

17. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); František Zítek (editor): 17. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1967-1968. 10. Mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404569>

Terms of use:

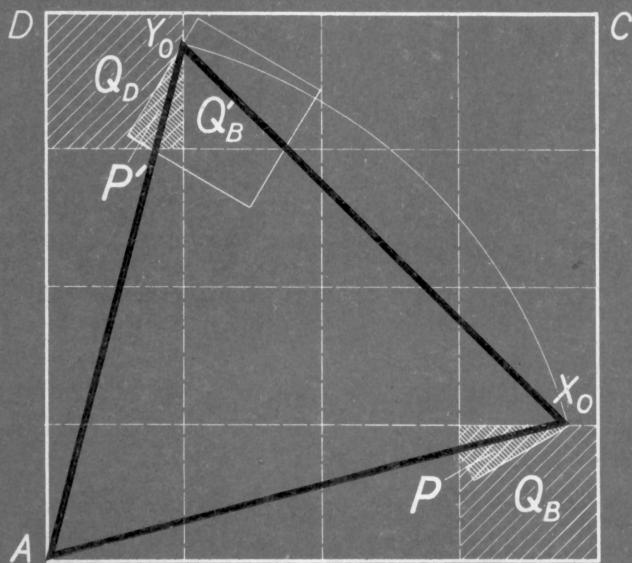
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

XVII. ročník matematické olympiády



SPN

SEDMNÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva a řešení úloh ze soutěže,
konané ve školním roce 1967-1968*

DESÁTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

PRAHA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín,
Vlastimil Macháček a dr. František Zítek, CSc.

Slovenské části textu přeložil dr. Jozef Moravčík, CSc.

Recenzovali Jitka Kučerová a dr. Miroslav Šisler, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1969

Předmluva

Milí přátelé,

myšlenka organizovat pro žáky středních škol matematické soutěže s pevným statutem a nespokojovat se jen s volnými soutěžemi úloh, které vypisují a odměňují některé studentské časopisy, nabývá ve všech zemích stále většího ohlasu a větších sympatií. Dokladem toho je zvyšující se počet domácích olympiád v jednotlivých státech a rostoucí zájem o mezinárodní olympiády mezi zeměmi socialistickými i kapitalistickými. Dokazuje to i zájem, který o tuto činnost projevuje Mezinárodní komise pro vyučování matematice (anglická zkratka *ICMI* — tj. *International Commission for Mathematic Instruction**), která je složkou *Mezinárodní matematické Unie*, největší mezinárodní organizace matematiků. Komise *ICMI* učinila první důležitý krok na poli výměny informací: shromáždila zprávy o domácích olympiádách z členských států, publikovala je a rozeslala. Myslím, že uvítáte, když časopis *Rozhledy* přinese v některém čísle stručný přehled o tom, jak vypadají matematické soutěže v jiných státech.

Uvidíte, že organizace a pojetí těchto soutěží je opravdu velice rozmanité. Společná je asi myšlenka, že soutěž má být pro mladé lidi impulsem, aby se něčemu novému při-

*) Francouzská zkratka je *CIEM*, tj. *Commission Internationale pour l'Enseignement des Mathématiques*.

učili a že jim má k tomu poskytovat pomoc studijní literaturou i jinými akcemi. Ovšem v mnohých zásadních otázkách se tyto soutěže velmi liší. Je tu např. problém, zda soutěž má být těsně spjata se školou, se školskými osnovami, jako je tomu např. u nás. Tak totiž vzniká jakási tuhá, možno říci někdy strnulá organizace, která často znemožňuje zařadit úlohy, které by byly pro žáky právě nejpritažlivější. Jiná otázka je, zda ve vlastních soutěžních kolech, kde účastníci mají v předepsaném čase vypracovat určitou klauzurní práci, mají být dávány *jednotlivé úlohy* nebo *skupiny úloh*, z nichž by si žáci vybírali po jedné úloze. Je totiž nepopiratelná skutečnost, že zájemce o matematiku inklinuje hlavně ve vyšších ročnících střední školy (gymnasia) k určité tematice (třeba k algebře nebo analytické geometrii apod.). Může-li si z povinné skupiny např. tří úloh vybrat úlohu s tématem, které je mu nejbližší, *má příležitost ukázat, co umí, a nikoliv co neumí*. Dalším problémem koncepce soutěže je zadávání úloh navazujících na jednoduchou a neobsáhlou teorii, kterou soutěžící samostatně nastudoval. Prastará zkušenost totiž učí toto: člověk s uspokojením konstatuje, že dokonale porozuměl jistému úseku teoretického výkladu z matematiky, a když jej začne aplikovat, tj. řešit úlohy, zjistí ke svému překvapení, že přece jen zcela teorii neporozuměl. Jinými slovy, aplikace, ať v matematice samé či v jiných oborech, jsou prubířským kamenem znalosti teorie. Tuto souvislost bychom asi měli v budoucnosti uplatnit i v naší matematické olympiádě. Jsou ovšem ještě mnohé jiné otázky; tak např. před časem jsme udělali nesmělý pokus s tzv. *problémovými situacemi*, tj. se situacemi, které buď už jsou matematické, nebo se teprve musí matematizovat, ale v nichž nejsou prozatím dány žádné úlohy. Prvním úkolem řešitele je *úlohy formulovat*, a to třeba v nějaké gradaci od úloh zcela konkrétních a jednoduchých k úlohám složitějším a abstraktnějším. Touto

činností, která patří do tzv. *problémového vyučování*, se zájemce o matematiku učí postupně velkému umění, *rozumně se ptát, formulovat úlohy*, což je někdy obtížnější než úlohy řešit. V našem nesmělém pokuse před několika lety byly nadhozeny dvě problémové situace:

1. Aritmetické posloupnosti prvočísel.
2. Rozdělení daného omezeného rovinného obrazce přímkou ve dvě části sobě rovných obsahů.

Tento pokus, který byl uveden *mimo soutěž*, zůstal celkem bez odezvy, pravděpodobně proto, že naši žáci nebyli k tomuto způsobu práce nikdy vedeni, a snad i proto, že při věčném spěchu svého denního režimu nemají kdy se dlouho zamýšlet a věnovat čas pokusům a spekulacím. Bylo by jistě záhodno, aby některé přípravné přednášky (semináře) byly věnovány problémovým situacím.

V knižnici *Škola mladých matematiků*, které dosud při soutěži málo využíváme, počínají nyní vycházet brožury tzv. „výběrové řady“. Jejich *tematika částečně přesahuje rámec školské matematiky*; ukazují se v nich i některé možnosti aplikovat vyloženou partii, která zpravidla bývá netradiční. Také způsob výkladu je náročnější. Do této „řady“ patří např. knížka o *Dirichletovu principu, o od-
dělávání konvexních množin*, bude tu také svazeček o *neeuclidovské geometrii, o algebraických strukturách* aj. Doufáme, že se touto řadou zavděčíme zejména těm čtenářům, kteří jsou už syti stálého „přemílání“ středoškolské látky. Nechceme však navodit situaci, aby naši žáci opovrhovali školskou matematikou, neovládali elementární mechanismy a zabývali se přitom povrchně věcmi „učenějšími“. Z vysokých škol máme mnoho smutných zkušeností, kam takový stav vede.

