

13. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 13. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1963-1964. 6. Mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404525>

Terms of use:

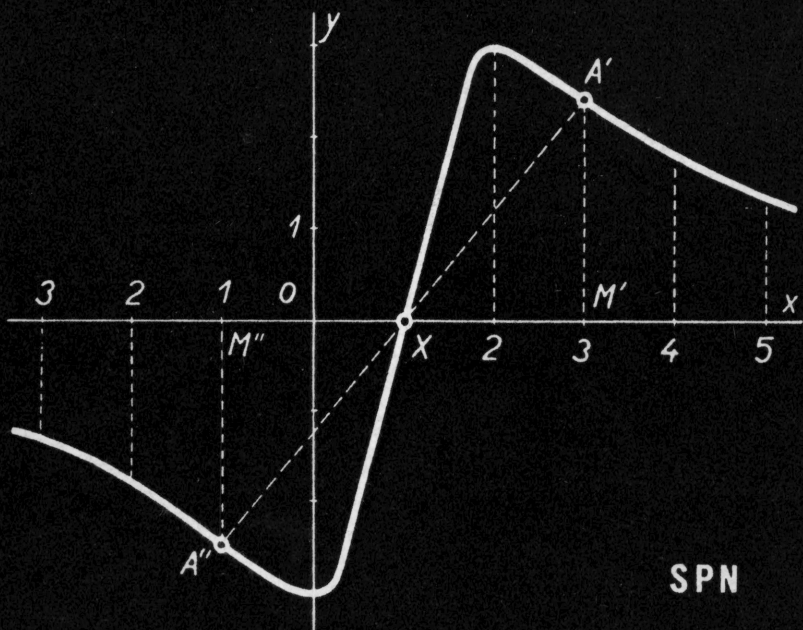
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

XIII. ročník matematické olympiády



SPN

**TŘINÁCTÝ
ROČNÍK
MATEMATICKÉ
OLYMPIÁDY**



Dne 19. května 1965 skonal náhle na Malé Fatře vědecký pracovník MÚ ČSAV s. Rudolf Zelinka, jeden ze zakladatelů naší celostátní Matematické olympiády. Od počátku této soutěže v r. 1951 až po letošní rok vykonával funkci jednatele ústředního výboru MO, byl hlavním autorem všech dosud vyšlých brožur Matematické olympiády, vedl čs. delegaci na pěti Mezinárodních matematických olympiádách, byl členem redakčního kruhu knižnice Škola mladých matematiků, v poslední době vedl kolektiv, který přeložil pro naše olympioniky z ruského originálu Lidského sbírku úloh — zkrátka na něm spočívala největší část všech úkolů spojených s naší celostátní Matematickou olympiádou, s níž jeho jméno nerozlučně srostlo.

Stovky učitelů a tisíce žáků, kteří znali jeho obětavou práci a ryzí charakter, vzpomínají s dojetím a vděčností na dílo, které s. Rudolf Zelinka vykonal na poli naší školské matematiky.

TŘINÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY



*Zpráva o řešení úloh ze soutěže,
konané ve školním roce 1963–1964*



ŠESTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

PRAHA 1965

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín a Rudolf Zelinka. Slovenské části textu přeložil Jozef Moravčík

Recenzovali doc. Josef Holubář, Vlastimil Macháček, dr. Zbyněk Nádeník CSc. a Miroslav Šisler CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1965

I. K průběhu XIII. ročníku Matematické olympiády

1. Soutěž se řídila organizačním řádem, uveřejněným ve Věstníku ministerstva školství a kultury, roč. XIX, str. 126—127, směrnice č. 37, z 30. 4. 1963. Žáci středních škol soutěžili ve třech kategoriích A, B, C (podle tříd sestupně), žáci 9. ročníků základních devítiletých škol byli zařazeni do kategorie D. Výjimek bylo málo (byly povolovány krajskými výbory soutěže); většinou takové, že žáci soutěžili ve vyšší kategorii, než do které svým studijním věkem patřili.

Pořadatelem soutěže bylo *ministerstvo školství a kultury* (MŠK) ve spolupráci s *Matematickým ústavem ČSAV* (MÚ ČSAV), s *Jednotou čs. matematiků a fyziků* (JČMF) a s *ústředním výborem Čs. svazu mládeže* (ÚV ČSM). Soutěž řídil ústřední výbor Matematické olympiády (ÚV MO); v krajích ji organizovaly krajské výbory MO (KV MO) a v okresech, pokud jde o kategorii D, okresní výbory MO (OV MO); rovněž v těchto výborech byli zástupci pořadatelských složek vedle zástupců odborů školství a kultury KNV, popř. ONV.

2. *Ústřední výbor Matematické olympiády* (adresa: Praha 1, Žitná 25, telefon: 22 66 01) byl složen takto:

Předseda: *akademik Josef Novák*, vedoucí vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze

Místopředseda: *Jan Vyšín*, docent matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze

Jednatel: *Rudolf Zelinka*, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze

Členové: *dr. František Běloun*, vedoucí matematického kabinetu Krajského pedagogického ústavu v Praze

Karel Hnyk, odborný asistent Pedagogické fakulty v Liberci

Miloš Jelínek, vědecký pracovník Pedagogického ústavu J. Á. Komenského ČSAV, Praha

doc. Josef Holubář, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze

František Hradecký, odborný asistent matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze

doc. dr. Karel Hruša, pracovník Ústavu pro učitelské vzdělání na KU v Praze

Ladislav Krkavec, ústřední inspektor ministerstva školství a kultury v Praze

dr. Milan Kolibiar, docent přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě

Josef Porcal, ústřední inspektor ministerstva školství a kultury, Praha

František Veselý, em. odborný asistent Vysoké školy strojní a elektrotechnické, Plzeň

dr. Miloslav Zedek, docent Palackého university v Olomouci

dr. Miroslav Fiedler, DrSc., vedoucí vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze

Náhradník: *Miroslav Šisler, CSc.*, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze

Členové-předsedové KV MO:

dr. Václav Pleskot, profesor ČVUT v Praze

dr. Václav Vilímek, odborný asistent katedry matema-

tiky a deskriptivní geometrie fakulty strojní ČVUT v Praze

František Vejsada, odborný asistent Vysoké školy zemědělské, České Budějovice

Karel Hnyk, odborný asistent Pedagogické fakulty v Liberci

Věra Rádllová, učitelka SVVŠ J. Fučíka, Plzeň

Jan Laštovka, vedoucí kabinetu matematiky Krajského pedagogického ústavu, Pardubice

Petr Benda, odborný asistent VUT, Brno

Josef Andrys, odborný asistent Pedagogické fakulty v Ostravě

dr. Milan Kolibiar, docent přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě

Ladislav Berger, odborný asistent katedry matematiky Vysoké školy dřevařské v Žilině

Gejza Grega, odborný asistent Pedagogické fakulty v Košicích

3. Jednotlivá kola byla organizována jako obvykle. První kolo probíhalo od října 1963 do konce února 1964. Žáci v něm řešili 6 úloh přípravných a 6 soutěžních. Opravu a hodnocení žákovských řešení prováděli učitelé matematiky ve spolupráci s referentem MO na škole a s ředitelem školy. Krajské a okresní výbory MO pak podle kvality žákovských řešení rozhodovaly o pozvání žáků na soutěž II. kola.

Texty úloh I. kola vyšly opět na zvláštním tištěném letáku v nákladu 15 000 exemplářů; mimoto byly uveřejněny v časopisech *Rozhledy matematicko-fyzikální* a *Matematika ve škole*.

Druhé kolo soutěže kategorií A až C se konalo v neděli 12. dubna 1964 v krajských městech, kategorie D v neděli 19. dubna 1964 v okresních městech; kromě těchto středisek se II. kolo konalo i v dalších místech, aby se žákům zkrátila cesta do místa soustředění.

Třetí kolo soutěže kategorie A se konalo v sobotu 16. května 1964 v Bratislavě.

4. Krajské výbory MO organizovaly ve spolupráci s pobočkami Jednoty čs. matematiků a fyziků pro účastníky olympiády řadu pomocných akcí, jako přípravné přednášky (až 8krát do roka), instruktáže, konzultace apod. Tyto akce měly povahu pracovních seminářů a byly zaměřeny na řešení matematických příkladů. Stejně jako v předchozích letech byly ústředními tématy těchto přednášek dělitelnost čísel, začátky teorie funkcí, řešení planimetrických a stereometrických úloh, hlavně konstruktivních a početních.

V průběhu školního roku 1963—64 vyšly ve druhém vydání v knižnici *Škola mladých matematiků* tyto publikace:

a) *Hradecký-Koman-Vyšín*, Několik úloh z geometrie jednoduchých těles. *Jaroslav Šedivý*, Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách (jako dvojčíslo)

b) *Šisler-Jarník*, O funkcích

Nově vyšly svazečky:

Jaroslav Šedivý, O podobnosti v geometrii

Jiří Váňa, O rovnicích s parametry

Jan Vyšín, Konvexní útvary

Jiří Sedláček, Faktoriály a kombinační čísla

Chystají se další svazky o geometrických místech v prostoru, o vícerozměrné geometrii aj.

Ministerstvo školství a kultury vykupuje část nákladu pro žákovské knihovny středních škol; tím je umožněno, že i starší svazky této knihovny se novým účastníkům soutěže dostanou do rukou. Některé přípravné přednášky jsou zaměřeny monotematicky a soustavně se opírají o příslušný svazek knihovničky; žáci jej studují samostatně a při instruktáži se řeší těžší úlohy zařazené ve svazku.

Celkem lze konstatovat, že se tato edice osvědčuje; knížky jsou psány přístupně, a kdyby čtenáři věnovali jejich studiu hlubší pozornost, mohla by nám tato knihovna dobře pomoci překonávat nesnáze, které máme s neuspokojivou připraveností našich žáků. Přáli bychom si, aby se knihovna stala hlavní pákou přípravy žáků v průběhu celého roku.

5. V rámci II. kola se ve vyšších kategoriích konaly besedy a konzultace; někde se při té příležitosti prováděla i analýza chyb, kterých se žáci dopustili při řešení úloh I. kola; tuto závažnou práci provádějí některé výbory soustavně v průběhu celého I. kola. Rovněž návštěvy divadel, výstav a průmyslových podniků se staly většinou nedílnou součástí programu, uskutečňovaného v rámci II. kola soutěže.

V sobotu 16. května 1964 byla u příležitosti III. kola, jehož soutěžní část se konala v budově *Slovenské vysoké školy technické*, uspořádána v slavnostní síni této školy beseda s účastníky soutěže. Přítomni byli zástupci *Slovenské národní rady*, *Slovenské akademie věd*, *středních a vysokých škol města Bratislavy* aj. Besedu řídil předseda ÚV MO akademik *Josef Novák*. K žákům promluvili vedoucí odboru pro školství a kulturu SNR *J. Bugala*, dále krajský školní inspektor v Bratislavě *M. Zöldy*, ústřední školní inspektor MŠK *Ladislav*

Krkavec, akademik *Štefan Schwarz*, profesor *J. Kotzig*, členové ÚV MO aj. Na závěr besedy se rozvinula diskuse, při níž olympionikům odpovídali přítomní zástupci vědeckých institucí, škol a školských orgánů a také pracovníci ÚV MO.

Večer navštívili účastníci olympiády představení ve Hviezdoslavově divadle v Bratislavě. Druhého dne, v neděli 17. května 1964 dopoledne, byl pro účastníky olympiády uspořádán autokarový zájezd na památný Děvín. Zevrubný historický výklad o tomto významném místě přítomným účastníkům podal vědecký pracovník Historického ústavu SAV *dr. Radkoš*. Téhož dne dopoledne se rozjeli účastníci III. kola do svých domovů.

Pracovní schůze ÚV MO se konaly 28. listopadu 1963 v Praze a 16. května 1964 u příležitosti III. kola v Bratislavě. Na této druhé schůzi se vedle zhodnocení průběhu a výsledků XIII. ročníku jednalo o závažných opatřeních k zabezpečení XIV. ročníku, dále se tu jednalo o edici Škola mladých matematiků, a zvláště pak o chystaných soustředěních žáků kategorie B (účastníků olympiády matematické nebo fyzikální).

Celostátní soustředění 92 žáků se uskutečnilo ve dnech 21. června až 11. července 1964 ve Žďáru nad Sázavou. Dopolední program byl věnován polovinou času matematice a polovinou fyzice; dopoledne se žáci rekreaovali v rámci sportovního a turistického programu, večer se konaly besedy s významnými vědeckými a vysokoškolskými pracovníky. Pro účely instruktáží byli žáci rozděleni do 4 tříd, zhruba po 25 účastnících. Souběžně s touto instruktáží se ve dnech 21. 6. až 27. 6. 1964 konalo soustředění 8 žáků vybraných pro účast na VI. mezinárodní olympiádě, která se počátkem července 1964 konala v Moskvě. Odbornou část instruktáží konali pracovníci vysokých škol a Matematického ústavu ČSAV.

Podobné instruktáže uspořádaly i některé krajské výbory MO ve spolupráci s odbory pro školství a kulturu KNV a s pobočkami Jednoty čs. matematiků a fyziků. Stalo se tak v krajích Středočeském, Západočeském, Severočeském, Východočeském, Severomoravském a Středoslovenském.

II. K výsledkům jednotlivých kol soutěže

1. Počet účastníků I. kola v kategoriích A až C vzrostl proti minulému ročníku někde až dvakrát; v některých krajích se prováděla intenzivní propagace (viz tabulku č. 1). Procento úspěšných řešitelů se blíží číslu 50 (je tedy zhruba stejné jako v minulém roce, tj. relativně příznivé, neboť toto procento v dlouhodobém pozorování kolísá mezi 25—35 %).

Zatím nemůžeme pozorovat zvláštní příznivý vliv soustředění vybraných žáků kategorie B XII. ročníku, které se konalo v létě 1963. Je však třeba konstatovat, že soustředěno bylo asi jen 10 % účastníků I. kola kategorie A XIII. ročníku; to je tedy dosti málo (část soustředěných žáků tvořili totiž účastníci jen fyzikální olympiády, a nikoli matematické).

Rovněž počet účastníků I. kola kategorie D je o víc než 20 % vyšší než v minulém ročníku. Procento úspěšných řešitelů je zhruba stejné; přitom je jako vždy vyšší než ve vyšších kategoriích. Viz tabulku č. 2.

2. Statistické údaje I. kola jsou tedy uspokojivější než v předchozím roce. Avšak kvalita řešení se zřejmě podstatně nezměnila, jak o tom svědčí výsledky II. kola (viz tabulky č. 3 a 4). Zde je procento úspěšných řešitelů v kategoriích A až C blízké číslu 30, tedy celkem tradiční. V kategorii D je úspěšných řešitelů na 50 %; to je dosti vysoké číslo a není v souladu s hlasy řady okresů, že úlohy II. kola byly pro žáky značně náročné.

Tabulka č. 1

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	z toho dívek	U	P	z toho dívek	U	P	z toho dívek	U	P	z toho dívek	U
Praha-město	67	14	40	127	30	62	183	37	92	377	81	194
Středočeský	73	9	16	188	32	48	372	107	70	633	148	134
Jihočeský	106	48	27	213	114	65	337	170	63	656	332	155
Západočeský	20	1	10	65	29	50	86	45	55	171	75	115
Severočeský	41	20	23	78	30	48	120	53	72	239	103	143
Východočeský	41	11	34	145	44	115	142	50	118	328	105	267
Jihomoravský	66	19	51	181	49	130	249	89	182	496	157	363
Severomoravský	35	6	10	201	57	104	188	66	104	424	129	218
Západoslovenský	33	6	12	168	63	67	215	109	92	416	178	171
Středoslovenský	33	12	24	90	39	69	132	67	96	255	118	189
Východoslovenský	17	4	10	86	33	24	111	50	50	214	87	84
Celkem	532	150	257	1542	520	782	2135	843	994	4209	1513	2033

*) P = počet všech účastníků, U = počet úspěšných řešitelů.

Tabulka č. 2

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategorii D)*

Kraj	Kategorie D		
	<i>P</i>	z toho dívek	<i>U</i>
Praha-město	1 501	639	1 016
Středočeský	1 214	605	731
Jihočeský	1 096	628	759
Západočeský	757	396	398
Severočeský	612	304	365
Východočeský	1 005	506	649
Jihomoravský	1 454	624	838
Severomoravský	1 424	668	781
Západoslovenský	671	374	504
Středoslovenský	847	409	554
Východoslovenský	471	262	293
Celkem	11 052	5 415	6 888

*) *P* = celkový počet účastníků, *U* = počet úspěšných řešitelů.

Tabulka č. 3

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	z toho dívek	U	P	z toho dívek	U	P	z toho dívek	U	P	z toho dívek	U
Praha-město	40	6	22	62	14	33	90	15	43	192	35	98
Středočeský	15	1	3	45	10	10	63	24	12	123	35	25
Jihočeský	24	6	5	61	20	8	61	20	18	146	46	31
Západočeský	10	—	3	45	20	12	51	25	10	106	45	25
Severočeský	22	12	3	46	12	13	60	24	12	128	48	28
Východočeský	33	10	7	91	25	21	84	24	35	208	59	63
Jihomoravský	46	13	16	117	23	58	170	60	114	333	96	188
Severomoravský	10	—	3	101	26	41	95	20	21	206	46	65
Západoslovenský	12	3	1	67	28	20	92	44	36	171	75	57
Středoslovenský	23	8	1	56	23	3	84	37	13	163	68	17
Východoslovenský	9	1	4	22	12	5	49	17	3	80	30	12
Celkem	244	60	68	713	213	224	899	310	317	1856	583	609

*) P = celkový počet účastníků, U = počet úspěšných řešitelů.

Tabulka č. 4

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategorii D)*

Kraj	Kategorie D		
	<i>P</i>	z toho dívek	<i>U</i>
Praha-město	851	347	505
Středočeský	605	294	341
Jihočeský	617	336	345
Západočeský	348	176	64
Severočeský	300	129	159
Východočeský	583	288	333
Jihomoravský	671	324	203
Severomoravský	636	281	267
Západoslovenský	457	253	245
Středoslovenský	475	232	256
Východoslovenský	268	152	183
Celkem	5 811	2 812	2 899

*) *P* = počet všech účastníků, *U* = počet úspěšných řešitelů.

Počet slovenských účastníků soutěže ve všech kategoriích je dosud stále neuspokojivý. Žáci tří speciálních tříd SVVŠ, v nichž jsou zařazeni žáci, kteří si oblíbili matematiku a fyziku (po jedné třídě v Praze, Brně a Bratislavě), se ve II. kole, pokud jde o Prahu a Brno, dobře uplatnili; neuplatnili se však ve III. kole (malou výjimkou jsou někteří žáci z Brna); zmíněné třídy tedy neusnadnily např. výběr žáků pro VI. mezinárodní olympiádu.

Úspěšní řešitelé II. kola obdrželi za svůj výkon v soutěži čestná uznání a byli odměněni hodnotnými věcnými cenami, mimo jiné též studijní odbornou literaturou.

Dále uvádíme pořadí deseti nejlepších řešitelů II. kola v každém kraji z kategorií B, C, pro které druhým kolem soutěž končí.

Pořadí úspěšných řešitelů II. kola v kategoriích B, C

(Není-li uvedeno jinak, jedná se o žáka SVVŠ.)

Praha-město

B. Miloš Fink, Praha 6; J. Outrata, Praha 6; Jindřich Bečvář, Praha 4; Jan Veselý, Praha 6; Jaroslav Doležal, Praha 4; Jiří Rohn, Praha 6; Jiří Šolar, Praha 3; Otakar Vituj, Praha 3; Jiří Kubie, Praha 3; Jaroslav Dittrich, Praha 5

C. Petr Němec, Praha 6; Bohumil Čapek, ZDŠ Praha 4; Petr Ludvík, Praha 1; Miroslav Prokeš, Praha 7; Jiří Novák, Praha 5; Eduard Prandstetter, Praha 3; Ivan Volný, Praha 10; Jan Faehnrich, Praha 7; Petr Brýdl, Praha 1; Jiří Hoppe, Praha 1

Středočeský kraj

B. Jiří Rott, PŠ hut. Kladno; Vladimír Loula, Nové Strašecí; Jaroslav Příhoda, Čakovice; Bohuslav Severin, Rakovník; Jiří Hochmann, Hořovice; Ivan Rádl, Kolín; Dušan Vopálka, Benátky n. Jiz.; Miroslav Žaloudek, PŠ Čáslav; Pavel Bunc, Kolín; Pavel Svoboda, Mladá Boleslav

C. Jaroslav Chudáček, Mnichovo Hradiště; Jiří Svoboda, Benešov; Jiří Sochor, Mnichovo Hradiště; Radko Nejdí, Mnichovo Hradiště; Karel Dědek, ZTS Poděbrady; Pavel Vavruška, Kolín; Eva Demská, Stodůlky; Eva Zapotilová, PŠ Čelákovice; Jitka Váňová, Beroun; Břetislav Fujan, Kladno

Jihočeský kraj

B. Pavel Vejvoda, OV JČE (učiliště), Hluboká n. Vlt.; Pavel Pták, Písek; Květuše Zbožínková, České Budějovice; David Preis, Jindřichův Hradec; Josef Prokeš, České Budějovice; Frant. Chvála, Písek; Jiří Vobořil, České Budějovice; Ladislav Tomášek, Pelhřimov

C. Vladimír Kůrka, Písek; Václav Holík, Prachatice; Petr Kříha, České Budějovice; Jan Mach, České Budějovice; Pavel Podlešák, Písek; Pavel Vítek, Tábor; Miroslav Červený, SZTS mech. České Budějovice; Petr Sedláček, SPŠ Písek; Lubor Hron, Pelhřimov; Jan Plánský, Český Krumlov

Západočeský kraj

B. Petr Barčí, Ostrov; Václav Steiner, Stříbro; Eva Kotinová, Plzeň; Josef Bartoš, Aš; Jiří Novotný, Plzeň; Bohumil Sýkora, Plzeň; Přemysl Breník, Plzeň; Jaroslava

Plonerová, Karlovy Vary; Jiří Lažanský, Domažlice;
Jaromír Kašpar, Ostrov

C. Oldřich Vlášek, Mariánské Lázně; Jan Štěpáník,
Horažďovice; Přemysl Holub, Plzeň; Marie Samková,
Blovce; Jaroslav Špalek, Plzeň; Karel Stehlík, Přeštice;
Josef Sluka, Horažďovice; Jiří Sýkora, Karlovy Vary;
Jiřina Čapková, Ostrov

Severočeský kraj

B. Jiří Snětivý, SPŠ Liberec; Miloš Šidlichovský,
Liberec; Zdeněk Suchomel, Teplice; Zbyněk Fučík,
SPŠ Liberec; Jiří Janeba, SPŠ Liberec; Karel Čermák,
Teplice; Bohumír Hoření, Tanvald; Rostislav Zábrod-
ský, Teplice; František Žalda, Frýdlant; Miloš Janda,
Rumburk

C. Slávka Šulcová, Děčín; Radomír Smetana, Li-
berec; Vladislav Hyšman, Roudnice n. Lab.; Ivan Ci-
bulka, Česká Kamenice; Petr Volf, Liberec; Ladislav
Dvořák, Tanvald; Antonín Heinzl, Liberec; Eva Ne-
radová, Litvínov; Jitka Štenclová, Ústí n. Labem; Milan
Velíšek, Tanvald

Východočeský kraj

B. Miroslav Řezníček, Hradec Králové; Milan Štědrý,
Ledeč n. Sázavou; Marcela Bílková, Hradec Králové;
Pavel Holan, Hradec Králové; Vladimír Klos, Jičín;
Bohuslav David, Vysoké Mýto; Jan Štěpánek, Pardubice;
Jan Ámos Víšek, Spořilov-Pardubice; Jaroslav Macháně,
Hradec Králové; Jaroslav Šterba, Hlinsko v Čechách

C. Luboš Pěnička, Turnov; Miroslav Kolář, SPŠE
Pardubice; Pavel Křivka, Česká Třebová; Jan Rauch,

Dvůr Králové n. Labem; Petr Moravec, Hradec Králové; Radko Škaloud, Hradec Králové; Karel Hejna, SPŠE Pardubice; Vladimír Svědih, Pardubice-Spořilov; Jaroslav Pokorný, Jilemnice; Jaroslav Vižďa, Hradec Králové

Severomoravský kraj

B. Pavel Novotný, Olomouc; Emil Běták, Ostrava; Raimund Koplík, Přerov; Jaroslav Dvořáček, Přerov; Jura Charvát, Příbor; Vladislav Kalets, Český Těšín; Luděk Zajíček, Ostrava; Miroslav Zíka, Opava; Jaroslav Pardziora, Karviná; K. Kovařík, SPŠS Lipník n. Bečvou

C. Helena Velemínská, Vítkovice; Vladimír Karásek, Ostrava; Wladyslaw Martynek, PSVVŠ Český Těšín; Oldřich Novák, SPŠE Frenštát p. Radh.; Stanislav Olša, SPŠ Přerov; Jaroslav Špindler, SPŠE Frenštát p. Radh.; Jiří Růžicka, SPŠŽ Šumperk; Pavel Slouka, Šumperk; Petr Herařt, Nový Jičín; Vojtěch Smolík, Olomouc-Hejčín

Žihomoravský kraj

B. Jitka Kesslerová, Brno; Eduard Černý, SPŠE Brno; Karel Henc, Brno; Pavel Kaláb, Brno; Josef Humlíček, Velké Meziříčí; Zdeněk Mikulášek, Brno; Ctibor Pelikán, Moravský Krumlov; Miroslav Sedláček, SPŠE Brno; Jaromír Volný, Znojmo; Milada Brabencová, Třebíč

C. Jitka Křížová, Brno; Marie Lencová, Brno; Zdeněk Michalec, Brno; Jiří Musil, SPŠCH Brno; Martin Brunecký, Brno; Zdeněk Dědourek, Brno; Vladimír Handlíř, SPŠCH Brno; Jiří Mátl, Telč; Hana Kundeliusová, Třebíč

Západoslovenský kraj

B. Jana Buntová, Bratislava, Novohradská ul.; Tatjana Bušínská, Bratislava, Novohradská ul.; Martin Klein, Bratislava, Novohradská ul.; Jozef Vančík, Bratislava, Novohradská ul.; Olga Slabihoudová, Bratislava, Novohradská ul.; Mária Kosibová, Bratislava, Novohradská ul.; Viera Krňanová, Bratislava, Novohradská ul.; Marián Hučko, Bratislava, Vazovova 4; Branislav Zagoršek, Bratislava, Metodova ul.

C. Tomáš Duby, SPŠE Bratislava; František Alexander, Bratislava, Novohradská ul.; Alojz Némethy, Bratislava, Novohradská ul.; Tomáš Hecht, SPŠE Bratislava; Brigita Petrášová, Bratislava, Novohradská ul.; Ľudovít Zeman, SPŠE Bratislava; Marko Füllöp, SPŠE Bratislava; Miroslav Fencľ, Bratislava, Novohradská ul.; Ivan Georgiev, Bratislava, Novohradská ul.

Středoslovenský kraj

B. Gabriel Kralík, Prievidza; Štefan Porubský, SPŠ Zvolen; Bohuslav Sivák, ZDŠ Zvolen

C. Peter Mederly, Prievidza; Michal Pokorný, Žilina; Dušan Hurínek, Púchov; Eva Kostrová, Žilina; Anna Vojtášková, Liptovský Mikuláš; Dušan Čupka, Liptovský Mikuláš; Ivan Duša, Prievidza; Miroslav Kučera, Zvolen; Tatjana Lehotská, Liptovský Hrádok; Vladimír Blaha, Varín

Východoslovenský kraj

B. Alexander Doktor, Košice; Ján Čižmárik, Prešov-Svojdovcov; Jozef Dravecký, Spišská Nová Ves; Antonia Mimráňková, Poprad; Ján Novotný, Poprad

C. Myron Majdák, Prešov-Svojsdomov; Martin Fronc, Košice

3. K soutěži III. kola bylo pozváno 75 žáků, avšak úspěšných řešitelů bylo jen 15. Na základě toho bylo za vítěze XIII. ročníku soutěže prohlášeno pouze těchto 15 žáků. Dva z vítězů jsou z 2. ročníku střední všeobecně vzdělávací školy. Mezi účastníky III. kola byl tentokrát značný počet žáků středních průmyslových škol, totiž 11; mezi vítězi jsou dva. Do III. kola se probojovalo 10 žákyn. Mezi vítězi jsou dvě žákyně, přičemž jedna je z 2. ročníku střední všeobecně vzdělávací školy; potěšitelné je, že tato mladší žákyně se uplatnila i na VI. mezinárodní matematické olympiádě v Moskvě. Dále uvádíme jmenný seznam vítězů XIII. ročníku MO.

