

15. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor): 15. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1965-1966. 8. Mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1967.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404546>

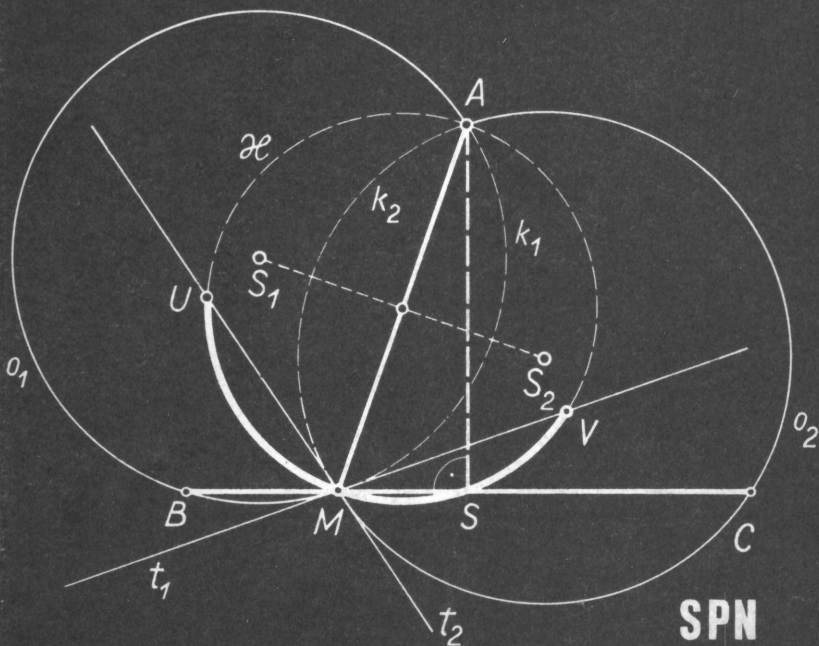
Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

XV. ročník matematické olympiády



PATNÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*

*Zpráva o řešení úloh ze soutěže,
konané ve školním roce 1965—1966*

*

OSMÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

PRAHA 1967

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Autoři nepřebírají odpovědnost za méně zdařilou reprodukci některých obrázků, způsobenou nejednotným zmenšením předloh.

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín a Vlastimil Macháček. Slovenské části textu přeložil dr. Jozef Moravčík, CSc.

Recenzovali Jitka Kučerová, dr. Zbyněk Nádeník, CSc. a dr. Miroslav Šisler, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1967

I. O průběhu XV. ročníku Matematické olympiády

1. *Organizace soutěže.* Pořadatelem soutěže je *ministerstvo školství a kultury (MŠK)* s *Matematickým ústavem ČSAV (MÚČSAV)*, *Jednotou čs. matematiků a fyziků (JČMF)* a *ústředním výborem Čs. svazu mládeže (ÚV ČSM)*. Také XV. ročník se řídil statutem, uveřejněným ve Věstníku MŠK, roč. XIX, str. 126, 127, směrnice 37 ze dne 30. 4. 1963.

Soutěž řídil celostátně ústřední výbor matematické olympiády (ÚVMO), v krajích krajské výbory matematické olympiády (KVMO) a v okresech okresní výbory matematické olympiády (OVMO); v těchto výborech jsou také zastoupeny pořadatelské složky.

Žáci soutěžili ve čtyřech kategoriích podle svého studijního věku, a to v kategoriích A, B, C (střední školy) a v kategorii D (základní školy).

2. Složení ústředního výboru matematické olympiády:

Předseda: *akademik Josef Novák*, vedoucí vědecký pracovník
Matematického ústavu ČSAV v Praze

Místopředseda: *Jan Vyšín*, docent matematicko-fyzikální
fakulty Karlovy university v Praze

I. jednatel: *Vlastimil Macháček*, odb. asistent PedF UK
v Praze

II. jednatel: *Jiří Mída*, odb. asistent PedF UK v Praze

Členové:

dr. František Běloun, vedoucí matematického kabinetu Krajského pedagogického ústavu v Praze

Miloš Jelinek, vědecký pracovník Pedagogického ústavu J. A. Komenského ČSAV, Praha (tč. v zahraničí)

doc. Josef Holubář, Jičínská 3, Praha

František Hradecký, odborný asistent matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze

dr. Karel Hruša, profesor PedF UK v Praze

dr. Milan Kolibiar, profesor přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě

Ladislav Krkavec, ústřední inspektor ministerstva školství a kultury v Praze

Josef Porcal, ústřední inspektor ministerstva školství a kultury v Praze

František Veselý, em. odborný asistent Vysoké školy strojní a elektrotechnické, Plzeň

dr. Miloslav Zedek, docent Palackého university v Olomouci

prof. dr. Miroslav Fiedler, *DrSc.*, vedoucí vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze

Náhradník:

dr. Miroslav Šisler, *CSc.*, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze

Dalšími členy ústředního výboru matematické olympiády jsou všichni předsedové KVMO:

dr. Václav Pleskot, profesor ČVUT v Praze

dr. Václav Vilímek, docent katedry matematiky a deskriptivní geometrie fakulty strojní ČVUT v Praze

František Vejsada, odborný asistent Vysoké školy zemědělské, České Budějovice

Karel Hnyk, odborný asistent pedagogické fakulty v Ústí nad Labem

Věra Rádlová, profesorka SVVŠ J. Fučíka, Plzeň

Jan Laštovka, vedoucí kabinetu matematiky Krajského pedagogického ústavu, Pardubice

Petr Benda, odborný asistent VUT, Brno

Josef Andrys, docent pedagogické fakulty v Ostravě

Ladislav Berger, odborný asistent katedry matematiky Vysoké školy dopravní v Žilině

Milan Hejný, odborný asistent katedry matematiky přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě

Dr. Igor Kluvánek, docent přírodovědecké fakulty University P. J. Šafaříka v Košicích

Během XV. ročníku došlo k menším změnám ve složení ÚVMO. Na jaře 1966 skončilo jeho tříleté funkční období; na schůzi v Žilině dne 14. května 1966 byl schválen návrh nového složení ÚVMO; tento návrh byl předložen MŠK a byly o něm informovány MÚ ČSAV a JČMF.

3. Schůze ÚVMO. Ústřední výbor MO se sešel během XV. ročníku dvakrát. První schůze byla dvoudenní a konala se ve dnech 9. a 10. listopadu 1965 v Brně. Jednalo se tu o řadě zásadních otázek, zejména o poměru MO a FO, o některých změnách v organizaci MO, o honorování originálních námětů na soutěžní úlohy. Z usnesení této schůze uvádíme nejdůležitější:

1. I. kolo XVI. ročníku bude uspořádáno takto:

Bude se skládat z řešení 4 přípravných a 4 soutěžních úloh. Přípravné úlohy se sice opravují, ale neklasifikují. Úspěšným řešitelem I. kola bude žák, který rozřeší správně aspoň tři soutěžní úlohy. Lhůta pro odevzdání přípravných úloh bude 30. listopad, pro odevzdání soutěžních úloh 15. únor. Druhé a třetí kolo bude probíhat časově tak jako dosud.

2. MO a FO budou organizovány odděleně, tak jako dosud. Doporučuje se, aby jen ve výjimečných případech soutěžil žák v MO i v FO. Do MO budou zařazovány i úlohy s fyzikálními a jinými aplikacemi. Letáky MO a FO budou vydávány společně, jeden pro kategorii D, jeden pro kategorie A, B, C.

3. ÚVMO se připojuje k návrhu ÚVFO, aby náměty soutěžních úloh zaslané autory ústřednímu výboru byly po recenzování a přijetí honorovány částkou aspoň 50 Kčs v kategoriích A, B, C a částkou aspoň 30 Kčs v kategorii D. Dispoziční právo s odměňenými návrhy budou mít příslušné ústřední výbory.

4. Z příkladového materiálu všech dosavadních ročníků MO budou vydány tři sbírky úloh tématicky utříděných a metodicky zpracovaných: jedna pro kategorii D, jedna pro kategorie B, C a jedna pro kategorii A; ta bude doplněna úlohami ze zahraničních i mezinárodních olympiád.

Druhá schůze ÚV se konala při příležitosti III. kola dne 14. května 1966 v Žilině. Zde byla obsáhlá diskuse o průběhu XV. ročníku, dále se jednalo o dotazníkové akci v kategorii D, o chystaném prázdninovém soustředění v Banské Bystrici a o knižnici „Škola mladých matematiků“. Zprávy ze zasedání ÚVMO budou zasílány všem KVMO.

4. Průběh kol. Jednotlivá kola probíhala časově podle Statutu takto:

I. kolo (studijní) od října 1965 do konce února 1966; žáci v něm řešili 6 úloh přípravných a 6 úloh soutěžních.

II. kolo dne 16. dubna 1966 v krajských městech pro kategorii A, dne 17. dubna pro kategorie B a C a 12. dubna 1966 v okresních městech a některých dalších střediscích pro kategorii D; žáci řešili 4 soutěžní úlohy.

III. kolo dne 14. května 1966 v Žilině jako celostátní soutěž. Účastníci řešili 4 soutěžní úlohy.

V rámci II. kola se konaly pro účastníky vyšších kategorií besedy a konzultace. Na nich se mimo jiné prováděla analýza chyb, kterých se žáci dopustili při řešení úloh I. kola.

Při příležitosti III. kola v Žilině byla pro účastníky uspořádána beseda, které se zúčastnili mimo členy ústředního výboru MO i někteří učitelé Vysoké školy dopravní v Žilině; k účastníkům promluvil *prof. dr. Harant*. Program pro účastníky III. kola byl doplněn výletem na blízký Polom — dějiště velké bitvy za druhé světové války.

5. Pomocné akce. Krajské výbory MO organizovaly s pobočkami Jednoty čs. matematiků a fyziků řadu akcí. Byly to jednak přípravné přednášky (semináře) pro účastníky matematické olympiády, které měly aktivizovat žáky v období studijního kola, prohloubit jejich znalosti školské matematiky a učit je studovat odbornou literaturu. Podle cíle těchto seminářů a podle místních podmínek byla vybrána jejich tematika; některé se opíraly o svazečky *Školy mladých matematiků*. Mimo tyto semináře pořádaly krajské výbory MO i instruktáže, konzultace apod.

Celostátní soustředění 92 úspěšných řešitelů kategorie B matematické i fyzikální olympiády se konalo v Banské Bystrici od 20. června do 9. července 1966. Účastníci byli tentokrát rozdělení do tří oddělení: dvě byla matematicko-fyzikální; v nich byl čas rovnoměrně rozdělen mezi matematiku a fyziku. Třetí oddělení mělo program převážně matematický a byli do něho zařadění žáci s vyhraněným zájmem a schopnostmi pro matematiku. Dopoledne bylo věnováno výuce; odpoledne se žáci rekreaovali v rámci sportovního a turistického programu, večer se konaly besedy s významnými vědeckými a vysokoškolskými pracovníky. Podobné instruktáže uspořádaly i některé krajské výbory MO ve splupráci s odbory pro školství a kulturu KNV a s pobočkami Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Družstvo 8 žáků (s 2 náhradníky) vybrané pro mezinárodní matematickou olympiádu v Bulharsku prošlo krátkou instrukcí, která se konala ve dnech 28. června až 2. července 1966 ve Štítně.

6. Studijní literatura. Státní pedagogické nakladatelství vydalo jako každoročně pro účastníky matematické olympiády (I. kola) leták s texty úloh a s pokyny v nákladu 15 000 exemplářů. Bohužel, tento leták došel na krajské výbory MO už po několikáté opožděně. Texty úloh I. kola byly otištěny v časopisech Matematika ve škole a Rozhledy matematicko-fyzikální. Jako pomoc pro opravování dostali zúčastnění učitelé kopie autorských řešení všech přípravných úloh i soutěžních úloh I. a II. kola.

Jako studijní literatura se osvědčuje knižnice *Škola mladých matematiků*, vydávaná nakladatelstvím Mladá fronta. Uvádíme přehled všech svazeků vydaných až do září 1967:

1. *Hradecký—Koman—Vyšín*: Několik úloh z geometrie jednoduchých těles
2. *Jiří Sedláček*: Co víme o přirozených číslech
3. *Jaroslav Šedivý*: Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách
4. *Miroslav Šisler— Jiří Jarník*: O funkcích
5. *František Veselý*: O nerovnostech
6. *Rudolf Výborný*: Matematická indukce
7. *Jaroslav Šedivý*: O podobnosti v geometrii
8. *Jiří Váňa*: O rovnicích s parametrem
9. *Jan Vyšín*: Konvexní útvary
10. *Jiří Sedláček*: Faktoriály a kombinační čísla
11. *Josef Holubář*: Geometrická místa bodů v prostoru
12. *Karel Havlíček*: Prostory o čtyřech a více rozměrech
13. *Miroslav Šisler—Josef Andrys*: O řešení algebraických rovnic

14. *František Veselý*: O dělitelnosti čísel celých
15. *Milan Koman*: Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic
16. *Stanislav Horák*: Kružnice
17. *Ľaromír Hroník*: Úlohy o maximech a minimech funkcí

Svazky 1, 2, 3, 4, 6 a 7 vyšly v reedici. Knižnice je cenově dostupná všem žákům (svazeček stojí průměrně 3 Kčs). Část nákladu vykupuje ministerstvo školství a kultury pro žákovské knihovny; jen poměrně malý počet exemplářů je ve volném prodeji a nelze proto plně uspokojit zájem učitelů a žáků o tuto knižnici.

Brožury starších ročníků MO jsou rozebrány; proto plánuje ústřední výbor MO spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím vydání výborů úloh z těchto brožur uspořádaných podle jednotlivých kategorií (viz usnesení schůze z 9. a 10. XI. 1965).

II. Výsledky jednotlivých kol soutěže

1. *I. kolo.* Porovnáme-li tabulky č. 1 za poslední čtyři ročníky MO (tj. XII. až XV.), je účast ve XIV. ročníku jakýmsi kulminačním bodem účasti v kategorii A; účast v patnáctém ročníku je opět na výši XIII. ročníku a vyšší než v ročníku dvanáctém. Absolutní pokles účasti v XV. ročníku byl ovlivněn jistě tím, že přípravné úlohy I. kola měly obdobnou obtížnost jako úlohy soutěžní. Za klad lze považovat vysoký počet úspěšných řešitelů I. kola kategorie A (454 z 525 účastníků); to je snad nejvyšší procentuální údaj svědčící o tom, že ti, kteří začali soutěž, byli vážnými zájemci o matematiku. Obdobná situace se jeví v kategorii B. Procento úspěšných v kategorii C je poněkud nižší než v kategoriích A a B, avšak mnohem vyšší než je průměr za předchozí ročníky.

V kategorii D (viz tab. č. 2) po loňském přechodném poklesu stoupl opět počet účastníků i úspěšných řešitelů, což odporuje do značné míry názorům vysloveným v některých krajích, že uložené úlohy byly obtížné.

Pokud se týká účasti dívek, je opět v kategoriích D a C procentuálně nejvyšší; zajímavé je, že vysoká účast dívek v kategorii C ve XIV. ročníku se neprojevila vzrůstem počtu děvčat v kategorii B v XV. ročníku.

2. *II. kolo* (tabulky č. 3 a 4). Rozdíl mezi počtem úspěšných řešitelů I. kola a počtem účastníků II. kola není v kategorii A, B a C již nijak vysoký; i zde se jistě projevil vliv obtížnějších přípravných úloh. Procento úspěšných řešitelů je však velmi rozdílné, zvláště v kategorii A a B je nízké.

V kategorii D počet účastníků opět poněkud stoupl, avšak počet úspěšných řešitelů je jen nepatrně vyšší; to snad souvisí s tím, že úlohy II. kola se zdály poněkud obtížnější než obvykle.

Ve všech kategoriích zaslouží ocenění opět práce soudruhů z Jihomoravského kraje, kde počty účastníků i úspěšných řešitelů v kategoriích A, B, C převyšují výsledky většiny ostatních krajů; v kategorii D má nejvyšší účast Západoslovenský kraj.

Úspěšní řešitelé II. kola obdrželi čestná uznání, byli odměněni podle pořadí různými věcnými cenami, zvláště studijní literaturou.

Soutěží II. kola v kategoriích B, C a D soutěž končí; proto uvedeme pořadí deseti nejlepších úspěšných řešitelů II. kola v kategoriích B a C podle jednotlivých krajů.

Pořadí úspěšných řešitelů II. kola v kategoriích B a C

(Není-li uvedeno jinak, jedná se o SVVŠ a o třídu odpovídající příslušné kategorii)

Praha-město

B. Radovan Gregor, Praha 2; Jan Čermák, Praha 2; Petr Doberský, Praha 2; Aleš Filinger, Praha 7; Vladimír Haasz, Praha 2; Marie Münzová, Praha 7; Petr Novotný, Praha 7; Štěpán Kotva, Praha 8; Petr Müller, Praha 4; Vít Bělič, Praha 6.

C. Jan Pachtl, Praha 6; Tomáš Markvart, Praha 6; Pavel Balek, Praha 2; Vladimír Müller, Praha 6; Jan Mašek, Praha 2; Jiří Mukařovský, Praha; Alena Myšková, Praha 2; Jan Sedláček, Praha 2; Václav Šrámek, Praha 2; Pavel Štěpán, Praha 6.

Středočeský kraj

B. Jiří Neustupa, Nové Strašecí; Michael Holan, Kolín; Petr Dušek, Příbram; Věra Dvořáková, Příbram; Václav Kříž,

Beroun; Jarmila Lisá, Beroun; Rudolf Sedlmaier, Brandýs n. Labem.

C. Eva Albertová, Příbram; Jiří Čížek, Beroun; Pavel Čížek, Radotín; Milan Benedikt, Příbram; Pavel Sedláček, Benešov; Josef Zicha, Příbram; Vladimír Šimek, Benešov; Jaroslav Faltýn, Benešov; Václav Havlík, Benešov; Petr Měchura, Benešov.

Jihočeský kraj

B. Ivana Novotná, České Budějovice; Alena Kryšťůvková, Písek.

C. Jiří Laštovka, České Budějovice; Karel Hájek, Týn n. Vltavou; Václav Šanda, Tábor; Václav Brunnhofer, České Budějovice; Karel Chaloupek, SPŠ Písek; Vladimír Dvořák, Český Krumlov; Jiří Novák, Vimperk; Jaroslav Dolejší, SPŠ Písek; Zdena Lískovcová, Soběslav; Jiří Janovec, Pelhřimov.

Západočeský kraj

B. Jan Kastl, Plzeň; Jan Slavík, Plzeň; František Pazdera, Plzeň; Jan Louda, Plzeň; Pavel Levý, Plzeň.

C. Jana Tauberová, Domažlice; Karel Rusňák, Klatovy; Marie Lukešová, Sušice; Josef Zeman, Karlovy Vary; Milan Gütter, Plzeň; František Straka, Rokycany; Jar. Červená, Sušice; Pavel Danihelka, Sušice.

Severočeský kraj

B. Jan Mühlstein, Liberec; Stanislav Cais, Liberec; Josef Fučík, Liberec; Zdeňka Cmuntová, Liberec; Jana Voříšková, Ústí nad Labem; Hana Rezlerová, Liberec; Stanislav Hotmar,

Tanvald; Jaroslava Nečasová, Liberec; Jaroslav Janáček, Liberec; Pavel Vágner, Liberec.

C. Pavel Jurák, Liberec; Ludmila Boubelíková, Ústí n. L.; Vladimír Kalina, Jablonec n. Nisou; Ladislav Kastl, Liberec; Stanislav Hradský, Teplice; Zdeněk Rais, Liberec; Petr Janeček, Liberec; Vladimír Vydra, Liberec; Marcel Štěpánek, SPŠs Liberec; Karel Tyml, SPŠs Liberec.

Východočeský kraj

B. Milan Rejchrt, Hradec Králové; Zdenka Mašková, Kostelec nad Orlicí; Milan Fireš, Hradec Králové; Jan Sedláček, Hradec Králové; Bohuslav Vacek, Česká Třebová; Libor Haďrava, SPŠ elektro., Pardubice; Marie Moudrá, Hradec Králové; Miloslav Hrubeš, Hradec Králové; Vladislav Hýbl, Hradec Králové; Jaroslav Šimek, Jičín; Václav Beran, Trutnov.

C. Miroslav Ježek, Chrudim; Petr Janda, Vrchlabí; Michal Allan, Pardubice-Spořilov; František Haas, Dvůr Králové; František Mandys, Pardubice-Spořilov; Karel Plavec, Heřmanův Městec; Milan Horáček, Ledec nad Sázavou; Jaroslav Lesák, Žamberk; Vladimír Nevoral, SPŠ elektro., Pardubice; Pavel Štajnrt, Náchod; Alena Brožová, Jičín; Jana Hájková, Jilemnice; Jan Matouš, Pardubice-Spořilov; Jiří Pospíšil, Hradec Králové; Miroslav Andrlé, Vysoké Mýto; Milan Volf, Dvůr Králové.

Jihomoravský kraj

B. Vlastimil Bartoš, Holešov; Jan Fiala, Třebíč; Josef Dařík, Brno; Jan Filipenský, SPŠ elektro., Brno; Ladislav Chvátal, Třebíč; Ladislav Ježek, SPŠ elektro., Brno; František Klein, Brno; Sáva Nováček, Třebíč; Petr Hons, SZTŠ Třebíč; Ladislav Obdržálek, Brno, Koněvova ul.

C. Rostislav Šehýr, Brno; Jaromír Duda, Brno; Pavla Bezunková, Znojmo; Stanislav Caha, Třebíč; Eva Ducháčková, Brno, Lerchova ul.; Josef Gregor, Třebíč; Miloš Chlup, Znojmo; Miloslav Karásek, Třebíč; Zdeněk Konečný, Nové Město na Mor.; Karel Mikulášek, Brno.

Severomoravský kraj

B. Dagmar Nováčková, Bílovec; Roman Kotecký, Ostrava; Stanislav Rduch, Karviná; Eva Kubištová, Nový Bohumín; Vladimír Vytřas, Bílovec; Zdeněk Šrajer, Opava; Roman Kot, Nový Bohumín; Milan Stoklasa, Ostrava-Hladnov; Pavel Tomáš, Ostrava-Hladnov; Jaroslav Dvořáček, Ostrava-Hladnov.

C. Jaroslav Sklenář, Havířov; Jiří Demel, Val. Meziříčí; Miloslav Kawalec, Havířov; František Pohl, Ostrava 1; Olga Velemínská, Ostrava; Ivan Novosad, Valašské Meziříčí; Otakar Šigut, SPŠ stroj., Vsetín; Vladimír Šrámek, SPŠ stroj., Vsetín; Pavel Hadraba, Bruntál; Jaroslav Teda, Ostrava.

Západoslovenský kraj

B. Martin Macháček, Bratislava; Marian Bukovčan, Bratislava; František Hajnovič, Bratislava; Gejza Wimmer, Bratislava; Otakar Grošek, Bratislava; František Benkovič, Holič; Vlasta Křížová, Holič; Jaroslava Schöffnerová, Holič; Ján Zrubec, Levice; Michal Tvrdoň, Bratislava.

C. Marián Déneš, ZDŠ Košice; Jozef Komorník, Holič; Vladimír Čech, Bratislava; Ľubomír Sestrienka, Bratislava; Karol Pastor, Bratislava; Ľubomír Pieružek, Bratislava; Michal Grell, Bratislava; Jozef Götz, Nitra; Peter Kurdel, Bratislava; Jaroslav Kilián, Bratislava.

Středoslovenský kraj

B. M. Fúrik, Zvolen; I. Kantorová, Žilina; S. Sitarová, Turč. Teplice; J. Slabeycius, B. Bystrica.

C. Mária Ruttkayová, Prievidza; Peter Nagy, B. Bystrica; Igor Túnyi, Hnúšťa; Klára Gubalová, Modrý Kameň; Rudolf Tholt, Lipt. Mikuláš; Vladimíra Hanzlová, SPŠ Dubnica; Vladimír Plintovič, B. Bystrica; Milan Červeňan, SPŠ Dubnica; Dušan Hudec, Rim. Sobota; Oľga Nagyová, Filakovo.

Východoslovenský kraj

B. Stanislav Palúch, Prešov; Alica Pirická, Košice.

C. Eugen Ružický, Prešov-Svojdóm; Vladimír Bulla, Košice.

3. *III. kolo.* Ačkoliv mezi 446 účastníky II. kola kategorie A bylo 132 úspěšných řešitelů, navrhly jich do III. kola KVMO jen 92. A z těchto 92 návrhů vybrala komise ÚVMO po koordinaci klasifikace jen 57 účastníků. Zastoupení krajů bylo velmi nerovnoměrné — od 1 účastníka (Západočeský kraj) až po 25 z Prahy. Úlohy III. kola nebyly zřejmě tak obtížné a proto je relativně velmi vysoký počet vítězů a úspěšných řešitelů (celkem 37 z 57 účastníků). Bohužel „mezinárodní prověrka“ kvality našich vítězů MO na MMO v Sofii už tradičně nedopadla dobře. Opět se potvrdilo, že se někteří přední vítězové našeho III. kola neumístili. (O MMO v Sofii je v brožuře samostatná zpráva.)

Dále uvedeme jmenný seznam vítězů XV. ročníku MO.

Pořadí vítězů XV. ročníku matematické olympiády (Šk. r. 1965—66)

1. *Peter Mederly* 3d, SVŠ Prievidza,
2. *Jiří Šmerk* 3c, SVVŠ Kyjov,
3. *Pavel Vejvoda* 2g, SVVŠ W. Piecka, Praha 2,
4. *Miroslav Kosina* 3a, SVVŠ U balvanu, Jablonec n. N.,
5. *Jiří Rott* Ž 4b, SPŠ hutnická, Kladno,

6. { *Petr Kůrka* 2g, SVVŠ W. Piecka, Praha 2,
- až { *Petr Němec* 3d, SVVŠ Dlouhý lán, Praha,
9. { *Pavel Novotný* 3c, SVVŠ Olomouc-Hejčín,
10. { *Pavel Polcar* 1b, SVVŠ Velké Meziříčí,
10. { *Bohumil Čapek* 2g, SVVŠ W. Piecka, Praha 2,
- až { *Jan Kastl* 2f, SVVŠ J. Fučíka, Plzeň,
12. { *Miroslav Kolář* 3d, SPŠ elektro Pardubice, Smetanovo n.,
13. { *Václav Koubek* 2e, SVVŠ Sladkovského, Praha 3,
- až { *Pavel Novák* 2c, SVVŠ Štěpánská, Praha 2,
15. { *Zdeněk Slanina* 3a, SPŠ chem. Brno, Vranovská ul.,
16. { *František Hajnovič* 2a, SVŠ Novohradská, Bratislava,
- až { 17. { *Vladislav Hyšman* 3b, SVVŠ Havlíčkova ul., Roudnice
n. L.
18. { *Miroslav Sedláček* M4a, SPŠ elektro Brno,
- až { *Jana Štěpánková* 3d, SVVŠ Slovanské n., Brno,
20. { *Jiří Svoboda* 3a, SVVŠ Voděradská ul., Praha-Strašnice.

Poznámka. Společná místa uvádíme v abecedním pořádku.

Tabulka č. 1

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B, C *)

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	z toho dívek	Ú	P	z toho dívek	Ú	P	z toho dívek	Ú	P	z toho dívek	Ú
Praha - město	86	10	64	120	15	84	139	30	84	345	55	232
Středočeský	33	7	21	47	14	31	78	17	35	158	38	87
Jihočeský	39	6	36	62	18	59	69	17	69	170	41	164
Západočeský	28	9	19	48	13	41	55	18	35	131	40	95
Severočeský	73	27	31	97	40	66	116	35	63	286	102	160
Východočeský	57	12	54	97	31	92	114	41	93	268	84	239
Jihomoravský	121	35	105	174	53	146	303	67	145	598	155	396
Severomoravský	55	10	37	79	19	69	112	25	78	246	54	184
Západoslovenský	56	23	29	93	32	58	127	37	66	276	92	153
Středoslovenský	53	16	45	99	50	78	136	53	94	288	119	217
Východoslovenský	24	1	13	68	19	30	62	15	9	154	35	52
Celkem	625	156	454	984	304	754	1311	355	771	2920	815	1979

*) P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 2

Přehled účastníků I. kola podle krajů v kategorii D*)

Kraj	Kategorie D			
	P	z toho dívek	Ú	z toho dívek
Praha - město	883	381	603	241
Středočeský	912	520	617	325
Jihočeský	679	354	521	227
Západočeský	453	219	241	119
Severočeský	565	294	343	183
Východočeský	796	390	429	194
Jihomoravský	1 009	447	628	299
Severomoravský	759	330	483	192
Západoslovenský	1 070	511	846	441
Středoslovenský	621	318	378	190
Východoslovenský	698	355	352	180
Celkem	8 445	4 119	5 441	2 591

*) P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 3

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	z toho dívek	Ú	P	z toho dívek	Ú	P	z toho dívek	Ú	P	z toho dívek	Ú
Praha - město	64	7	34	84	11	27	77	18	53	225	36	114
Středočeský	20	1	2	31	10	7	32	7	19	83	18	28
Jihočeský	36	5	11	53	18	2	69	17	45	158	40	58
Západočeský	19	7	3	32	6	5	33	9	8	84	22	16
Severočeský	31	8	18	63	25	18	57	8	29	151	41	65
Východočeský	54	9	12	89	28	11	87	27	45	230	64	68
Jihomoravský	105	34	29	135	35	30	145	56	72	385	125	131
Severomoravský	37	5	7	65	16	12	75	15	30	177	36	49
Západoslovenský	29	4	5	56	20	13	66	21	32	151	45	50
Středoslovenský	39	11	8	73	33	4	85	30	15	197	74	27
Východoslovenský	12	1	3	30	7	2	9	0	2	51	8	7
Celkem	446	92	132	711	209	131	735	208	350	1892	509	613

*) P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 4

Přehled účastníků II. kola podle krajů v kategorii D*)

Kraj	Kategorie D			
	P	z toho dívek	Ú	z toho dívek
Praha - město	542	218	335	131
Středočeský	499	263	271	129
Jihočeský	477	245	251	123
Západočeský	222	111	56	31
Severočeský	303	155	101	40
Východočeský	412	172	281	118
Jihomoravský	548	257	132	56
Severomoravský	463	178	155	53
Západoslovenský	812	430	258	135
Středoslovenský	391	197	223	119
Východoslovenský	340	192	200	121
Celkem	5 009	2 418	2 263	1 056

*) P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

III. Přípravné úlohy I. kola

1. KATEGORIE A

1. Z jistého množství rozváleného těsta se vykrájí p koláčů, po novém rozválení stačí průměrně těsto z okrajků k koláčů na vykrojení jednoho dalšího koláče.

Odvoďte vzorec pro celkový počet koláčů, které lze z tohoto těsta vyrobit za předpokladu, že $p < k^k$.

(Poznámka. Využijte rozkladu čísla p na mnohočlen v mocninách čísla k :

$$p = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \dots + a_1 k + a_0.)$$

Řešení. Číslo p rozložíme na mnohočlen v mocninách čísla k .
Budiž

$$p = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \dots + a_1 k + a_0, \quad (1)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou nezáporná celá čísla menší než k , $a_n \neq 0$.

Z počtu k^n koláčů je tak velké množství okrajků, že z nich lze po novém rozválení těsta průměrně vyrobit dalších k^{n-1} koláčů. Z těchto koláčů je opět k^{n-1} okrajků, z nichž lze po dalším rozválení těsta vyrobit k^{n-2} koláčů, atd. Celkem lze z těsta na $a_n k^n$ koláčů vyrobit

$$a_n (k^n + k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k + 1) = a_n \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \quad (2)$$

koláčů. Nakonec ještě zbude $a_n < k$ okrajků, z nichž už nelze vyrobit žádný celý koláč. Obdobně z těsta na $a_{n-1} k^{n-1}$ koláčů lze vyrobit

$$a_{n-1} \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (3)$$

koláčů a zbude $a_{n-1} < k$ okrajků, atd. Celkem se z daného těsta vyrobí podle (2), (3) a dalších podobných výrazů

$$\begin{aligned} N_1 = & a_n \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} + a_{n-1} \frac{k^n - 1}{k - 1} + \dots + \\ & + a_1 \frac{k^2 - 1}{k - 1} + a_0 \frac{k - 1}{k - 1} \end{aligned} \quad (4)$$

koláčů a zbude

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \quad (5)$$

okrajků. Z okrajků (5) se vyrobí ještě N_2 koláčů, kde N_2 je největší celé číslo splňující vztah

$$N_2 \leq \frac{1}{k} (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0). \quad (6)$$

Počet okrajků z těchto N_2 koláčů je menší nebo roven číslu

$$Z = \frac{1}{k} \cdot (n + 1) \cdot a, \quad (7)$$

kde $(n + 1)$ je počet koeficientů polynomu (1) a číslo a je maximum z těchto koeficientů a_i (pro $i = 0, 1, 2, \dots, n$). Protože podle podmínky úlohy je $p < k^k$, je $n < k$ a dále

$$n + 1 \leq k. \quad (8)$$

Pro každý z koeficientů a_i platí $a_i < k$ a tedy i

$$a < k. \quad (9)$$

Dosadíme-li z (8) a (9) do pravé strany vztahu (7), pak platí

$$Z < \frac{1}{k} \cdot k \cdot k = k,$$

což značí, že ze $Z < k$ okrajů už nelze vyrobit žádný další koláč.