V poslední době se mnoho hovoří o matematizaci světa, o abstraktních, axiomaticky budovaných teoriích a jejich modelech. O co vlastně jde? V jevech, s kterými se setkáváme takřka denně a v nichž na první pohled nic matematického nevidíme, *vysondujeme při bližším nahlédnutí vztahy vysloveně matematického charakteru*, které lze zpracovat v jakousi třeba drobnou a jednoduchou abstraktní matematickou teorii, která má své použití i v zcela jiných situacích reálného světa. Těmito otázkami matematizace a axiomatizace se zabývá např. *prof. H. G. Steiner* z Münsteru (NSR), který se žáky nejvyšší třídy střední školy zpracoval pokusně některé takové náměty. Jeden z nich — *teorie hlasovacích množin* — je přeložen do češtiny a vydán pro studijní účely Jihočeského kraje pedagogickým ústavem v Českých Budějovicích (Vrchlického nábřeží). Vedoucí kabinetu matematiky *A. Terš* jistě vážným zájemcům exemplář tohoto textu zapůjčí. Je to četba velmi poučná, z ní se můžete dozvědět, *jak se určitá situace, vzatá z reality, matematizuje a axiomatizuje*. Prof. Steiner má ještě další zajímavé práce tohoto druhu, s nimiž určitě naše studenty seznámíme — třeba informacemi v Rozhledech.

Vraťme se však k naší olympiádě. Máme zkušenost, že velké pobouření mezi řešiteli z řad žáků i učitelů působí *neřešitelné úlohy*. Často se označují názvem „chybné“ či „špatné“. Je pravda, že vznikne někdy neřešitelná úloha neopravením tiskové chyby. Jindy však je neřešitelná úloha zařaděna úmyslně. Uvažte, že musíte být psychologicky připraveni na situaci, kdy úloha, s kterou jste se dlouho lopotili, nemá řešení, i když je tento výsledek sebe více šokující. Skutečnost je totiž taková, že v dané úloze vyslovujeme požadavky, které má mít hledaný matematický objekt (číslo, skupina čísel, funkce, geometrický obrazec apod.) a je přece zcela dobře myslitelné, že *tyto*

požadavky jsou jako celek nesplnitelné, tj. že neexistuje matematický objekt žádaných vlastností, čili, že úloha je neřešitelná. Nejvhodnější formulace každé (řešitelné či neřešitelné) úlohy je však taková, která začíná slovy: Najděte všechna řešení (čísla, trojúhelníky, body atd.), která mají požadovanou vlastnost.

Hlavní částí obsahu brožury jsou jako vždy řešení soutěžních úloh; je to text, který vás asi nejvíce zajímá a z kterého se můžete nejvíce naučit. Řešení úloh jsou ovšem většinou „autorská“, tj. tato řešení sestavili hlavně sami autoři úloh. Jsou to často vědečtí pracovníci nebo učitelé vysokých škol, jejichž způsob myšlení v matematice je dost odlišný od vašeho; prostě proto, že jsou to matematici-profesionálové. Tím si asi můžete vysvětlit, že v řešeních se někdy vyskytují obraty a postupy vám neobvyklé, které doslovně „*spadnou s nebe*“. Víme, že vašemu způsobu myšlení by možná lépe vyhovovalo jiné řešení, zpracované více metodicky. Nedejte se však odstrašit ani umělými autorskými řešeními. Zamyslete-li se nad nimi hlouběji, proniknete do duševní dílny autora, do jeho způsobu myšlení a zjistíte, že i obrat, který se vám zdál na první pohled umělý, vznikl vlastně cestou přirozenou. Zarážející a snad zprvu trochu nepříjemné je jen to, že vám autor tuto cestu neprozradil. V tomto ročníku jsme sestavili oddíl úloh III. kola kategorie A a úloh z X. roč. MMO většinou z řešení účastníků a upravili jsme tato řešení jen nepodstatně. Jsme zvědaví, jak se Vám tato řešení budou z. mlouvat.

V minulém ročníku naší olympiády jsme poprvé přistoupili pokusně *k bodovacímu systému při hodnocení řešení soutěžních úloh*. To znamená, že daná úloha je dotována podle předběžného odhadu své obtížnosti určitým maximálním počtem bodů, které může řešitel získat za zcela bezvadné řešení. Za každý nedostatek v řešení se mu

počet bodů snižuje podle předem stanoveného klíče. Součet všech získaných bodů určuje pak řešitelovo pořadí. Tento způsob hodnocení, obvyklý např. ve sportovních soutěžích, ale i na mezinárodních matematických olympiádách, je ovšem velmi náročný pro osoby, které řešení posuzují. *Účastníky soutěže pak nutí k jisté taktice* přizpůsobené jejich individualitě: jsou žáci, kterým lépe vyhovuje řešit nejdříve úlohy snazší (což by se mělo poznat podle nižšího počtu bodů) a teprve pak úlohy obtížnější. Jsou však jiní řešitelé, kteří mohou získat nejlepší pořadí právě tím, že se soustředí nejprve na nejobtížnější úlohy, dotované nejvyššími počty bodů. V příštích letech hodláme pokračovat v bodovacím systému, zdokonalovat jej a uplatnit jej nejen v závěrečných kolech, ale postupně i v celé soutěži.

Všichni účastníci olympiády asi vědí, že *naše školství stojí před novou reformou*. První krůček se stal prodloužením střední školy — gymnasia — na čtyři léta, ale pravděpodobně budou následovat další změny nejen v organizaci, ale hlavně v obsahu a vyučovacích metodách. Matematika bude jistě předmětem, který bude těmito změnami zasažen velmi pronikavě; některé zastaralé a málo užitečné partie budou nahrazeny tématy modernějšími, které mají také mnohem blíže k aplikacím v nejrůznějších oborech. Všecky tyto změny *nezůstanou bez vlivu na matematickou olympiádu*. Myslíme, že význam soutěží pro nadané matematiky poroste, že bude stále naléhavější potřebou vyhledávat matematické talenty a pomáhat jim. Z toho, co jsme uvedli v předmluvě, je vidět, že práce nebude málo a že organizátoři matematických soutěží u nás i za hranicemi budou musit hodně přemýšlet a zkoušet, aby tyto soutěže byly zmodernizovány, aby byly přitažlivé, neškolské a aby dobře plnily své poslání.

Matematická olympiáda i její pomocné akce jsou orga-

nizovány pro vás; proto nás zajímají vaše názory, vaše kritika, vaše podněty. Pište nám o svých zkušenostech, nesnázích a úspěších. Pomůžete nám tak v naší práci.

I. O průběhu XVII. ročníku matematické olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Rovněž letos bylo pořadatelem soutěže *ministerstvo školství (MŠ)* s *Matematickým ústavem ČSAV (MÚ ČSAV)*, *Jednotou čs. matematiků a fyziků (JČMF)* a ústředním výborem *Čs. svazu mládeže (ÚV ČSM)*. Také XVII. ročník se řídil statutem, uveřejněným ve Věstníku MŠK, roč. XIX, str. 126, 127, směrnice 37 ze dne 30. 4. 1963.