Pořadí vítězů XIII. ročníku matematické olympiády

(Šk. r. 1963—64)

1. *Ľaroslav Zemánek*, 3.d roč. SVVŠ, Praha 4 - Nusle, Křesomyslova 2
2. *Tamara Marcisová*, 2.d roč. SVŠ, Bratislava, Novohradská
3. *Rudolf Ľisl*, 3.a roč. SPŠE silnoproutá, Praha 1, Na příkopě 16
4. *Miloslav Znojil*, 3.b roč. SVVŠ, Prostějov, Kollárova 3
5. *Pavel Bureš*, 3.f roč. SVVŠ, Brno, Koněvova ul.
6. *Ľan Hanslian*, 4. roč. střed. prům. škola stavební, Lipník n. B.
7. *Lubomír Klapka*, 3.a roč. SVVŠ, Brno 14, Elgartova 3
8. *Luděk Kučera*, 4.a roč. SPŠ jaderné techniky, Praha 2, Ječná 30

9. *Richard Špíšek*, 2.b roč. SVVŠ, Brno, Koněvova 47
10. *Jan Švejda*, 3.d roč. SVVŠ, Praha 4, Křesomyslova 2
11.—14.

Marta Doležalová, 3.f roč. SVVŠ, Brno, Koněvova 47

Jan Karnolt, 3.d roč. SVVŠ J. Fučíka, Plzeň, nám. Odborářů

Karel Svák, 3.f roč. SVVŠ, Brno, Koněvova 47

Bohdan Šmilauer, 3.d roč. SVVŠ, Praha 4, Křesomyslova 2

15. *Ján Lupták*, 3.a roč. SVVŠ, Bratislava, Vazovova 6

Poznámka: Společná místa uvádíme v abecedním pořádku.

Ministerstvo školství a kultury odměnilo vítěze hodnotnými věcnými cenami podle jejich vlastního výběru a dále jim poskytlo poukázky na nákup odborné studijní literatury. Každý z vítězů obdržel čestný diplom podepsaný prvním náměstkem ministra školství a kultury a předsedou ústředního výboru Matematické olympiády.

4. Všeobecně lze říci, že nemůžeme být s výkony žáků ve XIII. ročníku spokojeni. Nejlépe se to jeví na výkonu žáků ve III. kole, o němž se stručně zmíníme. Již zběžný pohled na texty úloh III. kola a na jejich řešení přesvědčí, že úlohy byly zvoleny záměrně lehké, aby se mohli uplatnit i slabší řešitelé. Nejlehčí byla úloha č. 1; řešilo ji 57 žáků, ale jen 20 úspěšně. Je zajímavé, že o řešení úlohy č. 3 se pokusili všichni žáci, ale jen 22 řešení bylo úspěšných (jsou to z valné části slabá řešení). Úloha č. 4 byla poměrně velmi snadná, jistou opatrnost si vyžadovala diskuse, na kterou se samozřejmě při hodnocení kladl zvláštní důraz; bylo podáno 40 řešení, z toho 2 výborná a 34 vyhovujících. Zvláštní

kapitolou jsou řešení úlohy č. 2, tedy úlohy ze školské stereometrie; 4 řešení jsou výborná, 8 vyhovujících a 39 nevyhovujících, takže 24 žáků úlohu vůbec neřešilo. Je zajímavé, že jediný žák úlohu řešil obvyklým školským syntetickým postupem; ostatní se pokoušeli o řešení pomocí analytické geometrie, z valné většiny rovinné. Mnozí užívali různých projekcí, mnohdy neoprávněně nebo nesprávně; přitom řešení užitím stejnolehlosti se celkem vnucovalo. Nejhorší však je, že úvahy prováděné při řešení byly značně povrchní a často nekritické; to platí o řešení všech čtyř úloh. Například jen málo řešitelů při úloze č. 1 jasně vyslovalo jako požadavek, že dané číslo musí být dělitelné oběma čísly 3 a 2 000; diskuse při úloze č. 4 vyžadovala v podstatě rozhodování o vzájemné poloze jistých dvou kružnic, tedy věc celkem základní, kterou musí znát i slabší žák.

Z květnového jednání ÚV MO, pokud jde o výsledky XIII. ročníku MO, zcela jednoznačně vyplývalo, že nejlepší zárukou úspěchu žáka v soutěži je, aby měl zkušeného a obětavého učitele; o tom skutečně svědčí i výsledky našich nejlepších účastníků na VI. mezinárodní matematické olympiádě. Rozhodně ani učitelé ani organizátoři soutěže nesmějí spoléhat na to, že nadaný žák si dovede sám se svou přípravou na soutěž dobře poradit. Ukazuje se, že nejlepší přípravou je kontrolované soustavné studium spojené s řešením úloh. Edice Škola mladých matematiků by tu byla dobrým východiskem pro tento druh přípravy našich olympioniků. Podaří-li se nám to zajistit ve spolupráci s našimi učiteli matematiky, budeme mít alespoň zčásti o nadané žáky postaráno.

III. Přípravné úlohy (texty)

1. KATEGORIE A

1. Najděte nutné a postačující podmínky mezi reálnými koeficienty p, q rovnice $x^2 + px + q = 0$ k tomu, aby měla kladné kořeny x_1, x_2 , o nichž platí $x_1 = 2x_2$.

2. Vypočtěte délku středné dvou kružnic o daných poloměrech R, r , které mají tu vlastnost, že úsek společné vnitřní tečny těchto kružnic, obsažený mezi jejich společnými tečnami vnějšími, má délku p , kde p je dané kladné číslo.

Provedte konstrukci středné a diskusi řešitelnosti úlohy.

3. Je dán kvádr $ABCD A' B' C' D'$ (kde $ABCD$ je obdélník a platí $AA' // BB' // CC' // DD'$) o rozměrech $a = AB$, $b = AD$, $c = AA'$.

Na přímce BB' najděte bod X a na přímce CA' bod Y tak, aby platilo $XY \perp BB'$, $XY \perp CA'$. Vypočtěte velikosti úseček XY, BX, CY .

4. Určete všechny dvojice reálných čísel x, y , které splňují nerovnosti

$$\left| \sin \left(x + y + \frac{1}{2} \pi \right) \right| \geq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi.$$

V rovině pravoúhlých souřadnic x, y pak zobrazte všechna tato řešení.

5. Jsou-li $b, n > 2$ přirozená čísla, potom číslo $b^{n+4} - b^n$ je dělitelné číslem 120. Dokažte.

6. Je dán lichoběžník $MNOP$, kde $MN > PQ$. Uvnitř úsečky PQ zvolme body A, B tak, aby platilo $PA = QB$, a sestrojme po řadě průsečíky X, Y dvojic přímek $\overline{MP}, \overline{NB}$ a $\overline{NQ}, \overline{MA}$.

Vyšetřte geometrické místo středů úseček XY .

2. KATEGORIE B

1. V rovině pravouhlých souřadnic x, y zobrazte funkci:

a) $y = x + 3$

b) $y = |x + 3|$

c) $y = |x| + 3$

d) $y = \frac{x^2 + 3x}{|x|}$

e) $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

f) $y = \frac{(x + 3)^2}{x + 3}$

g) $y = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

h) $y = \frac{1}{2} (|x - 3| + |x + 3|) + 3$

2. Jsou dány rovnoběžky m, n a uvnitř pásu jimi určeného je dán bod C , který má od nich po řadě vzdálenosti p, q .

Sestrojte trojúhelník ABC , v němž je $CA = CB$, $\sphericalangle BCA = 90^\circ$ a body A, B leží po řadě na přímkách m, n . Vypočtěte obvod a obsah tohoto trojúhelníku.

Pokyn. Lze užít otočení.

3. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1.

Sestrojte v něm tři shodné kružnice, z nichž každé dvě se navzájem dotýkají vně, přičemž první se dotýká

přímek AB , AD , druhá přímek BC , AC a třetí přímek CA , CD . Vypočtěte velikost poloměrů těchto kružnic.

4. Je dán trojúhelník ABC o stranách délek a , b , c . Vypočtěte vzdálenosti středu C' strany AB od čtyř bodů, ve kterých se přímky AB dotýkají kružnice vepsané a kružnice vně vepsané danému trojúhelníku.

5. Odvoďte vzorce pro všechna přirozená čísla, jejichž druhá mocnina dělena patnácti má za zbytek (v oboru celých nezáporných čísel) číslo: a) 9; b) 7.

6. Udejte, pro které trojice reálných čísel x , y , z nemá výraz

$$V = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}$$

smysl, a rozhodněte o hodnotě výrazu pro ostatní trojice reálných čísel x , y , z .

3. KATEGORIE C

1. Uvnitř stran BC , CA , AB daného rovnostranného trojúhelníku ABC sestrojte po řadě body X , Y , Z tak, aby platilo $XY \perp BC$, $YZ \perp CA$, $ZX \perp AB$, a vypočtěte délky stran trojúhelníku XYZ pomocí délky $d = AB$.

2. Vypočtěte nejmenší přirozená čísla p , x , pro která je výraz

$$V = \frac{x^2 + 2px + p^2 - 16}{p^2 + px - 4x - 16}$$

roven číslu 1,05.

3. Je dán trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ . Aniž narýsujete střed kružnice k tomuto trojúhelníku opsané, sestrojte k ní v bodech A, B, C tečny.

Poznámka. Lze užít úsekového úhlu.

4. V rovině je dán dutý úhel $\sphericalangle MON$ a vně tohoto úhlu je dán bod P . Na polopřímkách OM, ON sestrojte po řadě body X, Y tak, aby bod Y byl středem úsečky PX .

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

5. Rozhodněte, které z celých čísel od 0 do 11 nedostaneme jako zbytek při dělení (v oboru celých nezáporných čísel) druhé mocniny přirozeného čísla dvanácti.

6. Řešte rovnici:

$$\text{a) } \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \right| = \frac{x - 3}{x + 4};$$

$$\text{b) } \left| \frac{x^2 + 2px + p^2}{x^2 - p^2} \right| = \frac{x + p}{x + 4},$$

kde p je dané číslo.

4. KATEGORIE D

1. Napište všechny dvojice nesoudělných přirozených čísel x, y (bez ohledu na pořádek čísel dvojice), jejichž součin je roven číslu 415 800.

2. Narýsujte čtverec $MNPQ$ o stranách délky d a dále trojúhelník ABC o stranách délek a, b, c .

Sestrojte trojúhelník XYZ těchto vlastností:

(1) Platí $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$.

(2) Body X, Y, Z padnou po řadě na přímky MQ , MN , NP .

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

3. Továrna splnila plán výroby na 108 %. Považujeme-li toto skutečné plnění výroby za základ, vypočtete, kolik procent představovala původně plánovaná výroba,

4. Narýsujte trojúhelník ABC , jestliže je $BC = 5$ cm, $CA = 12$ cm, $AB = 13$ cm. Označme X bod tohoto trojúhelníku, který splňuje tyto požadavky: Vzdálenost bodu X

(1) od bodu A je větší než od bodu B ;

(2) od přímky CA je větší než od přímky BC ;

(3) od přímky BC je větší než od přímky AB .

Vyšetřte, jaký útvar vyplní všechny body X uvedených vlastností. Tvrzení odůvodněte.

5. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a dvě její různé sečny $p \parallel q$.

Narýsujte kružnici m , která se dotýká obou přímek p, q a kružnice k .

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

6. Výraz

$$V = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

je roven nule pro jediné číslo x ; dokažte. Zároveň udejte všechna čísla x , pro která tento výraz: a) je kladný; b) je záporný; c) nemá smysl.

IV. Riešenia úloh zo súťaže

1. ÚLOHY I. KOLA KATEGÓRIE A

1. Uďajte všetky prirodzené čísla n , pre ktoré číslo $n^8 - n^2$ nie je deliteľné číslom 504.

Riešenie. Číslo $N = n^8 - n^2$ je deliteľné číslom $504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$ práve vtedy, keď je deliteľné každým z činiteľov 7, 8, 9, pretože každé dve z týchto čísel sú nesúdeliteľné. Pri vyšetrovaní deliteľnosti čísla N číslami 7, 8, 9 vyjadríme n postupne takto:

$$n = 7k_1 + z_1, \quad n = 8k_2 + z_2, \quad n = 9k_3 + z_3, \quad (1)$$

kde k_i, z_i ($i = 1, 2, 3$) sú nezáporné celé čísla a platí:

$$z_1 \leq 6, \quad z_2 \leq 7, \quad z_3 \leq 8.$$

Ak do N dosadíme z (1) za n , zistíme, že číslo N je deliteľné siedmimi (ôsmimi, deviatimi) práve vtedy, ak je týmto číslom deliteľné číslo $z_1^8 - z_1^2$ ($z_2^8 - z_2^2, z_3^8 - z_3^2$).

Prevedme rozklad

$$z^8 - z^2 = z^2 (z^3 - 1) \cdot (z^3 + 1)$$

a zostavme pomocou neho tabuľku (viď str. 33).

Z tejto tabuľky je vidieť, že každé z čísel $z^8 - z^2$ pre $0 \leq z \leq 8$ je deliteľné siedmimi a deviatimi; ôsmimi sú čísla $z^8 - z^2$ deliteľné len pre $z = 0, 1, 3, 4, 5, 7, 8$. To

z	$z^8 - z^2$
0	0
1	0
2	4 . 7 . 9
3	9 . 26 . 28
4	16 . 63 . 65

z	$z^8 - z^2$
5	25 . 124 . 126
6	36 . 215 . 217
7	49 . 342 . 344
8	64 . 511 . 513

znamená, že číslo N nie je deliteľné číslom 504 práve vtedy, keď má číslo n tvar

$$n = 8k + 2$$

alebo

$$n = 8k + 6,$$

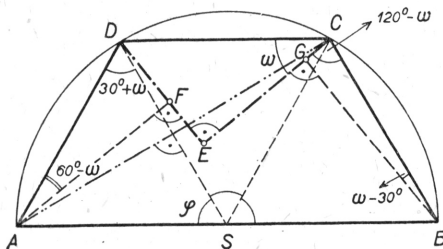
kde k je ľubovoľné celé nezáporné číslo.

2. Je dán rovnoramenný lichobežník $ABCD$, o jehož základňe AB platí $AB = 2BC = 2CD$. Uvnitř lichobežníku nad úsečkou CD jako přeponou sestrojíme pravoúhlý trojúhelník CDE , pro jehož úhel ω při vrcholu C platí $30^\circ < \omega < 60^\circ$. Označme F, G paty kolmic vedených po řadě body A, B k přímkám DE, CE .

Vypočítejte poměr obsahů obrazce $ABGEF$ a lichobežníku $ABCD$ použitím úhlu ω a vyšetřte, kdy je tento poměr minimální.

Řešení (obr. 1). Je-li S střed úsečky AB a φ velikosti shodných úhlů $\sphericalangle ASD, \sphericalangle BSC$, je $ASCD$ rovnoběžník (je $AS = CD, AS \parallel CD$); v něm platí $\sphericalangle SAD = 180^\circ - 2\varphi$ (úhel proti základně SD rovnoramenného trojúhelníku ASD , v němž podle textu úlohy je $AS = AD$), a tedy $\sphericalangle ASC = 2\varphi$ (jde o úhly přilehlé ke straně AS

rovnoběžníku $ASCD$). Je proto nutně $\sphericalangle CSD = \varphi$. Ze souměrnosti rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ vzhledem k jeho ose plyne, že i $\sphericalangle BCS = \varphi$; proto je $\varphi = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$. Trojúhelníky ASD , BSC , SCD jsou proto vesměs rovnostranné a shodné. Bod E tedy vždy leží uvnitř trojúhelníku SCD a body F , G vždy po řadě padnou dovnitř úseček ED , EC .



Obr. 1.

Označme P obsah lichoběžníku $ABCD$, P_1 , P_2 , P_3 po řadě obsahy trojúhelníků CDE , ADF , BCG a P_4 obsah obrazce $ABGEF$ z textu úlohy. Je-li $\sphericalangle ECD = \omega$, potom snadno vypočteme, že $\sphericalangle CBG = \omega - 30^\circ$, $\sphericalangle ADF = \omega + 30^\circ$. Položme $CD = 1$, takže $AD = BC = 1$, $AB = 2$. Pak je

$$P = 3 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} = \frac{3}{4} \sqrt{3}, \quad P_1 = \frac{1}{2} \sin \omega \cos \omega,$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2} \sin (\omega - 30^\circ) \cos (\omega - 30^\circ) = \\ &= \frac{1}{8} (\sin 2\omega - \sqrt{3} \cdot \cos 2\omega), \end{aligned}$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \sin(\omega + 30^\circ) \cos(\omega + 30^\circ) = \\ = \frac{1}{8} (\sin 2\omega + \sqrt{3} \cdot \cos 2\omega).$$

Vypočteme poměr

$$x = \frac{1}{P} (P - P_1 - P_2 - P_3) = 1 - \frac{1}{P} (P_1 + P_2 + P_3) = \\ = 1 - \frac{1}{6\sqrt{3}} (2\sin 2\omega + \sin 2\omega - \sqrt{3} \cos 2\omega + \sin 2\omega + \sqrt{3} \cos 2\omega) = \\ = 1 - \frac{1}{6\sqrt{3}} \cdot 4 \sin 2\omega.$$

Hledaný poměr tedy je

$$x = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \sin 2\omega. \quad (1)$$

Minimum nastane, je-li druhý člen na pravé straně v (1) maximální, tj. je-li $\sin 2\omega = 1$ neboli je-li (jde o ostrý úhel ω)

$$\omega = 45^\circ;$$

pak je $x = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \doteq 0,6$. Tím je řešení provedeno.

Podle řešení Jiřího Kabele, 3. roč.
SVVŠ, Křesomyslova ul., Praha 4

3. V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož základna AB je menší než jeho rameno. Sestrojte uvnitř úseček CA , CB po řadě body X , Y a v polorovině XYC bod Z tak, aby platilo

$$\triangle XYZ \cong \triangle ABC.$$

Vyšetřte geometrické místo bodů Z .

Řešení (obr. 2). V trojúhelníku ABC označme $AC = BC = a$, $AB = c$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \alpha$, $\sphericalangle C = \gamma$; je tedy

$$a > c, \quad \alpha > \gamma, \quad \alpha < 90^\circ, \quad \gamma < 90^\circ,$$

$$\alpha + \gamma = 180^\circ - \alpha > 90^\circ.$$

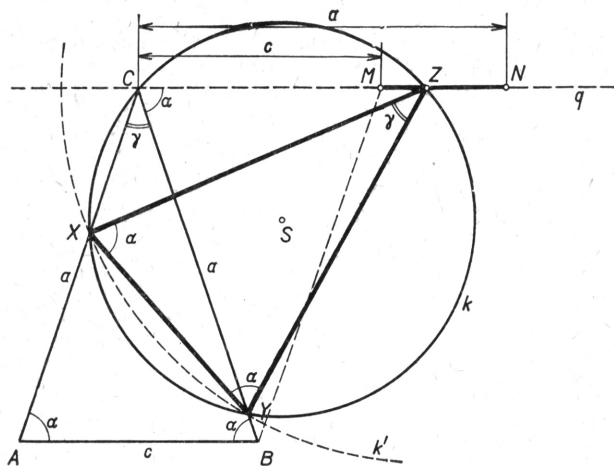
Je-li XYZ trojúhelník splňující požadavky textu úlohy, platí

$$ZX = ZY = a, \quad XY = c, \quad \sphericalangle X = \sphericalangle Y = \alpha, \quad \sphericalangle Z = \gamma.$$

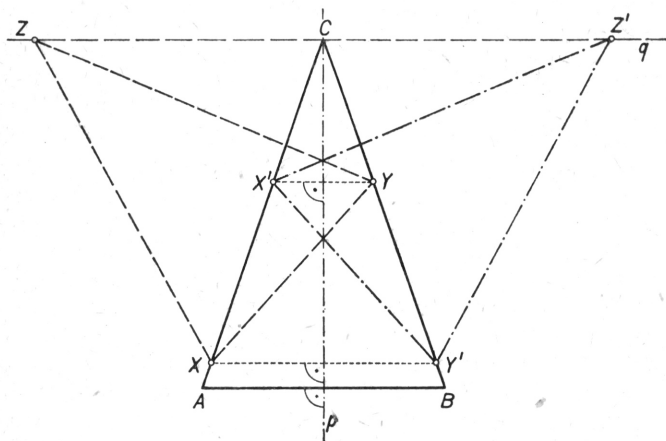
Body X, Y, Z, C jsou vesměs navzájem různé a platí $\sphericalangle XCY = \sphericalangle ACB = \gamma$. Podle textu úlohy leží body C, Z v téže polorovině vyřezané přímkou XY a platí $\sphericalangle XCY = \sphericalangle XZY$; proto body C, Z leží na větším oblouku jisté kružnice k , která prochází body X, Y . Jsou tedy X, Y, Z, C vrcholy jistého tětíkového čtyřúhelníku a jsou dvě možnosti:

a) Body X, Z jsou odděleny přímkou BC (obr. 2).

b) Body X, Z padnou do téže poloroviny vyřezané přímkou BC , a protože v tětíkovém čtyřúhelníku každá z úhlopříček odděluje jeden pár jeho protějších vrcholů, jsou nutně body Y, Z odděleny přímkou $AC \equiv XC$. Je-li p osa úsečky AB (obr. 3), označme $Y'X'CZ'$ obraz uvažovaného tětíkového čtyřúhelníku $XYCZ$ v souměrnosti o ose p , takže X, Y' a Y, X' jsou dvojice souměrně sdružených bodů a CA, CB souměrně sdružené přímky. Tu body X', Y' po řadě padnou dovnitř úseček CA, CB , trojúhelník $X'Y'Z'$ patří k případu a) a body X', Z' (což jsou obrazy bodů Y, Z) jsou odděleny přímkou BC . Tím je případ b) převeden na případ a). Postačí tedy omezit se v dalším na případ a) a na výsledky užít souměrnosti vzhledem k přímce p .



Obr. 2.



Obr. 3.

Bod Z čtyřúhelníku $XYZC$ leží v polorovině opačné k polorovině BCA . Úhly obvodové $\sphericalangle YXZ = \alpha$, $\sphericalangle YCZ$ v kružnici k leží v téže polorovině vyřezané přímkou YZ , takže jsou shodné, a proto jsou shodné i střídavé úhly $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle YCZ \equiv \sphericalangle BCZ$; odtud plyne, že je $CZ \parallel AB$ a že bod Z leží na jisté polopřímce q s počátkem C . Označme M ten bod polopřímky q , pro nějž platí

$$CM = c.$$

To znamená, že čtyřúhelník $ABMC$ je rovnoběžník. Dále sestrojme na polopřímce CM bod N tak, aby platilo

$$CN = a;$$

leží tedy bod M uvnitř úsečky CN .

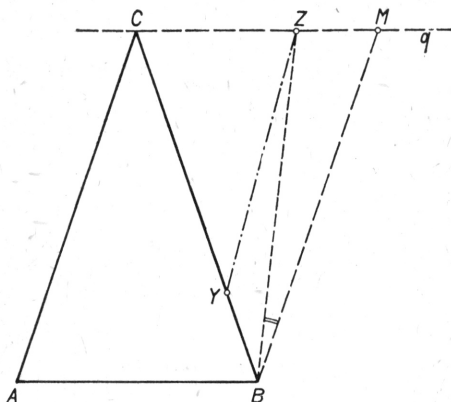
Dokážeme, že každý bod Z hledaného geometrického místa padne dovnitř úsečky MN (obr. 2). Důkaz provedeme sporem.

Předpokládejme nejprve, že bod Z náleží úsečce CM (obr. 4). Je-li $Z \equiv C$ nebo $Z \equiv M$, pak kružnice $k' \equiv (Z; a)$ prochází bodem B , tj. $Y \equiv B$ proti předpokladu. Leží-li bod Z mezi body C, M , je podle známé věty $ZB < CB = MB = a$; bod B — a ovšem i body C, M — leží uvnitř kružnice k' a vrchol Y nemůže náležet straně BC .

Předpokládejme za druhé, že bod Z náleží prodloužení úsečky CN za bod N . Je-li $Z \equiv N$, prochází kružnice k' vrcholem C a je tedy $X \equiv C$ proti předpokladu. Je-li $Z \neq N$, pak pro všechny body X strany AC platí $ZX > > ZC > a$ (úhel $\sphericalangle ZCA$ je totiž tupý) a kružnice k' nemá s úsečkou AC vůbec žádný společný bod.

Dokážeme nyní, že každý bod Z ležící mezi body MN je vrcholem jednoho z vyšetřovaných trojúhelníků XYZ (obr. 2). Sestrojíme opět kružnici $k' \equiv (Z; a)$; pro ni je vrchol C bodem vnitřním, neboť je $ZC < NC = a$.

Vrchol A je pro kružnici k' bodem vnějším; trojúhelník ACZ je totiž tupouhlý ($\sphericalangle ACZ > 90^\circ$), proto je $ZA > AC = a$. Kružnice k' protne tedy úsečku AC v jejím vnitřním bodě X . Trojúhelníku XCZ opišme kružnici k ; polopřímka CB prochází vnitřkem úhlu $\sphericalangle XCZ$, protíná úsečku XZ v jejím vnitřním bodě, a tudíž i kružnici k



Obr. 4.

v jistém bodě $Y \equiv C$. Body X, Y, Z, C kružnice k jsou vesměs navzájem různé a jsou vrcholy tětiového čtyřúhelníku; přitom X, Z jsou přímkou BC odděleny; vznikne tedy čtyřúhelník $XYZC$, takže C, Z jsou sousedními vrcholy tohoto čtyřúhelníku. Proto je $\sphericalangle XZY = \sphericalangle XCY = \gamma$ (obvodové úhly v kružnici k nad tětivou XY); stejně platí $\sphericalangle YXZ = \sphericalangle YCZ = \alpha$. Je tedy $XZ = AC$, $\sphericalangle YXZ = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle XZY = \sphericalangle ACB$, a proto je $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$. Odtud plyne $ZY = CB = a$. Protože je $ZY = a$, leží bod Y na kružnici k' . Bod B je však vnějším bodem kružnice k' ; protože $\sphericalangle BZN > \sphericalangle BMN >$

$> 90^\circ$, je $ZB > BM = a$. Trojúhelník XYZ je tedy skutečně jedním z vyšetřovaných trojúhelníků.

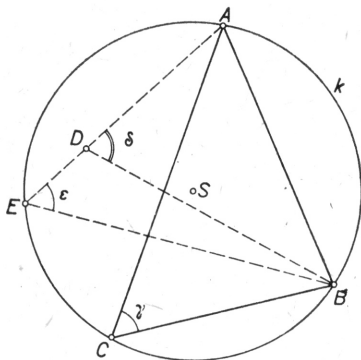
Závěr. Geometrickým místem bodů Z jsou dvě úsečky MN , $M'N'$ souměrně sdružené podle osy p úsečky AB , přičemž konstrukce úsečky MN je v tomto řešení popsána.

Podle řešení Jaroslava Zemánka, 3. d roč.
SVVŠ, Křesomyslova, Praha 4

4. V rovině je dáno n bodů, z nichž žádné tři neleží v téže přímce.

Dokažte, že lze najít kružnici, která obsahuje alespoň tři z daných bodů a že přitom žádný z daných bodů neleží uvnitř této kružnice.