Upravíme vzorec pro N_1 s použitím (1):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{k-1} \{k(a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0) - (a_n + \\ &\quad + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)\} = \\ &= \frac{k}{k-1} \cdot p - \frac{1}{k-1} (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0). \quad (10) \end{aligned}$$

Celkový počet N vyrobených koláčů je tedy nejbližší nižší celé číslo k součtu pravých stran vztahů (6) a (10); označíme je hranatými závorkami $[a]$. Platí tedy po úpravě

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2 = \\ &= \left[\frac{k}{k-1} p - \frac{1}{k(k-1)} (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \right], \end{aligned}$$

což je hledaný vzorec.

Např. pro $p = 1000$, $k = 7$, kde $1000 < 7^7$, dostaneme

$$N = \left[\frac{7000}{6} - \frac{16}{42} \right],$$

neboť $1000 = 2 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 6$. Je tedy

$$N = \left[1166 + \frac{2}{3} - \frac{8}{21} \right] = \left[1166 + \frac{2}{7} \right] = 1166.$$

Jiné řešení. V celém řešení značí latinská písmena celá nezáporná čísla.

Po vykrájení p koláčů zůstane také p okrajků. Nechť je nyní

$$p = c_1 k + d_1, \text{ kde } 0 \leq d_1 < k, \quad c_1 \neq 0, \quad (1)$$

$$c_1 + d_1 = c_2 k + d_2, \text{ kde } 0 \leq d_2 < k, \quad c_2 \neq 0, \quad (2)$$

$$c_2 + d_2 = c_3 k + d_3, \text{ kde } 0 \leq d_3 < k, \quad c_3 \neq 0, \quad (3)$$

.....

$$c_{n-1} + d_{n-1} = c_n k + d_n, \text{ kde } 0 \leq d_n < k, \quad c_n \neq 0, \quad (n)$$

$$c_n + d_n = d_{n+1}, \text{ kde } 0 < d_{n+1} < k. \quad (n+1)$$

Z rovnosti (1) je vidět, že po prvním rozválení těsta využijeme z původních p okrajků pouze $c_1 k$ okrajků ke zhotovení nových c_1 koláčů. Z nich zůstane opět c_1 nových okrajků. Zbytek, tj. d_1 starých okrajků, nelze zatím využít.

Z rovnosti (2) je vidět, že po druhém rozválení těsta z $c_1 + d_1$ okrajků dostaneme nových c_2 koláčů a zůstane $c_2 + d_2$ okrajků atd. Tento postup skončí, jakmile zbude méně než k okrajků. Všimněme si ještě, že $d_{n+1} \neq 0$. Jinak by totiž z $(n+1)$ plynulo, že $c_n = d_n = 0$, což je spor.

Počet všech koláčů je dán součtem

$$s = p + z,$$

kde

$$z = c_1 + c_2 + \dots + c_n.$$

Číslo z dostaneme sečtením levých a pravých stran rovností (1) až $(n+1)$. Po snadné úpravě dostaneme

$$p = (c_1 + c_2 + \dots + c_n)(k-1) + d_{n+1},$$

tj.

$$p = z(k-1) + d_{n+1}.$$

Protože

$$p-1 = z(k-1) + q', \text{ kde pro } q' = d_{n+1} - 1 \text{ je}$$

$0 \leq q' < k - 1$, je z částečný podíl a q' zbytek při dělení čísla $p - 1$ číslem $k - 1$. Označíme-li jako $C(x)$ největší celé číslo nepřevyšující x , je celkový počet koláčů roven

$$p + C\left(\frac{p-1}{k-1}\right).$$

Tento výsledek je nezávislý na podmínce $p < k^k$.

2. Funkcia premennej x je pre $x > 0$ daná predpisom

$$y = \sqrt{\frac{3x - 4C(x)}{2x - C(x)}}, \quad (1)$$

kde $C(x)$ znamená najväčšie celé číslo nepřevyšujúce x . Je teda $C(x)$ celé číslo, pre ktoré platí

$$C(x) \leq x < C(x) + 1. \quad (2)$$

Vyšetrite obor definície tejto funkcie a načrtnite jej graf. (Poznámka. Vyšetrujte danú funkciu postupne v intervaloch $(0; 1)$, $(1; 2)$, atď.)

Riešenie. Vyšetrjme najskôr obor definície funkcie (1). Odmocnina na pravej strane je definovaná len pre tie x , pre ktoré platí

$$\frac{3x - 4C(x)}{2x - C(x)} \geq 0. \quad (3)$$

Pretože z nerovnosti (2) vyplýva $x - C(x) \geq 0$, je pre $x > 0$ menovateľ zlomku $2x - C(x)$ vždy kladný. Nerovnosť (3) platí preto len pre tie x , pre ktoré súčasne platí

$$3x - 4C(x) \geq 0. \quad (4)$$

Pre ľubovoľné prirodzené číslo x platí

$$C(x) = x,$$

takže po dosadení do ľavej strany nerovnosti (4) dostaneme

$$3x - 4x < 0 .$$

Funkcia (1) nie je preto definovaná pre žiadne prirodzené číslo x .

Z nerovnosti (4) vyplýva

$$3x \geq 3 C(x) + C(x) ,$$

čiže

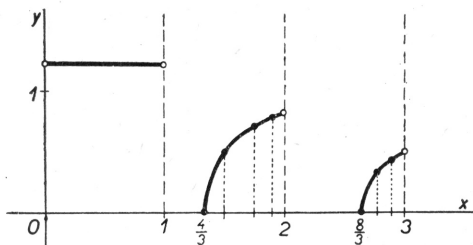
$$x \geq C(x) + \frac{1}{3} C(x) . \quad (5)$$

Pre $x > 3$ je $\frac{1}{3} C(x) \geq \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$, takže po dosadení do (5) dostaneme

$$x \geq C(x) + 1 ,$$

čo je v spore s nerovnosťou (2). Funkcia (1) nie je preto definovaná pre žiadne $x > 3$.

Zostáva teda vyšetriť funkciu (1) v otvorených intervaloch $(0; 1)$ $(1; 2)$ a $(2; 3)$.



Obr. 1.

a) V intervale (0;1) je $C(x) = 0$, takže predpis (1) má tvar

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x}{2x}}, \quad (1')$$

t. j.

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \doteq 1,22.$$

Graf funkcie je znázornený na obr. 1.

b) V intervale (1; 2) je $C(x) = 1$, takže predpis (1) bude mať tvar

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x - 4}{2x - 1}}. \quad (1'')$$

Pretože pre čitateľa zlomku na pravej strane vzťahu (1'') musí platiť

$$3x - 4 \geq 0,$$

je funkciá (1) definovaná v intervale (1; 2) len pre $x \geq \frac{4}{3}$.

Graf funkcie na obrázku vznikol spojením bodov, ktorých súradnice sú uvedené v tabuľke

x	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	1,9
y	0	0,5	0,71	0,78

c) V intervale (2; 3) je $C(x) = 2$, takže predpis (1) bude mať tvar

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x - 8}{2x - 2}}. \quad (1''')$$

Pretože pre čitateľa zlomku na pravej strane vzťahu (1''') musí platiť

$$3x - 8 \geq 0,$$

je funkcia (1) definovaná v intervale (2; 3) len pre $x \geq \frac{8}{3}$.

Graf funkcie na obrázku vznikol spojením bodov, ktorých súradnice sú v tabuľke:

x	$\frac{8}{3}$	2,8	2,9
y	0	$\frac{1}{3}$	0,43

Záver: Funkcia (1) je definovaná v intervaloch $(0; 1)$, $(\frac{4}{3}; 2)$ a $(\frac{8}{3}; 3)$. V týchto intervaloch nadobúda predpis (1) v uvedenom poradí tvar (1'), (1''), resp. (1'''). Graf funkcie je na obrázku 1.

3. Je daná kvadratická rovnica

$$az^2 + (b - \bar{b})z - \bar{a} = 0, \quad (1)$$

kde a, b sú komplexné čísla, $a \neq 0$, $\bar{a}, \bar{b}$ čísla komplexne združené k číslam a, b . Koreňmi tejto rovnice sú dve komplexné jednotky práve vtedy, keď je

$$(b - \bar{b})^2 + 4a\bar{a} \geq 0. \quad (2)$$

Dokážte!

(Poznámka. Pre rovnice typu (1) s komplexnými koeficientami platia tie isté vety o vlastnostiach koreňov ako pre rovnicu s reálnymi koeficientami. Číslo z je komplexnou jednotkou práve vtedy, ak platí

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = 1.$$

V dôkaze použite nerovnosť

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| .)$$

Riešenie. a) Predovšetkým je zrejmé, že ak jeden koreň rovnice (1) je komplexná jednotka, potom aj druhým koreňom bude komplexná jednotka, pretože súčin oboch koreňov je číslo $-\frac{\bar{a}}{a}$, čo je komplexná jednotka.

b) Nech koreňmi rovnice (1) sú komplexné jednotky z_1, z_2 . Potom platí

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 2. \quad (3)$$

Pre súčet koreňov rovnice (1) platí

$$z_1 + z_2 = \frac{\bar{b} - b}{a}, \quad (4)$$

Ak dosadíme zo vzťahu (4) do (3), dostaneme

$$\left| \frac{\bar{b} - b}{a} \right| \leq 2 .$$

Teda

$$\sqrt{\frac{(\bar{b} - b)(\bar{b} - b)}{a \cdot \bar{a}}} \leq 2 .$$

čiže

$$\sqrt{-\frac{(b - \bar{b})^2}{a \cdot \bar{a}}} \leq 2 .$$

Po umocnení nezáporných výrazov na oboch stranách poslednej nerovnosti a jednoduchšej úprave dostaneme nerovnosť (2).

c) Nech platí vzťah (2). Označme

$$d = \sqrt{(b - \bar{b})^2 + 4a\bar{a}} .$$

Podľa vzorca pre riešenie kvadratickej rovnice je potom jeden z koreňov rovnice (1) daný vzťahom

$$z_1 = \frac{\bar{b} - b + d}{2a}. \quad (5)$$

Zo vzťahu (5) dostaneme

$$\bar{z}_1 = \frac{b - \bar{b} + d}{2\bar{a}}. \quad (6)$$

Zo vzťahov (5), (6) ich vynásobením dostaneme

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = \frac{d^2 - (b - \bar{b})^2}{4a \cdot \bar{a}} = \frac{(b - \bar{b})^2 + 4aa - (b - \bar{b})^2}{4a \cdot \bar{a}} = 1.$$

To znamená, že z_1 je komplexná jednotka a podľa odstavca a) je potom tiež druhý koreň z_2 rovnice (1) komplexná jednotka.

Tým je dôkaz úplne prevedený.

4. Je dán trojuholník ABC a záporné číslo κ . Vyšetrite množinu všetkých bodů X v rovine ABC , ktoré majú tieto vlastnosti:

- každý z bodů X leží uvnitř trojuholníka ABC ;
- stejnolehlost se středem X a koeficientem κ převádí vrcholy A, B v body ležící uvnitř trojuholníka ABC a vrchol C v bod ležící vně trojuholníka ABC .

(Poznámka. Experimentujte pro různá κ , např. pro $\kappa = -\frac{2}{3}$.

Vyšetrování lze zjednodušíť např. tím, že střed X stejnolehlosti s koeficientem κ , která převádí vrchol A v bod A' , lze sestrojiti jako obraz bodu A' v stejnolehlosti $\left[A, \frac{1}{1-\kappa} \right]$; dokažte tuto větu.)

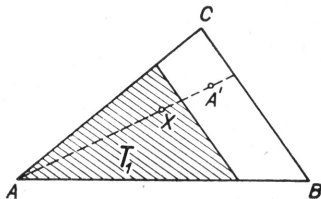
Řešení. Označme A' obraz vrcholu A v stejnolehlosti $[X, \kappa]$. Protože X leží mezi A, A' (neboť je $\kappa < 0$), platí

$$\frac{AX}{AA'} = \frac{AX}{AX + XA'} = \frac{1}{1 + \frac{XA'}{AX}}.$$

Avšak $\kappa = -\frac{XA'}{XA}$; proto stejnolehlost se středem A , která převádí A' v X má koeficient

$$\frac{AX}{AA'} = \frac{1}{1 - \kappa}.$$

Stejnolehlost $\left[A, \frac{1}{1 - \kappa}\right]$ převádí *vnitřek* trojúhelníka ABC ve *vnitřek* jistého trojúhelníka T_1 (obr. 2). Obdobně stejnolehlost $\left[B, \frac{1}{1 - \kappa}\right]$ převádí *vnitřek* trojúhelníka ABC ve *vnitřek* jistého trojúhelníka T_2 . Obdobně stejnolehlost $\left[C, \frac{1}{1 - \kappa}\right]$ převádí *vnějšek* trojúhelníka ABC ve *vnějšek* jistého trojúhelníka T_3 . Řešení úlohy dává společná část (průnik) vnitřků trojúhelníků T_1, T_2 a vnějšku trojúhelníku T_3 .



Obr. 2.

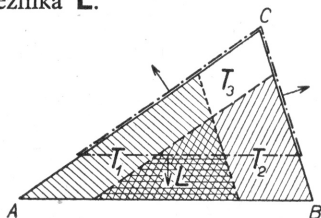
Rozlišíme tři případy:

a) $\kappa > -\frac{1}{2}$;

b) $-1 < \kappa \leq -\frac{1}{2}$;

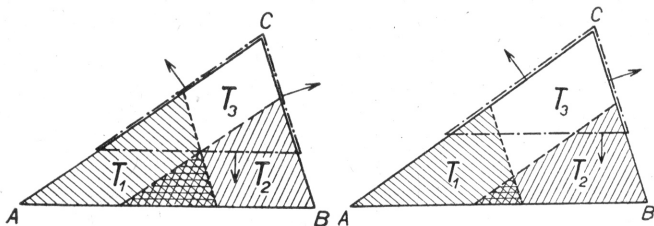
c) $\kappa \leq -1$.

a) Na obr. 3 je zvoleno $\kappa = -\frac{1}{3}$. Body X žádaných vlastností vyplní v tomto a v obdobných případech vnitřek vyšrafovaného lichoběžníka **L**.



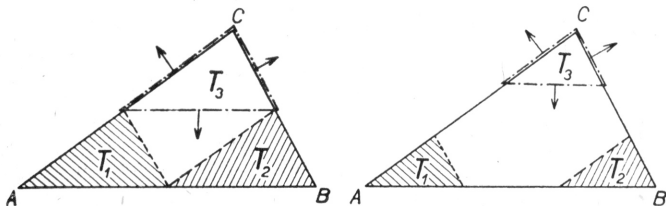
Obr. 3.

b) Na obr. 4a je zakreslena situace pro $\kappa = -\frac{1}{2}$ a na obr. 4b situace pro $\kappa = -\frac{5}{7}$. Středý X tu vyplní vždy vnitřek vyšrafovaného trojúhelníka.



Obr. 4a, b.

c) Na obr. 5a je zakreslena situace pro $\kappa = -1$ a na obr. 5b situace pro $\kappa = -2$. Množina všech bodů X je v obou případech prázdná.



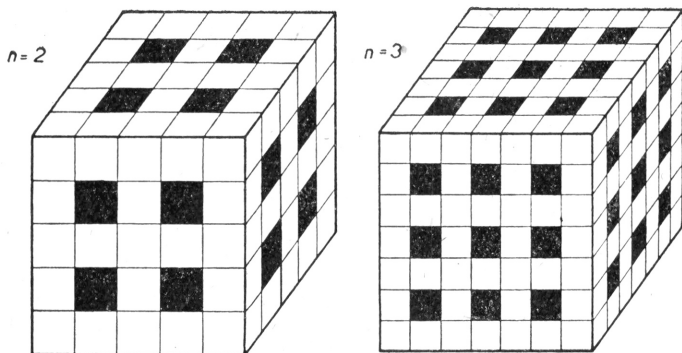
Obr. 5a, b.

Výsledek je shrnut v tabulce:

κ	$0 > \kappa > -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \geq \kappa > -1$	$-1 \geq \kappa$
Množina všech bodů X	Vnitřek lichoběžníka	Vnitřek trojúhelníka	Množina prázdná

5. Je dána krychle o hraně délky 1. Každá její stěna je rozdělena v $(2n + 1)^2$ shodných čtverců podle obr. 6 (kde $n = 2$ a $n = 3$). Vnitřními n^2 čtverci každé stěny (na obrázku černými) jsou vedeny celým tělesem kolmo ke stěně „kanály“ ve tvaru pravidelných čtyřbokých hranolů.

- Vypočtete objem V_n a povrch S_n zbylého tělesa.
 - Zjistěte zda lze zvolit n tak, aby bylo $V_n \leq \frac{1}{2}$.
 - Zjistěte zda lze zvolit n tak, aby bylo $S_n > 100$.
- (Poznámka. V případě b) vyšetřujte výraz $2 \cdot V_n$.)



Obr. 6.

Řešení. a) Každý „kanál“ obsahuje $2n + 1$ krychliček; počet „kanálů“ je $3 \cdot n^2$. Sečteme-li nezávisle objemy všech $3n^2$ „kanálů“, počítáme objemy jejich průniků třikrát; počet těchto průniků je $n \cdot n^2$ (každý „kanál“ obsahuje právě n průniků). Objem všech „kanálů“ je tedy

$$V'_n = [3n^2 \cdot (2n + 1) - 2n \cdot n^2] \cdot \frac{1}{(2n + 1)^3}; \quad (1)$$

$\frac{1}{(2n + 1)^3}$ je totiž objem jedné malé krychličky z průniku „kanálů“.

Z (1) dostaneme

$$V_n = 1 - V'_n = 1 - \frac{4n^3 + 3n^2}{(2n + 1)^3}$$

a po úpravě

$$V_n = \frac{4n^3 + 9n^2 + 6n + 1}{8n^3 + 12n^2 + 6n + 1}. \quad (2)$$

Povrch S_n zbylého tělesa se skládá z šesti „děravých“ stěn a ze stěn „kanálů“. Počet čtverečků děravých stěn je

$$6[(2n + 1)^2 - n^2] = 6(n + 1)(3n + 1). \quad (3)$$

Počet čtverečků ve stěnách „kanálů“ je $4(n + 1)$; počet čtverečků skládajících stěny všech kanálů je tedy

$$12n^2(n + 1). \quad (4)$$

Spojením (3), (4) dostaneme

$$S_n = [6(n + 1)(3n + 1) + 12n^2(n + 1)] \cdot \frac{1}{(2n + 1)^2}; \quad (5)$$

$\frac{1}{(2n + 1)^2}$ je totiž obsah jednoho čtverečku. Vzorec (5) upravíme:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{6(n + 1)}{(2n + 1)^2} [3n + 1 + 2n^2] = \frac{6(n + 1)^2(2n + 1)}{(2n + 1)^2} = \\ &= \frac{6(n + 1)^2}{2n + 1}. \end{aligned} \quad (6)$$

b) Uvažujme dvojnásobek čísla V_n ze vzorce (2):

$$\begin{aligned} 2V_n &= \frac{8n^3 + 18n^2 + 12n + 2}{8n^3 + 12n^2 + 6n + 1} = \\ &= 1 + \frac{6n^2 + 6n + 1}{8n^3 + 12n^2 + 6n + 1} > 1 \end{aligned}$$

neboli pro všechna n platí

$$V_n > \frac{1}{2}.$$

Žádné n , pro které by platilo, že $V_n \leq \frac{1}{2}$, tedy neexistuje.

c) Máme řešit nerovnost (viz (6))

$$\frac{6(n+1)^2}{2n+1} > 100$$

neboli po úpravě

$$3n^2 - 94n - 47 > 0. \quad (7)$$

Rovnice $3n^2 - 94n - 47 = 0$ má dva reálné kořeny n_1, n_2 , pro něž platí

$$-1 < n_1 < 0, \quad 31 < n_2 < 32.$$

Zvolíme-li libovolné přirozené $n > n_2$, je $S_n > 100$. Pro $n = 32$ je počet „kanálů“, který splňuje požadavek úlohy c), minimální, tj. $3 \cdot 32^2 = 3072$.

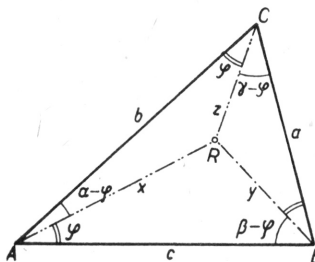
6. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod R té vlastnosti, že $\sphericalangle RAB = \sphericalangle RBC = \sphericalangle RCA = \varphi$.

Jsou-li α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníka ABC , platí

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma};$$

dokažte.

(Poznámka. Obsah trojúhelníka ABC vyjádřete jako součet obsahů trojúhelníků ABR, BCR, CAR .)



Obr. 7.

Řešení (obr. 7). Označme $AR = x, BR = y, CR = z$, dále označme strany trojúhelníka ABC obvyklým způsobem a písmenem P jeho obsah. Podle sinové věty (pro trojúhelníky CAR, ABR a BCR) dostaneme

$$x = \frac{b}{\sin \alpha} \cdot \sin \varphi, \quad y = \frac{c}{\sin \beta} \cdot \sin \varphi, \quad z = \frac{a}{\sin \gamma} \cdot \sin \varphi; \quad (1)$$

je totiž $\sphericalangle ARC = 180^\circ - \alpha$, $\sphericalangle ARB = 180^\circ - \beta$,
 $\sphericalangle BRC = 180^\circ - \gamma$.

Pro obsahy trojúhelníků platí

$$\triangle ABR + \triangle BCR + \triangle CAR = \triangle ABC$$

neboli

$$\frac{1}{2} cx \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} ay \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} bz \cdot \sin \varphi = P. \quad (2)$$

Z (2) dostaneme úpravou

$$cx + ay + bz = \frac{2P}{\sin \varphi}. \quad (3)$$

Do (3) dosadíme z (1) a dělíme číslem $\sin \varphi$; vyjde

$$\frac{bc}{\sin \alpha} + \frac{ac}{\sin \beta} + \frac{ab}{\sin \gamma} = \frac{2P}{\sin^2 \varphi}. \quad (4)$$

Použijeme-li vzorců pro obsah trojúhelníku

$$P = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

vyjde dokazovaná rovnost.

2. KATEGORIE B

1. Najděte všechna reálná čísla x , pro která platí

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1. \quad (1)$$

Řešení. a) Platí-li pro reálné číslo x vztah (1), je

$$\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} \geq \sqrt[3]{1-x^2}, \quad (1a)$$

umocněním dostaneme

$$2 - 2\sqrt[3]{1-x^2} \geq 1 - x^2, \quad (1b)$$

tj.

$$1 + x^2 \geq 2\sqrt[3]{1-x^2}. \quad (1c)$$

Provedeme další umocnění; vyjde

$$1 + 2x^2 + x^4 \geq 4 - 4x^2, \quad (1d)$$

tj.

$$x^4 + 6x^2 - 3 \geq 0. \quad (2)$$

Trojčlen na levé straně (2) vyjádříme ve tvaru

$$(x^2 + 3)^2 - 12 \geq 0,$$

tj.

$$(x^2 + 3 + \sqrt{12})(x^2 + 3 - \sqrt{12}) \geq 0. \quad (3)$$

První činitel na levé straně (3) je vždy kladné číslo; proto musí být

$$x^2 + 3 - \sqrt{12} \geq 0, \quad (3')$$

tj.

$$|x| \geq \sqrt[3]{\sqrt{12} - 3} \doteq \sqrt[3]{0,464} \doteq 0,68. \quad (4)$$

b) Zkouška. Z (4) plyne (3'), odtud (3), (2), (1d). Z (1d) plyne (1c) právě tehdy, když platí

$$|x| \leq 1. \quad (5)$$

Nerovnost (1c) upravíme na tvar (1b) neboli

$$(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x})^2 \geq (\sqrt[3]{1-x^2})^2.$$

Z této nerovnosti plyne nerovnost (1a) právě tehdy, když je

$$\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} \geq 0,$$

neboli

$$\sqrt[3]{1+x} \geq \sqrt[3]{1-x},$$

neboli

$$1+x \geq 1-x. \quad (6)$$

Nerovnost (6) platí právě tehdy, když je

$$x \geq 0. \quad (7)$$

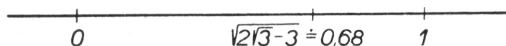
Z nerovnosti (1a) plyne (1) právě tehdy, pokud je

$$x \neq \pm 1. \quad (8)$$

Spojíme-li (4), (5), (7) a (8), dostaneme řešení

$$1 > x \geq \sqrt[3]{12} - 3.$$

Znázornění na číselné ose je na obr. 8.



Obr. 8.

2. Dekadický zápis právě jednoho z čísel

$$a_n = 7^{2n} + 2 \cdot 7^n + 2, \quad b_n = 7^{2n} - 2 \cdot 7^n + 2,$$

kde n je přirozené číslo, má na místě jednotek číslicu 5. Dokážte.

Riešenie. Ľahko sa presvedčíme, že mocniny 7^n pre $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ končia v uvedenom poradí číslicami 7, 9, 3, 1, pričom sa tieto číslice v postupnosti mocnín opakujú (podrobný dôkaz tohto pomocného tvrdenia možno podať matematickou indukciou).

Čísla a_n, b_n možno vyjadriť v tvare

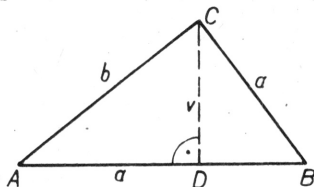
$$a_n = (7^n + 1)^2 + 1, \quad b_n = (7^n - 1)^2 + 1.$$

Čísla $7^n + 1$, resp. $7^n - 1$ končia teda postupne číslicami 8, 0, 4, 2, resp. 6, 8, 2, 0. Potom čísla $(7^n + 1)^2$, resp. $(7^n - 1)^2$ končia číslicami 4, 0, 6, 4, resp. 6, 4, 4, 0 a konečne čísla $(7^n + 1)^2 + 1$, resp. $(7^n - 1)^2 + 1$ končia číslicami 5, 1, 7, 5, resp. 7, 5, 5, 1.

Je teda vidieť, že pre každé prirodzené n končí práve jedno z čísel a_n, b_n číslicou 5. Tým je dôkaz prevedený.

3. Pravoúhlý trojuholník má tuto vlastnosť: Z jeho odvesen a z výšky na preponu lze sestrojit opět pravoúhlý trojuholník.

- Vypočtete poměr odvesny a přepony.
- Sestrojte aspoň jeden trojuholník uvedené vlastnosti.



Obr. 9.

Řešení (obr. 9). a) Budiž $b \geq a > v$. Pak pro druhý pravoúhlý trojuholník platí

$$b^2 = a^2 + v^2, \quad (1)$$

takže zároveň je

$$AD = BC = a.$$

Podle Eukleidovy věty je

$$AC^2 = AD \cdot AB,$$

tj.

$$b^2 = ac. \quad (2)$$

Do (2) dosadíme $b^2 = c^2 - a^2$, upravíme a získáme rovnici

$$a^2 + ac - c^2 = 0. \quad (3)$$

Protože $c \neq 0$, násobíme rovnici (3) číslem $\frac{1}{c^2}$ a dostaneme kvadratickou rovnici pro hledaný poměr odvěsny a a přepony c , tj. rovnici

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{a}{c} - 1 = 0. \quad (3')$$

Rovnice (3') má jediný kladný kořen

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1). \quad (4)$$

Rovnice (3) vyjadřuje nutnou a postačující podmínku pro to, aby daný trojúhelník měl vyslovenou vlastnost, jak plyne z obrácení postupu.

Poznámka. Při výpočtu poměru druhé odvěsny b a přepony c vyjdeme rovněž ze vztahu (2); jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{b}.$$

Dále platí

$$\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{b},$$

tj.

$$\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1}.$$

Umocněním a substitucí $x = \frac{b}{c}$ dostaneme

$$x^2 = \frac{1}{x^2} - 1$$

čili

$$x^4 + x^2 - 1 = 0, \quad (5)$$

což je kvadratická rovnice pro x^2 . Její jediný kladný kořen je

$$x^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1),$$

takže platí

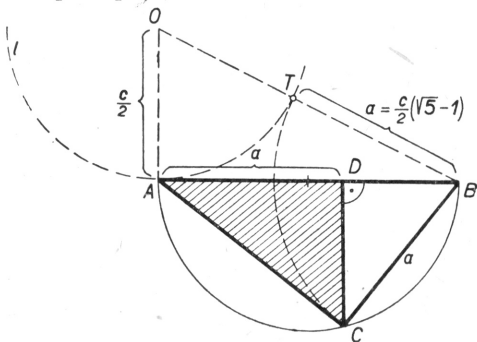
$$\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)}.$$

b) Pro zvolené $c = AB$ provedeme s použitím výsledku (4) konstrukci trojúhelníku ABC takto:

Sestrojíme pomocný pravoúhlý trojúhelník BAO s odvěsnami $AO = \frac{c}{2}$, $AB = c$. Kružnice $l = \left(O; \frac{c}{2}\right)$ protne úsečku BO v bodě T . Výpočtem se přesvědčíme, že

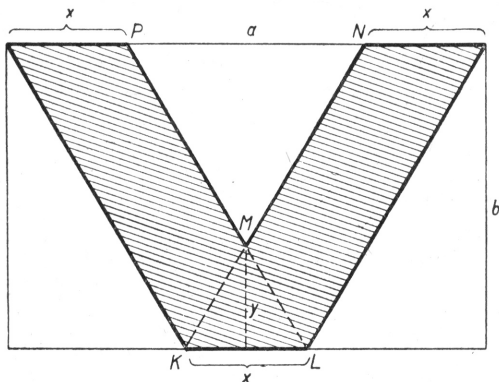
$$BT = \frac{c}{2} (\sqrt{5} - 1),$$

což je délka hledané odvěsny a , kterou vypočítáme ze (4). Další kroky konstrukce jsou zřejmé z obr. 10. Důkaz vyplývá z obrácení postupu a).



Obr. 10.

4. Je dán obdélník o rozměrech a , b . Do něho je vepsáno písmeno „V“ podle obrázku 11.



Obr. 11.

a) Vyjádřete obsah plochy písmene „V“ pomocí délky x a rozměrů a , b .

b) Pro kterou délku x je obsah plochy „V“ polovinou obsahu obdélníka?

Řešení. a) Z obrázku je patrné, že písmeno „V“ vznikne jen pro $x < \frac{a}{2}$. Z podobnosti trojúhelníků

$$\triangle KLM \sim \triangle NPM \quad (u u)$$

vyplývá

$$\frac{y}{x} = \frac{b - y}{a - 2x},$$

odtud po úpravě

$$y = \frac{bx}{a - x}. \quad (1)$$

Obsah plochy písmene „V“ označme z ; pak platí

$$z = 2bx - \frac{1}{2}xy. \quad (2)$$

Spojíme-li vztahy (1), (2) vyloučením y , dostaneme

$$z = \frac{4abx - 5bx^2}{2(a - x)}, \quad (3)$$

což je hledaný vzorec pro z platný pro $x < \frac{a}{2}$.

b) Druhou otázku zodpovíme po rozřešení rovnice $z = \frac{1}{2}ab$ (viz (3)) neboli

$$\frac{4abx - 5bx^2}{2(a - x)} = \frac{1}{2}ab, \quad (4)$$

kde neznámou je délka x ; a , b jsou dané rozměry obdélníku.

Odtud dostaneme po úpravě rovnici

$$5x^2 - 5ax + a^2 = 0. \quad (5)$$

Rovnice (5) má dva kladné kořeny

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}a, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}a.$$

Kořen x_1 nevyhovuje, neboť je

$$x_1 \doteq \frac{7,236}{10}a = 0,7236a > \frac{1}{2}a;$$

pro tuto délku x_1 nevznikne písmeno „V“. Druhý kořen x_2 vyhovuje, neboť je

$$x_2 \doteq \frac{2,764}{19}a = 0,2764a < \frac{1}{2}a.$$

Je třeba si ještě uvědomit, že z rovnice (5) vyplývá (4) neboli $z = \frac{1}{2} ab$; tím je provedena zkouška pro druhý kořen. Z postupu je patrné, že a je libovolné reálné kladné číslo; číslo b je rovněž kladné reálné číslo na čísle a nezávislé (viz úprava (4) na (5) a obráceně). Omezení $x < \frac{a}{2}$ vyplývá z požadavku existence písmene tvaru „ V “.

5. Je dán kvádr o rozměrech a, b, c , který není krychle. Součet objemů krychlí o hranách a, b, c je větší než trojnásobný objem daného kvádru; dokažte.

(Poznámka. Použijte výrazu $(a + b + c)^3$.)