Soutěž řídil *ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO)*, v krajích *krajské výbory matematické olympiády (KV MO)* a v okresech *okresní výbory matematické olympiády (OV MO)*; v těchto výborech jsou také zastoupeny pořadatelské složky.

Žáci soutěžili *ve čtyřech kategoriích* podle svého studijního věku, a to v kategoriích *A, B, C* (střední školy) a v kategorii *D* (základní školy).

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

V XVII. ročníku nebyly proti předchozímu ročníku podstatné změny. Nově byl pouze kooptován *dr. Jozef Moravčík, CSc.*, jako místopředseda za Slovensko a byli vyměněni někteří předsedové *KV MO*, takže na závěr období fungoval tento *ÚV MO*:

Předseda: *Jan Vyšín*, docent matematicko-fyzikální fakulty KU v Praze

Místopředseda: *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.*,
vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Místopředseda za Slovensko: *dr. Jozef Moravčík, CSc.*, odb. asistent VŠD v Žilině

I. jednatel: *Vlastimil Macháček*, odb. asistent pedagogické fakulty KU v Praze

II. jednatel: *Jiří Mída*, odb. asistent pedagogické fakulty KU v Praze

Členové: *Josef Bartůněk*, ústřední inspektor MŠ, *dr. František Běloun*, vedoucí matematického kabinetu Krajského pedagogického ústavu v Praze
dr. Juraj Bosák, CSc., Matematický ústav SAV v Bratislavě

dr. Jaroslav Fuka, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

František Hradecký, býv. odborný asistent matematicko-fyzikální fakulty KU v Praze

prof. dr. Karel Hruša, vedoucí katedry matematiky pedagogické fakulty KU v Praze

dr. Milan Kolibiar, DrSc., profesor přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě

akademik Josef Novák, vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

dr. Jiří Sedláček, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

František Veselý, profesor v. v. v Praze

dr. František Zítek, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

dr. Miloslav Zedek, docent přírodovědecké fakulty university Palackého v Olomouci

Dalšími členy Ústředního výboru matematické olym-

piády jsou předsedové krajských výborů matematické olympiády:

dr. Václav Pleskot, profesor ČVUT v Praze

dr. Václav Vilímek, docent katedry matematiky a deskriptivní geometrie strojní fakulty ČVUT v Praze

Marie Kleintová, odborná asistentka katedry matematiky Vysoké školy zemědělské v Českých Budějovicích

Karel Hnyk, odborný asistent pedagogické fakulty v Ústí nad Labem

Věra Rádlová, profesorka SVVŠ J. Fučíka v Plzni

Jan Laštovka, vedoucí kabinetu matematiky Krajského pedagogického ústavu v Pardubicích

Petr Benda, odborný asistent VUT v Brně

Josef Andrys, docent pedagogické fakulty v Ostravě

dr. Ladislav Berger, odborný asistent katedry matematiky Vysoké školy dopravní v Žilině

Ján Gatál, odb. asistent katedry matematiky elektrotechnické fakulty SVŠT v Bratislavě

RNDr. Ján Černý, CSc., docent přírodovědecké fakulty v Košicích

Náhradník: *dr. Miroslav Šisler*, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze.

Pracovní předsednictvo: ÚV MO (PÚV MO) tvoří (uvedeno v abecedním pořadí): *ř. Bartůňek*; *dr. M. Fiedler*, DrSc.; *dr. ř. Fuka*, CSc.; *V. Macháček*; *ř. Mída*; *dr. ř. Moravčík*, CSc.; *akademik ř. Novák*; *dr. ř. Sedláček*, CSc.; *doc. ř. Vyšín*.

3. SCHŮZE ÚV MO

Také během XVII. ročníku se ústřední výbor sešel dvakrát. *První schůze* se konala 30. listopadu 1967 v Praze. Na této schůzi, kterou vedl předseda doc. Vyšín, se

jednalo o řadě zásadních otázek a o zprávách, které připravily obě komise zřízené na jarní plenární schůzi. Opětne se jednalo o výrobních lhůtách letáků. Schůze jednomyslně podpořila kladné stanovisko předsednictva ÚV MO k návrhu na prodloužení střední všeobecně vzdělávací školy na čtyři roky.

Po diskusi schválilo plénium dosavadní postup předsednictva při výběru účastníků III. kola, při němž jediným kritériem má zůstat úspěšný výkon v předcházejících kolech. *Pro druhé a třetí kolo kategorie A* bylo rozhodnuto zavést *bodovací systém*, k jehož přípravě bylo zmocněno předsednictvo.

Komise vedená dr. J. Moravčíkem připravila materiál jednak k organizačním otázkám, jednak, a to především, k problematice práce s nadanými žáky. Navrhla také řadu doporučení pro *zkvalitnění práce s nadanými žáky na ZDŠ* (pořádat odborně vedené metodické semináře pro učitele 9. ročníků; požádat MŠ o vydání výnosu, podle něhož by bylo ředitelům škol uloženo hodnotit a finančně odměňovat kvalitní práci při vedení nadaných žáků; evidovat úspěšné řešitele II. kola kategorie D a sledovat jejich přestup na školy II. cyklu; v rámci KV MO sledovat práci předsedů OV MO a její hodnocení i finanční).

Obdobná doporučení navrhuje komise pro práci s *nadanými žáky škol II. cyklu*: konat odborně metodické instruktáže pro profesory; podpořit zavedení placených hodin nepovinné matematiky i zájmových kroužků; zavádět takové semináře, resp. kroužky řešitelů MO, v nichž by byli žáci vedeni k aktivnímu osvojování metod řešení úloh, neboť pouhé přednášky v tomto smyslu mnoho nepomáhají; doporučit KVMO, aby organizovaly čtyřdenní až šestidenní soustředění úspěšných řešitelů kategorie B a C.

Bohatá diskuse se týkala výběru *úloh pro kategorii D*;

učitelé je považují za obtížné a řada z nich odmítá úlohy, které nemají řešení (viz komentář v předmluvě). Na závěr se většina přítomných sjednotila v názoru, že MO je soutěž výběrová, jejíž potíže nelze řešit snížením úrovně úloh, ale především pomocí při zvyšování odborné úrovně učitelů. Nejzávažnějším nedostatkem je však to, že pro kategorii D neexistuje žádná pomocná literatura; připravený „*Sborník vybraných úloh kategorie D*“ tuto mezeru zcela nevyplní.

Další komise, vedená krajským inspektorem Jaroslavem Novotným z Prahy, připravila materiály o možnosti odměňování pracovníků za činnost v MO. ÚVMO přednesené návrhy prodiskutoval a doporučil postoupit MŠ a JČMF k realizaci.

K textacím úloh MO byly různé připomínky i od žáků; *dopis M. Wolfa z Dvora Králové* se stal doc. Vyšínovi podnětem k napsání tří „*otevřených dopisů olympionikům*“ do Rozhledů matematicko-fyzikálních.

Druhá plenární schůze ÚV MO se konala u příležitosti III. celostátního kola kategorie A v Brně a vyjádřila se k bodovacímu systému při hodnocení žákovských řešení (viz poznámky při shrnutí výsledků II. a III. kola) a projednala vedle organizačních otázek obsah přípravy pro MMO a celostátního soustředění kat. B v Mariánských Lázních, konkurs na úlohy pro MO a edici „Škola mladých matematiků“.

4. PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

a) *I. kolo* (studijní) probíhalo od září 1967 do 15. ledna 1968 ve dvou etapách. V první etapě řešili žáci všech kategorií čtyři tzv. *přípravné úlohy* s termínem odevzdání do 15. listopadu 1967. Odevzdání a úspěšné řešení těchto úloh však nebylo podmínkou pro účast v I. kole, kde byly

předloženy *další čtyři úlohy*. Vyřešit z těchto úloh aspoň tři na známku aspoň „dobrou“ bylo podmínkou postupu do II. kola. Jak je vidět z tabulky č. 1, splnily tuto podmínku v kategoriích *A*, *B*, *C* vždy aspoň tři čtvrtiny účastníků; to ukazuje opět, že *MO* se účastní opravdu vážní zájemci o matematiku. Je pochopitelné, že procento úspěšných řešitelů v kategorii *D* (viz *tabulka 2*) bylo nižší. Také celkově počet účastníků v XVII. ročníku proti ročníku předcházejícímu poklesl.

b) *II. kolo* proběhlo v krajských střediscích pro kategorii *A* v sobotu dne 9. března 1968, pro kategorie *B* a *C* v neděli 10. března 1968 a pro kategorii *D* v okresních střediscích ve středu dne 13. března 1968. (Uvedené termíny byly voleny tak, aby se soutěžící v nižších kategoriích mohli zúčastnit i soutěže kategorie *A* a zástupci *KV MO* mohli zajít do okresů.) Z *tabulek 3* a *4* je vidět, že procento úspěšných řešitelů soutěže při samostatné práci ve střediscích je v kategoriích *A*, *B*, *C* velmi nízké. Bude třeba provést podrobný rozbor příčin podle kategorií; někdy to budou asi nevhodně vybrané a na I. kolo nenavazující úlohy, jindy zas, např. tradičně už v kategorii *B*, pokles aktivity soutěžících v době tanečních apod.

Ve II. kole kategorie *A* bylo poprvé vyzkoušeno místo klasifikace *bodování*. (Texty úloh jsou na str. 93–101.) Žáci byli informováni o bodové hodnotě řešení každé úlohy a opravovatelé dostali od *PÚV MO* pokyny, jak řešení bodovat. Pro informaci čtenářů je citujeme:

Úloha 1 (maxim. počet bodů 6). Nebude-li řešení obsahovat některý z případů a) *n* sudé, b) *n* liché, zmenšíte počet bodů aspoň o 3. Nebude-li v kterémkoli z případů a), b) provedena zkouška, tj. nebude-li ověřeno, že *nalezené řešení splňuje všech n rovnic* (1), snižte počet bodů o 1 až 2. Totéž platí pro ověření, že podmínka (3) z autorského řešení je postačující podmínkou řešitelnosti v případě a).

Úloha 2 (maxim. počet bodů 5). Dojde-li řešitel od dokazované nerovnosti k nerovnosti evidentně platné — jako je např. nerovnost (1) v autorském řešení — *a neobrátili-li postup*, zmenšíte počet bodů aspoň

o 2. Nejistí-li řešitel *všecky trojice* x, y, z , pro které nastane rovnost, doporučujeme snížit počet bodů o 1.

Úloha 3 (maxim. počet bodů 8). Úloha má v podstatě 3 části: důkaz první věty a), důkaz obrácené věty a) a důkaz věty b) použitím *obou* vět a). Správný důkaz obou vět a) hodnotíte 6 body, správný důkaz věty b) 2 body. Hodnocení jednotlivých důkazů vět a) záleží na metodě; tak např. v poloanalytickém autorském řešení je možno hodnotit důkaz přímé věty 4 body, důkaz obrácené věty jen 2 body. Naproti tomu v druhém autorském řešení by měly být počty bodů zaměněny.

Úloha 4 (maxim. počet bodů 7). Při nesprávném rozložení hledané množiny M v části a), b), c), d) zmenšíte počet bodů o 1 až 2. Úplné vyšetření množiny P (viz autorské řešení) *včetně obrácení*, tj. odůvodnění množinové rovnosti hyperboly a množiny P , hodnotíte 4 body.

Za „*v podstatě úplně správné řešení*“ pokládáme takové, které je ohodnoceno buď nejvyšším možným počtem bodů, anebo počtem o 1 bod menším.

Jestliže ovšem žák řešil úlohu podstatně jiným způsobem, než jaký předpokládalo autorské řešení, musel opravující učitel individuálně upravit hodnocení (tj. snižování maximálního počtu bodů).

Původně *PÚV MO* předpokládalo, že kritérium pro klasifikaci soutěžícího jako úspěšného řešitele bude splnění těchto podmínek: a) získání aspoň 13 bodů, tj. 50 % dosažitelných bodů, b) vyřešení aspoň jedné úlohy „*v podstatě úplně správně*“. Po opravě úloh se ukázalo, že podmínka a) je příliš tvrdá, a proto minimální počet bodů byl stanoven na 11. Dále se ukázalo, že se ojediněle objevili i řešitelé, kteří splnili sice podmínku a), nikoli však b). Toto bodování plenární schůze *ÚV MO* dne 20. dubna 1968 celkově schválila a dále se usnesla, že v příštím ročníku bude aplikováno při klasifikaci úloh II. kola kategorií *A, B, C* i III. kola kategorie *A*.

Protože II. kolem soutěž pro kategorie *B* a *C* končila, uvedeme v *příloze A* jmenný seznam vítězů (nejvýše však prvních deseti) v jednotlivých krajích.

Celostátní III. kolo kategorie A se konalo 20. dubna 1968 v *Brně*. Z úspěšných 70 řešitelů II. kola kategorie *A* navrhly *KV MO* k účasti ve III. kole 57 studujících; po

koordinaci bodování povolalo *PÚV MO* k soutěži celkem 52 účastníků.

Také úlohy III. kola (viz strana 120—133) byly bodovány; žakovská řešení opravila komise *PÚV MO*. Na závěrečném hodnocení na schůzi *PÚV MO* dne 14. května 1968 byly konstatovány tyto zkušenosti s bodováním:

1. *úloha*. Z dosažitelných 8 bodů byl nejvyšší počet získaných 6,5. Nedostatky byly především v neúplné a nesystematicky prováděné diskusi. Úloha byla asi podhodnocena (vhodnější počet bodů by byl 9).

2. *úloha*. Úloha byla poměrně lehká, určený počet 5 bodů odpovídal. Žáci často používali binomické věty správně i nesprávně (pro $n < 0$). Někteří žáci nevěděli, co je to celé číslo.

3. *úloha*. Úloha celkem byla méně obtížná, počet 6 bodů odpovídal. Hlavní nedostatky: a) přílišné poutání na pomocný obrázek, takže soutěžící zapomínali na druhou přímku, která byla částí hledané množiny, nebo neuvedli singulární případy (splývání trojúhelníku v bod apod.); b) nedokonalá terminologie a frazeologie při zápisu řešení.