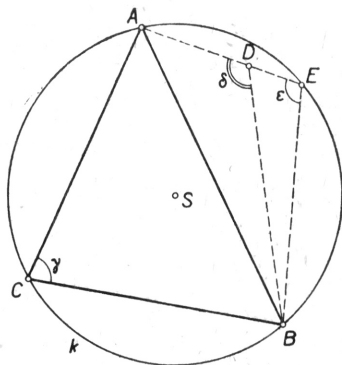
Řešení. Podle textu úlohy žádné tři z daných bodů neleží v téže přímce; proto žádné dva z daných n bodů nesplyvají. Označme A, B ($A \neq B$) takové dva z daných



Obr. 5.

bodů, pro které vzdálenost AB není větší než vzdálenost kterékoli dvojice z daných n bodů (jsou-li M, N dva libovolné různé body dané n -tice, platí tedy $MN \geq AB$); označme U množinu $n - 2$ bodů, která se skládá z těch daných n bodů, od nichž jsme odňali body A, B . Je-li X bod množiny U , potom vzniká trojúhelník ABX s ostrým úhlem $\xi \equiv$

$\equiv \sphericalangle AXB$, neboť žádná ze stran AX , BX není menší než strana AB ; vzniká tak množina $n - 2$ takových ostrých zorných úhlů ξ , pod nimiž je vidět úsečku AB z bodů X . Označme γ ten z $(n - 2)$ úhlů ξ , který není větší než kterýkoli zbývající; příslušný bod X označme C . Buď k kružnice opsaná trojúhelníku ABC . Uvnitř této kruž-



Obr. 6.

nice již neleží žádný z bodů množiny U . To dokážeme sporem: Jestliže je D bod množiny U , který padne dovnitř kružnice k , potom je $\sphericalangle ADB > \gamma$. Toto tvrzení je patrné z obr. 5, pokud bod D leží v polorovině ABC (o vnějším úhlu $\delta \equiv \sphericalangle ADB$ trojúhelníku ABE platí $\delta > \varepsilon = \gamma$). Jestliže bod D leží v polorovině opačné k polorovině ABC (obráz. 6), platí $\delta > \varepsilon = 180^\circ - \gamma > 90^\circ$ (protější úhly v tětiovém čtyřúhelníku), tj. $\delta > 90^\circ$, což však vzhledem k tomu, že zorné úhly ξ jsou ostré, nemůže vůbec nastat. Tím je důkaz proveden a žádný z daných n bodů tedy nepadne dovnitř kružnice k .

Podle řešení Jaroslava Zemánka, 3. d roč.
SVVŠ, Křesomyslova, Praha 4

5. SÚ dané dve kvadratické nerovnosti

$$\left. \begin{aligned} x^2 + p_1x + q_1 &< 0, \\ x^2 + p_2x + q_2 &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

kde p_1, p_2, q_1, q_2 sú dané reálne čísla a platí $q_1 < 0, q_2 < 0$. Dokážte túto vetu:

Ak dané nerovnosti nemajú spoločné riešenie, potom platí:

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_1 q_2 - p_2 q_1) \leq (q_1 - q_2)^2. \quad (2)$$

Udajte príklad štyroch čísel p_1, p_2, q_1, q_2 tak, aby platila nerovnosť (2) a aby nerovnosti (1) mali spoločné riešenie.

Riešenie. (V ďalšom hovoríme len o reálnych číslach.) Funkcia $y = x^2 + p_1 x + q_1$ nadobúda hodnotu nula pre dve rôzne čísla $x_1 < x_2$, pretože diskriminant $D = p_1^2 - 4q_1$ rovnice $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ je kladný, pretože $q_1 < 0$. Z podobných dôvodov nadobúda funkcia $y = x^2 + p_2 x + q_2$ hodnotu nula pre dve rôzne čísla $x_3 < x_4$.

Sústava (1) je neriešiteľná práve vtedy, keď celý interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ je obsiahnutý v intervale $\langle x_3, x_4 \rangle$ *); potom je

$$x_3 \leq x_1, \quad x_2 \leq x_4$$

čiže

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(-p_2 - \sqrt{D'}) &\leq \frac{1}{2}(-p_1 - \sqrt{D}), \\ \frac{1}{2}(-p_1 + \sqrt{D}) &\leq \frac{1}{2}(-p_2 + \sqrt{D'}), \end{aligned} \quad (3)$$

kde $D' = p_2^2 - 4q_2$ je diskriminant rovnice $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$. Z nerovností (3) vyplýva:

$$\sqrt{D'} - \sqrt{D} \geq p_1 - p_2, \quad \sqrt{D'} - \sqrt{D} \geq p_2 - p_1. \quad (4)$$

Spojením vzťahov (4) dostávame

$$\sqrt{D'} - \sqrt{D} \geq |p_1 - p_2|. \quad (5)$$

*) Ako sa ľahko presvedčíme napr. z grafov kvadratických funkcií.

Teda, ak je sústava (1) neriešiteľná, platí vzťah (5) a tým aj

$$D + D' - 2\sqrt{DD'} \geq p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2$$

čiže

$$p_1^2 - 4q_1 + p_2^2 - 4q_2 \geq p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2 + 2\sqrt{DD'},$$

skadiaľ

$$\sqrt{DD'} \leq p_1p_2 - 2(q_1 + q_2), \quad (6)$$

kde je na oboch stranách kladné číslo.

Umocnením vzťahu (6) dostaneme

$$DD' \leq [p_1p_2 - 2(q_1 + q_2)]^2,$$

skadiaľ po dosadení za $D = p_1^2 - 4q_1$, $D' = p_2^2 - 4q_2$ a po jednoduchéj úprave vyplýva nerovnosť (2).

Tým je veta dokázaná.

Príklad, kedy túto vetu nemožno obrátiť, je tento:
Pre

$$p_1 = 0, \quad q_1 = -1, \quad D = 4; \quad p_2 = -\frac{1}{3}, \quad q_2 = -\frac{1}{2},$$

$$D' = \frac{19}{36}$$

nie je splnenie nerovnosti (2) postačujúcou podmienkou pre neriešiteľnosť sústavy (1). V tomto prípade totiž sústava (1) má riešenie $-\frac{3}{4}$ aj napriek tomu, že je vzťah (2) splnený.

6. Je dán rotační kužel, jehož podstava má poloměr 1 a jehož strana má od roviny podstavy odchylku 2ω , kde

$\omega < \frac{1}{4} \pi$. Kuželi je vepsána koule K , která se dotýká pláště kužele i podstavy.

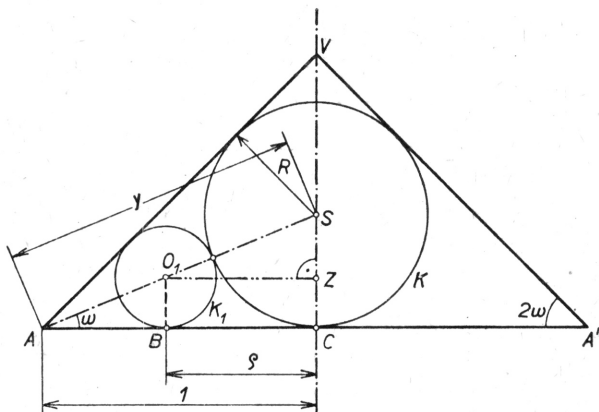
Dále je sestrojeno n shodných koulí, o nichž platí:

(1) Každá z nich se dotýká pláště a podstavy kužele i koule K (vnější dotyk).

(2) Každá z nich se dotýká dvou z těchto n koulí.

Najděte vztah mezi čísly n a ω a zjistěte, pro která n a ω může tato situace nastat.

Řešení. Označme S střed a R poloměr koule K , dále C střed podstavy a V vrchol daného kužele. Je-li A bod hrany kužele, je osovým řezem kužele vedeným tímto bodem rovnoramenný trojúhelník VAA' (viz obr. 7), ve kterém



Obr. 7.

je C střed jeho základny AA' . Označme y délku přepony AS pravoúhlého trojúhelníku ASC a ω velikost ostrého úhlu $\sphericalangle SAC$.

Platí

$$CS = R = \operatorname{tg} \omega, \quad y = AS = \frac{1}{\cos \omega}. \quad (1)$$

Koule K_1 , jedna z n uvažovaných shodných koulí, má poloměr r a střed O_1 uvnitř úsečky SA . Z vnějšího dotyku koulí K, K_1 plyne

$$O_1S = R + r. \quad (1')$$

Z vnějšího dotyku dvou sousedních shodných koulí K_1, K_2 o středech O_1, O_2 plyne vztah

$$O_1O_2 = 2r,$$

takže středy uvažovaných n shodných koulí jsou vrcholy pravidelného n -úhelníku $O_1O_2 \dots O_n$ o středu Z , délce strany $2r$ a o středovém úhlu velikosti $2\varepsilon = \frac{360^\circ}{n}$ (viz obr. 8). Je-li U dotykový bod koulí K_1, K_2 , je ZU osa rovnoramenného trojúhelníku ZO_1O_2 , přičemž platí

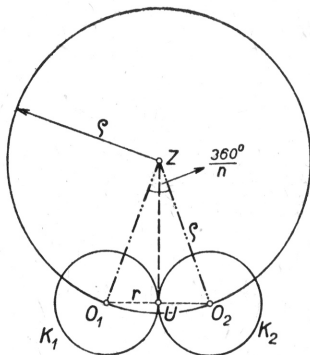
$$\sin \varepsilon = \frac{r}{\varrho}, \quad (2)$$

kde $\varrho = ZO_1$.

Z trojúhelníku ABO_1 , kde B je dotykový bod koule K_1 s rovinou podstavy daného kužele (viz obr. 7), dostáváme $\operatorname{tg} \omega =$

$$= \frac{r}{1 - \varrho} \text{ neboli}$$

$$\varrho = \frac{\operatorname{tg} \omega - r}{\operatorname{tg} \omega}.$$



Obr. 8.

Dále je $\sin \omega = \frac{BO_1}{AO_1}$ neboli

$$\sin \omega = \frac{r}{AS - O_1S}.$$

Dosadíme-li sem z (1) a (1'), pak po úpravě obdržíme

$$r = \frac{\operatorname{tg} \omega (1 - \sin \omega)}{1 + \sin \omega}.$$

Ze vztahu (2) postupně dostáváme

$$\sin \varepsilon = \frac{r}{\varrho} = \frac{r \operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \omega - r} = \frac{1 - \sin \omega}{2 \cos \omega}.$$

Položme pro stručnost $\sin \varepsilon = x$, přičemž je nutně $x > 0$; z předchozího vztahu vypočteme, že

$$x^2 = \frac{(1 - \sin \omega)^2}{4(1 - \sin^2 \omega)} = \frac{1 - \sin \omega}{4(1 + \sin \omega)}$$

a odtud

$$\sin \omega = \frac{1 - 4x^2}{1 + 4x^2}. \quad (3)$$

Vzhledem ke geometrickému významu úhlu $\sphericalangle VAC$ zřejmě platí vztah

$$0 < \omega < 45^\circ,$$

a proto o čísle $\sin \omega$ ze (3) nutně platí vztahy

$$0 < \frac{1 - 4x^2}{1 + 4x^2} < \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Odtud pro číslo $x > 0$ dostáváme snadným výpočtem omezení

$$\frac{1}{2} > x > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

neboli

$$\frac{1}{2} > x > \frac{1}{2} \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Odtud ze vztahu $\frac{1}{2} > \sin \varepsilon$ plyne $\varepsilon = \frac{180^\circ}{n} < 30^\circ$ nebo

$$n > 6;$$

skutečně pro $n > 6$ je $\sin \frac{180^\circ}{n} < \frac{1}{2}$. Z druhé nerovnosti (4) dostaneme postupně

$$\begin{aligned} x &> \frac{1}{2} \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} > \frac{1}{2} \sqrt{3 - 2 \cdot 1,415} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{0,17} > \frac{1}{2} \cdot 0,4 = 0,2 \end{aligned} \quad (5)$$

a pomocí tabulek hodnot funkce sinus dostaneme

$$\frac{180^\circ}{n} > 11,5^\circ$$

neboli

$$n < \frac{180}{11,5} < 16,$$

a tedy $n < 16$.

Pro $n = 15$ je $\varepsilon = \frac{180^\circ}{15} = 12^\circ$ a z tabulek dostaneme $\sin 12^\circ > 0,207$.

Protože (viz tabulky druhých mocnin)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} &< \frac{1}{2} \sqrt[3]{3 - 2 \cdot 1,414} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{0,172} < \frac{1}{2} \sqrt[3]{0,172 \cdot 225} = \frac{1}{2} \cdot 0,415 \doteq 0,207,\end{aligned}$$

je vztah (5) již pro $n = 15$ skutečně splněn.

Přípustné hodnoty pro číslo n jsou tedy přirozená čísla 7 až 15. Příslušný kužel je pak dán poloměrem r a hodnotou ω , určenou vztahem (3) a požadavkem $0 < \omega < 45^\circ$.

Podle řešení Břetislava Vernerá, 3. d roč.
SVVŠ, Křesomyslova, Praha 4

2. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE A

1. Je dána funkce

$$y = \frac{x(1 - 2x)}{2 - 3x}. \quad (1)$$

Načrtněte její graf a výpočtem zjistěte, kterých reálných hodnot y tato funkce nenabývá.

Řešení. I. Z dané rovnice (1) plyne, že pro $2 - 3x = 0$ neboli pro

$$x = \frac{2}{3} \quad (2)$$

není y definováno. V dalším proto je $x \neq \frac{2}{3}$.

Abychom mohli načrtnout graf, vyšetříme především, kdy je $y = 0$; z (1) plyne, že $y = 0$ pro $x(1 - 2x) = 0$, a tedy

$$x = 0 \text{ nebo } x = \frac{1}{2}.$$

Máme tedy dva body grafu

$$[0, 0], \left[\frac{1}{2}, 0 \right].$$

Těchto hodnot užijeme nyní ke zkoumání znaménka čísla y , a to tak, že určíme znaménka čísel

$$x; 1 - 2x; 2 - 3x \quad (3)$$

a budeme na základě toho zkoumat znaménko zlomku na pravé straně v (1):

[1] Necht' je $x < 0$, a tedy $1 - 2x > 0$, $2 - 3x > 0$;
pak je $y < 0$.

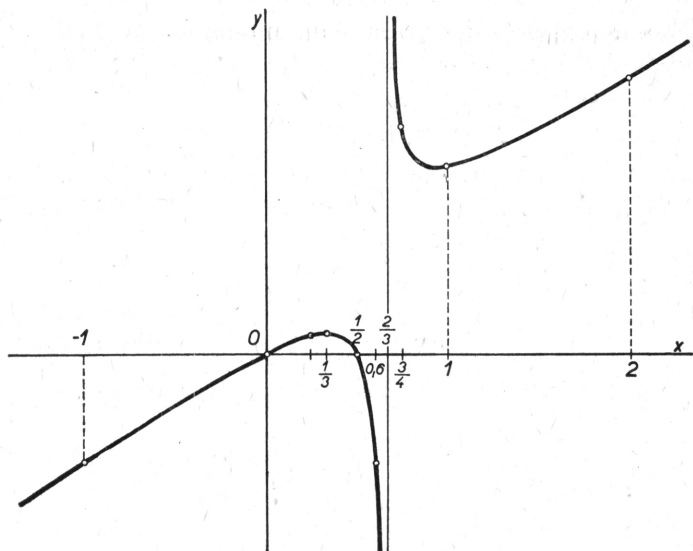
[2] Necht' je $0 < x < \frac{1}{2}$; pak je $1 - 2x > 0$;
 $2 - 3x > 0$, a tedy $y > 0$.

[3] Necht' je $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$; pak je $x > 0$; $1 - 2x < 0$;
 $2 - 3x > 0$, a tedy $y < 0$.

[4] Necht' je $\frac{2}{3} < x$; pak je $x > 0$; $1 - 2x < 0$;
 $2 - 3x < 0$, a tedy $y > 0$.

Těchto výsledků užijeme k načrtnutí grafu (obr. 9); dříve však ještě sestavme tuto tabulku hodnot dané funkce:

x	-2	-1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$0,6$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	2
y	$\frac{-5}{4} = -1,25$	$\frac{-3}{5} = -0,6$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9} > 0,1$	0	$-0,6$	není defino- váno	$\frac{6}{5} = 1,2$	1	$\frac{3}{2} = 1,5$
	[1] záporné y		[2] kladné y		[3] záporné y		[4] kladné y				



Obr. 9.

II. Pro $x \neq \frac{2}{3}$ dostaneme znásobením obou stran rovnice (1) číslem $2 - 3x$ po úpravě kvadratickou rovnicí

$$2x^2 - (3y + 1)x + 2y = 0.$$

Hledáme taková y , pro která neexistuje příslušné x ; to nastane právě tehdy, když diskriminant D této rovnice je záporný. Tu platí

$$\begin{aligned} D &= (3y + 1)^2 - 16y = 9y^2 - 10y + 1 = \\ &= (y - 1)(9y - 1). \end{aligned}$$

Tento rozklad jsme získali řešením kvadratické rovnice $9y^2 - 10y + 1 = 0$. Diskriminant D je záporný pro y z intervalu

$$\frac{1}{9} < y < 1. \quad (4)$$

Závěr. Daná funkce nenabývá hodnot y z intervalu (4).

2. Najdite všetky x z intervalu $0^\circ \leq x < 360^\circ$, ktoré vyhovujú nerovnosti

$$2(\cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x) \geq (\sqrt{3} - 1) \sin 2x.$$

Riešenie. Danú nerovnosť postupne upravme takto:

$$2 \cos^2 x - 2 \sqrt{3} \sin^2 x - 2 \sqrt{3} \sin x \cos x + \\ + 2 \sin x \cos x \geq 0,$$

$$\cos x (\sin x + \cos x) - \sqrt{3} \sin x (\sin x + \cos x) \geq 0, \\ (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x - \sqrt{3} \sin x) \geq 0. \quad (1)$$

Sú dve možnosti [1], [2].

Prípad [1]. Z (1) vyplýva, že súčasne platí

$$\sin x + \cos x \geq 0, \cos x - \sqrt{3} \sin x \geq 0. \quad (2)$$

a) Nech je $\sin x > 0$. Tým sa obmedzujeme na interval $(0^\circ, 180^\circ)$. Vynásobením nerovností (2) číslom $\frac{1}{\sin x}$ dostaneme, že o číslach x platí súčasne

$$\cotg x \geq -1, \cotg x \geq \sqrt{3}. \quad (3)$$

Prvej z týchto nerovností vyhovujú čísla z intervalu $(0^\circ, 135^\circ)$, druhej čísla z intervalu $(0^\circ, 30^\circ)$; spoločnou časťou oboch uvedených intervalov je interval $(0^\circ, 30^\circ)$.

Vzhľadom na to, že nerovnostiam (3) vyhovuje i $x = 0^\circ$, je riešenie danej nerovnosti v tomto prípade určené intervalom

$$\langle 0^\circ, 30^\circ \rangle. \quad (4)$$

b) Nech je $\sin x < 0$, čiže nech x leží v intervale $(180^\circ, 360^\circ)$. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade dostaneme nerovnosti

$$\cotg x \leq -1, \cotg x \leq \sqrt{3},$$

ktoré majú riešenia v intervaloch $\langle 315^\circ, 360^\circ \rangle$, resp. $\langle 210^\circ, 360^\circ \rangle$, a riešenie danej nerovnosti je určené intervalom

$$\langle 315^\circ, 360^\circ \rangle. \quad (5)$$

Prípád [2]. Z (1) vyplýva, že súčasne platí

$$\sin x + \cos x \leq 0, \cos x - \sqrt{3} \sin x \leq 0. \quad (6)$$

a) Pre $\sin x > 0$, t.j. pre x z intervalu $(0^\circ, 180^\circ)$, dostaneme z nerovností (6) nerovnosti

$$\cotg x \leq -1, \cotg x \leq \sqrt{3}$$

a hľadané riešenie je spoločná časť intervalov $\langle 135^\circ, 180^\circ \rangle$, $\langle 30^\circ, 180^\circ \rangle$, k čomu možno pripojiť i $x = 180^\circ$. Máme teda interval

$$\langle 135^\circ, 180^\circ \rangle. \quad (7)$$

b) Pre $\sin x < 0$, t.j. pre x z intervalu $(180^\circ, 360^\circ)$, sa od nerovností (6) dostaneme k nerovnostiam

$$\cotg x \geq -1, \cotg x \geq \sqrt{3}$$

a hľadané riešenie je spoločná časť intervalov $\langle 180^\circ, 315^\circ \rangle$, $\langle 180^\circ, 210^\circ \rangle$, ku ktorej pripojíme aj $x = 180^\circ$ a dostaneme interval

$$\langle 180^\circ, 210^\circ \rangle. \quad (8)$$

Záver. Danej nerovnosti vyhovujú všetky čísla z intervalov [viď (4), (7), (8), (5)] :

$$\langle 0^\circ, 30^\circ \rangle, \langle 135^\circ, 210^\circ \rangle, \langle 315^\circ, 360^\circ \rangle.$$

Podľa riešenia Pavla Hella, 4. tr.
SPŠ hutnícka, Košice

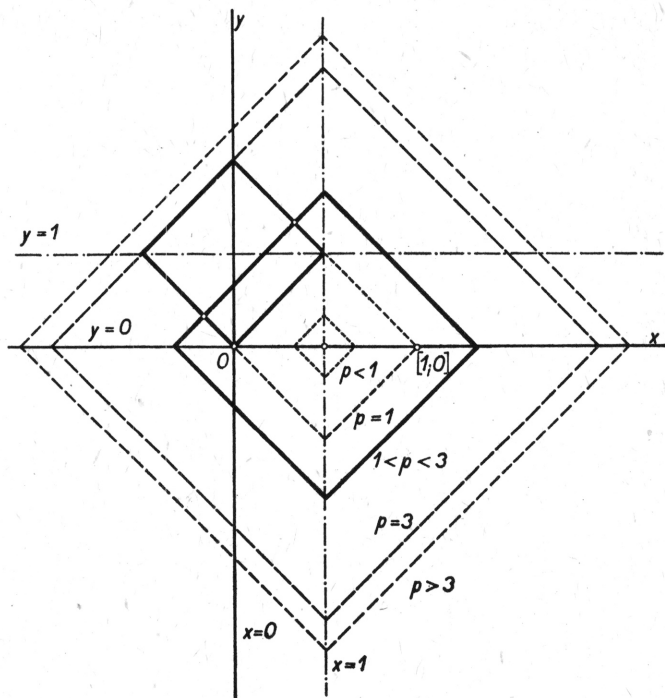
3. V soustavě pravoúhlých souřadnic x, y znázorněte množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $|x| + |y - 1| = 1$, a dále množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $|x - 1| + |y| = p$, kde p je reálný parametr. Užitím výsledku grafického znázornění pak výpočtem řešte soustavu rovnic

$$|x| + |y - 1| = 1, |x - 1| + |y| = p. \quad (1)$$

Řešení. I. Množina bodů příslušná k první rovnici je obvod čtverce, jehož úhlopříčky leží v přímkách $x = 0$, $y = 1$ a mají délku 2. Množina bodů příslušná k druhé rovnici pro $p > 0$ je obvod čtverce, jehož úhlopříčky leží v přímkách $x = 1$, $y = 0$ a mají délku $2p$. Řešením soustavy (1) jsou souřadnice bodů společných oběma obvodům. Pro kladné hodnoty p lze z grafu vyčíst tento výsledek (obr. 10):

- a) $p < 1$: úloha nemá řešení;
- b) $p = 1$: úloha má nekonečně mnoho řešení;
- c) $1 < p < 3$: úloha má dvě řešení;
- d) $p = 3$: úloha má nekonečně mnoho řešení;
- e) $p > 3$: úloha nemá řešení.

II. Početní řešení soustavy. Pro $p \leq 0$ je úloha neřešitelná: pro $p < 0$ nemá druhá rovnice (1) řešení; pro $p = 0$ má druhá rovnice (1) jediné řešení $x = 1$, $y = 0$, to však nevyhovuje první rovnici (1). V dalším budeme předpokládat, že je $p > 0$.



Obr. 10.

Z první rovnice (1) vyplývá, že pro každé řešení soustavy platí $x \leq 1$, $y \geq 0$. (Kdyby bylo $x > 1$, bylo by $|x| > 1$; kdyby bylo $y < 0$, bylo by $|y - 1| > 1$.) Je tedy $x - 1 \leq 0$, $y \geq 0$ a druhou rovnici (1) lze psát ve tvaru

$$1 - x + y = p$$

neboli

$$y = x + p - 1. \quad (1')$$

Odtud vyjádříme $y - 1$ a dosadíme do první rovnice (1); vyjde

$$|x| + |x + p - 2| = 1. \quad (2)$$

Nyní rozlišíme čtyři případy:

$$[1] \quad x + p - 2 \geq 0, \quad x \geq 0$$

$$[2] \quad x + p - 2 \geq 0, \quad x \leq 0$$

$$[3] \quad x + p - 2 \leq 0, \quad x \geq 0$$

$$[4] \quad x + p - 2 \leq 0, \quad x \leq 0$$

V případě [1] rovnice (2) zní $2x + p - 2 = 1$ a odtud plyne

$$x = \frac{1}{2}(3 - p), \quad y = \frac{1}{2}(p + 1) \quad (3)$$

[vzorec pro y jsme dostali z (1')].

V případě [2] rovnice (2) zní $p - 2 = 1$; je tedy

$$p = 3, \quad y = x + 2. \quad (4)$$

V případě [3] rovnice (2) zní $2 - p = 1$; je tedy

$$p = 1, \quad y = x. \quad (5)$$

V případě [4] rovnice (2) zní $-2x - p + 2 = 1$, odtud

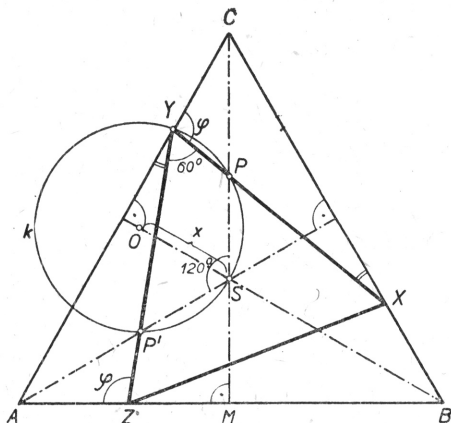
$$x = \frac{1}{2}(1 - p), \quad y = \frac{1}{2}(p - 1). \quad (6)$$

Nyní probereme případy a) až e) pro parametr p a provedeme zkoušku.

V případě a) nevyhovuje žádné z řešení (3) až (6). V případě b) vyhovují řešení (5) a řešení (3), (6) — ovšem jen pro $p = 1$. V případě c) vyhovuje i řešení (3) i řešení (6) a jsou navzájem různá. V případě d) vyhovují

řešení (4) a řešení (3), (6) -- ovšem jen pro $p = 3$.
V případě $p > 3$ nevyhovuje žádné z řešení (3), (6).

4. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky 1 a bod P , který leží mezi průsečíkem výšek trojúhelníku ABC a bodem C .



Obr. 11.

Sestrojte rovnostranný trojúhelník XYZ vepsaný trojúhelníku ABC tak, že vrcholy X, Y, Z leží po řadě na úsečkách BC, CA, AB a že strana XY prochází bodem P . Stanovte podmínku řešitelnosti.

Řešení (obr. 11). Označme $\sphericalangle CYP = \sphericalangle CYX = \varphi$; pak je $\sphericalangle CXY = 120^\circ - \varphi$, $\sphericalangle AYZ = 180^\circ - 60^\circ - \varphi = 120^\circ - \varphi$, tj. $\sphericalangle CXY = \sphericalangle AYZ$. Protože je $XY = YZ$, $\sphericalangle YCX = \sphericalangle ZAY = 60^\circ$, je podle věty usu $\triangle XYC \cong \triangle YZA$, tj.

$$CY = AZ. \quad (1)$$

Dále je $\sphericalangle CYP = \sphericalangle AZP' = \varphi$; přitom P' je průsečík strany YZ s přímkou AS , kde S je průsečík výšek trojúhelníku ABC . Protože je $\sphericalangle YCP = \sphericalangle ZAP' = 30^\circ$, je vzhledem k (1) podle věty usu $\triangle YCP \cong \triangle ZAP'$, tj. $CP = AP'$, a tedy i

$$SP = SC - CP = SA - AP' = SP'. \quad (2)$$

Z toho vyplývá, že bod P' vznikne z bodu P otočením kolem bodu S o úhel velikosti 120° . Bod Y náleží geometrickému místu bodů, z nichž je vidět úsečku PP' pod úhlem velikosti 60° , a to tomu oblouku, který leží v polorovině opačné k $PP'S$. Protože je $\sphericalangle PSP' = 120^\circ$, náleží bod Y kružnici k opsané trojúhelníku $PP'S$.

• V diskusi je třeba vyšetřit, za jakých podmínek má kružnice k s přímkou AC aspoň jeden společný bod. Střed O kružnice k je vrcholem kosočtverce $PSP'O$, složeného ze dvou rovnostranných trojúhelníků. Proto je $OS = SP = x$. Vzdálenost bodu O od přímky AC je dána výrazem

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{6} - x \right|,$$

neboť vzdálenost bodu S od přímky AC je $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Podmínka řešitelnosti úlohy je

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{6} - x \right| \leq x,$$

tj.

$$\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{3}x + x^2 \leq x^2$$

neboli

$$x \geq \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Střední příčka trojúhelníku ABC , spojující středy stran AC , BC , protíná výšku CM právě v bodě, jehož vzdálenost od bodu S je

$$\frac{1}{12} \sqrt{3} \left(= \frac{1}{3} \sqrt{3} - \frac{1}{4} \sqrt{3} \right).$$

3. ÚLOHY III. KOLA KATEGÓRIE A

1. Dokážte, že číslo $11^{100} - 1$ má dekadický zápis ukončený štvorčíslom 6000 a je deliteľné číslom 6000.

Riešenie. Keďže je $6\,000 = 3 \cdot 2\,000$, musíme o čísle $N = 11^{100} - 1$ dokázať, že je deliteľné oboma nesúdeliteľnými číslami 2000 a 3.