Řešení. Máme vlastně dokázat toto tvrzení: Jsou-li a, b, c tři kladná čísla, ne vesměs sobě rovná (neboť jde o rozměry kvádru, který není krychle), pak platí

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc > 0. \quad (1)$$

Abychom tuto nerovnost dokázali, uijíme vzorce

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) + 6abc.$$

Tedy

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)^3 - 3(a^2b + ab^2 + a^2c + \\ &\quad + ac^2 + b^2c + bc^2) - 9abc = \\ &= (a + b + c)^3 - 3[ab(a + b + c) + ac(a + b + c) + \\ &\quad + bc(a + b + c)] = \\ &= (a + b + c) [a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc] = \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c) [(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2]. \end{aligned}$$

Poslední výraz je vždy kladný, neboť a , b , c jsou kladná čísla nevesměs sobě rovná. Tím je nerovnost (1) dokázána.

6. V rovine leží sedem rôznych priamok, ktorých vzájomná poloha je popísaná takto:

a) z daných priamok možno vybrať práve štyri dvojice rovnobežiek;

b) v rovine je 11 rôznych bodov, z ktorých každý je priesečníkom práve dvoch priamok.

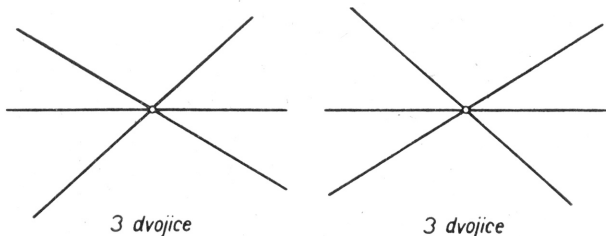
Zistite, či niektorým bodom roviny prechádza viac než dve z daných priamok.

Úloha má dva typy riešení; načrtnite ich!

(Poznámka. Počítame všetky možné zostaviteľné dvojice rovnobežiek, napr. tri rôzne rovnobežky predstavujú tri dvojice rovnobežiek.)

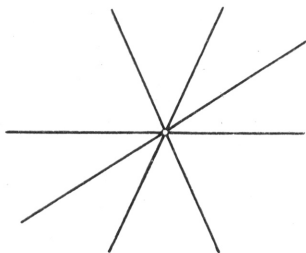
Riešenie. Zo siedmich rôznych priamok možno utvoriť $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ rôznych dvojíc. V sústave sú štyri dvojice rovnobežiek, a teda $21 - 4 = 17$ dvojíc rôznobežiek. Z nich je $17 - 11 = 6$ takých, ktoré sú tvorené priamkami, ktorých priesečníkom prechádza viac než dve priamky. To je možné dvoma spôsobmi:

1. dva priesečníky ležia na troch priamkach (obr. 12 a, b);



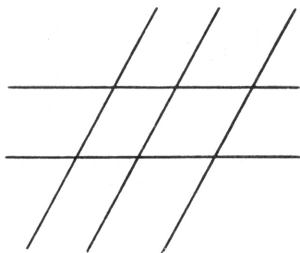
Celkem 6 dvojíc
Obr. 12a, b.

2. jeden priesečník leží na štyroch priamkach (obr. 13).



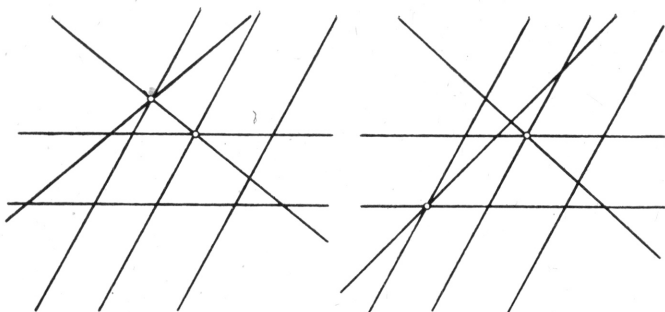
Obr. 13.

Štyri dvojice rovnobežiek nemôžu patriť štyrom rôznym smerom, pretože potom by všetkých priamok muselo byť aspoň osem. Patria tedy aspoň tri priamky tomu istému smeru. Nemôžu však tomu istému smeru patriť štyri priamky, pretože potom by existovalo aspoň 6 dvojíc rovnobežiek. Situácia s rovnobežkami je teda jedine takáto (obr. 14):



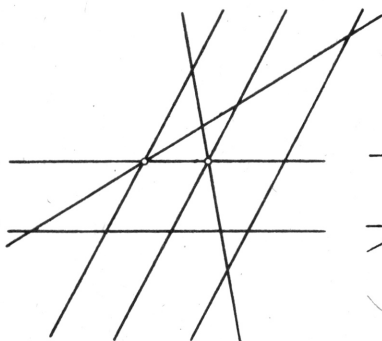
Obr. 14.

a) Predchádzajúci obr. 14 doplníme najskôr dvoma priamkami tak, aby vznikli dva priesečníky troch priamok. Sú to napr. takéto obrázky (obr. 15a, b, c):

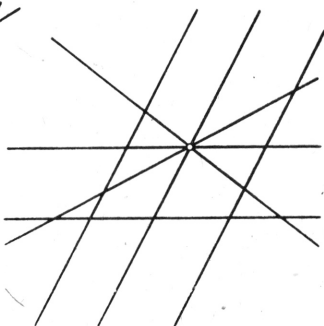


Obr. 15a, b.

b) Druhý spôsob doplnenia je taký, že vznikne priesečník štyroch priamok (obr. 16).



Obr. 15c.



Obr. 16.

3. KATEGORIE C

1. Tři navzájem různá přirozená čísla a, b, c mají tuto vlastnost: součet každých dvou z nich je dělitelný třetím číslem. Vyjádřete všechna čísla takové trojice pomocí nejmenšího z nich.

Řešení. Zvolme označení čísel a, b, c tak, aby bylo

$$a < b < c. \quad (1)$$

Podle (1) je $a + b < 2c$. Necht' $a + b = k \cdot c$, kde k je přirozené číslo. Je tedy $k \cdot c < 2c$, tj. $k = 1$, takže platí

$$c = a + b. \quad (2)$$

Podle (2) je

$$a + c = 2a + b = k' \cdot b, \quad (3)$$

kde k' je přirozené číslo.

Mimo to je podle (1) $2a < 2b$ a $b < a + c$. Je tedy podle (3)

$$b < k' \cdot b < 3b,$$

tj. $k' = 2$ a dále z (3) vyplývá

$$b = 2a. \quad (4)$$

Spojíme-li (2), (4), dostaneme

$$c = 3a. \quad (5)$$

Zvolíme-li a , dostaneme trojici $a, 2a, 3a$. Nejmenší taková trojice je 1, 2, 3.

Zkouškou se přesvědčíme, že trojice vyhovuje daným podmínkám.

2. O daných kladných číslech a, b, c, d platí

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}. \quad (1)$$

Dokažte, že pro každou dvojici kladných čísel x, y platí nerovnosti

$$\frac{a}{b} < \frac{ax + cy}{bx + dy} < \frac{c}{d}. \quad (2)$$

Řešení. Z (1) plyne

$$bc - ad > 0. \quad (1')$$

Vypočteme rozdíl

$$\begin{aligned} \frac{ax + cy}{bx + dy} - \frac{a}{b} &= \frac{1}{b(bx + dy)} (abx + bcy - abx - ady) = \\ &= \frac{y(bc - ad)}{b(bx + dy)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Poslední výraz v zápisu (3) je kladný, neboť $b > 0$, $bx + dy > 0$, $y > 0$, $bc - ad > 0$ (podle (1')).

Vypočteme rozdíl

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} - \frac{ax + cy}{bx + dy} &= \frac{1}{d(bx + dy)} (bcx + cdy - adx - cdy) = \\ &= \frac{(bc - ad)x}{d(bx + dy)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Také ve vztahu (4) je z obdobných důvodů jako při výpočtu prvního rozdílu poslední výraz kladný.

Vzhledem k výsledkům (3) a (4) jsou nerovnosti (2) správné.

3. Škola s n žiakmi mala pochodové cvičenie. Zraz bol na konečnej stanici elektrickej dráhy. Električkou pricestovalo $p\%$ zo všetkých žiakov, $p\%$ z ostatných prišlo pešo. Pri kontrole sa ukázalo, že chýba jediný žiak. Vyjadrite p pomocou n a výpočet preveďte pre $n = 400$.

(Poznámka. Pri úprave rovnice pre p vytknite n .)

Riešenie. Električkou pricestovalo $n \cdot \frac{p}{100}$ žiakov, zvyšok bol $n \left(1 - \frac{p}{100}\right)$. Pešo prišlo teda $n \left(1 - \frac{p}{100}\right) \frac{p}{100}$ žiakov. Podľa textu úlohy je

$$n \cdot \frac{p}{100} + n \left(1 - \frac{p}{100}\right) \frac{p}{100} = n - 1,$$

z čoho po úprave máme

$$2n \cdot \frac{p}{100} - n \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^2 = n - 1.$$

Výrazy obsahujúce číslo n prevedieme na ľavú stranu a číslo n vytkneme. Dostaneme

$$n \left[2 \cdot \frac{p}{100} - \left(\frac{p}{100}\right)^2 - 1 \right] = -1$$

a po vynásobení číslom $\left(-\frac{1}{n}\right)$

$$1 - 2 \cdot \frac{p}{100} + \left(\frac{p}{100}\right)^2 = \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Výraz na ľavej strane je druhou mocninou dvojčlena $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$. Pretože $\frac{p}{100} < 1$, t. j. $1 - \frac{p}{100} > 0$, vyplýva z (1)

$$1 - \frac{p}{100} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

čiže

$$p = 100 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (2)$$

Ak dosadíme do (2) číslo $n = 400$, vyjde $p = 95$. Po dosadení do podmienok úlohy zistíme, že električkou pricestovalo 380 žiakov, 19 žiakov prišlo pešo a jeden chýbal.

Skúška: $380 + 19 + 1 = 400$.

Iné riešenie. Jeden žiak sa nedostavil, t. j. 1 je $(100 - p)$ percent zo zvyšku z . Platí teda

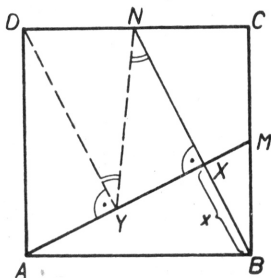
$$z = 1 \cdot \frac{100}{100 - p}.$$

Zvyšok je zo všetkých n žiakov $(100 - p)$ percent. Pre celkový počet žiakov tedy dostaneme

$$n = z \cdot \frac{100}{100 - p} = \left(\frac{100}{100 - p} \right)^2,$$

skadiaľ už vyplýva

$$p = 100 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$



Obr. 17.

4. Narýsujte obrazec podľa pripojeného obr. 17; $ABCD$ je štvorec o strane dĺžky 6 cm, bod M je stredom strany BC

($BN \perp AM \perp DY$). Vypočítejte vzdálenost NY a zjistěte výpočtem, zda trojúhelník DNY je pravoúhlý.

Řešení. Zřejmě je

$$\triangle ABM \cong \triangle BCN, \quad (usu) \quad (1)$$

neboť $\sphericalangle MAB = \sphericalangle NBC$. Z (1) plyne $BM = CN = 3$ cm. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ABM je

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}. \quad (2)$$

Označíme-li $BX = x$ a vyjádříme-li obsah trojúhelníka ABM dvojnásobem, dostaneme

$$AM \cdot BX = 3x\sqrt{5} = 2 \cdot \triangle ABM = AB \cdot BM = 6 \cdot 3,$$

odtud

$$x = \frac{6}{\sqrt{5}}. \quad (3)$$

Dále je podle Pythagorovy věty vzhledem ke (3)

$$AX = \sqrt{AB^2 - BX^2} = \sqrt{36 - \frac{36}{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = 2x. \quad (4)$$

Podle věty *usu* je však

$$\triangle DAY \cong \triangle ABX,$$

tj.

$$AY = BX = x = \frac{6}{\sqrt{5}}. \quad (5)$$

Bod Y je tedy podle (4), (5) středem úsečky AX .

Vzdálenost NY vypočteme podle Pythagorovy věty z trojúhelníka NYX . Platí podle (2), (3)

$$NY^2 = NX^2 + YX^2 = \left(3\sqrt{5} - \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2,$$

BS střední příčka rovnoběžná s AD ; je tedy

$$AD = 2 \cdot BS = 2r.$$

Leží-li body A, B, C, D v přímce, je $B \equiv D$ a platí

$$AD = AB = BC = 2r,$$

tj.

$$AS = v = 3r.$$

Bod D leží tedy vždy na kružnici $l \equiv (A; 2r)$. Úloha má aspoň jedno řešení právě tehdy, mají-li kružnice k, l aspoň jeden společný bod, tj. když platí

$$r = 2r - r \leq v \leq 2r + r = 3r. \quad (1)$$

Levá nerovnost (1) je splněna (neboť A je bod vnějšku kružnice k). Podmínka řešitelnosti je tedy

$$v \leq 3r, \quad (2)$$

neboť platí-li (2), platí i (1) a kružnice k, l mají společný aspoň jeden bod; každý společný bod vede k jednomu řešení úlohy.

Platí-li ve vztahu (2) rovnost, má úloha jediné řešení; v případě ostré nerovnosti má úloha dvě řešení. Jinak úloha řešení nemá.

b) Označme $BC = x$; z pravoúhlého trojúhelníka BMS dostaneme podle Pythagorovy věty

$$MS^2 = r^2 - \frac{x^2}{4}.$$

Dále vypočteme z pravoúhlého trojúhelníka ASM

$$AS^2 = MS^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2,$$

tj.

$$v^2 = r^2 - \frac{x^2}{4} + \frac{9}{4}x^2,$$

odtud $2x^2 = v^2 - r^2$ neboli

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{v^2 - r^2}. \quad (3)$$

Vzorec (3) platí i v prípade, když je $v = 3r$ a kdy nevznikne trojúhelník ACD ; pak vyjde $x = 2r$.

Ze vzorce (3) dostaneme znovu podmínku řešitelnosti: ježto musí platit $x \leq 2r$, je

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{v^2 - r^2} \leq 2r,$$

tj.

$$v^2 - r^2 \leq 8r^2,$$

takže

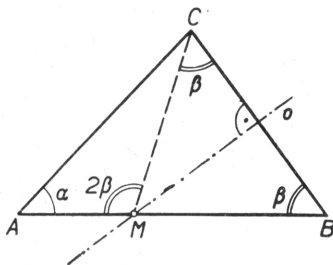
$$v \leq 3r,$$

což souhlasí s podmínkou (2).

6. Dokážte: Os strany BC trojúhelníka ABC pretne stranu AB vo vnútornom bode práve vtedy, keď pre uhly trojúhelníka platí vzťah

$$\alpha + 2\beta < 180^\circ.$$

(Poznámka. Pri dôkaze obrátenej vety vyjdite zo situácie, keď os úsečky BC nepretína úsečku AB .)



Obr. 19.

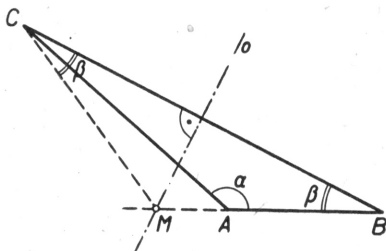
Riešenie (obr. 19). a) Ak pretína os o stranu AB vo vnútornom bode M , vznikne rovnoramenný trojuholník BCM a trojuholník ACM . Pre vonkajší uhol $\sphericalangle AMC$ zrejme platí $\sphericalangle AMC = 2\beta$. Okrem toho v trojuholníku ACM platí $\sphericalangle AMC + \sphericalangle CAM < 180^\circ$,

čiže

$$\alpha + 2\beta < 180^\circ. \quad (1)$$

b) Predpokladajme, že priamka o nepretína úsečku AB v jej vnútornom bode. Ak je $\beta \geq 90^\circ$, potom nerovnosť (1) zrejme neplatí. Ak je $\beta < 90^\circ$, pretne priamka o (podľa 5. postulátu) polpriamku BA v bode M , ktorý neleží vo vnútri úsečky AB . Vznikne rovnoramenný trojuholník BCM so základňou BC (obr. 20), je teda

$$\sphericalangle BCM = \beta.$$



Obr. 20.

Pretože bod A leží na úsečke BM , je $\sphericalangle ACB \leq \sphericalangle BCM$, t. j.

$$180^\circ - \alpha - \beta \leq \beta$$

čiže

$$\alpha + 2\beta \geq 180^\circ,$$

čo je negácia vzťahu (1).

Iné riešenie. b) Predpokladajme, že priamka o nepretne úsečku AB v jej vnútornom bode. Potom priamka o buď prechádza bodom A alebo (podľa Paschovho postulátu) pretne úsečku AC v jej vnútornom bode. V prvom prípade je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou BC a platí

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

V druhom prípade podľa a) je

$$\alpha + 2\gamma < 180^\circ = 2(\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ,$$

takže

$$\alpha + 2\beta > 180^\circ.$$

Vždy teda platí

$$\alpha + 2\beta \geq 180^\circ,$$

čo je negácia vzťahu (1).

4. KATEGORIE D

1. Žiak dostal za úlohu umocniť trojčlen $(a + 2b - 3)^2$. Vyšiel mu výsledok $a^2 + 4b^2 - 9$. „Ale to predsa nie je správne — namietal učiteľ — dosad' si na skúšku za a , b nejaké určité prirodzené čísla.“ Žiak poslúchol a skúška mu vyšla. Ktoré čísla dosadil? Ako znie správne vzorec pre druhú mocninu daného trojčlena?

Riešenie. Správny výsledok má znieť

$$(a + 2b - 3)^2 = a^2 + 4b^2 + 9 + 4ab - 6a - 12b. \quad (1)$$

Ak porovnáme správny výsledok s výsledkom žiaka, dostaneme

$$a^2 + 4b^2 + 9 + 4ab - 6a - 12b = a^2 + 4b^2 - 9$$

čiže

$$4ab - 6a - 12b + 18 = 0,$$

t. j.

$$2ab - 3a - 6b + 9 = 0.$$

Vytknutím spoločných činiteľov postupne dostaneme

$$a(2b - 3) - 3(2b - 3) = 0,$$

čiže

$$(2b - 3)(a - 3) = 0.$$

Stadiaľ vyplýva $a = 3$, pretože $2b - 3$ ako nepárne číslo je nenulové. Obrátene z $a = 3$ vyplýva vzťah (1). Máme teda výsledok:

Žiak dosadil $a = 3$ a za b nejaké prirodzené číslo.

2. Je dané prvočíslo p . Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y , ktoré vyhovujú rovnici

$$\frac{1}{p+x} + \frac{1}{p+y} = \frac{1}{p}. \quad (1)$$

Riešenie. Rovnicu (1) vynásobíme súčinom $p(p+x)(p+y)$, ktorý je zrejme od nuly rôzny, pretože p, x, y sú prirodzené čísla. Dostaneme

$$p(p+y) + p(p+x) = (p+x)(p+y)$$

a po ďalšej úprave

$$p^2 = xy. \quad (2)$$

Deliteľmi čísla p^2 sú čísla 1, p a p^2 . Dvojice prirodzených čísel $[x, y]$, ktoré vyhovujú rovnici (2) zostavíme do tabuľky:

x	1	p	p^2
y	p^2	p	1

Každá z usporiadaných dvojíc prirodzených čísel $[1, p^2]$ alebo $[p, p]$ alebo $[p^2, 1]$ vyhovuje tiež rovnici (1), o čom sa presvedčíme dosadením. Riešením úlohy sú teda uvedené tri usporiadané dvojice čísel $[x, y]$.

3. Písmeno a označuje prirodzené číslo, jehož dekadický zápis má více než 6 cifier, písmeno b označuje číslo, jehož dekadický zápis tvorí posledních šest cifier čísla a . Dokažte: Je-li a násobkem čísla 2^6 , je také b násobkem čísla 2^6 a obráceně.

Řešení. Číslo a vyjádříme jako součet nezáporného celého čísla b a vhodného přírodního čísla c , násobeného 10^6 ; je tedy

$$a = b + 10^6 \cdot c,$$

tj.

$$a = b + 2^6 \cdot (5^6 c), \quad (1)$$

1. Je-li $a = 2^6 \cdot a'$, je podle (1)

$$b = 2^6(a' - 5^6 c),$$

kde $a' - 5^6 c$ je číslo celé; proto: je-li 2^6 dělitelem čísla a , je i dělitelem čísla b .

2. Je-li $b = 2^6 \cdot b'$, je podle (1)

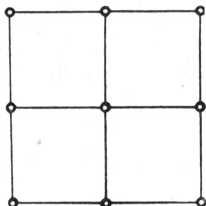
$$a = 2^6(b' + 5^6 c),$$

kde $b' + 5^6 c$ je číslo celé; proto: je-li 2^6 dělitelem čísla b , je i dělitelem čísla a .

4. Vrcholy, stredy strán a priesečník uhlopriečok štvorca tvoria skupinu deviatich bodov. Koľko trojuholníkov má všetky tri vrcholy v týchto deviatich bodoch?

Je osem typov (nezhodných) trojuholníkov. Nakreslite ich a uďte, koľko je trojuholníkov každého typu.

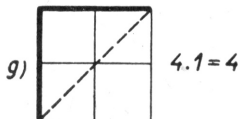
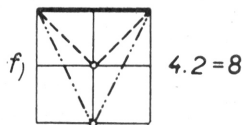
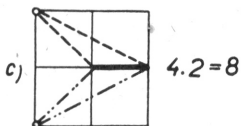
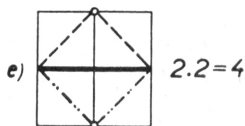
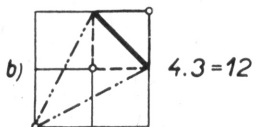
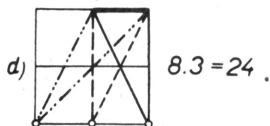
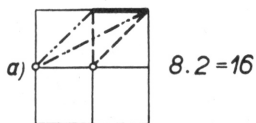
(Poznámka. Všetkých trojíc rôznych bodov je 84.)



Riešenie. Skupina daných deviatich bodov je znázornená na obr. 21. Počet všetkých trojíc bodov je 84. Počet trojíc bodov ležiacich na priamke je 8. Preto počet všetkých možných trojuholníkov je $84 - 8 = 76$.

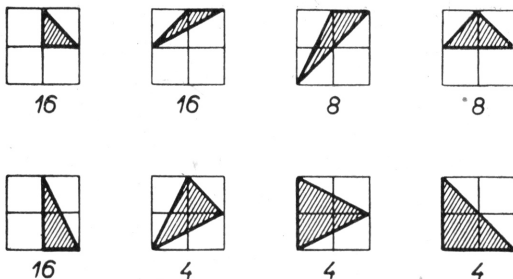
Obr. 21.

Na obr. 22 abcdefg je znázornený jeden spôsob postupného vytvárania trojuholníkov. V každom obrázku sa vychádza od hrubo vytiahnutej strany. Prvý činiteľ udáva, koľkokrát sa táto strana opakuje. Druhý činiteľ udáva počet vrcholov, ktoré s uvažovanou stranou určujú trojuholníky. Tieto vrcholy sú vyberané tak, aby nevznikli už vytvorené trojuholníky.



Obr. 22.

Na obr. 23 je prehľad jednotlivých typov (nezhodných) trojuholníkov. Pri každom type je uvedené číslo, ktoré udáva, koľkokrát sa príslušný trojuholník v našej úlohe vyskytne.

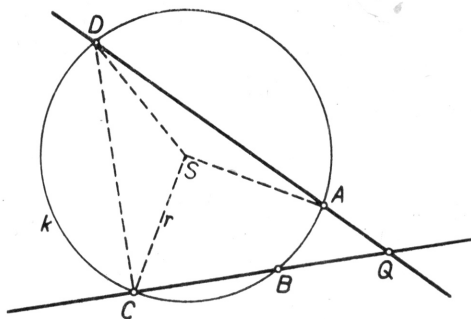


Obr. 23. Celkem 76

5. Body A, B, C, D dělí kružnici $k = (S; r)$ na čtyři oblouky, jejichž délky jsou v poměru

$$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{DA} = 1 : 2 : 4 : 5.$$

Přímky AD, BC se protnou v bodě Q . Vypočítejte vzdálenosti QB a QD .



Obr. 24.

Řešení (obr. 24). Zřejmě platí pro středové úhly

$$\sphericalangle ASB : \sphericalangle BSC : \sphericalangle CSD : \sphericalangle DSA = 1 : 2 : 4 : 5.$$

Odtud snadno vypočteme

$$\sphericalangle ASB = 30^\circ, \sphericalangle BSC = 60^\circ, \sphericalangle CSD = 120^\circ, \sphericalangle DSA = 150^\circ.$$

V rovnoramenném trojúhelníku ADS je $\sphericalangle ADS = 15^\circ$, v rovnoramenném trojúhelníku CDS je $\sphericalangle SDC = \sphericalangle SCD = 30^\circ$. Protože trojúhelník BCS je rovnostranný, je $\sphericalangle SCB = 60^\circ$. Je tedy

$$\begin{aligned}\sphericalangle ADC &= 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ, \\ \sphericalangle BCD &= 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ.\end{aligned}\quad (1)$$

Z rovnoramenného trojúhelníka CDS (který rozdělíme výškou ve dva pravoúhlé) dostaneme

$$CD = r\sqrt{3}. \quad (2)$$

Podle (1) je trojúhelník CDQ pravoúhlý a rovnoramenný; podle (2) je tedy $CQ = CD = r\sqrt{3}$. Protože je $CB = r$, je

$$BQ = CQ - CB = r(\sqrt{3} - 1).$$

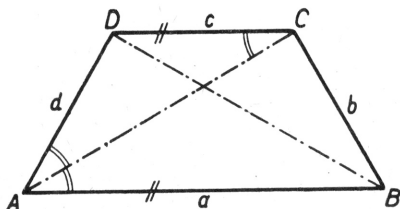
Z trojúhelníka QCD dostaneme

$$QD = CD \cdot \sqrt{2} = r\sqrt{6}.$$

6. Lichoběžník $ABCD$ má uhlopříčky AC , BD , které mají tutéž délku a půlí úhly při základně AB . Dokažte, že platí $BC = CD = DA$ a sestrojte tento lichoběžník, je-li dáno $AB = a$, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Řešení (obr. 25). Podle podmínky úlohy je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB$; dále je $\sphericalangle DCA = \sphericalangle CAD$ (úhly střídavé). Proto je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA$ a trojúhelník ACD je rovnoramenný se základnou AC . Z obdobného důvodu je trojúhelník BCD rovnoramenný se základnou BD . Je tedy

$$AD = CD = BC. \quad (1)$$



Obr. 25.

Ze vztahů (1) plyne, že lichoběžník je rovnoramenný; je tedy $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA$; z toho vyplývá

$$\sphericalangle CBA = 2 \cdot \sphericalangle CAB, \quad (2)$$

neboť AC je osa úhlu $\sphericalangle DAB$. Protože trojúhelník ABC je pravoúhlý, je $\sphericalangle CBA + \sphericalangle CAB = 90^\circ$; z (2) pak plyne

$$\sphericalangle CAB = 30^\circ, \quad \sphericalangle CBA = 60^\circ.$$

Lichoběžník $ABCD$ se např. sestojí jako část pravidelného šestiúhelníka vepsaného do kružnice nad průměrem AB .

IV. Soutěžní úlohy I. kola

1. KATEGORIE A

1. Určete nejmenší kladný zlomek, jehož součet s jeho druhou mocninou je větší než šest a jehož čítenel a jmenovatel mají součet menší než 100.

(Poznámka. Ze všech zlomků s daným jmenovatelem v a větších než číslo 2 vyberte nejmenší zlomek.)

Řešení. Hledaný kladný zlomek budiž $\frac{u}{v}$, kde u, v jsou celá čísla buď obě zároveň kladná nebo zároveň záporná.

a) Necht' $u > 0, v > 0$. Podle podmínek úlohy platí

$$\frac{u}{v} + \frac{u^2}{v^2} > 6, \quad (1)$$

$$u + v < 100. \quad (2)$$

Nerovnost

$$x^2 + x - 6 > 0, \quad (1')$$

kde $x = \frac{u}{v}$, má kladná řešení

$$x > 2.$$

Je tedy

$$\frac{u}{v} > 2. \quad (1'')$$

Nejmenší kladný zlomek větší než 2 s daným jmenovatelem v je

$$\frac{u}{v} = \frac{2v + 1}{v}. \quad (3)$$

Spojíme-li (2), (3), dostaneme po úpravě

$$v < 33. \quad (4)$$

Jsou-li $\frac{2v_1 + 1}{v_1}$, $\frac{2v_2 + 1}{v_2}$ dvě racionální čísla, pro něž platí $v_1 < v_2$, je

$$\frac{2v_1 + 1}{v_1} > \frac{2v_2 + 1}{v_2}.$$

Ze všech čísel tvaru $\frac{2v + 1}{v}$ je co **nejmenším** číslem číslo s co **největším** jmenovatelem; v našem případě je to tedy podle (4)

$$v = 32.$$

Hledané číslo je $\frac{65}{32}$; toto číslo splňuje nerovnost (1''), tedy i (1') a (1).

b) Necht' $u < 0$, $v < 0$ jsou celá čísla; pak podmínka (2) je splněna. Podmínka (1) platí jako v odst. a); platí také nerovnost (1''); z ní plyne (ježto $v < 0$)

$$u < 2v. \quad (1''')$$

Nerovnost (1''') splňují např. čísla $u = 2v - 1$; pak je

$$\frac{u}{v} = \frac{2v - 1}{v} = 2 - \frac{1}{v} > 0,$$

neboť $v < 0$. Pro $v = -33$ dostaneme $2 - \frac{1}{v} = \frac{67}{33} < \frac{65}{32}$.

Je-li $x > 2$ libovolné racionální číslo, které vyhovuje podmínkám úlohy, můžeme najít záporné celé číslo v tak, že

$$2 - \frac{1}{v} < x$$

a prítom podľa predchádzajúceho číslo $2 - \frac{1}{v} = \frac{2v - 1}{v}$ také splňuje podmienky úlohy.

Neexistuje teda v prípade b) najmenšie číslo žadaných vlastností, tj. úloha je neřešiteľná.

2. V rovine je daných päť bodov, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Každé dva z týchto bodov sú spojené červenou alebo modrou úsečkou tak, že žiadne tri z týchto úsečiek nevytvoria trojuholník tej istej farby.

a) Dokážte, že z každého z daných päť bodov vychádzajú dve úsečky červené a dve modré.

b) Dokážte, že existuje uzavretá lomená čiara zložená z piatich červených úsečiek a uzavretá lomená čiara zložená z piatich modrých úsečiek, z ktorých každá obsahuje všetkých päť daných bodov.

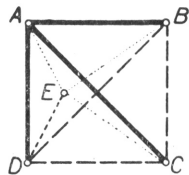
c) Zistite, koľkými spôsobmi možno dané body spojiť červenými a modrými úsečkami tak, aby bola splnená podmienka úlohy.

(Poznámka. Riešte len úvahami, nie výpočtom. V prípade a) uvažte, či je možné, aby z jedného vrcholu vychádzali tri úsečky tej istej farby, t. j. preveďte tzv. nepriamy dôkaz.)

Riešenie. a) Pripustíme, že by z daného bodu A vychádzali tri červené úsečky (dané body označme A, B, C, D, E). Nech sú to napr. úsečky AB, AC, AD — pozri obr. 26 (červená je tlšte vytiahnutá).

Podľa podmienky úlohy musia byť potom úsečky BC, BD, CD modré a vznikne „modrý“ trojuholník, čo odporuje podmienkam úlohy.

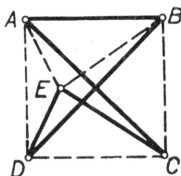
Podobne nie je možné, aby z bodu A vychádzali aspoň tri



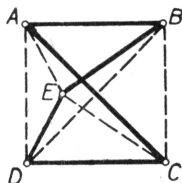
Obr. 26.

modré úsečky. Zostáva teda jediná možnosť, že z každého bodu vychádzajú dve červené a dve modré úsečky (vyznačené dlhými čiarkami).

b) Podľa odst. a) vychádzajú teda z bodu A dve červené úsečky — nech sú to napr. AB , AC ; zostávajúce dve úsečky AD , AE sú modré — pozri obr. 27. Z podmienky úlohy potom vyplýva, že úsečka BC je modrá, úsečka DE červená. Z bodu D vychádzajú podľa odst. a) dve červené úsečky. Úsečka CD je teda buď červená (obr. 27) alebo modrá (obr. 28). V prípade z obr. 27 je podľa podmienky úlohy CE modrá a podľa odst. a) (použitého na body D , E) je BD modrá a BE červená. Podobne doplníme obr. 28. Hľadané lomené čiary sú na obr. 27 $ABEDCA$ (červená) a $ADBCEA$ (modrá); na obr. 28 $ABDECA$ (červená) a $ADCBEA$ (modrá).



Obr. 27.



Obr. 28.

c) Ak vyjdeme z bodu A a ak zvolíme obe červené úsečky, ktoré z neho vychádzajú, dostaneme dve rôzne možnosti. Červené úsečky vychádzajúce z bodu A možno voliť $\binom{4}{2} = 6$ rôznymi spôsobmi. Dostaneme teda $2 \cdot 6 = 12$ rôznych situácií.