4. *úloha*. Úloha spíše nadhodnocena; místo 7 bylo by vhodnější 6 bodů. Většina řešení navazovala na vlastnosti ortocentrického čtyřstěnu. Některá řešení byla stručná a přehledná. Byly jen dva pokusy o analytické řešení, vždy velmi pracné.

Seznam vyhlášených vítězů a úspěšných řešitelů, opětne odměněných *MŠ*, uvádíme v *příloze B*.

S přihlédnutím k těmto výsledkům, k úspěchům ve II. kole, popřípadě i v předchozích ročnících, a s ohledem na účast a spolupráci ve speciálních kroužcích přípravy na mezinárodní matematickou olympiádu, bylo vybráno

celkem 10 účastníků přípravného soustředění před X. MMO v Moskvě. Protože jeden z vybraných žáků odstoupil, byl povolán náhradník. Na základě výsledků písemných prací účastníků tohoto soustředění ve Štítně ve dnech 19. až 22. června 1968 a podle pozorování přednášejících bylo určeno definitivní složení osmičlenného reprezentačního družstva (viz Zpráva o X. MMO, strana 134–152).

5. POMOCNÉ AKCE

Krajské výbory MO spolu s pobočkami *Jednoty československých matematiků a fyziků* organizovaly přípravné přednášky během školního roku i školení o prázdninách pro účastníky MO jednotlivých kategorií, a to podle místních podmínek nebo podle pokynů vydaných PUV MO. Centrálně připravovanou tematiku mělo školení na mezinárodní matematickou olympiádu. Programem tohoto školení bylo řešení úloh z těchto oblastí:

- a) *Posloupnosti, odhady součtů a součinů* (připravil dr. Jaroslav Fuka, CSc.).
- b) *Konstrukční geometrie* (prof. dr. Karel Havlíček).
- c) *Kombinatorika* (dr. František Zítek, CSc., dr. Jiří Sedláček, CSc.).

Další centrálně řízenou akcí bylo *celostátní soustředění kategorií B a C v Mariánských Lázních-Úšovicích*. Opětne byla zřízena jedna matematická třída, která se zase osvědčila, a dvě třídy s výukou v matematice a fyzice. Uvedeme témata a přednášející:

Program matematické skupiny:

Břetislav Novák: *Aditivní vlastnosti přirozených čísel*
(20 hodin)

Zdislav Kovařík: *Invariantní body zobrazení* (20 hodin)
Iva Rohličková: *Teorie kvadratických forem a její užití v geometrii* (20 hodin)

Program matematicko-fyzikální skupiny:

Jaroslav Fuka: *Odhady v matematické analýze* (14 hodin)

Zdislav Kovařík (Marta Kovaříková): *Invariantní body zobrazení* (16 hodin)

6. STUDIJNÍ LITERATURA

Státní pedagogické nakladatelství vydalo jako každoročně letáky (jeden v 5000 kusech pro kategorii *A*, *B*, *C* a odděleně 10 000 kusů letáku pro kategorii *D*). Texty úloh byly před tím opětně otištěny v časopise *Matematika ve škole* a v *Rozhledech matematicko-fyzikálních*.

Také nakladatelství *Mladá Fronta* pokračovalo ve vydávání svazečků edice *Škola mladých matematiků*. Uvedeme jen poslední z nich:

15. Milan Koman: *Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic*
16. Stanislav Horák: *Kružnice*
17. Jaromír Hroník: *Úlohy o maximech a minimech funkcí*
18. (omylem označen rovněž 17) Karel Havlíček: *Analytická geometrie a nerovnosti*
19. Jiří Jarník: *Komplexní čísla a funkce*
20. Bruno Budinský — Stanislav Šmakal: *Goniometrické funkce*
21. Alois Apfelbeck: *Kongruence*
22. Tibor Šalát: *Dokonalé a spriatelené čísla*

7. KONKURS JČMF NA ÚLOHY PRO MO A FO

Matematická olympiáda, jako každá matematická soutěž je zcela závislá na pestrosti, na zajímavosti (atraktivnosti) a na matematické a didaktické hodnotě příkladů, které jsou řešitelům předkládány. Dobrých úloh nebude nikdy dost. V zájmu úspěšného průběhu MO se nemohou vybírat úlohy běžně známé, a uvážíme-li, že olympiáda se konala ve školním roce 1967-68 už po sedmnácté, snadno pochopíme, že ÚV MO se setkává s nemalými potížemi při získávání nových originálních úloh pro soutěž, neboť tematika (středoškolské učivo) je poměrně dosti omezená.

Na svém podzimním zasedání v roce 1965 se proto ÚV MO rozhodl požádat *Jednotu československých matematiků a fyziků* jako spolupořadatelku matematické olympiády o vyhlášení konkursu na návrhy úloh pro MO. Konkurs byl Jednotou schválen a vyhlášen v dubnu 1966 v časopise *Matematika ve škole*.

Konkurs má následující podmínky. Text a řešení každé úlohy je třeba zaslat napsané na listu formátu A4, vždy originál a jeden opis. Za každou *přijatou* úlohu je vyplácena odměna ve výši 50,— Kčs v kategoriích A, B a C a 30,— Kčs v kategorii D. Při recenzi se přihlíží k původnosti úlohy a odměna může být popřípadě zvýšena, např. úlohy pro mezinárodní MO jsou odměňovány částkou 80,— Kčs. Úlohy, které neprojdou úspěšně konkursním řízením, se autorům vracejí. Přijaté úlohy jsou zařazeny do archívu ÚV MO, který vyplacením odměny autorovi získává dispoziční právo, zejména právo upravit text úlohy i autorské řešení a použít úlohy pro účely MO podle vlastní úvahy. Autor samozřejmě na sebe bere závazek, že přijatou úlohu utají, aby průběh olympiády nebyl narušen.

Úlohy získané konkursem řešili účastníci MO již v XVI.

ročníku. Při sestavování XVII. ročníku se téměř výhradně použilo úloh, které byly zaslány do konkursu. K řešení bylo předloženo celkem 52 úloh, přičemž 47 jich pocházelo z konkursu. Všechny čtyři úlohy, které byly navrženy Československem pro X. MMO v Moskvě, byly také získány konkursem.

K 30. červnu 1968 došlo celkem 432 úloh od 60 autorů, recenze byla ukončena u 304 úloh, z nichž 186 bylo přijato.