Podľa binomickej vety platí

$$N = (10 + 1)^{100} - 1 = M + z, \quad (1)$$

kde M , z sú prirodzené čísla a platí (musíme si uvedomiť, že kombinačné čísla sú celé čísla)

$$\begin{aligned} M &= 10^{100} + \binom{100}{1} 10^{99} + \dots + \binom{100}{96} 10^4 + \\ &+ \binom{100}{97} 10^3 = 10^{100} + \binom{100}{1} 10^{99} + \dots + \\ &+ \binom{100}{4} 10^4 + \binom{100}{3} 10^3 = \\ &= 10^4 \cdot a + 100 \cdot 33 \cdot 49 \cdot 10^3 = 10^4 \cdot b \end{aligned} \quad (2)$$

(pritom a , b sú celé čísla),

$$\begin{aligned} z &= \binom{100}{98} 10^2 + \binom{100}{99} 10 = \binom{100}{2} 10^2 + \binom{100}{1} 10 = \\ &= 50 \cdot 99 \cdot 100 + 1000 = 496\,000. \end{aligned} \quad (3)$$

Dekadický zápis čísla M končí podľa (2) štyrmi nulami a podľa (3) je teda posledným štvorčíslím čísla N číslo 6000, takže je N deliteľné číslom 2000.

Ďalej platí

$$N = (12 - 1)^{100} - 1 = 12^{100} - \binom{100}{1} 12^{99} + \dots - \binom{100}{1} 12 + 1 - 1 = 12P = 3 \cdot 4P,$$

kde číslo P je celé (kombinačné čísla sú celé čísla). Číslo N je teda deliteľné tiež tromi.

Tým je dôkaz prevedený.

Podľa riešenia Petra Neuwirtha, 3. d tr.
SVŠ, Šrobárova 46, Košice

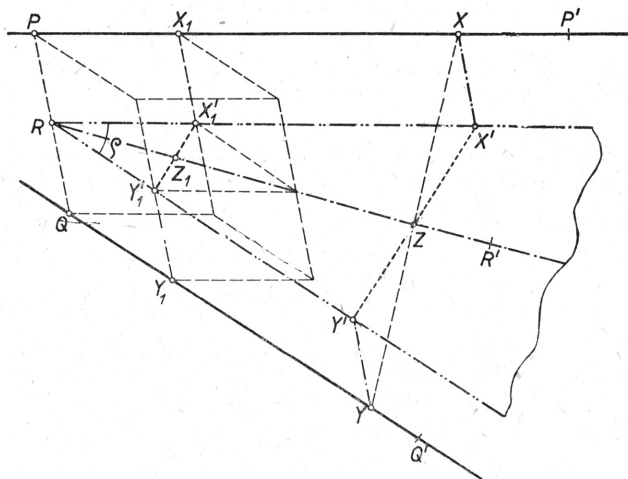
2. Jsou dány dvě mimoběžky $p = PP'$, $q = QQ'$. Bod X s počáteční polohou P se pohybuje po polopřímce PP' konstantní rychlostí c_1 a bod Y s počáteční polohou Q se pohybuje po polopřímce QQ' konstantní rychlostí c_2 . Oba body se dají do pohybu současně.

Dokažte, že střed Z úsečky XY vždy leží na jisté polopřímce RR' , kde R je střed úsečky PQ .

Řešení. V dalším užijeme známé věty V: „Jsou-li α , β dvě různé rovnoběžné roviny a X , Y libovolné body po řadě v těchto rovinách ležící, potom množinou všech středů Z úseček XY , když body X , Y po řadě probíhají roviny α , β , je rovina $\varrho // \alpha$, která má od každé z rovin α , β stejnou vzdálenost.”

Je-li R střed úsečky PQ , vedme jím rovinu ϱ , kde $\varrho // PP'$, $\varrho // QQ'$ (obr. 12). Označme X , Y polohu uvažovaných bodů v čase $t > 0$ a X_1 , Y_1 polohu těchto bodů v čase $t = 1$; potom snadno sestrojíme rovnoběžnostěn

T o hranách PQ , PX_1 , QY_1 ; jeho dvě stěny jsou rovnoběžné s rovinou ϱ (viz obr. 12). Středů úseček XY , X_1Y_1 po řadě označme Z , Z_1 , kde Z_1 je středem rovnoběžnostěnu T , protože X_1Y_1 je jeho tělesová úhlopříčka;



Obr. 12.

bod Z_1 zřejmě leží v rovině ϱ . Sestrojíme rovnoběžníky $PXX'R$, $PX_1X_1'R$, $QYY'R$, $QY_1Y_1'R$, přičemž první dva leží v rovině $\alpha \parallel \varrho$, druhé dva v rovině $\beta \parallel \varrho$; platí tedy

$$PR = QR = XX' = YY' = X_1X'_1 = Y_1Y'_1.$$

Přitom trojúhelníky $RX'_1Y'_1$, $RX'Y'$ leží v rovině ϱ a platí $XX' \parallel PR$, $PR \parallel YY'$, takže je $XX' \parallel YY'$ a vedle toho $XX' = YY'$; v konvexním čtyřúhelníku $XX'YY'$ s průsečíkem Z úhlopříček jsou dvě protější strany XX' , YY'

shodné a rovnoběžné; pak se snadno dokáže (např. užitím souměrnosti o středu Z), že $XX'YY'$ je rovnoběžník a že tedy platí $X'Z = Y'Z$, takže Z je středem úsečky $X'Y'$. Rovněž bod Z_1 je středem úsečky $X'_1Y'_1$. Snadno usoudíme, že platí

$$RX' = c_1 t, RY' = c_2 t, RX'_1 = c_1, RY'_1 = c_2,$$

takže trojúhelníky $RX'_1Y'_1$, $RX'Y'$, a tím i středy Z_1 , Z jejich stran $X'_1Y'_1$, $X'Y'$ jsou stejnohlé vzhledem k bodu R při konstantě stejnohllosti $t > 0$. Odtud plyne, že je $RZ = RZ_1 \cdot t$ a že bod Z leží na polopřímce RZ_1 pro každé $t > 0$, což jsme měli dokázat.

3. Určete všechny hodnoty parametru α z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, pro které má rovnice

$$(2 \cos \alpha - 1) x^2 + 4x + 4 \cos \alpha + 2 = 0 \quad (1)$$

kladný kořen x_1 , kdežto druhý kořen x_2 , pokud existuje a pokud je různý od x_1 , není kladný.

Řešení. I. Je-li v (1)

$$2 \cos \alpha - 1 = 0,$$

tj.

$$\alpha = 60^\circ, \alpha = 300^\circ, \quad (1')$$

pak, jak se snadno přesvědčíme, má rovnice jediný kořen $x = -1$. Hodnoty (1') nejsou tedy řešením úlohy.

II. Dále nechť je $\alpha \neq 60^\circ, \alpha \neq 300^\circ$, a tedy $2 \cos \alpha - 1 \neq 0$. Kvadratická rovnice (1) pak má diskriminant $D = 8(3 - 4 \cos^2 \alpha)$. Reálné kořeny má právě tehdy, je-li $D \geq 0$, tj. $3 - 4 \cos^2 \alpha \geq 0$, tj.

$$|\cos \alpha| \leq \frac{1}{2} \sqrt{3};$$

to nastane právě tehdy, náleží-li α jednomu z intervalů
 $\langle 30^\circ, 150^\circ \rangle, \langle 210^\circ, 330^\circ \rangle$. (2)

Rovnice (1) má jeden kořen kladný a druhý kořen záporný právě tehdy, když je $x_1 x_2 < 0$. Platí

$$x_1 x_2 = \frac{4 \cos \alpha + 2}{2 \cos \alpha - 1}. \quad (3)$$

Jsou možnosti [1], [2].

Případ [1]. Nechť $2 \cos \alpha - 1 > 0$ neboli nechť je α v jednom z intervalů $\langle 0^\circ, 60^\circ \rangle, \langle 300^\circ, 360^\circ \rangle$; pak podle (3) je $2 \cos \alpha + 1 < 0$, tj. $\cos \alpha < -\frac{1}{2}$ a α je z intervalu $\langle 120^\circ, 240^\circ \rangle$. Uvedené intervaly nemají společné číslo. Případ [1] nedává tedy žádné řešení.

Případ [2]. Nechť $2 \cos \alpha - 1 < 0$, tj. α je z intervalu $\langle 60^\circ, 300^\circ \rangle$ a vzhledem ke (2) z intervalů

$$\langle 60^\circ, 150^\circ \rangle, \langle 210^\circ, 300^\circ \rangle. \quad (4)$$

Protože $x_1 x_2$ je číslo záporné, je podle (3) $2 \cos \alpha + 1 > 0$, tj. $\cos \alpha > -\frac{1}{2}$, takže α je v jednom z intervalů

$$\langle 0^\circ, 120^\circ \rangle, \langle 240^\circ, 360^\circ \rangle. \quad (5)$$

Průnik intervalů (4), (5) jsou intervaly

$$\langle 60^\circ, 120^\circ \rangle, \langle 240^\circ, 300^\circ \rangle, \quad (6)$$

které dávají řešení úlohy.

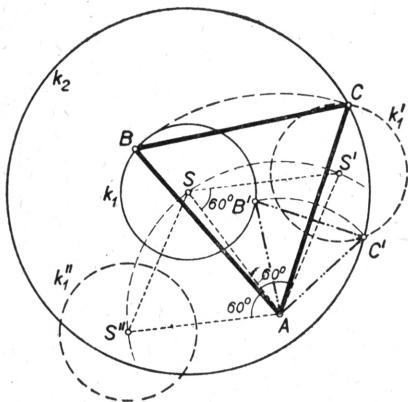
Zbývá vyřídit případ, kdy je jeden kořen kladný a druhý roven nule. To nastane právě tehdy, když je $x_1 x_2 = 0$

a zároveň $x_1 + x_2 > 0$. Z (3) pak plyne $2 \cos \alpha + 1 = 0$, tj.

$$\alpha = 120^\circ \text{ nebo } \alpha = 240^\circ; \quad (7)$$

přítom vskutku je $2 \cos \alpha - 1 = -2 \neq 0$. Dále je $x_1 + x_2 = 2$, což je kladné číslo. Spojením (1'), (6), (7) dostáváme, že řešením úlohy jsou všechna α z intervalů $(60^\circ, 120^\circ)$, $(240^\circ, 300^\circ)$.

4. V rovině jsou dány body A, S o dané vzdálenosti $a > 0$. Dále jsou dána kladná čísla b, c , pro která platí $b < a < c$.



Obr. 13.

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy B, C měly od bodu S po řadě vzdálenosti b, c . Udejte podmínky řešitelnosti pomocí čísel a, b, c .

Řešení. I. *Rozbor* (obr. 13). Vrcholy B, C každého z hledaných trojúhelníků ABC leží po řadě na kružnicích

$k_1 \equiv (S; b)$, $k_2 \equiv (S, c)$. Otočení O kolem středu A o úhel velikosti 60° ve vhodném smyslu (kladném nebo záporném) převede vrchol B ve vrchol C ; toto otočení O převede kružnici k_1 v jistou kružnici $k'_1 \equiv \equiv (S', b)$. Bod C pak náleží dvěma geometrickým místům bodů: kružnici k_2 a kružnici k'_1 (resp. kružnici k''_1 ; kružnice k'_1, k''_1 vzniknou z k_1 otočením kolem bodu A o úhel velikosti 60° v kladném a záporném smyslu). Tím je rozbor úlohy proveden.

Z rozboru vyplývá *konstrukce*; je-li C libovolný společný bod kružnic k_2, k'_1 , je $C \equiv A$ (neboť $c > a$). Bod B dostaneme otočením bodu C kolem A o úhel velikosti 60° ve vhodném smyslu. Trojúhelník ABC je rovno-ramenný se základnou BC ; úhel proti základně má velikost $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Je tedy $\triangle ABC$ rovnostranný a splňuje zřejmě podmínky úlohy.

Diskuse. Úloha má tolik různých řešení, kolik různých společných bodů mají kružnice k_2, k'_1 a k_2, k''_1 (u obou těchto dvojic jsou počty společných bodů stejné, neboť obě dvojice jsou souměrně sdruženy podle přímky AS). Protože trojúhelník ASS' je rovnostranný, je $SS' = AS = a$. Podmínka pro existenci společných bodů obou kružnic tedy zní

$$b + c \geq a \geq c - b \quad (1)$$

(neboť $c > a > b$). Platí-li v (1) rovnost, má úloha dvě řešení, neplatí-li v (1) žádná rovnost, má úloha čtyři řešení.

4. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE B

1. Šesticiferné přirozené číslo, které je v dekadické soustavě zapsáno ve tvaru $(xyxyxy)$, kde x, y jsou některé z cifer 0, 1, 2, ..., 9, nemá většího prvočinitele než 97; dokažte.

Řešení. Hledané číslo N zapsané znakem $(xyxyxy)$ je

$$\begin{aligned} N &= 10^5x + 10^4y + 10^3x + 10^2y + 10x + y = \\ &= (10x + y)(10^4 + 10^2 + 1) = \\ &= 10101(10x + y) = \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37(10x + y). \end{aligned}$$

Číslo $10x + y$ je dvojciferné (je $x \neq 0$) a největší prvočíselný dělitel čísla N bude $10x + y$, je-li $10x + y$ prvočíslo alespoň rovné 37; největší dvojciferné prvočíslo je 97. To vede k řešení pro $x = 9, y = 7$. Takové číslo je jediné, a to

$$979797,$$

o němž platí $979797 = 97 \cdot 10101 = 97 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$; každé jiné číslo uvažovaného typu má největšího prvočíselného dělitele menšího než 97.

2. V rovině je daný lichobežník $ABCD$ s větší základnou AB .

Zostrojte priamku $p \parallel AB$ takú, že úsečky AD, AC, BD, BC ju pretínajú postupne v navzájom rôznych bodoch M, N, P, Q tak, že platí $MN = NP = PQ$.

Riešenie. Označme u vzdialenosť priamok AB, p a v vzdialenosť priamok CD, p . Ďalej postupne označme a, c dĺžky základní AB, CD . Z podobnosti trojuholníkov (obr. 14)

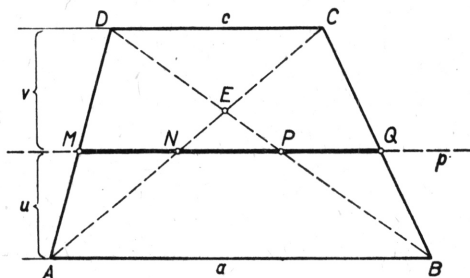
$$\triangle AMN \sim \triangle ADC$$

dostaneme rovnosť

$$MN = c \frac{u}{u + v}. \quad (1)$$

Z podobnosti trojuholníkov

$$\triangle BPQ \sim \triangle BDC$$



Obr. 14.

dostaneme rovnosť

$$PQ = c \frac{u}{u + v}. \quad (2)$$

Z podobnosti trojuholníkov

$$\triangle DMP \sim \triangle DAB$$

dostaneme rovnosť

$$MP = a \frac{v}{u + v}. \quad (3)$$

Podľa (1), (2) platí teda pre každú priamku p rovnosť $MN = PQ$. Ak platí ešte $MN = NP$, je $MP = 2MN$, t. j. podľa (1), (3)

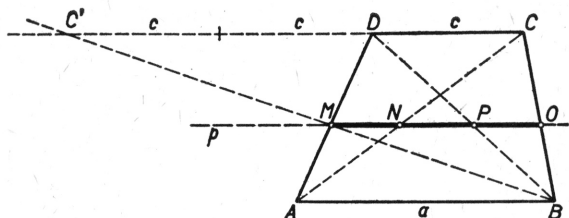
$$av = 2cu. \quad (4)$$

Obrátene, ak platí vzťah (4), potom je podľa (1) a (3) $MP = 2MN$, t. j. $MN = NP$, $MN = PQ$ a sú splnené požiadavky úlohy.

K rozriešeniu úlohy stačí teda zostrojiť medzi bodmi A , D bod M tak, aby platilo [podľa (4)]

$$\frac{AM}{DM} = \frac{u}{v} = \frac{a}{2c}.$$

Konstruktoria hľadaného bodu M je naznačená na obr. 15. Bod M je stred rovnoláhlosti, v ktorej body D , C' sú obrazmi bodov A , B .



Obr. 15.

3. Užitím výpočtu sestrojte trojúhelník ABC o obvodu 130 mm, který má tu vlastnost, že dotykové body kružnice jemu vepsané dělí strany AB , AC v obou případech v poměru 1 : 3.

Vypočtete poměr stran trojúhelníku ABC .

Řešení (obr. 16–18). Pro stručnost položíme

$$AB = c, AC = b, BC = a, 2s = a + b + c;$$

tu je z planimetrie známo, že

$$AC' = s - a, BC' = s - b, CB' = s - c \dots \quad (1)$$

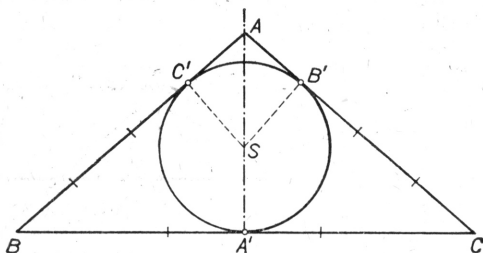
(viz označení v obr. 17).

Vzhledem k textu úlohy jsou tři možnosti: Buď je (obr. 16)

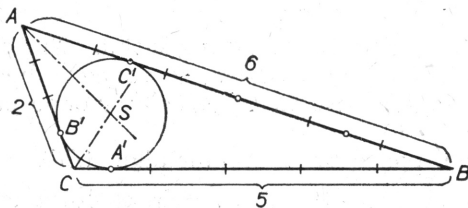
$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{AB'}{CB'} = \frac{1}{3} \quad (2a)$$

anebo je (obr. 17)

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{CB'}{AB'} = \frac{1}{3}, \quad (2b)$$



Obr. 16.



Obr. 17.

anebo je (obr. 18)

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{AB'}{CB'} = 3. \quad (2c)$$

Zdánlivá čtvrtá možnost se dá vyloučit záměnou označení bodů B , C .

Případ [1]. Vzhledem ke vztahům (1), (2a) platí

$$\frac{s-a}{s-b} = \frac{1}{3}, \quad \frac{s-a}{s-c} = \frac{1}{3}, \text{ tj.}$$

$$a = \frac{3}{2}b, \quad b = c.$$

Je tedy

$$a : b : c = 3 : 2 : 2. \quad (3)$$

Protože pro tento poměr délek a , b , c platí

$$\begin{aligned} a + b &> c, \quad b + c > a, \\ c + a &> b, \end{aligned} \quad (4)$$

proto trojúhelníky se stranami splňujícími (3) skutečně existují (viz obr. 16).

Případ [2]. Vzhledem ke vztahům (1), (2b) platí (obr. 17)

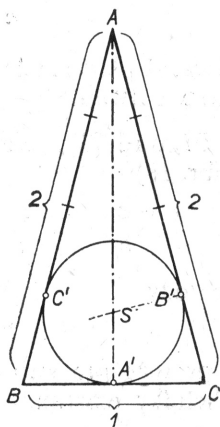
$$\frac{s-a}{s-b} = \frac{1}{3}, \quad \frac{s-c}{s-a} = \frac{1}{3}$$

neboli

$$s-b = 3(s-a), \quad s-c = \frac{1}{3}(s-a). \quad (5)$$

Protože je

$$\begin{aligned} a &= (s-b) + (s-c), \text{ dostaneme po dosazení z před-} \\ &\text{chozích vztahů } a = 3(s-a) + \frac{1}{3}(s-a) \text{ neboli } a = \\ &= \frac{10}{13}s. \end{aligned}$$



Obr. 18.

Odtud a z (5) dostaneme

$$b = 3a - 2s = \frac{4}{13}s; \quad c = \frac{1}{3}(2s + a) = \frac{12}{13}s.$$

Je tedy

$$a : b : c = 5 : 2 : 6, \quad (6)$$

přičemž platí vztahy (4) a trojúhelníky s poměrem těchto stran existují.

Případ [3]. Vzhledem k vztahům (1), (2c) platí (obr. 18)

$$\frac{s-a}{s-b} = 3, \quad \frac{s-a}{s-c} = 3 \quad \text{neboli} \quad b = c, \quad b = 2a.$$

Je tedy

$$a : b : c = 1 : 2 : 2 \quad (7)$$

a protože pro tato čísla platí vztahy (4), příslušné trojúhelníky existují.

Konstrukci v jednotlivých případech provedeme tak, že daný obvod $2s = 130$ mm rozdělíme v předepsaném poměru [viz (3), (6), (7)] a sestrojíme z takto vzniklých úseček trojúhelník, který — jak jsme dříve dokázali — existuje.

Pomocí vzorců (1) snadno provedeme zkoušku, která nás přesvědčí o tom, že příslušné dotykové body kružnice vepsané takto sestrojenému trojúhelníku dělí strany AB , AC v poměru $1 : 3$ (bez ohledu na pořadí úseků).

Úloha má tedy právě 3 řešení (pokud připustíme výměnu bodů B , C).

4. V rovine je daných 6 rôznych bodov tejto vlastnosti: každá štvorica vybraná spomedzi nich obsahuje aspoň tri body, ktoré ležia na priamke.

Dokážte, že aspoň 5 z daných šiestich bodov leží na priamke.

Riešenie. Kvôli jednoduchosti označíme dané body číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6. Vo štvorici 1 2 3 4 existujú podľa predpokladu tri body, ktoré ležia na priamke. Označíme ich 1, 2, 3 a priamku, na ktorej ležia, označíme p . Ak mimo priamky p leží najviac jeden z bodov 4 až 6, je veta dokázaná. Pripustíme teda, že aspoň dva body (označíme ich 5, 6) ležia mimo priamky p . Vo štvorici 1 2 5 6 existuje trojica bodov ležiacich na priamke. Nemôže to byť trojica 1 2 5 ani trojica 1 2 6, pretože body 5, 6 neležia na priamke $p \equiv 1\ 2$. Trojicou bodov ležiacich na priamke je teda buď 1 5 6, alebo 2 5 6. Označenie bodov 1, 2 upravíme tak*), aby to bola trojica 1 5 6. Vo štvorici 2 3 5 6 existuje aspoň jedna trojica bodov ležiacich na priamke. Nie je ňou trojica 2 3 5 ani 2 3 6, pretože 5, 6 neležia na priamke $p \equiv 2\ 3$, no ani 2 5 6, ani 3 5 6, pretože priamka $56 \neq p$ pretína priamku p v bode 1, ktorý je rôzny od 2, 3. Tým je dokázané, že mimo priamky p nemôžu ležať dva z daných šiestich bodov, t. j. aspoň päť z daných bodov leží na p .

5. Najdte všechna celá čísla x , pro něž výraz

$$-6x^2 + 167x + 4\,823 \quad (1)$$

je roven:

- a) prvočíslu;
- b) co největšímu přirozenému číslu;
- c) co nejmenšímu přirozenému číslu.

Řešení. Daný trojčlen (1) označme y a jeho diskriminant D .

*) T. j. vymeníme případne ich označenie.

Je

$$\begin{aligned} D &= 167^2 + 4 \cdot 6 \cdot 4\,823 = 27\,889 + 115\,752 = \\ &= 143\,641 = 379^2 > 0. \end{aligned}$$

Proto rovnice $-6x^2 + 167x + 4\,823 = 0$ má dva různé reálné kořeny

$$x_1 = -\frac{53}{3}, \quad x_2 = \frac{91}{2} \quad (2)$$

a trojčlen (1) lze rozložit:

$$y = -6 \left(x + \frac{53}{3} \right) \left(x - \frac{91}{2} \right)$$

neboli

$$y = (3x + 53)(-2x + 91). \quad (3)$$

Je patrné, že pro x z intervalu

$$x_1 = -\frac{53}{3} < x < \frac{91}{2} = x_2 \quad (4)$$

je $y > 0$. Pro hranice x_1, x_2 tohoto intervalu je $y = 0$; pro ostatní x je $y < 0$.

Obraťme se nyní k jednotlivým úlohám.

a) Má-li pro celé číslo x být y prvočíslo, musí jeden z činitelů na pravé straně (3) být ± 1 . Rozlišíme možnosti:

[1]. Pro číslo 1 je jediná možnost: $-2x + 91 = 1$ neboli $x = 45$; tu je $3x + 53 = 188$, což však není prvočíslo.

[2]. Pro číslo -1 jsou dvě možnosti:

(1) Je $3x + 53 = -1$, tj. $x = -18$ a $y = -127$, což není prvočíslo.

(2) Je $-2x + 91 = -1$, tj. $x = 46$ a $y = -191$, což také není prvočíslo.

Odpověď na otázku a): Požadované číslo x neexistuje.

Pro další vyšetřování si uvědomíme, že grafem funkce (3) v pravoúhlých souřadnicích je parabola, která protne osu x souřadnic v bodech

$$X_1 \equiv \left[-\frac{53}{3}; 0 \right], \quad X_2 \equiv \left[\frac{91}{2}; 0 \right], \quad (5)$$

její vrchol V je nad osou x ; abychom stanovili souřadnice vrcholu, upravíme daný kvadratický trojčlen na tvar:

$$y = -6 \left(x^2 - 2 \cdot \frac{167}{12} x + \frac{167^2}{12^2} \right) + 4\,823 + 6 \cdot \frac{167^2}{12^2}$$

neboli

$$y = -6 \left(x - \frac{167}{12} \right)^2 + \frac{1}{24} \cdot 143\,641. \quad (6)$$

Pro vrchol V paraboly je souřadnice y maximální; ze vztahu (6) je patrné, že maximum y nastane pro

$$x - \frac{167}{12} = 0, \text{ tj. pro } x = \frac{167}{12}.$$

$$\text{Je tedy } V \equiv \left[\frac{167}{12}; \frac{143\,641}{24} \right].$$

Víme, že funkce (6) je v intervalu $\left[-\frac{53}{3}, \frac{167}{12} \right]$ rostoucí, v intervalu $\left[\frac{167}{12}; \frac{91}{2} \right]$ klesající; na základě toho zodpovíme otázky b), c).

b) Hledané celé číslo x , pro které je y v (6) co největší přirozené číslo, musí vzhledem k předchozímu být buď nejbližší přirozené číslo menší než $\frac{167}{12}$, anebo nejbližší větší přirozené číslo k číslu $\frac{167}{12}$; tj. buď je $x = 13$, anebo $x = 14$, neboť je

$$13 < \frac{167}{12} < 14.$$

Pro $x = 13$ je podle (3) $y = 92 \cdot 65 = 5980$; pro $x = 14$ je $y = 95 \cdot 63 = 5985$. Je tedy hledaným číslem číslo $x = 14$.

c) Hledané celé x , pro které je y co možná nejmenší přirozené číslo, musí být jedno z těchto čísel: buď nejbližší větší celé číslo než $x_1 = -\frac{53}{3}$, tj. $x_3 = -17$, anebo nejbližší menší celé číslo, než je $x_2 = \frac{91}{2}$, tj. $x_4 = 45$.

Pro $x = x_3$ ze (3) dostaneme

$$y = (-51 + 53)(34 + 91) = 2 \cdot 125 = 250.$$

Pro $x = x_4$ ze (3) dostaneme

$$y = (135 + 53)(-90 + 91) = 188.$$

Hledané číslo je tedy $x = 45$.

Tím je úloha úplně rozřešena.

6. Jsou dány rovnice

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad (1)$$

$$x^2 + px - 1 = 0, \quad (2)$$

kde p je dané reálné číslo.

Dokažte, že obě rovnice mají reálné kořeny, a vyšetřte, jak jsou tyto kořeny uspořádány podle velikosti, jestliže parametr p probíhá všechna reálná čísla.

