

14. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Rudolf Zelinka (author): 14. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1964-1965. 7. Mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404536>

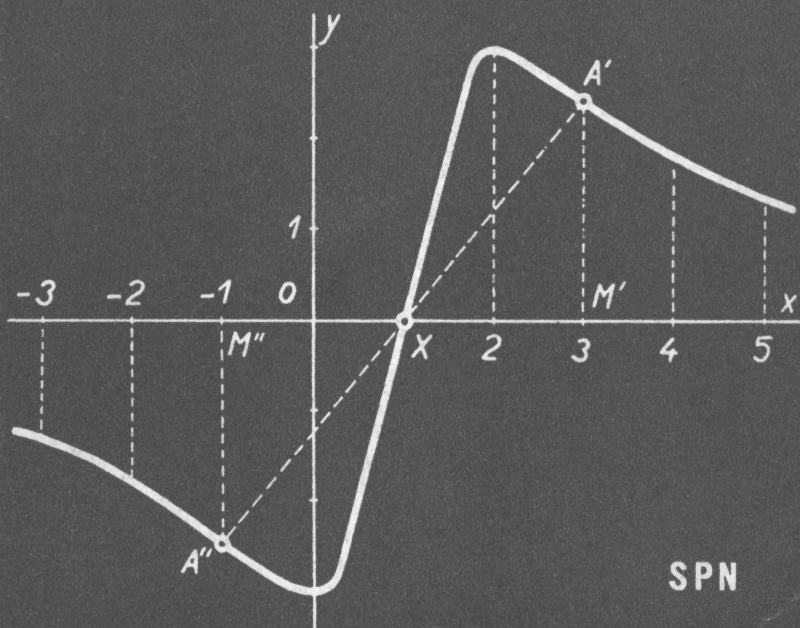
Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

XIV. ročník matematické olympiády



ČTRNÁCTÝ
ROČNÍK
MATEMATICKÉ
OLYMPIÁDY

*Zpráva o řešení úloh ze soutěže,
konané ve školním roce 1964-1965*

SEDMÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

PRAHA 1966
STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, Vlastimil Macháček a Rudolf Zelinka. Slovenské části textu přeložil Jozef Moravčík

Recenzovali doc. Josef Holubář, Jitka Kučerová, dr. Zbyněk Nádeník CSc. a Miroslav Šisler CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1966

I. O průběhu XIV. ročníku matematické olympiády

1. Organizace soutěže. Pořadatelem soutěže je *ministerstvo školství a kultury* (MŠK) s *Matematickým ústavem ČSAV* (MÚ ČSAV), *Jednotou čs. matematiků a fyziků* (JČMF) a ústředním výborem Československého svazu mládeže (ÚV ČSM). Také XIV. ročník se řídil statutem, uveřejněným ve Věstníku MŠK, roč. XIX, str. 126, 127, směrnice 37 ze dne 30. 4. 1963.

Soutěž řídil celostátně *ústřední výbor matematické olympiády* (ÚVMO), v krajích krajské výbory matematické olympiády (KVMO) a v okresech okresní výbory matematické olympiády (OVMO); v těchto výborech jsou také zastoupeny pořadatelské složky.

Žáci soutěžili ve čtyřech kategoriích podle svého studijního věku, a to v kategoriích A, B, C (střední školy) a v kategorii D (základní školy).

2. Složení ústředního výboru matematické olympiády:

Předseda: *akademik Josef Novák*, vedoucí vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Místopředseda: *Jan Vyšín*, docent matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze.

Jednatel: *Rudolf Zelinka*, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze. Po jeho smrti převzal tuto funkci Vlastimil Macháček, odb. asistent pedagogické fakulty Karlovy university v Praze.

Členové: *dr. František Běloun*, vedoucí matematického kabinetu Krajského pedagogického ústavu v Praze,
Miloš Jelínek, vědecký pracovník Pedagogického ústavu J. A. Komenského ČSAV, Praha (t. č. v zahraničí),
doc. Josef Holubář, em. vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze,
František Hradecký, odborný asistent matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze,
dr. Karel Hruša, profesor pedagogické fakulty Karlovy university v Praze,
Ladislav Krkavec, ústřední inspektor ministerstva školství a kultury v Praze,
Josef Porcal, ústřední inspektor ministerstva školství a kultury v Praze,
František Veselý, em. odborný asistent Vysoké školy strojní a elektrotechnické, Plzeň,
dr. Miloslav Zedek, docent Palackého university v Olomouci,
dr. Miroslav Fiedler, DrSc., vedoucí vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze,
Náhradník: *Miroslav Šisler*, CSc., vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Dalšími členy ústředního výboru Matematické olympiády jsou všichni předsedové KV MO:

dr. Václav Pleskot, profesor ČVUT v Praze,
dr. Václav Vilímek, docent katedry matematiky a deskriptivní geometrie strojní fakulty ČVUT v Praze,
František Vejsada, odborný asistent Vysoké školy zemědělské, České Budějovice,
Karel Hnyk, odborný asistent pedagogické fakulty v Liberci,
Věra Rádllová, učitelka SVVŠ J. Fučíka, Plzeň,

Jan Laštovka, vedoucí kabinetu matematiky Krajského pedagogického ústavu, Pardubice,
Petr Benda, odborný asistent VUT, Brno,
Josef Andrys, odborný asistent pedagogické fakulty v Ostravě,
dr. Milan Kolibiar, profesor přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě,
Ladislav Berger, odborný asistent katedry matematiky Vysoké školy dopravní v Žilině,
Gejza Grega, odborný asistent pedagogické fakulty v Košicích.

Funkční období ústředního výboru matematické olympiády končí podle organizačního řádu na jaře 1966.

3. Schůze ÚV MO. V období XIV. ročníku zasedal ústřední výbor matematické olympiády dvakrát; dne 19. října 1964 byla jednodenní schůze v Praze, dne 15. května 1965 se konala při příležitosti III. kola schůze ústředního výboru MO v Olomouci. Obě schůze se zabývaly běžnými otázkami soutěže a pomocných akcí. Protože se na olomoucké schůzi ukázalo, že je třeba některé otázky důkladněji prodiskutovat, zejména zrevidovat koncepci soutěže a její organizaci, bylo usneseno, svolat příští schůzi ústředního výboru MO na podzim 1965 jako dvoudenní.

4. Průběh kol. Jednotlivá kola probíhala časově podle Statutu takto:

I. kolo (studijní) od října 1964 do konce února 1965; žáci v něm řešili 6 úloh přípravných a 6 úloh soutěžních.

II. kolo dne 4. dubna 1965 v krajských městech pro kategorie A až C, dne 11. dubna 1965 v okresních městech a některých dalších střediscích pro kategorii D; žáci řešili 4 soutěžní úlohy.

III. kolo dne 15. května 1965 v Olomouci jako celostátní soutěž. Účastníci dostali 4 soutěžní úlohy.

V rámci II. kola se konaly pro účastníky vyšších kategorií besedy a konzultace. Na nich se mimo jiné prováděla analýza chyb, kterých se žáci dopustili při řešení úloh I. kola. Při příležitosti II. kola většinou byly pro žáky uspořádány i exkurze do průmyslových podniků, výlety, návštěvy divadel, výstav apod.

Při příležitosti III. kola v Olomouci byla pro účastníky uspořádána beseda, které se zúčastnili mimo členy ústředního výboru MO i někteří učitelé olomoucké university; prof. dr. Metelka promluvil o vývoji matematiky a o jejím významu pro současnou společnost. Program pro účastníky III. kola byl doplněn výletem. Celé akce se ještě obětavě zúčastnil jednatel ÚV MO Rudolf Zelinka, který několik dní potom zemřel.

5. Pomocné akce. Krajské výbory MO organizovaly s pobočkami Jednoty čs. matematiků a fyziků řadu akcí. V první řadě to byly přípravné přednášky (semináře) pro účastníky Matematické olympiády, které měly aktivizovat žáky v období studijního kola a prohloubit jejich znalosti školské matematiky a učit je studovat odbornou literaturu. Podle cíle těchto seminářů a podle místních podmínek byla vybrána jejich tematika; některé se opíraly o svazečky knižnice *Škola mladých matematiků*. Mimo tyto semináře pořádaly krajské výbory MO i instruktáže, konzultace apod.

Celostátní soustředění 92 úspěšných řešitelů kategorie B matematické olympiády i fyzikální olympiády se konalo ve Vojtěchově od 7. června do 26. června 1965. Dopolední program byl věnován polovinou času matematice a polo-

vinou fyzice; odpoledne se žáci rekreovali v rámci sportovního a turistického programu, večer se konaly besedy s významnými vědeckými a vysokoškolskými pracovníky. Pro účely instruktáží byli žáci rozděleni do 4 tříd, zhruba po 25 účastnících. Souběžně s touto instruktáží se konalo soustředění 8 žáků vybraných pro účast na VII. mezinárodní olympiádě, která se počátkem července 1965 konala v Berlíně. Odbornou část instruktáží konali pracovníci vysokých škol a Matematického ústavu ČSAV. Podobné instruktáže uspořádaly i některé krajské výbory MO ve spolupráci s odbory pro školství a kulturu KNV a s pobočkami Jednoty čs. matematiků a fyziků.

6. Studijní literatura. Státní pedagogické nakladatelství vydalo jako každoročně pro účastníky matematické olympiády (I. kola) leták s texty úloh a s pokyny v nákladu 15 000 exemplářů. Bohužel tento leták došel na krajské výbory MO z technických důvodů opožděně. Texty úloh I. kola byly otištěny v časopisech *Matematika ve škole* a *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Jako pomoc pro opravování dostali zúčastnění učitelé kopie autorových řešení všech soutěžních úloh I. a II. kola.

Na počátku roku 1965 vyšel český překlad sovětské sbírky řešených úloh, jejímž hlavním autorem je V. B. Lidskij. Překlad pořídil kolektiv pod vedením R. Zelinky.

Platné služby koná knihovna *Škola mladých matematiků*, vydávaná nakladatelstvím Mladá fronta. Uvádíme přehled všech svazeků vydaných až do května 1966:

1. Hradecký, Koman, Vyšín, Několik úloh z geometrie jednoduchých těles.
2. Jiří Sedláček, Co víme o přirozených číslech.
3. J. Šedivý, Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách.

4. *M. Šisler, J. Jarník*, O funkcích.
5. *Fr. Veselý*, O nerovnostech.
6. *R. Výborný*, Matematická indukce.
7. *J. Šedivý*, O podobnosti v geometrii.
8. *J. Váňa*, O rovnicích s parametry.
9. *J. Vyšín*, Konvexní útvary.
10. *J. Sedláček*, Faktoriály a kombinační čísla.
11. *J. Holubář*, Geometrická místa bodů v prostoru.
12. *K. Havlíček*, Prostory o čtyřech a více rozměrech.
13. *M. Šisler, J. Andrys*, O řešení algebraických rovnic.
14. *Fr. Veselý*, O dělitelnosti čísel celých.

Svazky 1, 2, 3, 4 a 7 vyšly v reedici. Knižnice je cenově dostupná všem žákům (svazeček stojí průměrně 3 Kčs), bohužel však s její distribucí nemůžeme být spokojeni. Část nákladu vykupuje ministerstvo školství a kultury pro žakovské knihovny; knihnice však není ve volném prodeji a nelze plně uspokojit zájem učitelů a žáků o tuto knižnici.

Brožury starších ročníků MO jsou rozebrány; proto plánuje ústřední výbor MO spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím vydání výborů úloh z těchto brožur uspořádaných podle jednotlivých kategorií.

II. Výsledky jednotlivých kol soutěže

1. I. kolo. Porovnejme tabulky č. 1 a č. 2 s obdobnými tabulkami ze XIII. a XII. ročníku, z nichž je patrné, že počty účastníků v kategoriích A i B byly velmi nízké. Lze říci, že kvantitativní zlepšení,*) které nastalo v kategorii C ve XII. ročníku, se postupně přeneslo až do kategorie A ve XIV. ročníku MO. Ke kladným jevům prvního kola XIV. ročníku lze rovněž počítat vzrůst počtu úspěšných řešitelů na 50% účastníků.

V kategorii D sice nepatrně poklesl počet účastníků I. kola, avšak počet úspěšných řešitelů se prakticky neměnil a činí více než 65% účastníků.

Zajímavé je sledování účasti dívek. V kategoriích A a B tvoří přibližně jednu třetinu, v kategoriích C a D téměř polovinu účastníků. Vysoká účast dívek v kategorii C odpovídá vzrůstajícímu počtu dívek na SVVŠ.

2. II. kolo (tabulky č. 3 a č. 4). Celostátně se opět projevují značné rozdíly mezi počty úspěšných řešitelů I. kola a účastníků II. kola, zvláště v kategorii C a D; rozboru příčin by se krajské a okresní výbory MO měly věnovat.

Počet účastníků II. kola kategorie A proti předcházejícím letům sice podstatně vzrostl, avšak procento úspěš-

*) Uváděný rozbor tabulek vychází především z *kvantitativního* hlediska; výsledky soutěže by bylo záhodno ohodnotit i z hlediska *kvalitativního*. O to se pokusíme při rozboru výsledků III. kola celostátní soutěže kategorie A a při hodnocení našeho umístění na VII. Mezinárodní matematické olympiádě v Berlíně.

Tabulka 1

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B, C.*)

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	z toho dívěk	U	P	z toho dívěk	U	P	z toho dívěk	U	P	z toho dívěk	U
Praha-město	135	24	96	145	30	83	190	41	93	470	95	272
Středočeský	149	67	60	202	94	75	336	198	60	687	359	159
Jihočeský	48	12	48	62	14	57	90	25	86	200	51	191
Západočeský	52	21	48	53	22	41	78	29	61	183	72	150
Severočeský	79	24	34	118	35	59	118	50	65	315	109	158
Východočeský	90	25	80	107	30	93	159	73	134	356	128	307
Jihomoravský	148	43	117	204	74	170	567	410	377	919	527	664
Severomoravský	140	41	55	96	23	70	200	57	100	436	121	225
Západoslovenský	113	30	59	172	69	86	190	71	92	475	170	237
Středoslovenský	72	17	51	110	52	71	153	68	91	335	137	213
Východoslovenský	28	5	13	63	19	32	74	27	27	165	51	72
Celkem	1 054	309	661	1 332	462	837	2 155	1 049	1 186	4 541	1 820	2 648

*) P = počet všech účastníků, U = počet úspěšných řešitelů.

Tabulka 2

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategorii D)*

Kraj	Kategorie D		
	<i>P</i>	z toho dívek	<i>U</i>
Praha-město	1 057	466	749
Středočeský	1 076	506	794
Jihočeský	878	477	616
Západočeský	468	244	295
Severočeský	803	378	475
Východočeský	853	397	603
Jihomoravský	1 434	547	713
Severomoravský	1 117	531	737
Západoslovenský	1 129	566	751
Středoslovenský	981	711	636
Východoslovenský	714	390	482
Celkem	10 510	5 213	6 851

*) *P* = celkový počet účastníků, *U* = počet úspěšných řešitelů.

Tabulka 3

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	z toho dívky	U	P	z toho dívky	U	P	z toho dívky	U	P	z toho dívky	U
Praha-město	92	10	46	77	12	33	83	13	65	252	35	144
Středočeský	56	11	11	59	25	10	53	20	23	168	56	44
Jihočeský	44	10	15	50	8	12	69	14	32	163	32	59
Západočeský	46	20	5	39	15	3	51	13	19	136	48	27
Severočeský	31	7	5	59	12	31	65	22	51	155	41	87
Východočeský	73	19	21	78	21	22	89	34	47	240	74	90
Jihomoravský	110	22	19	169	54	40	179	48	126	458	124	185
Severomoravský	53	14	7	64	19	11	90	27	64	207	60	82
Západoslovenský	53	16	14	92	33	9	83	34	42	228	83	65
Středoslovenský	47	11	7	62	26	8	84	39	18	193	76	33
Východoslovenský	13	3	2	32	4	8	27	6	11	72	13	21
Celkem	618	143	152	781	229	187	873	270	498	2 272	642	837

*) P = celkový počet účastníků, U = počet úspěšných řešitelů.

Tabulka 4

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategorii D)*

Kraj	Kategorie D		
	<i>P</i>	z toho dívek	<i>U</i>
Praha-město	627	232	480
Středočeský	620	313	424
Jihočeský	522	269	289
Západočeský	246	121	135
Severočeský	393	175	229
Východočeský	533	242	422
Jihomoravský	636	307	317
Severomoravský	641	277	371
Západoslovenský	678	314	349
Středoslovenský	512	268	285
Východoslovenský	396	213	250
Celkem	5 804	2 731	3 551

*) *P* = počet všech účastníků, *U* = počet úspěšných řešitelů.

ných řešitelů je poněkud nižší, jen asi 25%. Podobně je tomu i v kategorii B. Potěšitelné je, že při celkem stejném počtu účastníků II. kola v kategorii C stouplo procento úspěšných řešitelů nad 50%.

Rovněž v kategorii D se situace zlepšila, protože při téměř konstantním počtu účastníků II. kola vzrostl počet úspěšných řešitelů na 60%.

Pokud jde o slovenské kraje, lze konstatovat jisté malé zlepšení v kategoriích A, B a C. V kategorii D však na Slovensku vzrostl počet účastníků i úspěšných řešitelů o 50%.

Ve všech kategoriích zaslouží ocenění práce organizátorů soutěže z Jihomoravského kraje, kde počty účastníků i úspěšných řešitelů převyšují absolutně i relativně výsledky většiny ostatních krajů.

Úspěšní řešitelé II. kola obdrželi čestná uznání, byli odměněni podle pořadí různými věcnými cenami, zvláště studijní literaturou.

Soutěží II. kola v kategoriích B, C a D soutěž končí; proto uvedeme pořadí deseti nejlepších úspěšných řešitelů II. kola v kategoriích B a C podle jednotlivých krajů.

*Pořadí úspěšných řešitelů II. kola
v kategoriích B a C*

(Není-li uvedeno jinak, jde o SVVŠ a o třídu odpovídající příslušné kategorii)

Praha — město

B. Pavel Novák, I. roč., Štěpánská ul.; Jan Fährnich, Nad štolou; Eduard Prandstetter, W. Piecka; Petr Kurka, I. roč. SPŠ el., Příkopy; Milana Říhová, W. Piecka; Pavel Kovařík, SPŠ, Zborovská ul.; Ludmila Kohoutová, Na dlouhém lánu; Aleš Procházka, Velvarská; Tomáš Wichs a Jiří Zdobnický, W. Piecka.

C. Petr Doberský, Milan Chytil, Radovan Gregor a Jaromír Durdík, všichni W. Piecka; Ivan Hořejší a Petr Kroček, Přípotoční ul.; Jiří Němec, Na dlouhém lánu; Daniel Brandl, U libeňského zámku; Jiří Henzler, Na dlouhém lánu; Jaroslav Kalous, Štěpánská ul.

Středočeský kraj

B. Štěpán Starý, Benešov; Jiří Svoboda, Benešov; Petr Bareš, Příbram; Jaroslav Leder, Votice; Jiřina Charvátová, Benešov; Jaroslav Chudáček, Mnichovo Hradiště; Jan Jágr, Hořovice; Ladislav Šahát, Příbram; František Deyl, Čakovice; Ludmila Dvořáková, Mladá Boleslav.

C. Jaroslav Barták, Kladno; Václav Kříž a Jarmila Lisá, Beroun; Jaroslav Podlipský, Brandýs n. L.; Jaroslav Pospíšil, Mnichovo Hradiště; Milan Číha, Rakovník; Věra Dvořáková, Příbram; Michael Holan, Kolín; Eva Roztočilová, Beroun; Miloslava Valešová, Benešov.

Jihočeský kraj

B. Vladimír Kurka, Písek; Jan Mach, Petr Kříha, Marie Matoušková a Josef Vlasák, České Budějovice; Jan Vandrovec, SPŠ, České Budějovice; Pavel Dvořák, Pelhřimov; Pavel Petr, Strakonice; Rudolf Losenický, Soběslav.

C. Jaromír Jelínek, SPŠ Tábor; Václav Šmajel a Vlasta Vaňatová, České Budějovice; Pavla Brichová, Soběslav; Jiří Krtek, Ivana Novotná a František Mráz, České Budějovice; Vít Rybák a Bohumil Janeček, Jindřichův Hradec; Václav Kopačka, Dačice.

Západočeský kraj

B. Jan Nauš, Klatovy; Jan Štěpánek, Horažďovice; Marie Samková, Blovice.

C. Jiří Vilimovský a Jan Slavík, Plzeň, ul. Pionýrů; Jan Kastl, Přeštice; Jiří Bouzek, Plzeň, ul. Pionýrů; Pavel Levý, Ostrov n. Ohří; Miloslav Zajíc, Cheb; Jindřich Klůfa, Ostrov n. Ohří; Božena Kučerová, Cheb; Pavel Wohlmüt, Domažlice; František Pazdera, Plzeň, nám. Odborářů.

Severočeský kraj

B. Ladislav Dvořák, Tanvald; Karel Hnyk, Liberec; Josef Fulier, Chomutov; Zdeněk Waldhauzer, SPŠ text., Liberec; Petr Volf, Liberec; Stanislava Šulcová, SPŠ, Děčín; Václav Pernikář, Ústí n. Lab. - Skřivany; Jan Fibir, Teplice; Václav Hyšman, Roudnice n. Lab.; Miroslav Kosina, Jablonec n. N.

C. Jan Mühlstein, Teplice; Stanislav Cais, Litoměřice; Jaroslav Jindřich, Ústí nad Labem, Jateční; Zdeněk Svoboda, Děčín; Květa Munzarová, Duchcov; Jaroslav Janá-

ček a Jana Voříšková, Ústí n. Labem - Skřivany; Jitka Hejtmánková, Litoměřice; Pavel Vágner a Věra Poláková, Louny.

Východočeský kraj

B. Jindřich Cupal, Česká Třebová; Jan Rauch, Dvůr Králové; Jiří Holoubek, Havlíčkův Brod; Petr Moravec, J. K. Tyla, Hradec Králové; Vladimír Svědiroh, Pardubice; Radko Škaloud a Ivo Čáp, J. K. Tyla, Hradec Králové; Luboš Pěnička, Turnov; Jan Klas, Česká Třebová; Věra Pilcová, Trutnov.

C. Zdena Mašková, Kostelec n. Orlicí; Vladimír Holec, Rychnov n. Kněžnou; Věra Dolenská, SPŠ text., Jilemnice; Jitka Ducháčková, Semily; Ivo Kozák, Úpice; Terezie Schliková, Jičín; Václav Hník, Turnov; Zdenka Svobodová, 1. SPŠ el., Pardubice; Miloslav Hrubeš, Kostelec n. Orlicí; Jan Chlebný, Pardubice.

Severomoravský kraj

B. Roman Kotecký, 1. roč. Ostrava, Šmeralova ul.; Jiří Nejedlý, Hranice; Wladyslaw Martynek, Český Těšín - pol.; Oldřich Syrovátko, Bruntál; Vladimír Karásek, Ostrava, Šmeralova ul.; Josef Macháček, Rožnov p. R.; Jan Pavlů, Olomouc-Hejčín; Roman Němec, Nový Jičín; Jiří Pešl, Valašské Meziříčí, Karel Bednařík, Místek.

C. Zdeněk Kašlík, Jeseník; Rudolf Lachman, SPŠCh Přerov; Mojmír Simerský, SPŠ el., Rožnov p. R.; Jiří Svoboda a Helena Kaštovská, Ostrava 1; Milan Stoklasa a Pavel Tomáš, Ostrava-Hladnov; Josef Hlanica, Jeseník; Tomáš Tichý, Ostrava 1; Arnošt Rudek, Poruba.

Jihomoravský kraj

B. Pavel Polcar, 9. roč. ZDŠ Velké Meziříčí; Bohumír Štědroň, III. roč. Brno, Koněvova ul.; Vladimír Handlř, SPŠ chem., Brno, Vranovská ul.; Josef Provazníček, Vyškov; Stanislav Slouka, SPŠ el., Brno, Leninova; Zdeněk Michalec, Brno, Koněvova; Zdeněk Slanina, SPŠ chem., Brno, Vranovská ul.; Jiří Šmerk, Kyjov; Zdeněk Dědourek, Brno, Koněvova; Jiří Stejnek, Velké Meziříčí.

C. Jan Fiala a Ladislav Chvátal, Třebíč; Libuše Nováková, Telč; Helena Šánová, Jihlava; Karel Engelsmann, Brno, Koněvova; Ladislav Ježek, SPŠ el., Brno, Leninova; Zdeněk Lenhart, Brno, Lerchova; Jiří Loula, Brno, Koněvova; Jiří Najbrt, Brno, Lerchova; Karel Švehla, Brno, Koněvova.

Západoslovenský kraj

B. Pavol Holíč a František Hajnovič, Bratislava, Novohradská; T. Hecht, SPŠ el., Bratislava, Zochova; J. Steiner, Levice, L. Györfy a P. Šermer, Bratislava, Novohradská; M. Ďurikovičová, Trenčín; J. Žákovič, SPŠ el. Bratislava, Zochova; R. Virsiková, Bratislava, Novohradská.

C. Ivan Mikulecký, Bratislava, Novohradská; Emília Pridalová, Bratislava, Vazovova; Michal Tvrdoň, Martin Macháček, Gejza Wimmer a Milan Žirko, Bratislava, Novohradská; Viktor Šuster, Vojenská škola J. Žižky, Bratislava; Jozef Kolesár a Branislav Vašíčka, Bratislava, Vazovova; Ján Ručka, SPŠ el., Bratislava, Zochova.

Středoslovenský kraj

B. Anna Vojtašková, Liptovský Mikuláš; Ľubomír Vlček, Brezno; Ivan Duša, Prievidza; Emilia Mikulášo-

vá, Prievidza; Kristián Chovanec, Turčianske Teplice; Eva Bombová, Ružomberok; Dušan Čupka, Liptovský Mkuláš; Anna Kavacká, Kysucké Nové Mesto; Ľudovít Šipoš, Zvolen.

C. Marian Fúrik, Zvolen; Štefan Krošlák, Žiar nad Hronom; Jan Svoren a Erik Wiszt, Banská Bystrica; Ľubor Adamec, Zvolen; Zuzana Farbakyová, Martin; Rudolf Lukačka, SPŠ, Banská Bystrica; Sabina Sitárová, Turčianske Teplice; Vladimír Štěpánek, Liptovský Hrádok; Danica Ďurčová, Prievidza.

Východoslovenský kraj

B. František Čižmárik, Prešov; Miroslav Germuška, Bardejov; Štefan Gašpar, Bardejov; Robert Vittek, Bardejov; Stanislav Jendroľ a Ľudovít Parilák, Stropkov; Anton Tomko, SPŠ stroj. a elektr., Košice; Martin Fronc, Košice, Šrobárova.

C. Blanka Rossenauerová, Košice, Šrobárova; Stanislav Paluch, Prešov; Jozef Studenovský, Košice, Kováčska; Ladislav Madarasz, SPŠ stroj. a elektr. Košice; Alice Pirická, Košice, Kováčska; Vincent Šoltés, Bardejov; Alojz Komjaty, Stropkov; Martin Lucký, SPŠ geol. a hut., Sp. Nová Ves; Juraj Takáč, Košice, Šrobárova ul.; Ladislav Podolák, SPŠ stroj. a elektr., Košice.

3. kolo. Situace v III. kole se jeví v XIV. ročníku MO příznivější než v ročníku XII. a XIII.; ze 152 úspěšných řešitelů II. kola bylo totiž možné vybrat nejvyšší přípustný počet účastníků III. kola — tj. 80 žáků. Z těchto účastníků vyšlo 39 úspěšných řešitelů; z nich prvních 20 jsou tzv. vítězové III. kola. Je to výsledek na první pohled slušný. Ale pokud jde o kvalitu úspěšných řešitelů III. kola kategorie A, máme dosti objektivní kritérium, které

nám chybí u ostatních kategorií: je to prověrka zpravidla prvních osmi vítězů III. kola v mezinárodní matematické olympiádě. A tu se opět letos ukázalo, že někteří přední vítězové našeho III. kola se dobře neumístili. To jednak může znamenat, že výběr reprezentantů pro mezinárodní matematickou olympiádu pomocí III. kola domácí olympiády není nejvhodnější, jednak ovšem to naznačuje, že naše nároky na vítěze celostátního kola nejsou v mezinárodním měřítku dosti vysoké. Pozoruhodné je, jak nevalně se umístili v III. kole žáci speciálních tříd, zejména speciální třídy pražské. Musíme znovu opakovat tvrzení z brožury o XIII. ročníku MO, totiž že prozatím speciální třídy nesplnily naděje v ně kladené; vina bude asi částečně ve výběru žáků, v jejich časovém přetížení, ale částečně i v práci učitelů.