PŘÍLOHA A

POŘADÍ ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ II. KOLA V KATEGORIÍCH B A C

(Není-li uvedeno jinak, jedná se o SVVŠ a o třídu odpovídající příslušné kategorii)

Praha - město

B. Tomáš Mašek, Miroslav Vlček, Petr Hadrava a Michal Tošovský — všichni W. Piecka 2, Praha 2; Vladimír Lisý, Nad Turbovou, Praha 5; Zdeněk Podhradský a Karel Procházka, W. Piecka 2, Praha 2; Anna Slavičková, Arabská 682, Praha 6; Jiří Rákosník, Pod Tábořem, Praha 9; Helena Husová, 9c, ZDŠ, Uhelný trh, Praha 1

C. Marek Boguszak, Svatopluk Poljak, Miroslav Richter, Ondřej Matouš, Miloslav Handl, Vojtěch Hanzal a Petr Ostatek — všichni W. Piecka 2, Praha 2; Miroslav Hradil, ul. Leninova 33, Praha 6; Martin Kašík, Nad štolou 1, Praha 7; Vladimír Šíma, W. Piecka 2, Praha 2

Středočeský kraj

B. Václav Šubrt, Nymburk; Miloš Potměšil, Kolín; Vlastislav Podlena, Příbram; Jaroslava Dubová, Radotín; Eva Dvořáková, Kolín; Kamil Židek, Brandýs nad Labem

C. Jiří Knobloch, Rakovník; Vladimír Kotlář, Beroun; Petr Koříšek, Benešov; Jiří Lettl, Beroun

Jihočeský kraj

B. Petr Musil, Tábor; Vojtěch Růžička, České Budějovice; Jaroslav Kulíř, Strakonice; Josef Maroušek, Tábor; Emanuel Kümmel, České Budějovice; Jan Batík, SPŠ stroj. Strakonice; Jaroslav Trávníček, Strakonice; Miroslav Lexa, Tábor; Zdeněk Mašíček, Dačice

C. František Vichta a Petr Novák, Tábor; Jan Kovář, Trhové Sviny; Pavel Samec, Strakonice; Jan Šabata, České Budějovice

Západočeský kraj

B. Karel Nejdler, J. Fučíka, Plzeň; Emanuel Makrlík, Sušice

C. Jiří Benda, SPŠE Plzeň; Jaroslav Sokol, ul. Pionýrů, Plzeň; Vladimír Junger, Rudolf Švarc a Tomáš Fořt, všichni J. Fučíka, Plzeň

Severočeský kraj

B. Miloš Mazánek a Miloš Zahradník, Tanvald; Jan Polák, Jablonec nad Nisou; Václav Bahník a Tomáš Kemmler, Liberec

C. Jaroslav Klíma a Ivan Guluškin, Liberec; Jiří Skrovný, SPŠ stroj. Liberec; Dagmar Jelenová, Tanvald; Václav Urban a Lubomír Zampr, Liberec; Jan Poláček, Česká Lípa

Východočeský kraj

B. Jiří Kopřiva, Broumov; Aleš Holubář, Chotěboř; Jiří Kouba, Vysoké Mýto; Stanislav Mrzena, Nový Bydžov; Pavel Jirman, Vrchlabí; Josef Vlček, Chrudim; Václav Kadlec, Pardubice; Antonín Mikeš, Rychnov nad Kněžnou; Mojmír Brodský, Hradec Králové a Jaroslav Dušek, Ledec nad Sázavou

C. Jan Bartoš, Hořice v Podkrkonoší; Zdeněk Jelínek, Pardubice; Pavel Schill, Hradec Králové; Pavel Híblbauer, Chotěboř; Věra Moravcová, Rychnov nad Kněžnou; Vladimír Nývlt, Jilemnice; Miloš Řehošek, Hradec Králové; Doubravka Koničková, Nový Bydžov; Vladimír Čapek, Hradec Králové a Jaromír Dohnálek, Jaroměř

Jihomoravský kraj

B. Vladimír Prokeš, Koněvova, Brno; Michael Banzet, Ivančice; Michael Paleček, Koněvova, Brno; Pavel Pokorný, Stanislava Sýkorová, Jaromír Pavliš a Hana Cagašová, Křenová, Brno, Zdena Nešporová, Jan Simek a Zdeněk Smrž, Koněvova, Brno

C. Jaroslav Daniel, Moravské Budějovice; Igor Kadeřávek, ul. Lerchova, Brno; Zdeněk Kovář a Jaroslav Kučera, Křenová, Brno; Stanislav Mastný, Třebíč; František Josefík a František Ryšavý, Uherský Brod; Milan Pantůček a Věra Šimečková, Křenová, Brno; Stanislav Procházka, Gottwaldov; František Urbánek a Karel Zelníček, Elgartova, Brno

Severomoravský kraj

B. Jiří Šrajer, Opava; Milan Varkoček, Havířov; Břetislav Hlavica a Aleš Pospíšil, ul. Šmeralova, Ostrava 1; Jiří Kotsch, Stanislav Němeček a Jaroslav Richter, Šumperk; Bohuslav Rychtar, Bílovec a Pavel Suk, SPŠS Uničov

C. Věra Novotná, ul. Jiřího z Poděbrad, Olomouc; Radomír Poneza a Martin Coufal, Karviná 1

Západoslovenský kraj

B. Juraj Dubay, Radko Mesiar, Karol Krupa, Ivan Hrmo, Martin Ferrary, Pavol Černek, Juraj Šafařík a Ľudovít Niepel — všichni Novohradská, Bratislava; Karol Šafařík, ZDŠ Košická, Bratislava; Juraj Breza, Vazovova, Bratislava

C. Vladimír Černý, Štefan Pleško, Novohradská, Bratislava; Ján Franců, ZDŠ Košická, Bratislava; Angela Leitmanová, Lívia Hoferková, Novohradská, Bratislava; Peter Vrabček, Malacky; Daniela Kalinová, Novohradská,

Bratislava; Juraj Lispuch, Vazovova, Bratislava; Slavomír Kontriš a Michal Greguš, Novohradská, Bratislava

Stredoslovenský kraj

B. Peter Mach, Ružomberok a Anton Fleško, SPŠ stroj. Brezno

C. Eva Ilavská a Peter Ivan, Martin; Pavel Bartoš, Prievidza a Marián Pivarčí, Martin

Východoslovenský kraj

B. Vladimír Munka, Šrobárova, Košice; Jozef Ondas, Tarasa Ševčenku, Prešov; Jan Seman, Poprad

C. Mirko Hornák, Kováčská, Košice; Ondrej Mathelig, Michalovce

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

K R A J	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	Ú	z toh dvěk	P	Ú	z toh dvěk	P	Ú	z toh dvěk	P	Ú	z toh dvěk
Praha-město	75	50	6	71	42	13	116	77	26	262	45	169
Středočeský	23	21	4	27	22	10	67	47	20	117	34	90
Jihočeský	25	25	7	32	32	6	45	45	9	102	22	102
Západočeský	16	10	5	50	30	14	53	44	16	119	35	84
Severočeský	39	18	4	36	15	4	122	70	52	197	60	103
Východočeský	55	47	16	63	54	21	135	127	55	253	92	228
Jihomoravský	83	76	27	88	73	19	156	141	38	327	84	290
Severomoravský	31	21	3	82	78	17	103	97	28	216	48	196
Západoslovenský	52	33	11	102	65	28	103	97	28	257	67	195
Středoslovenský	46	37	9	72	70	18	129	108	55	247	82	215
Východoslovenský	12	6	1	59	32	13	112	85	41	183	55	123
Celkem	457	344	93	682	513	163	1 131	938	368	2 280	624	1 795

*) P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 2

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategorii D)*

K r a j	Kategorie D			
	P	Z toho dívek	Ú	Z toho dívek
Praha – město	964	400	690	285
Středočeský	618	312	451	229
Jihočeský	611	335	360	187
Západočeský	360	180	207	91
Severočeský	565	310	310	159
Východočeský	785	362	631	260
Jihomoravský	1 447	701	663	320
Severomoravský	887	376	539	229
Západoslovenský	1 038	515	856	436
Středoslovenský	1 449	733	1 051	551
Východoslovenský	682	300	307	141
C e l k e m	9 406	4 524	6 065	2 888