Řešení. Rovnice (2) má diskriminant $p^2 + 4 > 0$, takže má dva reálné různé kořeny; rovnici (1) dostaneme ze (2) pro $p = -1$. Každá z rovnic (1), (2) má tedy dva různé reálné kořeny. Pro $p = -1$ jsou kořeny rovnice (2) rovny po řadě kořenům rovnice (1); nechť v dalším je $p \neq -1$ a označme x_1, x_2 kořeny rovnice (1), x_3, x_4 kořeny rovnice (2). Podle známé věty o kvadratické rovnici platí:

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (3)$$

$$x_1 x_2 = -1 \quad (3')$$

$$x_3 + x_4 = -p \quad (4)$$

$$x_3 x_4 = -1 \quad (4')$$

O kořenech lze při vhodné volbě indexů předpokládat, že je

$$x_1 > x_2, \quad x_3 > x_4; \quad (5)$$

protože však platí vztah (3'), jsou x_1, x_2 různých znamének a tedy vzhledem k (5) je $x_1 > 0, x_2 < 0$; podobně $x_3 > 0, x_4 < 0$. Platí tedy

$$x_1 > 0; \quad x_3 > 0; \quad x_2 = -\frac{1}{x_1} < 0; \quad x_4 = -\frac{1}{x_3} < 0. \quad (6)$$

Řešením (1) dostaneme

$$x_1 = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}), \quad x_2 = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}); \quad (7)$$

řešením rovnice (2) dostaneme

$$x_3 = \frac{1}{2} (-p + \sqrt{p^2 + 4}), \quad x_4 = \frac{1}{2} (-p - \sqrt{p^2 + 4}). \quad (8)$$

Zkoumejme, pro které hodnoty p platí $x_3 > x_1$. Podle (7), (8) dostaneme podmínku

$$-p + \sqrt{p^2 + 4} > 1 + \sqrt{5}$$

a odtud po umocnění a úpravě

$$p < -1. \quad (9)$$

Obrácením postupu zjistíme, že pro každé $p < -1$ je $x_3 > x_1$.

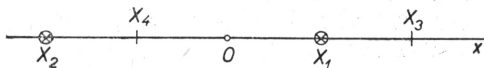
Zkoumejme obdobně, pro které hodnoty p platí $x_4 > x_2$. Podle (7), (8) dostaneme podmínku

$$-p - \sqrt{p^2 + 4} > 1 - \sqrt{5}$$

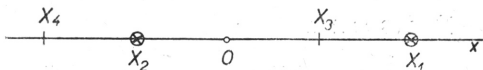
a odtud po umocnění a úpravě opět

$$p < -1. \quad (9')$$

Také zde dostaneme obrácením postupu, že pro každé $p < -1$ je $x_4 > x_2$.



Obr. 19.



Obr. 20.

Odtud vyplývá, že pro $p < -1$ nastane situace zakreslená na obr. 19, pro $p > -1$ situace zakreslená na obr. 20.

Závěr. Znázorníme-li kořeny první rovnice body x_1, x_2 a (pro $p \neq -1$) kořeny druhé rovnice body x_3, x_4 , potom je $x_1 \neq x_2, x_3 \neq x_4$ a platí: a) Obraz O nuly leží uvnitř úseček x_1x_2, x_3x_4 ; b) každá dvojice x_3, x_4 , kterou dostaneme pro $p \neq -1$, odděluje dvojici x_1, x_2 .

5. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE B

1. Najděte všechna nezáporná čísla a, b, c , pro která platí rovnost

$$\sqrt{a-b+c} = \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}. \quad (1)$$

Řešení. Úkolem je najít všechna řešení rovnice (1). Umocnění dá

$$a - b + c = a + b + c - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac},$$

po úpravě

$$b + \sqrt{ac} = \sqrt{b} (\sqrt{a} + \sqrt{c}).$$

Další umocnění dá

$$b^2 + 2b\sqrt{ac} + ac = b(a + 2\sqrt{ac} + c),$$

po úpravě

$$b^2 - (a+c)b + ac = 0. \quad (2)$$

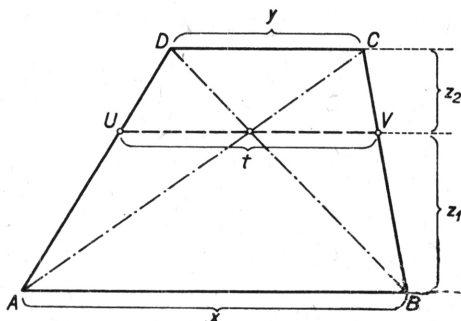
Rovnice (2) je kvadratická pro neznámou b a podle známé věty má za kořeny jediné čísla $b_1 = a, b_2 = c$; platí tedy nutně $a = b$ anebo $b = c$.

Zkouška. Např. pro libovolné nezáporné $a = b$ a libovolné nezáporné c je levá strana (1) rovna $\sqrt{c}$ a pravá rovněž $\sqrt{c}$.

2. V lichobežníku $ABCD$ sú dané dĺžky x, y základní AB, CD . Rovnobežka so základňami vedená priesečníkom uhlopriečok tohto lichobežníka pretne ramená AD, BC postupne v bodoch U, V .

Nájdite pomer obsahov lichobežníkov $ABVU, UVCD$.

Riešenie. Použijeme označenie z obr. 21. Pre obsahy P_1, P_2 lichobežníkov $ABVU, UVCD$ platí



Obr. 21.

$$P_1 = \frac{1}{2} (x + t) z_1, \quad P_2 = \frac{1}{2} (y + t) z_2,$$

takže

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(x + t) z_1}{(y + t) z_2}. \quad (1)$$

Z rovnobežnosti úsečiek AB, UV podľa stredu D vyplýva

$$UV = x \frac{z_2}{z_1 + z_2}.$$

Z rovnolehlosti úsečiek AB , VO podľa stredu C vyplýva opäť

$$VO = x \frac{z_2}{z_1 + z_2}.$$

Stadiaľ

$$t = \frac{2xz_2}{z_1 + z_2}. \quad (2)$$

Z rovnolehlosti úsečiek AB , CD podľa stredu O vyplýva

$$\frac{x}{y} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (3)$$

Ak zo vzťahu (3) vyjadríme z_1 a dosadíme do (2), dostaneme

$$t = \frac{2xy}{x + y}. \quad (4)$$

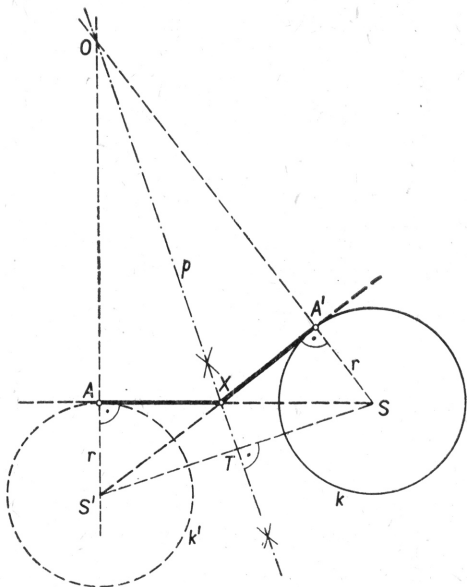
Ďalej vyjadríme pomocou vzťahu (4) dvojčleny $x + t$, $y + t$ a dosadíme do (1); dostaneme

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(x + 3y) x^2}{(3x + y) y^2}.$$

3. Vně dané kružnice $k \equiv (S, r)$ je dán bod A . Uvnitř úsečky AS sestrojte bod X tak, aby délka tečny vedené z bodu X ke kružnici k byla rovna délce úsečky AX .

Poznámka. U této úlohy uvádíme několik řešení, z nichž čtenář vidí, že některou úlohu lze řešit velmi odlišnými způsoby.

Řešení č. 1 (obr. 22). Označme A' dotkový bod hledané tečny $A'X$, kde X je bodem úsečky AS a leží vně kružnice k , přičemž platí $XA' = XA$. Osa p úsečky AA' prochází bodem X (bod X je hlavním vrcholem



Obr. 22.

rovnoramenného trojúhelníku XAA'). Osová souměrnost o ose p převádí úsečku AX v úsečku $A'X$, trojúhelník SXA' (kde $\sphericalangle A' = 90^\circ$) v trojúhelník $S'XA$ a kružnici k v jistou kružnici $k' \equiv (S', r)$, která se dotýká přímky AS v bodě A . Odtud tato konstrukce:

Na kolmici vedené bodem A k přímce AS sestrojme S' tak, aby $AS' = r$ (z obou možností volme jednu), a sestrojme kružnici $k' \equiv (S', r)$. Osa p úsečky SS' má s úsečkou AS společný bod X , který je hledaným bodem.

Důkaz a diskuse. Kružnice k, k' jsou podle konstrukce souměrně sdružené vzhledem k přímce p . Je $r < AS$

Podle řešení Josefa Prokeše, 2. b roč.
SVVŠ, České Budějovice

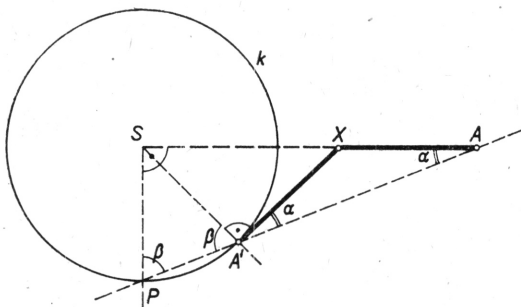


6

SA' . Platí $\triangle OXA' \cong \triangle OXA$ (usu), a tedy $OA = OA'$. Bod O je středem kružnice m , která se dotýká přímky SA v bodě A a s kružnicí k má vnější dotyk.

Konstrukci (obr. 23) provedeme převedením úlohy na sestrojení kružnice m' , která je s m soustředná, prochází bodem S a dotýká se přímky $n \parallel SA$, která má od přímky SA vzdálenost r : Jestliže bod A_1 leží na kolmici vedené bodem A k přímce SA tak, že $AA_1 = r$, sestrojíme osu q úsečky SA_1 a označíme O průsečík přímek q, AA_1 . Hledaná kružnice $m \equiv (O, OA)$ se zřejmě dotýká kružnice k vně v hledaném bodě A' ; bod X je společný bod přímek q, SA, A_1A' .

Podle řešení Václava Pištěka, 2. b roč.
SVVŠ, Pelhřimov



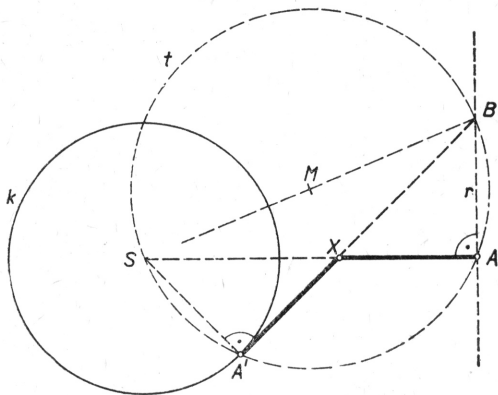
Obr. 24.

Řešení č. 3 (obr. 24). Úhel $\sphericalangle SA'A$, kde A' je hledaný dotykový bod, je tupý, neboť bod X leží uvnitř úsečky SA a je $\sphericalangle SA'X = 90^\circ$. Proto polopřímka AA' má s kružnicí k společný bod $P \equiv A'$. Označme α, β úhly při základnách AA', PA' rovnoramenných troj-

úhelníků XAA' , SPA' . Protože je $\sphericalangle SA'X = 90^\circ$, je $\sphericalangle PA'S + \sphericalangle AA'X = 90^\circ$ neboli $\alpha + \beta = 90^\circ$ a v trojúhelníku APS je nutně $\sphericalangle S = 90^\circ$. Odtud *konstrukce*:

Sestrojme kolmici k přímce SA bodem S a označme P jeden z jejích průsečíků s kružnicí k . Další průsečík přímky PA s kružnicí k označme A' (snadno se dokáže, že skutečně padne dovnitř úsečky PA); tečna v bodě A' ke kružnici k má s úsečkou společný hledaný bod X . Důkaz a diskusi provede čtenář.

Podle řešení Viliama Kozenčuka, 2. tr.
SVŠ, Trenčianske Teplice



Obr. 25.

Řešení č. 4 (obr. 25). Označme vzhledem k předchozím řešením B průsečík přímky XA' a kolmice vedené bodem A k přímce AS . Potom je $\triangle XBA \cong \triangle XSA'$ ($XA = XA'$ a shodnost ve všech úhlech) a tedy $BA = SA' = r$. Bod A' tedy leží na Thaletově kružnici t opsané nad BS jako průměrem.

Odtud plyne snadno *konstrukce*: Na kolmici vedené bodem A k přímkce AS označme B jeden z obou bodů, které mají od přímky AS vzdálenost r . Nad úsečkou BS jako průměrem sestrojme kružnici t se středem M . Kružnice k , t mají zřejmě dva různé průsečíky; ten, který leží v polorovině SBA , označme A' a průsečík úseček BA' , AS je hledaný bod X . Diskusi si provede čtenář.

Podle řešení Karola Trnovského, 2. tr.
SVŠ, Ružomberok

4. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y sestrojte graf funkce

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} (|x^2 - 32| - |x^2 - 18|)}. \quad (1)$$

Řešení. Je-li $[x, y]$ bodem grafu funkce, je i bod $[-x, y]$ bodem grafu; proto se omezíme na $x \geq 0$, přičemž je stále $y \geq 0$. Graf funkce je tedy souměrný podle osy y .

Rozlišme vzhledem k $x \geq 0$ možnosti:

[1] Necht' je $x^2 - 18 \leq 0$, tj.

$$0 \leq x \leq 3\sqrt{2} \doteq 4,2.$$

Tu je $|x^2 - 18| = -(x^2 - 18)$, $|x^2 - 32| = -(x^2 - 32)$, takže (1) zní

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} [-x^2 + 32 + x^2 - 18]} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 14} = \sqrt{7},$$

tj. $y = \sqrt{7}$.

V intervalu $\langle 0, 3\sqrt{2} \rangle$ je grafem úsečka YX s krajními body $Y \equiv [0, \sqrt{7}]$, $X \equiv [3\sqrt{2}, \sqrt{7}]$.

Graf dané funkce (obr. 26) je tedy souměrný podle osy y a skládá se ze dvou menších kruhových oblouků XZ , $X'Z'$ a z úsečky XX' , kde

$$X \equiv [3 \sqrt{2}, \sqrt{7}], \quad X' \equiv [-3 \sqrt{2}, \sqrt{7}], \quad Z \equiv [5, 0], \\ Z' \equiv [-5, 0].$$

6. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE C

1. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y zobrazte množinu všech bodů $Z \equiv [x, y]$, o jejichž souřadnicích platí zároveň všechny tři nerovnosti:

$$|x - y| \leq 1 \quad (1)$$

$$|x + y| \leq 1 \quad (2)$$

$$x + |y| \leq 1 \quad (3)$$

Řešení. a) Zjistíme nejprve, jaký útvar je množinou bodů, jejichž souřadnice splňují nerovnost (1). Tato nerovnost platí zároveň s nerovností, kterou dostaneme jejím umocněním dvěma, tj. s nerovností

$$(x - y)^2 \leq 1. \quad (1')$$

Nerovnost (1') upravíme

$$(x - y)^2 - 1 \leq 0, \\ (x - y - 1)(x - y + 1) \leq 0. \quad (1'')$$

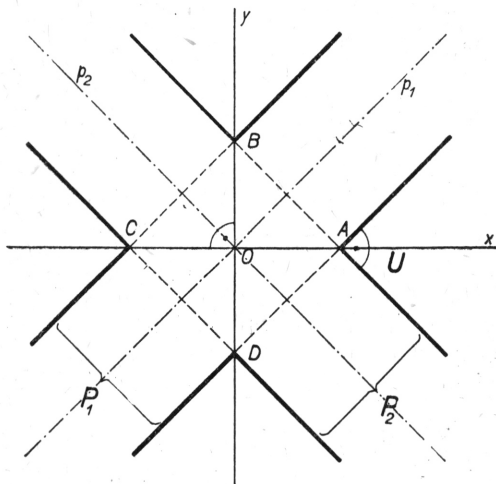
Nerovnost (1'') je splněna právě tehdy, platí-li buď zároveň

$$x - y - 1 \leq 0, \\ x - y + 1 \geq 0, \quad (4)$$

nebo zároveň

$$\begin{aligned}x - y - 1 &\geq 0, \\ x - y + 1 &\leq 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Nerovnosti (4) vyjadřují společnou část polorovin s vyjádřením $x - y \geq -1$ a $x - y \leq 1$, tj. pás P_1 roviny, omezený přímkami o rovnicích $y = x + 1$, $y = x - 1$; obě poloroviny obsahují totiž počátek souřadnic (viz obr. 27).



Obr. 27.

Nerovnosti (5) si odporují, proto jim nevyhovují souřadnice žádného bodu.

Závěr. Množina všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti (1), je pás P_1 .

Pro snazší vyjádření označíme A, B, C, D průsečíky hraničních přímk pásu P_1 s osami souřadnic, a to tak, aby platilo

$$A \equiv [1, 0], \quad B \equiv [0, 1], \quad C \equiv [-1, 0], \quad D \equiv [0, -1].$$

b) Obdobně vyšetříme množinu bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti (2). Dostaneme postupně

$$\begin{aligned}(x + y)^2 - 1 &\leq 0, \\ (x + y - 1)(x + y + 1) &\leq 0.\end{aligned}$$

Odtud plyne buď zároveň

$$\begin{aligned}x + y - 1 &\leq 0, \\ x + y + 1 &\geq 0,\end{aligned}$$

nebo zároveň

$$\begin{aligned}x + y - 1 &\geq 0, \\ x + y + 1 &\leq 0.\end{aligned}$$

Tyto poslední dvě nerovnosti si odporují. První dvě nerovnosti vyjadřují opět pás P_2 roviny, omezený přímkami o rovnicích $y = -x + 1$, $y = -x - 1$, tj. přímkami AB, CD .

Závěr. Množina všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti (2), je pás P_2 (viz obr. 27).

c) Při vyšetřování množiny bodů, jejíž vyjádření je nerovnost (3), dostaneme postupně

$$\begin{aligned}|y| &\leq 1 - x, \\ y^2 &\leq (1 - x)^2, \\ (1 - x - y)(1 - x + y) &\geq 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Nerovnost (6) je splněna právě tehdy, platí-li buď zároveň

$$\begin{aligned} 1 - x - y &\geq 0, \\ 1 - x + y &\geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

nebo zároveň

$$\begin{aligned} 1 - x - y &\leq 0, \\ 1 - x + y &\leq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Nerovnosti (7) vyjadřují poloroviny s hraničními přímkami o rovnicích $y = 1 - x$, $y = x - 1$, jež obě obsahují počátek souřadnic. Společná část těchto polorovin je pravý úhel $\sphericalangle BAD$. Nerovnosti (8) vyjadřují společnou část polorovin opačných k oběma předcházejícím, tj. pravý úhel U vrcholový k úhlu $\sphericalangle BAD$.

Závěr. Nerovnost (3) vyjadřuje dvojici vrcholových úhlů; úhel $\sphericalangle BAD$ a úhel U k němu vrcholový (viz obr. 27).

Průnik pásů P_1, P_2 je čtverec $ABCD$, který leží v pravém úhlu $\sphericalangle BAD$. Tento čtverec má s úhlem U jediný společný bod, tj. bod A .

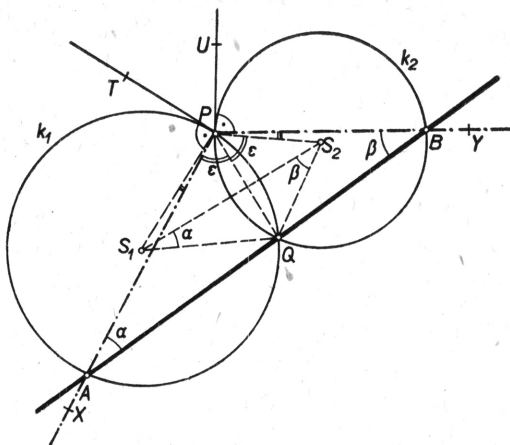
Výsledek. Množina všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují zároveň nerovnostem (1), (2), (3), je čtverec $ABCD$.

2. SÚ dané dve kružnice k_1, k_2 so spoločnou tetivou PQ , ktorá oddeľuje ich stredy.

Nájdite na kružnici k_1 bod A a na kružnici k_2 bod B tak, aby bod Q ležal vo vnútri úsečky AB a aby platilo $\sphericalangle APQ = \sphericalangle BPQ$.

Riešenie (obr. 28). *Rozbor.* Označíme

$$\alpha = \sphericalangle PAQ, \beta = \sphericalangle PBQ, \varepsilon = \sphericalangle APQ = \sphericalangle BPQ.$$



Obr. 28.

Z trojuholníkov APQ , BPQ vyplýva podľa vety o vonkajšom uhle trojuholníka

skadiaľ

$$(\alpha + \varepsilon) + (\beta + \varepsilon) = 180^\circ,$$

$$\varepsilon = 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta). \quad (1)$$

Podľa vety o stredovom a obvodovom uhle je

$$\sphericalangle PS_1Q = 2\alpha, \quad \sphericalangle PS_2Q = 2\beta.$$

Pretože priamka S_1S_2 rozpoluje oba uhly $\sphericalangle PS_1Q$, $\sphericalangle PS_2Q$, je

a ďalej

$$\sphericalangle PS_1S_2 = \alpha, \quad \sphericalangle PS_2S_1 = \beta$$

$$\sphericalangle S_1PS_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta). \quad (2)$$

Porovnaním vzťahov (1), (2) dostaneme

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sphericalangle S_1 P S_2. \quad (3)$$

Zo vzťahu (3) vyplýva táto *konštrukcia*: Zostrojíme polpriamky PX , PY ležiace postupne v polrovinách PQS_1 , PQS_2 tak, aby platilo

$$\sphericalangle QPX = \sphericalangle QPY = \varepsilon.$$

Ak pretnú polpriamky PX , PY postupne kružnice k_1 , k_2 v bodoch $A \equiv P$, $B \equiv P$, je $\sphericalangle PAQ = \alpha$, $\sphericalangle PBQ = \beta$. Preto platí

$$\sphericalangle AQP = 180^\circ - (\alpha + \varepsilon),$$

$$\sphericalangle BQP = 180^\circ - (\beta + \varepsilon),$$

t. j. podľa (1)

$$\sphericalangle AQP + \sphericalangle BQP = 360^\circ - (\alpha + \beta + 2\varepsilon) = 180^\circ.$$

Body A , B , Q ležia teda na priamke.

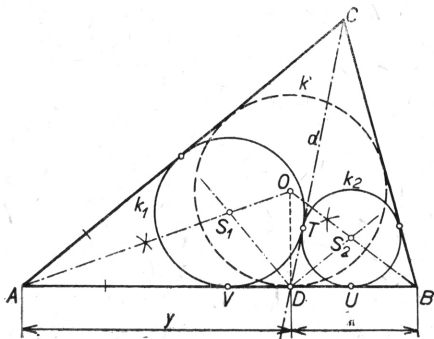
Diskusia. Zostáva rozhodnúť, za akých podmienok má úloha riešenie; riešenie je potom jediné. Pretože priamka PQ oddeľuje stredy S_1 , S_2 , prislúchajú obvodové uhly α , β k menším oblúkom PQ a sú obidva ostré.

Označíme PT , PU polpriamky, ktoré ležia postupne v dotýčniciach kružníc k_1 , k_2 v bode P a postupne v polrovinách PQS_1 , PQS_2 . Uhly $\sphericalangle QPT$, $\sphericalangle QPU$ sú obidva tupé. Ak sú PX , PY polpriamky, o ktorých bola reč v skúške konštrukcie, je $\sphericalangle QPX = \sphericalangle QPY = \varepsilon$ a podľa (3) je $\varepsilon < 90^\circ$, pretože uhol $\sphericalangle S_1 P S_2$ je dutý. Preto pretnú polpriamky PX , PY postupne kružnice k_1 , k_2 v bodoch $A \equiv P$, $B \equiv P$.

Výsledok diskusie: Úloha má vždy jediné riešenie.

3. V rovine je daný trojuholník ABC . Použitím výpočtu určite medzi bodmi A, B taký bod D , aby sa kružnice vpísané trojuholníkom ACD a BCD dotýkali priamky CD v tom istom bode.

Riešenie. Rozbor. Označme strany trojuholníka ABC obvyklým spôsobom: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$; ďalej označme $d = CD$, $x = BD$, $y = AD$ (obr. 29), T spo-



Obr. 29.

ločný dotykový bod oboch vpísaných kružníc, ležiaci na strane CD . Potom platí podľa známeho vzorca

$$DT = \frac{1}{2} (x + d - a) \text{ (z trojuholníka } BCD),$$

$$DT = \frac{1}{2} (y + d - b) \text{ (z trojuholníka } ACD).$$

Porovnaním dostávame $x + d - a = y + d - b$ čiže

$$x - y = a - b. \quad (1)$$

Okrem toho je

$$x + y = c. \quad (2)$$

Z (1) a (2) vyplýva sčítaním

$$x = \frac{1}{2} (a + c - b) = s - b, \quad (3)$$

kde $s = \frac{1}{2} (a + b + c)$. Podľa známej vety je teda bod D bodom dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC .

Skúška. Zostrojíme bod D ako bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC ležiaci na strane AB . Trojuholníkom ACD , BCD vpíšeme postupne kružnice k_1 , k_2 , ktoré sa dotýkajú strany CD postupne v bodoch T_1 , T_2 . Vypočítame podľa známeho vzorca

$$DT_1 = \frac{1}{2} (d + y - b), \quad DT_2 = \frac{1}{2} (d + x - a). \quad (4)$$

Pretože je podľa (3) $x = s - b$, je $y = s - a$. Dosadením do (4) dostaneme

$$DT_1 = \frac{1}{2} (d + s - a - b) = DT_2. \quad (5)$$

Pretože oba body T_1 , T_2 ležia na polpriamke DC , je podľa (5) $T_1 \equiv T_2$ a kružnice k_1 , k_2 splňujú požiadavky úlohy.

Úloha má zrejme vždy jediné riešenie.

4. Najdšte všechna celá čísla x , pro která je výraz

$$V = \frac{6(x^2 - 3px - x + 3p)}{x^3 - 3px^2 - x + 3p}$$

roven celému číslu.

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k danému celému číslu p .

Řešení. Rozložme jmenovatele a čitatele v daném zlomku:

$$6(x^2 - 3px - x + 3p) = 6[(x^2 - x) - 3p(x - 1)] = \\ = 6(x - 1)(x - 3p);$$

$$x^3 - 3px^2 - x + 3p = x^2(x - 3p) - (x - 3p) = \\ = (x - 1)(x + 1)(x - 3p).$$

Platí tedy

$$V = \frac{6(x - 1)(x - 3p)}{(x - 1)(x + 1)(x - 3p)}. \quad (1)$$

Výraz V má tedy význam pro všechna reálná čísla x s výjimkou čísel

$$-1; 1; 3p. \quad (2)$$

Nechť je tedy dále x různé od čísel (2). Zkrátíme zlomek na pravé straně (1) a dostaneme

$$V = \frac{6}{x + 1}. \quad (3)$$

Tento zlomek má být roven celému číslu, tj. číslo $x + 1$ musí být dělitelem čísla 6 neboli číslo $x + 1$ musí být rovno některému z čísel

$$-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6.$$

Odtud pro x dostáváme po řadě tyto hodnoty:

$$-7; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 5.$$

Podle (2) je vyloučena možnost $x = 1$ a možnosti $x = -3$, $x = 0$, které dostaneme ve (2) pro $p = -1$

a $p = 0$. Zbývá těchto 5 případů, k nimž pomocí (3) určíme hned příslušnou hodnotu V :

x	-7	-4	-2	2	5
V	-1	-2	-6	2	1

5. Žák měl najít objem kváдру z jeho daných rozměrů, což byla přirozená čísla. Když žák objem vypočetl, zjistil, že dojde k témuž výsledku, když sečte všechny tři rozměry.

Ukažte, že pomocí těchto údajů lze s jediným výsledkem vypočítat rozměry daného kváдру.

Řešení. Označme x, y, z rozměry kváдру tak, aby platilo

$$x \geq y \geq z. \quad (1)$$

Objem je $V = xyz$; podle textu úlohy platí

$$xyz = x + y + z. \quad (2)$$

Avšak vzhledem k (1) je $x + y + z \leq 3x$ a ze (2) vyplývá, že nutně platí

$$xyz \leq 3x$$

a po dělení obou stran číslem x

$$yz \leq 3.$$

Pro přirozená čísla y, z máme vzhledem k (1) tyto tři případy:

$$[1] y = 3, z = 1, [2] y = 2, z = 1, [3] y = 1, z = 1.$$

Dosaďme za y, z do (2) a hledejme příslušné x , přičemž má platit (1):

Případ [1]. Pro $y = 3, z = 1$ ze (2) dostaneme $3x = x + 4$, tj. $x = 2$, což je spor se vztahy (1); nedostáváme žádné řešení.