Otázky náplně III. kola, jakož i časového rozvržení a náplně ostatních kol projednalo dvoudenní zasedání ústředního výboru MO v Brně dne 9. a 10. listopadu 1965. Je třeba vyčkat, zda se příslušná usnesení ústředního výboru MO projeví příznivě v XVI. ročníku soutěže.

SEZNAM VÍTĚZŮ III. KOLA XIV. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

1. a 2.

Jura Charvát, 3. roč. SVVŠ, Příbor

Milan Štědrý, 3. roč. SVVŠ, Chotěboř

3. až 7.

Jan Brodský, 3. roč. SVVŠ, Brno, Koněvova ul.

Tamara Marcisová, 3. roč. SVŠ, Bratislava, Novohradská

Pavel Novotný, 2. roč. SVVŠ, Olomouc-Hejčín, Tomkova 45

David Preiss, 3. roč. SVVŠ V. Nováka, Jindřichův Hradec
Bohuš Sivák, 8. roč. I. ZDŠ Zvolen, Jilemnického 1813

8. a 9.

Miroslav Řezníček, 3. roč. SVVŠ J. K. Tyla, Hradec Králové

Luděk Zajiček, 3. roč. SVVŠ Ostrava 4, Chrjukinova ul.

10. až 12.

Jan Hrníčko, 3. roč. SVVŠ Skuteč, Komenského nám.

Vladimír Loula, 3. roč. SVVŠ Nové Strašecí, okr. Rakovník

Vladimír Sigmund, 4. roč. SPŠS, Praha 1, Masná

13. až 16.

Jiří Handlír, 3. roč. SPŠE Brno, Leninova

Karel Henc, 3. roč. SVVŠ Brno, Koněvova

Peter Mederly, 2. roč. SVŠ, Prievidza-sidlisko

Jiří Rott, SPŠH, Kladno

17. až 20.

Pavel Holan, 3. roč. SVVŠ J. K. Tyla, Hradec Králové

Josef Mlček, 3. roč. SVVŠ Příbor, okr. Nový Jičín

Ján Pallag, 3. roč. SVŠ, maď., Komárno

Jiří Snětivý, SPŠS Liberec I, Leninova

(Společná místa uvádíme v abecedním pořádku.)

III. Přípravné úlohy (texty)

1. Kategorie A

1. Dekadický zápis přirozeného čísla a dekadický zápis jeho páté mocniny končí touž cifrou. Dokažte.

2. Součet čtverců nad stranami rovnoběžníku je roven součtu čtverců nad jeho úhlopříčkami. Dokažte.

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$(a^2 - b^2)x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + a^2 - b^2 = 0$$

o neznámé x , kde a, b jsou daná reálná čísla. Stanovte podmínku řešitelnosti vzhledem k číslům a, b .

4. Řešte rovnici

$$\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \cos x.$$

5. V rovině jsou dány vedlejší úhly $\sphericalangle MON$, $\sphericalangle NOP$ a uvnitř úhlu $\sphericalangle NOP$ je dán bod Q .

Bodem Q vedte přímku, která s polopřímkami OM , ON omezuje trojúhelník, jehož obvod je roven danému kladnému číslu $2s$.

6. Jsou-li a, b taková dvě komplexní čísla, že součet $a + b$ je reálné kladné číslo a že platí $a + \bar{a} > b + \bar{b}$, potom platí $|a|^2 > |b|^2$. Dokažte. (Poznámka: $\bar{a}$ značí číslo komplexně sdružené k číslu a .)

2. Kategorie B

1. Řešte soustavu rovnic

$$x = a + ky, \quad y = b + kz, \quad z = c + kx$$

o neznámých x, y, z . Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným reálným číslům a, b, c, k .

2. Udejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, který má tyto vlastnosti: výška a těžnice při jednom vrcholu trojúhelníku dělí úhel trojúhelníku na tři shodné úhly.

3. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y znázorněte množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $y = \sqrt{(1+x)|1-x|}$, a dále množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $y + x = |y - x|$. Výpočtem pak řešte soustavu rovnic

$$y = \sqrt{(1+x)|1-x|}, \quad y + x = |y - x|.$$

4. Každé dvě z hran OA, OB, OC čtyřstěnu $OABC$ stojí navzájem kolmo. Dokažte, že potom druhá mocnina obsahu stěny ABC je rovna součtu druhých mocnin obsahů zbývajících tří stěn.

5. V rovině je dána kružnice k a na ní bod A .

Dvěma odlišnými metodami řešte úlohu: Sestrojte trojúhelník ABC vepsaný kružnici k tak, aby úhly $\sphericalangle CAB, \sphericalangle ABC$ měly dané velikosti. Udejte podmínky řešitelnosti.

6. Řešte nerovnost

$$\frac{1}{x + \sqrt{x}} + \frac{1}{x - \sqrt{x}} \leq 1.$$

3. Kategorie C

1. Dokažte, že výraz

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-x)} + \frac{x^2}{(x-a)(x-b)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-x)},$$

pokud má smysl, nezávisí na čísle x .

2. Je dána polorovina ABP a uvnitř úsečky AB je dán bod M . Dále je dán úhel velikosti γ .

V polorovině ABP sestrojte trojúhelník ABC takový, aby úhel $\sphericalangle BCA = \gamma$ a aby osa tohoto úhlu procházela bodem M .

3. V rovině pravoúhlých souřadnic $[x, y]$ sestrojte graf funkce

$$y = |x + 2| - |x - 2|.$$

4. Zlomek

$$\frac{7^n + 1}{3^n + 1},$$

kde n je liché přirozené číslo, lze vždy krátit číslem 4. Dokažte.

5. Zmenšíme-li poloměr i výšku rotačního kužele o p %, o kolik procent se změní jeho objem?

6. V rovině je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod A , jehož vzdálenost od středu S je $v < r$.

Bodem A vedte přímkou, která od kružnice k oddělí čtvrtkružnici. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslům r, v .

4. Kategorie D

1. Tahem krále na šachovnici rozumějme tah ze zvoleného pole na některé pole k němu sousední (až 8 možností); přitom tah z pole A na pole B je jiný než tah z pole B na pole A .

Kolik takových tahů lze na prázdné šachovnici udělat?

2. Je dána přímka AP a mimo ni bod B ; dále je dána úsečka délky d . Na polopřímce AP sestrojte bod X takový,

že platí vztah

$$AX + BX = d.$$

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

3. V rovině jsou dány dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1; 10 \text{ cm})$, $k_2 \equiv (S_2; 10 \text{ cm})$, kde $S_1S_2 \neq 10 \text{ cm}$.

Vypočtěte délku x poloměru kružnice, která má s každou z daných kružnic vnitřní dotyk a vedle toho se dotýká přímky S_1S_2 ; na základě výpočtu proveďte konstrukci.

4. Dokažte, že:

- a) $3^7 + 7^7$ je dělitelné deseti, aniž mocniny počítáte.*)
- b) $20\,193^7 + 3\,027^7$ je dělitelné číslem 270.

5. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , jestliže je dáno:

a) Součet základny a jednoho ramena a dále úhel při základně. (Pokyn. Uvažujte trojúhelník BCD , kde D je bod polopřímky CA a platí $CD = AB + AC$).

b) Rozdíl ramena a základny (v tomto pořadí) a dále je dán úhel proti základně. (Pokyn. Vyhledejte vhodný pomocný trojúhelník.)

6. Najděte všechna čísla p , pro která zlomek

$$\frac{(3p - 2)^2 - (2p - 3)^2}{(2p - 1)^2 - (3p - 4)^2}$$

nemá smysl. Pak vypočtěte všechna čísla p , pro která je zlomek roven nule.

*) Sledujte jen jednotky mocnin $3^2, 3^3, \dots, 7^2, 7^3, \dots$ v jejich dekadických zápisech.

IV. Řešení úloh ze soutěže

1. Úlohy I. kola kategorie A

1. Vypočtete součet všech možných součinů xy , jejichž činitelé x, y jsou navzájem různá čísla vybraná z přirozených čísel $1, 2, \dots, n$, kde n je dané přirozené číslo. [Lze užít vzorce: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 =$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).]$$

Řešení. Označme S hledaný součet a dále

$$s_1 = 1 + 2 + \dots + n, \quad s_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

Víme, že je

$$s_1 = \frac{1}{2} n(n+1), \quad s_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad (1)$$

což lze ověřit matematickou indukcí. Zřejmě platí vztah

$$s_1^2 = s_2 + 2S,$$

z čehož

$$S = \frac{1}{2} (s_1^2 - s_2).$$

Dosaďme sem z (1); dostáváme postupně

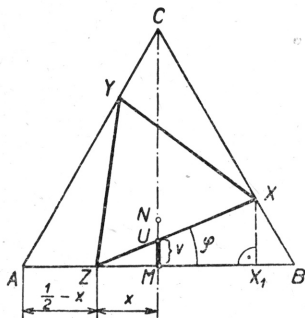
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right] = \\ &= \frac{1}{24} n(n+1)(3n^2 - n - 2) = \frac{1}{24} n(n+1)(n-1)(3n+2). \end{aligned}$$

Tím je číslo S nalezeno.

2. Je daný rovnostranný trojuholník ABC so stranou dĺžky 1; M je stred strany AB . Do trojuholníka ABC je vpísaný rovnostranný trojuholník XYZ tak, že body X, Y, Z ležia po rade vo vnútri strán BC, CA, AB a tak, že úsečky XZ, CM majú spoločný bod U .

a) Vyjadrite vzdialenosť MU pomocou vzdialenosti MZ .

b) Dokážte, že bod U každého z trojuholníkov XYZ leží na určitej úsečke MN , ktorá má dĺžku $\frac{1}{9} CM$.



Obr. 1

Riešenie (obr. 1). a) Vzdialenosť bodov M, Z označme x , vzdialenosť bodov M, U označme v a $\sphericalangle XZB$ označme φ . Potom pre trojuholníky ZXB, XYZ platí, že

$$\sphericalangle ZXB = 120^\circ - \varphi, \quad \sphericalangle YXC = 180^\circ - 60^\circ - (120^\circ - \varphi) = \varphi.$$

Je teda

$$\triangle ZXB \cong \triangle XYC \quad (usu),$$

takže

$$ZB = XC, \quad AZ = AB - ZB = BC - XC = BX = \\ = \frac{1}{2} = x.$$

Cyklickou zámenou dostaneme $BX = CY$, t. j.

$$AZ = BX = CY = \frac{1}{2} - x.$$

Označme X_1 pātu kolmice vedenej bodom X k strane AB . Bod X_1 náleží úsečke MB . Platí

$$XX_1 = BX \sin 60^\circ = \left(\frac{1}{2} - x\right) \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (2)$$

$$MX_1 = MB - BX_1 = MB - BX \cos 60^\circ = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x. \quad (3)$$

Pomocou vzťahu (3) dostávame

$$ZX_1 = x + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}. \quad (4)$$

Z rovnoláhlosti trojuholníkov ZUM , ZXX_1 dostaneme

$$v : x = XX_1 : ZX_1.$$

Stadiaľ pomocou vzťahov (2) a (4) po úprave dostávame

$$v = x \frac{\sqrt{3}(1 - 2x)}{6x + 1}, \quad (5)$$

pričom x prebieha interval $0 \leq x < \frac{1}{2}$.

b) Máme určiť maximum funkcie (5). Dokážeme, že

je to $\frac{1}{9} CM = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{18} \sqrt{3}$. Predpokladajme, že je $v \geq \frac{\sqrt{3}}{18}$ čiže

$$\frac{x(1-2x)}{6x+1} \sqrt{3} \geq \frac{\sqrt{3}}{18}, \quad \text{kde } 0 \leq x < \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Vynásobením prvej nerovnosti kladným číslom $\frac{18(6x+1)}{\sqrt{3}}$ dostávame po krátkej úprave, že nutne platí

$$36x^2 - 12x + 1 \leq 0$$

čiže

$$(6x - 1)^2 \leq 0. \quad (7)$$

Nerovnosť (7) platí jedine pre $x = \frac{1}{6}$. Číslo $x = \frac{1}{6}$ splňuje pritom nerovnosť (6) a z rovnosti (5) pre $x = \frac{1}{6}$ dostaneme práve $v = \frac{\sqrt{3}}{18}$. Bod Z pre $x = \frac{1}{6}$ leží v tretine úsečky AB a príslušný bod U má od M vzdialenosť $\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Tým je riešenie úlohy prevedené.

3. Je dána funkce proměnné x

$$y = x^2 - 4|x - 1| - p,$$

kde p je parametr.

Určete p tak, aby příslušná funkce nabyla hodnoty 1 právě pro tři různé hodnoty x .

Řešení. Označme $x_1 < x_2 < x_3$ hledané tři hodnoty nezávisle proměnné x , pro které má daná funkce hodnotu

$y = 1$. Vzhledem k dané funkci (1) rozeznávejme dvě možnosti, podle toho, je-li $x \leq 1$ nebo je-li $x \geq 1$.

Pro $x \leq 1$ funkce (1) zní

$$y = x^2 + 4x - 4 - p; \quad (2)$$

pro $x \geq 1$ funkce (1) zní

$$y = x^2 - 4x + 4 - p. \quad (3)$$

Jsou zřejmě jen tři možnosti [1], [2] a [3]:

Případ [1]. Funkce (2) nabývá pro $x = x_1$, $x = x_2$ hodnoty $y = 1$, kde $x_1 \leq 1$, $x_2 \leq 1$. Pak ovšem funkce (3) nabývá hodnoty $y = 1$ pro jediné $x = x_3 \geq 1$, tj. platí [viz (3)] $1 = x^2 - 4x + 4 - p$ neboli $x^2 - 4x + 3 - p = 0$; tato kvadratická rovnice musí mít jediný kořen, tj. její diskriminant $4[4 - (3 - p)]$ musí být roven nule. Odtud plyne, že je nutně

$$p = -1.$$

Funkce (3) pak zní

$$y = x^2 - 4x + 5$$

a pro $y = 1$ dostaneme $x^2 - 4x + 4 = 0$ neboli $(x - 2)^2 = 0$; odtud plyne

$$x_3 = 2; \quad (4)$$

to je číslo z intervalu $x \geq 1$. Pro $x = x_3$ je skutečně $y = 1$.

Nyní zjistíme, zda existují čísla x_1 , x_2 , pro funkci (2) a pro parametr $p = -1$ taková, že pro ně je hodnota funkce $y = 1$. Funkce (2) zní

$$y = x^2 + 4x - 3 \quad (5)$$

a pro $y = 1$ dostáváme rovnici $x^2 + 4x - 4 = 0$, jejíž

kořeny jsou

$$\begin{aligned}x_1 &= -2 - 2\sqrt{2} = -2(\sqrt{2} + 1), \\x_2 &= -2 + 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{2} - 1) < 2 \cdot 0,5 = 1;\end{aligned}\tag{6}$$

obě navzájem různá čísla x_1 , x_2 jsou skutečně menší než 1. Po dosazení $x = x_1$, $x = x_2$ do pravé strany (5) dostaneme (čti zároveň horní anebo dolní znaménka)

$$\begin{aligned}(-2 \pm 2\sqrt{2})^2 + 4(-2 \pm 2\sqrt{2}) - 3 &= 12 \mp 8\sqrt{2} - 8 \pm \\&\pm 8\sqrt{2} - 3 = 1,\end{aligned}$$

tj. $y = 1$. Tím je případ [1] vyšetřen; hledaná čísla jsou dána vztahy (6), (4).

Případ [2]. Funkce (2) nabývá hodnoty $y = 1$ pro jediné $x = x_1 \leq 1$ a funkce (3) pro dvě čísla $x = x_2$, $x = x_3$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 1$. Pro $y = 1$ ze (2) dostaneme rovnici

$$x^2 + 4x - (5 + p) = 0$$

o neznámé x , která musí mít jediný (reálný) kořen; její diskriminant $4[4 + (5 + p)]$ musí být roven nule, tedy

$$p = -9.$$

Funkce (2) tedy zní

$$y = x^2 + 4x + 5\tag{7}$$

a pro $y = 1$ odtud plyne $(x + 2)^2 = 0$, neboli

$$x_1 = -2;$$

pro $x = x_1$ je hodnota funkce (7) skutečně $y = 1$.

Pro $p = -9$ funkce (3) zní

$$y = x^2 - 4x + 13.\tag{8}$$

Tu pro $y = 1$ dostáváme rovnici $x^2 - 4x + 12 = 0$, jejíž diskriminant je zřejmě záporný a případ [2] nevede k řešení.

Případ [3]. Zjistíme ještě, zda funkce (2) a (3) mohou nabýt současně pro $x = x_1 = 1$ hodnoty $y = 1$. V tomto případě pak funkce (2) nabude hodnoty $y = 1$ pro jisté $x = x_2 \leq 1$ a rovněž funkce (3) nabude hodnoty $y = 1$ pro jisté $x = x_3 \geq 1$.

Dosaďme tedy $y = 1$ a $x = 1$ např. do vztahu (2); dostaneme rovnici pro p :

$$1 = 1 + 4 \cdot 1 - 4 - p,$$

tj.

$$p = 0.$$

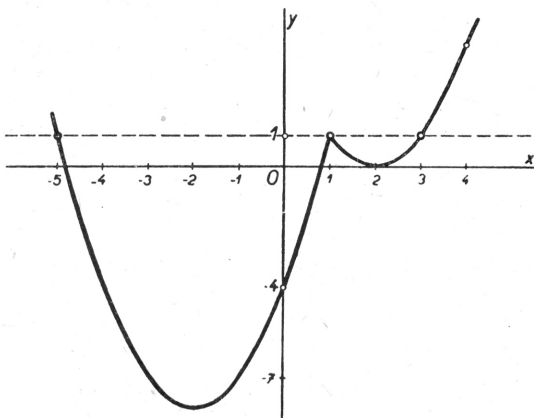
Pro $p = 0$ a $y = 1$ dostaneme ze vztahu (2) rovnici

$$1 = x^2 + 4x - 4.$$

Kořeny této rovnice jsou očekávané $x_1 = 1$ a dále $x_2 = -5$, tj. číslo menší než 1.

Dosažením $p = 0$ a $y = 1$ do vztahu (3) dostaneme rovnici

$$1 = x^2 - 4x + 4.$$



Obr. 2

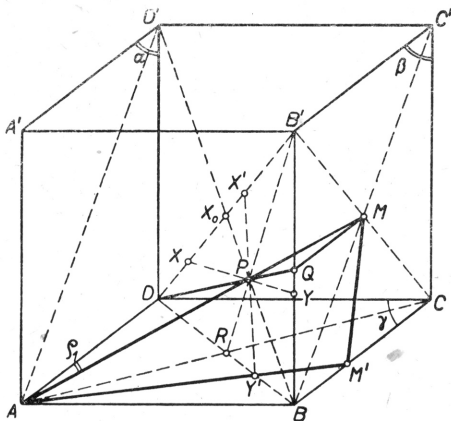
Rovněž tato rovnice má kořen $x_1 = 1$ a další kořen $x_3 = 3$, tj. číslo větší než 1. Tedy i případ [3] pro $p = 0$ vede k řešení úlohy (obr. 2).

Závěr. Hledané hodnoty parametru jsou $p = 0$ a $p = -1$.

4. Místnost má tvar krychle $ABCD A' B' C' D'$ o hraně délky 1. Označme M střed stěny $BCC' B'$. Svítící bod probíhá tělesovou úhlopříčkou DB' . Přitom se vržený stín úsečky AM pohybuje a probíhá postupně jistou část stěn a podlahy místnosti.

Vyšetřte, z kterých obrazců se tato část skládá, a rozhodněte, zda její obsah je větší než obsah podlahy místnosti.

Řešení. Situace je patrna z obr. 3. Nejprve dokážeme, že se úsečky BD' , AM protínají v bodě, který označíme P .



Obr. 3

Skutečně úsečky AM , BD' jsou úhlopříčkami lichoběžníku $AD'MB$ a protínají se v bodě P , který náleží vnitřku každé z nich. Vržený stín úsečky AM padne buď na přední a pravou stěnu krychle (tj. $ABB'A'$ a $BCC'B'$), nebo na dolní a pravou stěnu (tj. $ABCD$ a $BCC'B'$); v prvním případě se stín láme na hraně BB' , ve druhém na hraně BC . Přejícným případem je situace, kdy svítící bod X splývá se středem X_0 úsečky DB' a kdy stínem jsou úsečky AB , BM ; tu je bod B vrženým stínem průsečíku P úseček AM , BD' . Bod P hraje v úloze důležitou roli pro kteroukoli polohu bodu X na úsečce DB' ; označíme Y bod, který je vrženým stínem bodu P z bodu X na povrch krychle.

a) Bod Y padne na úsečku BB' v případě, že X je bodem úsečky X_0D ; b) bod Y padne na úsečku BD v případě, že X' je bodem úsečky X_0B' .

Případ a). Vržený stín bodu P pro případ, že je svítící bod $X \equiv D$, označme Q ; leží v rovině $PADM$, a protože jsou stěny $ADD'A'$, $BCC'B'$ rovnoběžné, jsou rovnoběžné i průsečnice AD , MQ roviny $PADM$ s oběma těmito stěnami. Protože M je střed stěny $BCC'B'$, plyne odtud, že Q je středem úsečky BB' .

Pohybuje-li se bod X z bodu D do X_0 , pohybuje se bod Y z bodu Q do B ; pro $X \equiv X_0$ je $Y \equiv B$. Lomené čáry AYM pokryjí tedy v rovinách ABB' , BCC' trojúhelníky ABQ a BMQ .

Případ b). Vržený stín Y' bodu P pro případ, že svítící bod X' náleží úsečce X_0B' , padne do úsečky BR , kde R je vržený stín bodu P pro případ, že je $X' \equiv B'$, tj. R je průsečík úhlopříček AC , BD stěny $ABCD$. V tomto případě je stínem lomená čára $AM'M$, kde M' je průsečík přímek AY' , BC . Tyto lomené čáry v rovinách ABC , BCC' pokryjí trojúhelníky ABC a BCM ;

v rovině BCC' dostaneme celkem lichoběžník $BCMQ$ (viz případ a).

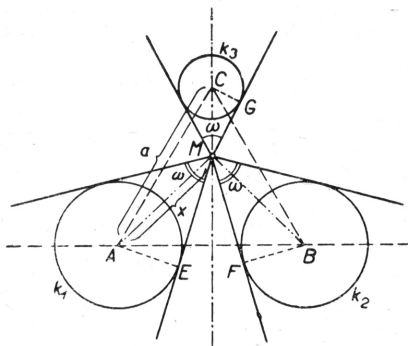
Obsah čtverce $ABCD$ je 1 (plošných jednotek); trojúhelníky ABQ , BMQ , BCM , ABC mají po řadě obsahy $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, a součet $\frac{9}{8}$ těchto obsahů je větší než 1.

5. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky a . Dále jsou dány dva kruhy K_1 , K_2 se středy A , B a o poloměrech 1 a kruh K_3 se středem C a o poloměru $r = \frac{1}{2}$. Bod M je takový bod trojúhelníku ABC , ze kterého je vidět kruhy K_1 , K_2 , K_3 pod zornými úhly téže velikosti.

Vypočítejte vzdálenosti MA , MB , MC a proveďte diskusi vzhledem k číslu a .

Řešení. a) Označení je patrné z obr. 4a. Je-li bod M řešením úlohy, je

$$\triangle AME \sim \triangle CMG,$$



Obr. 4a

neboť

$$\sphericalangle MEA = \sphericalangle MGC = 90^\circ, \quad \sphericalangle AME = \\ = \sphericalangle CMG = \frac{1}{2} \omega.$$

Odtud plyne

$$\frac{AM}{CM} = \frac{AE}{CG} = 2. \quad (1)$$

Dále je podle věty *suu*

$$\triangle AME \cong \triangle BMF,$$

tj.

$$AM = BM. \quad (2)$$

Označíme-li $AM = x$, je podle (1), (2)

$$AM = BM = x, \quad CM = \frac{1}{2}x. \quad (2')$$

Užijeme kosinové věty na trojúhelník ACM ; vyjde

$$x^2 = \frac{1}{4}x^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot a \cdot \cos 30^\circ; \quad (3)$$

je totiž $\sphericalangle ACM = 30^\circ$, neboť bod M leží podle (2) na ose úsečky AB . Úpravou vztahu (3) dostaneme pro neznámou x kvadratickou rovnici

$$3x^2 + 2ax\sqrt{3} - 4a^2 = 0. \quad (4)$$

Její diskriminant $D = 60a^2$ je kladné číslo. Kořeny rovnice (4) jsou

$$x = \frac{-2a \cdot \sqrt{3} \pm 2 \cdot \sqrt{15}a}{6} = \frac{\pm \sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} a. \quad (5)$$

Záporný kořen (5) nemůže být řešením úlohy, zbývá

tedy jediné možné řešení

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} a. \quad (6)$$

Tím je ukončen rozbor úlohy.

b) Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ABM tak, aby platilo (2'), kde x je dáno vzorcem (6), a aby bod M ležel v polorovině ABC . Je to možné, neboť platí $2x > a$, jak se snadno přesvědčíme tímto výpočtem: z nerovnosti

$$2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} a > a \quad (7)$$

vyplývá postupně

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{5} - 1) &> \sqrt{3}, \\ \sqrt{20} &> 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je pravdivá, neboť je $\sqrt{20} > 4 > 2 + \sqrt{3}$; obrácením postupu pak dostaneme nerovnost (7).

Bod M takto sestrojený padne dovnitř trojúhelníku ABC , neboť je

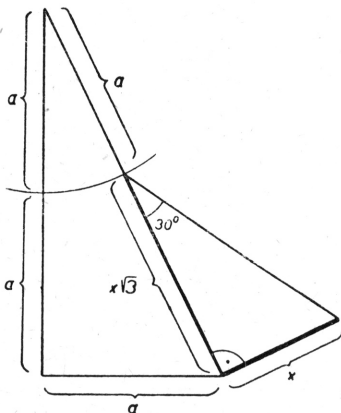
$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} \cdot a = \frac{\sqrt{5} - 1}{3} \cdot a \sqrt{3} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \cdot a < \\ &< \frac{4 - 1,6}{3} \cdot a = 0,8a < a. \end{aligned}$$

Bod M padne vně kružnic k_1, k_2 (a tudíž i vně k_3), právě tehdy, platí-li $x > 1$, neboli podle (6)

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} a > 1,$$

tj. platí-li

$$a > \sqrt{3} \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \doteq 1,4.$$



Obr. 4b

Platí-li nerovnost (8), je bod M řešením úlohy, a to jediným, jak vyplývá z obrácení postupu.

Nerovnost (8) je tedy podmínkou řešitelnosti úlohy. Konstrukci ukazuje obr. 4b.

6. Najděte všechna čísla x , pro něž platí nerovnosti

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad (1)$$

$$\cos 2x \geq \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi - x \right). \quad (2)$$

Řešení. a) Předpokládejme nejprve, že $x \neq \frac{1}{2} \pi, \frac{3}{2} \pi$,

$\frac{3}{4}\pi$ a $\frac{7}{4}\pi$. Je-li x řešením, pak z nerovnosti (2) postupně plyne

$$2\cos^2 x - 1 \geq \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad (2')$$

$$\frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 1 \geq \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x},$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \geq \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x},$$

$$\frac{(1 - \operatorname{tg} x)[(1 + \operatorname{tg} x)^2 - (1 + \operatorname{tg}^2 x)]}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg} x)} \geq 0,$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \geq 0,$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4}\pi - x \right) \geq 0, \quad (2'')$$

neboť pro x různé od $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ je $1 + \operatorname{tg}^2 x > 0$.