*) P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

K R A J	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	n toho divků	Ú	P	n toho divků	Ú	P	n toho divků	Ú	P	n toho divků	Ú
Praha-město	49	3	16	36	6	12	68	15	26	153	24	54
Středočeský	20	3	3	20	8	6	44	10	4	84	21	13
Jihočeský	24	7	0	29	3	9	38	4	5	91	14	14
Západočeský	10	1	4	19	6	2	40	11	5	69	18	11
Severočeský	18	1	5	15	4	5	61	24	7	94	29	17
Východočeský	47	10	11	49	17	12	84	27	19	180	54	42
Jihomoravský	65	18	13	70	14	20	135	33	12	270	65	45
Severomoravský	20	1	6	74	14	27	90	25	3	184	40	36
Západoslovenský	32	8	3	62	14	16	114	34	12	208	56	31
Středoslovenský	37	7	6	61	13	2	99	38	4	197	58	12
Východoslovenský	6	0	3	28	4	3	73	25	2	107	29	8
Celkem	328	59	70	463	103	114	846	246	99	1 637	408	283

Tabulka č. 4

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategorii D)*

Kraj	Kategorie D			
	P	Z toho dívek	Ú	Z toho dívek
Praha-město	614	229	370	142
Středočeský	376	190	271	131
Jihočeský	327	169	66	26
Západočeský	194	84	89	38
Severočeský	265	143	131	58
Východočeský	491	216	380	163
Jihomoravský	557	241	197	70
Severomoravský	378	140	151	40
Západoslovenský	808	403	298	135
Středoslovenský	620	285	146	52
Východoslovenský	251	111	92	38
Celkem	4 881	2 211	2 191	893

*) P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

PŘÍLOHA B

Pořadí vítězů a úspěšných řešitelů III. kola kategorie A

XVII. roč. MO

Vítězové

1. *Bohuš Sivák*, 2. r. SVŠ, Zvolen
2. *Tomáš Mašek*, 2. r. SVVŠ, W. Piecka, Praha 2
3. *Tomáš Markvart*, 3. r. SVVŠ, W. Piecka, Praha 2
4. *Libor Polák*, 3. r. SVVŠ, Koněvova, Brno
5. *Jiří Demel*, 3. r. SVVŠ, Valašské Meziříčí
6. *Jiří Vinárek*, 2. r. SVVŠ, W. Piecka, Praha 2
7. *Michal Kaukič*, 3. r. SVŠ, Námestovo
8. *Martin Bukovčan*, SVŠ, Novohradská ul., Bratislava
- až { *Jozef Komorník*, SVŠ, Holič
10. { *Vladimír Müller*, 3. r. SVVŠ, Arabská, Praha 6
11. *Miloslav Toušek*, 3. r. SVVŠ, Arabská, Praha 6
12. *Pavel Balek*, 3. r. SVVŠ, W. Piecka, Praha 2
13. *Ladislav Ježek*, 4. r. SPŠ el., Leninova, Brno
14. až 15. *Jan Mašek*, 3. r. W. Piecka, Praha 2
- Peter Nagy*, 3. r. SVŠ, Banská Bystrica
16. *Pavel Polcar*, 3. r. SVVŠ, Velké Meziříčí
17. *František Pohl*, 3. r. SVVŠ, dr. Šmerala, Ostrava I

Úspěšní řešitelé

- Juraj Černák*, 3. r. SVŠ, Turč. Teplice
Jan Pachtl, 3. r. SVVŠ, W. Piecka, Praha 2
Pavel Čížek, 3. r. SVVŠ, Radotín
Marián Déněš, 9. r. ZDŠ, Košická, Bratislava
Ondřej Křivánek, 3. r. W. Piecka, Praha 2
Pavel Hofman, 3. r. SVVŠ, Teplice, ul. Čs. dobrovolců

II. Přípravné úlohy I. kola

1. KATEGORIE A

1. Je dána funkce proměnné x

$$y = 2 \frac{x^3 + 1}{1 + |x + 1| + x} + 2 \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{a + |x - a| - x}. \quad (1)$$

Určete parametr a tak, aby graf dané funkce ležel v jednotkovém kruhu se středem v počátku souřadnic.

ŘEŠENÍ. Je-li $x + 1 \leq 0$ neboli $x \leq -1$, je $|x + 1| = -x - 1$, jmenovatel prvního zlomku je roven nule a funkce (1) není pro tato x definována. Obdobně je-li $x - a \geq 0$ neboli $x \geq a$, je $|x - a| = x - a$, jmenovatel druhého zlomku je roven nule a funkce (1) není pro tato x definována. Definiční obor funkce (1) je tedy otevřený interval

$$-1 < x < a, \quad (2)$$

přičemž ovšem musí být $a > -1$.

Pro všechna x z intervalu (2) platí $x + 1 > 0$, tj. $|x + 1| = x + 1$ a zároveň $x - a < 0$, tj. $|x - a| = a - x$. Funkci (1) lze vyjádřit rovnicí (po úpravě)

$$y = \frac{x^3 + 1}{x + 1} + \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{a - x},$$

neboli

$$y = x^2 - x + 1 + \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{a - x}. \quad (3)$$

Polynom $x^2 - x + 1$ je v intervalu (2) omezený; proto musí být omezený v intervalu (2) i zlomek ve funkci (3). Z toho plyne, že rovnice

$$2x^3 - 3x^2 + x = 0 \quad (4)$$

musí mít kořen $x = a$, neboť jinak by nabýval tento zlomek pro $x < a$ libovolně velkých hodnot a graf funkce by nebyl omezený. Za parametr a můžeme tedy zvolit jediné některý z kořenů rovnice (4). Tuto rovnici upravíme na tvar

$$x(2x^2 - 3x + 1) = 0,$$

jež má kořeny $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$.

První kořen dává funkci

$$y = 2x - x^2 \quad (4')$$

definovanou v intervalu $-1 < x < 0$. Zběžný náčrtek ukáže, že graf funkce (4') neleží v jednotkovém kruhu;

skutečně tomuto grafu náleží např. bod $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right]$,

který neleží v jednotkovém kruhu. Je totiž

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{29}{16} > 1.$$

Kořen $a_2 = 1$ dává funkci

$$y = x^2 - x + 1 + x \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x} = x^2 - x + 1 + x \frac{(1 - x)(1 - 2x)}{1 - x},$$

neboli

$$y = 1 - x^2. \quad (4'')$$

Grafem této funkce je oblouk paraboly, který náleží jednotkovému kruhu. Platí totiž pro $-1 < x < 1$ stále $y > 0$ a $y < 1$, tj. $y^2 < y$.

Protože podle (4'') $x^2 + y = 1$, platí $x^2 + y^2 < x^2 + y = 1$, čímž je tvrzení dokázáno.

Třetí kořen $a_2 = \frac{1}{2}$ dává funkci

$$y = x^2 - x + 1 + \frac{2x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - x}$$

neboli

$$y = -x^2 + x + 1.$$

Tato funkce je nyní definována v intervalu $-1 < x < \frac{1}{2}$.