Případ [2]. Pro $y = 2, z = 1$ ze (2) dostaneme $2x = x + 3$, tj. $x = 3$, což vyhovuje (1). Skutečně $V = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ a $x + y + z = 6$.

Případ [3]. Pro $y = z = 1$ dostaneme $x = x + 2$, takže není žádné řešení.

Odpověď. Rozměry kváдру jsou 3, 2, 1.

6. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB délky 1 a kladné číslo d . Světelný paprsek vyslaný z bodu X , který leží mezi body A, B , se odrazí na odvěsni BC v bodě Y a dopadne právě do středu M odvěsny AC .

Sestrojte bod X tak, aby dráha $XY + YM$ paprsku měla danou délku d . Provedte diskusi vzhledem k číslu d .

Řešení. Použijeme zákona o odrazu světelného paprsku: musí být $\sphericalangle CYM = \sphericalangle BYX$. Proto při překlopení trojúhelníku ABC kolem odvěsny BC přejde úsečka YM v úsečku YM' tak, že body X, Y, M' leží v přímce. Přitom M' je střed překlopené odvěsny $A'C$. Má-li být $XY + YM = d$, musí být $XY + YM' = XM' = d$, tj. bod X musí ležet na kružnici $k \equiv (M'; d)$ a uvnitř úsečky AB . Tato podmínka je nejen nutná, ale i postačující.

Vzdálenost bodu M' od přímky AB je dána délkou kolmice $M'Q \parallel A'B$ (viz obr. 30); $M'Q = \frac{3}{4}$. Úloha má tedy tyto možnosti řešení:

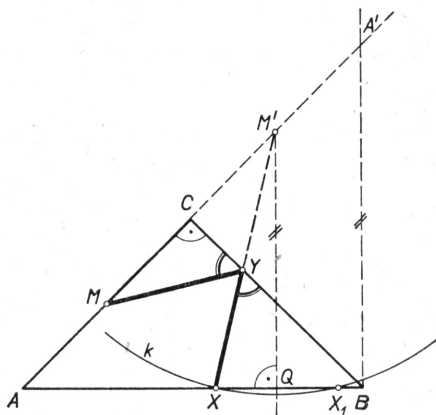
Žádné řešení pro $d < \frac{3}{4}$,

1 řešení pro $d = \frac{3}{4}$,

2 řešení pro $\frac{3}{4} < d < M'B$,

1 řešení pro $M'B \leq d < M'A$,

žádné řešení pro $d \geq M'A$.



Obr. 30.

Vzdálenosti $M'B$, $M'A$ se vypočtou snadno: $M'A = \frac{3}{4} \sqrt{2} \doteq 1,06$ a podle Pythagorovy věty je

$$M'B = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \doteq 0,79.$$

7. ÚLOHY II. KOLA KATEGÓRIE C

1. Riešte rovnicu

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-2p} + \frac{1}{x+3p} = \frac{3}{x}, \quad (1)$$

kde x je neznáma a p dané reálne číslo.

Riešenie. Vynásobme obidve strany danej rovnice (1) číslom $x(x-p)(x-2p)(x+3p)$ a postupne upravujeme:

$$x(x-2p)(x+3p) + x(x-p)(x+3p) + \\ + x(x-p)(x-2p) = 3(x-p)(x-2p)(x+3p),$$

$$3x^3 + (3p - 2p + 3p - p - 2p - p)x^2 + \\ + (-6p^2 - 3p^2 + 2p^2)x = 3x^3 + (3p - 2p - p)x^2 + \\ + 3(2p^2 - 6p^2 - 3p^2)x + 18p^3,$$

$$14p^2x = 18p^3,$$

$$7p^2x = 9p^3. \quad (2)$$

Rozoznávajme dve možnosti:

[1] Nech je $p = 0$. Potom rovnica (1) je splnená pre každé $x \neq 0$. Vtedy totiž skutočne platí rovnosť

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}.$$

[2] Nech je $p \neq 0$. Potom z rovnice (2) dostaneme

$$x = \frac{9p}{7}. \quad (3)$$

Prevedme skúšku dosadením. Pre ľavú stranu rovnice (1) dostaneme postupne:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\frac{9p}{7} - p} + \frac{1}{\frac{9p}{7} - 2p} + \frac{1}{\frac{9p}{7} + 3p} = \\ &= \frac{7}{(9-7)p} + \frac{7}{(9-14)p} + \frac{7}{(9+21)p} = \\ &= \frac{7}{p} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{30} \right) = \\ &= \frac{7}{p} \cdot \frac{15-6+1}{30} = \frac{7}{3p}. \end{aligned}$$

Predchádzajúci výpočet platí pre každé $p \neq 0$. Pre pravú stranu rovnice (1) dostaneme

$$P = \frac{3 \cdot 7}{9p} = \frac{7}{3p}.$$

Je teda skutočne $L = P$ a číslo (3) je pre $p \neq 0$ jediným koreňom danej rovnice.

2. Odvesna pravouhlého trojuholníka má veľkosť 1. Ťažnica prislúchajúca k druhej odvesne je kolmá k ťažnici prislúchajúcej k prepone.

Vypočítajte dĺžku ostatných dvoch strán.

Riešenie (obr. 31). V danom trojuholníku ABC označme $\sphericalangle C = 90^\circ$, $a = BC$, $b = CA = 1$, $c = AB$, takže podľa Pythagorovej vety platí:

$$a^2 + 1^2 = c^2. \quad (1)$$

Nech sú ďalej A' , C' postupne stredy strán BC , AB . Ťažnice AA' , CC' majú spoločný bod T , ťažisko troj-

uholníka. Preto platí $2 \cdot TA' = TA$, $2 \cdot TC' = TC$. Položme

$$TA' = x, TC' = y. \quad (2)$$

Je teda

$$TC = 2y, TA = 2x, C'A = CC' = 3y. \quad (3)$$

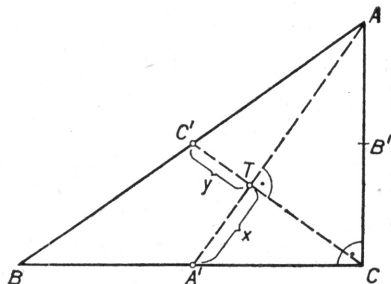
Z pravouhlých trojuholníkov ACT , $AC'T$ dostaneme pomocou Pythagorovej vety

$$(2x)^2 + (2y)^2 = 1,$$

$$(2x)^2 + y^2 = (3y)^2$$

čiže

$$4x^2 + 4y^2 = 1, \\ x^2 = 2y^2.$$



Obr. 31.

Z oboch posledných rovníc dostaneme $6x^2 = 1$, $12y^2 = 1$, t. j.

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Pretože $c = 6y$, je $c = \frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$. Pomocou tohto výsledku a vzťahu (1) dostaneme

$$a^2 = c^2 - b^2 = 3 - 1 = 2,$$

t. j.

$$a = \sqrt{2}.$$

Trojuholník má teda tieto dĺžky strán:

$$a = \sqrt{2}, \quad b = 1, \quad c = \sqrt{3}. \quad (4)$$

Dokážeme naviac: Ak sú dĺžky strán (pravouhlého) trojuholníka dané rovnosťami (4), má trojuholník vlastnosť vyslovenú v texte úlohy.

Skúška. O týchto číslach platí vzťah (1), takže trojuholník so stranami uvedených dĺžok (podľa obrátenej Pythagorovej vety) je pravouhlý. Jeho ťažnice AA' , CC' majú dĺžky (použijeme pravoúhlý trojuholník $AA'C$ a vzťah $CC' = \frac{1}{2}AB$):

$$(AA')^2 = (3x)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2, \quad 3y = CC' = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Po dosadení

$$9x^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \quad x^2 = \frac{1}{6}.$$

Tým

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \frac{1}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Dokážeme, že je $CC' \perp AA'$, t. j. že pre trojuholník ACT platí Pythagorova veta, t. j. že $TA^2 + TC^2 = 1$:

$$(2x)^2 + (2y)^2 = 4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{36} \cdot 3 = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} = 1.$$

Tým je dôkaz prevedený.

Pekne túto úlohu vyriešil Michal Maruščák,
1. b tr. SVŠ Stropkov

3. V soustavě pravoúhlých souřadnic x, y znázorněte množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují

rovnici $y = |x - 3|$ a dále množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $|x| + |y| = 6$. Užitím grafického znázornění a pak výpočtem řešte soustavu rovnic

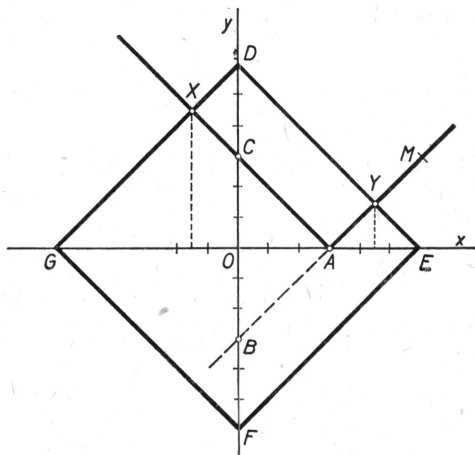
$$y = |x - 3|, \quad (1)$$

$$|x| + |y| = 6. \quad (2)$$

Řešení. I. Nejprve vyšetříme graf funkce (1), o níž zřejmě platí $y \geq 0$.

[1]. Je-li $x - 3 \geq 0$, je $|x - 3| = x - 3$; rovnice (1) pak zní

$$y = x - 3 \text{ (pro } x \geq 3\text{)}.$$



Obr. 32.

Grafem (obr. 32) je polopřímka AM opačná k polopřímce AB , určené počátkem $A \equiv [3, 0]$ a bodem $B \equiv [0, -3]$.

[2]. Je-li $x - 3 \leq 0$, je $|x - 3| = -x + 3$, rovnice (1) pak zní

$$y = -x + 3 \quad (\text{pro } x \leq 3).$$

Grafem je polopřímka AC určená počátkem A a bodem $C \equiv [0, 3]$.

Graf funkce (1) se skládá z polopřímek AM , AC .

II. Protože platí $|x| = |-x|$, $|y| = |-y|$, pak je-li bod $[x, y]$ bodem grafu rovnice (2), jsou i body $[x, -y]$, $[-x, y]$, $[-x, -y]$ body grafu této rovnice, tj. graf je souměrný podle obou os souřadnic. Stačí se tedy omezit na vyšetření grafu v I. kvadrantu. Pro $x \geq 0$, $y \geq 0$ rovnice (2) zní $x + y = 6$ neboli

$$y = -x + 6 \quad (\text{pro } x \geq 0, y \geq 0). \quad (5)$$

Grafem je úsečka DE s krajními body $D \equiv [0, 6]$, $E \equiv [6, 0]$. Grafem rovnice (2) je pak čtverec $DEFG$ se středem O .

III. Z obou grafů je patrné, že hledáme souřadnice těchto dvou průsečíků:

a) polopřímky AM a úsečky DE (označíme je Y);

b) polopřímky AC a úsečky DG (označíme je X).

Výpočet provedeme z daných dvou rovnic (1), (2).

Z rovnice (1) pak plyne

$$|y| = |x - 3|; \quad (3)$$

dosadíme-li z (3) do (2), dostaneme

$$|x| + |x - 3| = 6. \quad (4)$$

Při řešení rovnice (4) rozlišíme tři případy:

1. $x \leq 0$; pak je $|x| = -x$, $|x - 3| = 3 - x$. Rovnice (4) pak zní

$$3 - 2x = 6,$$

odtud plyne $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{9}{2}$.

2. $0 \leq x \leq 3$; pak je $|x| = x$, $|x - 3| = 3 - x$. Rovnice (4) pak zní

$$x + 3 - x = 6$$

a je neřešitelná.

3. $x \geq 3$; pak je $|x| = x$, $|x - 3| = x - 3$. Rovnice (4) pak zní

$$2x - 3 = 6;$$

odtud plyne $x = \frac{9}{2}$, $y = \frac{3}{2}$.

Souřadnice obou bodů $X \equiv \left[-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]$, $Y \equiv \left[\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right]$ vyhovují rovnicím (1), (2); tím jsou body X , Y určeny výpočtem.

4. Kvádr $ABCD A'B'C'D'$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ je zkosen dvěma rovinnými řezy. Na hraně BB' jsou sestrojeny body M , N tak, že $BM = MN = NB' = \frac{1}{3}c$. Zkosení je provedeno rovinami $C'D'M$ a $A'D'N$.

Načrtněte ve volném rovnoběžném promítání obraz výsledného tělesa a vypočtěte, jakou částí objemu daného kváдру je objem tohoto tělesa.

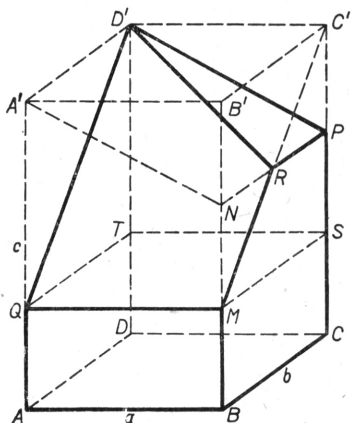
Řešení. Z obrazu 33 ve volném rovnoběžném promítání, kde $QMST$ je obdélník shodný s obdélníkem

$ABCD$ a leží v rovině rovnoběžné s rovinou ABC , je vidět, že kvádr $QMSTA'B'C'D'$ (o rozměrech $a, b, \frac{2}{3}c$) je rovinou $QMC'D'$ rozpůlen; objem této poloviny je $V_1 = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{2}{3}c = \frac{1}{3}abc$. Objem kvádru $ABCDQMST$ (o rozměrech $a, b, \frac{1}{3}c$) je $V_2 = \frac{1}{3}abc$. Objem větší části tělesa zkoseného rovinou $C'D'M$ je tedy roven $V_3 = V_1 + V_2 = \frac{2}{3}abc$.

Objem tělesa po dalším zkosení rovinou $A'D'N$ dostaneme tak, že od čísla V_3 odečteme objem V_4 trojbokého jehlanu s podstavou $RC'P$ (kde $\sphericalangle P = 90^\circ$) a s tělesovou výškou $C'D' = a$. Přitom je $PS = PC' = \frac{1}{3}c$, takže úsečka RP je střední příčka trojúhelníku MSC' a tedy platí $RP = \frac{1}{2}b$; obsah x trojúhelníku $RC'P$ tedy je

$$x = \frac{1}{2}RP \cdot PC' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{3}c = \frac{1}{12}bc.$$

Objem $V_4 = \frac{1}{3}x \cdot C'D'$ neboli



Obr. 33.

$$V_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} bc \cdot a = \frac{1}{36} abc.$$

Objem V výsledného tělesa pak je

$$\begin{aligned} V = V_3 - V_4 &= \frac{2}{3} abc - \frac{1}{36} abc = \frac{1}{36} (24 - 1) abc = \\ &= \frac{23}{36} abc. \end{aligned}$$

Je tedy $V = \frac{23}{36} abc$; protože $\frac{23}{36} \doteq 0,64$, je to asi 64% objemu původního kváдру.

8. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE D

1. Najděte všechna přirozená čísla n , pro která je číslo $10^n + 8$ dělitelné číslem 72.

Řešení. Protože je číslo $72 = 8 \cdot 9$, kde 8, 9 jsou nesoudělná čísla, musíme najít všechna přirozená čísla n , pro něž je $10^n + 8$ dělitelné devíti a osmi. Číslo $10^n + 8$ má ciferný součet $1 + 8 = 9$, takže je dělitelné devíti.

Dále je $10^n = (2 \cdot 5)^n = 2^n \cdot 5^n$. Je tedy 10^n dělitelné osmi tehdy, je-li 2^n dělitelné osmi neboli číslem 2^3 ; to nastane právě pro $n \geq 3$. Pak je $10^n + 8$ součtem dvou čísel dělitelných osmi a je tudíž dělitelné osmi.

Závěr. Dané číslo je dělitelné osmi pro všechna přirozená čísla $n \geq 3$ a pro žádná jiná.

2. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1. Uvažujme dva kruhy o poloměrech délky 1 a o středech A , C . Nazveme M obrazec, který se skládá z bodů společných oběma kruhům, a V obrazec, složený z těch bodů, které náležejí alespoň jednomu z obou kruhů.

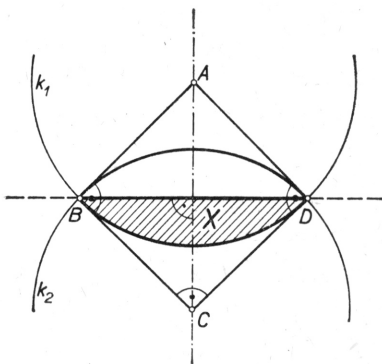
Vypočítejte v procentech, jakou částí obsahu obrazce V je obsah obrazce M .

Řešení (viz obr. 34). Označme P obsah shodných kruhů K_1, K_2 o středech A, C a poloměrech 1; je

$$P = \pi.$$

Dále označme X obsah úseče kruhu K_1 , která má středový úhel 90° ; příslušný čtvrtkruh leží v pravém úhlu $\sphericalangle BAD$. Tu X je rozdílem

obsahu $\frac{1}{4}\pi$ zmíněného čtvrtkruhu a obsahu pravoúhlého trojúhelníku BDA , který se rovná $\frac{1}{2}$ (je to polovina obsahu čtverce $ABCD$, který má obsah 1); proto je



Obr. 34.

$$X = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\pi - 2).$$

Avšak $M = 2X$, tj.

$$M = \frac{1}{2}(\pi - 2). \quad (1)$$

Dále obrazec V je přímkou BD rozdělen ve dvě shodné úseče, z nichž každá má obsah Y roven obsahu P kruhu K_1 zmenšenému o obsah X dříve uvažované úseče; je

tedy $Y = P - X = \pi - \frac{1}{4}(\pi - 2) = \frac{1}{4}(3\pi + 2)$. Protože je $V = 2Y$, dostáváme

$$V = \frac{1}{2}(3\pi + 2). \quad (2)$$

Hledaný počet procent x je

$$x = 100 \cdot \frac{M}{V}.$$

Po dosazení z (1), (2) máme

$$x = 100 \cdot \frac{\pi - 2}{3\pi + 2}. \quad (3)$$

Vypočteme přibližnou hodnotu čísla x , a to tak, že položíme $\pi \doteq \frac{22}{7}$; po dosazení do vztahu (3) dostaneme

$$\begin{aligned} x &\doteq 100 \cdot \frac{\frac{22}{7} - 2}{3 \cdot \frac{22}{7} + 2} = 100 \cdot \frac{22 - 14}{66 + 14} = \\ &= 100 \cdot \frac{8}{80} = 10. \end{aligned}$$

Obsah obrazce M je asi 10 % obsahu obrazce V .

3. Je daný trojúhelník ABC .

Zostrojte body X , Y tak, aby bod X ležal na straně CA a bod Y na straně CB a aby platilo: $XY \parallel AB$, $AX + BY = XY$.

Riešenie (obr. 35). *Rozbor.* Predpokladajme, že sme našli priamku XY . Nanesme na polpriamku XY úsečku XA . Dostaneme úsečku XZ a platí $XZ = XA$. L'ahko zistíme, že vzhľadom na vzťah $AX + BY = XY$ je $YZ = YB$. Sú teda XAZ , YBZ rovnoramenné trojuholníky a v každom z nich sú oba uhly pri základni zhodné, t. j.

$$\sphericalangle XAZ = \sphericalangle XZA, \sphericalangle YBZ = \sphericalangle YZB. \quad (1)$$

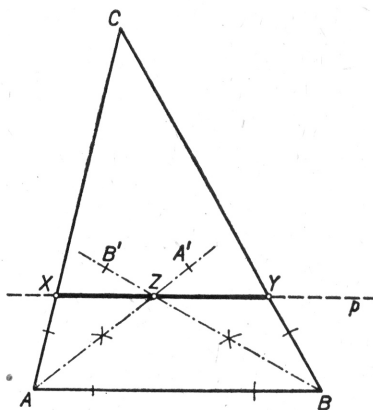
Pretože je $XY \parallel AB$, sú striedavé uhly pri týchto rovnobežkách zhodné. Platí teda:

$$\begin{aligned} \sphericalangle XZA &= \sphericalangle ZAB, \\ \sphericalangle YZB &= \sphericalangle ZBA. \end{aligned} \quad (2)$$

Porovnaním vzťahov (1), (2) dostaneme

$$\begin{aligned} \sphericalangle XAZ &= \sphericalangle ZAB, \\ \sphericalangle YBZ &= \sphericalangle ZBA. \end{aligned} \quad (3)$$

Polpriamky AZ , BZ sú teda postupne osami uhlov $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle CBA$ trojuholníka ABC .



Obr. 35.

Stadial' konštrukcia (obr. 35): Zostrojme postupne osi AA' , BB' uhlov $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ trojuholníka ABC a ich spoločný bod označme Z (poznámka: jedná sa zrejme o stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC). Ďalej vedme bodom Z priamku $p \parallel AB$ a označme X , Y postupne jej priesečníky s priamkami CA , CB . Potom je XY hľadaná priamka.

Skúška. Platia vzťahy (3) a podľa konštrukcie je bod Z stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC , takže

leží vo vnútri tohto trojuholníka. Preto body X, Y padnú postupne do vnútra úsečiek CA, CB , pričom podľa konštrukcie je $XY \parallel AB$, a preto platia vzťahy (2). Ale zo vzťahov (2), (3) vyplývajú vzťahy (1), t. j. trojuholníky XAZ, YBZ sú rovnoramenné a preto je $XA = XZ, YB = YZ$ a tým $AX + BY = XY$, čím je dôkaz prevedený.

Z prevedenej konštrukcie vyplýva, že úloha má práve jedno riešenie.

4. Rozhodnite, ktorý zo zlomkov

$$\frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557}, \quad \frac{6\,666\,666\,664}{6\,666\,666\,669}$$

je väčší.

Riešenie. Označme X, Y dané zlomky a kvôli stručnosti položíme

$$5\,555\,555\,557 = x, \quad 6\,666\,666\,669 = y.$$

Potom platí

$$X = \frac{x-4}{x}, \quad Y = \frac{y-5}{y}.$$

Utvorme rozdiel $X - Y$. Platí

$$X - Y = \frac{x-4}{x} - \frac{y-5}{y}.$$

Po úpravách pravej strany postupne dostaneme

$$X - Y = \frac{y(x-4) - x(y-5)}{xy} = \frac{5x-4y}{xy}. \quad (1)$$

Vypočítajme čísla $5x, 4y$; platí

$$5x = 27\,777\,777\,785,$$

$$4y = 26\,666\,666\,676.$$

Zrejme je $5x - 4y$ kladné číslo. Pretože aj čísla x, y sú kladné, je zlomok (1) kladný a preto je rozdiel $X - Y$ tiež kladný. Teda je $X > Y$.

Odpoveď. Prvý z daných zlomkov je väčší než druhý.

5. Klempířská pájka je slitina cínu a olova. Jeden druh pájky obsahuje 25 % cínu a druhý druh 60 %. Smiešením obou druhů pájek a přidáním 2 kg čistého olova máme vyrobiť 10 kg pájky obsahujúcej 30 % cínu.

Kolik kilogramů každého druhu pájky musíme přitom užít?

Řešení. Označme x počet kg pájky prvního druhu, takže pájky druhého druhu bylo vzato $(10 - 2 - x)$ kg neboli $(8 - x)$ kg. Porovnejme nyní váhy cínu v obou použitých pájkách a ve výsledné slitině;

$$x \cdot \frac{25}{100} + (8 - x) \cdot \frac{60}{100} = \frac{10 \cdot 30}{100}.$$

Upravme obě strany této rovnice; dostaneme

$$\frac{25x + 60(8 - x)}{100} = 3$$

neboli

$$\frac{480 - 35x}{100} = 3.$$

Po znásobení obou stran číslem 100 a po dalších úpravách postupně dostaneme

$$480 - 35x = 300,$$

$$180 = 35x,$$

$$\frac{36}{7} = x.$$

Pájky prvního druhu bylo vzato $5\frac{1}{7}$ kg, pájky druhého druhu $2\frac{6}{7}$ kg.

Zkouška. Obě užitá pájky se 2 kg čistého olova skutečně vážily 10 kg. Váha cínu v užitých pájkách v kg byla:

$$\begin{aligned}\frac{36}{7} \cdot \frac{25}{100} + \frac{20}{7} \cdot \frac{60}{100} &= \frac{6 \cdot 25}{700} (6 + 4 \cdot 2) = \\ &= \frac{6 \cdot 25}{700} \cdot 14 = \frac{6 \cdot 25}{100} \cdot 2 = \frac{300}{100} = 3;\end{aligned}$$

je však $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$, takže výsledná slitina obsahovala skutečně 30 % cínu.

6. Rovnoběžník $ABCD$ s ostrým úhlem při vrcholu A má strany $AB = 21$ cm, $AD = 13$ cm a jeho výška $DE \perp AB$ má délku 12 cm. Označme F patu výšky $DF \perp BC$.

Vypočtem dokažte, že body E, F padnou po řadě dovnitř stran AB, BC , a dále vypočtete délky obou úseček BD a EF .

Řešení (viz obr. 36). Délky úseček uvedeme v cm. Označme DE výšku v trojúhelníku ABD a DF výšku v trojúhelníku BCD . Nejprve dokážeme, že body E, F padnou po řadě dovnitř úseček AB, BC , přičemž též určíme délku BD ; potom vypočteme délky BF, DF .

a) Úhel $\sphericalangle DAB$ je podle textu úlohy ostrý; proto bod E padne dovnitř polopřímky AB . Vypočteme pomocí Pythagorovy věty délku AE z pravoúhlého trojúhelníku ADE (kde $\sphericalangle E = 90^\circ$): Je

$$\begin{aligned}AE^2 &= AD^2 - DE^2 = 13^2 - 12^2 = \\ &= (13 - 12)(13 + 12) = 25,\end{aligned}$$

a tedy

$$AE = 5, \quad BE = AB - AE = 16. \quad (1)$$

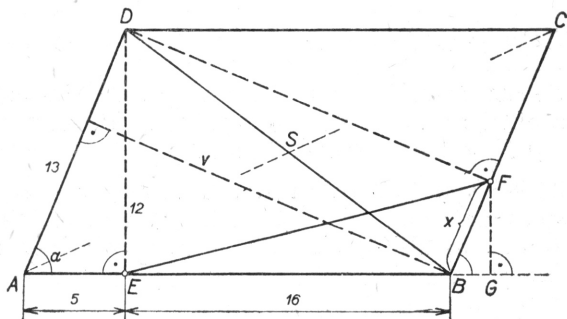
Je tedy $AE < AB$ a bod F padne dovnitř úsečky AB .