Jsou dvě možnosti, jak splnit (2''), a tím i (2'):

Případ [1]. Nechť zároveň platí

$$\operatorname{tg} \left(\frac{1}{4}\pi - x \right) \geq 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} x \geq 0. \quad (4)$$

Ze (4) pro x vzhledem k (1) dostáváme intervaly

$$\left\langle 0, \frac{1}{2}\pi \right\rangle, \left\langle \pi, \frac{3}{2}\pi \right\rangle. \quad (4')$$

Místo (3) pišme $\operatorname{tg} \left(x - \frac{1}{4}\pi \right) \leq 0$; tento vztah bez ohledu na (1) platí právě tehdy, je-li

$$\frac{1}{2}\pi + n\pi < x - \frac{1}{4}\pi \leq \pi + n\pi,$$

kde n je libovolné celé číslo [které dodatečně omezíme požadavkem (1)]. Odtud

$$\frac{3}{4}\pi + n\pi < x \leq \frac{5}{4}\pi + n\pi. \quad (5)$$

Omezme n vzhledem k požadavku (1):

Pro $n = -1$ již se zřetelem k (1) dostáváme

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4}\pi. \quad (6)$$

Pro $n = 0$ máme

$$\frac{3}{4}\pi < x \leq \frac{5}{4}\pi. \quad (6')$$

Pro $n = 1$ vzhledem k (1) je

$$\frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi. \quad (6'')$$

Společné části intervalů (4') a (6) až (6'') jsou

$$\left\langle 0, \frac{1}{4}\pi \right\rangle, \left\langle \pi, \frac{5}{4}\pi \right\rangle. \quad (6''')$$

Případ [2]. Necht' platí zároveň

$$\operatorname{tg} \left(\frac{1}{4}\pi - x \right) \leq 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} x \leq 0. \quad (8)$$

Z (8) plynou intervaly

$$\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right), \quad \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right). \quad (8')$$

Místo (7) pišme $\operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \geq 0$, a tedy bez zřetele k (1) je

$$n\pi \leq x - \frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}\pi + n\pi,$$

kde n je libovolné celé číslo; odtud dostáváme

$$\frac{1}{4}\pi + n\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi + n\pi.$$

Volba čísla n je omezena požadavkem (1); jsou tyto dvě možnosti:

Pro $n = 0$ dostáváme

$$\frac{1}{4}\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi; \quad (9)$$

pro $n = 1$

$$\frac{5}{4}\pi \leq x < \frac{7}{4}\pi. \quad (9')$$

Společné části intervalů (8') a (9), (9') jsou:

$$\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right), \quad \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right). \quad (9'')$$

b) Předem jsme vyloučili případy $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$; první dvě hodnoty však vyhovují (1) a (2), další

dvě nikoli. Dostáváme tedy intervaly

$$\left\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi \right\rangle, \left\langle \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi \right\rangle. \quad (9''')$$

Pro čísla x z intervalů $(6''')$, $(9'')$ lze postup obrátit, takže $(6''')$, $(9'')$ jsou všechna požadovaná řešení úlohy.

Jiné řešení. Daný vztah (2) upravujeme takto:

$$\cos 2x \geq \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad (10)$$

$$\cos 2x \geq \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x},$$

$$\cos 2x \geq \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x}, \quad (11)$$

$$\cos 2x \geq \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}. \quad (12)$$

Úpravy byly provedeny za předpokladu, že je x různé od čísel

$$\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \text{ [viz (10)]}, \quad \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \quad (13)$$

která až na $\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ vyhovují (2).

Nerovnost (12) lze splnit dvěma způsoby:

Případ [1]. Nechť je $\cos 2x > 0$; pak ze (12) plyne postupně

$$\begin{aligned} \cos^2 2x &\geq 1 - \sin 2x, \\ \sin 2x (1 - \sin 2x) &\geq 0. \end{aligned}$$

Druhý činitel vlevo je vždy nezáporný a máme tedy celkem požadavky

$$\sin 2x \geq 0, \quad \cos 2x > 0.$$

Ty platí při libovolném celém n pro x z intervalů

$$n \cdot 2\pi \leq 2x < \frac{1}{2}\pi + n \cdot 2\pi$$

neboli

$$n\pi \leq x < \frac{1}{4}\pi + n\pi.$$

Vzhledem k (1) jsou možné tyto dvě volby čísla n :
pro $n = 0$ máme

$$0 \leq x < \frac{1}{4}\pi;$$

pro $n = 1$

$$\pi \leq x < \frac{5}{4}\pi.$$

Připojíme-li přípustné hodnoty z (13), obdržíme intervaly

$$\left\langle 0, \frac{1}{4}\pi \right\rangle, \left\langle \pi, \frac{5}{4}\pi \right\rangle. \quad (14)$$

Případ [2]. Necht' je $\cos 2x < 0$; pak ze (12) postupně plyne

$$\begin{aligned} \cos^2 2x &\leq 1 - \sin 2x, \\ \sin 2x (1 - \sin 2x) &\leq 0, \end{aligned}$$

kde druhý činitel vlevo je nezáporný, a tudíž celkem

$$\sin 2x \leq 0, \quad \cos 2x < 0.$$

Ty platí při libovolném celém n pro x z intervalů

$$\pi + n \cdot 2\pi \leq 2x < \frac{3}{2}\pi + n \cdot 2\pi$$

neboli

$$\frac{1}{2}\pi + n\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi + n\pi.$$

Vzhledem k požadavku (1) jsou možné tyto volby čísla n :
pro $n = 0$ máme

$$\frac{1}{2}\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi;$$

pro $n = 1$

$$\frac{3}{2}\pi \leq x < \frac{7}{4}\pi.$$

Podle poznámky k (13) čísla $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ vskutku nevyhovují
(1) a tak dostáváme intervaly

$$\left\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi \right\rangle, \left\langle \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi \right\rangle. \quad (15)$$

Postup lze pro čísla x z intervalů (14), (15), pokud jsou
různá od čísel (13), obrátit. Tím jsou tedy nalezena všechna
řešení.

2. Úlohy II. kola kategorie A

1. Řešte nerovnost

$$3 \cotg x - \sqrt[3]{3} \operatorname{tg} x \geq 3 - \sqrt[3]{3}. \quad (1)$$

Riešenie. Ak x je riešením nerovnosti (1), je nutné

$$x \neq k \cdot 90^\circ, \quad (2)$$

kde k je ľubovoľné celé číslo. Upravujme postupne ne-

rovnosť (1) pre x , ktoré je jej riešením:

$$\frac{3}{\operatorname{tg} x}(1 - \operatorname{tg} x) + \sqrt[3]{3}(1 - \operatorname{tg} x) \geq 0,$$

$$(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \left(\frac{3}{\operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{3} \right) \geq 0,$$

$$3(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \left(\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \right) \geq 0,$$

$$(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \left(\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \right) \geq 0. \quad (3)$$

Rozlišujme teraz dve možnosti (v ďalšom je n ľubovoľné celé číslo):

Prípád [1]. Nech obidva činitele na ľavej strane vzťahu (3) sú nezáporné, t. j.

$$\operatorname{tg} x \leq 1, \quad \operatorname{cotg} x \geq -\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}.$$

Musí teda súčasne platiť jednak [vzhľadom na (2)] jedna z nerovností

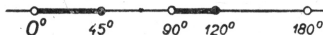
$$\begin{aligned} n \cdot 180^\circ < x &\leq 45^\circ + n \cdot 180^\circ, \\ 90^\circ + n \cdot 180^\circ < x &< 180^\circ + n \cdot 180^\circ \end{aligned}$$

a jednak jedna z nerovností

$$\begin{aligned} n \cdot 180^\circ < x &< 90^\circ + n \cdot 180^\circ, \\ 90^\circ + n \cdot 180^\circ < x &\leq 120^\circ + n \cdot 180^\circ. \end{aligned}$$

Spoločné časti týchto intervalov sú (pozri obr. 5 pre $n = 0$):

$$\begin{aligned} n \cdot 180^\circ < x &\leq 45^\circ + n \cdot 180^\circ, \\ 90^\circ + n \cdot 180^\circ < x &\leq 120^\circ + n \cdot 180^\circ. \end{aligned} \quad (4)$$



Obr. 5

Prípád [2]. Nech oba činitele na ľavej strane vzťahu (3) sú nekladné, t. j. $\operatorname{tg} x \geq 1$, $\operatorname{cotg} x \leq -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Musí teda platiť jednak [vzhľadom na (2)] nerovnosť

$$45^\circ + n \cdot 180^\circ \leq x < 90^\circ + n \cdot 180^\circ$$

a súčasne nerovnosť

$$120^\circ + n \cdot 180^\circ \leq x < 180^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

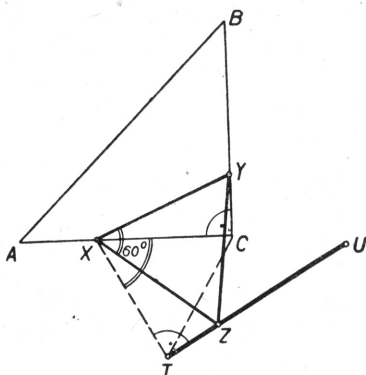
Tieto dva intervaly však nemajú spoločnú časť.

Od čísla x daného niektorou z nerovností (4) možno prejsť obrátením postupu k (1). Vzťahom (4) sú teda dané všetky riešenia danej nerovnosti.

2. V rovine je dán rovnoramenný pravoúhlý trojuholník ABC s přeponou AB . Vyšetrite množinu všech vrcholů Z rovnostranných trojuholníků XYZ , které vzniknou, když bod X probíhá vnitřek úsečky CA , bod Y probíhá vnitřek úsečky CB a polorovina XYZ obsahuje bod C .

Řešení (obr. 6). Zvolme pevný bod X mezi body A , C a necht' je XYZ jeden z trojuholníků, který splňuje

podmínky úlohy. Pak bod Z vznikne otočením bodu Y kolem X o úhel velikosti 60° v záporném smyslu (viz

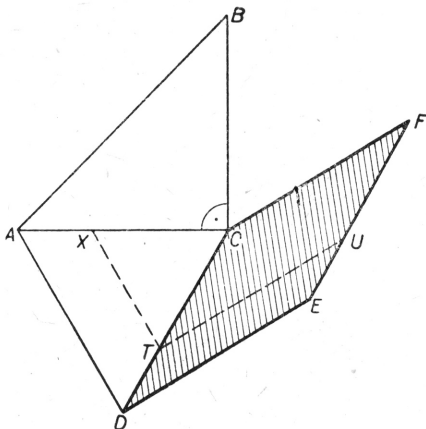


Obr. 6

obr. 6). Probíhá-li bod Y vnitřek úsečky BC , probíhá bod Z vnitřek úsečky TU , která vznikne otočením úsečky CB kolem X o úhel velikosti 60° v záporném smyslu. Bod T vznikne tedy otočením bodu C kolem X o úhel velikosti 60° v záporném smyslu, tj. bod T je vrcholem rovnostranného trojúhelníku XCT , ležícího vně trojúhelníku ABC .

Probíhá-li nyní bod X vnitřek úsečky AC , probíhá bod T vnitřek úsečky CD ; přitom D je vrchol rovnostranného trojúhelníku ACD sestrojeného v polorovině opačné k polorovině ACB (obr. 7). Úsečky TU jsou navzájem rovnoběžné (je $TU \perp XT \parallel AD$) a leží všechny v polorovině opačné k CDA . Všechny úsečky TU vyplní kosočtverec $CDEF$; jeho strany DE a CF vznikly po

řadě otočením úsečky CB kolem středů A, C o úhel velikosti 60° v záporném smyslu. Hledaný útvar, vyplněný vrcholy Z , je tedy vnitřek kosočtverce $CDEF$.



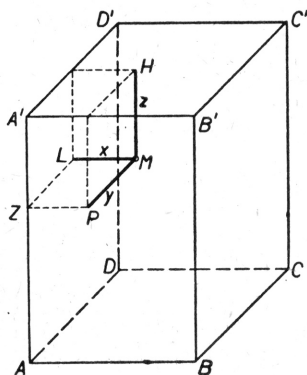
Obr. 7

3. Uvnitř kvádru o daných rozměrech a, b, c zvolme bod M a sestrojme jeho obrazy v souměrnostech vzhledem k rovinám, ve kterých leží stěny daného kvádru. Obdržíme tak 6 vrcholů osmistěnu, který má právě tři navzájem kolmé tělesové úhlopříčky.

Vypočítejte objem tohoto osmistěnu i objem tělesa, které je společnou částí osmistěnu a daného kvádru. Dokažte, že oba tyto objemy nezávisí na volbě bodu M .

Řešení. I. Uvažujme tři navzájem kolmé roviny stěn kvádru (obr. 8), které jdou bodem A' , a označme vzdálenosti bodu M od těchto stěn x, y, z (levá, přední, horní stěna), což jsou kladná čísla. Jsou-li $a = AB, b = AD,$

$c = AA'$ rozměry kváдру, pak $a - x$, $b - y$, $c - z$ jsou vzdálenosti bodu M od rovin stěn kváдру (pravé, zadní, dolní) jdoucích bodem C . Označme $M_1, \dots, M_6$ obrazy bodu M v uvažovaných rovinových souměrnostech, a to



Obr. 8

M_1, M_2, M_3 podle stěn levé, přední a horní, jdoucích bodem A' , a M_4, M_5, M_6 podle stěn pravé, zadní a dolní, jdoucích bodem C ; jsou tedy M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 tělesové úhlopříčky vzniklého osmistěnu. Platí

$$MM_1 = 2x, \quad MM_2 = 2y, \quad MM_3 = 2z,$$

$$MM_4 = 2(a - x), \quad MM_5 = 2(b - y), \quad MM_6 = 2(c - z);$$

tedy

$$M_1M_4 = 2x + 2(a - x) = 2a, \quad M_2M_5 = 2b, \quad M_3M_6 = 2c.$$

Objem kváдру je $K = abc$. Objem V osmistěnu vy počítáme jako objem dvojjeřhanu, např. s podstavou $M_1M_2M_4M_5$ (což je čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami

M_1M_4 , M_2M_5 — viz obr. 9) a s hlavními vrcholy M_3 , M_6 jehlanů, jejichž výšky jsou $2z$, $2(c - z)$. Označme P obsah zmíněného čtyřúhelníka; platí

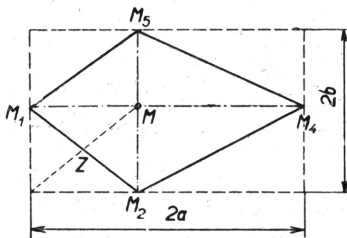
$$P = \frac{1}{2} M_1M_4 \cdot M_2M_5 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2ab$$

(čtyřúhelník snadno doplníme na obdélník s rozměry M_1M_4 , M_2M_5 a s dvojnásobným obsahem $4ab$ — viz obr. 9). Součet objemů jehlanů je

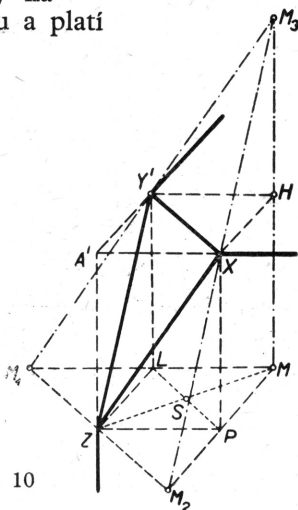
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} P \cdot MM_3 + \frac{1}{3} P \cdot MM_6 = \frac{1}{3} P \cdot (MM_3 + MM_6) = \\ &= \frac{1}{3} P \cdot M_3M_6 = \frac{1}{3} 2ab \cdot 2c = \frac{4}{3} K. \end{aligned}$$

Objem osmistěnu je nezávislý na poloze bodu M uvnitř kvádru a platí

$$V = \frac{4}{3} K.$$



Obr. 9



Obr. 10

II. Označme L, P, H paty kolmic z bodu M na stěny levou, přední a horní, jdoucí bodem A' (obr. 10). Trojúhelník LMP , kde $\sphericalangle M = 90^\circ$, doplníme na obdélník $LMPZ$ se středem S ; přitom bod Z leží na hraně AA' kvádru. Stejnolehlost o středu M a poměru 2 převádí trojúhelník LMP v trojúhelník M_1MM_2 a střed S strany LP (a strany MZ) převede ve střed strany M_1M_2 , což je bod Z . Protne tedy hrana M_1M_2 osmistěnu hranu $A'A$ kvádru. To se při vrcholu A' kvádru opakuje i pro hrany $M_2M_3, A'B'; M_3M_1, A'D'$. Označme $M_2M_3 \cdot A'B' \equiv \equiv X; M_3M_1 \cdot A'D' \equiv Y$; pak platí

$$A'X = x, A'Y = y, A'Z = z.$$

Čtyřstěn $A'XYZ$ odříznutý od kvádru stěnou $M_1M_2M_3$ osmistěnu má objem $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}xy\right)z = \frac{1}{6}xyz$. Obdobných čtyřstěnů je celkem osm (při každém vrcholu kvádru právě jeden); označme T součet jejich objemů; vzhledem k právě provedenému výpočtu platí, že

$$\begin{aligned} 6T = xyz + xy(c - z) + x(b - y)z + (a - x)yz + \\ + x(b - y)(c - z) + (a - x)y(c - z) + (a - x)(b - y)z + \\ + (a - x)(b - y)(c - z) = abc. \end{aligned}$$

Je tedy $T = \frac{1}{6}K$ a objem tělesa společného kvádru a osmistěnu je $K - \frac{1}{6}K = \frac{5}{6}K$.

Závěr. Objem osmistěnu je $\frac{4}{3}$ objemu kvádru a objem společného tělesa je roven $\frac{5}{6}$ objemu kvádru.

4. Ak sú a, b, c, d prirodzené čísla, potom súčin

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right)$$

nie je prirodzené číslo. Dokážte.

Riešenie. Dôkaz tvrdenia prevedieme sporom. Nech platí

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right) = k, \quad (1)$$

kde k je prirodzené číslo. Po úprave dostaneme

$$(ad - bc)^2 = kabcd. \quad (2)$$

Ak položíme $ad = x$, $bc = y$, potom (2) možno písať vo tvare

$$(x - y)^2 = kxy.$$

Pretože je $x > 0$, $y > 0$, vyplýva z toho

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - (2 + k)\frac{x}{y} + 1 = 0. \quad (3)$$

Číslo xy je nutne racionálne a preto vo vzorci

$$\frac{1}{2}(2 + k \pm \sqrt{D})$$

pre korene rovnice (3) je diskriminant $D = (2 + k)^2 - 4$ (ktorý musí byť celým číslom) nutne rovný druhšej mocnine nezáporného celého čísla m , t. j. $(2 + k)^2 - 4 = m^2$ čiže $(2 + k)^2 - m^2 = 4$ a teda

$$(2 + k + m) \cdot (2 + k - m) = 4.$$

Prvý činiteľ na ľavej strane je kladné číslo, preto je nutne kladný aj druhý činiteľ. Sú to okrem toho čísla párne, pretože ich súčin je 4 a rozdiel je $2m$. Jediná možnosť je $2 + k + m = 2$, $2 + k - m = 2$, t. j. $k = 0$, čo je však spor s predpokladom, že číslo k je prirodzené.

Iné riešenie. Dokážme, že predpoklad (1), kde k je prirodzené číslo, vedie k sporu.

Bez ujmy na všeobecnosti možno predpokladať, že dvojica prirodzených čísel a, b i dvojica c, d sú nesúdeliteľné čísla. Nech P je najväčší spoločný deliteľ čísel a, c a Q najväčší spoločný deliteľ čísel b, d . Možno teda položiť

$$a = PA, c = PC, b = QB, d = QD, \quad (4)$$

kde A, B, C, D sú nejaké prirodzené čísla, pričom čísla A, C i čísla B, D sú nesúdeliteľné. Po dosadení zo (4) do (1) postupne dostaneme

$$\left(\frac{AP}{QB} - \frac{CP}{QD}\right) \cdot \left(\frac{QD}{PC} - \frac{QB}{PA}\right) = k$$

čiže

$$\left(\frac{A}{B} - \frac{C}{D}\right) \cdot \left(\frac{D}{C} - \frac{B}{A}\right) = k,$$

$$(AD - BC)^2 = k ABCD. \quad (5)$$

Nech niektoré z čísel A, B, C, D je rôzne od čísla 1, napr. číslo A . Označme p jeho prvočíselného deliteľa. Potom je pravá strana rovnosti (5) deliteľná číslom p a teda aj straná ľavá. Tam je však číslom p deliteľné AD , preto aj BC je nutne deliteľné číslom p . Je teda nutne buď dvojica A, B alebo dvojica A, C deliteľná číslom p , čo je spor.

Preto nutne platí $A = B = C = D = 1$. Je teda $a = P = c, b = Q = d$, čo je spor s tým, že čísla a, c i čísla b, d sú nesúdeliteľné s výnimkou prípadu: $a = c = 1, b = d = 1$. V tom prípade však z (1) vyplýva $k = 0$, čo je spor s tým, že k je prirodzené číslo. Tým je dôkaz tvrdenia prevedený.

3. Úlohy III. kola kategórie A

1. Je-li n celé nezáporné číslo, potom číslo

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

je dělitelné devatenácti. Dokažte.

První řešení. Dané číslo lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2^2 \cdot 5^{2n} \cdot 2^n + 3^2 \cdot 2 \cdot 3^n \cdot 2^{2n} &= 20 \cdot 50^n + 18 \cdot 12^n = \\ &= 19 \cdot 50^n + 19 \cdot 12^n + 50^n - 12^n. \end{aligned}$$

Protože číslo $50^n - 12^n$ je pro každé celé $n \geq 0$ dělitelné číslem $50 - 12 = 38 = 2 \cdot 19$, je dané číslo dělitelné devatenácti pro každé celé $n \geq 0$.

Druhé řešení matematickou indukcí. Pro $n = 0$ platí $5^1 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^1 = 20 + 18 = 38 = 2 \cdot 19$, což je číslo dělitelné devatenácti.

Předpokládejme nyní, že pro některé celé nezáporné číslo n je číslo $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ dělitelné devatenácti a uvažujme číslo $5^{2n+3} \cdot 2^{n+3} + 3^{n+3} \cdot 2^{2n+3}$, jež stručně označíme A . Platí

$$\begin{aligned} A &= 5^{2n+1} \cdot 5^2 \cdot 2^{n+2} \cdot 2 + 3^{n+2} \cdot 3 \cdot 2^{2n+1} \cdot 2^2 = \\ &= 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = \\ &= 38 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}). \end{aligned}$$

Číslo 38 je dělitelné devatenácti a také poslední číslo v závorce je podle indukčního předpokladu dělitelné devatenácti. Z toho plyne, že též číslo A je dělitelné devatenácti. Tím je důkaz podán.

2. V rovine je daná úsečka AM délky d . Dále je dané kladné číslo v .

Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB , ktorého výška kolmá k prepone má dĺžku v a ktorého

dotýčnice z bodu A a určíme spoločné body týchto dotýčnic a kružnice k_2 . Tým sú nájdené všetky body B . Vrcholy C hľadaného trojuholníka ľahko doplníme.

Skúška. Z predchádzajúcej konštrukcie je vidieť, že body A, B, C , pokiaľ existujú, sú nekolineárne, že trojuholník ABC je pravoúhlý (C leží na k_1), že platí $\frac{MB}{MC} = \frac{2}{3}$ (C leží na k_1 , B na k_2) a že vzdialenosť vrcholu C od priamky AB je v (je totiž $MQ = \frac{2}{5}v$).

Trojuholník splňuje teda podmienky úlohy.

Diskusia. Kružnice k_1, k_2, κ možno narysovať vždy. Dotýčnica kružnice κ prechádzajúca bodom A má s kružnicou k_2 spoločný aspoň jeden bod len vtedy, ak bod A leží zvonku kružnice κ , t. j. ak platí:

$$d > \frac{2}{5}v. \quad (1)$$

Dotýčnica vedená ku kružnici κ z vonkajšieho bodu A s kružnicou k_2 spoločný aspoň jeden bod práve vtedy, ak je

$$\frac{\frac{2}{5}v}{d} \leq \frac{\frac{d}{3}}{\frac{4}{3}d}. \quad (2)$$

Nerovnosti (1), (2) upravíme na tvar

$$5d > 2v, \quad 8v \leq 5d. \quad (3)$$

Ak je splnená druhá z nerovností (3), je splnená aj prvá a úloha je riešiteľná. Podmienka riešiteľnosti úlohy je teda

$$\frac{v}{d} \leq \frac{5}{8}.$$

Ak nastane nerovnosť, má úloha štyri riešenia (dve dvojice trojuholníkov súmerne združených podľa priamky AM). Ak nastane rovnosť, má úloha dve riešenia (jednu dvojicu trojuholníkov súmerne združených podľa priamky AM).

3. V oboru reálnych čísel řešte rovnici

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = p, \quad (1)$$

kde p je dané reálné číslo.

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslu p .

Řešení. Předpokládejme, že x je řešením dané rovnice (1). Je pak tedy jednak

$$p \geq 0, \quad (2)$$

jednak $x^2 - 2|x| - 1 \geq 0$, neboli

$$(x^2 - 1)^2 \geq 4x^2. \quad (3)$$

Umocněním obou stran v (1) dostaneme

$$x^2 - 2x - 1 + x^2 + 2x - 1 + 2\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4x^2} = p^2$$

neboli

$$2\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4x^2} = p^2 - 2(x^2 - 1). \quad (4)$$

Odtud vyplývá, že

$$p^2 \geq 2(x^2 - 1). \quad (5)$$

Umocněním (4) dostaneme

$$4[(x^2 - 1)^2 - 4x^2] = p^4 - 4p^2(x^2 - 1) + 4(x^2 - 1)^2,$$

čili

$$4x^2(p^2 - 4) = p^2(p^2 + 4). \quad (6)$$

Je proto

$$p^2 - 4 > 0 \quad (7)$$

a naše řešení x je jedno z čísel

$$x_{1,2} = \pm \frac{p}{2} \sqrt{\frac{p^2 + 4}{p^2 - 4}}. \quad (8)$$

Z (5) a (8) plyne

$$p^2 \geq 2 \left(\frac{p^2(p^2 + 4)}{4(p^2 - 4)} - 1 \right)$$

neboli vzhledem k (7)

$$2(p^2 - 4)p^2 \geq p^2(p^2 + 4) - 4(p^2 - 4).$$

Odtud vyplývá

$$p^4 - 8p^2 - 16 \geq 0,$$

tj.

$$[p^2 - 4(1 + \sqrt{2})][p^2 + 4(\sqrt{2} - 1)] \geq 0.$$

Je proto

$$p^2 \geq 4(1 + \sqrt{2})$$

neboli vzhledem k (2)

$$p \geq 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}. \quad (9)$$

Tím jsme dokázali: Má-li rovnice (1) řešení, je řešením jedno z čísel (8) a pro číslo p platí nerovnost (9). Ukažme nyní, že je-li pro číslo p splněna nerovnost (9), pak každé z obou čísel (8) je řešením.

Je-li totiž splněna podmínka (9), pak čísla x_1, x_2 daná vztahem (8) existují a vyhovují vztahům (6), (5), tedy i (4). Protože je splněna rovnost (4), platí i (3), obě odmocniny v (1) mají smysl a platí i (1).

Celkem tedy dostáváme závěr:

Daná rovnice má řešení právě tehdy, je-li

$p \geq 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. Řešení jsou dvě a jsou dána vzorcem

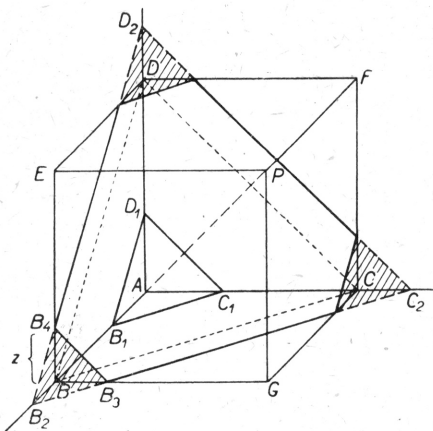
$$x_{1,2} = \pm \frac{p}{2} \sqrt{\frac{p^2 + 4}{p^2 - 4}}.$$

4. Nádoba má tvar duté krychle umístěné tak, že její tělesová úhlopříčka AP je ve svislé poloze, a platí $AP = 1$. V nádobě je voda; část tělesové úhlopříčky AP , která je ponořena ve vodě, má délku x .

Vyjádřete objem y vody v nádobě pomocí čísla x pro tyto dva případy:

a) $0 < x \leq \frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$.

Řešení (obr. 12). 1. Označme B, C, D vrcholy krychle, které leží na hranách vycházejících z vrcholu A , dále



Obr. 12

E, F, G vrcholy krychle, které leží na hranách vycházejících z vrcholu P . Roviny BCD, EFG dělí tělesovou

úhlopříčku na tři úsečky délky $\frac{1}{3}$. To snadno dokážeme. $ABCD$ je pravidelný jehlan trojboký, jehož podstava BCD je rovnostranný trojúhelník o straně délky $\sqrt{\frac{2}{3}}$, jeho pobočné stěny jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, jejichž odvěsny mají délku $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Přímka AP je kolmá ke každé z přímek BC , CD , DB , proto je kolmá k rovině BCD a obsahuje příslušnou výšku v jehlanu $ABCD$. Vypočteme dvojím způsobem objem tohoto jehlanu; dostaneme

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{v}{3}.$$

Odtud vyjde po úpravě $v = \frac{1}{3}$, což jsme chtěli dokázat.

Ze souměrnosti krychle podle průsečíku jejich tělesových úhlopříček vyplývá, že také rovina EFG dělí tělesovou úhlopříčku AP v poměru 1:2.