3. Do jednotkovej kružnice se středem S je vepsán pravidelný n -úhelník $A_0A_1 \dots A_{n-1}$. Body S , A_0 , A_1 jsou po řadě obrazy komplexních čísel 0 , 1 , t .

a) Vyjádřete vzdálenost A_0A_k ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) pomocí t .

b) Vypočtete součet $A_0A_1^2 + A_0A_2^2 + \dots + A_0A_{n-1}^2$.

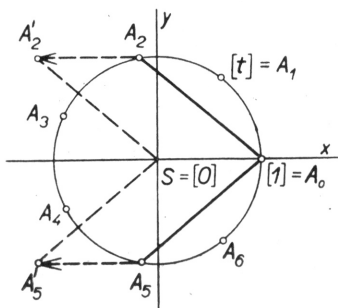
Řešení. a) Zřejmě je

$$t = \cos \frac{360^\circ}{n} + i \sin \frac{360^\circ}{n}. \quad (1)$$

Bod A_k je obrazem komplexního čísla t_k , jehož absolutní hodnota je 1 a jehož amplituda je $k \cdot \frac{360^\circ}{n}$. Je tedy podle Moivreovy věty a podle (1)

$$\begin{aligned} t_k &= \cos \frac{360^\circ k}{n} + i \sin \frac{360^\circ k}{n} = \\ &= \left(\cos \frac{360^\circ}{n} + i \sin \frac{360^\circ}{n} \right)^k = t^k. \end{aligned} \quad (2)$$

Uvažujme o komplexních číslech $t^k - 1$, $t^{n-k} - 1$; jejich obrazy jsou podle (2) body A'_k , A'_{n-k} , které vzniknou z bodů A_k , A_{n-k} posunutím o daný vektor $\overrightarrow{A_0 S}$ (na obr. 29 je $k = 2$, $n = 7$).



Obr. 29.

Komplexní čísla $t^k - 1$, $t^{n-k} - 1$ mají za amplitudy opačná čísla, jejich absolutní hodnota je velikost úsečky $A_0 A_k$; je tedy podle Moivreovy věty

$$(t^k - 1)(t^{n-k} - 1) = A_0 A_k^2 \cdot [\cos(\varphi - \varphi) + i \sin(\varphi - \varphi)] = A_0 A_k^2,$$

tj.

$$A_0 A_k = \sqrt{(t^k - 1)(t^{n-k} - 1)}. \quad (3)$$

Rovnice (3) je řešením úlohy a).

b) Vypočteme

$$\sigma = A_0 A_1^2 + A_0 A_2^2 + \dots + A_0 A_{n-1}^2 = (t-1)(t^{n-1}-1) + (t^2-1)(t^{n-2}-1) + \dots + (t^{n-1}-1)(t-1),$$

tj.

$$\sigma = t^n - t - t^{n-1} + 1 + t^n - t^2 - t^{n-2} + 1 + \dots + t^n - t^{n-1} - t + 1. \quad (4)$$

Protože je $t^n = 1$, dostaneme z (4)

$$\begin{aligned} \sigma &= 2(n-1) - 2(t + t^2 + \dots + t^{n-1}) = \\ &= 2(n-1) - 2t \frac{t^{n-1} - 1}{t - 1}, \end{aligned}$$

a dále

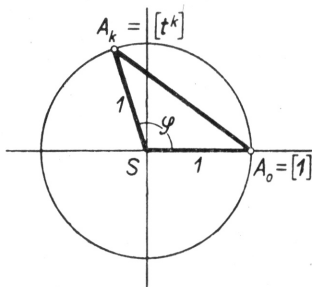
$$\begin{aligned} \sigma &= 2(n-1) + \frac{2}{1-t} (t^n - t) = \\ &= 2(n-1) + \frac{2}{1-t} \cdot (1 - t), \end{aligned}$$

tj.

$$\sigma = 2n. \quad (5)$$

Vzorec (5) je řešením úlohy b).

Jiné řešení úlohy a). Platí $\varphi = \frac{360^\circ k}{n}$. Podle kosinové věty je (viz obr. 30)



Obr. 30.

$$A_0 A_k^2 = 2 - 2 \cos \varphi = 2(1 - \cos \varphi) = 2 \left(1 - \cos \frac{360^\circ k}{n} \right); \quad (6)$$

tento vzorec platí i v případě, že $\varphi = 180^\circ$, tj. kdy $A_0 A_k$ prochází bodem S .

Podle Moivreovy věty je

$$\begin{aligned} t^k &= \cos \frac{360^\circ k}{n} + i \sin \frac{360^\circ k}{n}, \\ t^{n-k} &= \cos \frac{360^\circ (n-k)}{n} + i \sin \frac{360^\circ (n-k)}{n} = \\ &= \cos \frac{360^\circ k}{n} - i \sin \frac{360^\circ k}{n} \end{aligned}$$

a dále

$$t^k + t^{n-k} = 2 \cos \frac{360^\circ k}{n}. \quad (7)$$

Dosadíme-li ze (7) do (6), vyjde

$$A_0 A_k^2 = 2 - t^k - t^{n-k} = (t^k - 1)(t^{n-k} - 1),$$

neboť $t^n = 1$. Je tedy

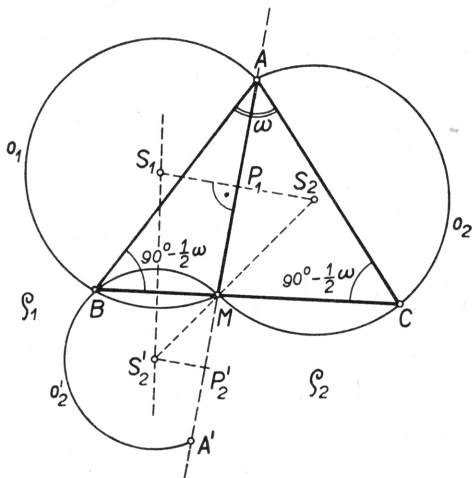
$$A_0 A_k = \sqrt{(t^k - 1)(t^{n-k} - 1)} = \sqrt{2 - t^k - t^{n-k}},$$

což jsme měli dokázat.

4. V rovině je dána úsečka AM , dále je dán dutý úhel ω a kladné číslo k .

a) Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC , který má vnitřní úhel $\sphericalangle BAC = \omega$ a jehož základna BC je bodem M dělena v poměru $BM : CM = k$.

b) Vyšetřte geometrické místo středů základen BC všech takových trojúhelníků, nabývá-li poměr k všech kladných hodnot.



Obr. 31.

Řešení. a) Rozbor. Protože je $\sphericalangle BAC = \omega$, je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2}\omega$. Proto náleží bod B (obr. 31)

oblouku o_1 , který je geometrickým místem bodů X ležících v polorovině ϱ_1 s hranicí AM , pro něj platí

$$\sphericalangle AXM = 90^\circ - \frac{1}{2} \omega.$$

Obdobně náleží bod C oblouku o_2 , který je geometrickým místem bodů Y ležících v polorovině ϱ_2 opačné k ϱ_1 , pro něj platí

$$\sphericalangle AYM = 90^\circ - \frac{1}{2} \omega.$$

Oblouky o_1, o_2 jsou zřejmě souměrně sdružené podle přímky AM . Stejnolehlost se středem M a koeficientem $(-k)$ převede vrchol C ve vrchol B , oblouk o_2 v oblouk o'_2 , který leží v polorovině ϱ_1 a je sestrojen nad tětivou MA' , kde $A'M = k \cdot AM$. Vrchol B je tedy společným bodem oblouků o_1, o'_2 různým od M . Tím je rozbor úlohy ukončen.

Konstrukce. V každé z polorovin ϱ_1, ϱ_2 vyřezaných přímkou AM sestrojíme oblouk, jehož vnitřní body patří do množiny všech bodů, z nichž je vidět úsečku AM pod úhlem $90^\circ - \frac{1}{2} \omega$;

tyto oblouky nazveme o_1, o_2 . Ve stejnoolehlosti $(M; -k)$ sestrojíme oblouk o'_2 , který odpovídá oblouku o_2 . Bod B je společným bodem oblouků o_1 a o'_2 různým od M . Bod C sestrojíme ve stejnoolehlosti $(M; -\frac{1}{k})$ jako bod odpovídající bodu B .

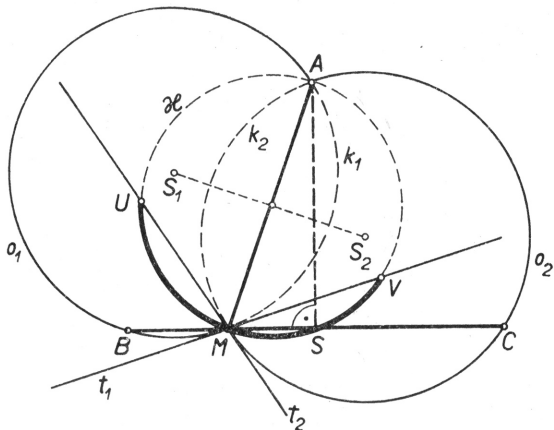
Zkouška (tzv. důkaz správnosti). Oblouk o_1 náleží kružnici k_1 , jejíž střed S_1 leží uvnitř poloroviny ϱ_1 na ose úsečky AM . Oblouk o'_2 náleží kružnici k'_2 , jejíž střed S'_2 leží také uvnitř poloroviny ϱ_1 na ose úsečky $A'M$. Označme po řadě P_1, P'_2 středy úseček $AM, A'M$; bod M odděluje body P_1, P'_2 . Proto bod B souměrně sdružený s bodem M podle přímky $S_1S'_2$ náleží vnitřku poloroviny ϱ_1 , a ovšem i oběma kružnicím k_1, k'_2 , tj.

obloukům o_1, o'_2 . Odvodíme-li z tohoto bodu B bod C jako průsečík oblouku o_2 s přímkou BM , je $BM : CM = k$ (bod C vznikne, neboť je obrazem bodu B ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $-\frac{1}{k}$). Dále platí

$$\sphericalangle ABM = 90^\circ - \frac{1}{2} \omega = \sphericalangle ACM,$$

tj. trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou BC a je $\sphericalangle BAC = \omega$.

Diskuse. Úloha má tedy dvě řešení, která dostaneme, vyměníme-li poloroviny ϱ_1 a ϱ_2 (a oblouky σ_1 , σ_2). Tato řešení splynou pro $k = 1$.



Obr. 32.

b) Střed S základny BC je pata kolmice spuštěné z vrcholu A na základnu BC . Všechny tyto body S leží tedy podle Thaletovy věty na kružnici κ sestrojené nad průměrem AM

(obr. 32). Přímky BC však nevyplňují celý svazek se středem M , ale jen dva vrcholové úhly omezené tečnami t_1, t_2 sestrojenými v bodě M po řadě ke kružnicím k_1, k_2 . Označme V, U po řadě průsečíky tečen t_1, t_2 s kružnicí κ . Pak každá přímka, která prochází bodem M a náleží úhlu $\angle UMV$ a úhlu vrcholovému, protíná jen jeden z oblouků o_1, o_2 mimo bod M ; každá jiná přímka procházející bodem M protíná oblouk o_1 v bodě B a oblouk o_2 v bodě C ; body B a C jsou odděleny bodem M . Odtud je patrné, že každý ze středů S padne dovnitř oblouku $\widehat{UMV}$ kružnice κ a obráceně každý bod vnitřku tohoto oblouku je středem S některé z úseček BC .

Hledané geometrické místo bodů je tedy oblouk $\widehat{UMV}$ kružnice κ bez bodů U, V .

5. Vyšetřte množinu všech bodů v rovině, pro jejichž kartézské souřadnice x, y platí nerovnost

$$|x| + |y| < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}. \quad (1)$$

Řešení. Umocněním a úpravou dostaneme z (1) nerovnost:

$$|xy| < 1 - x - y. \quad (2)$$

Z nerovnosti (2) obráceně plyne nerovnost (1), jak zjistíme obrácením postupu. Je tedy také (2) analytickým vyjádřením hledaného geometrického místa bodů. Rozlišíme dva případy:

1. $x \geq 0, y \geq 0$ nebo $x \leq 0, y \leq 0$;
2. $x \geq 0, y \leq 0$ nebo $x \leq 0, y \geq 0$.

V případě 1 je $|xy| = xy$ a nerovnost (2) lze upravit na tvar

$$(x+1)(y+1) < 2. \quad (3)$$

Rovnice $(x+1)(y+1) = 2$ vyjadřuje rovnosou hyperbolu, jejíž asymptoty jsou přímky $x = -1, y = -1$. Nerovnost (3) vyjadřuje tu uzavřenou oblast $\bullet_1$ omezenou oběma větvemi

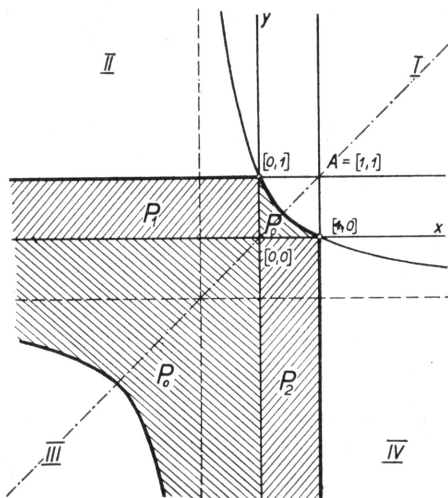
hyperboly, v níž leží bod $[0, 0]$; bod $[0, 0]$ totiž splňuje nerovnost (3). Připojíme-li k nerovnosti (3) ještě nerovnost $xy \geq 0$, dostaneme průnik P_0 I. a III. kvadrantu s oblastí O_1 .

V případě 2 je $|xy| = -xy$ a nerovnost (2) lze upravit na tvar

$$(1 - x)(y - 1) < 0. \quad (4)$$

Rovnice $(1 - x)(y - 1) = 0$ vyjadřuje dvojici přímek $x = 1$, $y = 1$. Nerovnost (4) vyjadřuje ten pravý úhel sevřený těmito přímkami, v němž leží počátek $[0, 0]$. Připojíme-li k nerovnosti (4) ještě nerovnost $xy \leq 0$, která vyjadřuje sjednocení II. a IV. kvadrantu, dostaneme část roviny složenou ze dvou polopásů P_1, P_2 . Hledaná množina je sjednocením množin P_0, P_1, P_2 .

Situace je znázorněna na obr. 33, kde je množina vyšrafována.



Obr. 33.

6. Zistite, pre ktoré ostré uhly α platí nerovnosť

$$\frac{2}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha} \geq 6. \quad (1)$$

Dokážte, že rovnosť vo vzťahu (1) nastane len pre $\alpha = 30^\circ$.

(Poznámka. Ak poznáte jeden koreň mnohočlena tretieho stupňa jednej premennej, možno tento mnohočlen pomocou delenia koreňovým činiteľom rozložiť na súčin mnohočlenov nižších stupňov.)

Riešenie. Je zrejmé, že musí byť $\alpha \neq 45^\circ$, pretože ak je $\alpha = 45^\circ$, je $2\alpha = 90^\circ$, $\cos 2\alpha = 0$. Budeme rozlišovať dva prípady: $\alpha < 45^\circ$ a $\alpha > 45^\circ$.

a) Nech je $\alpha < 45^\circ$. Potom $\sin \alpha > 0$, $\cos 2\alpha > 0$. Obidve strany nerovnosti (1) vynásobíme súčinom $\sin \alpha \cos 2\alpha$ a dostaneme

$$2 \cos 2\alpha + \sin \alpha \geq 6 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha. \quad (2)$$

Použijeme vzorec $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, dosadíme do (2) a po úprave vyjde

$$12 \sin^3 \alpha - 4 \sin^2 \alpha - 5 \sin \alpha + 2 \geq 0. \quad (3)$$

Označme kvôli stručnosti $\sin \alpha = x$. Nerovnosť (3) má potom tvar

$$12x^3 - 4x^2 - 5x + 2 \geq 0. \quad (3a)$$

Dosadením si overíme, že rovnice

$$12x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (4)$$

má zrejme koreň $x = \frac{1}{2}$ (pretože $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$). Túto skutočnosť použijeme na rozklad štvorčlena na ľavej strane nerovnosti (3a). Vo vzťahu

$$12x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c) \quad (5)$$

určíme koeficienty a, b, c . Vynásobíme pravú stranu a porovnáme koeficienty pri mocninách x s rovnakým exponentom na oboch stranách rovnosti (5). Dostaneme

$$a = 12, \quad b - \frac{1}{2}a = -4, \quad c - \frac{1}{2}b = -5, \quad -\frac{1}{2}c = 2.$$

Stadiaľ vyjde

$$a = 12, \quad b = 2, \quad c = -4.$$

Rozklad teda po úprave znie

$$12x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(6x^2 + x - 2). \quad (6)$$

Rozložíme ešte kvadratický trojčlen $6x^2 + x - 2$ pomocou koreňov kvadratickej rovnice $6x^2 + x - 2 = 0$. Tieto korene sú

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12},$$

t. j. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. Hľadaný rozklad je

$$6x^2 + x - 2 = (2x - 1)(3x + 2). \quad (7)$$

Ak dosadíme zo vzťahu (7) do vzťahu (6), prevedieme nerovnosť (3a) na tvar

$$(2x - 1)^2 \cdot (3x + 2) \geq 0. \quad (8)$$

Nerovnosť (8) je splnená pre každé $x > 0$, t.j. nerovnosť (1) je splnená pre každý ostrý úhol $\alpha < 45^\circ$ (to sa dostane obrátením postupu). Rovnosť vo vzťahu (8) nastane jedine pre $x = \frac{1}{2}$ čiže pre $\alpha = 30^\circ$.

b) Zostáva vyšetrovať prípad $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. Postupujeme

pri tom ako v prípade a). Pretože tu je $90^\circ < 2\alpha < 180^\circ$, je $\cos 2\alpha < 0$ a namiesto nerovnosti (2) dostaneme nerovnosť

$$12\sin^3 \alpha - 4\sin^2 \alpha - 5\sin \alpha + 2 \leq 0.$$

Po rovnakých úpravách ako v odst. a) dostaneme namiesto nerovnosti (3a) nerovnosť

$$12x^3 - 4x^2 - 5x + 2 \leq 0. \quad (3b)$$

Nerovnosť (3b) je ekvivalentná s nerovnosťou

$$(2x - 1)^2 \cdot (3x + 2) \leq 0. \quad (9)$$

Pretože je $x > 0$, je $3x + 2 > 0$ a nerovnosť (9) prejde na rovnosť len pre $x = \frac{1}{2}$ a $x = -\frac{2}{3}$. Pretože však uhol α je

ostrý a väčší ako 45° , nemôže byť ani $x = \frac{1}{2}$, ani $x = -\frac{2}{3}$.

Vzťah (9) teda nie je splnený pre žiadne $x \in \langle 45^\circ; 90^\circ \rangle$.

Výsledok. Riešením nerovnosti (1) sú všetky ostré uhly $\alpha < 45^\circ$. Rovnosť nastane jedine pre $\alpha = 30^\circ$.

2. KATEGORIE B

1. „Vzorec pro umocňování třemi“

$$(2a^2 - a + 1)^3 = 8a^6 - a^3 + 1 \quad (1)$$

platí pro $a = \frac{1}{2}$. Najděte všechna reálná čísla a , pro něž tento „vzorec“ platí.

(Poznámka. Kořen polynomu lze někdy bez řešení příslušné rovnice najít zkusmo. Budete-li znát jeden z kořenů polynomu

vyššího stupně, lze tento polynom rozložit pomocí dělení kořenovým činitelem v součin polynomů nižších stupňů.)

Řešení. Umocníme-li

$(2a^2 - a + 1)^3 = 8a^6 - a^3 + 1 + 12a^4 + 6a^2 - 12a^5 + 6a^4 + 3a^2 - 3a - 12a^3$, dostáváme za předpokladu, že pro číslo a platí (1), rovnici

$$-12a^5 + 18a^4 - 12a^3 + 9a^2 - 3a = 0. \quad (2)$$

Mnohočlen na levé straně rovnice (2) lze rozepsat jako součin

$$-3a \cdot (4a^4 - 6a^3 + 4a^2 - 3a + 1) = 0. \quad (3)$$

Rovnice (2) má tedy kořen $a = 0$, který vyhovuje i rovnici (1).

V textu úlohy je uvedeno, že rovnici (1) vyhovuje $a = \frac{1}{2}$.

Zřejmě $a = \frac{1}{2}$ splňuje také rovnici (3) a tedy i rovnici

$$P(a) = 0,$$

kde $P(a) = 4a^4 - 6a^3 + 4a^2 - 3a + 1$. Po dělení mnohočlenu $P(a)$ kořenovým činitelem $\left(a - \frac{1}{2}\right)$ dostaneme

$$P(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) (4a^3 - 4a^2 + 2a - 2). \quad (4)$$

Použijeme-li vztahu

$$4a^3 - 4a^2 + 2a - 2 = 2(a - 1)(2a^2 + 1),$$

dále rovnosti (4) a úpravy, kterou jsme obdrželi rovnici (3), lze rovnici (2) psát po zkrácení ve tvaru

$$a \cdot \left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot (a - 1) \cdot (2a^2 + 1) = 0,$$

odkud již plyne, že všechny reálné kořeny rovnice (2) a tedy i rovnice (1) jsou čísla $0, \frac{1}{2}, 1$. Mnohočlen $(2a^2 + 1)$ totiž není v oboru reálných čísel rozložitelný.

Závěr: Vzorec (1) platí právě pro čísla $0, \frac{1}{2}, 1$.

2. Znázorněte graficky průběh funkce

$$y = \frac{1}{2} (\sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}). \quad (1)$$

(Poznámka. Vyjádření funkce nejprve vhodně upravte tak, aby výraz na pravé straně obsahoval goniometrické funkce argumentu x .)

Řešení. Protože $-1 \leq \sin 2x \leq 1$, je funkce daná předpisem (1) definována pro všechna reálná x . Funkční předpis (1) si nejprve upravíme tímto obratem: umocníme-li na druhou, dostaneme

$$y^2 = \frac{1}{4} (2 + 2\sqrt{1 - \sin^2 2x}) = \frac{1 + \sqrt{\cos^2 2x}}{2} = \frac{1 + |\cos 2x|}{2}.$$

Protože odmocnina je definována jako nezáporné číslo, platí $y \geq 0$, takže

$$y = \sqrt{\frac{1 + |\cos 2x|}{2}}. \quad (2)$$

Funkce $|\cos 2x|$ je periodická s periodou $\frac{\pi}{2}$, tedy i námi vyšetřovaná funkce, jak plyne z předpisu (2), je periodická s periodou $\frac{\pi}{2}$, takže stačí graficky znázornit její průběh v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Nyní budeme rozlišovat dva případy:

a) Je-li $\cos 2x \geq 0$, pak $|\cos 2x| = \cos 2x$, takže předpis (2) zní

$$y = |\cos x|. \quad (3)$$

Případ a) nastává v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ pro ta x , pro něž

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Avšak pro $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ je $|\cos x| = \cos x$, tedy

(3) zní

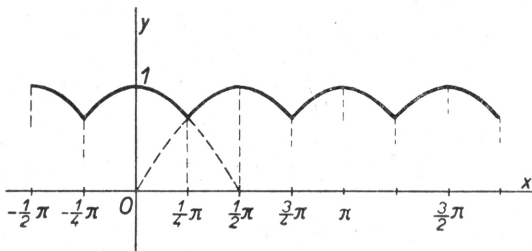
$$y = \cos x. \quad (3a)$$

b) Je-li $\cos 2x < 0$, pak $|\cos 2x| = -\cos 2x$, takže předpis (2) nabývá tvar

$$y = |\sin x|. \quad (4)$$

Případ b) nastává všude tam, kde nenastal případ a). V našem případě se jedná o interval $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, kde však $|\sin x| = \sin x$ a tudíž (4) zní

$$y = \sin x.$$



Obr. 34.

Výsledný graf je na obr. 34. V intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ se užívá

funkčního předpisu (3a) a v intervalu $\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ předpisu (4).

Jiné řešení. Upravíme danou funkci

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x} \right) + \\&\quad + \left(\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x} \right), \\y &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} + \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} \right), \\y &= \frac{1}{2} (|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x|). \quad (5)\end{aligned}$$

Rozlišíme tyto čtyři případy:

- a) $\sin x - \cos x \geq 0$, $\sin x + \cos x \geq 0$;
- b) $\sin x - \cos x \geq 0$, $\sin x + \cos x \leq 0$;
- c) $\sin x - \cos x \leq 0$, $\sin x + \cos x \geq 0$;
- d) $\sin x - \cos x \leq 0$, $\sin x + \cos x \leq 0$.

Jak zjistíme snadno např. pomocí grafů, platí v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ nerovnosti

$$\sin x - \cos x \geq 0 \text{ pro } x \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\rangle;$$

$$\sin x - \cos x \leq 0 \text{ pro } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{5\pi}{4}, 2\pi \right\rangle;$$

$$\sin x + \cos x \geq 0 \text{ pro } x \in \left\langle 0, \frac{3\pi}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right\rangle;$$

$$\sin x + \cos x \leq 0 \text{ pro } x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\rangle.$$

Nastane tedy případ:

- a) pro $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle$,
- b) pro $x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\rangle$,
- c) pro $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right\rangle$,
- d) pro $x \in \left\langle \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\rangle$.

(6)

V jednotlivých případech a) až d) dostaneme z (5)

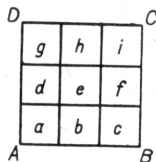
- a) $y = \sin x$,
- b) $y = -\cos x$,
- c) $y = \cos x$,
- d) $y = -\sin x$.

(7)

Zobrazením funkcí (7) v intervalech (6) dostaneme graf dané funkce.

3. Štvorec $ABCD$ je rozdelený štyrmi priečkami na deväť zhodných štvorcov. Každé z týchto deviatich polí má byť natreté jednou zo štyroch daných farieb tak, aby žiadne dve susedné polia neboli rovnakej farby. Za susedné polia pokladáme štvorce, ktoré majú spoločnú buď stranu alebo vrchol.

Zvoľte pevne farbu stredného a ľavého dolného štvorca a zistite počet rôznych možností zafarbenia ostatných polí.



Obr. 35.

Riešenie. Polia označme malými písmenami podľa obr. 35. Farbu, ktorou je natreté pole a , označme 1. Farby, ktorými sú natreté polia b, d označme v uvedenom poradí 2, 3. Potom pole e je natreté farbou 4. Pre pole c sú podľa podmienky úlohy dve možnosti: farba 1 alebo farba 3 (obr. 36).

Pre pole f potom vychádza určitá farba: v prvom prípade 3, v druhom prípade 1. Zostáva doplniť prvé riadky oboch tabuliek z obr. 36. Ľavú tabuľku možno doplniť dvoma spôsobmi (obr. 37). Pole h môže mať totiž buď farbu 1 alebo farbu 2. Druhú tabuľku z obr. 36 možno však doplniť len jedným spôsobom: pole h musí mať farbu 2 (obr. 38).

3	4	3
1	2	1

3	4	1
1	2	3

Obr. 36.

2	1	2
3	4	3
1	2	1

1	2	1
3	4	3
1	2	1

Obr. 37.

Farby 1 a 4 polí a a e sú pevne zvolené. Za farby 2 a 3 možno teda voľiť z ostávajúcich dvoch farieb a sú práve dve možnosti. Voľba každej z oboch možností vedie ku trom spôsobom zafarbenia polí (pozri obr. 37, 38).

Počet rôznych možností zafarbenia polí, ak sú pevne zvolené farby stredného a ľavého dolného štvorca, je teda

1	2	3
3	4	1
1	2	3

Obr. 38.

$$2 \cdot 3 = 6.$$

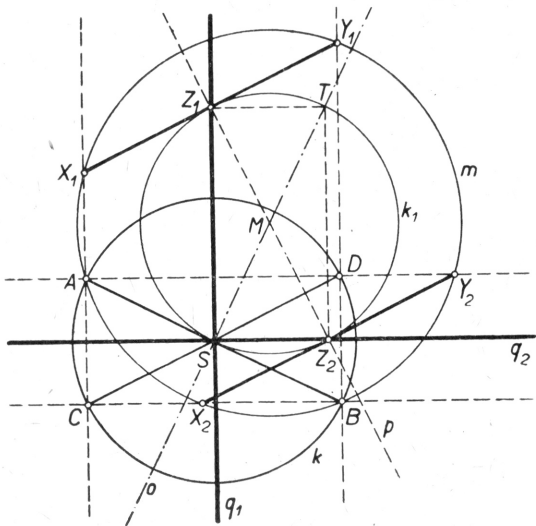
4. Je daná kružnica k a jej dva rôzne priemery AB , CD .

Vyšetríte geometrické miesto stredov všetkých úsečiek XY , ktoré majú tieto vlastnosti:

- $XY \parallel CD$;
- $XY = CD$;
- body A , B , X , Y ležia na kružnici.

Riešenie. Označme (obr. 39) S stred kružnice k . Nech m je ľubovoľná kružnica prechádzajúca bodmi A a B . Jej stred M leží teda na osi o úsečky AB . Nájdeme všetky úsečky XY vy-

hovujúce podmienkam a) a b) úlohy a také, že X aj Y ležia na kružnici m . Ak je $M \equiv S$, je $m \equiv k$ a CD je jediná taká úsečka.



Obr. 39.

Nech je teda $M \neq S$. Z podmienky b) vyplýva, že taká úsečka má dĺžku $CD = AB$. Všetky tetivy kružnice m dĺžky AB sa však dotýkajú kružnice $k_1 \equiv (M; MS)$. Medzi nimi sú práve dve tetivy X_1Y_1 a X_2Y_2 , ktoré vyhovujú podmienke a) úlohy, t. j. $X_1Y_1 \parallel X_2Y_2 \parallel CD$. Dotykové body Z_1 a Z_2 týchto tetív na kružnici k_1 ležia na priamke p idúcej stredom M a kolmej k CD . Pretože Z_1 a Z_2 sú v uvedenom poradí stredmi tetív X_1Y_1 a X_2Y_2 , patria k hľadanému geometrickému miestu. Označme ešte T druhý priesečník (okrem S) priamky o s kružnicou k_1 . Potom sú Z_1Z_2 a ST dva rôzne priemery kružnice k_1 a platí $Z_1Z_2 \perp CD$, $ST \perp AB$. Body S , Z_1 , T , Z_2 sú

teda vrcholmi obdĺžnika, ktorého uhlopriečky sú kolmé k uhlopriečkam obdĺžnika $ACBD$. Preto strany oboch obdĺžnikov sú rovnobežné a body Z_1, Z_2 ležia na osiach q_1, q_2 uhlov ASD, ASC rôznobežiek AB, CD . Tieto osi obsahujú tedy všetky body hľadaného geometrického miesta.

Ukážme teraz, že aj obrátene každý bod oboch osí je stredom niektorej úsečky XY . Pre stred S to platí ($XY \equiv CD$). Ak je $Z_1 \neq S$ bodom osi q_1 , vedme ním kolmicu k priamke CD . Tá pretína o v bode, ktorý označíme M , druhú os q_2 v bode, ktorý označíme Z_2 . Pretože body Z_1, S, Z_2 sú troma vrcholmi obdĺžnika (s uhlopriečkami kolmými k uhlopriečkam obdĺžnika $ACBD$), prechádza kružnice $k_1 \equiv (M; MS)$ bodmi Z_1, Z_2 . Jej dotýčnica v bode Z_1 pretína kružnicu $m \equiv (M; MA)$ v bodoch X_1 a Y_1 vyhovujúcich podmienkam úlohy. Taktiež pre každý bod $Z_2 \neq S$ osi q_2 sa dokáže, že patrí k hľadanému geometrickému miestu.

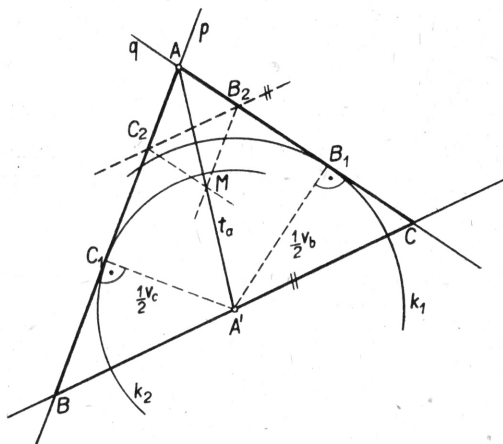
Záver: Hľadané geometrické miesto je zložené z oboch osí q_1, q_2 obdĺžnika $ACBD$.

Poznámka. Pretože platí $CS \parallel X_1Z_1, CS = X_1Z_1$ podľa podmienok úlohy, je pre $S \neq Z_1$ štvoruholník CSZ_1X_1 rovnobežníkom. Ďalej je $AC \parallel q_1 \equiv SZ_1$, takže bod X_1 leží na priamke AC . Podobne dokážeme, že bod X_2 leží na priamke CB , bod Y_1 na priamke BD a bod Y_2 na priamke AD .

5. Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány délky těžnice t_a a výšek v_b, v_c . Provedte diskusi řešitelnosti.

