategorie A	30
2. Úlohy II. kola kategorie A	45
3. Úlohy III. kola kategorie A	55
4. Úlohy I. kola kategorie B	62
5. Úlohy II. kola kategorie B	77
6. Úlohy I. kola kategorie C	85
7. Úlohy II. kola kategorie C	97
8. Úlohy I. kola kategorie D	103
9. Úlohy II. kola kategorie D	113
<i>V. Zpráva o páté mezinárodní matematické olympiádě</i>	<i>119</i>

Edice Pomocné knihy pro žáky
Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. Jan Vyšín a Rudolf Zelinka

DVANÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1964 — Počet stran 137
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk
Technický redaktor: Jiří Krejsa

Z nové sazby písmem Plantin vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p.,
závod 4, Ostrovní 30, Praha 1 — 5,23 AA (text 4,54 AA, grafika
0,69 AA) — 5,50 VA — D-06*40373

Náklad 4 000 výtisků
Tematická skupina a podskupina 02/57

Cena brož. výtisku Kčs 3,50
63/II-13

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 45-0-06

14—911—64 Kčs 3,50

S P N

45-0-06

14-911-64 02/57
Kčs 3,50