Nyní z pravoúhlého trojúhelníku BDE (kde $\sphericalangle E = 90^\circ$) vypočteme přeponu BD ; podle Pythagorovy věty platí:

$$\begin{aligned} BD^2 &= DE^2 + BE^2 = 12^2 + 16^2 = 4^2 (3^2 + 4^2) = \\ &= 4^2 \cdot 5^2 = 20^2, \end{aligned}$$

a tedy

$$BD = 20. \quad (2)$$



Obr. 36.

b) Výška DF trojúhelníku BCD je rovna výšce v trojúhelníku DAB , vedené bodem B (oba trojúhelníky jsou souměrně sdružené podle středu S rovnoběžníku $ABCD$, a tedy shodné). Obsah rovnoběžníku $ABCD$ vyjádříme dvojím způsobem:

$$AB \cdot DE = AD \cdot v, \quad \text{tj.} \quad 21 \cdot 12 = 13v,$$

a tedy

$$DF = v = \frac{21 \cdot 12}{13} = \frac{252}{13}. \quad (3)$$

Je ještě třeba dokázat, že bod F padne mezi body B , C . Z trojúhelníků ADE , BDE vypočteme pro úhly $\alpha = \sphericalangle DAE$, $\beta = \sphericalangle DBE$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5} = 2,5, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

V tabulkách najdeme

$$\alpha > 66^\circ, \quad \beta > 36^\circ.$$

Je tedy $\alpha + \beta > 102^\circ$ a dále

$$\sphericalangle ADB = 180^\circ - (\alpha + \beta) < 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ.$$

To znamená, že trojúhelník $\triangle ABD$ i $\triangle CDB$ s ním shodný je ostroúhlý. Proto pata každé výšky trojúhelníku CDB (tj. i bod F) leží uvnitř protější strany.

c) Zbývá vypočítat délku EF . Označme G patu kolmice spuštěné z bodu F na přímku AB . Vznikne pravoúhlý trojúhelník BFG , v němž je $\sphericalangle FBG = \alpha$. Označme $BF = x$; pak je

$$FG = x \sin \alpha, \quad EG = EB + x \cos \alpha = 16 + x \cos \alpha.$$

Podle Pythagorovy věty platí

$$EF^2 = FG^2 + EG^2 = x^2 \sin^2 \alpha + 16^2 + 32x \cos \alpha + x^2 \cos^2 \alpha,$$

$$EF^2 = x^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 32x \cos \alpha + 16^2. \quad (4)$$

Z trojúhelníku ADE dostaneme

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{5}{13}, \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Z (4) plyne po dosazení

$$EF^2 = x^2 + \frac{160}{13}x + 16^2. \quad (5)$$

Zbývá ještě vypočítat x z trojúhelníku BDF ; podle (3) je

$$\begin{aligned} x^2 &= BD^2 - DF^2 = 20^2 - \frac{252^2}{13^2} = \frac{4^2}{13^2} (5^2 \cdot 13^2 - 63^2) = \\ &= \frac{4^2}{13^2} (65 + 63) (65 - 63) = \frac{4^2 \cdot 16^2}{13^2}, \end{aligned}$$

a dále

$$x = \frac{64}{13}.$$

Dosadíme-li za x do (5), vyjde

$$\begin{aligned} EF^2 &= \frac{64^2}{13^2} + \frac{160}{13^2} \cdot 64 + 16^2 = \\ &= \frac{16^2}{13^2} (16 + 40 + 169) = \frac{16^2}{13^2} \cdot 15^2, \end{aligned}$$

a dále

$$EF = \frac{16 \cdot 15}{13} = \frac{240}{13} \doteq 18,5.$$

9. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D

1. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p , q o vzdálenosti d a přímka m k nim kolmá. Dále jsou dány dvě úsečky délek a , b .

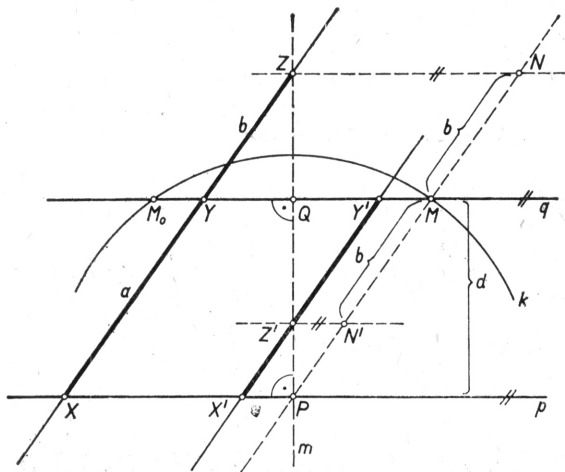
Na přímkách p , q , m sestrojte po řadě body X , Y , Z takové, aby všechny tři ležely na téže přímce a aby platilo:

$$XY = a, \quad YZ = b.$$

Udejte podmínku řešitelnosti úlohy jako vztah mezi čísly a, b, d .

Řešení (obr. 37). *Rozbor.* Označme P , Q průsečíky přímky m po řadě s přímkami p , q . Je-li XY přímka, která splňuje požadavky úlohy, vedme bodem P přímku $r \parallel XY$ a označme M její průsečík s přímkou q . Rovnoběžka s p bodem Z protne r v bodě N . Platí

$$XY = PM = a, \quad YZ = MN = b.$$



Obr. 37.

Bod M tedy leží na kružnici $k \equiv (P, a)$; bod Z leží na rovnoběžce vedené bodem N k přímce p .

Konstrukce. Opišme kružnici $k \equiv (P, a)$ a označme M jeden společný bod kružnice k a přímky q . Na polopřímku opačnou k polopřímce MP nanese me úsečku

délky b , čímž dostaneme bod N ; platí $MN = b$. Bodem N vedme rovnoběžku s přímkou p a označme Z její průsečík s přímkou m . Bodem Z vedme rovnoběžku k přímce PM a označme X, Y její průsečíky po řadě s přímkami p, q . Přímka XY vyhovuje požadavkům úlohy, jak snadno dokážeme. V obrázku 37 jsme bod N sestrojili na prodloužení úsečky PM za bod M ; potom bod Z leží na prodloužení úsečky XY za bod Y . Naproti tomu bod N' leží na polopřímce MP a vede k druhému řešení $X'Y'$.

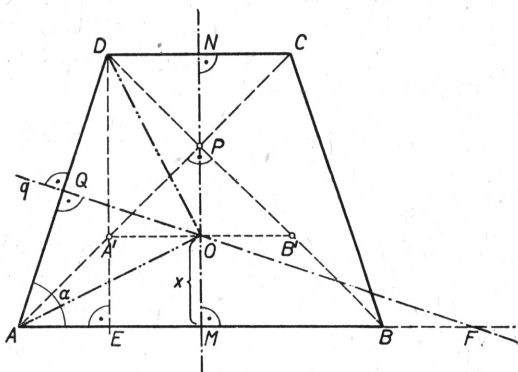
Diskuse. Aby existoval bod M , musí být $a \geq d$ (pro $a < d$ není řešení). Pro $a = d$ zřejmě je $X \equiv P, Y \equiv Q$ a bod Z leží na prodloužení úsečky PQ za bod Q , kdežto bod Z' leží na polopřímce QP ; v tomto případě má úloha dvě řešení. Pro $a > d$ protne kružnice k přímku q v různých bodech M, M_0 a každý z nich poskytne dvě řešení, takže jsou 4 řešení; dvě a dvě jsou navzájem souměrně sdružená podle přímky m , stejně jako oba body M, M_0 .

2. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ má větš základna AB délku 4 cm; úhlopříčky lichoběžníku jsou navzájem kolmé a dělí se v poměru 2 : 1.

Vypočtete poloměr kružnice lichoběžníku opsané.

Řešení. Označme P průsečík úhlopříček a M, N po řadě středy úseček AB, CD (viz obr. 38). Jsou-li A', B' středy úseček PA, PB , potom podle textu úlohy je $PA' = PC, PB' = PD$; ve středové souměrnosti o středu P si přísluší úsečky $A'B'$ a CD a je tedy $4 = AB = 2 \cdot A'B'$ ($A'B' \parallel AB$ střední příčka trojúhelníku PAB), $2 = A'B' = CD$ (středová souměrnost). Je tedy $CD = 2$. Trojúhelníky APM, DPN jsou rovnoramenné a pravoúhlé; je tedy $PM = AM = 2, PN = DN = 1$ a $MN = 3$.

Označme q osu ramena AD lichoběžníku. Průsečík O přímek MN, q je střed hledané kružnice $k \equiv (O, r)$

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 = 1^2 + 3^2 = 10, \quad AD = \sqrt{10}.$$


Proto je $AQ = \frac{1}{2} \sqrt{10}$, kde Q je střed úsečky AD . Přímky AB , AD , q omezují pravoúhlý trojúhelník AFQ , který má s trojúhelníkem ADE společný úhel $\alpha \equiv \angle DAE$. Pro $\cos \alpha$ tohoto úhlu z obou trojúhelníků dostaneme

$$\cos \alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{AQ}{AF};$$

$$AE \cdot AF = AD \cdot AQ$$

neboli

$$AF = AD \cdot \frac{AQ}{AE} = \sqrt{10} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{10} = 5.$$

Protože $AB = 4$, padne bod F do poloroviny MNB , kdežto bod Q do poloroviny MNA . Leží proto bod O úsečky QF spolu s bodem Q uvnitř poloroviny ABD , a tedy uvnitř úsečky MN .

Označme $MO = x$, takže $ON = MN - MO = 3 - x$. Z obou pravouhlých trojúhelníků OAM , ODN ($\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90^\circ$) o přeponách OA , OD délky r pomocí Pythagorovy věty dostaneme:

$$AM^2 + OM^2 = OA^2, \quad OD^2 = ON^2 + DN^2 \quad (1)$$

neboli

$$4 + x^2 = r^2, \quad r^2 = (3 - x)^2 + 1. \quad (2)$$

Porovnejme oba tyto výsledky; dostaneme rovnici

$$4 + x^2 = (3 - x)^2 + 1$$

neboli

$$x = 1$$

(bod O je tedy střed úsečky $A'B'$). Podle (2) je $r^2 = 5$, tj.

$$r = \sqrt{5} \doteq 2,24.$$

Závěr. Vzhledem k (1) je $r = OA = OD = \sqrt{5}$.

Z úspěšných řešitelů úlohy uvádíme:

Erich Wint, 9. tr. ZDŠ, Banská Bystrica

Milan Šaling, 9. tr. ZDŠ, Podbrezová

3. Máme dva kusy klempířské pájky (slitina olova a cínu) o váhách 5 kg, $7\frac{1}{2}$ kg. Obsah cínu v prvním

kusu je $\frac{1}{4}$ jeho váhy, ve druhém kusu $\frac{1}{3}$ jeho váhy. Od každého z obou kusů oddělíme část stejné váhy a připojíme ji ke zbytku druhého kusu; po slití zbytku a nově připojené části dostaneme opět dva kusy o váze 5 kg a o váze $7\frac{1}{2}$ kg.

Vypočtete, jak těžké musí být oddělené části, aby nově slité kusy pájky obsahovaly stejné procento cínu. Proveďte zkoušku.

Řešení. V prvním kusu je 5 kg. $\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ kg cínu; ve druhém pak $7\frac{1}{2}$ kg. $\frac{1}{3} = \frac{5}{2}$ kg cínu. V obou kusech je $\frac{5}{4}$ kg + $\frac{5}{2}$ kg = $\frac{15}{4}$ kg cínu. Bude-li nakonec procento cínu v obou kusech stejné, bude poměr vah cínu v prvním a druhém kusu též jako poměr celkových vah těchto kusů, tj. $5 : \frac{15}{2} = \frac{2}{3}$. Celkové množství $\frac{15}{4}$ kg cínu rozdělíme v poměru $\frac{2}{3}$, tedy v prvním kusu bude $\left(\frac{15}{4} \text{ kg} \cdot \frac{1}{5}\right) 2 = \frac{3}{2}$ kg cínu, ve druhém $\left(\frac{15}{4} \text{ kg} \cdot \frac{1}{5}\right) 3 = \frac{9}{4}$ kg cínu.

V prvním kusu přibýlo o $\frac{3}{2}$ kg — $\frac{5}{4}$ kg = $\frac{1}{4}$ kg, ve druhém kusu ubylo o $\frac{5}{2}$ kg — $\frac{9}{4}$ kg = $\frac{1}{4}$ kg cínu (tedy skutečně stejná váhová množství). Jestliže jsme od každého kusu oddělili x kg pájky, pak v prvním kusu bylo v tomto

množství $\frac{x}{4}$ kg cínu, ve druhém kusu pak $\frac{x}{3}$ kg cínu.

Platí, že rozdíl $\frac{x}{3} - \frac{x}{4}$ je roven $\frac{1}{4}$ neboli $\frac{x}{12} = \frac{3}{12}$, tj. $x = 3$.

Z každého kusu jsme tedy oddělili 3 kg pájky a připojili vždy ke druhému kusu.

Zkouška. Z prvního kusu jsme odebrali 3 kg. $\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ kg cínu, ze druhého 3 kg. $\frac{1}{3} = 1$ kg cínu. V prvním kusu zbylo $5 \text{ kg} - 3 \text{ kg} = 2 \text{ kg}$ pájky a v ní 2 kg. $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ kg cínu; po přidání 3 kg pájky 2. druhu k prvnímu kusu bylo v něm tedy $\frac{1}{2} \text{ kg} + 1 \text{ kg} = 1 \frac{1}{2} \text{ kg}$ cínu. Ve druhém kusu zbylo $7 \frac{1}{2} \text{ kg} - 3 \text{ kg} = 4 \frac{1}{2} \text{ kg}$ pájky a v ní bylo $\frac{9}{2} \text{ kg}$. $\frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ kg cínu; po přidání 3 kg pájky prvního druhu ke druhému kusu v něm tedy bylo $\frac{3}{2} \text{ kg} + \frac{3}{4} \text{ kg} = \frac{9}{4} \text{ kg}$ cínu. Procenta cínu v jednotlivých kusech nakonec jsou

$$100 \cdot \left(\frac{3}{2} : 5 \right) = \frac{100 \cdot 3}{2 \cdot 5} = 30,$$

$$100 \cdot \left(\frac{9}{4} : 7 \frac{1}{2} \right) = \frac{100 \cdot 9 \cdot 2}{4 \cdot 15} = 30,$$

tedy stejná. Tím je zkouška provedena.

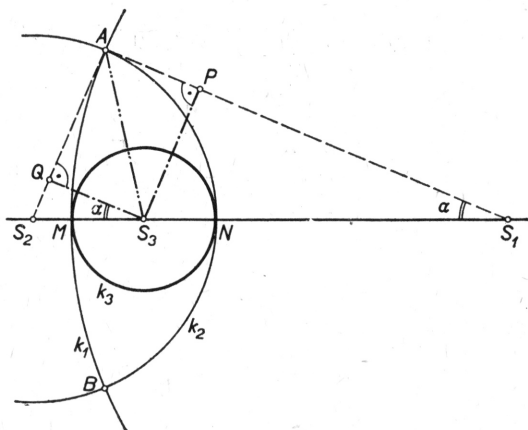
Řešil Jan Kastl, 9.b roč., 1. ZDŠ, Přeštice

4. Jsou dány kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1 = 12 \text{ cm})$, $k_2 \equiv (S_2, r_2 = 5 \text{ cm})$, které se protínají v bodech A, B tak,

že trojúhelník S_1S_2A má při vrcholu A pravý úhel. Kružnice $k_3 \equiv (S_3, x)$ leží uvnitř každé z kružnic k_1, k_2 a má s každou z nich vnitřní dotyk; přitom střed S_3 leží na přímce S_1S_2 .

Narýsujte obrázek a vypočítejte poloměr x a vzdálenost AS_3 .

Řešení. Délky jsou v cm. Konstrukce je patrna z obrázku 39; v něm jsou M, N body kružnic k_1, k_2



Obr. 39.

ležící uvnitř úsečky S_1S_2 , dále P, Q paty kolmic vedených bodem S_3 po řadě k přímkám AS_1, AS_2 a konečně α velikost úhlů $\sphericalangle S_2S_1A, \sphericalangle S_2S_3Q$. Trojúhelníky

$$S_1S_2A; S_1S_3P; S_3S_2Q \quad (1)$$

jsou pravoúhlé a podobné. Délku úsečky S_1S_2 najdeme pomocí Pythagorovy věty; platí

$$S_1S_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Pro body M, N, S_1, S_2, S_3 a délku x platí vztahy:

$$S_2M = S_1S_2 - r_1 = 13 - 12 = 1,$$

$$S_1N = S_1S_2 - r_2 = 13 - 5 = 8,$$

$$MN = 2x = S_1S_2 - S_2M - S_1N = 13 - 8 - 1 = 4;$$

$$\text{tedy} \quad x = 2.$$

Proto je

$$S_3S_1 = S_1N + x = 10, \quad S_3S_2 = S_2M + x = 3. \quad (2)$$

Úsečka AS_3 je přepona v pravoúhlém trojúhelníku AS_3P a platí

$$AS_3^2 = PS_3^2 + PA^2.$$

Musíme tedy vypočítat PS_3, PA . Vypočteme je z trojúhelníků S_1S_3P, S_3S_2Q [viz (1)], kde známe přepony (2). Platí:

$$PS_3 = S_1S_3 \sin \alpha, \quad QS_3 = S_3S_2 \cos \alpha; \quad (3)$$

pro $\sin \alpha, \cos \alpha$ plyne z trojúhelníku S_1S_2A :

$$\sin \alpha = \frac{AS_2}{S_1S_2} = \frac{5}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{12}{13}. \quad (4)$$

Po dosazení ze (2), (4) do (3) dostaneme

$$PS_3 = \frac{50}{13}, \quad QS_3 = \frac{36}{13},$$

takže

$$\begin{aligned} AS_3 &= \sqrt{\frac{36^2 + 50^2}{13^2}} = \frac{1}{13} \sqrt{1296 + 2500} = \\ &= \frac{1}{13} \sqrt{3796} \doteq \frac{1}{13} \cdot 61,61 = 4,74. \end{aligned}$$

Odpověď. Poloměr $x = 2$ cm a vzdálenost $AS_3 \doteq 4,74$ cm.

V. Zpráva o Šesté mezinárodní matematické olympiádě

1. Šestá mezinárodní matematická olympiáda (VI. MMO) se konala v Sovětském svazu ve dnech 30. června až 10. července 1964. Uspořádalo ji ministerstvo osvěty RSFSR; přípravou, řízením a celou organizací byl pověřen zvláštní organizační komitét (OK), jehož předsedou byl *prof. A. I. Markuševič*, vicepresident Pedagogické akademie věd RSFSR, sekretářem komitétu byl *Ivan Semjonovič Petrjakov*, pracovník v oboru metodiky matematiky v ministerstvu osvěty RSFSR. Vlastní soutěž řídila mezinárodní komise (MK), jejímiž členy byli vedoucí jednotlivých zúčastněných delegací. Předsedou MK byl rovněž *profesor A. I. Markuševič*; v této funkci jej popřípadě zastupoval *DrSc. Alexandr A. Kirilov*, profesor Lomonosovovy státní university v Moskvě. Delegace byly ubytovány v budově Lomonosovovy státní university na Leninských horách, v níž se konaly i všechny porady MK, vlastní soutěž, rozdělení cen, slavnostní oběd apod.

Soutěže se zúčastnilo po osmi žácích z devíti zemí, tedy celkem 72 žáků; každá z delegací měla svého vedoucího a pedagogického průvodce. Byli to:

Bulharsko (B): *Alippi Mateev*, profesor university v Sofii, a *Stoian Budurov*, inspektor ministerstva osvěty B. L. R., Sofia.

Československo (Č): *Rudolf Zelinka* a *František Zítek* CSc., oba vědečtí pracovníci Matematického ústavu ČSAV, Praha.

NDR (D): *W. Engel*, profesor university, Rostock, a *doc. Herbert Titze*, vědecký pracovník Pedagogického ústavu v Berlíně.

Maďarsko (H): *prof. Hódi Endre*, vědecký pracovník Ústavu optiky, Budapešť, a *Reiman István*.

Mongolsko (M): *B. Altangerel*, pracovník ministerstva osvěty, Ulán Bátor, a *D. Gurisav*, pracovník pedagogického institutu, Ulán Bátor.

Polsko (P): *Mieczysław Czyżykowski*, profesor polytechniky, Varšava, a *Andrzej Mąkowski*, odborný asistent university, Varšava.

Rumunsko (R): *Tiberiu Roman*, docent polytechniky a generální sekretář Rumunské matematické společnosti, Bukurešť, a *Paul Alger*, učitel matematiky, Bukurešť.

SSSR (S): *Ľelena Alexandrovna Morozovova*, docentka Lomonosovovy státní university v Moskvě, a *L. B. Fuks*, asistent Lomonosovovy státní university v Moskvě.

Jugoslávie (Y): profesorka *Milica C. Dajevićová* z Bělehradu a profesorka *M. Stojanovićová*.

2. Organizační komitét sestavil návrh dvou šestic soutěžních úloh z textů, které zaslaly zahraniční instituce; návrhy obsahovaly stručná řešení. Po zevrubných poradách, hodnoceníh a po určitých úpravách byla přijata první šestice. Zároveň MK rozhodla, kolik bodů bude maximálně přiděleno za řešení jednotlivých úloh; rovněž byly stanoveny některé zásady pro klasifikaci (maximálního počtu 42 bodů dosáhl jeden sovětský žák). Dále bylo rozhodnuto, že o nejasnostech a případných sporných otázkách rozhodne MK. Texty úloh s řešeními jsou uvedeny v příloze č. 2; zároveň je tam udán maximální počet bodů, které mohl žák za řešení úlohy získat, jakož i země, která úlohu navrhla.

Žáci se k soutěži sjeli do 2. července 1964. Vlastní soutěž se konala v sobotu 4. 7. a v neděli 5. 7. 1964 v posluchárně č. 02 Lomonosovovy státní university, vždy v době od 9.30 hod. do 14 hod. Ve dvou následujících dnech pak prováděli vedoucí delegací spolu s pedagogickým průvodcem opravy úloh vlastních žáků; úlohy současně korigovali členové koordinační komise z řad sovětských vysokoškolských pracovníků. Koordinaci řešení sovětských žáků prováděli členové zahraničních delegací.

Na závěrečném zasedání MK za předsednictví profesora A. A. Kirilova bylo rozhodováno hlasováním o nejasných případech klasifikace. Celé jednání mělo celkem velmi hladký průběh. Na základě schválené klasifikace byly přiděleny ceny jednotlivým řešitelům (viz tab. č. 1 „*Přehled o celkovém počtu bodů, které získali jednotliví žáci*“, tab. č. 2 „*Přehled o počtu udělených cen jednotlivým delegacím*“ a přílohu 1 „*Jmenný seznam vítězů VI. MMO*“); bylo uděleno 7 prvních, 9 druhých a 19 třetích cen (celkem 35). Bodové rozpětí pro I. cenu bylo 42—37 bodů, pro II. cenu 36—31 bodů a pro III. cenu 30—27 bodů. Z tabulky je patrné, že nejlepší bylo družstvo sovětské a těsně za ním družstvo maďarské. Čs. družstvo bylo na konci jakéhosi středu, který tvořila mužstva těchto zemí: R, P, B, D, Č. Přitom Jugoslávie postavila nové družstvo, ačkoli mohla užít loňského.

V maďarském družstvu bylo 5 loňských účastníků V. MMO, kdežto v sovětském žádný; v našem a polském družstvu bylo po jednom z loňských účastníků. Absolutním vítězem se stal *David Bernštejn*, žák moskevské střední školy, který jediný získal maximální počet 42 bodů. Dva naši žáci, *Tamara Marcisová*, 2. tr. SVŠ, Bratislava, a *Pavel Bureš*, 3. roč. SVVŠ, Brno, získali druhé ceny. Další dva čs. žáci, *Jaroslav Zemánek*, 3. roč.

SVVŠ, Praha 4, a *Miloslav Znojil*, 3. roč. SVVŠ, Prostějov, získali třetí ceny; čs. žáci tedy získali 4 ceny z celkového počtu 35 cen.

Ve středu 8. 7. 1964 se pro účastníky VI. MMO konala slavnostní večeře, které za přítomnosti *A. Černíševa*, prvního náměstka ministra osvěty RSFSR, předsedal *profesor A. I. Markuševič*. Večeře proběhla v radostném a veselém ovzduší, o něž se postarali především sovětští hostitelé.

Ceny a upomínkové dary byly vítězům odevzdány na slavnosti, která se konala ve čtvrtek 9. 7. 1964 o 13. hod. v promočním sále Lomonosovovy university; žáci, kteří nedostali cenu, obdrželi diplom o účasti na mezinárodní soutěži. Schůzi zahájil a řídil profesor *A. I. Markuševič*. Po něm pronesl slavnostní projev ministr osvěty RSFSR *Ľ. I. Afanasjenko*, který jako matematik zhodnotil význam této vědy pro lidskou společnost a její perspektivy; konstatoval výslovně, že sovětští účastníci všesvazové matematické olympiády nekonají přijímací zkoušky na vysoké školy, protože svým výkonem v soutěži prokázali svou kvalifikaci. Blahopřál všem účastníkům, že se svým pracovním úsilím probjovali do této mezinárodní soutěže a zdůraznil velký mezinárodně politický význam tohoto mírového setkání mládeže. Zvláště přitom ocenil výchovná hlediska, spočívající v tom, že se tu schází a svá přátelství uzavírá právě dorůstající mladá generace budoucích vědeckých pracovníků. Za mezinárodní komisi poděkoval sovětským hostitelům profesor *W. Engel* z NDR. Nejlepší maďarský žák *Laszló Gerencsér*, který v soutěži získal 41 bodů, poděkoval jménem žáků za udělené ceny a uznání.

V pátek 10. 7. 1964 o 9. hod. moskevského času odletěla naše delegace zpět do vlasti.

3. Za svého pobytu v Moskvě zhlédli žáci řadu pamětihodností tohoto města a jeho bezprostředního okolí.

Jmenujme Kreml, Leninské Gorki, Palác pionýrů, Treťjakovskou galerii, řadu muzeí a výstav, poklady ve Zbrojním paláci v Kremlu, Lužniki; mimo jiné se účastnili baletu Labutí jezero v Kremelském divadle. Vedoucí delegací s pedagogickými průvodci navštívili Velké akademické divadlo.

Sovětští hostitelé svou pečlivostí připravili dospělým i žákům vskutku příjemné prostředí. Ještě poslední večer pobytu v Moskvě zhlédli členové MK bibliofilské sbírky ručně psaných knih a prvotisků v bytě předsedy MK profesora A. I. Markuševiče, kde byli mile pohoštěni.

Zvláštní událostí je přijetí členů MK ministrem osvěty RSFSR *Jeorgenijem Ivanovičem Afanasjenkem*, a to ve středu 8. 7. 1964 dopoledne. Ministr přednesl delší referát, ve kterém informoval hosty o současné situaci, pokud jde o vyučování matematice, dále o experimentech, které se budou konat ve speciálních třídách. Ministr se pak v diskusi zvláště rozhovořil o nejbližších úkolech výchovy a výuky sovětských škol. Na závěr přál školám socialistických zemí hodně úspěchů. Ministr sledoval průběh olympiády a činnost MK. Řada novinářů a reportérů z rozhlasu a televize navštěvovala nejdůležitější akce, které se konaly v rámci soutěže.

4. Posuzujeme-li úlohy, pak celkem zapadaly do normálu soutěže. Jistou závadu měla úloha č. 2, neboť nerovnost platí pro všechna kladná čísla (tedy i pro jiné trojice čísel, než jsou jen velikosti stran trojúhelníku). Rozhodně obtížný byl dodatek k úloze č. 6; úspěšně jej řešili 4 žáci a jeden z nich jen částečně. Jeden náš žák se pokoušel o řešení, ale bezvysledně.

Naše družstvo jen asi z poloviny bylo na výši, což vzhledem k slabým výsledkům naší celostátní soutěže nepřekvapuje; výsledek MMO to celkem potvrdil.

Úlohy č. 1 až 3 většině našich žáků dopadly celkem dobře, i když se i někteří lepší žáci dopustili triviálních chyb, hlavně numerického rázu. Je vidět, že našim žákům chybí jistota, které lze nabýt jen soustavnou prací. Velmi špatně však dopadla úloha č. 4, jejíž tematika měla spíše povahu časopiseckých zábavných koutků a byla zadána jako úloha pro útěchu, která si nevyžaduje žádných předběžných znalostí. Úlohu rozřešili jen 3 naši žáci. Ještě horší výsledky máme při úloze č. 5, kde řešitelé neuvažovali o ortocentrech trojúhelníků a vůbec zápasili s pojmem kombinace. Lze říci, že první část úlohy č. 6, kde se dalo získat 6 bodů, dopadla dobře; o druhé části, kde se daly získat maximálně 3 body, jsme se již zmínili; dopadla vesměs špatně. Aby čtenář získal představu o tom, jak naši žáci řešili jednotlivé úlohy, připojujeme tabulku č. 3 „Klasifikace řešení jednotlivých úloh čs. žáků”.

Žáci se před odjezdem na soutěž účastnili týdenní instruktáže ve Žďáru nad Sázavou. I když to bylo nouzové opatření, přece jen tu asi žáci získali jakýsi přehled o tom, jakým způsobem tu či onu úlohu řešit. Naše dosavadní péče o nejlepší žáky je však zatím nepostačující; potřebujeme pomoc stálou a trvalé vedení a povzbuzování. Bude třeba najít cestu, jakou formou se to má provádět. 70 bodů, o něž jsme zůstali pozadu za sovětským družstvem, je příliš veliký rozdíl, který nelze omluvit náhodou, cizím prostředím apod.