2. Pokud je číslo x v intervalu $0 < x \leq \frac{1}{3}$, tvoří voda v nádobě pravidelný trojboký jehlan $AB_1C_1D_1$; jeho podstavou je rovnostranný trojúhelník $B_1C_1D_1$, příslušná výška jehlanu má délku x a pobočné stěny jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s odvěsnou délky s . Jako v odst. 1 vypočteme dvojím způsobem objem tohoto jehlanu; dostaneme

$$y = \frac{1}{6} s^3 = \frac{(s\sqrt{\frac{2}{3}})^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{x}{3}.$$

Z rovnosti objemů vyjde po úpravě $s = x\sqrt[3]{3}$ a dále

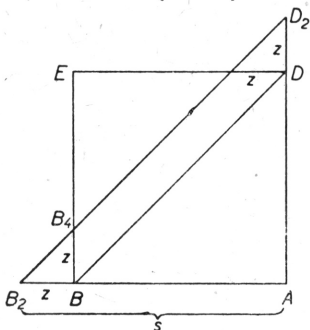
$$y = \frac{1}{2} x^3 \sqrt[3]{3}. \quad (1)$$

3. Je-li číslo x v intervalu $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$, vytvoří voda v nádobě těleso, jež dostaneme, oddělíme-li od pravidelného trojbokého jehlanu $AB_2C_2D_2$ tři navzájem shodné jehlany (vyšrafované na obrázku 12).

Jako v odst. 2 označme $AB_2 = AC_2 = AD_2 = s$; stejně jako dříve dostaneme

$$s = x\sqrt[3]{3}. \quad (2)$$

Objem jehlanu $AB_2C_2D_2$ je tedy opět $\frac{1}{2} x^3 \sqrt[3]{3}$. Každý z vyšrafovaných jehlanů je pravidelný jehlan trojboký; délku jeho pobočné hrany označme z . Situaci v rovině ABD znázorňuje obr. 13. Protože je $AB = AD = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, je podle (2) $z = BB_2 = s - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(3x - 1)$. Objemkaž-



Obr. 13

dého z vyšrafovaných jehlanů je $\frac{1}{6}z^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(3x-1)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}(3x-1)^3$. Objem vody v případě 3 je tedy

$$y = \frac{1}{6}s^3 - 3 \cdot \frac{1}{6}z^3 = \frac{1}{2}x^3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{18}(3x-1)^3.$$

Po úpravě dostaneme

$$y = \frac{\sqrt{3}}{18}(1 - 9x + 27x^2 - 18x^3). \quad (3)$$

Funkce (1), (3) jsou řešením úlohy. Rovnice (3) platí i pro $x = \frac{1}{3}$, jak se přesvědčíme dosazením: z (1) i (3) dostaneme pro $x = \frac{1}{3}$ výsledek $y = \frac{\sqrt{3}}{54}$.

4. Úlohy I. kola kategorie B

1. Řešte nerovnost

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leq 1. \quad (1)$$

Řešení. Nutně je $x \neq 0$. Vztah (1) lze psát

$$\frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leq 0. \quad (2)$$

Nechť je $1 - 2x^2 \geq 0$, tedy

$$0 < |x| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad (2')$$

Rozlišíme případy $x > 0$ a $x < 0$.

Případ [1]. Pro $x > 0$ musí ve (2) být

$$1 - x - \sqrt{1 - 2x^2} \leq 0 \quad (2'')$$

neboli

$$1 - x \leq \sqrt{1 - 2x^2}.$$

Vlevo [viz (2')] je nezáporné číslo, tj. $0 < x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$; umocněním obou stran nerovnosti na druhou dostaneme postupně

$$1 - 2x + x^2 \leq 1 - 2x^2, \quad (2''')$$

$$x(3x - 2) \leq 0.$$

Protože je $x > 0$, je nutně $3x - 2 \leq 0$ neboli

$$0 < x \leq \frac{2}{3}. \quad (3)$$

Obrácením postupu pro takto stanovené x dospějeme ke (2'''). Tu musí být $1 - 2x^2 \geq 0$ neboli $\frac{\sqrt{2}}{2} = x$. Připustíme, že platí $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{2}{3}$; umocněním na druhou dojdeme ke vztahu $\frac{1}{2} \leq \frac{4}{9}$ neboli $\frac{9}{18} \leq \frac{8}{18}$, což je spor. Lze tedy od (2''') dále dospět až ke (2''), (2) a (1).

Případ [2]. Pro $x < 0$ musí ve (2) platit

$$1 - x - \sqrt{1 - 2x^2} \geq 0$$

neboli

$$1 - x \geq \sqrt{1 - 2x^2}. \quad (4)$$

Vlevo je nutně nezáporné číslo, tj. $1 - x \geq 0$ a tedy $1 \geq x$, což je pro $x < 0$ splněno. Umocňme (4) na

druhou; postupně dostáváme

$$1 - 2x + x^2 \geq 1 - 2x^2, \quad (4')$$

$$x(3x - 2) \geq 0 \quad (4'')$$

a protože je $x < 0$, je nutně $3x - 2 \leq 0$ neboli

$$x \leq \frac{2}{3},$$

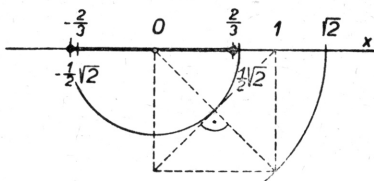
což podle předpokladu platí.

Obrácením postupu pro $x < 0$ od (4'') dospějeme ke (4'); chceme-li přejít ke (4), musíme požadovat, aby bylo $1 - 2x^2 \geq 0$ neboli $|x| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, což vzhledem k $x < 0$ dává

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq x < 0. \quad (5)$$

Pak lze již přejít ke (2) a (1).

Závěr. Řešení nerovnosti (1) jsou dána intervaly (3) a (5) (viz obr. 14).



Obr. 14

2. Dokážte, že číslo 48 je dělitelem čísla

$$N = n^2(n + 1)^2(n - 1)(n - 2)$$

pro každé přirozené číslo $n > 2$.

Riešenie. Platí: $48 = 2^4 \cdot 3$. Číslo N bude deliteľné číslom 48, ak je súčasne deliteľné číslami 3 a 16. No,

$$N = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)n(n + 1),$$

kde napr. čísla $(n - 1)$, n , $(n + 1)$ sú tri bezprostredne za sebou nasledujúce prirodzené čísla, o ktorých je známe, že práve jedno z nich je deliteľné číslom 3.

Teraz rozlišujeme dve možnosti:

Prípad [1]. Nech n je párne číslo. Ďalej rozlišujeme:

a) Nech $n = 2(2k + 1)$, kde prirodzené číslo $k \geq 1$ (vzhľadom na predpoklad $n > 2$). Potom je $n - 2 = 2(2k + 1) - 2 = 4k$, t. j. je deliteľné štyrmi. Každý z činiteľov n^2 , $n - 2$ čísla

$$N = (n - 2)(n - 1)n^2(n + 1)^2 \quad (1)$$

je deliteľný štyrmi a teda číslo N je deliteľné číslom $4 \cdot 4 = 16$.

b) Nech je $n = 2 \cdot 2k = 4k$, kde prirodzené číslo $k \geq 1$ (opäť vzhľadom na predpoklad $n > 2$). Potom je n^2 v (1) deliteľné číslom $4^2 = 16$.

Tým sme prípad [1] vybavili.

Prípad [2]. Nech je n nepárne číslo. Položme $n + 1 = m$, kde $m > 3$. Potom je

$$N = (m - 3)(m - 2)(m - 1)^2m^2$$

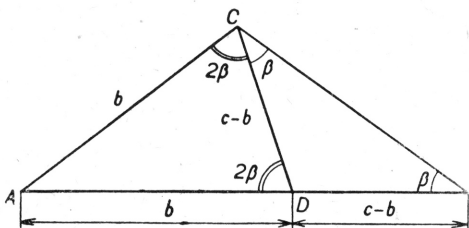
a opakujeme úsudky z prípadu [1] pre párne číslo m (namiesto predchádzajúceho n). Platia rovnaké závery ako v odstavcoch [1a], [1b].

Tým sme vybavili prípad [2] a zároveň dokázali tvrdenie pre prirodzené čísla $n > 2$.

3. Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané dĺžky strán

AB , AC a ak platí $\sphericalangle BCA = 3 \cdot \sphericalangle ABC$. Určite podmienku riešiteľnosti.

Riešenie (obr. 15). Rozbor: O uhloch β , γ trojuholníka ABC podľa textu úlohy platí $\gamma = 3\beta$, t. j.



Obr. 15

$\gamma > \beta$ a teda nutne platí $c > b$. Vo vnútri úsečky AB zostrojme bod D tak, aby platilo $DB = DC$, takže je $\sphericalangle BCD = \beta$. Potom v trojuholníku ADC je $\sphericalangle ACD = 2\beta$ a uhol $\sphericalangle ADC$ je vonkajším uhlom rovnoramenného trojuholníka DBC , ktorý má pri základni BC zhodné uhly veľkosti β , takže $\sphericalangle ADC = 2\beta$. Trojuholník ADC je teda taktiež rovnoramenný trojuholník so základňou DC , pri ktorej má uhly s veľkosťou 2β . Preto platí $AD = AC = b$ a teda $DC = DB = AB - AD = c - b$. Trojuholník ADC má tedy ramená $AD = AC = b$ a základňa $DC = c - b$. Z toho vyplýva konštrukcia:

Z daných dĺžok $b = CA$, $c = AB$ zostrojíme trojuholník ADC tak, aby platilo:

$$DC = c - b, \quad AC = AD = b.$$

Na predĺžení úsečky AD za bod D určíme bod B tak, aby platilo $DB = c - b$ a teda $AB = c$. Potom ABC je hľadaný trojuholník, pretože strany CA , AB majú dané

veľkosti a platí $\sphericalangle ACD = 2 \cdot \sphericalangle ABC$, čo hneď dokážeme:

V trojuholníku DBC je podľa konštrukcie $DB = DC$ a preto uhly pri základni BC majú rovnakú veľkosť β . Uhol $\sphericalangle ADC$ pri základni DC rovnoramenného trojuholníka (čo vyplýva z jeho konštrukcie) je vonkajším uhlom trojuholníka DBC a jeho veľkosť je teda 2β . Je teda $\sphericalangle ACD = 2\beta$ a preto $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = 2\beta + \beta = 3\beta$, čo sme mali dokázať.

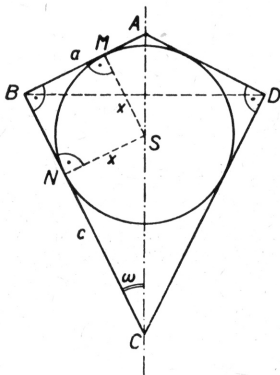
Diskusia. K tomu, aby sme mohli zostrojiť trojuholník ADC , musí pre dĺžky jeho strán platiť: $AC < AD + DC$, $AD < DC + AC$, $DC < AD + AC$, t. j. $b < b + c - b$, $c - b < b + b$. Z toho vyplýva, že úloha má jediné riešenie práve vtedy, keď o daných veľkostiach c , b úsečiek AB , AC platí: $b < c < 3b$.

4. Deltoid $ABCD$ má os súmernosti AC a jeho uhly pri vrcholoch B , D sú pravé.

Vyjadrite polomer kružnice vpísanej deltoidu pomocou dĺžok jeho strán.

Riešenie. Označme $AB = a$, $BC = c$, x dĺžku polomeru vpísanej kružnice. Nech S je stred hľadanej kružnice a M , N jej dotykové body po rade so stranami AB , BC . Potom platí: $x = SM = SN = BM = BN$ a $CN = c - x$ (pozri obr. 16). Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov CSN , CAB (majú zhodné pravé uhly a uhol ω pri vrchole C) vyplýva

$$\frac{x}{a} = \frac{c - x}{c},$$



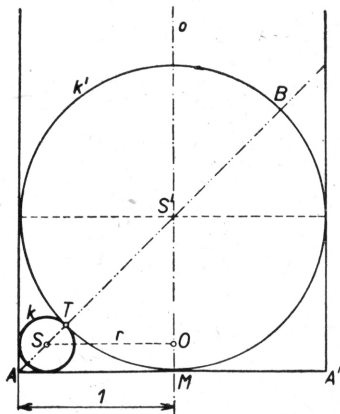
Obr. 16

z čoho dostaneme

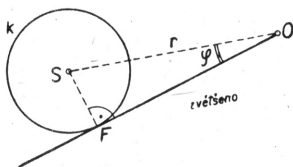
$$x = \frac{ac}{a + c}.$$

5. Do dutého rotačního válce s podstavou na vodorovné rovině je vepsána koule **K** o poloměru 1. Tato koule se dotýká jednak dolní podstavu, jednak pláště podél kružnice. Ve zbývajícím prostoru mezi dolní podstavou a koulí **K** spočívají na dolní podstavě shodné kuličky, které se dotýkají jak pláště válce, tak koule **K**.

Kolik lze nejvýše takových kuliček do zmíněného prostoru umístit?



Obr. 17



Obr. 18

Řešení. Viz označení v obr. 17 a 18, kde $S'M = S'T = MA = MA' = 1$, $ST = SF = x$, $SO \perp o$, $OS = r$, $\sphericalangle SFO = 90^\circ$. Kružnice k' , k jsou stejnohlé podle středů stejnohllosti T a A , konstanty stejnohllosti

mají absolutní hodnotu

$$\frac{ST}{S'T} = x = \frac{AT}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Dále je

$$\begin{aligned} \frac{SO}{AM} = r = \frac{SS'}{AS'} &= \frac{x+1}{\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2 = \\ &= 2(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Je tedy

$$x = 3 - 2\sqrt{2}, \quad r = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Z pravoúhlého trojúhelníku OSF (obr. 18), kde ostrý úhel $\angle SOF = \varphi$, dostáváme

$$\begin{aligned} \sin \varphi = \frac{x}{r} &= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{2} > \frac{0,414}{2} = 0,207, \end{aligned}$$

takže je jistě

$$0,207 < \sin \varphi < 0,208$$

a podle tabulek

$$11\frac{5}{6}^\circ < \varphi < 12^\circ,$$

$$23\frac{2}{3}^\circ < 2\varphi < 24^\circ.$$

Zorný úhel jedné kuličky z bodu O má tedy velikost 2φ . Pro hledaný počet p kuliček dostáváme meze

$$\frac{360}{24} < p < \frac{360}{23\frac{2}{3}}$$

neboli

$$15 < p < 17,$$

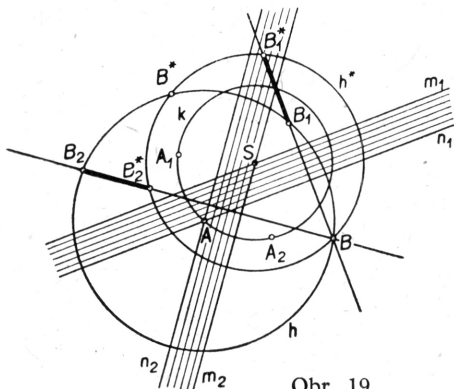
a tedy $p = 16$. Je totiž

$$\frac{360}{23\frac{2}{3}} = 16,9 \dots < 17.$$

Kuliček se vejde 16 a to volně (bez vzájemného dotyku).

6. V rovině je dána kružnice k a na ní bod A ; vně kružnice k je dán bod B . Označme A' bod ležící vně kružnice k , B' bod souměrně sdružený s bodem B podle osy úsečky AA' . Jaký útvar vyplní všechny takto vzniklé body B' , proběhne-li bod A' vnějšek kružnice k ?

Řešení (obr. 19). Vedme libovolnou přímku m_1 středem S kružnice k a označme A_1 bod souměrně sdružený s bodem A podle přímky m_1 (A_1 zřejmě leží na k). Zkoumejme, které přímky směru (m_1) mohou být osami



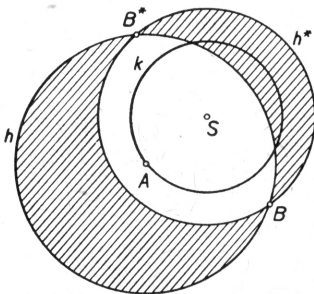
Obr. 19

úseček AA' , má-li bod A' ležet vně kružnice k . Zřejmě jsou vyloučeny všechny přímky vyšrafovaného pásu roviny (obr. 19), který je ohraničen přímkou m_1 a přímkou n_1 směru (m_1) vedenou bodem A . Souměrnost podle osy n_1 převede bod B v jistý bod B_1 , který náleží kružnici $h \equiv (A; AB)$, neboť je $AB = AB_1$. Souměrnost podle osy m_1 převede bod B v jistý bod B_1^* , který náleží kružnici $h^* \equiv (S; SB)$, neboť je $SB = SB_1^*$; přímka m_1 totiž prochází bodem S . Probíhá-li osa pás roviny (m_1, n_1) , probíhá obraz bodu B úsečku $B_1B_1^*$ (i s jejími krajními body). Náleží-li tedy osa úsečky AA' směru (m_1) , probíhá bod B' přímkou BB_1 s vyloučením úsečky $B_1B_1^*$.

Na obr. 19 je nakreslena situace pro další směr (m_2) ; zde je z přímky BB_2 vyloučena úsečka $B_2B_2^*$.

Jestliže směr (m_1) splyne se směrem AS , pak se pás (m_1, n_1) redukuje na jedinou přímku m_1 a úsečka $B_1B_1^*$ na jediný bod B^* , souměrně sdružený s bodem B podle přímky AS ; tento bod B^* nenáleží mezi body B' . Úsečky $B_1B_1^*$ vyplní množinu bodů, z nichž každý leží buď na jedné z obou kružnic h, h^* , nebo náleží vnitřku jedné a vnějšku druhé.

Závěr. Hledaný útvar U se skládá ze všech takových bodů B' , které náleží současně vnějšku obou kružnic h, h^* nebo současně jejich vnitřkům. Útvar U obsahuje mimoto ještě bod B , pokud je $B \neq B^*$; tato poslední podmínka je splněna právě tehdy, neleží-li body A, B, S v přímce. Útvar U je znázorněn na obr. 20, je to nevyšrafovaná část roviny.



Obr. 20

5. Úlohy II. kola kategorie B

1. Součet druhých mocnin dvou přirozených čísel je dělitelný sedmi právě tehdy, jsou-li obě uvažovaná čísla dělitelná sedmi. Dokažte.

Řešení. Označme A, B uvažovaná přirozená čísla; pak lze určit s jediným výsledkem celá čísla a, z_1 a b, z_2 taková, že platí

$$A = 7a + z_1, \quad B = 7b + z_2,$$

kde čísla z_1, z_2 jsou rovna některému z čísel $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Potom součet $N = A^2 + B^2$ lze psát

$$N = (49a^2 + 14az_1 + z_1^2) + (49b^2 + 14bz_2 + z_2^2) = 7x + z_1^2 + z_2^2, \quad (1)$$

kde x je jisté celé číslo. Jsou-li čísla A, B dělitelná sedmi, je $z_1 = z_2 = 0$, takže v (1) je $N = 7x$, tj. dělitelné sedmi.

Předpokládejme nyní, že číslo N je dělitelné sedmi, potom, protože $7x$ je násobek sedmi, plyne z (1), že nutně i součet $s = z_1^2 + z_2^2$ je dělitelný sedmi. Pro tento součet s sestavme tabulku:

$z_1 \backslash z_2$	0	± 1	± 2	± 3
0	0	1	4	9
± 1	1	2	5	10
± 2	4	5	8	13
± 3	9	10	13	18

Avšak jediné číslo 0 z tabulky je dělitelné sedmi; toto číslo odpovídá případu $z_1 = z_2 = 0$, tedy případu, kdy obě uvažovaná čísla A, B jsou dělitelná sedmi. Tím je důkaz proveden.

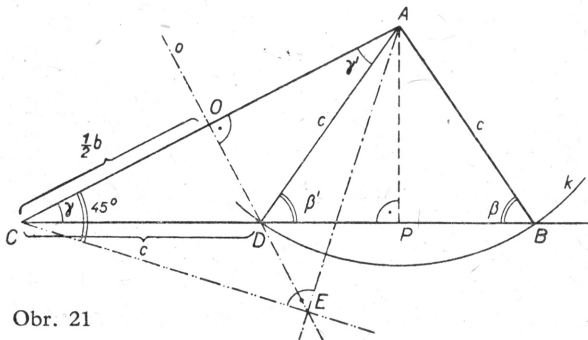
2. Trojúhelník ABC má tieto dve vlastnosti:

- (1) platí, že $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle BCA$,
- (2) uhol $\sphericalangle ABC$ je ostrý.

Dokážte, že potom možno trojúhelník ABC rozdeliť priamkou, vedenou vrcholom A , na dva rovnoramenné trojúhelníky, z ktorých aspoň jeden je tupouhlý.

Zostrojte trojúhelník ABC , ktorý má obidve predchádzajúce vlastnosti (1), (2), ak sú dané dĺžky strán $AC = b$, $AB = c$ a dokážte, že úloha má riešenie práve vtedy, keď platí: $c/\sqrt{2} < b < 2c$.

Riešenie (obr. 21). Strany a uhly označíme obvyklým spôsobom. Nech hľadaná priamka (vedená vrcholom A) pretína stranu BC v bode D . Pretože sú oba uhly $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ ostré, leží päta P kolmice spustenej z bodu A na priamku BC medzi bodmi B, C



Obr. 21

a je $AP < c$. Pre kružnicu $k \equiv (A; c)$ je teda bod P vnútorný a bod C vonkajší (je totiž $b > c$, pretože je $\beta > \gamma$). Preto medzi bodmi C, P leží bod D kružnice k .

Trojuholník BDA je rovnoramenný so základňou BD a je $\sphericalangle ADB = \beta$. Tento uhol je vonkajším uhlom trojuholníka ACD , preto

$$\sphericalangle CAD = \beta - \gamma = \gamma. \quad (1)$$

Trojuholník ACD je teda tiež rovnoramenný so základňou AC a je $AD = CD = c$.

Konstrukcia. Zostrojíme pomocný trojuholník ACD z daných úsečiek b, c a pomocou kružnice k ho doplníme na trojuholník ABC .

Diskusia. Vzťah $2c > b$ zaisťuje existenciu pomocného rovnoramenného trojuholníka DAC , ktorého os súmernosti o rozpoľuje v bode O jeho základňu AC . Pretože je $\beta' = \beta < 90^\circ$, je uhol $\sphericalangle ADC$ tupý. Obrátene, ak je v pomocnom trojuholníku DAC uhol $\sphericalangle ADC$ tupý, má úloha riešenie. Vyjadríme túto skutočnosť pomocou dĺžok b, c . Zostrojme pravouhlý rovnoramenný trojuholník ACE s preponou AC , kde E leží na polpriamke OD . Pretože je $\gamma < 45^\circ$, leží D nutne vo vnútri úsečky

OE dĺžky $\frac{1}{2}b$. Obrátene, každý bod D , ktorý leží vo

vnútri úsečky OE , vedie k tupouhlému trojuholníku DAC . Z Pythagorovej vety použitej na trojuholník CEO , kde

$\sphericalangle COE = 90^\circ$, dostaneme $CE^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{2}b^2$, t. j.

$CE = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Zrejme je $CD < CE$ čiže $c < \frac{b}{\sqrt{2}}$ a teda

$b > c\sqrt{2}$. Obrátene, ak platí tento vzťah, padne bod D

do vnútra úsečky OE a trojuholník DAC má $\sphericalangle D$ tupý. Tým je tvrdenie o riešiteľnosti úlohy dokázané.

3. Sestrojte graf funkce

$$y = \frac{\sqrt{\frac{p+x}{p-x}} - \sqrt{\frac{p-x}{p+x}}}{\sqrt{\frac{p+x}{p-x}} + \sqrt{\frac{p-x}{p+x}}}, \quad (1)$$

kde p je dané kladné číslo.

Řešení. Vyšetříme nejprve definiční obor funkce (1). Aby zlomky pod odmocninami v (1) měly smysl, musí platit $p - x \neq 0$, $p + x \neq 0$ neboli

$$x \neq p, \quad x \neq -p. \quad (2')$$

Dále musí být zlomky (1) nezáporné; to nastane právě tehdy, když platí $(p - x)(p + x) > 0$ neboli

$$-p < x < p. \quad (2)$$

Položme pro stručnost

$$\frac{p+x}{p-x} = a, \quad (3)$$

takže (1) zní

$$y = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}}{\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}}. \quad (4)$$

Z požadavku (2) plyne $a > 0$ a $\frac{1}{a} > 0$; proto má vždy smysl i zlomek na pravé straně (4); neboť je vždy

$$\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} > 0.$$

Rozšířme zlomek ve (4) výrazem

$$\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}} \neq 0; \quad (5)$$

dostaneme

$$y = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2}{(\sqrt{a})^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 1} = \frac{(a - 1)^2}{(a - 1)(a + 1)};$$

tento vztah označíme (6'). Další úpravou dostaneme

$$y = \frac{a - 1}{a + 1}.$$

Po dosazení ze (3) dostaneme

$$y = \frac{\frac{p+x}{p-x} - 1}{\frac{p+x}{p-x} + 1} = \frac{p+x - (p-x)}{p+x + p-x} = \frac{x}{p}$$

neboli

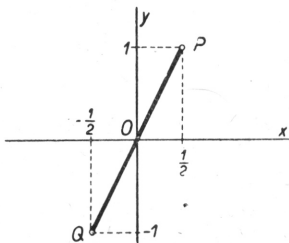
$$y = \frac{x}{p}. \quad (6)$$

Provedené zjednodušení platí za jistých předpokladů.

Především, že platí (5), tj. že $\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}} \neq 0$. Ze vztahu $\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}} = 0$ plyne $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{a}}$ (na obou stranách jsou kladná čísla), tj. $a = \frac{1}{a}$, $a^2 = 1$, $a = 1$ (neboť je $a > 0$). Ze (3) a z rovnosti $a = 1$ dostaneme

$$\frac{p+x}{p-x} = 1,$$

tj. $x = 0$. Tedy $a = 1$ pro $x = 0$; pro $x \neq 0$ je $0 < a \neq 1$ a výrazy $\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}$, $a - \frac{1}{a}$, $a^2 - 1$, které se vyskytují v (6'), jsou různé od nuly, takže platí i (6). Avšak pro $x = 0$ dostaneme z (1), že $y = 0$; k tomuto výsledku však dospějeme i z (6) pro $x = 0$. Vztah (6) poskytuje pro x z intervalu (2) tytéž hodnoty jako (1). Grafem funkce (6) je přímka o směrnici $\frac{1}{p}$ jdoucí počátkem O souřadnic; s omezením (2) pak jako graf funkce dostaneme vnitřek úsečky $P \equiv [p; 1]$, $Q \equiv [-p; -1]$ (viz obr. 22 pro $p = \frac{1}{2}$). Tím je řešení provedeno.



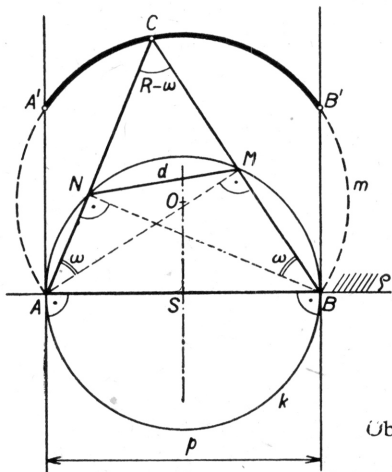
Obr. 22

4. Nad danou úsečkou AB , která má délku c , jsou v jedné z polorovin vyřatých přímkou AB sestrojeny všechny ostroúhlé trojúhelníky ABC takové, že vzdálenost pat výšek vedených vrcholy A , B je rovna danému číslu d .

Vyšetřte množinu všech vrcholů C uvažovaných trojúhelníků. Proveďte diskusi vzhledem ke kladným číslům c , d .

Řešení (obr. 23). Trojúhelník ABC požadovaných vlastností, který leží v polorovině ρ , leží nutně (až na stranu AB) uvnitř pásu p rovnoběžek AA' , BB' , kolmých k přímce AB . Je známo, že v ostroúhlém trojúhelníku padnou paty výšek dovnitř jeho stran. Proto paty M , N výšek jdoucích vrcholy A , B trojúhelníku ABC leží uvnitř

pásu p i uvnitř poloroviny ϱ ; tam leží tedy i celá úsečka MN i bod C . Trojúhelníky ABM , ABN jsou pravoúhlé a body M , N tedy leží na Thaletově kružnici $k \equiv \left(S; \frac{1}{2}c\right)$. Úhly $\sphericalangle MAN$, $\sphericalangle MBN$ jsou po řadě částmi ostrých úhlů



Übr. 23

$\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle CBA$ a tudíž ostré; jsou to obvodové úhly v kružnici k nad tětivou MN a oba tedy leží na větším oblouku $\widehat{MN}$ kružnice k . Jsou proto shodné a o jejich velikosti ω platí $\omega < 90^\circ$. Z trojúhelníků ACM , BCN , kde $\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90^\circ$, plyne, že $\gamma = \sphericalangle BCA = 90^\circ - \omega < 90^\circ$. Bod C tedy leží uvnitř p a uvnitř q na jistém oblouku m , z jehož bodů je úsečku AB vidět pod ostrým úhlem $90^\circ - \omega$. Zvolme body A' , B' přímkou AA' , BB' právě na oblouku m ; bod C tedy leží uvnitř oblouku $\widehat{A'B'}$.