Řešení. Rozbor (obr. 40). Označme A' střed strany BC ; je tedy $AA' = t_a$. Dále označme po řadě B_1, C_1 paty kolmic spuštěných z bodu A' na přímky AC, AB . Stejnolehlost se středem B a koeficientem $\frac{1}{2}$, převede vrchol C v bod A'

a výšku v_c v úsečku $A'C_1$; proto je $A'C_1 = \frac{1}{2} v_c$. Z obdobné-



Obr. 40.

ho důvodu je $A'B_1 = \frac{1}{2} v_b$, přímky $p \equiv AB$, $q \equiv AC$ se tedy dotýkají po řadě kružnic $k_2 \equiv \left(A'; \frac{1}{2} v_c\right)$, $k_1 \equiv \left(A'; \frac{1}{2} v_b\right)$ a přitom bod A' leží uvnitř úhlu BAC .

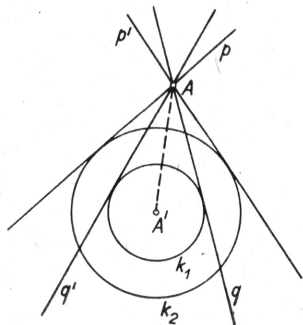
Konstrukce. Nejprve sestojíme úsečku AA' , pak kružnice k_1, k_2 a vedeme k nim z bodu A tečny. Z nich vybereme tečnu p ke kružnici k_2 a tečnu $q \not\equiv p$ ke kružnici k_1 . Právě jeden ze čtyř úhlů určených přímkami p, q obsahuje úsečku AA' ; na jeho ramenech leží vrcholy B, C . Směr přímky BC určíme takto: Sestojíme rovnoběžník AB_2MC_2 tak, aby body C_2, B_2 ležely na obou ramenech úhlu, který obsahuje úsečku AA' ; přitom bod C_2 leží na přímce p , bod B_2 na přímce q (M značí bod vnitřku úsečky AA'). Přímka BC procházející bodem A' je rovnoběžná s přímkou C_2B_2 .

Zkouška. Je zřejmé, že podle předchozího sestrojené přímky p, q mají od bodu A' po řadě vzdálenosti $\frac{1}{2} v_c, \frac{1}{2} v_b$, dále, že úsečka BC je půlena bodem A' , tj., že trojúhelník ABC má těžnici AA' délky t_a . Konečně je patrné, že výšky spuštěné z vrcholů B, C mají po řadě délky v_b, v_c .

Diskuse. Úsečku AA' a kružnice k_1, k_2 lze sestrojit za všech okolností. Tečny p, q lze vést právě tehdy, je-li

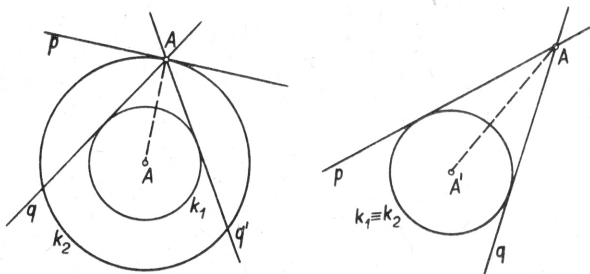
$$v_b \leq 2t_a, v_c \leq 2t_a. \quad (1)$$

Tečny p, q nesplynou (jsou různoběžné) právě tehdy, když ve vztazích (1) platí aspoň jedna ostrá nerovnost. Rovnoběžka vedená k přímce C_2B_2 bodem A' protne obě přímky p, q . Vztahy (1), v nichž nastane rovnost v nejvýše jednom případě, udávají tedy podmínku řešitelnosti úlohy.



Obr. 41.

Obr. 41 ukazuje, jak můžeme vybrat dvojice tečen p, q v případě, že $k_1 \neq k_2$ ($v_b \neq v_c$) a platí obě ostré nerovnosti (1). Obr. 42a znázorňuje případ, kdy $2t_a = v_c, 2t_a > v_b$. Na obr. 42b je $k_1 \equiv k_2$ ($v_b = v_c < 2t_a$).



Obr. 42a, b.

Možný výběr dvojic tečen na obr. 41 je pq , pq' , $p'q$, $p'q'$; na obr. 42a jsou dvě dvojice pq a pq' ; na obr. 42b je jediná dvojice pq (nehledíme-li na souměrnost podle přímky AA').

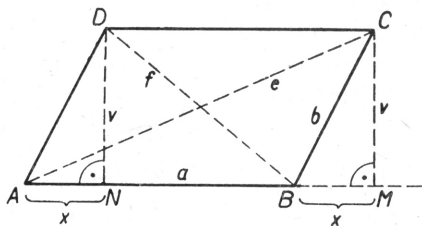
6. Strany rovnoběžníka $ABCD$ označme $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ a jeho úhlopříčky $AC = e$, $BD = f$.

a) Dokažte, že o velikostech stran a úhlopříček libovolného rovnoběžníka $ABCD$ platí rovnost

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

b) Použijte této rovnosti a vyjádřete vzdálenost středů stran AB , CD čtyřstěnu $ABCD$ pomocí délek všech jeho stran.

Řešení. a) I. Pomocí kosinové věty (obr. 43).



Obr. 43.

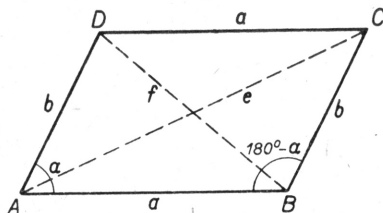
V trojúhelníku ABC a v trojúhelníku ABD platí

$$e^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha, \quad f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha;$$

sečtením těchto rovností dostaneme

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

II. *Bez kosinové věty* (obr. 44).



Obr. 44.

Zavedeme označení podle obr. 44. Platí podle Pythagorovy věty v trojúhelnících AMC a BMC

$$(a + x)^2 + v^2 = e^2, \quad x^2 + v^2 = b^2.$$

Odečtením obou rovností dostaneme

$$a^2 + 2ax = e^2 - b^2. \quad (1)$$

Obdobně pro trojúhelníky BND a AND platí

$$(a - x)^2 + v^2 = f^2, \quad x^2 + v^2 = b^2,$$

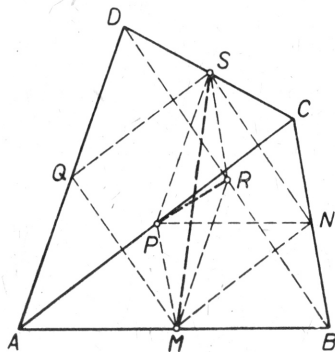
tj.

$$a^2 - 2ax = f^2 - b^2. \quad (2)$$

Sečtením (1), (2) dostaneme

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

b) Ve čtyřstěnu $ABCD$ označme M, N, P, Q, R, S po řadě středy hran AB, BC, AC, AD, BD, CD . Budeme hledat vyjádření délky MS (obr. 45).



Obr. 45.

Podle vlastností střední příčky trojúhelníka je

$$PS = MR = \frac{1}{2} AD, \quad PS \parallel MR,$$

$$PM = RS = \frac{1}{2} BC, \quad PM \parallel RS;$$

proto je čtyřúhelník $MPSR$ rovnoběžník. Podle a) platí

$$MS^2 + PR^2 = 2(PS^2 + PM^2) = \frac{1}{2} AD^2 + \frac{1}{2} BC^2. \quad (3)$$

Analogicky dostaneme

$$PR^2 + NQ^2 = \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} CD^2, \quad (4)$$

$$NQ^2 + MS^2 = \frac{1}{2} AC^2 + \frac{1}{2} BD^2. \quad (5)$$

Od sečtených rovnic (3) a (5) odečteme rovnici (4):

$$2MS^2 = \frac{1}{2} AC^2 + \frac{1}{2} AD^2 + \frac{1}{2} BC^2 + \frac{1}{2} BD^2 - \\ - \frac{1}{2} AB^2 - \frac{1}{2} CD^2,$$

tj.

$$MS = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2}.$$

3. KATEGORIE C

1. Určite všetky zlomky $\frac{a}{b}$ (a, b prirodzené čísla), ktoré majú tieto vlastnosti:

$$90 < a + b < 100, \quad (1)$$

$$0,9 < \frac{a}{b} < 0,91. \quad (2)$$

Riešenie. Z prvej podmienky vyplýva

$$\frac{90}{b} < 1 + \frac{a}{b} < \frac{100}{b}, \quad (3)$$

t. j. vzhľadom na nerovnosti (2) a (3)

$$1,9 < \frac{100}{b}, \quad \frac{90}{b} < 1,91$$

a stadiaľ

$$47,1 \dots \div \frac{90}{1,91} < b < \frac{100}{1,9} \div 52,6 \dots$$

čiže

$$48 \leq b \leq 52 . \quad (4)$$

Vyšetrujeme najskôr menovateľa $b = 52$. Z nerovnosti (2) po vynásobení číslom 52 vyplýva

$$46,8 < a < 47,32 ,$$

t. j. $a = 47$. Skutočne je $a + b = 99 < 100$.

Vyšetrujme za druhé menovateľa $b = 51$. Z nerovnosti (2) po vynásobení číslom 51 vyplýva

$$45,9 < a < 46,41 ,$$

t. j. $a = 46$. Skutočne je $a + b = 97 < 100$.

Vyšetrujme za tretie menovateľa $b = 50$. Z nerovnosti (2) vyplýva

$$45 < a < 45,5 . \quad (5)$$

Nerovnostiam (5) nevyhovuje však žiadne prirodzené číslo a . Za štvrté vyšetříme menovateľa $b = 49$. Z nerovnosti (2) dostaneme

$$44,1 < a < 44,59 . \quad (6)$$

Konečne vyšetříme menovateľa $b = 48$. Z nerovnosti (2) vyjde

$$43,2 < a < 43,68 . \quad (7)$$

Zrejme ani nerovnostiam (6) a (7) nevyhovuje žiadne prirodzené číslo a .

Úloha má tedy dve riešenia. Sú to zlomky $\frac{47}{52}$, $\frac{46}{51}$.

2. Udejte všechny dvojice přirozených čísel p, q , pro něž je číslo

$$N = 7^p - 3^q$$

násobkem deseti.

Úlohu řešte nejprve pro přirozená čísla p, q , která jsou vázána podmínkami

$$1001 \leq p \leq 1005 \text{ a } 2002 \leq q \leq 2006.$$

Řešení. Číslo N je násobkem deseti právě tehdy, když mocniny $7^p, 3^q$ končí toutéž číslicí. Sestavíme tabulku:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3^n	3	9	27	81	243	729	...7	...1	...3	...9
7^n	7	49	243	1701	11907	...9	...3	...1	...7	...9

Z tabulky je patrné, že poslední číslice přirozených mocnin čísla 3 se pravidelně opakují tak, že pro exponent $n = 4a + 1$ (kde a je libovolné nezáporné celé číslo) je poslední číslicí 3, pro $n = 4a + 2$ je poslední číslicí 9, pro $n = 4a + 3$ je poslední číslicí 7 a konečně pro $n = 4a + 4$ je poslední číslicí 1.

Poslední číslice čísla 7^n se také opakují: pro $n = 4b + 1$ (kde b je libovolné nezáporné číslo) je poslední číslicí 7, pro $n = 4b + 2$ je poslední číslicí 9, pro $n = 4b + 3$ je poslední číslicí 3 a pro $n = 4b + 4$ je poslední číslicí 1.

Poslední číslice mocnin čísel 3 a 7 pro daná přirozená q a p sestavíme rovněž do tabulky (pod sebe napíšeme mocniny s týmiž posledními číslicemi):

p	1 001	1 002	1 003	1 004	1 005
7^p	...7	...9	...3	...1	...7
q	2 003	2 002 2 006	2 005	2 004	2 003
3^q	...7	...9	...3	...1	...7

Hledaných dvojic přirozených čísel p, q z daných exponentů lze sestavit 6; jsou to: (1 001; 2 003), (1 002; 2 002), (1 002; 2 006), (1 003; 2 005), (1 004; 2 004) a (1 005; 2 003).

b) Vzhledem k tomu, že se poslední cifry mocnin čísel 3 a 7 pravidelně opakují, lze vyjádřit dvojice přirozených exponentů p, q i obecně (čísla a_i a b_j jsou nezáporná celá):

1. Je-li

$$p = 4a_1 + 1, \quad q = 4b_1 + 3,$$

mají obě mocniny za poslední cifru číslo 7 a příslušné číslo N je tedy násobkem deseti.

Z obdobných důvodů tvoří dvojice hledaných přirozených exponentů ještě tato čísla:

$$2. \quad p = 4a_2 + 2, \quad q = 4b_2 + 2;$$

$$3. \quad p = 4a_3 + 3, \quad q = 4b_3 + 1;$$

$$4. \quad p = 4a_4 + 4, \quad q = 4b_4 + 4.$$

3. Větší počet provozoven se podílel stejným dílem na výrobním plánu. Vzhledem k zahraničním objednávkám bylo třeba zvýšit plán na 108 %. Shodou okolností $p\%$ zúčastněných provozoven splnilo svůj plán jen na 90 %. O jaký počet $q\%$ musela zvýšit každá ze zbývajících provozoven svůj plán, aby byl celkový zvýšený výrobní plán splněn?

Vyjádřete q pomocí p a sestrojte graf této funkce pro $0 \leq p < 100$.

Řešení. Označme a počet provozoven, které splnily svůj plán jen na 90 %, b počet zbývajících provozoven. Pak platí rovnost

$$a \cdot 0,9 + b \left(1 + \frac{q}{100} \right) = (a + b) 1,08. \quad (1)$$

Obě strany rovnice (1) dělíme číslem $a + b$ a použijeme vztahů

$$\frac{a}{a + b} = \frac{p}{100}, \quad \frac{b}{a + b} = \frac{100 - p}{100};$$

vyjde

$$\frac{p}{100} \cdot 0,9 + \frac{100 - p}{100} \left(1 + \frac{q}{100} \right) = 1,08.$$

Po úpravě (vynásobení stem) dostaneme

$$\frac{pq}{100} + 0,1p - q + 8 = 0$$

neboli

$$pq + 10p - 100q + 800 = 0,$$

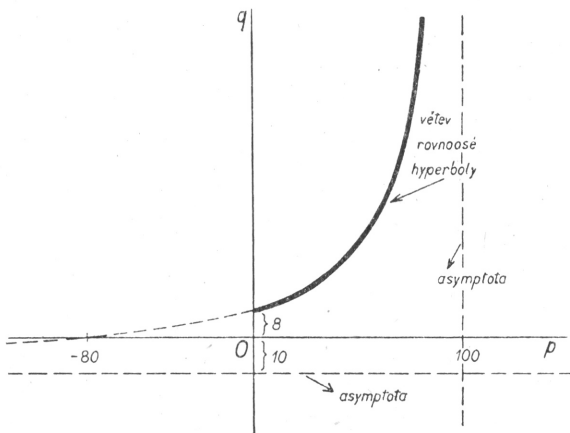
tj.

$$q(100 - p) = 10(p + 80). \quad (2)$$

Protože je $p < 100$, je $100 - p > 0$ a lze tímto číslem dělit obě strany rovnice (2); dostaneme

$$q = 10 \cdot \frac{80 + p}{100 - p}, \quad (3)$$

což je výsledek úlohy. Grafické znázornění funkce (3) je na obr. 46.

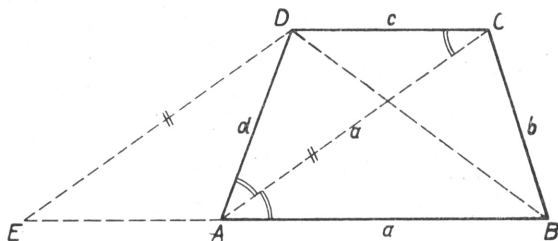


Obr. 46.

4. Lichoběžník $ABCD$ má úhlopříčky AC , BD , které jsou téže délky a půlí úhly při základně AB .

a) Dokažte, že platí $BC = CD = DA$.

b) Sestrojte tento lichoběžník, je-li dáno $AB = AC = a$.



Obr. 47.

Řešení. a) Podle podmínky úlohy je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB$ (obr. 47). Dále je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$ (úhly střídavé). Proto je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD$ a trojúhelník ACD je rovnoramenný se základnou AC . Z obdobného důvodu je rovnoramenný trojúhelník BDC se základnou BD . Je tedy

$$BC = CD = DA = b. \quad (1)$$

b) Dokončíme rozbor: Na přímce AB sestrojíme bod E tak, aby bylo $DE \parallel AC$; pak je $AE = CD = b$, $DE = AC = a$, $\sphericalangle DEB = \sphericalangle CAB$ (úhly souhlasné), $\sphericalangle DEB = \sphericalangle DBE$ (trojúhelník BED je rovnoramenný). Je tedy

$$\triangle BED \sim \triangle ACD \text{ (uu)}. \quad (2)$$

Ze vztahu (2) plyne

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}.$$

Odtud dostaneme kvadratickou rovnici pro b

$$b^2 + ab - a^2 = 0. \quad (3)$$

Rovnice (3) má vždy jediný kladný kořen

$$b = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + 4a^2} - a) = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} - 1). \quad (4)$$

Konstrukci lichoběžníka můžeme provést po konstrukci úsečky délky b (použitím Pythagorovy věty) pomocí a , b obvyklým způsobem. Jinak je možno sestrojit trojúhelník BED a z něho lichoběžník $ABCD$, který vyhovuje podmínkám úlohy.

Podmínka sestrojitelnosti trojúhelníka BED je $BD + ED > BE$ neboli

$$2a > a + b;$$

pomocí vztahu (4) dostáváme

$$a > \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1),$$

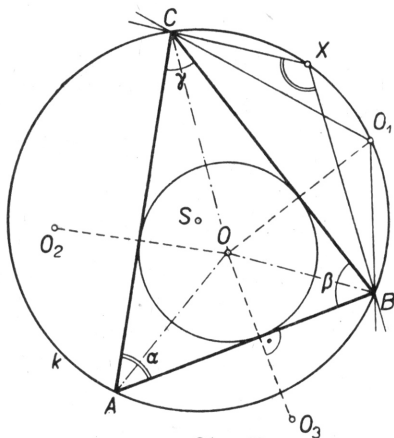
tj.

$$2 > \sqrt{5} - 1. \quad (5)$$

Protože $\sqrt{5} < 3$, je vztah (5) správný. Protože postup lze obrátit, je podmínka (5) i podmínkou postačující. Úloha má tedy vždy jediné řešení (ve zvolené polorovině s hranicí AB).

5. Je dán trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ . Označme O_1, O_2, O_3 body, které jsou souměrně sdružené se středem O vepsané kružnice po řadě podle přímek BC, CA, AB .

Udejte všechny možnosti poloh bodů O_1, O_2, O_3 vzhledem ke kružnici k opsané trojúhelníku ABC (v závislosti na velikostech úhlů α, β, γ).



Obr. 48.

Řešení (obr. 48). Přímka BC odděluje body A , O_1 , neboť střed vepsané kružnice leží v polorovině BCA . Označme X libovolný bod opsané kružnice k , který leží uvnitř poloroviny BCO_1 . Podle známé věty o obvodových úhlech je

$$\sphericalangle BXC = 180^\circ - \alpha. \quad (1)$$

Z konstrukce bodu O_1 vyplývá, že platí $\sphericalangle CBO_1 = \frac{1}{2} \beta$,
 $\sphericalangle BCO_1 = \frac{1}{2} \gamma$, tedy

$$\sphericalangle BO_1C = 180^\circ - \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{2} \gamma = 90^\circ + \frac{1}{2} \alpha. \quad (2)$$

Bod O_1 leží *na kružnici* k právě tehdy, je-li $\sphericalangle BXC =$
 $= \sphericalangle BO_1C$, neboli podle (1), (2)

$$\alpha = 60^\circ. \quad (3)$$

Dále odvodíme, že bod O_1 leží *vně* kružnice k právě tehdy, je-li $\sphericalangle BXC > \sphericalangle BO_1C$, neboli podle (1) a (2)

$$\alpha < 60^\circ. \quad (4)$$

Obdobně bod O_1 leží *uvnitř* kružnice k právě tehdy, je-li

$$\alpha > 60^\circ. \quad (5)$$

Je tedy třeba uvážit všechny možnosti velikostí úhlů trojúhelníka ABC vzhledem k úhlu velikosti 60° . Označíme-li úhel větší než 60° značkou $+$, úhel menší než 60° značkou $-$, dostaneme tyto případy:

I.	60° ,	60° ,	60° ;	VI.	60° ,	$-$,	$-$;
II.	60° ,	60° ,	$+$;	VII.	$+$,	$+$,	$+$;
III.	60° ,	60° ,	$-$;	VIII.	$+$,	$+$,	$-$;
IV.	60° ,	$+$,	$+$;	IX.	$+$,	$-$,	$-$;
V.	60° ,	$+$,	$-$;	X.	$-$,	$-$,	$-$.

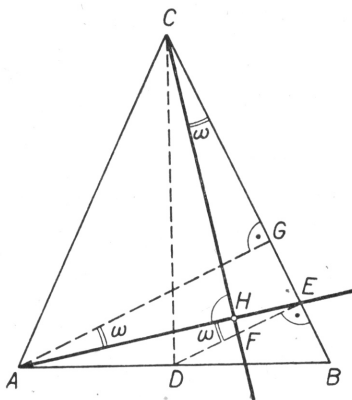
Případy II, III, IV, VI, VII a X nemohou v trojúhelníku nastat; sečteme-li totiž velikosti úhlů v každém z těchto případů, dostaneme součet různý od 180° .

V případě I, tj. u rovnostranného trojúhelníka, leží podle (3) všechny body O_1, O_2, O_3 na kružnici k .

V případě V, je-li např. $\alpha = 60^\circ, \beta > 60^\circ, \gamma < 60^\circ$, leží podle (3), (4) a (5) bod O_1 na kružnici k , bod O_2 leží uvnitř kružnice k a bod O_3 leží vně kružnice k (obr. 48).

Obdobně popíšeme situaci i v případě VIII a IX. Obecně lze o případech V, VIII a IX říci, že u nerovnostranného trojúhelníka platí: Ten z bodů O_1, O_2, O_3 , který odpovídá úhlu většímu než 60° , leží uvnitř kružnice k , který odpovídá úhlu 60° , leží na kružnici k a který odpovídá úhlu menšímu než 60° , leží vně kružnice k .

6. Je daný rovnoramenný trojúhelník ABC so základňou AB . Zo stredy D úsečky AB je spustená kolmica na priamku BC . Jej päta je označená E , stred úsečky DE je označený F . Dokážte, že priamky AE, CF sú navzájom kolmé.



Obr. 49.

Riešenie (obr. 49). Označme G päťu kolmice spustenej z vrcholu A na priamku BC . Podľa vety *uu* je

$$\triangle ABG \sim \triangle CDE. \quad (1)$$

Je totiž

$$\sphericalangle ABG = 90^\circ - \sphericalangle GAB = 90^\circ - \sphericalangle EDB = \sphericalangle CDE.$$

Z (1) vyplýva

$$AG : GB = CE : ED,$$

t. j.

$$AG : \frac{1}{2} GB = CE : \frac{1}{2} ED,$$

čiže

$$AG : GE = CE : EF. \quad (2)$$

Podľa vety *sus* o podobnosti trojuholníkov je vzhľadom na vzťah (2)

$$\triangle AGE \sim \triangle CEF,$$

a teda platí

$$\sphericalangle GAE = \sphericalangle ECF = \omega.$$

Pretože $AG \parallel DE$, je

$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle ECF = \omega.$$

Označme H priesečník priamok AE , CF . V trojuholníku CHE potom platí

$$\sphericalangle HEC = 90^\circ - \omega.$$

Je teda $\sphericalangle CHE = 90^\circ$ čiže $AE \perp CF$, čo sme mali dokázať.

4. KATEGORIE D

1. Najděte všechna čísla x , která splňují rovnici

$$\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}. \quad (1)$$

Proveďte zkoušku a diskusi řešitelnosti vzhledem k číslům a, b, c .

Řešení. Aby rovnice (1) byla řešitelná, je nutné, aby bylo

$$a \neq 0, \quad a + b \neq 0. \quad (2)$$

Znásobme obě strany rovnice (1) výrazem $a(a+b)^3$; vyjde

$$\begin{aligned} 3a^2bc(a+b)^2 + a^3b^2 + (2a+b)(a+b)b^2x &= \\ = 3ac(a+b)^3x + bx(a+b)^3. \end{aligned}$$

Další úpravou

$$\begin{aligned} 3a^4bc + 6a^3b^2c + 3a^2b^3c + a^3b^2 &= \\ = xa(a+b)(3a^2c + 6abc + 3b^2c + ab) \end{aligned}$$

neboli

$$a^2b \cdot V = ax(a+b) \cdot V, \quad (3)$$

kde

$$V = 3a^2c + 6abc + 3b^2c + ab = 3c(a+b)^2 + ab. \quad (4)$$

Nyní je třeba rozlišit dva případy:

1. Je-li $V \neq 0$, dělíme obě dvě strany rovnice (3) součinem $a(a+b) \cdot V$ a vyjde

$$x = \frac{ab}{a+b}. \quad (5)$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} L &= \frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)ab^3}{a(a+b)^3} = \\ &= \frac{1}{(a+b)^3} [3abc(a+b)^2 + a^2b^2 + (2a+b)b^3] = \\ &= \frac{1}{(a+b)^3} [3abc(a+b)^2 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4] = \\ &= \frac{(a+b)^2}{(a+b)^3} (3abc + b^2). \end{aligned}$$

$$P = \frac{3ac+b}{a} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{3ac+b}{a+b} \cdot b,$$

tj.

$$L = P.$$

2. Je-li $V = 0$, je

$$c = \frac{-ab}{3(a+b)^2}.$$

Pak rovnice (1) zní

$$-\frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = -\frac{abx}{(a+b)^2} + \frac{bx}{a}$$

neboli

$$\frac{bx}{a(a+b)^2} [2ab + b^2 + a^2 - a^2 - b^2 - 2ab] = 0.$$

Protože výraz v hranaté závorce je nulový, jsou kořeny rovnice (1) všechna (reálná) čísla.

2. Určite všetky dvojciferné čísla x tej vlastnosti, že každé z čísiel $2x, 3x, 4x, 5x, 6x, 7x, 8x, 9x$ má ten istý ciferný súčet ako číslo x .

Riešenie. Predpokladajme, že číslo m vyhovuje podmienkam úlohy. Potom číslo m má rovnaký ciferný súčet ako číslo $9m$. Pretože číslo $9m$ je zrejme deliteľné deviatimi, je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi. Teda aj číslo m je deliteľné deviatimi. Preto hľadané dvojciferné čísla x musia byť medzi dvojcifernými násobkami čísla 9, tj. medzi číslami

$$18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 \text{ a } 99. \quad (1)$$

Teraz postupne u každého z čísel (1) overíme podmienky úlohy.

Uvažujme o čísle 18. Potom všetky čísla $2 \cdot 18 = 36$, $3 \cdot 18 = 54$, $4 \cdot 18 = 72$, ..., $9 \cdot 18 = 162$ majú ciferný súčet rovný deviatim, t. j. rovnaký ako číslo 18. Číslo 18 je tedy jedným z riešení úlohy.

Ak vyšetrujeme násobky čísla 27, zistíme, že číslo $7 \cdot 27 = 189$ má ciferný súčet 18. Preto číslo 27 nie je riešením úlohy.

Podobne vyskúšame aj ostatné čísla z (1) a zistíme, že hľadané čísla x sú len čísla

$$18, 45, 90 \text{ a } 99.$$

3. Čtyřciferné číslo N je deliteľné osmnácti, má vesmės různé číslice a dá se napsat jako součet tří čísel: první je dvojciferné, druhé je jeho desetinásobek a třetí je jeho stonásobek. Najděte všechna čísla N těchto vlastností.

Řešení. Číslo N se dá vytvořit jako součet:

$$\begin{array}{r} ab \\ ab \\ ab \\ \hline N \end{array} \quad (1)$$

Protože je N dělitelné osmnácti, je sudé a je dělitelné devíti. Je tedy buď $b = 0$ nebo 2 nebo 4 nebo 6 nebo 8. Číslo $3(a + b)$ je dělitelné devíti jako ciferný součet čísla N ; je tedy $a + b$ dělitelné třemi. Protože $a + b \neq 0$, jsou tyto možnosti:

$a + b = 3$ nebo 6 nebo 9 nebo 12 nebo 15 nebo 18. Kdyby však bylo $a + b < 10$, pak by při sčítání (viz (1)) vyšly prostřední dvě číslice stejné; je tedy

$$a + b = 12 \text{ nebo } 15 \text{ nebo } 18.$$

Nemůže však být $a + b = 18$, neboť pak by nemohlo být b sudé (bylo by $a = b = 9$). Zbývají tedy jen dvě možnosti $a + b = 12$ nebo $a + b = 15$, b sudé, tj.

a	8	6	4	9	7
b	4	6	8	6	8
$a + b$	12	12	12	15	15

Přezkoušíme jednotlivé případy:

84	66	48	78
84	66	48	78
84	66	48	78
9324	7326	5328	8658

Případ

$$\begin{array}{r} 96 \\ 96 \\ 96 \\ \hline \end{array}$$

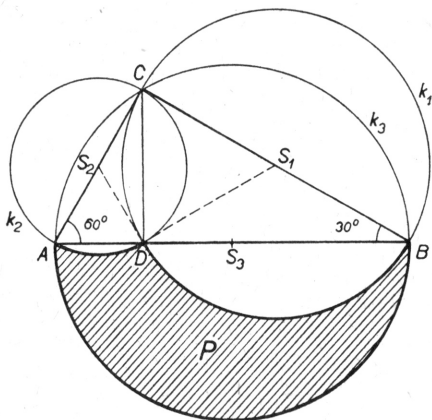
10 656 nemůže nastat, neboť vede k číslu

N pěticifernému.

78
78
78

8658 rovněž nemůže nastat, neboť číslo N má pak dvě číslice stejné.

Úloha má tedy tři řešení: 9 324, 7 326 a 5 328.



Obr. 50.

4. Je dán trojúhelník ABC , jehož úhly mají velikosti $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ a strana AC má velikost 1.

Vypočítejte obsah vyšrafované plochy, která je omezena (obr. 50) kružnicemi sestavenými nad průměry AB , BC , CA (na dvě desetinná místa).

Řešení. Trojúhelník ABC je pravoúhlý, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Označme D patu výšky na přeponu. Podle obrácení Thaletovy

věty procházejí kružnice k_1, k_2 sestrojené nad odvěsnami BC, CA bodem D . Pro délky stran trojúhelníku ABC platí

$$AC = 1, AB = 2, BC = \sqrt{3}. \quad (1)$$

Označme P obsah vyšrafované plochy, P_1, P_2 obsahy úsečí omezených tětivami BD, AD a kružnicemi k_1, k_2 ; středy těchto kružnic označme S_1, S_2 . Pak platí vzhledem k (1)

$$P = \frac{1}{2} \pi - P_1 - P_2. \quad (2)$$

Obsahy P_1, P_2 vypočteme pomocí středových úhlů

$$\sphericalangle BS_1D = 120^\circ, \sphericalangle AS_2D = 60^\circ.$$

Je tedy vzhledem k (1)

$$P_1 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2; \quad (3)$$

(trojúhelník BDS_1 má též obsah jako rovnostranný trojúhelník o straně délky $\frac{\sqrt{3}}{2}$). Rovnost (3) po úpravě zní

$$P_1 = \frac{1}{4} \pi - \frac{3\sqrt{3}}{16}. \quad (4)$$

Obdobně dostaneme

$$P_2 = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^2,$$

po úpravě

$$P_2 = \frac{1}{24} \pi - \frac{\sqrt{3}}{16}. \quad (5)$$

Dosadíme-li z (4) a (5) do (2), vyjde

$$P = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{4} \pi + \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{5\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Numericky

$$P \doteq (3,14 \cdot 5) : 24 + (1,73 : 4) \doteq 0,65 + 0,43,$$

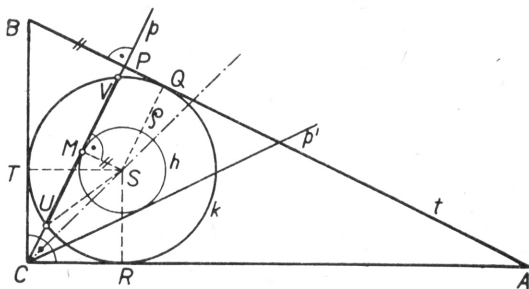
tedy

$$P \doteq 1,08.$$

5. Je daný polomer ϱ kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku a dĺžka $d = \frac{7}{4} \varrho$ úsečky, ktorú vytína vpísaná kružnica na jeho výške v spustenej na preponu:

a) Vyjadrite dĺžku výšky v pomocou polomeru ϱ .

b) Zostrojte pravouhlý trojuholník pre $\varrho = 2$ cm.



Obr. 51.