Tabulka č. 1

Přehled o celkovém počtu bodů, které získali jednotliví žáci na VI. MMO

Žák Země čís.	B	Č	D	H	M	P	R	S	Y
1	30	28	29	35	26	39	16	36	16
2	27	36	31	24	22	1	33	39	29
3	24	13	25	21	26	26	30	42	24
4	23	30	24	41	26	30	21	30	7
5	23	36	27	26	27	31	24	30	18
6	18	14	20	39	14	30	27	38	17
7	30	19	15	28	15	28	30	25	13
8	32	18	25	39	13	24	32	29	31
Součet za zemi	198	194	196	253	169	209	213	269	155

Tabulka č. 2

Přehled o počtu udělených cen jednotlivým delegacím

Cena číslo	Země (číslice udává počet získaných cen)
I.	S 3; H 3; P 1
II.	Č 2; D 1; H 1; P 1; R 2; S 1; Y 1
III.	B 3; Č 2; D 2; H 1; M 1; P 3; R 3; S 3; Y 1

Tabulka č. 3

Klasifikace řešení jednotlivých úloh čs. žáků

(v závorkách je uveden maximální počet bodů za dokonalé řešení úlohy)

Žák čís.	Úlohy						Získal celkem bodů (celkem max. 42 bodů)
	1 (7)	2 (7)	3 (6)	4 (6)	5 (7)	6 (9)	
1	7	5	6	0	4	6	28
2	7	7	6	6	4	6	36
3	5	1	5	0	2	0	13
4	6	0	5	6	7	6	30
5	7	7	6	6	4	6	36
6	0	0	6	0	2	6	14
7	7	0	5	0	1	6	19
8	4	0	6	0	2	6	18
Součet	43	20	45	18	26	42	194

PRÍLOHA 1

Jmenný seznam vítězů VI. MMO

I. cena:

Genadij Archipov S; David Bernštejn S; Jurij Matija-sevič S; László Gerensér H; László Lovász H; József Pelikán H; Tadeusz Figiel P.

II. cena:

Pavel Bureš Č; Tamara Marcisová Č; Wolfgang Klamt D; Marian Orlowski P; István Berkes H; Alexandru Vinea R; Octavian Bisca R; Viktor Urumov Y; Valerij Aleksejev S.

III. cena:

Mižiddorž Cevegmidyn M; Miloslav Znojil Č; Jaroslav Zemánek Č; Monika Titzová D; Manfred Brandt D; Zbigniew Słodkowski P; Wojciech Patkaniowski P; Krzysztof Nowiński P; Avram Eskenazi B; Svjetoslav Bilčev B; Vladimír Zajmov B; Endré Makai H; Tiberiu Spircu R; Eleodor Popescu R; Mihai Chercin R; Stanko Verščaj Y; Alexandr Florensov S; Boris Ivlev S; Alexandr Vilenkin S.

PRÍLOHA 2

Súťažné úlohy zo VI. Medzinárodnej matematickej olympiády

1. a) Určite všetky celé kladné čísla n , pre ktoré je číslo $2^n - 1$ deliteľné siedmimi.

b) Dokážte, že neexistuje žiadne celé kladné číslo n , pre ktoré je číslo $2^n + 1$ deliteľné siedmimi. (ČSSR — 7 bodov.)

Riešenie. Každé prirodzené číslo $n > 2$ možno napísať v práve jednom z tvarov:

$$\alpha) n = 3k,$$

$$\beta) n = 3k + 1,$$

$$\gamma) n = 3k + 2,$$

kde k je vhodné prirodzené číslo.

a) Do daného výrazu dosadíme postupne každú z týchto troch možností:

$$\alpha) 2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1; \text{ podľa známeho vzorca}$$

$$8^k - 1 = 7(8^{k-1} + 8^{k-2} + \dots + 1), \text{ t. j. dané číslo je deliteľné siedmimi;}$$

$$\beta) 2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 8^k - 1 = 8^k + 8^k - 1 = 8^k + 7K,$$

kde K je vhodné prirodzené číslo. Aby platilo, že 7 je deliteľom čísla $2^n - 1$, muselo by platiť i to, že 7 je deliteľom čísla 8^k , čo zrejme nie je možné pre žiadne prirodzené číslo k .

$\gamma) 2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4 \cdot 8^k - 1 = 8^k - 1 + 3 \cdot 8^k$. Aby 7 bolo deliteľom $2^n - 1$, muselo by byť tiež deliteľom čísla $3 \cdot 8^k$, čo zrejme neplatí pre žiadne prirodzené k .

Dosadíme do daného výrazu ešte $n = 1$, $n = 2$; je $2^1 - 1 = 1$, $2^2 - 1 = 3$.

Číslo $2^n - 1$ je deliteľné číslom 7 práve pre tie prirodzené čísla n , ktoré sú násobkami čísla 3.

b) Za n do výrazu $2^n + 1$ dosadíme z možností α), β), γ). Pritom máme dokázané, že číslo $8^k - 1$, kde k je prirodzené číslo, je deliteľné siedmimi.

α) $2^n + 1 = 2^{3k} + 1 = 8^k - 1 + 2 = 7K + 2$, kde K je vhodné prirodzené číslo. Aby číslo 7 delilo číslo $2^n + 1$, muselo by deliť i číslo 2, čo nie je možné;

β) $2^{3k+1} + 1 = 2 \cdot 8^k - 2 + 3 = 2(8^k - 1) + 3$. Keďže číslo 7 nie je deliteľom čísla 3, nemôže deliť ani $2^n + 1$;

γ) $2^{3k+2} + 1 = 4 \cdot 8^k - 4 + 5 = 4(8^k - 1) + 5$. Z toho, že číslo 7 nedelí 5, vyplýva, že nemôže deliť ani $2^n + 1$.

Dosadíme ešte $n = 1, n = 2$; je $2^1 + 1 = 3, 2^2 + 1 = 5$.

Keďže iná možnosť neexistuje, dokázali sme, že číslo $2^n + 1$ pre žiadne prirodzené číslo n nie je deliteľné číslom 7.

Riešila Tamara Marcisová,
2. tr. SVŠ, Bratislava

2. Ak sú a, b, c dĺžky strán ľubovoľného trojuholníka, potom platí

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc;$$

dokážte. (Maďarsko — 6 bodov.)

Riešenie. Ak sú a, b, c dĺžky strán ľubovoľného trojuholníka, je vždy splnená nerovnosť

$$0 \leq (a - b)^2(a + b - c) + (b - c)^2(b + c - a) + (c - a)^2(a + c - b), \quad (1)$$

pretože v trojuholníku musí byť súčet ľubovoľných dvoch strán väčší ako tretia strana (je $a + b - c > 0$, atď.) a na

pravej strane nerovnosti (1) je teda súčet 3 nezáporných čísel, z ktorých každé je súčinom kladného a nezáporného čísla. Rovnosť nastane zrejme iba v prípade $a = b = c$. Prevedením naznačených úkonov dostávame na pravej strane (označme ju P):

$$\begin{aligned} P &= (a^2 - 2ab + b^2)(a + b - c) + (b^2 - 2bc + c^2) \\ &\quad (b + c - a) + (c^2 - 2ac + a^2)(a + c - b) = \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 + a^2b - 2ab^2 + b^3 - a^2c + \\ &\quad + 2abc - b^2c + b^3 - 2b^2c + bc^2 + b^2c - 2bc^2 + \\ &\quad + c^3 - ab^2 + 2abc - ac^2 + ac^2 - 2a^2c + a^3 + \\ &\quad + c^3 - 2ac^2 + a^2c - bc^2 + 2abc - a^2b = \\ &= 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc - 2(a^2b + ab^2 + a^2c + \\ &\quad + ac^2 + b^2c + bc^2). \end{aligned}$$

Pre čísla a, b, c , ktoré sú dĺžkami strán trojuholníka, platí teda vždy nerovnosť

$$\begin{aligned} 0 &\leq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2b - ab^2 - a^2c - \\ &\quad - ac^2 - b^2c - bc^2, \end{aligned} \quad (2)$$

pretože je ekvivalentná s (1). Po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} -a^3 + a^2b + a^2c - b^3 + ab^2 + b^2c - c^3 + ac^2 + \\ + bc^2 \leq 3abc \end{aligned}$$

a teda

$$\begin{aligned} a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) &\leq \\ &\leq 3abc. \end{aligned} \quad (3)$$

Nerovnosť (3) je zhodná s danou nerovnosťou. Platí pre všetky a, b, c , ktoré sú dĺžkami strán ľubovoľného troj-

uholníka, pretože je ekvivalentná s nerovnosťou (1), ktorá je pre všetky takéto a, b, c zrejme splnená.

Riešenie Tamary Marcisovej,
2. tr. SVŠ, Bratislava

Jiné řešení. Danou nerovnost upravíme postupně takto:

$$\begin{aligned} & a^2(b + c - a) - abc + b^2(c + a - b) - \\ & - abc + c^2(a - b - c) - abc \leq 0 \\ & a(ab + ac - a^2 - bc) + b(bc + ba - b^2 - ac) + \\ & + c(ac + bc - c^2 - ab) \leq 0 \\ & a(a - b)(a - c) + b(b - a)(b - c) + \\ & + c(c - a)(c - b) \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Rozeznáváme tři možnosti:

Případ [1]. Necht' je $a = b = c$. Pak z (1) plyne $0 \geq 0$, což je správná nerovnost.

Případ [2]. Necht' je např. $a = b$, $c \neq a$. Pak (1) lze psát

$$c(c - a)^2 \geq 0,$$

což je správná nerovnost, neboť na pravé straně je součin dvou nezáporných čísel. Změnou označení dospějeme k podobným závěrům v případě, kdy dvě z daných čísel jsou si rovna, třetí je od nich různé.

Případ [3]. Vhodným označením při vesměs různých číslech lze dosáhnout, že platí

$$a > b > c. \quad (2)$$

Pak je na levé straně (1) číslo $c(c - a)(c - b) > 0$, neboť je součinem čísla kladného a dvou čísel záporných. Jest-

liže dokážeme, že je $x = a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) \geq 0$, bude platit i vztah (1). Avšak snadno se usoudí, že vzhledem ke (2) platí

$$\begin{aligned} x &= (a-b)[a(a-c) - b(b-c)] > \\ &> (a-b)b[a-c - (b-c)] = b(a-b)^2 > 0, \end{aligned}$$

neboť v posledním součinu jsou oba činitele kladná čísla.

Ve všech třech případech lze postup obrátit a dospět od výsledné nerovnosti k původní. Tím je řešení provedeno.

Poznámka. Předložený důkaz dokonce platí pro všechny trojice kladných čísel a, b, c .

Podle řešení Pavla Bureše, 3. roč. SVVŠ, Brno

3. Do trojúhelníku ABC se stranami o délkách a, b, c vepíšeme kružnici a sestrojíme k ní tři nové tečny rovnoběžné se stranami daného trojúhelníku. Každá z těchto tečen utíná od trojúhelníku ABC po jednom trojúhelníku.

Do každého z těchto tří nových trojúhelníků vepíšeme kružnici.

Vypočtete součet obsahů všech čtyř vepsaných kruhů. (Jugoslávie — 6 bodů.)

Řešení. Označme po řadě $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ poloměry kružnic k, k_1, k_2, k_3 (viz obr. 40). Máme vypočítat číslo

$$V = \pi (\varrho^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2). \quad (1)$$

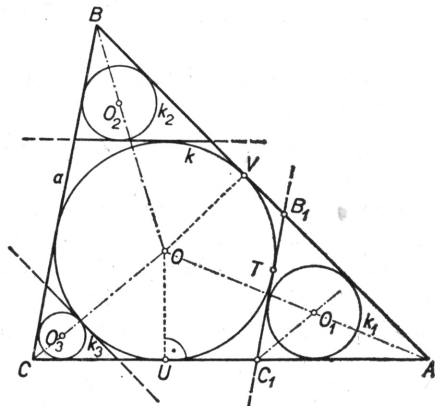
Pro výpočet poloměrů použijeme vzorců

$$\varrho = \frac{P}{s}, \quad \varrho_1 = \frac{P_1}{s_1}, \quad \varrho_2 = \frac{P_2}{s_2}, \quad \varrho_3 = \frac{P_3}{s_3}. \quad (2)$$

Přitom P, P_1, P_2, P_3 jsou po řadě obsahy trojúhelníku ABC a tří trojúhelníků oddělených při vrcholech $A, B,$

C ; s , s_1 , s_2 , s_3 jsou jejich poloviční obvody. Vzorce (2) upravíme takto:

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{P}{s^2} s, & \varrho_1 &= \frac{P_1}{s_1^2} \cdot s_1, \\ \varrho_2 &= \frac{P_2}{s_2^2} \cdot s_2, & \varrho_3 &= \frac{P_3}{s_3^2} \cdot s_3. \end{aligned} \quad (3)$$



Obr. 40.

Z podobnosti trojúhelníku ABC a každého z tří oddělených trojúhelníků vyplývá

$$\frac{P_1}{s_1^2} = \frac{P_2}{s_2^2} = \frac{P_3}{s_3^2} = \frac{P}{s^2}. \quad (4)$$

Dosadíme-li z (4) do (3), vyjde

$$\varrho_1 = \frac{P}{s^2} \cdot s_1, \quad \varrho_2 = \frac{P}{s^2} \cdot s_2, \quad \varrho_3 = \frac{P}{s^2} s_3. \quad (5)$$

Z vlastností tečen snadno zjistíme, že obvod trojúhelníku AB_1C_1 je $AB_1 + AC_1 + B_1C_1 = AB_1 + AC_1 + B_1T + C_1U = AT + AU = s - b + s - c$ při obvyklém označení stran trojúhelníku ABC . Je tedy $2s_1 = s - b + s - c = a$, tj.

$$s_1 = \frac{a}{2}, \quad s_2 = \frac{b}{2}, \quad s_3 = \frac{c}{2}. \quad (6)$$

Dosadíme-li z (6) do (5) a odtud do (1), vyjde:

$$\begin{aligned} V &= \pi \frac{P^2}{s^4} \left(s^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} \right) = \\ &= \frac{\pi P^2}{4s^4} (4s^2 + a^2 + b^2 + c^2) = \\ &= \frac{\pi P^2}{4s^4} (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) = \\ &= \frac{\pi P^2}{2s^4} (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Za P^2 lze do tohoto vzorce dosadit ze vzorce Heronova.

Poznámky. a) Ze vzorců (5), (6) vyplývá vztah

$$\begin{aligned} \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 &= \frac{P}{s^2} (s_1 + s_2 + s_3) = \frac{P}{2s^2} (a + b + c) = \\ &= \frac{P}{2s^2} \cdot 2s = \frac{P}{s} = \varrho. \end{aligned}$$

b) Poměr součtu obsahů kruhů k_1, k_2, k_3 k obsahu kruhu k je podle předcházejícího

$$\begin{aligned} \frac{\pi (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2)}{\pi \varrho^2} &= \frac{s^2}{P^2} \cdot \frac{P^2}{s^4} (a^2 + b^2 + c^2) = \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4s^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2}. \end{aligned}$$

4. Sedemnást osôb si navzájom píše, každá z nich so všetkými ostatnými. V celej korešpondencii sa objavujú celkom len tri rôzne témy. Každá dvojica osôb si spolu píše iba o jednej z týchto tém.

Dokážte, že existujú aspoň tri osoby, ktoré si navzájom píšu na tú istú tému. (Poľsko — 6 bodov.)

Riešenie. Označme jednu zo 17 osôb A . Osoba A si podľa podmienky úlohy píše so 16 inými osobami o maximálne 3 témach. Podľa Dirichletovho princípu si musí teda na jednu z týchto tém, označme ju I , písať aspoň so 6 osobami. Rozoznávajme tu práve 2 možnosti:

[1]. Aspoň 2 z týchto 6 osôb si píšu na tému I . Tým je splnené, že existujú aspoň tri osoby, ktoré si navzájom píšu na tú istú tému (I).

[2]. Žiadne 2 z týchto 6 osôb si nepíšu na tému I . Potom jedna z nich, nech je to B , si píše s ostatnými 5 z tejto skupiny na zostávajúce dve témy. Podľa Dirichletovho princípu si musí písať na jednu z týchto tém — označme ju II — aspoň s 3 z týchto 5 osôb. Opäť musíme rozoznávať práve 2 možnosti:

a) Z týchto 3 osôb si aspoň dve píšu na tému II , čím je splnené, že existujú aspoň 3 osoby, ktoré si navzájom píšu na tú istú tému (II).

b) Žiadne 2 z týchto 3 osôb si nepíšu na tému II , teda všetky 3 si píšu na zostávajúcu tému III .

V každom prípade si teda aspoň tri osoby navzájom píšu na tú istú tému. Tým je dôkaz prevedený.

Riešila Tamara Marcisová,
2. tr. SVŠ, Bratislava

5. V rovine je dáno 5 bodů. Mezi přímkami, které spojují vždy dva z těchto bodů, neexistují žádné dvě, které jsou navzájem rovnoběžné nebo kolmé nebo splývající.

Každým z daných bodů vedeme kolmice ke všem spojnicím zbývajících čtyř bodů.

Uřčete maximální počet průsečíků, které mohou mít navzájem tyto kolmice. (Rumunsko — 7 bodů.)

Řešení. Dané body lze spojit $\binom{10}{2}$ přímkami, z nichž žádné dvě podle textu úlohy nejsou ani splývající, ani rovnoběžné, ani kolmé (jsou tedy kosé).

Zvolme jeden z pěti daných bodů; pak 4 zbývajcí body mají 6 spojnic a zvoleným bodem k nim prochází 6 kolmic. Žádné dvě z nich nesplynou (jinak by dvě ze šesti spojnic splývaly nebo byly rovnoběžné) a žádná z těchto kolmic neprochází žádným ze čtyř zbývajících bodů (jinak by byly dvě spojnice daných bodů navzájem kolmé). Nesplynou však ani dvě kolmice příslušné ke dvěma různým z daných bodů; pak by totiž byly dvě spojnice daných bodů navzájem kolmé.

Každým z pěti daných bodů prochází proto 5 kolmic, což je celkem $6 \cdot 5 = 30$ kolmic. Jestliže žádné dva z jejich průsečíků nesplynou, máme $\binom{30}{2} = 435$ průsečíků. Ale každým z pěti daných bodů prochází 6 kolmic; tím vždy $\binom{6}{2} = 15$ průsečíků splývá v jeden a odpadne tak $14 \cdot 5 = 70$ průsečíků, takže jich zbývá $435 - 70 = 365$.

Vedeme-li dvěma z daných bodů kolmice k téže spojnici zbývajících tří z daných bodů, nemají tyto přímky průsečík, neboť jsou rovnoběžné a různé. Ke každé spojnici dvou daných bodů lze ze tří zbývajících vést 3 různé kolmice a z nich lze sestavit $\binom{3}{2} = 3$ dvojice;

žádná z nich nedává průsečík. Spojnic je $\binom{5}{2} = 10$, takže odpadne $3 \cdot 10 = 30$ průsečíků. Zbývá tedy $365 - 20 = 335$ průsečíků.

Každé tři z daných bodů určují trojúhelník a tvoří jeho vrcholy. Tři výšky tohoto trojúhelníku nemají celkem 3 průsečíky, nýbrž jen jeden (ortocentrum). Z pěti daných bodů jako vrcholů lze zkombinovat $\binom{5}{3} = 10$ trojúhelníků; každý z nich sníží počet hledaných průsečíků o dva, celkem tedy odpadne $2 \cdot 10 = 20$ průsečíků a zbývá $335 - 20 = 315$ průsečíků.

Maximální počet průsečíků je 315 (včetně pěti daných bodů).

Řešil Miloslav Znojil, 3. roč. SVVŠ, Prostějov

6. V daném čtyřstěnu $ABCD$ spojíme vrchol D s těžištěm D_1 trojúhelníku ABC . Rovnoběžky k přímce DD_1 , vedené body A, B, C , protínají po řadě roviny BCD, CAD, ABD v bodech A_1, B_1, C_1 .

a) Dokažte, že objem čtyřstěnu $ABCD$ je roven jedné třetině objemu čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$.

b) Platí tento výsledek i v případě, kdy D_1 je libovolný bod uvnitř trojúhelníku ABC ? (Polsko — 6 + 3 body.)

Řešení (obr. 41). a) Bod A_1 je určen jako průsečík přímky $a \parallel DD_1$ vedené bodem A s rovinou $\varrho_1 \equiv BCD$. Rovina ADD_1 obsahuje přímku a a přímku $A'D$, kde A' je střed hrany BC . Z trojúhelníku $A'AA_1$ odvodíme

$$AA_1 = 3DD_1; \quad (1)$$

je totiž $A'D_1 = \frac{1}{3}AA'$, $\triangle A'AA_1 \sim \triangle A'D_1D$.

Protože je $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 3DD_1$,
 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, je

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC \text{ (sss)}; \quad (2)$$

čtyřúhelníky ABB_1A_1 ,
 BCC_1B_1 , CAA_1C_1 jsou
totiž rovnoběžníky. Výšky
 v , v_1 čtyřstěnu $ABCD$,
 $A_1B_1C_1D_1$ vedené po řadě
z vrcholů D , D_1 jsou v po-
měru $1 : 3$, tj. platí

$$v : v_1 = 1 : 3. \quad (3)$$

Vztah (3) dokážeme takto:
Ze stejnosti trojúhel-
níků $\triangle A'AA_1$, $\triangle A'D_1D$
a ze vztahu (1) vyplývá

$$A'A_1 = 3A'D. \quad (4)$$

Je-li ω odchylka přímky
 $A'D$ od roviny ABC , platí
pro výšku v čtyřstěnu
 $ABCD$ a pro vzdálenost u
bodu A_1 od roviny ABC
vztahy

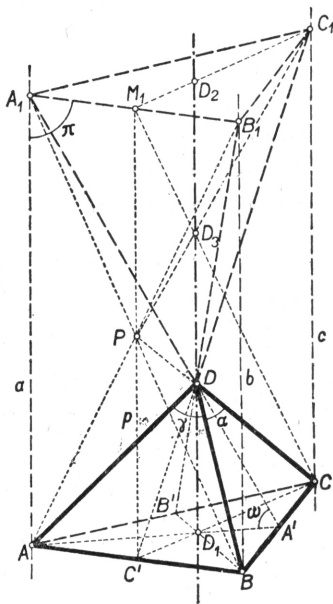
$$v = A'D \sin \omega,$$

$$u = A'A_1 \sin \omega,$$

tj. podle (4)

$$v : u = 1 : 3. \quad (5)$$

Roviny ABC , $A_1B_1C_1$ jsou rovnoběžné; proto vzdále-
nost u bodu A_1 od roviny ABC je rovna vzdálenosti
bodu D_1 od roviny $A_1B_1C_1$, tj. výšce v_1 čtyřstěnu
 $A_1B_1C_1D_1$.



Obr. 41.

Je tedy

$$u = v_1. \quad (6)$$

Spojením vztahů (5), (6) dostaneme (3). Pro objemy V , V_1 čtyřstěnů $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ vyjde vzhledem k (2), (3)

$$V = \frac{1}{3} p \cdot v, \quad V_1 = \frac{1}{3} p \cdot 3v = 3V;$$

přitom p značí společný obsah trojúhelníků ABC , $A_1B_1C_1$.

Tím je tvrzení věty dokázáno.

b) Označme A' , B' , C' průsečíky přímek AD_1 , BD_1 , CD_1 po řadě s přímkami BC , CA , AB ; dále označme α , β , γ roviny stěn DBC , DCA , DAB a a , b , c rovnoběžky s přímkou DD_1 , vedené po řadě body A , B , C . Průsečík A_1 přímky a s rovinou α leží na přímce DA' a existuje, neboť přímky DD_1 , DA' jsou různoběžné a platí $a \parallel DA'$; stejně vždy existují body B_1 , C_1 po řadě na přímkách DB' , DC' . Roviny α , $\pi \equiv ABB_1A_1$ mají společné body B , A_1 , takže BA_1 je jejich průsečnice. Označme P průsečík rovin α , π , CDC' ; bod P je tedy průsečíkem přímek BA_1 , p ležících v π , kde $p \parallel DD_1$ prochází bodem C' .

Přímka AP leží v rovině β , neboť bod A a přímka $CP \equiv CD$ leží v β . Proto je přímka AP průsečnicí rovin β , π , a protože bod B leží v π , prochází přímka AP bodem B_1 . Přímka $p \equiv PC'$ má s úsečkou A_1B_1 společný bod M_1 a přímka DD_1 , ležící v rovině CC_1M_1C' , má s úsečkou C_1M_1 společný bod D_2 . Označme D_3 společný bod přímky D_1D_2 s úsečkou C_1P . Ve čtyřúhelníku ABB_1A_1 platí $AA_1 \parallel BB_1$ a P je průsečík jeho úhlopříček; proto je $PC' \equiv PM_1$, jak snadno odvodíme užitím stejnolehlostí o středech B , B_1 a s konstantami rovnými poměru vzdáleností přímek a , b a přímek p , b (Vlastnost

lichoběžníku nebo rovnoběžníku, že průsečík P jeho úhlopříček je středem jeho příčky M_1C' — viz obr. 41 — pro další úvahu označme věta 1.)

Úsečky PC' , CC_1 jsou stejnohlé podle bodu D a úsečky PM_1 , C_1C s nimi shodné jsou stejnohlé podle bodu D_3 (konstanta obou stejnohlostí je $\frac{DP}{DC} = \frac{D_3P}{D_3C_1}$; proto je D_3 průsečíkem úhlopříček PC_1 , CM_1 čtyřúhelníku CC_1M_1P . Proto podle věty 1 platí $DD_1 = DD_3$ (viz lichoběžník nebo rovnoběžník CC_1PC') a podle téže věty $DD_3 = D_3D_2$ (lichoběžník nebo rovnoběžník CC_1M_1P); je tedy $DD_1 = DD_3 = D_3D_2$. Proto je

$$D_1D_2 = 3DD_1.$$

Čtyřstěn $A_1B_1C_1D_1$ lze rozložit ve tři čtyřstěny $A_1B_1D_2D_1$, $B_1C_1D_2D_1$, $C_1A_1D_2D_1$, které mají po řadě objemy rovné objemům čtyřstěnů ABD_1D_2 , BCD_1D_2 , CAD_1D_2 (např. čtyřstěny $A_1B_1D_2D_1$, ABD_1D_2 mají zřejmě stejné obsahy podstav $A_1D_1D_2$, AD_1D_2 a k nim příslušné délky výšek vedených po řadě vrcholy B_1 , B jsou rovněž stejné).

Proto mají čtyřstěny $A_1B_1C_1D_1$ a $ABCD_2$ sobě rovné objemy. Avšak druhý z těchto čtyřstěnů má objem třikrát větší než čtyřstěn $ABCD$, s nímž má společnou podstavu ABC , přičemž výšky těchto čtyřstěnů jsou v témž poměru jako úsečky D_1D_2 , D_1D , o nichž platí $D_1D_2 = 3D_1D$. Tím je platnost tvrzení úlohy rozšířena i na případ, že D_1 je libovolný bod uvnitř trojúhelníku ABC .

Připomínka. Úlohu b) v podstatě rozřešili jen asi 3 žáci; jinak byla podána řada řešení úlohy a) asi tak, jak je uvedeno v odst. a).



OBSAH

<i>I. K průběhu XIII. ročníku Matematické olympiády</i>	<i>7</i>
<i>II. K výsledkům jednotlivých kol soutěže.</i>	<i>14</i>
<i>III. Přípravné úlohy (texty)</i>	<i>27</i>
<i>IV. Řešení úloh ze soutěže</i>	
1. Úlohy I. kola kategorie A	32
2. Úlohy II. kola kategorie A	48
3. Úlohy III. kola kategorie A	58
4. Úlohy I. kola kategorie B	65
5. Úlohy II. kola kategorie B	77
6. Úlohy I. kola kategorie C	86
7. Úlohy II. kola kategorie C	98
8. Úlohy I. kola kategorie D	106
9. Úlohy II. kola kategorie D	115
<i>V. Zpráva o Šesté mezinárodní matematické olympiádě</i>	<i>124</i>

Edice Pomocné knihy pro žáky
Za příspěvní spolupracovníků zpracovali
doc. Jan Vyšín a Rudolf Zelinka

TŘINÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1965 — Počet stran 148
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk
Technická redaktorka: Eva Duchečková

Z nové sazby písmem Plantin vytiskla tiskárna Rudé právo,
vydavatelství ÚV KSČ v Brně
5,08 AA (text 4,43 AA, grafika 0,65 AA) — 5,36 VA — D-10*50308
Náklad 4250 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/2

Cena brožovaného výtisku Kčs 3,50

63/II-13

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 55-0-06

14-959-65 Kčs 3,50

SPN

55-0-06

14-959-65
03/2 Kčs 3,50