Je-li obráceně C zvolený bod uvnitř oblouku $\widehat{A'B'}$, je $\sphericalangle BCA = 90^\circ - \omega$ a polopřímky AC , BC leží uvnitř pravých úhlů $\sphericalangle BAA'$, $\sphericalangle ABB'$; proto obě tyto polopřímky protnou k uvnitř ϱ v bodech M , N a je $AM \perp BC$, $BN \perp AC$. Proto i trojúhelníky ACM , BCN mají při M , N pravé úhly a platí $\sphericalangle CAM = \sphericalangle CBN = \omega$. Je tedy tětivu MN kružnice k z bodů A , B vidět pod konstantním ostrým úhlem ω , tj. všechny úsečky MN mají konstantní délku d . Takto sestrojený trojúhelník ABC splňuje proto požadavky textu úlohy. Tím je obrácení provedeno.

Hledanou množinou všech bodů C je tedy vnitřek popsaného oblouku $\widehat{A'B'}$.

Pokud jde o existenci trojúhelníků ABC , je zřejmě nutné a stačí, aby tětiva MN délky d padla celá dovnitř ϱ ; pak jsou však úhly $\sphericalangle ABM$, $\sphericalangle BAN$ ostré, jejich součet menší než 180° a podle Eukleidova axiómu mají polopřímky AN , BM společný bod C uvnitř ϱ a uvnitř pásu p . Tětiva MN kružnice k tedy není průměrem, tj. úloha má řešení, právě když je $d < c$.

6. Úlohy I. kola kategorie C

1. Je dána rovnice s neznámou x :

$$\frac{x+a}{b+c} + \frac{x+b}{c+a} + \frac{x+c}{a+b} = \frac{1}{6}; \quad (1)$$

přitom reálná čísla a , b , c (vesměs různá od nuly) splňují podmínku $a + b + c = 0$.

a) Dokažte, že rovnice má kořen a vyjádřete ho pomocí čísel a , b , c .

b) Dokažte, že kořen rovnice a číslo abc jsou téhož znamení.

Řešení. Protože je $a + b + c = 0$, lze rovnici (1) psát ve tvaru

$$\frac{x+a}{a} + \frac{x+b}{b} + \frac{x+c}{c} + \frac{1}{6} = 0;$$

po znásobení číslem $6abc \neq 0$ dostáváme postupně

$$\begin{aligned} 6(bc + ca + ab)x + 3 \cdot 6abc + abc &= 0, \\ 3 \cdot 2(bc + ca + ab)x &= -19abc. \end{aligned} \quad (2)$$

Ze vztahu $a + b + c = 0$ umocněním na druhou dostáváme

$$2(bc + ca + ab) = -(a^2 + b^2 + c^2) \quad (3)$$

a po dosazení do levé strany (2) máme

$$3(a^2 + b^2 + c^2)x = 19abc, \quad (4)$$

kde $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, neboť čísla a, b, c jsou vesměs různá od nuly; rovněž $abc \neq 0$.

Ze (4) dostaneme

$$x = \frac{19abc}{3(a^2 + b^2 + c^2)}. \quad (5)$$

Protože ve jmenovateli posledního zlomku je kladné číslo, mají čísla abc a x stejná znaménka, přičemž je $x \neq 0$.

Proveďme ještě zkoušku dosazením výsledku (5) do (1): Výsledek (5) lze pomocí (3) psát ve tvaru

$$x = \frac{19abc}{-6(bc + ca + ab)}. \quad (6)$$

Protože $b + c = -a$, platí

$$\frac{x+a}{b+c} = \frac{x+a}{-a} = -\frac{x}{a} - 1;$$

po dosazení za x ze vztahu (6) najdeme

$$\frac{x+a}{b+c} = \frac{19bc}{6(bc+cab+ab)} - 1.$$

Podobné výrazy dostaneme i po dosazení za x do obou zlomků na levé straně rovnice (1); hodnota L levé strany rovnice (1) tedy po dosazení ze (6) je

$$L = \frac{19bc + 19ca + 19ab}{6(bc + ca + ab)} - 3$$

neboli je postupně

$$L = \frac{19(bc + ca + ab)}{6(bc + ca + ab)} - 3 = \frac{19}{6} - 3 = \frac{1}{6},$$

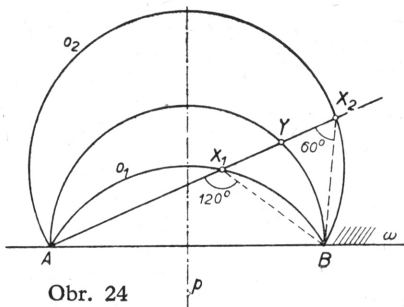
což je pravá strana rovnice (1). Krácení výrazem $bc + ca + ab$ lze provést, neboť je různý od nuly [viz vztah (3)]. Tím je zkouška provedena.

2. Nad danou úsečkou AB jsou sestrojeny v téže poloovině ω vyřáté přímkou AB kruhové oblouky o_1, o_2 , ze kterých je úsečku AB vidět po řadě pod zornými úhly velikostí 120° a 60° . Bodem A je vedena taková přímka, která má s oblouky o_1, o_2 po řadě další společné body X_1, X_2 .

Vyšetřte množinu středů Y všech takových úseček X_1X_2 .

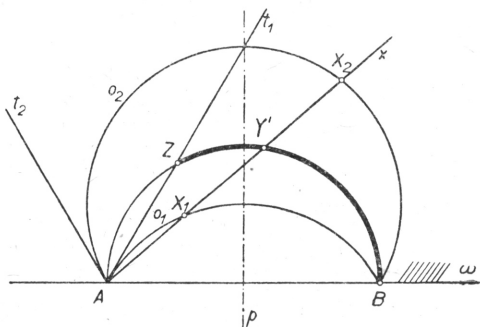
Řešení (obr. 24).

I. Úhel $\sphericalangle AX_1B$ velikosti 120° je vnějším úhlem v trojúhelníku BX_1X_2 , kde $\sphericalangle X_2 = 60^\circ$, takže $\sphericalangle B = 60^\circ$; je



Obr. 24

tedy trojúhelník BX_1X_2 rovnostranný a jeho těžnice BY je kolmá k přímce AX_1X_2 neboli $\sphericalangle AYB = 90^\circ$. Bod Y tedy leží na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou AB jako průměrem, a to uvnitř poloroviny ω ; všechny body Y tedy leží na polokružnici $\widehat{AB}$ uvnitř poloroviny ω .



Obr. 25.

II. Je třeba ještě zjistit, zda každý vnitřní bod Y' uvažované polokružnice $\widehat{AB}$ je středem jisté úsečky X_1X_2 , kde X_1, X_2 leží po řadě na obloucích o_1, o_2 a přitom přímka AX_1 prochází bodem X_2 . Sestrojíme bodem A tečnu t_1 (t_2) k oblouku o_1 (o_2) — viz obr. 25. Přímka procházející bodem A a ležící uvnitř poloroviny ω a uvnitř poloroviny t_1B (t_2B) protne oblouk o_1 (o_2) ve vnitřním bodě X_1 (X_2). Úsečky X_1X_2 , vyhovující úloze, mohou ležet jen uvnitř společné části polorovin t_1B, t_2B a ω , a to na přímkách x procházejících bodem A . Všechny tyto přímky x zřejmě protínají i polokružnici $\widehat{AB}$; písme-

nem Y' označme libovolný z těchto průsečíků. Průsečík tečny t_1 s polokružnicí $\widehat{AB}$ označme Z .

Protože úhel $AY'B$ je pravý, je přímka BY' výškou trojúhelníku X_1X_2B . Tento trojúhelník je (viz odst. I) rovnostranný, takže bod Y' je středem úsečky X_1X_2 a patří hledané množině. Z provedené úvahy plyne, že hledanou množinou je pouze vnitřek oblouku $\widehat{ZB}$, který je částí polokružnice $\widehat{AB}$ (a nikoli tato polokružnice celá).

3. Řešte sústavu rovníc

$$px + 2y = 3, \quad (1)$$

$$2x + py = p - 1 \quad (2)$$

s neznámými x, y .

Prevedte skúšku dosadením a prevedte diskusiu vzhľadom na parameter p .

Riešenie. Vynásobme po rade číslami $p, -2$ rovnice (1), (2) a sčítajme. Dostaneme $(p^2 - 4)x = 3p - 2p + 2$ čiže

$$(p + 2)(p - 2)x = p + 2. \quad (3)$$

Potom vynásobme rovnice (1), (2) po rade číslami $-2, p$ a sčítajme. Dostaneme $(p^2 - 4)y = p^2 - p - 6$ čiže

$$(p + 2)(p - 2)y = (p + 2)(p - 3). \quad (4)$$

Rozlišujme teraz tieto možnosti:

Prípád [1]. Nech je $(p + 2)(p - 2) \neq 0$, t. j. $-2 \neq p \neq 2$. Potom z (3), (4) dostaneme

$$x = \frac{1}{p - 2}, \quad y = \frac{p - 3}{p - 2}. \quad (5)$$

Skúška. Označme L_1, L_2 ľavé strany rovníc (1), (2)

po dosadení výsledku (5):

$$L_1 = \frac{p}{p-2} + \frac{2(p-3)}{p-2} = \frac{3p-6}{p-2} = \frac{3(p-2)}{p-2} = 3;$$

$$L_2 = \frac{2}{p-2} + \frac{p^2-3p}{p-2} = \frac{(p-2)(p-1)}{p-2} = p-1.$$

Čísla L_1, L_2 sú teda po rade rovné pravým stranám rovníc (1), (2).

Prípad [2]. Nech je $p+2=0$, t. j. $p=-2$. Potom nemožno použiť výsledky (3), (4), pretože tieto vzťahy sú splnené pre každú dvojicu čísel x, y . Sústava (1), (2) má tvar

$$-2x + 2y = 3, \quad 2x - 2y = -3.$$

Ak vynásobíme prvú rovnicu číslom -1 , dostaneme druhú. Možno teda napr. x voľiť ľubovoľne a y vypočítame z rovnice $2x - 2y = -3$. Riešenie teda je:

$$x \text{ je ľubovoľné číslo, } y = x + \frac{3}{2}. \quad (6)$$

Prípad [3]. Nech $p-2=0$, t. j. $p=2$. Potom vzťah (3) nie je splnený pre žiadne číslo, pretože na ľavej strane (3) je 0, na pravej číslo 4. Daná sústava má tvar

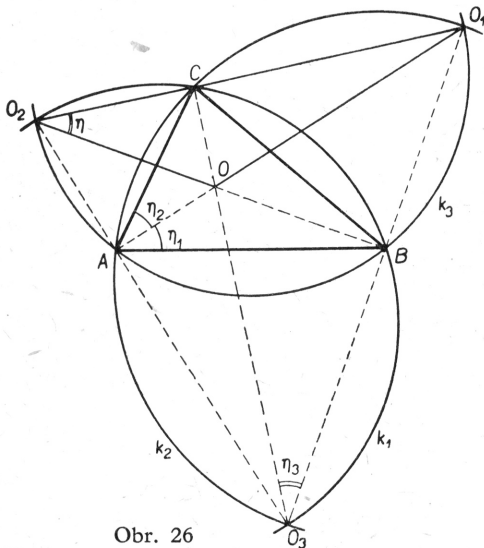
$$2x + 2y = 3, \quad 2x + 2y = 1,$$

čo zrejme nemožno splniť súčasne žiadnymi číslami, pretože $3 \neq 1$. Záver je zrejmý z tabuľky:

Parameter p	rôzny od $-2, 2$	-2	2
Počet riešení x, y danej sústavy	jediné riešenie dané vzťahmi (5)	sústave vyhovuje každá dvojica čísel (6)	sústava nemá riešenie

4. Je daný trojuholník OO_1O_2 .

Zostrojte trojuholník ABC tak, aby bod O bol stredom kružnice trojuholníku ABC vpísanej a aby body O_1, O_2 boli po rade stredmi kružníc vpísaných trojuholníku ABC zvonku ku stranám BC, CA . Prevedte diskusiu.



Obr. 26

Riešenie. Na obr. 26 máme hľadaný trojuholník ABC a stred O kružnice jemu vpísanej ako aj stredy O_1, O_2, O_3 kružníc zvonku vpísaných. Pretože osi vedľajších uhlov sú navzájom kolmé, je vždy os vnútorného uhla trojuholníka ABC kolmá k osi vonkajšieho uhla pri tom istom vrchole tohto trojuholníka. Ak označíme po rade α, β, γ vnútorné uhly hľadaného trojuholníka ABC , potom

o uhloch daného trojuholníka OO_1O_2 platí:

$$\begin{aligned} \sphericalangle O_1OO_2 &= \sphericalangle AOB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ + \\ &+ \frac{1}{2}[180^\circ - (\alpha + \beta)] = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma > 90^\circ, \end{aligned}$$

takže uhly pri vrcholoch O_1 a O_2 sú nutne ostré. Úloha teda môže mať riešenie, ak je

$$\sphericalangle O_1OO_2 > 90^\circ.$$

Ďalej je $OO_1 \perp AO_2$, $OO_2 \perp BO_1$, $O_1O_2 \perp OC$, t. j. body A, B, C sú päty výšok v trojuholníku OO_1O_2 , ktorého priesečníkom výšok je bod O_3 . Podľa toho prevedieme konštrukciu: Označme A, B, C po rade päty kolmíc vedených bodmi O_2, O_1, O k priamkam OO_1, OO_2, O_1O_2 a označme O_3 priesečník výšok trojuholníka OO_1O_2 , v ktorom je uhol $\sphericalangle O_1OO_2$ tupý a teda oba ostatné uhly ostré. Tým je konštrukcia prevedená.

Dokážeme správnosť prevedenej konštrukcie: Použijeme pri tom túto známu vetu: Ak vedieme vnútorným bodom jedného ramena ostrého (tupého) uhla kolmicu k jeho druhému ramenu, padne jej päta do vnútra (na opačnú polpriamku) tohto druhého ramena. Z toho vyplýva, že bod C leží vo vnútri úsečky O_1O_2 (pretože uhly $\sphericalangle O_1, \sphericalangle O_2$ trojuholníka OO_1O_2 sú ostré a úsečka O_1O_2 je spoločná časť polpriamok O_1O_2, O_2O_1); naproti tomu body A, B padnú po rade na predĺženie úsečiek O_1O, O_2O za bod O , t. j. na polpriamky opačné k polpriamkam OO_1 , resp. OO_2 (pretože uhol $\sphericalangle O_1OO_2$ je tupý). Pritom je napr. $\sphericalangle AO_2O_1$ tiež ostrý (druhý ostrý uhol v pravouhlom trojuholníku O_1O_2A), práve tak aj $\sphericalangle BO_1O_2$, takže ich súčet je menší než 180° a podľa Euklidovej axiomy leží bod O_3 v polrovine O_1O_2O (v ktorej ležia body A, B). Ešte musíme dokázať, že priamky

OO_1, OO_2, O_1O_2 sú osami uhlov po rade pri vrcholoch A, B, C výsledného trojuholníka ABC . Stačí zrejme dokázať, že bod O je priesečníkom osí uhlov $\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC$. Dokážeme pre prvý z uhlov, že jeho osa prechádza bodom O ; pre druhý z nich je dôkaz obdobný:

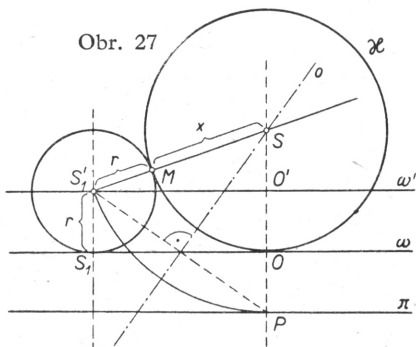
Opíšme nad úsečkami O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 ako nad priermi po rade kružnice k_1, k_2, k_3 . Podľa Thaletovej vety ležia na k_1 body B, C ; atď. Pri označení obvodových uhlov podľa obrázka 26 platí: $\eta_1 = \eta$ (ležia na k_3), $\eta = \eta_3$ (ležia na k_1), $\eta_3 = \eta_2$ (ležia na k_2). Je teda $\eta_1 = \eta_2$, čo sme mali dokázať.

Úloha má za predpokladu, že uhol $\sphericalangle O_1OO_2$ je tupý, zrejme vždy jediné riešenie.

5. Ve vodorovné rovine je dán rovnostranný trojuholník $S_1S_2S_3$ o straně dĺžky 2. V každom z jeho vrcholů spočívá na rovine $S_1S_2S_3$ jedna ze tří shodných koulí o poloměru $r \leq 1$.

Vyšetřete konstruktivně i výpočtem poloměr koule, která se všech tří daných koulí dotýká vně a mimoto se dotýká roviny $S_1S_2S_3$. Rozhodněte o řešitelnosti úlohy vzhledem k danému číslu r .

Řešení (viz označení v obr. 27). Označme O střed a ω rovinu daného rovnostranného trojuholníku $S_1S_2S_3$; dále označme S'_1, S'_2, S'_3 středy daných koulí s poloměrem r . Jsou-li M_1, M_2, M_3 dotykové body hledané koule $\kappa \equiv (S; x)$ s danými



koulemi, potom platí (za předpokladu, že je $r \leq 1$)

$$r + x = SS'_1 = SS'_2 = SS'_3,$$

a proto roviny souměrnosti úseček $S'_1S'_2$, $S'_2S'_3$, $S'_3S'_1$, a tím i úseček S_1S_2 , S_2S_3 , S_3S_1 procházejí bodem S a zároveň bodem O dotyku plochy kulové κ s rovinou ω ; roviny souměrnosti tedy obsahují přímku $p \equiv SO \perp \omega$. Rovina $\omega' \equiv S'_1S'_2S'_3 \parallel \omega$ protne přímku p v bodě O' a platí $S'_1O' = S_1O = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (úsek těžnice rovnostranného trojúhelníku $S_1S_2S_3$ od jeho těžiště k jeho vrcholu).

V trojúhelníku SMO je $SM = SO = x$ a v trojúhelníku SS'_1P viz obr. 27, kde $OP = r$, $\pi \parallel \omega$) je $SS'_1 = SP = r + x$, takže osy základů těchto rovnostranných trojúhelníků splývají v jedinou přímku o , která prochází bodem S ležícím na přímce p . Konstrukci tedy provedeme takto: Nad úsečkou $OS_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ sestrojíme kružnici $k_1 \equiv (S'_1, r)$, která se dotýká přímky S_1O v bodě S_1 a v bodě O sestrojíme přímku $p \perp S_1O$. Od bodu O nanese na přímku p úsečku délky r tak, aby její druhý krajní bod P neležel v polorovině $S_1OS'_1$. Potom osa o úsečky PS'_1 protne přímku p v hledaném středu S koule κ . Protože úhel $\sphericalangle OPS'_1$ je ostrý, jsou přímky o , p vždy kosé a bod S existuje nezávisle na velikosti r . Úloha má zřejmě vždycky řešení (což potvrdí i následující výpočet).

Jestliže přímka o prochází bodem O' , je $r = x$, $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}$ neboli

$$x = r = \frac{1}{3}\sqrt{3}. \quad (1)$$

Jestliže přímka o neprochází bodem O' , vzniká pravoúhlý trojúhelník SS_1O' (kde $\sphericalangle O' = 90^\circ$); o jeho stranách platí

$$1 < S_1O = O'S_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad SS_1 = x + r,$$

$$SO' = |x - r|,$$

neboť musíme rozeznávat obě možnosti: zda bod S padne dovnitř úsečky PO' nebo na její prodloužení za bod O' . Užitím Pythagorovy věty na tento trojúhelník dostaneme

$$(x + r)^2 - (x - r)^2 = \frac{4}{3}$$

a odtud

$$x = \frac{1}{3r};$$

tento výsledek platí i pro (1). Úvaha byla provedena za předpokladu, že hledaná koule existuje. Obrácením postupu zjistíme, že bod S na polopřímce OO' ve vzdálenosti x od bodu O jakožto střed a číslo $x = \frac{1}{3r}$ (pro $r \leq 1$) jakožto poloměr koule vyhovují naší úloze. Řešení je jediné.

6. V debne boli dopravované tri druhy plechoviek so súčiastkami. Plechovky mali váhy 0,8 kg, 1,5 kg, 2 kg a po rade objemy $1,5 \text{ dm}^3$, 4 dm^3 , 5 dm^3 . Celková váha zásielky (bez váhy debny) bola 3,3 q. Celkový objem plechoviek bol $0,78 \text{ m}^3$. Plechoviek každého druhu bolo aspoň 55 kusov. Z týchto údajov vypočítajte, koľko plechoviek každého druhu bolo v zásielke.

Riešenie. Počet najmenších plechoviek označme x ,

počet stredných plechoviek y , počet najväčších plechoviek z . Z podmienok úlohy dostaneme tieto dve rovnice

$$\begin{aligned} 0,8x + 1,5y + 2z &= 330 \text{ (kg)}, \\ 1,5x + 4y + 5z &= 780 \text{ (dm}^3\text{)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Z oboch rovníc (1) vylúčime z (prvú rovnicu vynásobíme číslom 5, druhú číslom -2 a sčítame). Dostaneme rovnicu

$$x - 0,5y = 90,$$

z ktorej

$$x = 90 + 0,5y. \quad (2)$$

Ak dosadíme z (2) do prvej rovnice (1), vyjde po úprave

$$z = 129 - 0,95y. \quad (3)$$

Čísla x , y , z sú podľa svojho významu prirodzené.

Pretože v (3) musí byť číslo $0,95y = \frac{19}{20}y$ celé, musí byť y deliteľné dvadsiatimi.

Zostavíme tabuľku pre $y = 60, 80, 100, 120, \dots$ (hodnoty $y = 20, 40$ sú neprípustné, pretože $y \geq 55$).

y	60	80	...
x	120	130	...
z	72	53	...

Údaje uvedené v druhom a treťom riadku boli vypočítané z rovníc (2), (3). Z rovnice (3) je zrejmé, že z s rastúcim y klesá. Pretože už pre $y = 80$ je $z = 53 < 55$, je pre každé $y > 80$ tiež $z < 55$.

Úloha má teda jediné riešenie:

$$x_1 = 120, y_1 = 60, z_1 = 72.$$

7. Úlohy II. kola kategórie C

1. V rovine pravouhlých súradníc x, y znázorníte množinu všetkých bodov $[x, y]$, ktorých súradnice vyhovujú nerovnostiam

$$x + |y| \leq 1, \quad (1)$$

$$y + |x| \leq 1. \quad (1')$$

Riešenie. Ak je dvojica x, y riešením nerovnosti (1), ako vyplýva z definície absolútnej hodnoty, je buď

$$y \geq 0, \quad y \leq 1 - x \quad (2a)$$

alebo

$$y \leq 0, \quad y \geq x - 1. \quad (2b)$$

Ak je dvojica x, y riešením nerovnosti (1'), je buď

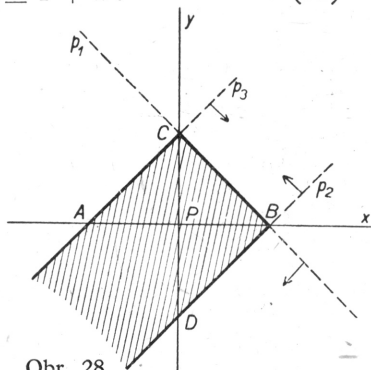
$$x \geq 0, \quad y \leq 1 - x \quad (3a)$$

alebo

$$x \leq 0, \quad y \leq 1 + x. \quad (3b)$$

Zostrojme v rovine pravouhlých súradníc x, y body $P \equiv [0, 0]$, $A \equiv [-1, 0]$, $B \equiv [1, 0]$, $C \equiv [0, 1]$, $D \equiv [0, -1]$ a priamky $p_1 \equiv BC$, $p_2 \equiv BD$, $p_3 \equiv AC$, kde $p_2 \parallel p_3$, $p_1 \perp p_2$, $p_1 \perp p_3$ (obr. 28). Priamka p_1 má rovnicu $y = 1 - x$, priamky p_2, p_3 majú po rade rovnice

$$y = x - 1, \quad y = 1 + x.$$



Obr. 28

V rovine pravouhlých súradníc x, y určujú

a) nerovnosti (2a) polroviny xC , p_1P , ktorých spoločnou časťou je uhol $\angle CBA$;

b) nerovnosti (2b) polroviny xD, p_2P , kterých spoločnou časťou je uhol $\sphericalangle ABD$.

Obrazy $[x, y]$ riešení x, y nerovnosti (1) ležia teda v uhle $\sphericalangle CBD$.

V rovine pravouhlých súradníc x, y určujú

a) nerovnosti (3a) polroviny yB, p_1P , kterých spoločnou časťou je uhol $\sphericalangle BCD$;

b) nerovnosti (3b) polroviny yA, p_3P , kterých spoločnou časťou je uhol $\sphericalangle DCA$.

Obrazy $[x, y]$ riešení x, y nerovnosti (1') ležia teda v uhle $\sphericalangle BCA$. Obrazy spoločných riešení daných nerovností vyplnia teda spoločnú časť pravých uhlov $\sphericalangle CBD, \sphericalangle BCA$. Je to tá časť pásu ohraničeného rovnobežkami p_2, p_3 , ktorá padne do polroviny p_1P (pozri vyšrafovanú časť obr. 28 včítane polpriamok CA, BD a úsečky BC).

2. V rovine je dána úsečka AB . V jednej z polorovin vyťatých priamkou AB uvažujme všetky pravouhlé trojuholníky ABC o preponě AB . Označme X patu kolmice vedené bodem B k ose uhlu $\sphericalangle BCA$.

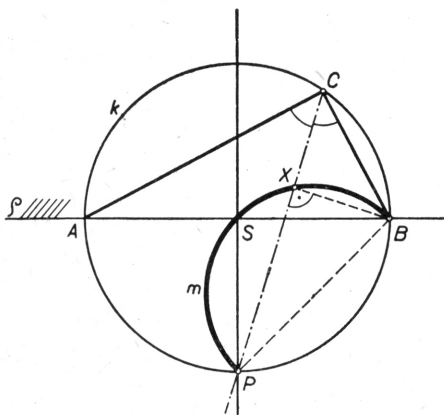
Dokažte, že všetky také osy uhľu $\sphericalangle BCA$ prechádzajú pevným bodem a vyšetrite množinu všetkých bodů X .

Riešení. Zvolenou polorovinu s hranicou AB označme ϱ ; bod C leží vnútri ϱ na Thaletovej kružnici $k \equiv \left(S; \frac{c}{2}\right)$, opísané nad úsečkou AB ako priemerom (obr. 29).

Osa úsečky AB protne kružnicu k v polrovine opačnej k ϱ v bode P . Menšie oblouky AP, BP sú čtvrtkružnice; preto platí pre príslušné obvodové uhly

$$\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCP.$$

Je tedy polopřímka CP osou úhlu $\sphericalangle ACB$. Pata X kolmice spuštěné z bodu B na polopřímku CP náleží polokružnici m sestrojené nad průměrem BP a obsahující střed S úsečky AB (nebo kružnice k).



Obr. 29

Označme m' kružnici sestrojenou nad průměrem BP . Je-li Y libovolný bod vnitřku oblouku m , označme dále C průsečík kružnice k s přímkou PY . Bod C náleží polo-rovině ρ ; protože tečna kružnice m' v bodě P prochází bodem A , přímka PY , která je sečnou kružnice m' , protne úsečku AB , a tudíž i kružnici k v bodě C polo-roviny ρ . Sestrojíme-li k trojúhelníku ABC patu X kolmice spuštěné z vrcholu B na osu úhlu $\sphericalangle ACB$, zjistíme, že je $X \equiv Y$.

Závěr. Hledanou množinou všech pat X je vnitřek oblouku m .

3. Je dán výraz

$$V = \frac{(x-a)^2}{ab-bc+ca-a^2} + \frac{(x-b)^2}{bc-ca+ab-b^2} + \frac{(x-c)^2}{ca-ab+bc-c^2}, \quad (1)$$

kde a, b, c jsou daná reálná čísla.