Riešenie. a) Do pravého uhla s vrcholom C (obr. 51) vpíšeme kružnicu $k \equiv (S; \varrho)$. Výška na preponu hľadaného trojuholníka ABC leží v takej priesečnici p kružnice k , ktorá pre-

chádza bodom C a na ktorej kružnica k vytína úsečku UV dĺžky $d = \frac{7}{4}\varrho$. Označme M stred tetivy UV . Potom MS je vzdialenosť stredu S od priesečnice p . Vzdialenosť MS vieme určiť konštrukciou i výpočtom z pravouhlého trojuholníka MSU , v ktorom je

$$UM = \frac{1}{2}d = \frac{7}{8}\varrho, \quad US = \varrho.$$

Vyjde

$$MS = \sqrt{\varrho^2 - \frac{49}{64}\varrho^2} = \frac{1}{8}\varrho \cdot \sqrt{15}. \quad (1)$$

Priesečnica p sa teda dotýka kružnice $h \equiv (S; MS)$.

Zrejme je (pozri obr. 51)

$$v = CP = CM + MP.$$

Z obdĺžnika $SMPQ$ vyplýva $MP = SQ = \varrho$, t. j.

$$v = CM + \varrho. \quad (2)$$

Zostáva teda vypočítať dĺžku CM z pravouhlého trojuholníka CMS . Podľa Pythagorovej vety je

$$CM^2 = CS^2 - SM^2.$$

Zo štvorca $CRST$ vyplýva $CS = \varrho\sqrt{2}$. Vzhľadom na (1) je teda

$$CM^2 = 2\varrho^2 - \frac{15}{64}\varrho^2 = \frac{113}{64}\varrho^2,$$

t. j.

$$CM = \frac{\sqrt{113}}{8}\varrho. \quad (3)$$

Ak spojíme (2) a (3), dostaneme

$$v = \frac{8 + \sqrt{113}}{8} \varrho \doteq \frac{8 + 10,63}{8} \varrho \doteq 2,33\varrho.$$

b) Konštrukcia. Zostrojíme pravý uhol s vrcholom C a vpíšeme do neho kružnicu $k \equiv (S; 2 \text{ cm})$. Okolo bodu S

opíšeme kružnicu h s polomerom $SM = \frac{1}{8} \varrho \cdot \sqrt{15} \doteq 0,97 \text{ cm}$.

Bodom C vedieme dotýčnicu p ku kružnici h . Ku kružnici k zostrojíme dotýčnicu $t \perp p$ tak, aby kružnica k ležala v polrovine tS . Priesečníky ramien pravého uhla s priamkou t sú vrcholy A, B .

Dôkaz. Zostrojený trojuholník ABC je zrejme pravouhlý a kružnica k je jeho vpísanou kružnicou. Priamka p je výškou, pretože $p \perp AB$. Pretože p je dotýčnicou kružnice $h \equiv \left(S; \frac{1}{8} \varrho \sqrt{15}\right)$, dostaneme (pozri obr. 51)

$$UM^2 = US^2 - SM^2 = \varrho^2 - \left(\frac{1}{8} \varrho \sqrt{15}\right)^2 = \left(\frac{7}{8} \varrho\right)^2,$$

takže skutočne je dĺžka úsečky, ktorú vytína vpísaná kružnica na výške spustenej na preponu $\frac{7}{8} \varrho$. Zámenou označenia vrcho-

lov A, B dostaneme dve rôzne riešenia. Pretože $CS = \varrho\sqrt{2} > \varrho > MS$, možno bodom C viesť dve dotýčnice p a p' ku kružnici h . Tieto dotýčnice sú súmerne združené podľa priamky CS a vedú ku zhodným riešeniam úlohy.

6. Osový řez rotačního kužele je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník VAB o přeponě AB délky d . Přímkou AV je vedena rovina, která protne kužel v rovnostranném trojúhelníku VAC . Vyjádřete pomocí proměnné d

Podle (3) a (4) je tedy

$$\triangle VAB \cong \triangle CAB;$$

proto je i trojúhelník VBC rovnostranný.

a) Pro objem jehlanu $ABCV$ s podstavou ABC a výškou SV dostaneme

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{d^3}{24}.$$

b) Povrch jehlanu vyjde

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} d^2.$$

V. Soutěžní úlohy II. kola

1. KATEGORIE A

1. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y , která jsou řešením rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18}. \quad (1)$$

Řešení. Rovnice (1) má v oboru přirozených čísel též řešení jako rovnice

$$18(x + y) = xy. \quad (2)$$

Rovnice (2) má v oboru přirozených čísel též řešení jako rovnice

$$y = \frac{18x}{x - 18}. \quad (3)$$

Rovnici (3) upravíme takto:

$$y = \frac{18x - 18^2 + 18^2}{x - 18} = 18 + \frac{18^2}{x - 18}. \quad (4)$$

Z (3) vyplývá, že je $x > 18$, neboť je $x > 0, y > 0$. Protože y je celé číslo, je podle (4) $x - 18$ kladný dělitel čísla $18^2 = 324$. Sestavíme tabulku:

$x - 18$	1	2	3	4	6	9	12	18
x	19	20	21	22	24	27	30	36
y	342	180	126	99	72	54	45	36

Dalších osm řešení dostaneme výměnou x, y . O tom, že nalezené dvojice čísel x, y jsou skutečně řešením rovnice (1), se přesvědčíme *obrácením postupu*.

2. Množina všech přímek v rovině, jejichž vzdálenosti od bodů $A = [1,0]$, $B = [0,0]$ (v tomto pořadí) mají rozdíl druhých mocnin rovný číslu 1, je množina všech tečen paraboly

$$y^2 = 2x. \quad (1)$$

Dokažte.

Řešení. Označme u (v) vzdálenost přímky dané množiny M od bodu A (B). Podle podmínky úlohy je

$$u^2 - v^2 = 1. \quad (2)$$

Budiž

$$ax + by + c = 0 \quad (3)$$

rovnice libovolné přímky množiny M . Pak platí

$$u = \frac{|a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad v = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4)$$

Dosadíme-li z (4) do (2), vyjde po úpravě

$$a^2 + 2ac = a^2 + b^2$$

a dále

$$2ac = b^2. \quad (5)$$

Znásobíme-li rovnici (3) číslem $2a$ a dosadíme-li z (5) za $2ac$, dostaneme

$$2a^2x + 2aby + b^2 = 0, \quad (6)$$

což je rovnice kterékoli přímky množiny M . Zkouškou se přesvědčíme, že každá přímka daná rovnicí (6) [kde ovšem je $a \neq 0$] splňuje podmínku (2). Je tedy (6) rovnicí množiny přímek M .

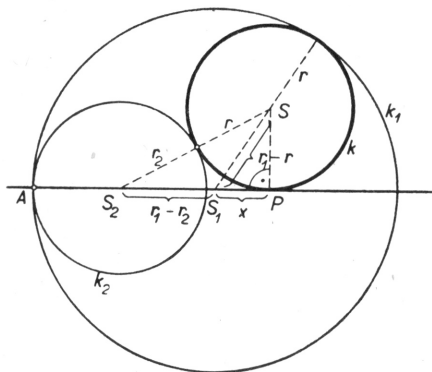
Zkoumejme společné body přímky (6) a paraboly (1). Do rovnice (6) dosadíme za $2x$ z (1); vyjde:

$$a^2y^2 + 2aby + b^2 = 0. \quad (7)$$

Rovnice (7) má diskriminant $4a^2b^2 - 4a^2b^2 = 0$ a proto má jediný kořen y . Přímka (6), která není rovnoběžná s osou x ($a \neq 0$), je tedy tečnou paraboly (1).

V množině $\mathbf{M}$ je po jedné přímce každého směru. Rovnoběžku s osou y dostaneme pro $b = 0$. Přímku o směrnici $\lambda \neq 0$ dostaneme pro $a = -\lambda, b = 1$. Protože parabola (1) má *jedinou* tečnu každého směru různého od směru osy x a protože každá přímka množiny $\mathbf{M}$ je tečnou paraboly a protože množina $\mathbf{M}$ obsahuje přímky všech směrů různých od (x) , náleží tečna paraboly (1) množině $\mathbf{M}$.

3. Je daná kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$ a kružnice $k_2 \equiv (S_2; r_2)$, kde $r_2 < r_1$. Tieto kružnice mají vnútorný dotyk v bode A . Zostrojte kružnicu k , ktorá má vnútorný dotyk s kružnicou k_1 , vonkajší dotyk s kružnicou k_2 a dotýka sa priamky AS_1 .



Obr. 53.

Riešenie (obr. 53). Nech je $k \equiv (S; r)$ a nech P je bod dotyku kružnice k s priamkou AS_1 . Ďalej označme x číslo, pre ktoré $|x| = S_1P$ a také, že $x < 0$, ak bod P leží na polpriamke S_1A a $x > 0$ pre P na polpriamke opačnej k polpriamke S_1A . Pre $P \equiv S_1$ je samozrejme $x = 0$. Potom pri každom usporiadaní bodov S_1, S_2, P bude platiť

$$S_2P = r_1 - r_2 + x.$$

Z trojuholníka S_1PS dostaneme rovnosť $(r_1 - r)^2 = r^2 + x^2$, čiže

$$2r_1r = r_1^2 - x^2. \quad (1)$$

Z trojuholníka S_2PS dostaneme $(r_2 + r)^2 = r^2 + (r_1 - r_2 + x)^2$, čiže

$$2r_2r = r_1^2 - 2r_1r_2 + 2(r_1 - r_2)x + x^2. \quad (2)$$

Z rovníc (1) a (2) vylúčime r . Vyjde kvadratická rovnica pre x :

$$(r_1 + r_2)x^2 + 2r_1(r_1 - r_2)x + r_1^3 - 3r_1^2r_2 = 0. \quad (3)$$

Diskriminant rovnice (3) je

$$\begin{aligned} D &= 4r_1^2(r_1 - r_2)^2 - 4(r_1 + r_2)r_1^2(r_1 - 3r_2) = \\ &= 4r_1^2 \cdot 4r_2^2 = 16r_1^2r_2^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Pomocou (4) dostaneme dva korene rovnice (3)

$$x = r_1 \cdot \frac{3r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \quad (5)$$

a $x' = -r_1$ (ktorý nevyhovuje).

Úloha má riešenie práve vtedy, keď je $|x| < r_1$, t. j. ak platí podľa (5)

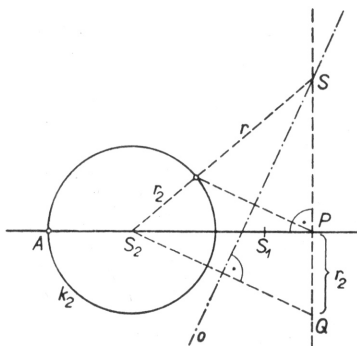
$$\frac{|3r_2 - r_1|}{r_1 + r_2} < 1.$$

Táto nerovnosť je ekvivalentná s dvojicou nerovností

$3r_2 - r_1 < r_1 + r_2$ čiže $r_2 < r_1$ a $r_1 - 3r_2 < r_1 + r_2$ čiže $0 < r_2$, ktoré sú vždy splnené.

Skúškou sa presvedčíme, že číslo r z rovnice (1) vyhovuje podmienkam úlohy (x môže vyjsť aj záporné). K tomuto číslu r prislúchajú dve riešenia súmerne združené podľa priamky AS_1 .

Konstruktoria. Pomocou podobných trojuholníkov (štvrtá geometrická úmerná) zostrojíme úsečku dĺžky $|x|$, pomocou nej bod P a potom podľa obr. 54 bod S . Priamka o je os úsečky S_2Q , kde $PQ = r_2$.



Obr. 54.

4. Dokažte vety:

a) Má-li rovnice

$$z\bar{z} + az + b = 0, \quad (1)$$

kde a, b jsou komplexní čísla, aspoň jeden kořen tvaru ki (k je reálné číslo), pak platí

$$(a + \bar{a})(\bar{a}b + \bar{a}b) = (b - \bar{b})^2. \quad (2)$$

b) Platí-li pro koeficienty a, b rovnice (1) podmínka (2), je-li $a \neq 0$ a rovnice (1) řešitelná, pak má aspoň jeden kořen tvaru ki (k je reálné číslo).

Řešení. a) Vyhovuje-li číslo z rovnici (1), vyhovuje i rovnici konjugované

$$\bar{z}z + \bar{a}\bar{z} + \bar{b} = 0. \quad (1')$$

Odečtením rovnic (1), (1') dostaneme

$$az - \bar{a}\bar{z} + b - \bar{b} = 0. \quad (3)$$

Je-li $z = ki$ (k reálné), je $\bar{z} = -z$; dosadíme-li za $\bar{z}$ do rovnice (3), vyjde

$$(a + \bar{a})z = \bar{b} - b. \quad (4)$$

Nyní je třeba eliminovat z z rovnic (1), (4). S použitím vztahu $\bar{z} = -z$ přepíšeme (1) do tvaru

$$-z^2 + az + b = 0; \quad (1'')$$

abychom se vyhnuli dělení číslem $a + \bar{a}$, o němž nevíme, zda je různé od nuly či nikoli, znásobíme rovnici (1'') číslem $(a + \bar{a})^2$ a použijeme (4); dostaneme

$$-(b - \bar{b})^2 + a(a + \bar{a})(\bar{b} - b) + (a + \bar{a})^2 b = 0$$

a odtud po jednoduché úpravě plyne (2).

b) Při dokazování věty b) nám pomůže rovnice (4). Z odstavce a) totiž víme, že má-li rovnice (1) kořen $z = ki$, pak platí vztah (4); je-li mimo to ještě $a + \bar{a} \neq 0$, dá se tento kořen vypočítat z rovnice (4); vyjde

$$z = \frac{\bar{b} - b}{a + \bar{a}}. \quad (5)$$

Budeme tedy nejprve předpokládat, že platí (2), mimo to že je $a + \bar{a} \neq 0$, a zkusíme, zda číslo z dané vzorcem (5) vyhovuje rovnici (1). Dosadíme za z do levé strany (1); po úpravě vyjde

$$\frac{1}{(a + \bar{a})^2} \left[-(b - \bar{b})^2 + a(a + \bar{a})(\bar{b} - b) + (a + \bar{a})^2 b \right]. \quad (6)$$

Protože platí (2), zjistíme krátkou úpravou, že výraz v lomených závorkách v (6) je roven nule. Číslo (5) je tedy skutečně kořenem rovnice (1).

Zbývá vyšetřit případ, že je $a + \bar{a} = 0$, neboli $\bar{a} = -a$. Z podmínky (2) pak plyne $\bar{b} = b$. Protože předpokládáme, že rovnice (1) má řešení, platí to i o rovnicích (1'), (3). Vzhledem k podmínkám $\bar{a} = -a$, $\bar{b} = b$ nabude (3) tvaru

$$a(z + \bar{z}) = 0.$$

Protože je $a \neq 0$, je $z + \bar{z} = 0$, tj. kořen rovnice (1) je $z = ki$.

2. KATEGORIE B

1. Jsou-li a, b dvě přirozená čísla taková, že $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ je rovněž přirozené číslo, pak každé z čísel a, b je druhou mocninou přirozeného čísla. Dokažte.

Řešení. Podle předpokladu je

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = n \quad (\text{kde } n \text{ je přirozené číslo}).$$

Dvojím umocněním a úpravou dostaneme

$$n^4 - 2n^2(a + b) + (a - b)^2 = 0,$$

tj.

$$(a - b)^2 = n^2 [2(a + b) - n^2]. \quad (1)$$

Číslo $2(a + b) - n^2$ je podľa (1) rovno $\frac{(a - b)^2}{n^2}$, je to teda druhá mocnina racionálneho čísla; pretože je *celé*, je to druhá mocnina prirodzeného čísla p . Je teda $2(a + b) - n^2 = p^2$ neboli

$$2(a + b) = n^2 + p^2. \quad (2)$$

Z (2) vyplýva, že čísla n, p jsou též parity, neboť na levé straně je číslo sudé. Dosadíme-li do (1) a (2) a předpokládáme-li $a \geq b$, vyjde $a - b = np$, neboli

$$2(a - b) = 2np. \quad (3)$$

Spojením (2), (3) dostaneme

$$4a = (n + p)^2, \quad 4b = (n - p)^2.$$

Čísla $n + p, n - p$ jsou sudá, $\frac{n + p}{2}, \frac{n - p}{2}$ celá; je tedy

$$a = \left(\frac{n + p}{2}\right)^2, \quad b = \left(\frac{n - p}{2}\right)^2,$$

jak jsme měli dokázat.

2. Nech je a pevné reálné číslo, pro které platí $0 < a < 1$. Potom pro všechny x také, že $-1 < x < 1$ platí nerovnost

$$\frac{(1 - ax)^2}{1 - x^2} \geq 1 - a^2. \quad (1)$$

Dokážte ju a ukážte, že rovnost nastane len pre $x = a$. Nakreslite graf funkcie $y = \frac{(1 - ax)^2}{1 - x^2}$ pre $a = \frac{1}{2}$.

Riešenie. Keďže $1 - x^2 > 0$, z nerovnosti (1) vyplýva

$$(1 - ax)^2 \geq (1 - a^2)(1 - x^2), \quad (2)$$

stadial'

$$1 - 2ax + a^2x^2 \geq 1 - a^2 - x^2 + a^2x^2, \quad (3)$$

z čoho

$$a^2 - 2ax + x^2 \geq 0, \quad (4)$$

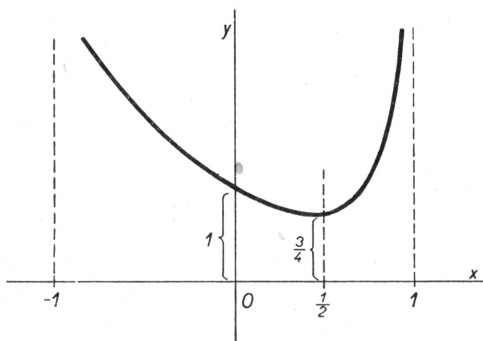
čiže

$$(a - x)^2 \geq 0. \quad (4')$$

Obrátene zo (4') čiže zo (4) vyplýva (3), z (3) vyplýva (2) a pretože $1 - x^2 > 0$, vyplýva z (2) vzťah (1).

Ak nastane rovnosť v (1), nastane rovnosť i v (4'), t. j. $x = a$.

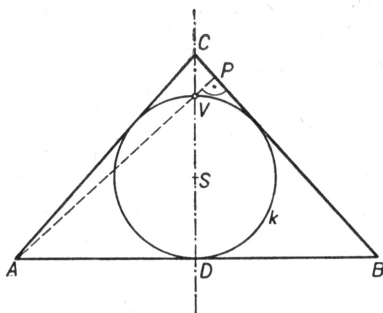
Graf funkcie $y = \frac{(1 - ax)^2}{1 - x^2}$ pre $a = \frac{1}{2}$ je na obr. 55.



Obr. 55.

3. Vypočítajte poměr délek stran rovnoramenného trojúhelníka, jehož průsečík výšek leží na kružnici vepsané.

Řešení. Budiž ABC rovnoramenný trojúhelník se základnou AB (obr. 56), který má uvedenou vlastnost. Pak průsečík výšek V leží na výšce CD (D je střed základny AB); to je důsledek souměrnosti $\triangle ABC$ podle přímky CD . Označme velikosti stran a úhlů trojúhelníka obvyklým způsobem a označme ϱ



Obr. 56.

poloměr vepsané kružnice k a P patu výšky AV . Pak platí

$$\begin{aligned} \sphericalangle ACD &= 90^\circ - \sphericalangle CAD = 90^\circ - \alpha = \\ &= 90^\circ - \sphericalangle CBD = \sphericalangle VAD, \end{aligned}$$

tj.

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle VAD$$

a proto

$$\triangle ACD \sim \triangle VAD. \quad (1)$$

Z (1) plyne

$$CD : AD = AD : VD$$

neboli

$$2qv = \frac{c^2}{4}, \quad (2)$$

kde v značí velikost výšky CD . Dále je podle známého vzorce pro obsah trojúhelníka^{*)}

$$q = \frac{cv}{2 \left(a + \frac{c}{2} \right)} = \frac{cv}{2a + c} \quad (3)$$

^{*)} $P = qs$, kde P je obsah trojúhelníka, s jeho poloviční obvod.

a konečně podle Pythagorovy věty

$$v^2 = a^2 - \frac{c^2}{4}. \quad (4)$$

Dosadíme z (3) do (2), tj. eliminujeme ϱ ; vyjde

$$\frac{2cv^2}{2a + c} = \frac{c^2}{4}. \quad (5)$$

Dosadíme z (4) do (5), tj. eliminujeme v ; vyjde

$$2c \left(a^2 - \frac{c^2}{4} \right) = (2a + c) \frac{c^2}{4}. \quad (6)$$

Rovnici (6) dělíme číslem c ; po další úpravě vyjde

$$8a^2 - 2ac - 3c^2 = 0. \quad (7)$$

Rovnice (7) je kvadratická rovnice pro poměr $\frac{a}{c}$; jejím řešením dostaneme

$$\frac{a}{c} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{16} = \left\langle \frac{3}{4} \right. \quad \left. - \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Záporný kořen nevyhovuje; je tedy $a : c = 3 : 4$.

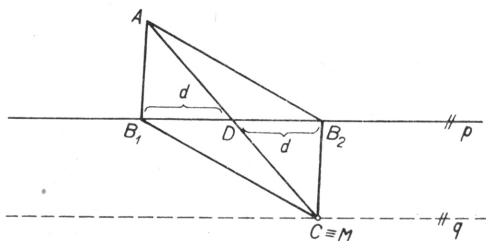
Zkouška se provede obrácením postupu.

4. Sú dané dva body A, M , priamka p , ktorá ich oddeľuje, a kladné číslo d . Zostrojte trojuholník ABC tak, aby vrchol B ležal na priamke p , ťažnica t_b mala dĺžku d a ležala na priamke p a aby priamka BC obsahovala bod M .

Riešenie. Označme D stred strany AC . Vrchol C je obrazom bodu D v rovnobežlosti κ so stredom A a koeficientom 2. Preto

leží vrchol C na priamke $q \parallel p$, ktorá je obrazom priamky p v rovnobežnosti $\varkappa$.

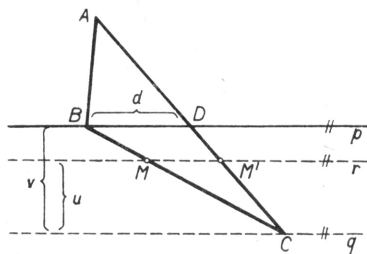
1. Ak leží bod M na priamke q , je $C \equiv M$. Zostrojíme priesečník D priamok AC , p a na priamke p dva body B_1, B_2 tak, aby bolo $B_1D = B_2D = d$ (obr. 57). Úloha má dve riešenia.



Obr. 57.

2. Ak neleží bod M na priamke q , vedieme ním priamku $r \parallel q$. Ak je $\triangle ABC$ riešením úlohy, pretne priamka r priamku AC v bode M' (obr. 58) a platí

$$\triangle CBD \sim \triangle CMM';$$



Obr. 58.

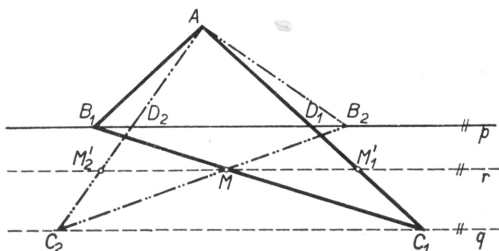
skadiaľ

$$MM' : BD = CM : CB = u : v, \quad (1)$$

kde v je vzdialenosť rovnobežiek p, q , u je vzdialenosť rovnobežiek q, r . Ak v (1) dosadíme $BD = d$, dostaneme

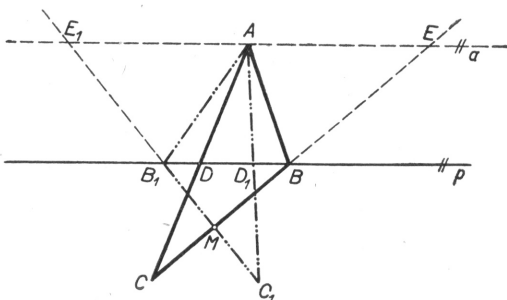
$$MM' = \frac{du}{v},$$

z čoho vieme zostrojiť úsečku MM' , bod M' a vrcholy C, B . Úloha má tiež v tomto prípade 2 riešenia (obr. 59). Bod M môže ležať mimo pásu (pq) .



Obr. 59.

Iné riešenie. Rozbor: Predpokladajme, že sme hľadaný trojuholník ABC zostrojili (obr. 60). Stred strany AC označme



Obr. 60.

D. Platí $D = p \cdot AC$, $BD = d$. Bodom A vedme priamku $a \parallel p$. Jej priesečník s priamkou $BM \equiv BC$ označme E . Platí

$$EB : BC = AC : DC = 1 .$$

Z toho vyplýva, že $EB = BC$, čo znamená, že ťažnica BD je strednou priečkou trojuholníka AEC a teda platí

$$AE = 2 DB = 2d .$$

Z toho vyplýva konštrukcia: Bodom A vedieme priamku a rovnobežnú s priamkou p . Na priamke a zostrojíme bod E , pre ktorý platí $AE = 2d$. Priesečník priamky EM s priamkou p označíme B . Tento priesečník vždy existuje, pretože podľa predpokladu body A , M a teda aj body E , M ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou p . Na polpriamke BM zostrojíme bod C , pre ktorý platí $BC = EB$. Body A , B , C sú vrcholmi hľadaného trojuholníka.

Dôkaz: Podľa konštrukcie body B , D a teda aj ťažnica t_b ležia na priamke p , bod M leží na priamke BC , $AE = 2d$, $BC = EB$ a $AE \parallel p$. Z toho ďalej vyplýva, že $AD : DC = = EB : BC = 1$ a teda $AD = DC$. To znamená, že bod D je stredom úsečky AC , bod B je stredom úsečky EC a ťažnica BD je strednou priečkou trojuholníka ACE . Podľa vlastností strednej priečky je $BD = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} 2d = d$.

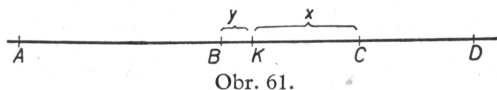
Zostrojený trojuholník vyhovuje teda všetkým podmienkam úlohy.

Diskusia: Na priamke a existujú dva rôzne body, ktorých vzdialenosť od bodu A je $2d$. Z toho vyplýva, že úloha má dve riešenia.

Riešila *Sabina Sitárová*, žiačka II. roč. SVŠ
v Turčianskych Tepliciach

3. KATEGORIE C

1. Pri priamej ceste ležia za sebou štyri obce A, B, C, D . Medzi obcami B, C je križovatka K . Táto križovatka leží uprostred medzi A, D a v tretine cesty z C do A . Vzdialenosť CD je menšia než 10 km, zato vzdialenosť AB je väčšia než 16 km. Vzdialenosti každých dvoch miest v km sú vyjadrené celými číslami. Vypočítajte ich.



Riešenie (obr. 61): Označme $KC = x$, $BK = y$. Potom je $AK = 2 \cdot CK = 2x$ a teda $CD = DK - CK = x$. Ďalej je $AB = AK - BK = 2x - y$, $AD = 4x$.

Okrem toho platí $CD < 10$, $AB > 16$, t. j.

$$x < 10, \quad (1)$$

$$2x - y > 16. \quad (2)$$

Z (2) vyplýva

$$x > \frac{16 + y}{2} > 8. \quad (3)$$

Z (1) a (3) dostaneme $x = 9$ a ďalej z (2) potom je $y < 2$.

Je teda $x = 9$, $y = 1$, t. j.

$$AB = 17, BC = 10, CD = 9, AD = 36.$$

Výsledok overíme skúškou.

2. Je dána soustava dvou rovnic o dvou neznámých x, y :

$$(a - 1)x + 2y = 3b - 1, \quad (1)$$

$$(b + 4)x + 4y = 3a - 2.$$

Zvětšíme-li každý z parametrů a, b o jednu, dostaneme novou soustavu, která má nekonečně mnoho řešení. Vypočtěte parametry a, b a řešení soustavy (1).

Řešení. Nová soustava zní

$$\begin{aligned} ax + 2y &= 3b + 2, \\ (b + 5)x + 4y &= 3a + 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Podle textu úlohy má soustava (2) nekonečně mnoho řešení. Je tedy druhá rovnice (2) dvojnásobkem první rovnice (2) (viz koeficienty při y). Platí tedy

$$\begin{aligned} b + 5 &= 2a, \\ 3a + 1 &= 2(3b + 2), \end{aligned} \quad (3)$$

po úpravě

$$\begin{aligned} 2a - b &= 5, \\ a - 2b &= 1. \end{aligned}$$

Soustava (3) má jediné řešení $a = 3, b = 1$; to jsou hledané hodnoty parametrů a, b .

Dosadíme-li $a = 3, b = 1$ do (1), dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ 5x + 4y &= 7. \end{aligned} \quad (4)$$

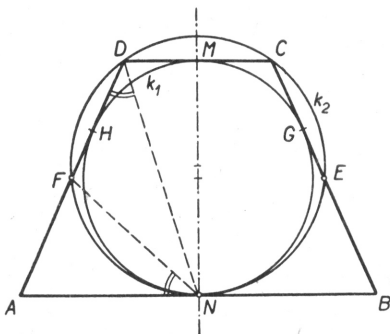
Soustava (4) má jediné řešení $x = 3, y = -2$.

3. Rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ má tyto vlastnosti:

1. jeho základna CD má délku 1;
2. lze mu vepsat kružnici;
3. kružnice, která prochází vrcholy C, D a dotýká se přímky AB , prochází středy obou ramen.

a) Vypočtěte délky $AB, BC = AD$.

b) Sestrojte lichoběžník $ABCD$.



Obr. 62.

Řešení (obr. 62). a) Označme délky stran lichoběžníka obvyklým způsobem $AB = a$, $BC = AD = b$; podle textu úlohy je $CD = 1$. Body E, F jsou po řadě středy ramen BC, AD a body G, H po řadě dotykové body kružnice k_1 na těchto ramenech. Z vlastnosti tečen kružnice plyne

$$AH = BG = AN = BN = \frac{a}{2}, \quad (1)$$

$$DH = CG = DM = CM = \frac{1}{2}; \quad (2)$$

přitom M, N jsou po řadě středy základů CD, AB . Protože je $AH + DH = BG + CG = b$, plyne z (1), (2) $\frac{a}{2} + \frac{1}{2} = b$, neboli

$$a + 1 = 2b. \quad (3)$$

✧ FNA je úsekový úhel nad týmž obloukem FN jako obvodový úhel ✧ FDN . Proto platí podle věty uu

$$\triangle ADN \sim \triangle ANF. \quad (4)$$

Z (4) plyne $AD:AN = AN:AF$, neboli $b:\frac{a}{2} = \frac{a}{2}:\frac{b}{2}$, tj.

$$a^2 = 2b^2. \quad (5)$$

Dosadíme-li do (5) z (3), dostaneme

$$2a^2 = (a+1)^2,$$

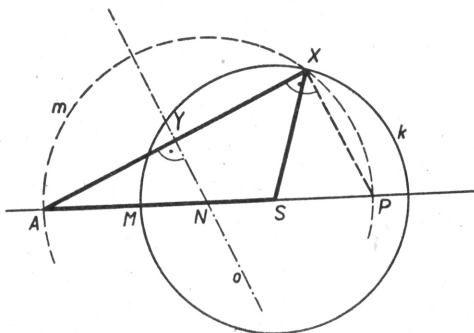
tj.

$$a^2 - 2a - 1 = 0. \quad (6)$$

Rovnice (6) má jediný kladný kořen $a = 1 + \sqrt{2}$; z (3) vypočteme $b = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b) Sestrojíme rovnoramenný lichoběžník, jehož strany mají délky $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = d = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = 1$. Tento lichoběžník lze sestrojit, neboť je $a - c = \sqrt{2}$, $b > a - c$, $b < b + (a - c)$. Obrácením postupu se přesvědčíme, že sestrojený lichoběžník má žádané vlastnosti.

4. Je daná kružnica $k \equiv (S; r)$ a bod A ležiaci zvonku mimo nej. M je priesečník úsečky AS a kružnice k . Zostrojte troj-



Obr. 63.

uholník ASX tak, aby vrchol X ležal na kružnici k a aby os strany AX rozpolovala úsečku SM . Prevedte diskusiu úlohy.

Riešenie (obr. 63): Označme N stred úsečky SM , Y stred úsečky AX . Ďalej označme P bod polpriamky AS , pre ktorý platí $AP = 2 AN$. Potom priamka $o \equiv YN$ je strednou priecou trojuholníka APX . Je teda $PX \parallel YN$ a preto

$$PX \perp AX. \quad (1)$$

Podľa (1) leží bod X na kružnici m , zostrojenej nad priemerom AP , a súčasne tiež na kružnici k . Z tohto rozboru vyplýva konštrukčný predpis: Zostrojíme body N , P , kružnicu m a určíme spoločné body k , m .

Skúška vyplýva z obrátenia postupu rozboru.