Dokažte, že výraz V , pokud má smysl, nabývá pro všechna reálná čísla x konstantní hodnoty. Zároveň udejte podmínky pro čísla a, b, c , kdy výraz V nemá smysl.

Řešení. Je

$$\begin{aligned} ab-bc+ca-a^2 &= b(a-c) - a(a-c) = \\ &= (b-a)(a-c) = (a-b)(c-a); \end{aligned}$$

podobně

$$\begin{aligned} bc-ca+ab-b^2 &= (b-c)(a-b); \\ ca-ab+bc-c^2 &= (c-a)(b-c). \end{aligned}$$

Výraz V ztrácí smysl, je-li některý jmenovatel v (1) roven nule, tj. platí-li některá z rovností:

$$a-b=0; \quad b-c=0, \quad c-a=0$$

neboli

$$a=b, \quad b=c, \quad c=a. \quad (2)$$

Upravíme výraz V za předpokladu, že neplatí žádný ze vztahů (2); společný jmenovatel n zlomků v (1) vzhledem k provedeným rozkladům je

$$n = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{n} [(x^2 - 2ax + a^2)(b - c) + (x^2 - 2bx + b^2)(c - a) + \\ &+ (x^2 - 2cx + c^2)(a - b)] = \frac{1}{n} \{x^2[b - c + c - a + a - b] - \\ &- 2x[a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)] + \\ &+ a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)\} = \\ &= \frac{1}{n} [a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)]. \end{aligned}$$

Ale

$$\begin{aligned} n &= -a^2(b - c) + ab(b - c) - bc(b - c) + ca(b - c) = \\ &= -a^2(b - c) - b^2(c - a) - c^2(a - b); \end{aligned}$$

je tedy

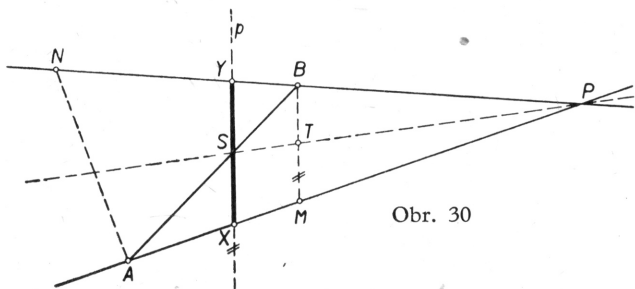
$$V = -n : n = -1.$$

Závěr. Výraz V má smysl právě tehdy, jestliže žádná dvě z čísel a, b, c si nejsou rovna; v tom případě je $V = -1$.

4. V rovině je dán čtyřúhelník $AMBN$.

Na polopřímkách AM, BN sestrojte po řadě body X, Y tak, aby bylo $XY \parallel BM$ a aby přímka AB půlila úsečku XY .

Řešení. Jestliže v daném čtyřúhelníku $AMBN$ je $AM \parallel BN$ (rovnoběžník nebo lichoběžník), potom podle známé věty střední příčka, která půlí strany AN, MB , vytíná na úsečce AB bod S ; jím vedeme přímku $p \parallel BM$ a její společné body s polopřímkami AM, BN po řadě označíme X, Y . Dále nechť přímky AM, BN mají společný bod P , který leží buď na prodloužení úsečky AM za bod M (viz obr. 30), nebo na prodloužení úsečky



BN za bod *N* (čtyřúhelník leží v úhlu $\sphericalangle MPB$ trojúhelníku *PMB*). Je-li *XY* hledaná úsečka, jejíž střed *S* padne na přímku *AB*, pak *XMBY* je lichoběžník se základnami *BM*, *XY*. Stejnolehlost o středu *P*, která převádí úsečku *XY* v úsečku *MB*, převádí střed *S* úsečky *XY* ve střed *T* úsečky *MB*. Odtud konstrukce:

Sestrojíme střed T úsečky MB . V úhlu $\angle MPB$ sestrojíme polopřímku PT , která prochází vnitřním bodem S úsečky AB ; bodem S vedeme přímku $p \parallel MB$ a průsečíky přímky p s přímkami AM , BN označíme po řadě X , Y . Potom je XY hledaná úsečka.

Důkaz, že S je středem úsečky XY , vyplývá ze stejno-
lehlosti, která převádí úsečku MB v úsečku XY . Přitom
bod S existuje, neboť polopřímka PT prochází vnitřkem
úhlu $\sphericalangle APB$, a protíná tudíž každou jeho příčku, tedy
i úsečku AB v jejím vnitřním bodě S .

Úloha má proto vždy jediné řešení.

8. Úlohy I. kola kategorie D

1. Dopravní síť města se skládá ze tří trolejbusových linek. Celková délka trolejového vedení je 13 km. Jednotlivé linky mají po řadě délky 5,7 km, 5,8 km a 6,9 km.

První a druhá linka mají společný úsek délky 1,8 km.
 Druhá a třetí linka mají společný úsek délky 2,3 km.
 Třetí a první linka mají společný úsek délky 2,7 km.

Rozhodněte, zda existuje úsek společný všem třem linkám; jestliže ano, pak vypočítejte jeho délku. Načrtněte, jak asi vypadá plánec tří tratí a vepište do něho délky jednotlivých úseků.

Řešení. (Délky udáváme v kilometrech.) Linky označme číslý 1, 2, 3. Celkovou délku trolejového vedení rozdělíme do tří skupin a vyjádříme ji jako součet délek vedení každé ze skupin. Označíme:

a) d_1, d_2, d_3 délky těch částí tratí č. 1, 2, 3, v nichž probíhají jednoduše (sólově);

b) d_{12}, d_{23}, d_{31} délky těch částí tratí, u nichž probíhají „dvojitě“ (nikoli však trojitě); tak např. d_{12} značí délku společné části tratí č. 1 a č. 2;

c) x délku části společné všem třem linkám.

Celková délka vedení 13 (km) je součtem právě zavedených čísel, tj.

$$(d_1 + d_2 + d_3) + (d_{12} + d_{23} + d_{31}) + x = 13. \quad (1)$$

Nyní se pokusíme součty $d_1 + d_2 + d_3, d_{12} + d_{23} + d_{31}$ vyjádřit pomocí údajů uvedených v textu úlohy a pomocí neznámého čísla x .

Platí např. $d_{12} + x = 1,8$, takže je $d_{12} = 1,8 - x$; dostaneme tak celkem

$$d_{12} = 1,8 - x; d_{23} = 2,3 - x; d_{31} = 2,7 - x. \quad (2)$$

Podle textu úlohy a podle významu čísla d_1 platí $d_1 = 5,7 - (d_{12} + d_{31} + x)$; podobně najdeme d_2, d_3 . Máme tak

$$\begin{aligned} d_1 &= 5,7 - (d_{12} + d_{31} + x); d_2 = 5,8 - (d_{12} + d_{23} + x); \\ d_3 &= 6,9 - (d_{31} + d_{23} + x). \end{aligned} \quad (3)$$

Pomocí (2) platí

$$\begin{aligned} d_{12} + d_{23} + d_{31} &= (1,8 + 2,3 + 2,7) - 3x = \\ &= 6,8 - 3x. \end{aligned} \quad (4)$$

Pomocí vztahů (3) a (4) najdeme

$$\begin{aligned} &d_1 + d_2 + d_3 = \\ &= (5,7 + 5,8 + 6,9) - 2(d_{12} + d_{23} + d_{31}) - 3x = \\ &= 18,4 - 2(6,8 - 3x) - 3x = 3x + 4,8. \end{aligned} \quad (5)$$

Nyní výsledky (4), (5) dosadíme do (1); postupně dostaneme

$$\begin{aligned} (3x + 4,8) + (6,8 - 3x) + x &= 13, \\ x + 11,6 &= 13, \\ x &= 1,4. \end{aligned} \quad (6)$$

Tím jsme našli délku společného úseku všem třem tratím.

Provedeme zkoušku: Pomocí (2) a (6) dostaneme

$$d_{12} = 0,4; \quad d_{23} = 0,9; \quad d_{31} = 1,3. \quad (7)$$

Pomocí (7) a (3) najdeme

$$d_1 = 2,6; \quad d_2 = 3,1; \quad d_3 = 3,3. \quad (8)$$

Celkové délky tratí č. 1, č. 2, č. 3 po řadě jsou:

$$\begin{aligned} d_1 + d_{12} + d_{31} + x &= 2,6 + 0,4 + 1,3 + 1,4 = 5,7; \\ d_2 + d_{23} + d_{12} + x &= 3,1 + 0,9 + 0,4 + 1,4 = 5,8; \\ d_3 + d_{31} + d_{23} + x &= 3,3 + 1,3 + 0,9 + 1,4 = 6,9. \end{aligned}$$

Společné úseky mají délky:

a) pro tratě č. 1 a č. 2 je to

$$d_{12} + x = 0,4 + 1,4 = 1,8;$$

b) pro tratě č. 2 a č. 3 je to

$$d_{23} + x = 0,9 + 1,4 = 2,3;$$

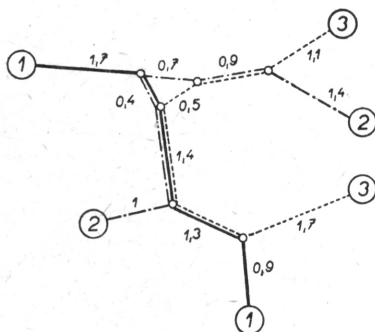
c) pro tratě č. 3 a č. 1 je to

$$d_{31} + x = 1,3 + 1,4 = 2,7.$$

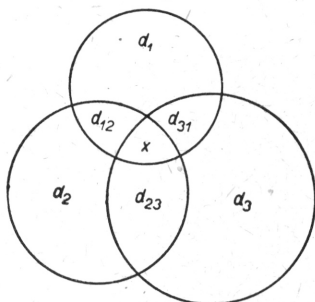
Přitom skutečně platí

$$(d_1 + d_2 + d_3) + (d_{12} + d_{23} + d_{31}) + x = 13,$$

jak se snadno pomocí výsledků (8), (7), (6) přesvědčíme. Připojený plánek je jedna z mnoha možných situací (obr. 31).



Obr. 31



Obr. 32

Poznámka. Zobrazíme-li délky tratí kruhy (obr. 32), pak z obrázku snadno dospějeme k rovnici (1), jakož i ke vztahům (2), (3).

2. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a vně této kružnice je dán bod A , z něhož je ke kružnici k sestrojena tečna AT s dotykovým bodem T .

Uvnitř úsečky AT sestrojte takový bod X , aby platilo $AX = XY$, přičemž Y je průsečík úsečky SX s kružnicí k .

Řešení (obr. 33). Je-li Y bod, který je řešením úlohy, je trojúhelník AYX rovnoramenný s rameny $AX = XY$.

3. Rozhodnite, ktoré z oboch čísel

$$a = 639^9, b = 638^9 + 638^8$$

je väčšie. Svoje rozhodnutie odôvodnite.

Riešenie. Máme porovnať čísla

$$a = 639^9, b = 638^9 + 638^8. \quad (1)$$

Pokúsime sa napísať číslo a v tvare súčtu dvoch mocnín, ktoré sa dajú porovnať s oboma číslami vyskytujúcimi sa vo vyjadrení čísla b . Platí

$$a = 639 \cdot 639^8 = (638 + 1) \cdot 639^8 = 638 \cdot 639^8 + 639^8. \quad (2)$$

Je známe, že mocnina s väčším kladným mocnencom je väčšia; je preto $639^8 > 638^8$. Ak teda v súčte na pravej strane (2) nahradíme obe mocniny 639^8 mocninami 638^8 , dostaneme číslo menšie než a . Tak postupne dostaneme

$$a > 638 \cdot 638^8 + 638^8 = 638^9 + 638^8 = b.$$

Je teda $a > b$, čím je úloha vyriešená.

Poznámka. Platnosť vzťahu $639^8 > 638^8$ medzi kladnými číslami overíme napr. tak, keď dokážeme, že zlomok $\frac{639^8}{638^8}$ je väčší než jedna.

Platí:

$$\frac{639^8}{638^8} = \left(\frac{639}{638}\right)^8 = \left(\frac{638 + 1}{638}\right)^8 = \left(1 + \frac{1}{638}\right)^8.$$

Číslo v zátvorke je väčšie než jedna. No, súčin dvoch čísel $(1 + m)(1 + n)$, kde m, n sú kladné čísla, sa rovná číslu $(1 + m + n + mn)$, ktoré je väčšie než jedna. Preto aj ôsma mocnina čísla väčšieho než 1 je väčšia než 1. Tým je dôkaz prevedený.

K dôkazu možno však použiť aj vzorec pre rozdiel druhých mocnín: Položme $x = 639$, $y = 638$. Máme

dokázať, že je $x^8 - y^8 > 0$. Platí:

$$\begin{aligned} r &= x^8 - y^8 = (x^4)^2 - (y^4)^2 = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4) = \\ &= [(x^2)^2 - (y^2)^2] \cdot (x^4 + y^4) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \cdot \\ &\cdot (x^4 + y^4) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4). \end{aligned}$$

Všetky 4 činitele posledného súčinu sú kladné čísla, preto je $r > 0$, čo sme mali dokázať.

4. Druhú mocninu prirodzeného čísla N delíme číslom 12. Zistite, aký zvyšok (t. j. niektoré z celých čísel 0, 1, 2, ..., 11) môže pri tomto delení vyjsť. Sú len štyri možnosti.

(Pokyn: Každé prirodzené číslo N možno písať v tvare $N = 12k + z$, kde k je celé nezáporné číslo a o celom čísle z platí $0 \leq z < 12$.)

Riešenie. Ku každému prirodzenému číslu N možno nájsť jedinú dvojicu nezáporných celých čísel k, z , kde

$$0 \leq z < 12,$$

takých, že platí $N = 12k + z$ (nájdú sa napr. delením čísla N číslom 12). Je teda

$$\begin{aligned} N^2 &= (12k + z)^2 = 144k^2 + 24kz + z^2 = 12(12k^2 + \\ &\quad + 2kz) + z^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Číslo z^2 možno taktiež jediným spôsobom napísať v tvare $z^2 = 12m + z'$, kde m, z' sú celé nezáporné čísla a platí $0 \leq z' < 12$. Po dosadení do (1) teda dostaneme

$$N^2 = 12(12k^2 + 2kz + m) + z'.$$

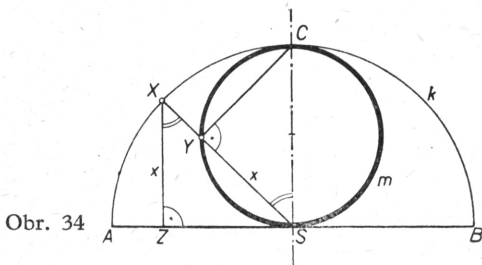
Tento výsledok hovorí, že zvyšok z' pri delení čísla N^2 číslom 12 je ten istý ako zvyšok pri delení čísla z^2 číslom 12. Zvyšky, ktoré dostaneme pri delení čísla z^2 číslom 12 zostavme do tabuľky:

číslo z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
číslo z^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
zvyšok pri delení čísla z^2 číslom 12	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

Z tabuľky je zrejmé, že zvyšok pri delení čísla N^2 číslom 12 je práve jedno z čísel 0, 1, 4, 9 a žiadne iné. Sú teda skutočne len 4 možnosti, ako sa tvrdí v texte úlohy.

5. Je daná polkružnica k so stredom S a s priemerom AB . Označme x vzdialenosť ľubovoľného bodu X polkružnice k od priamky AB . Na polpriamke SX zostrojme bod Y tak, aby $SY = x$.

Vyšetríte geometrické miesto bodov Y .



Obr. 34

Riešenie (obr. 34). Označme $k \equiv (S; r = 1)$ danú polkružnicu s priemerom AB a ďalej C bod tejto polkružnice, ktorý má rovnaké vzdialenosti od bodov A, B , takže je $SC \perp AB$. Zvoľme niekoľko polôh bodu X a zostrojme príslušné body Y . Pri tom zistíme, že ak je $X \equiv A$, je $Y \equiv S$ a ak je $X \equiv C$, je tiež $Y \equiv C$. Ľahko dospejeme k domnienke, že body Y padnú na kružnicu m zostrojenú nad úsečkou SC ako priemerom.

Najskôr dokážme, že každý bod Y leží na kružnici m :

[1] O bodoch $X \equiv A$, $X \equiv B$ a $X \equiv C$ to zrejme platí.

[2] Nech je X bod polkružnice k rôznej od bodov A , B , C . Potom vznikne pravouhlý trojuholník SXZ , kde Z je päta kolmice vedenej bodom X ku priamke AB , takže je $XZ \parallel SC$. Trojuholníky SXZ , CSY sú však potom zhodné podľa vety *sus*, pretože sa zhodujú v stranách $SX = CS = 1$, $XZ = SY = x$ a v uhloch $\sphericalangle SXZ = \sphericalangle CSY$ (uhly striedavé medzi rovnobežkami XZ , SC). Je teda $\sphericalangle SYC = \sphericalangle XZS = 90^\circ$ a preto bod Y leží na Thaletovej kružnici m opísanej nad úsečkou SC ako priemerom.

Obrátene, nech je Y bod kružnice m (môžeme zrejme predpokladať, že Y je rôznej od bodov S , C , pre ktoré je vec samozrejma). Označme X priesečník polpriamky SY s polkružnicou k a Z pätu kolmice vedenej bodom X ku priamke AB . Potom sú trojuholníky SCY a XSZ zhodné podľa vety *usu*, pretože je $SC = XS = 1$, $\sphericalangle CSY = \sphericalangle SXZ$ (uhly striedavé medzi rovnobežkami $SC \parallel XZ$), $90^\circ = \sphericalangle CYS = \sphericalangle SZX$ a teda aj $\sphericalangle SCY = \sphericalangle XSZ$. Je teda skutočne $YS = XZ = x$.

Záver. Hľadané geometrické miesto bodov Y je kružnica m , zostrojená nad úsečkou SC ako priemerom, kde C je spoločný bod polkružnice k a osi úsečky AB .

6. Najdte všechna celá čísla p , pro která je výraz

$$V = \frac{1}{2} \left[\frac{p^2 + p + 1}{p^2 - 2p + 1} - \frac{p^3 + 1}{(p - 1)^3} \right] \cdot (p^2 - 2p + 1) + \frac{p - 3}{p + 1} - \frac{p^2 - 3p}{p^2 - 1} \quad (1)$$

roven celému číslu.

Řešení. Protože je $p^2 - 2p + 1 = (p - 1)^2$, dostaneme po dosazení do lomené závorky, že první člen výrazu V je

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \left[p^2 + p + 1 - \frac{p^3 + 1}{p - 1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(p - 1)(p^2 + p + 1) - (p^3 + 1)}{p - 1} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(p^3 - 1) - (p^3 + 1)}{p - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{p - 1} = \frac{-1}{p - 1}. \end{aligned}$$

Pak je

$$\begin{aligned} V &= \frac{-1}{p - 1} + \frac{p - 3}{p + 1} - \frac{p^2 - 3p}{p^2 - 1} = \\ &= \frac{-(p + 1) + (p - 3)(p - 1) - (p^2 - 3p)}{(p - 1)(p + 1)} = \\ &= \frac{-p - 1 + p^2 - 4p + 3 - p^2 + 3p}{(p - 1)(p + 1)} = \\ &= \frac{-2p + 2}{(p - 1)(p + 1)} = \frac{-2(p - 1)}{(p - 1)(p + 1)} = \frac{-2}{p + 1}. \quad (2) \end{aligned}$$

Abychom tedy dostali celé číslo, musí o čísle $p + 1$ platit některý ze vztahů:

$p + 1 = -2$; $p + 1 = -1$; $p + 1 = 1$; $p + 1 = 2$,
neboť číslo -2 lze dělit právě čísly: -2 ; -1 ; 1 ; 2 .
Odtud dostáváme tyto možnosti:

$$p = -3; \quad p = -2; \quad p = 0; \quad p = 1.$$

Z těchto možností vyloučíme $p = 1$, neboť je $p - 1 = 0$ a pak některé zlomky ve výrazu (1) mají jmenovatele rovné nule. Hledaná čísla p tedy jsou

$$-3; -2; 0. \quad (3)$$

Provedeme ještě zkoušky dosazením těchto hodnot do (1) a (2), zda skutečně vyhovují požadavkům úlohy:

[1] Pro $p = -3$ dostáváme

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \left[\frac{9-3+1}{(-4)^2} - \frac{-27+1}{(-4)^3} \right] (-4)^2 + \frac{-6}{-2} - \frac{9+9}{9-1} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{7}{16} - \frac{26}{64} \right] \cdot 16 + \frac{6}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{2} \left[7 - \frac{13}{2} \right] + \\ &+ \frac{6}{2} - \frac{9}{4} = \frac{14-13+12-9}{4} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

[2] Pro $p = -2$ dostáváme

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \left[\frac{4-2+1}{(-3)^2} - \frac{-8+1}{(-3)^3} \right] (-3)^2 + \frac{-5}{-1} - \frac{4+6}{4-1} = \\ &= \frac{1}{2} \left[3 - \frac{7}{3} \right] + 5 - \frac{10}{3} = \frac{9-7+30-20}{6} = 2. \end{aligned}$$

[3] Pro $p = 0$ dostáváme

$$V = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{-1} \right] + \frac{-3}{1} - \frac{0}{-1} = \frac{1}{2} \cdot 2 - 3 = -2.$$

Tato dosazení souhlasí s dosazeními do výrazu (2). Čísla (3) jsou tedy všechna řešení úlohy.

9. Úlohy II. kola kategórie D

1. Otec aj matka sa zúčastňujú na závodnom sporení. Každý z nich má svoju vkladnú knižku. Pri výhernom zlosovaní vytiahli obe knižky. Otec na svoju knižku vyhral 20% svojho vkladu a matka vyhrala 100% svojho vkladu. Obaja mali potom spolu aj s vkladmi 10 040 Kčs. Ak by však bola výhra na otcovu knižku 100% a na matkinu 20 %, mali by po výhre celkom 9 480 Kčs.

Vypočítajte pôvodný vklad aj výhru každého z rodičov.

Riešenie. Čiastky uvádzame v korunách. Otec mal po výhre celkom x , matka $10\,040 - x$. Pôvodný otcov vklad bol $\frac{100x}{120} = \frac{5}{6}x$, matkin $\frac{10\,040 - x}{2}$. Ak by situácia, pokiaľ sa jedná o percento výhry, bola opačná, bol by otcov vklad po výhre $\frac{5x}{6} \cdot 2 = \frac{5}{3}x$ a matkin $\frac{10\,040 - x}{2} \cdot \frac{120}{100} = \frac{10\,040 - x}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5}(10\,040 - x)$. Súčet týchto čiastok by bol

$$\frac{5}{3}x + \frac{3}{5}(10\,040 - x) = 9\,480.$$

Ak poslednú rovnicu vynásobíme číslom 15, postupne dostaneme

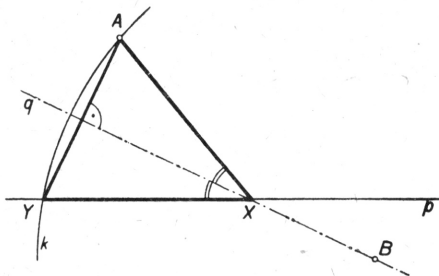
$$25x + 9(10\,040 - x) = 9\,480 \cdot 15, \\ x = 3\,240.$$

Ďalej je $10\,040 - 3\,240 = 6\,800$. Po výhre má otec celkom 3 240, matka 6 800. Pôvodne mal otec $\frac{3\,240 \cdot 5}{9} = 1\,800$ a matka $6\,800 \cdot \frac{1}{2} = 3\,400$. Výhry teda sú 540 a 3 400.

Odpoveď. Pôvodný vklad otca bol 2 700 Kčs, matky 3 400 Kčs. Otec vyhral 540 Kčs, matka 3 400 Kčs.

2. V rovine je daná priamka p a dva body A, B ktoré ležia vo vnútri opačných polrovín vyťatých priamkou p .

Na priamke p zostrojte body X, Y tak, aby AXY bol rovnoramenný trojuholník s ramenami XA, XY a aby priamka BX rozpoloovala uhol $\sphericalangle AXY$.



Obr. 35

Riešenie (obr. 35). Zrejme je (podľa podmienky úlohy) priamka BX osou základne AY . Preto platí

$$BA = BY.$$

Bod Y teda zostrojíme ako spoločný bod kružnice $k \equiv (B; BA)$ a priamky p . Kružnica má s priamkou vždy spoločné dva rôzne body Y, Y_1 , pretože priamka p oddeľuje body A, B . Na obr. 35 je jeden z týchto spoločných bodov označený Y .

Bod X zostrojíme ako priesečník osy q úsečky AY s priamkou p . Pretože X leží na osi q , je $AX = XY$ a trojuholník AXY je teda skutočne rovnoramenný so základňou AY . Úloha má vždy dve riešenia.

Poznámka. Na obr. 35 je naznačené len jedno z oboch riešení.

3. Součet $7\,251^5 + 6\,159^7$ je dělitelný číslem 90. Dokažte.

Řešení. I. Nejprve dokážeme pomocnou větu *V*: Jsou-li a, b dvě přirozená čísla, jejichž dekadický zápis končí ciframi m, n , potom dekadický zápis součinu ab končí touž cifrou jako dekadický zápis součinu mn . Důkaz provedeme takto:

Čísla a, b lze s jediným výsledkem napsat ve tvaru

$$a = 10A + m, \quad b = 10B + n,$$

kde A, B jsou celá nezáporná čísla a m, n jsou některá z čísel $0, 1, 2, \dots, 9$. Je tedy $ab = (10A + m)(10B + n) = 10(10AB + An + Bm) + mn$. V tomto výsledku je první člen dělitelný deseti, a proto neovlivňuje jednotky dekadického zápisu čísla ab ; čísla ab, mn mají tedy v dekadických zápisech na místech jednotek tytéž cifry. Tím je důkaz proveden.

II. Máme dokázat, že číslo

$$n = 7\,251^5 + 6\,159^7 \tag{1}$$

je dělitelné číslem 90. Je $90 = 9 \cdot 10$, kde 9, 10 jsou nesoudělná přirozená čísla; číslo n je dělitelné devadesáti, jestliže je dělitelné čísly 10 a 9.

Opakováním užitím věty *V* dostáváme, že dekadický zápis čísla $7\,251^5$ končí cifrou 1. Z téže věty plyne, že mocniny první, druhá, třetí atd. až sedmá čísla $6\,159$ končí po řadě ciframi 9, 1, 9, ..., 9; stačí totiž uvažovat čísla $9^1 = 9, 9^2 = 81, 9^3 = 81 \cdot 9, \dots; 9^7 = (\dots 1) \cdot 9 = (\dots 9)$ (sudé mocniny končí jedničkou, liché devít-

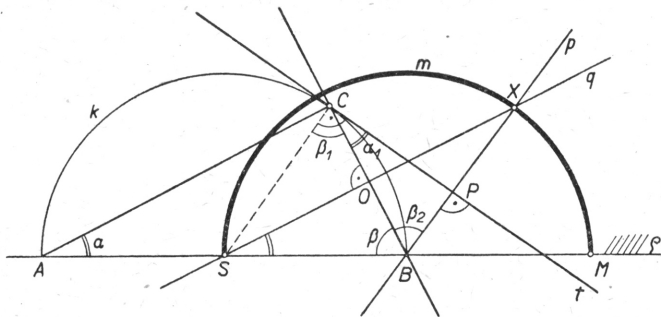
kou). Proto číslo n má na místě jednotek cifru jako součet $1 + 9 = 10$, tedy nulu; je proto n dělitelné číslem 10.

Každé z čísel 7 251, 6 159 je dělitelné třemi; proto mocniny těchto čísel od druhé počínajíc jsou dělitelné devíti a tím i jejich součet. Např. platí $7\,251^5 = (3 \cdot 2\,417)^5 = 3^5 \cdot 2\,417^5$, $\frac{3^5 \cdot 2\,417^5}{3^2} = 3^3 \cdot 2\,417^5$.

Tím je důkaz proveden.

4. Je dána polokružnice o průměru AB a středu S . Na polokružnici zvolme bod C různý od bodů A , B a sestrojme v něm k polokružnici tečnu t . Bodem B vedme kolmici p k přímce t a bodem S kolmici q k přímce BC . Označme X průsečík přímek p , q .

Vyšetřete množinu všech bodů X , jestliže bod C probíhá danou polokružnicí.