Diskusia. Označme $AS = d$. Potom je

$$AN = d - \frac{r}{2}. \quad (2)$$

Riešiteľnosť úlohy závisí na existencii spoločných bodov kružníc $k \equiv (S; r)$, $m \equiv (N; AN)$, pričom je $SN = \frac{r}{2}$. Úloha je riešiteľná práve vtedy, keď sa obe kružnice pretínajú (bod X nesmie ležať na priamke AS), a má potom dve riešenia. Podmienka riešiteľnosti vzhľadom na vzťah (2) teda je

$$\left| d - \frac{r}{2} - r \right| < \frac{r}{2} < d - \frac{r}{2} + r = d + \frac{r}{2}. \quad (3)$$

Pravá nerovnosť vo vzťahu (3) platí vždy. Podmienka riešiteľnosti je teda

$$\left| d - \frac{3}{2} r \right| < \frac{r}{2},$$

t. j. jednak $d - \frac{3}{2}r < \frac{1}{2}r$ čiže $d < 2r$, jednak $\frac{3}{2}r - d < \frac{r}{2}$ čiže $d > r$, čo zrejme platí. Podmienka riešiteľnosti je teda

$$r < d < 2r.$$

4. KATEGORIE D

1. Jsou-li a, b libovolná dvě čísla, pak platí

$$(a^2 + b^2)^3 - (a^3 + b^3)^2 \geq 0. \quad (1)$$

Dokažte a zistíte, pro která a, b nastane rovnost.

Řešení. Na levé straně vztahu (1) vypočítáme mocniny dvojčlenů a upravíme. Dostaneme

$$3a^4b^2 - 2a^3b^3 + 3a^2b^4 \geq 0.$$

neboli
$$a^2b^2(3a^2 - 2ab + 3b^2) \geq 0. \quad (2)$$

V závorce na levé straně vztahu (2) vytvoříme druhou mocninu dvojčlenu $(a - b)$, takže platí

$$a^2b^2[(a - b)^2 + 2a^2 + 2b^2] \geq 0. \quad (3)$$

Zřejmě lze postup obrátit, tj. z nerovnosti (3) dostaneme postupně (2) a pak (1). Proto vztahy (3) i (1) platí pro táž čísla a, b .

Rovnost ve vztahu (1) nastane tedy právě tehdy, když nastane rovnost ve vztahu (3), tj. platí-li aspoň jeden ze vztahů:

$$a^2b^2 = 0; (a - b)^2 + 2a^2 + 2b^2 = 0. \quad (4)$$

První rovnost je splněna, je-li aspoň jedno z čísel a, b rovno nule. Druhá rovnost je splněna jen v případě, že obě čísla a, b jsou zároveň rovna nule; výraz na levé straně je pro libovolná čísla a, b , z nichž aspoň jedno je od nuly různé, kladný. Protože a^2b^2 pro libovolná nenulová čísla a, b je kladný, dostáváme celkem tento **výsledek**:

Je-li aspoň jedno z čísel a, b rovno nule, platí ve vztazích (3) i (1) rovnost, není-li žádné z čísel a, b rovno nule, je výraz na levých stranách ve (3) i (1) kladný.

2. Představte si, že píšeme za sebou všechny násobky čísla tři s koeficienty 1, 2, 3, 4, Dostanete tak sled číslic

$$3\ 6\ 9\ 12\ 15\ 18\ 21\ 24\ \dots \quad (1)$$

Zjistěte, která číslice je na dvoutisícím místě sledu (1).

Řešení. Jednociferné násobky jsou tři, totiž čísla 3, 6, 9, a zabírají celkem tři místa ve sledu (1).

Dvojciferných násobků je celkem

$$\frac{99 - 9}{3} = 30,$$

neboť 9 je největší jednociferný násobek a 99 největší dvojciferný násobek čísla 3. Tyto násobky zabírají ve sledu (1) celkem $2 \cdot 30 = 60$ míst.

Trojciferných násobků je celkem

$$\frac{999 - 99}{3} = 300;$$

protože 99 je největší dvojciferný násobek a 999 největší trojciferný násobek čísla 3. Tyto násobky zabírají ve sledu (1) celkem $3 \cdot 300 = 900$ míst.

Čtyřciferných násobků je celkem

$$\frac{9999 - 999}{3} = 3\,000$$

a zaberou celkem $4 \cdot 3\,000 = 12\,000$ míst ve sledu (1).

Násobky 1 až 3ciferné zaberou $3 + 60 + 900 = 963$ míst. Dvoutisící místo sledu (1) bude tedy náležet některému čtyřcifernému násobku; vypočteme kolikátému. Platí

$$2\,000 - 963 = 1\,037,$$

$$1\,037 = 4 \cdot 259 + 1. \quad (2)$$

Ze vztahu (2) plyne, že *před* dvoutisícím místem sledu (1) je 259 čtyřciferných násobků; dvoutisící místo je tedy obsazeno první číslicí 260-tého čtyřciferného násobku tří.

Tento 260-tý čtyřciferný násobek tří je číslo

$$999 + 260 \cdot 3,$$

tj. 1 779; jeho první číslice je tedy 1.

Ve sledu (1) stojí na dvoutisícím místě číslice 1.

3. Je daný pravouhlý trojuholník AMN s pravým uhlom pri vrchole A . Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB tak, aby vrchol C ležal na predĺžení úsečky AN za bod A , aby priamka BC prechádzala bodom M a aby platilo

$$AC = CM - AN. \quad (1)$$

Riešenie. Rozbor. Na obr. 64 je znázornené predpokladané riešenie úlohy. Pretože bod C leží na predĺžení úsečky AN za bod A , platí

$$CN = CA + AN. \quad (2)$$

Z podmienky (1) vyplýva

$$CM = AC + AN,$$

takže vzhľadom na vzťah (2) je

$$CN = CM.$$

Trojuholník CMN je teda rovnoramenný so základňou MN , a preto bod C leží na osi o úsečky MN .

Konstrukcia. Zostrojíme os o úsečky MN a ak existuje jej priesečník s predĺžením úsečky AN za bod A , je to hľadaný bod C . Bod B je potom priesečníkom priamky CM a kružnice $k \equiv (C; CA)$. Také body sú zrejme dva: B a B' , takže dostaneme dva trojuholníky ABC a $AB'C$.

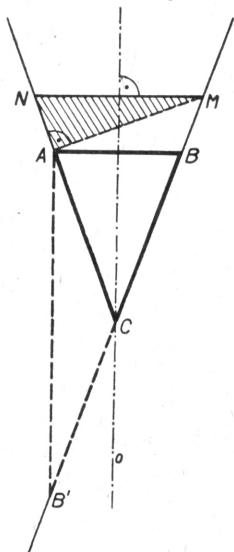
Dôkaz. Oba zostrojené trojuholníky sú zrejme rovnoramenné s vrcholom C proti základni. Ak bod C leží na predĺžení úsečky AN za bod A , prechádza priamka BC (prípadne $B'C$) bodom M . Pretože bod C leží na osi úsečky MN , platí $CM = CN$ a pretože bod C je na predĺžení úsečky AN za bod A , dostaneme

$$AC = CN - AN = CM - AN,$$

čo je vzťah (1), ktorý je platný pre oba trojuholníky ABC a $AB'C$.

Diskusia. Ak je pravouhlý trojuholník AMN rovnoramenný, ide os o bodom A , takže $A \equiv C$ a úloha nemá riešenie.

Ak je $AN > AM$, leží bod A vo vnútri polroviny oM a body A , N ležia v opačných polrovinách s hranicou o . Preto priesečník osi o s priamkou AN leží medzi bodmi A , N a nesplňuje podmienku úlohy.



Obr. 64.

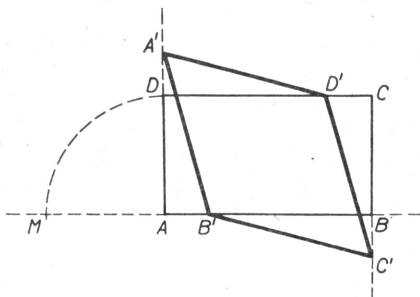
Ak je

$$AM > AN, \quad (3)$$

pretne os o priamku AN v bode $C \neq A$, ktorý leží na predĺžení úsečky AN za bod A . Vtedy dostaneme dve riešenia. Podmienkou riešiteľnosti je teda splnenie nerovnosti (3).

4. Je dán obdĺnik $ABCD$, jehož strany majú dĺžky $AB = a$, $BC = b$, $a > b$. Na polopřímkách BA , CB , DC , AD sestrojte po řadě body B' , C' , D' , A' tak, aby platilo $AA' = BB' = CC' = DD'$ a aby $A'B'C'D'$ byl kosočtverec.

Vypočtete nejprve velikost úseku $AA' = x$ a pak kosočtverec sestrojte.



Obr. 65.

Řešení. Budiž $A'B'C'D'$ kosočtverec (obr. 65). Označme $AA' = BB' = CC' = DD' = x$. Pak je $AB' = CD' = |a - x|$ (nevíme, zda je $a > x$ nebo $x > a$); obdobně je $BC' = DA' = |b - x|$. Podle Pythagorovy věty je

$$BB'^2 + BC'^2 = B'C'^2,$$

$$CC'^2 + CD'^2 = C'D'^2. \quad (1)$$

Protože je $B'C' = C'D'$, plyne z (1)

$$BB'^2 + BC'^2 = CC'^2 + CD'^2;$$

protože je $BB' = CC'$, máme

$$(b - x)^2 = (a - x)^2. \quad (2)$$

Odtud plyne $a - x = b - x$ nebo $a - x = x - b$. První rovnost je vyloučena, poněvadž je $a > b$. Z druhé rovnosti plyne

$$x = \frac{1}{2} (a + b). \quad (2)$$

Obrácením postupu zjistíme, že $A'B'C'D'$ je při takto zvoleném x skutečně kosočtverec. Vzorec (2) zároveň ukazuje, že je

$$b < x < a,$$

tj. body C' , A' leží vně obdélníka, B' , D' na jeho stranách (viz obr. 65).

Konstrukce. Na polopřímce opačné k AB sestrojíme bod M tak, aby bylo $AM = b$. Pak je $BM = a + b$ a B' je středem úsečky BM , neboť je $BB' = \frac{1}{2} BM = \frac{1}{2} (a + b)$. Další body A' , C' , D' snadno doplníme.

Poznámka. Předpokládáme-li, že na obr. 65 je znázorněno řešení úlohy, zjistíme, že

$$\triangle B'BC' \cong \triangle C'CD'$$

(podle věty *Ssu*, neboť oba trojúhelníky jsou pravoúhlé a platí $B'B = C'C = x$, $B'C' = C'D'$). Proto je

$$BC' = CD',$$

tj. $|a - x| = |b - x|$ a obdobnou úvahou jako v uvedeném řešení zjistíme platnost vzorce (2).

VI. Úlohy III. kola kategorie A

1. Je dána soustava nerovností

$$y - x \geq |x + 1| - |x - 1|, \quad (1)$$

$$|y - x| - y + x \geq 2.$$

Znáznorněte řešení každé z daných nerovností v rovině a určete všechna řešení úlohy.

Řešení. a) Pro znázornění řešení první nerovnosti (1) rozlišíme případy 1) $x \leq -1$, 2) $-1 \leq x \leq 1$, 3) $x \geq 1$. V případě 1) je $x + 1 \leq 0$, $x - 1 \leq 0$ a první nerovnost (1) zní $y - x \geq -x - 1 + x - 1$ neboli

$$y \geq x - 2. \quad (x \leq -1) \quad (2)$$

V případě 2) je $x + 1 \geq 0$, $x - 1 \leq 0$ a první nerovnost (1) zní $y - x \geq x + 1 + x - 1$ neboli

$$y \geq 3x. \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (3)$$

V případě 3) je $x - 1 \geq 0$, $x + 1 \geq 0$ a první nerovnost (1) zní $y - x \geq x + 1 - x + 1$ neboli

$$y \geq x + 2. \quad (x \geq 1) \quad (4)$$

b) Pro znázornění řešení druhé nerovnosti (1) rozlišíme případy 1) $y \geq x$, 2) $y \leq x$. V případě 1) zní druhá nerovnost $y - x - y + x \geq 2$ neboli

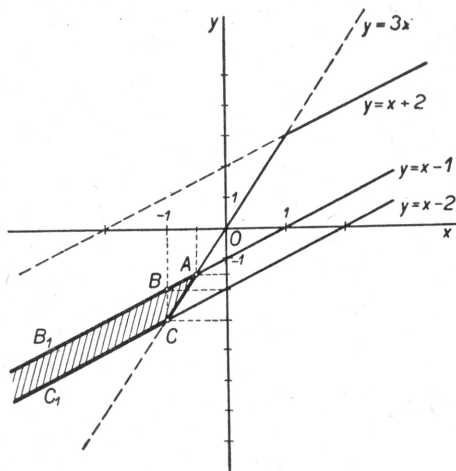
$$0 \geq 2.$$

Druhá nerovnost není tedy splněna pro žádnou dvojici x, y , pro niž platí $y \geq x$.

V případě 2) zní druhá nerovnost $-y + x - y + x \geq 2$ neboli (po krácení)

$$y \leq x - 1. \quad (5)$$

Grafické znázornění je na obr. 66.



Obr. 66.

Řešení soustavy jsou dána nerovnostmi:

$$(I) \quad x \leq -1, \quad x - 2 \leq y \leq x - 1, \quad [(2) \text{ a } (5)]$$

$$(II) \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \quad 3x \leq y \leq x - 1. \quad [(3) \text{ a } (5)]$$

(4) a (5) nedávají řešení (jsou ve sporu). Graf je část roviny skládající se z části pásu omezeného polopřímkami BB_1 , CC_1 a úsečkou BC (řešení I) a z trojúhelníka ABC (řešení II). Body A , B , C mají souřadnice

$$A = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right], \quad B = [-1, -2], \quad C = [-1, -3].$$

2. V rovině je daných n kružnic, z kterých každé dvě sa pretínajú práve v dvoch bodoch a žiadnym bodom neprechádzajú.

zajú tri z týchto kružníc. Určite celkový počet častí, na ktoré delí sústava kružníc rovinu. (Např. tri kružnice uvedených vlastností delia rovinu na osem častí.)

Riešenie. Počet častí, na ktoré delí rovinu n kružníc uvedených vlastností, označíme a_n . Pridajme k týmto n kružniciam ďalšiu kružnicu k tak, aby sústava $n + 1$ kružníc mala požadované vlastnosti. Kružnica k pretína každú z n pôvodných kružníc v 2 bodoch. Celkom na k vznikne $2n$ bodov, ktoré ohraničujú $2n$ jej oblúkov. Ku každému z týchto oblúkov patrí jedna z a_n častí roviny, ktorá ním bola rozdelená na 2 časti. To znamená, že kružnica k zapríčinila vznik $2n$ ďalších častí roviny. Je teda

$$a_{n+1} = a_n + 2n. \quad (1)$$

Zo vzťahu (1) odvodíme vzorec pre a_n .

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2(n-1), \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2(n-2), \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + 2(n-3), \\ &\dots\dots\dots \\ a_2 &= a_1 + 2 \cdot 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Sčítaním všetkých rovností (2) dostaneme

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k. \quad (3)$$

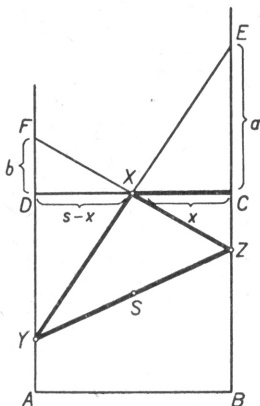
Platí $\sum_{k=1}^{n-1} 2k = \frac{1}{2} (2 + 2n - 2) \cdot (n - 1) = n(n - 1)$. Keďže $a_1 = 2$ (vnútro a vonkajšok kružnice), je

$$a_n = n(n - 1) + 2 = n^2 - n + 2. \quad (4)$$

Správnosť vzorca (4) dokážeme teraz pomocou vzťahu (1) *matematickou indukciou*: Pre $n = 1$ dá vzorec (4) skutočne $a_1 = 2$. Nech platí (4), potom $a_{n+1} = a_n + 2n = n^2 - n + 2 + 2n = n^2 + n + 2 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 2$.

3. Je daný štvorec $ABCD$ so stredom S a stranou $s = AB = 1$. Ďalej sú dané dva body E, F ležiace v uvedenom poradí na priamkach BC, AD vo vnútri polroviny opačnej k CDA .

Určite na základe výpočtu všetky také trojuholníky XYZ , že vrcholy X, Y, Z ležia v uvedenom poradí na úsečkách CD, AD, BC a priamky XY, YZ, ZX prechádzajú v uvedenom poradí bodmi E, S, F . (Poznámka. Výpočtom určujte napr. dĺžku CX .)



Obr. 67.

Riešenie (obr. 67). Označme s dĺžku strany štvorca, a, b dĺžky CE, DF a x dĺžku CX . Trojuholníky CEx, DYX a trojuholníky DFX, CZX sú rovnoběžné podľa stredu X .

Z toho vyplýva

$$CZ = \frac{x}{s-x} b, \quad DY = \frac{s-x}{x} a. \quad (1)$$

Dĺžka strednej pričky lichobežníka (obdĺžnika) $DYZC$ je

vzdialenosť stredu S od priamky CD , t. j. rovná sa $\frac{1}{2}s$. Preto platí $CZ + DY = s$, čiže podľa vzťahu (1)

$$\frac{x}{s-x} b + \frac{s-x}{x} a = s. \quad (2)$$

Po úprave vzťahu (2) dostaneme pre x rovnicu 2. stupňa

$$(a + b + s)x^2 - (2a + s)sx + as^2 = 0. \quad (3)$$

Diskriminant rovnice (3) je

$$D = (s^2 - 4ab)s^2. \quad (4)$$

Ak je $D \geq 0$, má rovnica (3) dva (rôzne alebo splývajúce) korene

$$x = \frac{(2a + s)s \pm \sqrt{D}}{2(a + b + s)}. \quad (5)$$

Každý z koreňov (5) je kladný, pretože $(2a + s)s \geq \sqrt{D}$. Ak by totiž bolo $(2a + s)s < \sqrt{D}$, dostali by sme po umocnení $a + s < -b$, čo je spor. Oba korene (5) sú taktiež menšie alebo rovné s , pretože $(2a + s)s \pm \sqrt{D} \leq 2(a + b + s)s$. Ak by totiž bolo $(2a + s)s + \sqrt{D} > 2(a + b + s)s$, dostali by sme po úprave a umocnení $D > (s + 2b)^2 s^2$ čiže $-a > s + b$, čo je spor. Podmienkou riešiteľnosti úlohy je teda

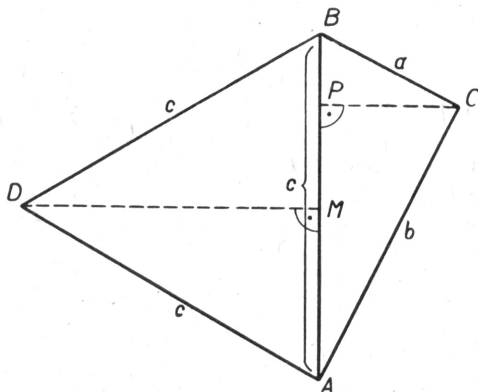
$$D \geq 0.$$

Zostrojenie sa prevedie konštrukciou koreňov (5), kde D je dané vzorcom (4). Pre $D = 0$ má úloha jediné riešenie, pre $D > 0$ dve riešenia.

4. V priestore jsou umístěny dva trojúhelníky ABC a ABD se společnou stranou délky c . Trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB , trojúhelník ABD je rovnostranný, roviny ABC , ABD mají odchylku φ .

a) Vyjádřete vzdálenost bodů C, D pomocí délek stran obou trojúhelníků a čísla φ ; určete tuto vzdálenost konstrukcí.

b) Najděte takovou odchylku φ , aby čtyřstěn $ABCD$ měl čtyři shodné hrany.



Obr. 68.

Řešení (obr. 68). a) Označme délky stran trojúhelníka ABC obvyklým způsobem; označme M střed úsečky AB , P patu kolmice spuštěné z bodu C na přímku AB . Pak platí

$$DM = \frac{c}{2} \sqrt{3}, \quad CP = \frac{ab}{c} \quad (1)$$

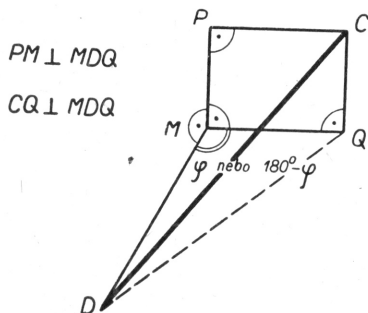
a dále

$$PM = |BM - BP| = \left| \frac{c}{2} - \frac{a^2}{c} \right|. \quad (2)$$

Situaci v prostoru ukazuje obr. 69. $CPMQ$ je obdélník;

proto platí podle (1), (2)

$$MQ = CP = \frac{ab}{c}, \quad CQ = PM = \left| \frac{c}{2} - \frac{a^2}{c} \right|. \quad (3)$$



Obr. 69.

Podle kosinové věty je

$$DQ^2 = DM^2 + MQ^2 \pm 2DM \cdot MQ \cdot \cos \varphi$$

neboli podle (1), (3)

$$DQ^2 = \frac{3c^2}{4} + \frac{a^2b^2}{c^2} \pm ab\sqrt{3} \cdot \cos \varphi. \quad (4)$$

Podle Pythagorovy věty (v $\triangle DCQ$) platí

$$CD^2 = DQ^2 + CQ^2$$

neboli podle (3), (4)

$$CD^2 = \frac{3}{4}c^2 + \frac{a^2b^2}{c^2} \pm ab\sqrt{3} \cdot \cos \varphi + \frac{c^2}{4} + \frac{a^4}{c^2} - a^2,$$

po úpravě

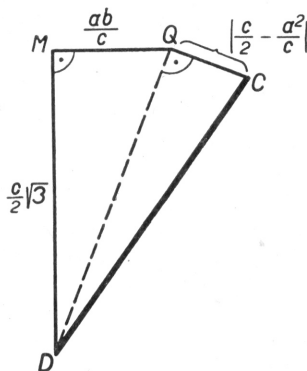
$$CD^2 = c^2 + \frac{a^2}{c^2} \underbrace{(a^2 + b^2)}_{c^2} \pm bc \sqrt{3} \cos \varphi - a^2,$$

tj.

$$CD = \sqrt{c^2 \pm ab \sqrt{3} \cos \varphi}, \quad (5)$$

což je výsledný vzorec.

Konstrukce: Sestrojíme (ve skutečné velikosti) pravoúhlý trojúhelník DMQ a pak sestrojíme (ve skutečné velikosti) pravoúhlý trojúhelník CDQ ; provedení ukazuje obr. 70.



Obr. 70.

b) Má-li čtyřstěn $ABCD$ čtyři shodné hrany, je $CD = c$, neboť $BC = a < c$, $AC = b < c$. Ze vzorce (5) pak plyne

$$c^2 = c^2 \pm ab \sqrt{3} \cdot \cos \varphi,$$

tj. $\cos \varphi = 0^\circ$, takže $\varphi = 90^\circ$.

VII.

Osmá mezinárodní matematická olympiáda v Sofii ve dnech 1.—13. července 1966

Při VIII. mezinárodní matematické olympiádě se projevil výrazně některé tendence, nad kterými se musíme zamyslet, chceme-li objektivně hodnotit výsledky této soutěže a chceme-li realisticky uvažovat o budoucnosti mezinárodních matematických olympiád a o naší účasti na nich.

Předně lze pozorovat stále rostoucí úroveň reprezentantů většiny účastnických států. I když oficiálně jsou tyto soutěže soutěžemi jednotlivců, sestavuje se vždy tabulka pořadí států podle součtu bodů, resp. cen, kterých jednotlivé země dosáhly. Dobré umístění celého družstva se pokládá za věc národní prestiže a většina zemí věnuje přípravě svých olympijských reprezentantů zvláštní péči. Někteří talentovaní žáci se účastní mezinárodních olympiád několikrát, aby získali zkušenosti na mezinárodním fóru, aby se připravili i psychologicky a tak vyrostli v kvalitní reprezentanty. Domácí příprava žáků je v mnoha státech — jak tomu nasvědčují různé příznaky — často spíše individuálním školením profesionálních reprezentantů. Je jasné, že výsledky dosažené v olympiádách nejsou pak ovšem objektivním ukazatelem úrovně vyučování matematice v jednotlivých zemích, ale spíše vizitkou péče, kterou věnuje ta která země svým matematickým talentům. Nemá smyslu diskutovat o tom, zda je tato koncepce soutěží správná či nikoli; nechce-li však kterýkoliv stát hrát na olympiádách roli beznadějného outsidera, nechce-li se pouštět do nerovného zápolení, má jen dvě možnosti: buď se mezinárodních olympiád neúčastnit, nebo se přizpůsobit jejich koncepci.

Druhá tendence, která se na VIII. MMO projevila, je jakási — byť i často skrytá — nespokojenost s nedostatečným statuárním zajišťováním organizace soutěže a z toho vyplývající snahy

o její novou organizaci. V roce 1962 byl sice při příležitosti IV. MMO vypracován v ČSSR statut této soutěže, který byl v podstatě přejímán ve všech dalších mezinárodních matematických olympiádách; pořadající země jej však může v detailech měnit — a tím vzniká těsně před soutěží určitá nejistota, která není mnohým zemím sympatická. Na druhé straně se zdá, že se okruh účastnických zemí bude zvětšovat; zájem o mezinárodní matematické olympiády počínají projevovat i některé státy mimo socialistický tábor. Možná, že i proto se objevují pokusy organizovat mezinárodní soutěž nebo obdobné oblastní soutěže na půdě mezinárodní organizace jako např. UNESCO. Velká diskuse o mezinárodních matematických olympiádách byla i na kongresu v Moskvě v srpnu 1966; velmi blízká budoucnost nám asi ukáže, jak se budou věci vyvíjet; rozhodně bychom však přitom neměli být jen pasivními diváky, ale spíše také aktivními činiteli.

Konečně třetí výraznou tendencí je stále větší a větší pozornost věnovaná společenské stránce soutěže; lze říci, že pro pořadatelskou zemi se stává mezinárodní matematická olympiáda příležitostí pro reprezentaci státu před ostatními účastníky soutěže. Tím jednak stoupají nároky na čas účastníků, jednak ovšem i finanční náklady; při rostoucím počtu účastnických zemí a při nynějším úsporném hospodaření, které se projevuje téměř ve všech státech, tato tendence by mohla v budoucnosti vážně ohrozit pořádání soutěží.

2.

VIII. MMO se oproti roku 1965 účastnilo o jednu zemi méně; bylo tu 9 států: *Bulharsko, Československo, Jugoslávie, Maďarsko, Mongolsko, Německá demokratická republika, Polsko, Rumunsko a Sovětský svaz*. Finové nepřijeli, také Kuba, Vietnam, Korea, ač pozvány, se nedostavily. Jména vedoucích delegací i pedagogických průvodců jsou uvedena v *příloze 1*.

Delegáti se sjeli dne 1. července 1966 v Sofii; již v 19 hod. téhož dne se konala v anglické škole první schůze Mezinárodní komise (Jury), řízená *prof. Alippi Matteevem*, děkanem Matematické fakulty sofijské university, který byl předsedou bulharského přípravného výboru a zároveň předsedou Jury. Generálním sekretářem přípravného výboru byl *inspektor Stojan Budurov*. Na schůzi byl oznámen a schválen program celé soutěže a rozdány materiály, zejména návrhy 19 soutěžních úloh.

Dne 2. 7. po celý den a 3. 7. dopoledne zasedala Jury a vybírala soutěžní úlohy. K 19 původním návrhům (ze zemí: Bulharsko, Československo, Maďarsko, Mongolsko, Německá demokr. republika, Polsko a Sovětský svaz) byly připojeny dodatečně při zasedání Jury další návrhy: tři úlohy jugoslávské, dvě rumunské a jedna sovětská. Vybírání bylo velmi obtížné, neboť byl nedostatek návrhů úloh z algebry, konstrukční i kombinatorické geometrie a stereometrie; situaci ještě zkomplikoval požadavek, aby žádná ze zúčastněných zemí nebyla zastoupena dvěma nebo více úlohami. Hodně se diskutovalo o obtížnosti úloh; po dlouhém jednání byly vybrány dvě trojice úloh; pro první den slovní úloha (bulharská), úloha z trigonometrie (maďarská) a ze stereometrie (sovětská); pro druhý den úloha z goniometrie (jugoslávská), soustava rovnic (československá) a úloha z početní geometrie (polská).

Dne 3. 7. 1966 ve 12 hod. byli delegáti přijati ministrem národní osvěty BLR s. *Gončevem*. Při besedě se ministr Gončev zajímal o stav vyučování v jednotlivých zúčastněných zemích a vyslovil návrh, aby se při mezinárodních matematických olympiádách pořádalo vždy jakési „*symposium*“ o školské matematice.

Na zasedání Jury 4. 7. se ukázala snadnost 1. a 3. soutěžní úlohy. Jury se pak usnesla nahradit první soutěžní úlohu sovětskou slovní úlohou a třetí soutěžní úlohu bulharskou úlohou stereometrickou. I po této úpravě tvořil komplex všech šesti úloh celek ne příliš náročný, což se ukázalo při soutěži samé.

Pak byly formulovány texty úloh v světových jazycích (rusky, německy, francouzsky) a stanoven počet bodů; odpoledne přeložili delegáti texty úloh do národních jazyků, rozmnožili je pro oba dny soutěže a připravili zalepené obálky pro svá družstva. K této práci nebyli podle rozhodnutí organizátorů soutěže připuštěni pedagogičtí průvodci.

3.

Dne 5. 7. 1966 byla v 8.30 zahájena v aule university soutěž bulharským proslavem *prof. Matteeva*, který delegáti přetlumočili do všech ostatních osmi jazyků. Prof. Matteev zdůraznil ve svém projevu důležitost matematiky pro výstavbu socialismu, význam mezinárodních olympiád pro vyhledávání a vzdělávání matematických talentů i pro výměnu zkušeností na poli školské matematiky. Po oficiálním zahájení byly žákům rozdány obálky s texty prvních tří soutěžních úloh a byla zahájena práce. Odpoledne se začalo v anglické škole (kde konali delegáti všechny své práce a Jury všechna svá zasedání) s korekturou první žákovské práce; opravování se zúčastnili i pedagogičtí průvodci. Žáci měli odpoledne volno.

Dne 6. 7. v 9 hod. byla zahájena v budově university druhá soutěžní práce. Dopoledne dokončovali vedoucí delegací s pedagogickými průvodci korekturu prvních tří úloh, odpoledne se opravovala druhá trojice úloh a začalo se s koordinováním. Pro každou úlohu stanovila bulharská strana jednoho koordinátora z domácích pracovníků, který koordinoval práce žáků všech devíti zemí včetně Bulharska.

Dne 7. 7. a dopoledne 8. 7. se pokračovalo v opravování druhé soutěžní práce a v koordinování. Ihned po ukončení koordinace dne 8. 7. se zahájilo závěrečné zasedání Jury, které pokračovalo i po polední přestávce. Počty bodů pro jednotlivé ceny byly stanoveny takto:

I. cenu získali žáci, kteří dosáhli 39—40 bodů (40 bodů bylo

maximum), *II. cenu* žáci s 35—38 body a *III. cenu* žáci s 31—34 body.

Žáci měli ve dnech 7. a 8. 7. setkání s *komsomolci-matematiky*, výlet na jezero *Pančarevo* a na *Vitošu* s večeří v restauraci *Kopitoto*.

4.

Dne 9. 7. ráno v 6.30 nastoupily všechny delegace (žáci, ped. průvodci i vedoucí delegací) spolu s organizačním výborem VIII. mezinárodní matematické olympiády i s přítomnými novináři (NDR a BLR) a tlumočníky (každé družstvo mělo svého tlumočníka) čtyřdenní okružní cestu po Bulharsku. Jelo se třemi autobusy a dvěma osobními auty přes *Loveč*, *Starotirnovu*, *Varnu*, *Nesebar*, *Burgas*, *Sliven*, *Starou Zagoru* a *Plovdiv* zpět do Sofie. Ujelo se více než 1000 km s jednodenní zastávkou a dvěma noclehy ve Varně, s půldenní zastávkou a jedním noclehem v Plovdivě. I když cesta byla namáhavá a sled dojmů překotný, podařilo se hostitelům podat všem účastníkům pohled v kostce na staré i nové Bulharsko a poskytnout jim zážitky, na které jistě hned tak nezapomenou. Cesta Mizií, krásným podhůřím Balkánu, letmá prohlídka stoličního města Tirnova, kouzelné Černé moře, koupání v Zlatých pískách i na Slunečním pobřeží, jízda po moři katěrem do Varny, návštěva památníku Vladislava Varnenčika, letmé shlédnutí přístavu Burgasu, prohlídka Plovdiva-staré Filippopole, mnoho dojmů z krásné balkánské přírody, z památek starých zašlých kultur i výstavby nového socialistického Bulharska a všude ve Varně, v Plovdivu, v Tirnovu a v Tergovišti vřelé vítání pionýry i zástupci měst — to je stručně nastíněný popis cesty.