Obr. 36

Řešení (viz označení z obr. 36). Označme ϱ polovinu (s hranicí AB), ve které leží daná polokružnice k . Podle textu úlohy je $p \perp t$, $q \perp BC$; paty těchto kolmic

označme po řadě P, O, O středu S polokružnice k platí

$$SA = SB = SC = r. \quad (1)$$

Označme α, β úhly při vrcholech A, B pravoúhlého trojúhelníka ABC (bod C leží totiž na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou AB jako průměrem). Proto o úhlech vyznačených v obr. 36 platí

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

(ostré úhly v pravoúhlém trojúhelníku ABC),

$$\beta_1 = \beta$$

(trojúhelník SBC podle (1) je rovnoramenný se základnou BC),

$$\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ, \text{ tj. } \alpha_1 = \alpha \text{ (je } SC \perp t),$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 90^\circ, \text{ tj. } \beta_2 = \beta$$

(součet ostrých úhlů v trojúhelníku BCP , kde $\sphericalangle P = 90^\circ$). Přímka BC tedy pólí úhel $\sphericalangle SBX$, přičemž je $BC \perp q$; je tedy BSX rovnoramenný trojúhelník s rameny BS, BX a vzhledem k (1) platí $r = BS = BX$. Je tedy $\sphericalangle SBX$ dutý a bod X padne dovnitř poloroviny ϱ na polokružnici m , která má střed B a průměr SM . Trojúhelníky SBC, BSX mají kolmé základny BC, SX , které se navzájem pólí; proto je $SBXC$ rovnostranný rovnoběžník (čtverec nebo kosočtverec) a polokružnice k, m vzniknou jedna z druhé posunutím o délku SB ve směru SB (nebo opačném).

Obráceně, je-li X bod uvnitř oblouku SM (polokružnice m), sestrojíme rovnostranný rovnoběžník $SBXC$; je $SC = SB$, tj. bod C padne dovnitř oblouku AB (polokružnice k) a najdeme-li k bodu C příslušné přímky p, q , je jejich průsečíkem zvolený bod X . Odtud závěr:

Množinou všech bodů X jsou body polokružnice

$m \equiv (B; \frac{1}{2}AB)$ ležící v polorovině ϱ , a to bez obou jejích krajních bodů S, M .

V. Sedmá mezinárodní matematická olympiáda v Berlíně ve dnech 3.—12. července 1965

1. Průběh olympiády

VII. MMO měla ze všech dosavadních mezinárodních olympiád největší počet účastnických zemí. Zúčastnilo se jí deset států: Bulharsko, Československo, Finsko, Jugoslávie, Maďarsko, Mongolsko, Německá demokratická republika, Polsko, Rumunsko a Sovětský svaz. Pozoruhodné je, že se letos olympiády účastnilo Finsko jako první stát, který nepatří k socialistickému táboru. Některé další pozvané státy (Čína, Kuba) se nedostavily, ale lze očekávat, že v příštích letech bude počet účastnických zemí vzrůstat a že soutěž nezůstane omezena jen na socialistické státy; tím se ovšem bude zvyšovat její význam pro spolupráci národů na poli školské matematiky i její politická váha. Soutěž byla organizována v podstatě podle statutu vypracovaného pro IV. MMO v roce 1962 v Československu. Každý účastnický stát vyslal osmičlenné družstvo pod vedením delegáta a jeho zástupce (pedagogického průvodce).

Soutěž řídila mezinárodní komise (Jury); jejím předsedou byl *prof. dr. Engel* z university v Roztokách (Rostock), členy s hlasovacím právem všichni vedoucí delegací.

Program soutěže byl velmi pečlivě připraven do nej-

menších podrobností; byl skutečně bohatý a časově i pracovní velmi náročný. VII. MMO se konala za velké morální i finanční podpory strany a vlády NDR a těšila se velké pozornosti, zejména tisku; deset časopisů — mezi nimi i Neues Deutschland — věnovalo na svých stránkách mnoho místa reportážím a zprávám.

Vedoucí delegací se sjeli dne 1. července t. r. v Berlíně. Večer bylo krátké přijetí všech členů prof. Engelem v hotelu Newa. Dne 2. července zasedala Jury po celý den v Domě odborů; při zahájení uctila památku zesnulého čs. pracovníka R. Zelinky. Odpoledne se zabývala předběžně hodnocením navržených soutěžních úloh. Večer byli delegáti přijati v hotelu Moskva státním sekretářem *Wernerem Lorenzem* za účasti dalších vládních a stranických činitelů. Celý den 3. července byl věnován výběru úloh pro soutěž. Po dlouhé diskusi bylo vybráno šest úloh (tři pro první soutěžní práci, tři pro druhou). Během 3. července dorazila do Berlína všechna družstva pod vedením pedagogických průvodců a byla ubytována v internátu Jugendhochschule W. Piecka v Bogensee, v pěkné lesnaté a jezernaté krajině, vzdálené asi 30 km od středu Berlína.

V neděli 4. července se dostavili na zasedání Jury i pedagogičtí průvodci; po krátké schůzi se účastníci rozešli, aby rozmnožili texty soutěžních úloh v národních jazycích. Překlady textů z německého originálu připravili vedoucí delegací již předchozí večer. Odpoledne odjeli delegáti se svými zástupci do Postupimi. Prohlédli si zámek Sanssouci, park i další pamětihodnosti; večer bylo uspořádáno v restauraci Zur Stadt Potsdam přátelské setkání s učiteli postupimské Vysoké školy pedagogické. Žáci věnovali neděli rekreaci a vyjíždce na Weisse Flotte po Sprévě.

Ráno 5. července byla v Bogensee v sále Jugendhochschule zahájena první část soutěže. Promluvil krátce prof. Engel, potom zástupce strany přečetl pozdravný dopis s. *Waltera Ulbrichta*, adresovaný účastníkům VII. MMO, a pak začali žáci pracovat na prvních třech úlohách (viz část II).

V úterý 6. července soutěž pokračovala řešením druhé trojice úloh; současně delegáti a jejich zástupci korigovali první trojici soutěžních úloh.

Dne 7. července se za spolupráce pedagogických průvodců dokončovalo korigování úloh a koordinace. Opravování úloh i práce Jury filmovala televize. Na zasedání Jury byly stanoveny podle počtu bodů hranice pro udělení 1., 2. a 3. ceny, pak bylo rozhodnuto jednomyslně o udělení cen. Mimo to byla projednána udělení zvláštních pochval za mimořádně obratná řešení nebo za více různých způsobů řešení a zobecnění. Žáci věnovali celou středu 7. července návštěvě Postupimi (Potsdamu).

Dny 8. až 11. července byly vyplněny okružní cestou po NDR, kterou v autobusech absolvovaly všechny delegace se svými vedoucími i jejich zástupci. Po celou dobu doprovázeli delegace *prof. W. Engel* a neúnavní organizátoři: hlavní sekretář Oberstudienrat *H. Titze* a *F. Weiss* z Technické stanice. Většina cesty se projela po výborných německých dálnicích. 8. července byla polední zastávka v Naumburku (s prohlídkou dómu), večer dorazila výprava přes Jenu a Weimar (Výmar) do Ettersbergu (Buchenwaldu), kde byla ubytována v tamějším hotelu. Dopoledne 9. července byla prohlídka bývalého koncentračního tábora a po ní následoval pietní akt; vedoucí delegací v průvodu všech účastníků VII. MMO položili kytice k pylonům národů; za znění buchenwaldského zvonu byl položen věnec k památníku obětí nacismu a

delegáti podepsali společný zápis v pamětní knize. Odpoledne následovala prohlídka Výmaru, zejména Schillerova a Goethova domu. Večer se účastnili delegáti recepce, kterou pro ně uspořádal rektor Vysoké školy architektury a stavitelství ve Výmaru *dr. Motzke*.

Dne 10. července odjeli účastníci VII. MMO přes Karl-Marx-Stadt do Drážďan. Ihned po příjezdu následovala prohlídka galerie a večere v Italienisches Dörfchen. Večer byl volný s možností navštívit slavnost Dne tisku, která se právě v městě konala. Ráno 11. července byla na programu prohlídka Zwingru, po ní volný čas k prohlídce města. Snídaně i oběd byly toho dne podávány v příjemném prostředí Luisenhofu s krásnou vyhlídkou na město. Odpoledne asi v 16 hodin byla nastoupena zpáteční cesta do Berlína.

V pondělí dne 12. července v 10 hodin byla ve Sjezdové dvoraně na Alexandrově náměstí v Berlíně uspořádána závěrečná slavnost s udělením cen a pochval. Promluvili *profesor Engel*, státní sekretář *Werner Lorenz* a nakonec *prof. Mateev*, který oficiálně pozval jménem bulharského ministerstva školství všechny účastníky na VIII. MMO do Sofie. Pak následovalo udělení cen a pochval. Za záky poděkovala rumunská účastnice *Liliana Bucurová*. Význam slavnosti byl zvýšen i účastí četných vynikajících hostů, např. rektora Humboldtovy university *prof. Schrödra*, mongolského vyslance aj. Slavnost byla zahájena i ukončena komorní hudbou. Po ukončení následovaly interview rozhlasu a televize s některými účastníky. Večer téhož dne uspořádal časopis *Junge Welt* přátelskou besedu ve Sjezdové dvoraně, která byla dovršením pozornosti, kterou věnoval tisk VII. MMO. Každá z delegací měla svého hosta z řad domácích prominentů — hostem čs. delegace byl rektor Humboldtovy university profesor

Schröder. Večer byl doplněn řadou programových čísel (např. zpěvním číslem mongolské delegace, předvedením finského lidového tance aj.) a vyzněl v opravdové přátelské sbližení všech účastníků soutěže.

Během 13. července se rozjížděly delegace do svých domovů.

Tento popis průběhu alespoň naznačuje nesmírnou práci, kterou němečtí organizátoři věnovali VII. MMO. Účastníci VII. MMO měli příležitost zhlédnout velkolepou výstavbu v Berlíně, Drážďanech, Karl-Marx-Stadtu a jinde, měli možnost poznat jedinečné historické památky; ve Weimarů a v Buchenwaldu měli před očima ohromující kontrast mezi kolébkou německého humanismu a nedalekým památníkem připomínajícím hrůzy fašismu. Tyto zážitky zapůsobily hluboce na všechny účastníky a zanechaly jistě, zejména v myslích žáků, nesmazatelné dojmy.

2. Soutěžní úlohy VII. MMO

Soutěžní úlohy byly rozděleny do dvou trojic: 5. července byly zadány úlohy 1 až 3, 6. července úlohy 4 až 6. Na každou klauzurní práci byly stanoveny 4 hodiny čistého času. Následují texty úloh; v závorce je uveden stát, který úlohu navrhl, a maximální počet bodů, které mohl řešitel úlohy získat.

1. Určete všechna čísla x z intervalu $0 \leq x \leq 2\pi$, která vyhovují nerovností

$$2 \cos x \leq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leq \sqrt{2}.$$

(Jugoslávie, 4 body)

2. Je dána soustava rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

s neznámými x_1, x_2, x_3 . Její koeficienty splňují tyto podmínky:

- a) a_{11}, a_{22}, a_{33} jsou kladná čísla;
- b) všechny ostatní koeficienty jsou záporná čísla;
- c) v každé z daných rovnic je součet všech tří koeficientů kladné číslo.

Dokažte, že daná soustava má jediné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(Polsko, 6 bodů)

3. Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany AB, CD mají po řadě délky a, b . Vzdálenost mimoběžek AB, CD je d , jejich odchylka je ω . Čtyřstěn $ABCD$ je rozdělen ve dvě tělesa rovinou ε rovnoběžnou s přímkou AB i s přímkou CD ; poměr vzdáleností roviny ε od přímky AB a od přímky CD je roven k . Vypočtěte poměr objemů obou vzniklých těles.

(Československo, 8 bodů)

4. Vypočtěte všechny čtveřice reálných čísel x_1, x_2, x_3, x_4 , pro něž platí, že součet každého z těchto čísel se součinem tří zbývajících je roven dvěma.

(SSSR, 6 bodů)

5. Je dán trojúhelník OAB , jehož úhel $\sphericalangle AOB$ je ostrý. Bodem $M \neq O$ trojúhelníku OAB jsou vedeny kolmice k přímkám OA, OB a jejich paty jsou označeny po řadě P, Q ; průsečík výšek trojúhelníku OPQ je označen H . Zjistěte, jaký útvar je geometrickým místem bodů H , probíhá-li bod M

- a) stranu AB ,
 b) vnitřek trojúhelníku OAB .

(*Rumunsko*, 8 bodů)

6. V rovině je dána množina n bodů ($n \geq 3$), každé dva z nich jsou spojeny úsečkou. Označme d délku nejdelší z těchto úseček. *Průměrem dané množiny* nazveme každou z těchto úseček, která má délku d . Dokažte, že počet průměrů dané množiny je roven nejvýše n .

(*Polsko*, 9 bodů)

3. Řešení soutěžních úloh

Úloha 1. Řešme nejprve nerovnost

$$|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq \sqrt{2}. \quad (1)$$

Jejím umocněním a úpravou dostaneme

$$1 - |\cos 2x| \leq 1. \quad (2)$$

Nerovnost (2) je splněna pro všechna x z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Protože lze obrácením postupu přejít od nerovnosti (2) k nerovnosti (1), jsou řešením nerovnosti (1) všechna čísla x z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Řešme za druhé nerovnost

$$2 \cos x \leq |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}|. \quad (3)$$

Je-li $\cos x \leq 0$, tj.

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \quad (4)$$

je nerovnost (3) splněna. Je-li $\cos x \geq 0$, umocníme nerovnost (3) dvěma a upravíme; vyjde

$$2 \cos^2 x \leq 1 - |\cos 2x|,$$

neboli

$$|\cos 2x| \leq 1 - 2 \cos^2 x = -\cos 2x. \quad (5)$$

Nerovnost (5) je splněna pro všechna x z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, pro něž platí $\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2}$ nebo $\frac{5\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{7\pi}{2}$, tj. pro všechna x , pro něž platí

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}. \quad (6)$$

Protože lze postup obrátit, jsou všechna x vyhovující nerovnostem (6), řešením nerovnosti (3).

Všechna řešení dané nerovnosti dostaneme spojením vztahů (4), (6); jsou to tedy všechna x z intervalu

$$\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\rangle.$$

Úloha 2. Buď platí pro aspoň dvě neznámé nerovnosti

$$x_i \geq 0, \quad x_j \geq 0, \quad (7)$$

nebo znásobíme všechny tři dané rovnice číslem -1 a dosáhneme toho, že pro neznámé $-x_1, -x_2, -x_3$ platí vztahy (7).

Vhodnou výměnou neznámých a současnou výměnou rovnic dosáhneme toho, že je

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (8)$$

a že koeficienty takto upravené soustavy splňují podmínky a) až b). Z poslední rovnice dané soustavy pak plyne

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq 0,$$

tj.

$$a_{33}x_3 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Je tedy $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$. Budiž např. x_1 největší z čísel x_1, x_2, x_3 , tj.

$$x_1 \geq x_2 \geq 0, \quad x_1 \geq x_3 \geq 0. \quad (9)$$

Znásobíme nerovnosti (9) po řadě zápornými čísly a_{12} , a_{13} ; vyjde

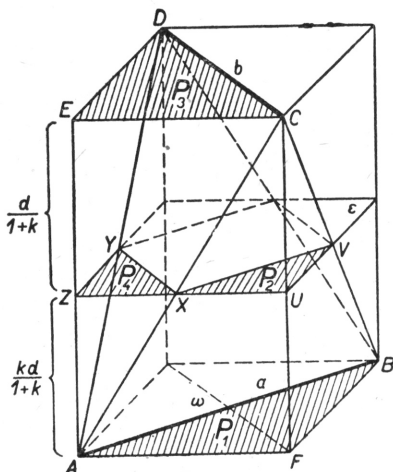
$$a_{12}x_1 \leq a_{12}x_2, \quad a_{13}x_1 \leq a_{13}x_3. \quad (10)$$

Sečteme nerovnosti (10) a přičteme rovnost $a_{11}x_1 = a_{11}x_1$; dostaneme

$$0 \leq (a_{11} + a_{12} + a_{13})x_1 \leq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0.$$

Odtud plyne — protože $a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$ — výsledek $x_1 = 0$ a dále podle (9) $x_2 = x_3 = 0$.

Úloha 3. Čtyřstěn $ABCD$ doplníme na rovnoběžnostěn, jak ukazuje obrázek 37; výsledný rovnoběžnostěn



Obr. 37

ovšem nemusí být kolmý. Hrany AB , CD čtyřstěnu jsou úhlopříčkami jeho podstav, rovina ϵ dělí rovnoběžnostěn ve dva rovnoběžnostěny; objem dolního (horního) ozna-

číme $V_1(V_2)$. Protože jejich výšky jsou po řadě $\frac{kd}{1+k}$, $\frac{d}{1+k}$ a protože oba rovnoběžnostěny mají podstavu téhož obsahu $-\frac{1}{2}ab \sin \omega$, platí

$$V_1 = \frac{kabd}{2(1+k)} \sin \omega, \quad V_2 = \frac{abd}{2(1+k)} \sin \omega. \quad (11)$$

Rovina ε rozdělí čtyřstěn $ABCD$ na dvě části; dolní dostaneme, když od dolního rovnoběžnostěnu oddělíme dva jehlany a dva komolé jehlany. Výška jehlanů je $\frac{kd}{1+k}$ a jejich podstavy mají též obsah P_4 ; je to obsah trojúhelníku XYZ . Poněvadž trojúhelníky XYZ , CDE jsou stejno-
lehlé podle středu A (koeficient stejnolehlosti je $\frac{k}{1+k}$), platí

$$P_4 = \left(\frac{k}{1+k}\right)^2 \cdot P_3.$$

Součet objemů jehlanů je tedy

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{kd}{1+k} \left(\frac{k}{1+k}\right)^2 \cdot P_3 = \frac{2}{3} d \cdot \left(\frac{k}{1+k}\right)^3 \cdot P_3. \quad (12)$$

Oba komolé jehlany mají také výšku $\frac{kd}{1+k}$; jejich podstavy mají obsahy P_1 ($\triangle ABF$) a P_2 ($\triangle XVU$). Protože trojúhelníky XVU , ABF jsou stejnolehlé podle středu C (koeficient stejnolehlosti je $\frac{1}{1+k}$), platí

$$P_2 = \left(\frac{1}{1+k}\right)^2 \cdot P_1.$$

Součet objemů obou komolých jehlanů je tedy

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot \frac{kd}{1+k} \left[P_1 + \left(\frac{1}{1+k} \right) P_1 + \left(\frac{1}{1+k} \right)^2 P_1 \right] = \\ = \frac{2d}{3} \cdot \frac{k(k^2 + 3k + 3)}{(1+k)^3} \cdot P_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Objem V_1'' dolní části dostaneme, odečteme-li od čísla V_1 obě čísla (12), (13). Uvážíme-li, že je

$$P_1 = P_3 = \frac{1}{4} ab \sin \omega,$$

dostaneme

$$\begin{aligned} V_1'' = \frac{2kd}{1+k} \cdot P_1 - \frac{2}{3} d \cdot \frac{k^3}{(1+k)^3} \cdot P_1 - \\ - \frac{2}{3} d \cdot \frac{k(k^2 + 3k + 3)}{(1+k)^3} \cdot P_1 = \frac{2k^2(k+3)}{3(1+k)^3} \cdot dP_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Objem V_2'' horní části dostaneme zřejmě, nahradíme-li ve výsledku (14) číslo k číslem $\frac{1}{k}$; po úpravě vyjde

$$V_2'' = \frac{2(1+3k)}{3(1+k)^3} \cdot dP_1. \quad (15)$$

Z (14) a (15) plyne

$$\frac{V_1''}{V_2''} = \frac{k^2(k+3)}{1+3k}. \quad (16)$$

Jak je patrné, poměr nezávisí na údajích a, b, d, ω .

Úloha 4. Podle textu úlohy je

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 x_3 x_4 &= 2, \\ x_2 + x_3 x_4 x_1 &= 2, \\ x_3 + x_4 x_2 x_1 &= 2, \\ x_4 + x_1 x_2 x_3 &= 2. \end{aligned} \quad (17)$$

Označme $q = x_1 x_2 x_3 x_4$ a znásobíme i -tou rovnicí (17) číslem x_i ; dostaneme pro $i = 1, 2, 3, 4$ po úpravě

$$x_i^2 - 2x_i + q = 0. \quad (18)$$

Kvadratická rovnice (18) má reálné řešení právě tehdy, platí-li $1 - q \geq 0$ neboli

$$q \leq 1. \quad (19)$$

Kořeny rovnice (18) jsou pak

$$r_1 = 1 + \sqrt{1 - q}, \quad r_2 = 1 - \sqrt{1 - q}. \quad (20)$$

Pro $q = 1$ dostaneme $r_1 = r_2 = 1$, a tedy

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, \quad (21)$$

což je jedno řešení soustavy.

Je-li $q < 1$ [viz (19)], je $r_1 > r_2 \geq 0$. Z rovnic (17) vyplývá, že nemohou být aspoň tři z čísel x_i rovna r_2 . Kdyby totiž bylo např. $x_1 = x_2 = x_3 = r_2$, bylo by $x_1 x_2 x_3 = r_2^3 < 1$. Z poslední rovnice (17) by pak plynulo $x_4 > 1$, tj. $x_4 = r_1$. Z toho by pak plynulo (protože $r_1 r_2 = q$, $1 + q < 2$)

$$x_1 + x_2 x_3 x_4 = r_2 + r_1 r_2^2 = r_2(1 + q) < 1 \cdot 2 = 2,$$

což je spor s první rovnicí (17). Nehledíme-li k permutacím indexů, jsou tedy tři možnosti:

I. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = r_1$;

II. $x_1 = x_2 = x_3 = r_1, \quad x_4 = r_2$;

III. $x_1 = x_2 = r_1, \quad x_3 = x_4 = r_2$.

V případě I plyne z kterékoli rovnice (17) rovnice

$$x_i^3 + x_i - 2 = 0, \quad (22)$$

která má reálný kořen $x_i = 1$. Rozložíme trojčlen

$$(x_i^3 + x_i - 2) = (x_i - 1)(x_i^2 + x_i + 2);$$

protože kvadratická rovnice $x_i^2 + x_i + 2 = 0$ nemá žád-

ný reálný kořen, má rovnice (22) jediný reálný kořen 1 a dostáváme tedy opět řešení (21).

V případě II dostaneme jednak $r_1^3 r_2 = q$, jednak podle (20) $r_1 r_2 = q$ a odtud

$$r_1 r_2 (r_1^2 - 1) = 0. \quad (23)$$

Z rovnice (23) vyjde buď $r_1 = 0$, to je však podle (20) vyloučeno, nebo $r_2 = 0$, což dává $q = 0$, $r_1 = 2$. To je však ve sporu se čtvrtou rovnicí (17). Musí tedy být $r_1^2 - 1 = 0$, neboli $r_1 = \pm 1$. Pro $r_1 = 1$ dostaneme z rovnice (18) $r_2 = 2 - r_1 = 1$, a tudíž opět řešení (21). Pro $r_1 = -1$ dostaneme z rovnice (18) $r_2 = 2 - r_1 = 3$, a tudíž další možné řešení

$$x_1 = x_2 = x_3 = -1, x_3 = 3, \quad (24)$$

které skutečně soustavě (17) vyhovuje.

Zbývá vyšetřit případ III. Zde je $r_1^2 r_2^2 = q$, $r_1 r_2 = q$, tj.

$$r_1 r_2 (r_1 r_2 - 1) = 0. \quad (25)$$

Řešení $r_1 = 0$ nebo $r_2 = 0$ se ukázala v předchozím jako nemožná. Rovnost $r_1 r_2 - 1 = 0$ nemůže platit, neboť je $r_1 r_2 = q < 1$.

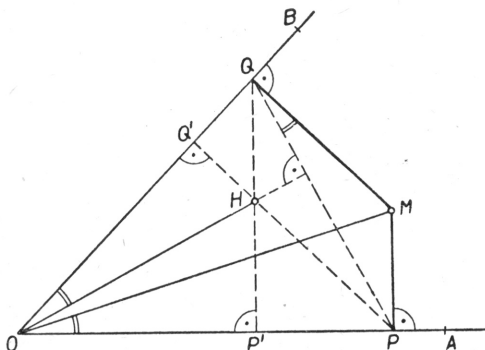
Úloha má tedy jen dvě řešení v oboru reálných čísel: jsou to řešení (21) a (24).

Úloha 5. Zvolme nejprve libovolný bod M ležící uvnitř úhlu $\sphericalangle AOB$, spustíme z něho kolmice MP , MQ na polopřímky OA , OB ; dále sestrojme výšky QP' , PQ' trojúhelníku OPQ a jejich průsečík H (obr. 38). Přímka OH je třetí výškou trojúhelníka OPQ , proto platí

$$OH \perp PQ.$$

Body P , Q leží na kružnici sestrojené nad průměrem OM ; podle věty o obvodových úhlech platí

$$\sphericalangle PQM = \sphericalangle POM.$$



Obr. 38

Dále je

$$\sphericalangle HOQ = 90^\circ - \sphericalangle OQP = \sphericalangle PQM,$$

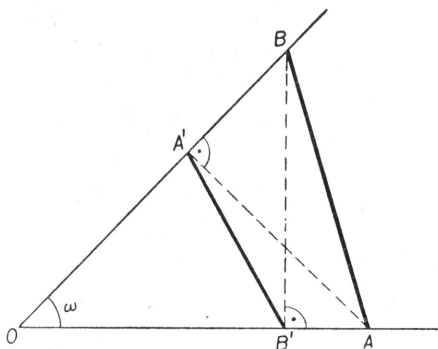
tedy

$$\sphericalangle POM = \sphericalangle HOQ = \varphi. \quad (26)$$

Označíme-li $\sphericalangle AOB = \omega$, platí

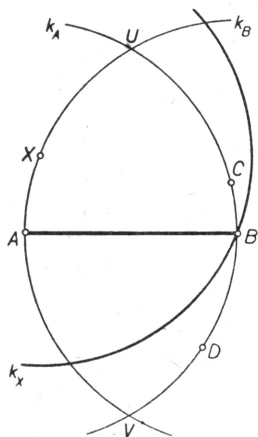
$$\begin{aligned} OH &= OQ' \cdot \frac{1}{\cos \varphi} = OP \cdot \frac{\cos \omega}{\cos \varphi} = OM \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\cos \omega}{\cos \varphi} = \\ &= OM \cdot \cos \omega. \end{aligned} \quad (27)$$

Bod H leží vždy uvnitř úhlu $\sphericalangle AOB$, neboť trojúhelník OPQ je ostroúhlý (to plyne z věty o obvodových úhlech). Ze vztahů (26), (27) pak vyplývá, že bod H je obrazem bodu M v zobrazení složeném ze souměrnosti S podle osy úhlu $\sphericalangle AOB$ a z homotetie H , která má střed O a koeficient $\cos \omega$. Podobnost P , která vznikne složením obou těchto zobrazení, převede úsečku AB v úsečku, jejíž krajní body jsou paty A' , B' výšek trojúhelníku OAB



Obr. 39

spuštěných z bodů A, B (obr. 39). Lze totiž snadno dokázat, že paty A', B' jsou obrazy bodů A, B v podobnosti P . Z toho vyplývá, že obrazem vnitřku trojúhelníku OAB je vnitřek trojúhelníku $OA'B'$, obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$.



Obr. 40

Úloha 6. Odvodíme nejprve tuto pomocnou větu: Vycházejí-li z některého bodu A dané množiny $\mathfrak{M}$ aspoň tři průměry, pak existuje takový bod B množiny $\mathfrak{M}$, z něhož vychází jediný průměr (obr. 40).

Nechť z bodu A množiny $\mathfrak{M}$ vycházejí tři průměry AB, AC, AD ; pak všechny tři body B, C, D leží na kružnici $k_A \equiv (A; d)$. Přitom body B, C, D leží v středo-

vém úhlu velikosti $\alpha \leq 60^\circ$, neboť vzdálenost každých dvou z nich je menší nebo rovna d . Zvolme označení tak, aby polopřímka AB náležela úhlu $\sphericalangle CAD$ a hledejme všechny průměry, které vycházejí z bodu B .

Je-li BX takový průměr, pak bod X leží na kružnici $k_B \equiv (B; d)$; kružnice k_A, k_B se protnou ve dvou bodech, které označíme U, V tak, aby bod $U(V)$ náležel polovině $ABC(ABD)$. Náleží-li krajní bod $X \neq A$ průměru BX oblouku AU , pak kružnice $k_X \equiv (X; d)$ má bod U za vnitřní, V za vnější a prochází bodem B . Proto každý bod $V \neq B$ oblouku BV , tedy i bod D , leží vně kružnice k_X , tj. platí $DX > d$, což je spor. Dokázali jsme tedy, že z bodu B vychází jen jediný průměr, totiž BA .

Z pomocné věty vyplývá, že daná množina může být jen dvojího typu: buď I. z každého jejího bodu vycházejí právě dva průměry, nebo II. obsahuje bod, z něhož vychází nejvýše jeden průměr. Větu z úlohy 6 dokážeme nyní indukcí. Předpokládejme, že platí pro každou množinu $\mathfrak{M}_n$ o n bodech ($n \geq 3$) a zvolme množinu $\mathfrak{M}_{n+1}$ o $n+1$ bodech. Je-li množina $\mathfrak{M}_{n+1}$ typu I, má $\frac{2(n+1)}{2} = n+1$ průměrů. Je-li množina $\mathfrak{M}_{n+1}$ typu

II, zvolíme její bod A , z něhož vychází nejvýše jeden průměr. Vynecháme-li z množiny $\mathfrak{M}_{n+1}$ bod A , dostaneme množinu $\mathfrak{M}_n$, která má nejvýše n průměrů; množina $\mathfrak{M}_{n+1}$ má tedy nejvýše $n+1$ průměrů.

Tím je dokázán indukční krok; protože věta z úlohy 6 platí zřejmě pro $n = 3$, platí pro každé přirozené n .

Poznámky k úlohám a jejich řešení

Když Mezinárodní jury vybírala úlohy a rozhodovala o přidělení počtu bodů, byla v časové tísní. Tak se stalo,

že bylo sice velmi mnoho diskutováno o formulaci *úlohy 3*, ale vůbec se neanalyzovala *úloha 6*, která byla velmi obtížná a k jejímuž řešení bylo v podstatě vždy třeba umělého obratu. Tato úloha se stala skutečně zkušebním kamenem matematického vzdělání a nadání účastníků; správně ji rozřešilo jen několik žáků z SSSR a Maďarska. Při jednání Jury nebyl také čas uvážít různé způsoby řešení úloh a chyby, které se mohou vyskytnout a stanovit zásady, jak budou tyto chyby posuzovány. Tím byla velmi stížena činnost opravujících i koordinátorů, kteří musili teprve během své práce stanovit zásady pro hodnocení, někdy se vracet a měnit klasifikaci.

První úloha byla nejsnazší; hlavní chyba, která se tu vyskytovala, bylo vynechání obrácení postupu, pokud ovšem nerovnosti byly řešeny umocněním. Řada žáků však řešila úlohu jinak, např. použitím vzorce

$$\sqrt{1 \pm \sin 2x} = |\cos x \pm \sin x|$$

a pak nebylo třeba postup obracet.

Také *úloha 4* nevyžadovala vtip. Žáci často nepoužili umělého obratu, který je v autorském řešení, ale prováděli eliminace neznámých obvyklým způsobem. Obě řešení úlohy je možno zjistit experimentálně; těžiště úlohy je v zjištění, že soustava nemá jiné řešení. V původním návrhu úlohy se měla hledat všechna řešení soustavy (17) v oboru *komplexních čísel*. Poněvadž ve většině zúčastněných států se komplexní čísla na středních školách neprobírají, byla úloha redukována na zadaný tvar.

Pěkná a vhodná byla *úloha 2*. Někteří žáci ji řešili pomocí vlastností determinantů; dokázali, že determinant dané soustavy je číslo kladné, což je velmi snadné.

Označme $s_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}$, $i = 1, 2, 3$; pak je

podle předpokladu $s_i > 0$. Upravíme determinant soustavy:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 & a_{12} & a_{13} \\ s_2 & a_{22} & a_{23} \\ s_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = s_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + \\ + s_2a_{13}a_{32} + s_3a_{12}a_{23} - s_2a_{12}a_{33} - s_3a_{22}a_{13}. \quad (28)$$

Druhý, třetí, čtvrtý a pátý člen součtu (28) jsou kladná čísla; dokážeme-li, že je $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > 0$, bude dokázáno, že je $D > 0$.

Protože je $a_{31} < 0$, $s_3 > 0$, je $a_{32} + a_{33} > 0$; znásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem $-a_{23}$ a přičteme-li na obou stranách součin $a_{22}a_{33}$, dostaneme $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} - a_{23}a_{33} > a_{22}a_{33}$, neboli

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > a_{33}(a_{23} + a_{22}). \quad (29)$$

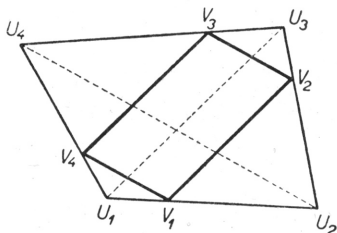
Protože je $a_{21} < 0$, $s_2 > 0$, je $a_{23} + a_{22} > 0$ a z nerovnosti (29) pak plyne $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > 0$.

Řešení bez použití determinantů, které jsme uvedli výše, je v podstatě řešení čs. reprezentanta *D. Preisse*.

Jak jsme se již dříve zmínili, bylo při zasedání Jury mnoho diskutováno kolem úlohy 3, tj. kolem otázky, má-li se žákům „pomoci“ tím, že se dá dílčí úloha: odvodit vzorec pro objem čtyřštěnu, který je dán délkami protějších hran, jejich vzdáleností a odchylkou. Tato formule byla totiž východiskem v autorském řešení. Nakonec se však rozhodlo „nevnucovat“ žákům tento způsob řešení, neboť jsou možné i způsoby jiné. A skutečnost rozhodnutí Jury potvrdila: žáci řešili úlohu nejrůznějšími metodami — třeba i integrálem (vlastně aplikací Cavalieriova principu), jako např. *D. Preiss*. Pěkná a obratná řešení podali někteří sovětští žáci.

Také úloha 5 nebyla náročná a poskytovala celou řadu možností různých řešení: pomocí zobrazení (viz řešení

výše uvedené), metodou souřadnic aj. Originální řešení pomocí rovnoběžníku vepsaného do čtyřúhelníku podal třináctiletý československý účastník *Bohuš Sivák*:



Obr. 41

Řešení. Mějme body $V_1, V_2, V_3, U_1, U_2, U_3, U_4$ tak, že body V_1, V_2, V_3 leží na úsečkách U_1U_2, U_2U_3, U_3U_4 a platí $U_1V_1 : V_1U_2 = m : n, U_2V_2 : V_2U_3 = n : m, U_3V_3 : V_3U_4 = m : n$. Potom na úsečce U_4U_1 existuje právě jeden bod V_4 , pro který platí $U_4V_4 : V_4U_1 = n : m$ a $V_1V_2V_3V_4$ je rovnoběžník (obr. 41).

Důkaz. 1. $U_1U_2U_3U_4$ je konvexní čtyřúhelník. Podle volby bodů V_1, V_2, V_3 platí, že

$\triangle U_1U_2U_3 \sim \triangle V_1U_2V_2, \triangle U_2U_3U_4 \sim \triangle V_2U_3V_3;$
tedy je

$$U_1U_3 \parallel V_1V_2, \quad U_2U_4 \parallel V_2V_3.$$

Pro bod V_1 na úsečce U_1U_2 platí

$$\frac{U_1V_1}{U_2V_2} = \frac{m}{n}.$$

Na úsečce U_1U_4 existuje právě jeden bod V'_4 , pro který platí

$$\frac{U_1V'_4}{U_4V'_4} = \frac{m}{n}, \quad U_2U_4 \parallel V_1V'_4,$$

a tedy také

$$V_2V_3 \parallel V_1V_4'.$$

Pro bod V_3 na úsečce U_3U_4 platí obdobně $\frac{U_3V_3}{U_3U_4} = \frac{m}{n}$.

Na úsečce U_1U_4 existuje právě jeden bod V_4'' , pro který platí

$$\frac{U_1V_4''}{U_4V_4''} = \frac{m}{n}, \quad V_1U_3 \parallel V_3V_4'',$$

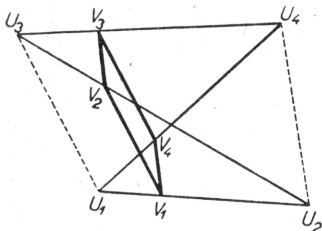
a tedy také

$$V_1V_2 \parallel V_3V_4''.$$

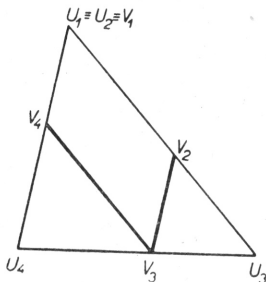
Protože existuje jediný bod, který dělí úsečku v daném poměru, je $V_4' \equiv V_4''$. Označíme-li tento bod V_4 , pak $V_1V_2V_3V_4$ je rovnoběžník.

2. Úsečky U_1U_4 , U_2U_3 se protínají. Bod V_4 se sestrojí a důkaz, že $V_1V_2V_3V_4$ je rovnoběžník, se provede podobně jako v případě 1. Je-li $U_1U_3 \parallel U_2U_4$, přejde $V_1V_2V_3V_4$ v úsečku, protože $V_2V_3 \parallel U_2U_4 \parallel U_1U_3 \parallel V_3V_4$ (obr. 42).

3. Dva z bodů U_1 , U_2 , U_3 , U_4 jsou totožné; nechť např. $U_1 \equiv U_2$ (obr. 43). Pak bod V_4 dostaneme tak, že



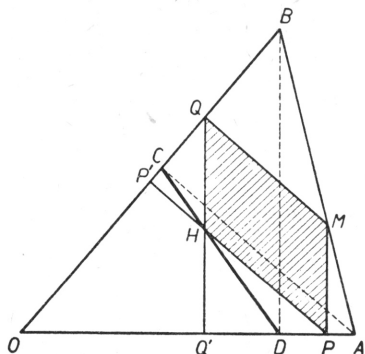
Obr. 42



Obr. 43

bodem V_3 vedeme rovnoběžku s $U_2U_3 \equiv U_1U_3$. V tomto případě musí být $U_1 \equiv U_2 \equiv V_1$.

Zvolíme-li v některém z případů 1 až 3 jinou polohu bodu V_4 uvnitř úsečky U_1U_4 , pak nebude $V_1V_2 \parallel V_3V_4$.



Obr. 44

a) Podle obr. 44 označme C, D paty výšek trojúhelníku AOB , vedených vrcholy A, B . Je-li $DP:PA = m:n$, je

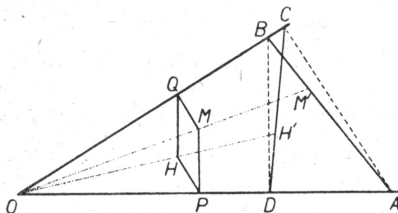
$$AM:BM = n:m,$$

$$BQ:CO = BM:AM = m:n.$$

Podle dříve dokázané věty existuje na úsečce CD bod H , pro který platí $QH \parallel MP$, $PH \parallel MQ$, tj. $QH \perp OP$, $PH \perp OQ$. Bod H je tedy průsečíkem výšek trojúhelníku OPQ a musí ležet na úsečce CD . Probíhá-li bod M úsečkou AB , probíhá bod H úsečkou CD .

b) Zvolme na úsečce CD bod H . Stejně jako dříve dokážeme, že je-li $HPMQ$ rovnoběžník, leží bod M na úsečce AB . Geometrickým místem bodů H je tedy úsečka CD .

c) Zvolme uvnitř $\triangle AOB$ bod M ; pak existuje právě jedna stejnolehlost se středem O a koeficientem $k > 1$, která převádí bod M v bod M' úsečky AB . Jak jsme zjistili v odstavcích a), b), leží bod H' , sestrojený podle textu úlohy, na úsečce CD . Stejnolehlost s koeficientem $0 < k < 1$ a se středem O převede bod H' v bod H , příslušný k bodu M . Protože se změnou polohy bodu M se mění koeficient $\frac{1}{k}$ od nuly do jedné, je geometrickým místem bodů H vnitřek trojúhelníku OCD (obr. 45).



Obr. 45

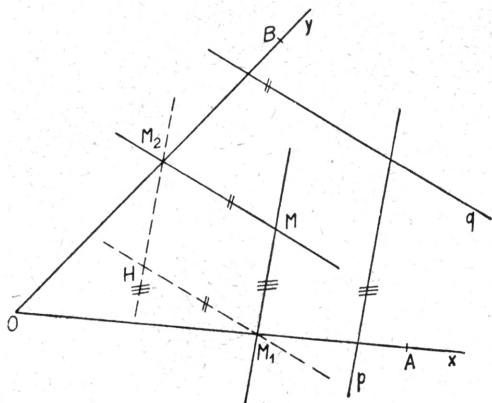
Mezi rumunskými řešiteli se vyskytl případ zobecnění úlohy ve smyslu afinním: místo výšek trojúhelníku použil žák přímek daného směru.

Afinní zobecnění úlohy, které provedl žák A. Badescu, zní takto:

Buďte OA , OB dvě různoběžky, p , q dvě různoběžky, z nichž žádná není rovnoběžná ani s přímkou OA , ani s přímkou OB . K libovolnému bodu M roviny OAB sestrojíme bod H takto: Bodem M vedeme rovnoběžku s přímkou $p(q)$, její průsečík s přímkou $OA(OB)$ označíme $M_1(M_2)$. Trojúhelník M_1MM_2 doplníme na rovnoběžník M_1MM_2H .

Probíhá-li bod M úsečku (vnitřek trojúhelníku), probíhá bod H také úsečku (vnitřek trojúhelníku).

Řešení této zobecněné úlohy, při němž se užívá rovnoběžkových souřadnic, lze formulovat takto: zvolíme přímky OA , OB za osy x , y rovnoběžkových souřadnic (obr. 46).



Obr. 46

Označíme souřadnice bodů: $M = [x, y]$, $M_1 = [u, 0]$, $M_2[0, v]$, $H = [x', y']$. Pak platí

$$\begin{aligned} y &= a(x - u), & y' - v &= a \cdot x, \\ y - v &= b \cdot x, & y' &= b(x' - u). \end{aligned} \quad (30)$$

Přitom konstanty a , b , které charakterizují směry přímek p , q , vyhovují podmínkám

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a \neq b.$$

Z rovnic (30) eliminujeme nejprve u, v ; tím dostaneme soustavu dvou lineárních rovnic pro x', y'

$$-bx' + y' = \frac{by}{a} - bx, \quad (31)$$

$$ax' - y' = bx - y.$$

Ze soustavy (31) vyjádříme x', y' jako funkce x, y ; vyjde

$$x' = -\frac{y}{a}, \quad y' = -bx. \quad (32)$$

Rovnice (32) vyjadřují zobrazení (afinitu); přiřazení bodů M, H je zřejmě vzájemně jednoznačné. Z rovnic (32) snadno dokážeme, že probíhá-li bod M úsečku (vnitřek trojúhelníku, přímku, úhel apod.), probíhá bod H útvar téhož druhu.

Řešení zobecněné úlohy, které jsem uvedl, není ovšem původní řešení žákovo. Při korigování se ukázalo, že pokud žáci použili metody souřadnic, byla jejich řešení dosti neobratná nebo neúplná. Je to dokladem, že prvkům analytické geometrie se nevyučuje na středních školách účelně.

Vcelku lze říci, že soutěžní úlohy byly vybrány a zadány (až snad na *úlohu 6*) vhodně, přesto, že členové Jury měli jen velmi málo času k jejich předběžnému prostudování. Některá žákovská řešení ukazují oproti olympiádám dřívějším rostoucí úroveň.

4. Československé družstvo

Československé družstvo tvořili tyto žáci:

Jan Brodský z Brna,
Jura Charvát z Příboru,

*Tamara Marcisová z Bratislavy,
Pavel Novotný z Olomouce,
David Preiss z Jindřichova Hradce,
Miroslav Řezníček z Hradce Králové,
Bohuš Sivák ze Zvolena a
Milan Štědrý z Chotěboře.*

Pavel Novotný byl absolventem 2. třídy SVVŠ, Bohuš Sivák 8. třídy ZDŠ, všichni ostatní 3. třídy SVVŠ.

Žáci byli vybráni jako v dřívějších letech na základě výsledků v třetím kole domácí olympiády. Tento způsob se však opět neosvědčil: ukázalo se, že nejlepší z vítězů třetího kola měli v VII. MMO nejslabší výsledky. Zdá se, že budeme musit přejít k jinému způsobu vybírání a přípravy našich reprezentantů než dosud. Je totiž skutečností, že úroveň mezinárodních matematických olympiád vzrůstá a že výsledky delegací — i když jde stále o soutěž jednotlivců — jsou pokládány za vizitku příslušného státu v oblasti školské matematiky. Není proto vhodné vysílat družstvo, v němž je polovina i více slabých žáků. Může-li neveliké Maďarsko vyslat družstvo, které získá 7 cen, z toho 3 první, mohli bychom to udělat i my, neboť máme jistě dostatečný počet nadaných žáků; s jejich nadáním však špatně hospodaříme. Tabulky v přílohách 3 a 4 jsou pro nás skutečně zarmucující a svědčí o stálém ústupu z dřívějšího dobrého průměru. Největší možný dosažitelný počet bodů pro družstvo byl 320; sovětské družstvo dosáhlo téměř 90%, my ani ne 50%. To vše ukazuje, že naše vyučování matematice a hlavně naše péče o nadané žáky nejsou na výši. Máme sice ve třech městech speciální třídy, ale výběr žáků do nich není uspokojivý a učitelé neučí tak, jak to současná doba vyžaduje. Pořádáme sice přednášky a semináře pro olympioniky, ale ty nemají leckdy potřebnou úroveň a nadaní žáci

nemají dost času ani chuti ke studiu, protože jsou příliš rozptylováni školními i mimoškolními povinnostmi.

Projděme *tabulku 4*; druhý sloupec ukazuje, že jen tři žáci z osmi se dobře vyrovnali s nepříliš složitou úlohou o soustavě tří lineárních homogenních rovnic. Plná polovina zcela selhala v úloze stereometrické, plná polovina měla nevyhovující výsledek v celkem běžné planimetrické úloze na geometrické místo bodů. Naproti tomu neúspěch v úloze 6 není třeba brát příliš tragicky; svědčí jen o tom, že nikdo z našeho družstva neměl trénink „vyššího řádu“.

Co naši žáci neumějí? Stále vážne obracení postupů, projevuje se nedostatek představivosti, zvláště prostorové, malá zběhlost v používání geometrických zobrazení a metody souřadnic, hlavně však je vidět často neobratný přístup k řešení problému a malá kombinační schopnost.

Na nepříliš příznivé umístění našich reprezentantů měla vliv asi také jejich celková dispozice. Snad působením výchovy a režimu života jsou naši žáci málo průbojní a vytrvalí, leckdy lhostejní nebo zase neklidní: zdá se, že i na tomto poli by mohla mít naše pedagogika dosti práce.

Na závěr bychom chtěli vyslovit naději, že se poučíme z výsledků našeho družstva v letošní MMO a že učiníme vše možné, aby naše umístění na VIII. MMO v Sofii bylo příznivější.

Příloha 1

Vedoucí delegací a jejich zástupci

Bulharsko: *Prof. dr. Alippi Mateev*, děkan mat. fakulty university v Sofii.

Inspektor Stoian Budurov.

Československo: *Docent Jan Vyšín*, mat.-fyz. fakulta KU v Praze.

František Zítek, CSc., Matematický ústav ČSAV.

Finsko: *Jarmo Nyström*, ředitel střední školy v Tapiole.

Anja Hormio.

Jugoslávie: *Prof. dr. Milica Iličová-Đajovićová*, Stavební fakulta university v Bělehradě.

Magistr Vladimír Mičić.

Maďarsko: *Hódi Endre*, vedoucí vědecký pracovník Optických závodů v Budapešti.

Reiman István.

Mongolsko: *Prof. dr. Gensengin Ischzeren*, universita v Ulánbátoru.

Balsh Altangerel.

Německá demokratická republika: *Prof. dr. Hans Joachim Weinert*, Vysoká škola pedagogická, Potsdam.

Johannes Gromitz.

Polsko: *Prof. dr. Mieczysław Czyżykowski*, Polytechnika ve Varšavě.

Magister Andrzej Mąkowski.

Rumunsko: *Prof. Tiberiu Roman*, Vysoká škola technická v Bukurešti.

Prof. Zlate Bogdanov.

Sovětský svaz: *Doc. E. Aleksandrovna Morozovova,*
Mech.-matem. fakulta Lomonosovovy university
v Moskvě.
Ivan Semjonovič Petrakov.

Příloha 2

Přehled udělených cen a pochvalných uznání

1. cena: (8)	<i>Pavel Elecher</i> <i>Lovász László</i> <i>Andrej Subkov</i> <i>Sergěj Valander</i> <i>Anatolij Peresezkij</i> <i>Nikolaj Širokov</i> <i>Makai Endre</i> <i>Pelikan József</i>	SSSR MLR SSSR SSSR SSSR SSSR MLR MLR	40 bodů 40 bodů 39 bodů 39 bodů 38 bodů 38 bodů 38 bodů 38 bodů
2. cena: (12)	<i>Alexander Karsanov</i> <i>Liliana Bucurová</i> <i>Pósa Lajos</i> <i>David Preiss</i> <i>Krzysztof Nowiński</i> <i>Alexandru Bădescu</i> <i>Dan Voiculescu</i> <i>Vasilij Stojanovskij</i> <i>Jacques Weinstein</i> <i>Berkes István</i> <i>Manfred Brandt</i> <i>Wolfgang Klamt</i>	SSSR RLR MLR ČSSR PLR RLR RLR SSSR RLR MLR NDR NDR	36 bodů 34 body 34 body 32 body 32 body 32 body 32 body 32 body 32 body 31 bod 30 bodů 30 bodů
3. cena: (17)	<i>Tamara Marcisová</i> <i>Peter Enskonatus</i> <i>Zeno Fortuna</i> <i>Michal Misiurewicz</i> <i>Octavian Biscă</i>	ČSSR NDR PLR PLR RLR	29 bodů 29 bodů 29 bodů 29 bodů 29 bodů

3. cena: (pokrač.)	<i>Walter Liepe</i>	NDR	28 bodů
	<i>Laczkovich Miklós</i>	MLR	28 bodů
	<i>Velimir Bole</i>	FSRJ	27 bodů
	<i>Elekes György</i>	MLR	27 bodů
	<i>Tadeusz Figiel</i>	PLR	26 bodů
	<i>Eugen Popa</i>	RLR	24 body
	<i>Bohuš Sívák</i>	ČSSR	22 body
	<i>Wilhelm Otto</i>	NDR	22 body
	<i>Miroslav Ašić</i>	FSRJ	22 body
	<i>Ion Ștefănescu-Sabba</i>	RLR	21 bod
	<i>Jordan Tabor</i>	BLR	21 bod
	<i>Miroslav Řezníček</i>	ČSSR	20 bodů

Pochvalná uznání:

Timo Erkama, RF (Finsko)

Krzysztof Nowiński, PLR

Avgaanzere Damdinsuren, Mong. LR

Alexandru Adescu, RLR

Lovász László, MLR

Pelikan József, MLR

Příloha 3

Přehled počtu bodů, jež získala družstva v jednotlivých úlohách

Úloha č. Stát							Součet
	1	2	3	4	5	6	
Bulharsko	12	6	36	21	10	8	93
Československo	28	17	29	37	33	15	159
Finsko	12	6	0	24	17	3	62
Jugoslávie	26	20	15	33	18	25	137
Maďarsko	29	36	50	38	45	46	244
Mongolsko	8	8	6	22	8	11	63
Něm. dem. republika	23	17	42	34	37	22	175
Polsko	28	25	33	44	40	8	178
Rumunsko	27	32	50	39	53	21	222
Sovětský Svaz	25	46	64	43	42	61	281

Příloha 4

Přehled počtu bodů, které získali čs. žáci v jednotlivých úlohách

Žák \ Úloha č.							Součet
	1	2	3	4	5	6	
Brodský	0	0	4	4	2	1	11
Charvát	4	4	1	3	2	2	16
Marcisová	4	0	8	6	7	4	29
Novotný	4	1	0	6	3	3	17
Preiss	4	6	8	5	5	4	32
Řezníček	4	1	8	6	1	0	20
Sívák	4	5	0	6	6	1	22
Štědrý	4	0	0	1	7	0	12
Součet	28	17	29	37	33	15	159
Maximálně dosažitelný počet	32	48	64	48	56	72	320

OBSAH

I. O PRŮBĚHU XIV. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY.	3
II. VÝSLEDKY JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE . . .	9
III. PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY (TEXTY).	22
IV. ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE	
1. Úlohy I. kola kategorie A	26
2. Úlohy II. kola kategorie A	44
3. Úlohy III. kola kategorie A	54
4. Úlohy I. kola kategorie B	62
5. Úlohy II. kola kategorie B.	72
6. Úlohy I. kola kategorie C	79
7. Úlohy II. kola kategorie C	91
8. Úlohy I. kola kategorie D	96
9. Úlohy II. kola kategorie D	107

V. SEDMÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYM-
PIÁDA V BERLÍNĚ VE DNECH 3.—12. ČERVENCE
1965

1. Průběh olympiády	112
2. Soutěžní úlohy VII. MMO	116
3. Řešení soutěžních úloh	118
4. Československé družstvo	135
5. Přílohy 1 až 4	138

Edice Pomocné knihy pro žáky

Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. Jan Vyšín, Vlastimil Macháček a Rudolf Zelinka

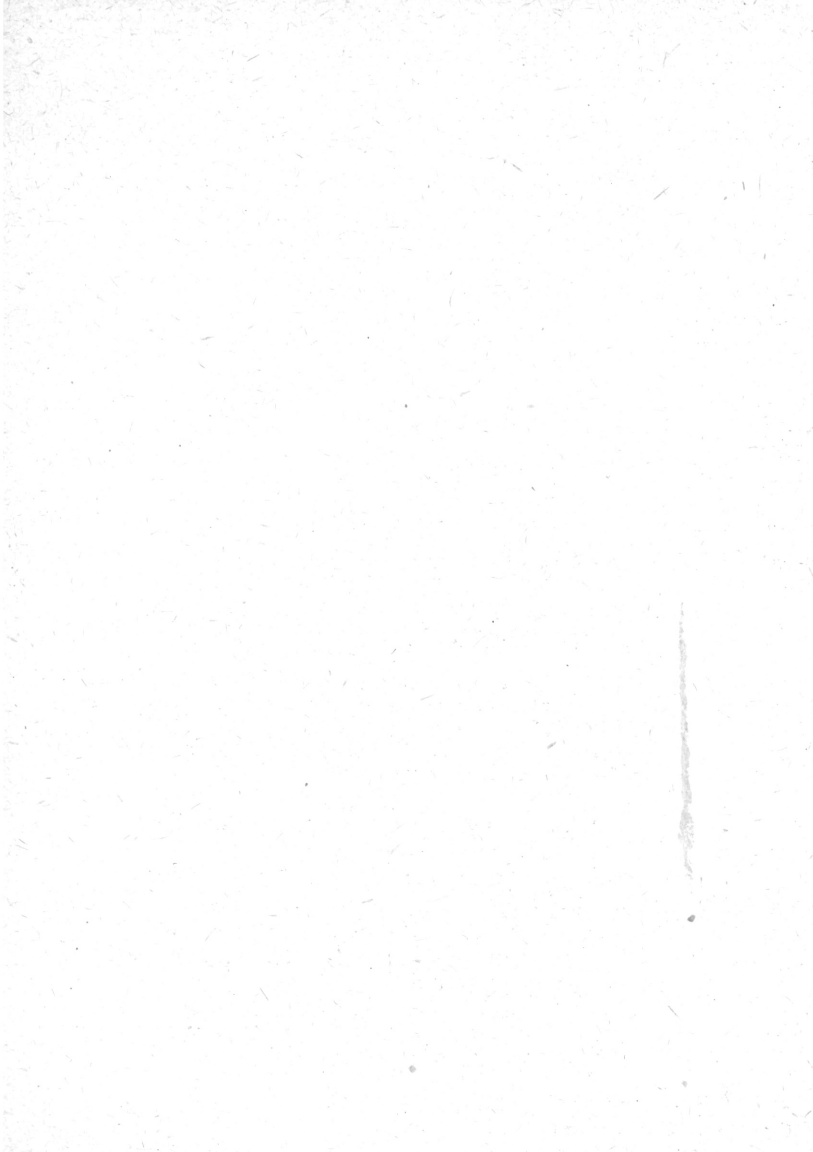
ČTRNÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1966 — Počet stran 144
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk
Technická redaktorka: Zoe Blahová

Z nové sazby písmem Plantin vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p.,
závod 4, Ostrovní 30, Praha 1
5,05 AA (text 4,58 AA, grafika 0,47 AA) — 5,35 VA — D-05*60228
Náklad 3550 výtisků
• Tematická skupina a podskupina 03/2
Cena brožovaného výtisku Kčs 5,00-G

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou
publikaci č. 65-0-06

15-126-66 Kčs 5,00-G



SPN

65-0-06

15-126-66

03/2 Kčs 5,00 - G