Dne 12. 7. 1966 večer dorazily všechny delegace do Sofie. Dopoledne 13. 7. 66 bylo volné a bylo věnováno nákupům. Odpoledne v 16 hodin byla závěrečná slavnost v aule university za přítomnosti ministra školství s. Gončeva. Zasedání zahájil prof. Matteev, pak promluvil s. Gončev o významu mate-

matiky v období technické revoluce a výstavby socialismu. Na to rozdal prof. Matteev diplomy a dárky vítězům, uznání i diplomy ostatním účastníkům. Zvláštní uznání dostal nejlepší mongolský žák, který dosáhl 18 bodů. Mezi žáky, kteří získali uznání za originální řešení, zobecnění úloh apod., byl i čs. reprezentant *Bohuš Sivák*. Jménem žáků pak poděkoval hostitelům německý žák a jménem delegátů vedoucí čs. delegace. Projevy byly tlumočeny do všech jazyků zúčastněných zemí. Za zmínku stojí, že tentokrát žádný delegát nepozval účastníky jménem své země na příští MMO. Po zakončení slavnosti byla ve 20 hodin v internátě Obščezitie společná večeře pro všechny účastníky, které se zúčastnil také s. ministr. Při večeři si vyměnily delegace mezi sebou tradiční dárky.

5.

Texty a řešení soutěžních úloh

I. den (5. 7. 1966).

1. V matematické soutěži byly dány tři úlohy *A*, *B*, *C*. Mezi účastníky bylo 25 žáků, z nichž každý rozřešil aspoň jednu úlohu. Ze všech účastníků, kteří nerozřešili úlohu *A*, byl počet těch, kteří rozřešili úlohu *B*, dvojnásobkem počtu těch, kteří rozřešili úlohu *C*. Počet těch žáků, kteří rozřešili jen úlohu *A*, byl o 1 větší než počet ostatních žáků, kteří rozřešili úlohu *A*. Ze všech žáků, kteří rozřešili jedinou úlohu, právě polovina nerozřešila úlohu *A*.

Kolik žáků rozřešilo jen úlohu *B*?

(SSSR, 6 bodů)

2. Označme po řadě a, b, c délky stran trojúhelníka a α, β, γ velikosti protějších úhlů. Platí-li rovnost

$$a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta),$$

pak je tento trojúhelník rovnoramenný. Dokažte.

(Maďarsko, 7 bodů)

3. Součet vzdáleností vrcholů pravidelného čtyřstěnu od středu kulové plochy jemu opsané je menší než součet vzdáleností těchto vrcholů od kteréhokoli jiného bodu prostoru. Dokažte.

(Bulharsko, 7 bodů)

II. den (6. 7. 1966).

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n a pro každé reálné číslo $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k = 0, 1, \dots, n, \lambda$ celé) platí

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin (2^n x)} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} (2^n x).$$

(Jugoslávie, 5 bodů)

5. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| x_2 + |a_1 - a_3| x_3 + |a_1 - a_4| x_4 &= 1, \\ |a_1 - a_2| x_1 + |a_2 - a_3| x_3 + |a_2 - a_4| x_4 &= 1, \\ |a_1 - a_3| x_1 + |a_2 - a_3| x_2 + |a_3 - a_4| x_4 &= 1, \\ |a_1 - a_4| x_1 + |a_2 - a_4| x_2 + |a_3 - a_4| x_3 &= 1, \end{aligned}$$

kde a_1, a_2, a_3, a_4 jsou čtyři daná navzájem různá reálná čísla.

(ČSSR, 7 bodů)

6. Uvnitř stran AB , BC , CA trojúhelníka ABC zvolíme po řadě libovolné body K , L , M . Dokažte, že obsah aspoň jednoho z trojúhelníků MAK , KBL , LCM je menší nebo rovný čtvrtině obsahu trojúhelníka ABC .

(Polsko, 8 bodů)

Řešení úlohy 1. Označme po řadě x_A , x_B , x_C počty žáků, kteří rozřešili jen úlohu A , B , C ; dále pak x_{BC} je počet žáků, kteří rozřešili jen úlohy B , C a analogicky x'_A je počet žáků, kteří rozřešili úlohu A a aspoň ještě jednu další úlohu.

Podle podmínek úlohy je pak

$$x_A + x_B + x_C + x'_A + x_{BC} = 25, \quad (1)$$

$$x_B + x_{BC} = 2(x_C + x_{BC}), \quad (2)$$

$$x_A = x'_A + 1, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}(x_A + x_B + x_C) = x_B + x_C. \quad (4)$$

Z (2) plyne

$$x_{BC} = x_B - 2x_C. \quad (5)$$

Z (4) plyne

$$x_A = x_B + x_C. \quad (6)$$

Dosadíme-li z (3), (5) do (1), dostaneme

$$2x_A + 2x_B - x_C = 26. \quad (7)$$

Dosadíme-li z (6) do (7), vyjde

$$4x_B + x_C = 26. \quad (8)$$

Z (5) vyplývá $x_B - 2x_C \geq 0$, tj.

$$x_B \geq 2x_C. \quad (9)$$

Spojením (8), (9) dostaneme $x_C \leq \frac{26}{9}$. Protože podle (8) je

x_C sudé, je $x_C = 0$ nebo $x_C = 2$. Pro $x_C = 0$ však nevyjde z (8) celé x_B . Je tedy $x_C = 2$ a $x_B = 6$, z (6) a (5) plyne $x_A = 8$, $x_{BC} = 2$, z (3) plyne $x'_A = 7$.

Zkouškou se přesvědčíme, že jediné možné řešení $x_B = 6$ je skutečně řešením úlohy.

Řešení úlohy 2. Danou rovnost upravíme na tvar

$$\begin{aligned} (a + b) \cos \alpha \cos \beta \cos \frac{\gamma}{2} &= \\ &= a \sin \alpha \cos \beta \sin \frac{\gamma}{2} + b \sin \beta \cos \alpha \sin \frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} a \cos \beta \left(\cos \alpha \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \alpha \sin \frac{\gamma}{2} \right) + \\ + b \cos \alpha \left(\cos \beta \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \beta \sin \frac{\gamma}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

neboli

$$a \cos \beta \cos \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) + b \cos \alpha \cos \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right) = 0. \quad (10)$$

Pro úhly trojúhelníka platí

$$\cos \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) = - \cos \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right), \quad (11)$$

neboť je

$$\left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) + \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right) = \pi. \quad (12)$$

Buď je $\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = -\cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = 0$, pak je $\alpha + \frac{\gamma}{2} = \beta + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$, tj. $\alpha = \beta$ a jde tedy o trojúhelník rovnoramenný. Nebo je $\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = -\cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \neq 0$; pak dělíme rovnost (10) číslem $\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)$ a dostaneme

$$a \cos \beta - b \cos \alpha = 0. \quad (13)$$

Připojíme-li k rovnosti (13) rovnost

$$a \sin \beta - b \sin \alpha = 0$$

(sinová věta), vyjde $ab(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = 0$ neboli $\sin(\alpha - \beta) = 0$, tj. $\alpha = \beta$. Tento druhý případ však nemůže nastat, neboť pro $\alpha = \beta$ vyjde z (12) $\alpha + \frac{\gamma}{2} = \beta + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$, tj. $\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = 0$.

Řešení úlohy 3. Použijeme pomocné věty P :

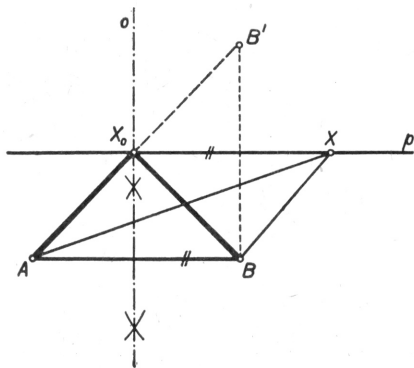
Budiž AB úsečka, p přímka s ní rovnoběžná. Nechť bod X probíhá přímkou p . Pak součet vzdáleností $AX + BX$ je minimální, leží-li bod X na ose úsečky AB .

Důkaz věty P : Obsahuje-li přímka p úsečku AB , je věta P zřejmá*). Neobsahuje-li přímka p úsečku AB , označíme X_0

*) V tomto případě je součet $AX + BX$ minimální pro jakoukoliv polohu bodu X na úsečce AB .

průsečík osy o úsečky AB s přímkou p , $X \neq X_0$ bod přímky p , B' bod souměrně sdružený s bodem B podle přímky p (obr. 71). Pak je

$$BX_0 = B'X_0, \quad BX = B'X. \quad (14)$$



Obr. 71.

Body A , B' jsou zřejmě souměrně sdruženy podle středu X_0 , proto bod X_0 leží mezi body A , B' . Je tedy podle (14) a podle trojúhelníkové nerovnosti

$$AX_0 + BX_0 = AX_0 + B'X_0 = AB' < AX + B'X = \\ = AX + BX.$$

Tím je pomocná věta P dokázána.

Budiž nyní $ABCD$ pravidelný čtyřstěn a necht' bod X neleží v rovině souměrnosti hrany AB (obr. 72). Rovina σ obsahuje vrcholy C , D , neboť platí

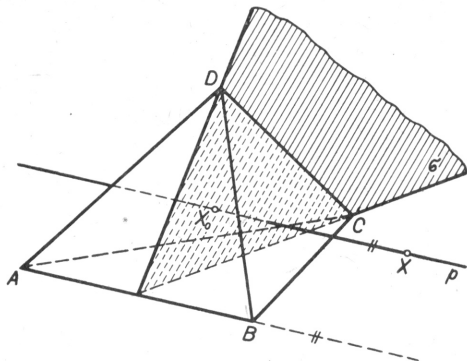
$$AC = BC, \quad AD = BD.$$

Bodem X vedeme přímku $p \parallel AB$ a označíme X_0 její průsečík

OPRAVNÝ LÍSTEK

Doplňěk na str. 159 (dodatek k řešení úlohy 3 z VIII. MMO).

Existenci bodu, pro který je součet $AX + BX + CX + DX$ minimální, lze dokázat takto: Podle pomocné věty P lze tento bod hledat jen na přímce m , která obsahuje středy protějších hran AB , CD ; také střed S kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$ leží na přímce m . Otočíme-li hranu CD kolem přímky m do roviny ABS , dostaneme podle věty P pro každý bod X přímky m $AX + CX \geq AS + CS$, $BX + DX \geq BS + DS$, a tedy $AX + BX + CX + DX \geq AS + BS + CS + DS$.



Obr. 72.

s rovinou σ . Protože CX_0 a DX_0 jsou pravouhlé průměty úseček CX a DX do roviny σ , je

$$CX_0 < CX, \quad DX_0 < DX. \quad (15)$$

Podle pomocné věty P je

$$AX_0 + BX_0 \leq AX + BX. \quad (16)$$

Spojením (15), (16) dostaneme

$$AX_0 + BX_0 + CX_0 + DX_0 < AX + BX + CX + DX. \quad (17)$$

Tím je dokázáno: neleží-li bod X v rovině souměrnosti některé hrany čtyřstěnu $ABCD$, lze nalézt takový bod X_0 , že platí (17). Bod X , pro který je součet $AX + BX + CX + DX$ minimální, musí tedy ležet v rovinách souměrnosti všech šesti hran čtyřstěnu; je to tedy střed kulové plochy čtyřstěnu $ABCD$.

Řešení úlohy 4. Pro $n = 1$ se redukuje daná rovnost na rovnost

$$\frac{1}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x};$$

z ní plyne rovnost

$$1 = 2 \cos^2 x - \cos 2x,$$

která platí pro všechna x . Pro $x \neq \frac{\lambda\pi}{2}$ lze postup obrátit; je tedy daná nerovnost dokázána pro $n = 1$.

Indukční krok z n na $n + 1$: Předpokládáme, že $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k = 0, 1, \dots, n, n + 1$) a označíme L_n levou stranu dokazované nerovnosti. Pak je

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_n + \frac{1}{\sin(2^{n+1}x)} = \cotg x - \cotg(2^n x) + \\ &+ \frac{1}{\sin(2^{n+1}x)} = \cotg x - \frac{\cos(2^n x)}{\sin(2^n x)} + \frac{1}{\sin(2^{n+1}x)} = \\ &= \cotg x - \frac{1}{\sin(2^{n+1}x)} [2 \cos^2(2^n x) - 1]. \end{aligned}$$

Protože výraz v lomených závorkách je roven $\cos(2^{n+1}x)$, je

$$L_{n+1} = \cotg x - \cotg(2^{n+1}x).$$

Tím je dokázán indukční krok a je dokázána i daná formule.

Řešení úlohy 5. Při současné výměně parametrů a_i, a_k a neznámých x_i, x_k se soustava nezmění. Zvolíme-li tedy vhodné označení, je

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4. \quad (17)$$

Pak lze každou absolutní hodnotu $|a_i - a_k|$ ($i < k$) nahradit rozdílem $a_i - a_k$. Odečteme-li druhou rovnici od první, vyjde

$$(a_1 - a_2)(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0. \quad (18)$$

Podobně odečtením třetí rovnice od druhé dostaneme

$$(a_2 - a_3)(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0. \quad (19)$$

Konečně odečtením čtvrté rovnice od třetí dostaneme

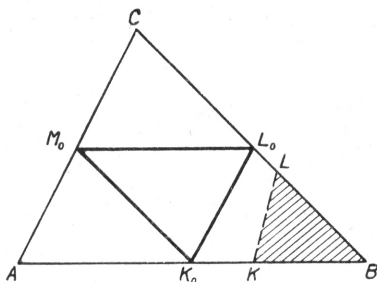
$$(a_3 - a_4)(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0. \quad (20)$$

Rovnice (18), (19), (20) dělíme nenulovými koeficienty $(a_1 - a_2)$, $(a_2 - a_3)$, $(a_3 - a_4)$. Takto upravené rovnice (18) a (20) sečteme; vyjde $x_1 = x_4$. Odečtením upravených rovnic (18) a (19) vyjde $x_2 = 0$, z (18) pak $x_3 = 0$.

Z původních rovnic pak dostaneme

$$x_1 = x_4 = \frac{1}{|a_1 - a_4|}.$$

Za předpokladu (17) má tedy daná soustava jediné možné řešení $x_1 = x_4 = \frac{1}{|a_1 - a_4|}$, $x_2 = x_3 = 0$. Zkouškou se přesvědčíme, že to je skutečně řešení dané soustavy.



Obr. 73.

Řešení úlohy 6. Označíme K_0 , L_0 , M_0 po řadě středy úseček AB , BC , CA (obr. 73); pak úsečky K_0L_0 , L_0M_0 , M_0K_0 rozdělí

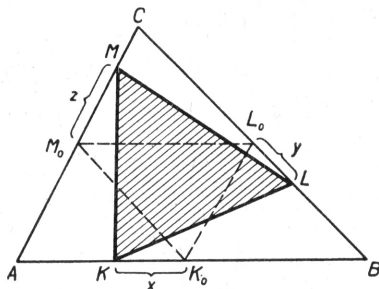
trojúhelník ABC ve čtyři části téhož obsahu $\frac{1}{4} \triangle ABC$.

Leží-li dva z bodů K, L, M na obvodu některého z „rohových“ trojúhelníků $AK_0M_0, L_0BK_0, CM_0L_0$, např. K, L na úsečkách BK_0, BL_0 (viz obr. 73), pak je

$$\triangle BKL \leq \triangle BK_0L_0 = \frac{1}{4} \triangle ABC.$$

Stačí tedy zabývat se případem, kdy žádné dva z bodů K, L, M nemají od téhož vrcholu trojúhelníka ABC vzdálenosti menší nebo rovné polovinám délek příslušných stran.

Nechť např. bod K leží mezi A, K_0 , dále bod L mezi B, L_0 a bod M mezi C, M_0 (obráz. 74). Označme $KK_0 = x, LL_0 = y, MM_0 = z$.



Obr. 74.

Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že je

$$\begin{aligned} \triangle AKM &> \frac{1}{4} \triangle ABC, \quad \triangle BLK > \frac{1}{4} \triangle ABC, \\ \triangle CML &> \frac{1}{4} \triangle ABC. \end{aligned}$$

Pak je

$$\triangle AKM + \triangle BLK + \triangle CML > \frac{3}{4} \triangle ABC,$$

neboli

$$4 \frac{\triangle AKM}{\triangle ABC} + 4 \frac{\triangle BLK}{\triangle ABC} + 4 \frac{\triangle CML}{\triangle ABC} > 3. \quad (21)$$

Poměry obsahů trojúhelníků v nerovnosti (21) vyjádříme pomocí délek a, b, c, x, y, z . Při obvyklém označení úhlů platí

$$\triangle AKM = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} + z \right) \left(\frac{c}{2} - x \right) \cdot \sin \alpha, \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin \alpha,$$

tj.

$$\frac{\triangle AKM}{\triangle ABC} = \frac{\left(\frac{b}{2} + z \right) \left(\frac{c}{2} - x \right)}{bc}. \quad (22)$$

Cyklickou záměnou dostaneme z (22) další dva poměry obsahů; po dosazení do (21) a úpravě vyjde

$$a(b + 2z)(c - 2x) + b(c + 2x)(a - 2y) + c(a + 2y)(b - 2z) > 3abc.$$

Tuto nerovnost zjednodušíme po vynásobení na tvar

$$axz + byx + czy < 0,$$

což je ve sporu s podmínkami $a > 0, b > 0, c > 0, x > 0, y > 0, z > 0$.

Tím je věta úplně dokázána.

6.

Pro zajímavost uvedme *první* a *třetí úlohu* původního návrhu, které byly pro snadnost nahrazeny jinými úlohami.

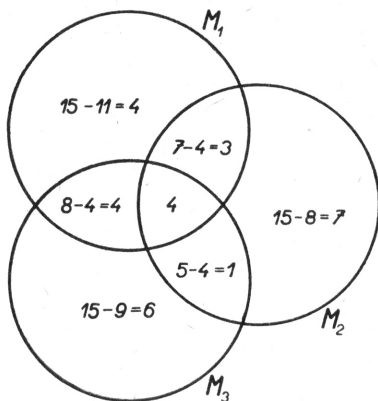
Místo sovětské *úlohy* 1 byla původně navržena tato bulharská úloha:

1'. Žáci jedné třídy uspořádali tři exkurze; každé z nich se zúčastnilo 15 žáků. Sedm účastníků I. exkurze se zúčastnilo také II. exkurze, osm účastníků I. exkurze se účastnilo také III. exkurze. Pět účastníků II. exkurze se zúčastnilo také III. exkurze. Čtyři žáci se zúčastnili všech tří exkurzí.

a) Kolik žáků se zúčastnilo jen I., kolik jen II., kolik jen III. exkurze?

b) Kolik žáků se zúčastnilo aspoň jedné z těchto tří exkurzí?

Řešení úlohy lze podat velmi jednoduše bez výpočtů, pomocí *Vennových diagramů*; stačí podle textu úlohy vepsat počty žáků do průniků tří množin M_i ($i = 1, 2, 3$); přitom M_i znamená množinu všech žáků, kteří se zúčastnili i -té exkurze (obr. 75).

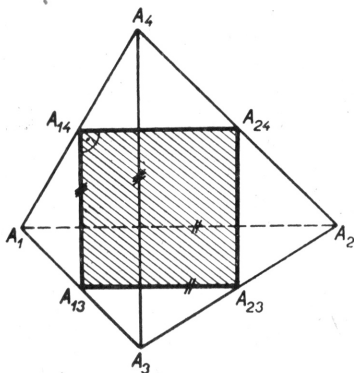


Obr. 75.

Odpověď: a) Jen I. exkurze se zúčastnili 4 žáci, jen II. exkurze 7 žáků, jen III. exkurze 6 žáků. b) Aspoň jedné exkurze se zúčastnilo 29 žáků (počet prvků sjednocení množin M_1 , M_2 , M_3).

Místo bulharské úlohy 3 byla původně navržena sovětská úloha:

3'. Každé dvě protější hrany čtyřstěnu jsou navzájem kolmé. Dokažte, že všech šest středů jeho hran leží na kulové ploše.



Obr. 76.

Řešení (obr. 76). Budiž $A_1A_2A_3A_4$ daný čtyřstěn; označme středy hran podle obr. 76. Pak je $A_{13}A_{14} \parallel A_3A_4 \parallel A_{23}A_{24}$, $A_{13}A_{23} \parallel A_1A_2 \parallel A_{14}A_{24}$. Obrazec $A_{13}A_{23}A_{24}A_{14}$ je tedy rovnoběžník. Protože je $A_1A_2 \perp A_3A_4$, je $A_{13}A_{23} \perp A_{13}A_{14}$, tj. obrazec $A_{13}A_{23}A_{24}A_{14}$ je obdélník. Jeho úhlopříčky jsou shodné a navzájem se půlí. Proto kulová plocha Σ sestrojená nad průměrem $A_{13}A_{24}$ má za průměr i úsečku $A_{14}A_{23}$. Vyměníme-li indexy 2, 4 (1, 3 ponecháme), vidíme, že kulová plocha Σ má za průměr i úsečku $A_{12}A_{34}$. Tím je věta dokázána.

7.

Složení čs. družstva je patrné z přílohy 3, výsledky, kterých dosáhlo, z přílohy 4. Seřadíme-li všechna družstva podle počtu

dosažených bodů, je ČSSR na osmém, tj. předposledním místě. Také podle udělených cen je na předposledním místě: má tři ceny, z toho jednu druhou a dvě třetí (Jugoslávie má také tři ceny, ale dvě druhé a jednu třetí). Je to bilance na první pohled žalostná, která svědčí, že naše družstvo relativně k jiným družstvům má tendenci sestupnou, i když snad naši letošní reprezentanti byli v celku lepší než loňští. Ale rychle se zvyšující úrovni reprezentantů ostatních států (všimněme si např. vstupu NDR) nestačíme. Naproti tomu je třeba uvážit, že např. náš nejlepší reprezentant *Sivák* by byl získal se ztrátou jen dvou bodů na každé z předchozích olympiád I. cenu. Dále je třeba uvážit, že bodové rozpětí mezi námi a nejlepším družstvem SSSR bylo loni více než 130 bodů, letos ani ne 80 bodů. Také rozdíly v počtu bodů mezi 6., 7. a 8. družstvem jsou celkem malé; je vhodné hned na tomto místě ukázat, čím jsou způsobeny. Na letošní olympiádě vzhledem k poměrně snadným soutěžním úlohám byl žák, který nedosáhl ani 25 bodů, vysloveným outsiderem. Z přílohy 4 je patrné, že my měli takovéto účastníky tři; naproti tomu Jugoslávie měla jen dva takovéto žáky, Bulharsko jen jednoho. Zde se už částečně ukazuje jedna z příčin našeho neúspěchu: nedobrá výběr reprezentantů. Chceme-li se dále účastnit mezinárodních matematických olympiád, a to nikoli jako podřadné družstvo, musíme vybírat své reprezentanty z žáků, které budeme individuálně a systematicky připravovat. Musíme se zaměřit na žáky mladší, popřát jim možnost získat zkušenosti v mezinárodní soutěži, tj. dát jim psychologickou přípravu. Neboť i letos se ukázalo, jako v minulých letech, že našim reprezentantům často chybějí dobré nervy. Při přípravě družstva se pochopitelně nemůžeme spoléhat jen na školu.

Nyní ještě stručně k našim nedostatkům řešení soutěžních úloh VIII. MMO. Naši žáci chybují v důkazu matematickou indukci a přitom jde o matematické „řemeslo“, které by měl ovládat každý průměrný středoškolák.

Z řešení našich žáků je zřejmé, že se i logická stránka výuky zanedbává; je to vidět i na jejich vyjadřování, které je nedbalé a často nesprávné. Mnoha zla působí fráze o „ekvivalentních úpravách“ zakořeněná na našich školách. Naším reprezentantům lze také těžko odpustit jejich nedostatky ve stereometrii (ani jeden z našich osmi žáků nerozřešil úlohu 3 zcela správně). Žáci nadaní v matematice se často pachtí za studiem tzv. vyšší matematiky, jejího aparátu pak užívají nevhodně nebo dokonce nesprávně, ale středoškolskou látku do hloubky neznají. Přitom „středoškolská matematika“ v pojetí mezinárodních olympiád je užší než v pojetí našich osnov; nepřicházejí tu úlohy z analytické geometrie, z aritmetiky komplexních čísel (tato témata nejsou v osnovách řady zúčastněných zemí), málo se vyskytují i úlohy z teorie čísel, zato se věnuje dosti pozornosti kombinatorice, kombinatorické geometrii, stereometrii, kde je často třeba celkem jen skrovného aparátu, zato tím více zkušenosti, logického výcviku a experimentálně-analytického přístupu k řešení úlohy. Konečně je třeba poukázat ještě na jeden nešvar, kterým naši žáci trpí — je to bezuzdná psavost, „počtářství“ v špatném slova smyslu. Počítají často celkem bezhlavě, popíší řady stránek, ač jsou stále upozorňováni na to, že je třeba spíše přemýšlet a netopit se ve výpočtech, jejichž složitost zřejmě ukazuje, že nastoupená cesta nebyla vhodná.

Vzhledem k našemu neúspěchu na VIII. MMO se rozhodl ústřední výbor MO změnit od základu přípravu našich reprezentantů a jejich výběr, pokusně přejít k individuálnímu školení nadaných jedinců, pokud možno z nižších tříd.

PŘÍLOHA 1

Vedoucí delegací a pedagogičtí průvodci.

Bulharsko:

Prof. Spas Monolov, Vyšš. inženýrno-stroitel'nyj institut v Sofii.

As. Kostadin Petrov, Mat. fakulta univerzity v Sofii.

Československo:

Doc. Jan Vyšín, Matematicko-fyzikální fakulta Karlovy university v Praze.

Odb. as. Vlastimil Macháček, Pedagogická fakulta Karlovy univerzity v Praze.

Jugoslávie:

Doc. Dušan Adnagievič, Bělehrad.

Vladimír Mitič, Bělehrad.

Maďarsko:

Hódi Endre, vedoucí vědecký pracovník Optických závodů v Budapešti.

Reiman István, Budapešť.

Mongolsko:

Doc. N. Sanžimjatar, St. univerzita Ulanbátor.

G. Zagdragča, inspektor matematiky ministerstva školství MLR.

Něm. dem. republika:

Prof. dr. Hanns-Joachim Weinert, Vys. škola pedagogická, Potsdam.

Dr. Helmut Bausch, Berlín.

Polsko:

Prof. dr. Mieczysław Czyżykowski, Polytechnika ve Varšavě.

Magister Andrzej Mąkowski, Varšava.

Rumunsko:

Prof. Tiberiu Roman, Vysoká škola technická v Bukurešti.

Prof. Zlate Bogdanov, Bukurešť.

Sovětský svaz:

Doc. Elena Alexandrovna Morozova, Mech. matem. fakulta Lomonosovy university v Moskvě.

Ivan Semenovič Petrakov, metodik ministerstva školství RSFSR.

PŘÍLOHA 2

Počty udělených cen a celkové počty dosažených bodů.

Stát	Počet dosažených bodů	Počet cen			
		I.	II.	III.	Celkem
Bulharsko	236	0	1	3	4
ČSSR	215	0	1	2	3
Jugoslávie	224	0	2	1	3
Maďarsko	281	3	1	2	6
Mongolsko	90	0	0	0	0
NDR	280	3	3	0	6
Polsko	269	1	4	1	6
Rumunsko	257	1	2	2	5
SSSR	293	5	1	1	7
Celkem	—	13	15	12	40

PŘÍLOHA 3

Poř. č.	Jméno	Škola-třída	Narozen roku
1.	Kosina Miroslav	3. a, SVVŠ U balvanu Jablonec n. Nisou	1948
2.	Kůrka Petr	2. g, SVVŠ W. Piecka, Praha 2	1949
3.	Mederly Petr	3. d, SVVŠ Prievidza	1948
4.	Němec Petr	3. d, SVVŠ Dlouhý lán, Praha 6	1948
5.	Rott Jiří	4. b, SPŠ hutnická Kladno	1947
6.	Sivák Bohuš	9. tř. ZDŠ Zvolen	1951
7.	Šmerk Jiří	3. c, SVVŠ Kyjov	1948
8.	Vejvoda Pavel	2. g, SVVŠ W. Piecka, Praha 2	1947

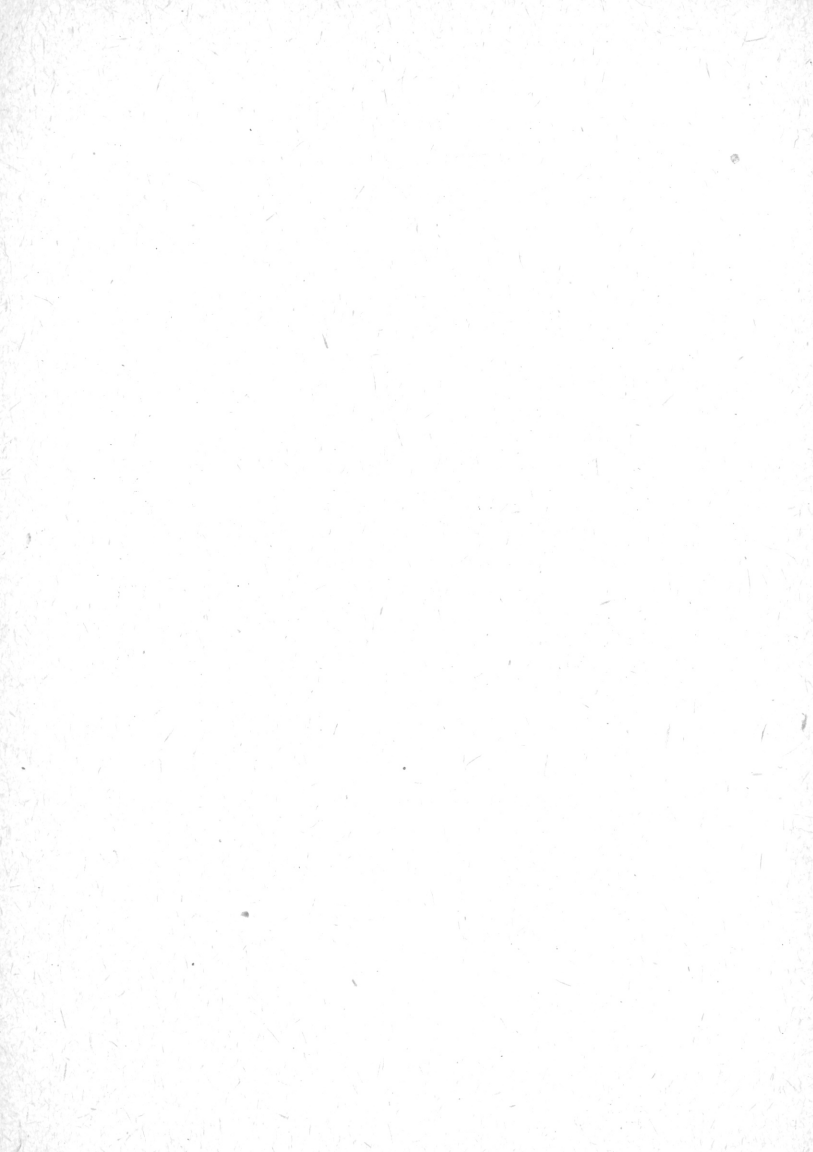
PŘÍLOHA 4

Žák	Počet bodů						Celkem
	ú. 1	ú. 2	ú. 3	ú. 4	ú. 5	ú. 6	
Kosina	4	7	0	5	0	4	20
Kůrka	0	7	4	5	7	8	31 III. cena
Mederly	6	7	3	5	3	8	32 III. cena
Němec	6	0	1	4	1	4	16
Rott	6	0	4	4	2	6	22
Sívák	6	7	5	5	7	8	38 II. cena
Šmerk	6	7	2	4	2	8	29
Vejvoda	6	1	3	5	7	5	27
Celkem	40	36	22	37	29	51	215
	max 48	max 56	max 56	max 40	max 56	max 64	

Poznámka: Průměrný počet bodů připadající na jednoho žáka je (nepočítáme-li Mongoly) 32.

OBSAH

<i>I. O průběhu XV. ročníku matematické olympiády</i>	3
<i>II. Výsledky jednotlivých kol soutěže</i>	10
<i>III. Přípravné úlohy I. kola</i>	
1. Kategorie A	21
2. Kategorie B	37
3. Kategorie C	49
4. Kategorie D	58
<i>IV. Soutěžní úlohy I. kola</i>	
1. Kategorie A	65
2. Kategorie B	79
3. Kategorie C	93
4. Kategorie D	104
<i>V. Soutěžní úlohy II. kola</i>	
1. Kategorie A	115
2. Kategorie B	121
3. Kategorie C	129
4. Kategorie D	134
<i>VI. Úlohy III. kola kategorie A</i>	140
<i>VII. Osmá mezinárodní matematická olympiáda v Sofii ve dnech 1.—13. července 1966</i>	148



Edice Pomocné knihy pro žáky
Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. Jan Vyšín a Vlastimil Macháček

PATNÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1967 — Počet stran 174
Odpovědná redaktorka: Marcella Tesařová
Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk
Technický redaktor: Pavel Leden

Z nové sazby písmem Plantin vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p.,
závod 4, Ostrovní 30, Praha 1
6,07 AA (text 5,15 AA, grafika 1,56 AA) — 6,57 VA — D-13*70357
Náklad 4300 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/2

Cena brožovaného výtisku Kčs 6,00
505/21,852

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 75-0-06

15-132-67 Kčs 6,00

SPN

75-0-06

15-132-67
03/2 Kčs 6,00