Ihned je však vidět, že graf této funkce neleží v jednotkovém kruhu, neboť např. pro $x = \frac{1}{4}$ je $y = \frac{19}{16} > 1$.

Graf funkce (1) tedy leží v jednotkovém kruhu jedině pro $a = 1$.

2. Množina **M** sa skladá z n prvkov 1, 2, ..., n . Utvorte kombinácie k -tej triedy z prvkov množiny **M**. Sčítajte čísla, ktoré vytvárajú kombinácie k -tej triedy. Utvorte súčet všetkých takto získaných súčtov a označte ho S_k . Určite vzorec

a) pre S_k ;

b) pre súčet $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$.

RIEŠENIE. a) Úvodom je vhodné si uvedomiť, že súčet S_k môžeme dostať aj sčítaním všetkých čísel 1 vyskytujúcich sa v kombináciách k -tej triedy z prvkov množiny **M**, všetkých čísel 2, atď., až všetkých čísel n vyskytujúcich sa v kombináciách k -tej triedy z prvkov množiny **M**.

Najskôr zistíme, koľkokrát sa v kombináciách k -tej

triedy prvkov z množiny $\mathbf{M}$ vyskytuje ľubovoľný prvok m z množiny $\mathbf{M}$ ($1 \leq m \leq n$, m celé). To urobíme takto: Predpokladajme, že máme tvoriť kombinácie k -tej triedy z prvkov množiny $\mathbf{M}$ (teda z n prvkov), ktoré obsahujú prvok m . Dostaneme ich tak, že ku každej kombinácii $(k-1)$ -tej triedy z množiny prvkov $1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, n$ (čiže z $n-1$ prvkov) priradíme prvok m . Kombinácií k -tej triedy z prvkov množiny $\mathbf{M}$, ktoré obsahujú prvok m , je teda $C_{k-1}(n-1)$. Z toho vyplýva, že súčet všetkých prvkov m vyskytujúcich sa v kombináciách k -tej triedy prvkov z množiny $\mathbf{M}$ je $m \cdot C_{k-1}(n-1)$. Teraz už súčet S_k ľahko zistíme.

$$\begin{aligned} S_k &= 1 \cdot C_{k-1}(n-1) + 2 \cdot C_{k-1}(n-1) + \dots + \\ &+ (n-1) \cdot C_{k-1}(n-1) + n \cdot C_{k-1}(n-1) = \\ &= (1 + 2 + \dots + n) \cdot C_{k-1}(n-1), \end{aligned}$$

skadiaľ podľa známych vzorcov

$$S = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \binom{n-1}{k-1}. \quad (1)$$

b) Je

$$\sum_{k=1}^n S_k = S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} + S_n$$

a podľa (1) preto platí

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_k &= \frac{n(n+1)}{2} \binom{n-1}{0} + \frac{n(n+1)}{2} \binom{n-1}{1} + \dots \\ &\dots + \frac{n(n+1)}{2} \binom{n-1}{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} \left[\binom{n-1}{0} + \right. \\ &\left. + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Ak si uvedomíme, že platí rovnosť

$$2^{n-1} = (1 + 1)^{n-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1},$$

dostaneme

$$\sum_{k=1}^n S_k = 2^{n-2} \cdot n(n+1).$$

3. V rovine je dáno päť bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků jimi určených má vnitřní úhel $\alpha \geq 108^\circ$.

ŘEŠENÍ. V dané rovine zvolme libovolnou přímku p a vedme s ní rovnoběžky danými body. Lze nalézt pás roviny obsahující päť daných bodů, jehož hranice mají směr (p) a každá z nich obsahuje aspoň jeden z daných bodů. Budiž h jedna z obou hranic, A ten z daných bodů, který na ní leží (obr. 1). Bod A spojíme polopřímkami AX se všemi danými body; všechny tyto polopřímky leží v jedné polorovině s hranicí h . Mezi všemi čtyřmi polopřímkami AX lze vybrat dvě tak, že dutý úhel jimi určený obsahuje obě zbývající (žádné tři z daných bodů totiž neleží v přímce). Tyto polopřímky jsou na obr. 1 označeny AB, AE (B, E jsou dva z daných päti bodů); zbývající dané body C, D leží uvnitř úhlu $\angle BAE$.

Nyní rozlišíme dvě možnosti:

1. aspoň jeden z bodů C, D leží v polorovině BEA ;
2. oba body C, D leží v polorovině opačné k BEA .

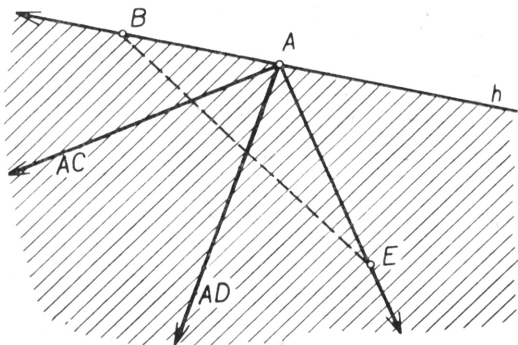
Případ 1 (obr. 2). Protože žádné tři z bodů A, B, C, D, E nejsou kolineární, leží např. bod C uvnitř $\triangle ABE$. Protože

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle BCE + \sphericalangle ECA = 360^\circ,$$

má aspoň jeden z těchto tří úhlů velikost větší nebo rovnou 120° ; platí tedy např.

$$\sphericalangle ACB \geq 120^\circ > 108^\circ$$

a věta je v případě 1 dokázána.

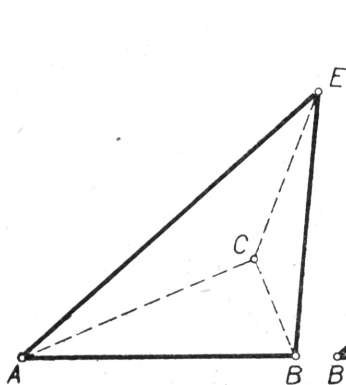


Obr. 1

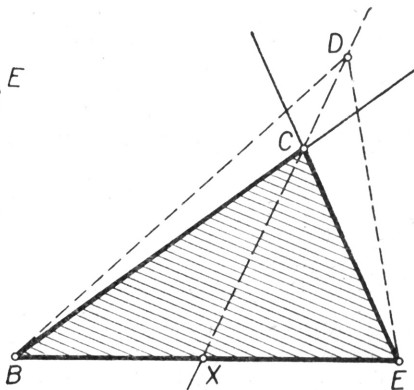
Případ 2. Obsahuje-li $\triangle BEC$ bod D nebo $\triangle BED$ bod C , užijeme téhož postupu jako v případě 1 a dostaneme tvrzení věty.

Zbývá tedy případ, kdy ani bod D nenáleží trojúhelníku BEC , ani bod C trojúhelníku BED . Dokážeme, že pak bod D nenáleží úhlu vrcholovému k $\sphericalangle BCE$. Pripustíme, že by tato situace nastala (obr. 3); pak by přímka CD procházela úhlem $\sphericalangle BCE$ a proťala by úsečku BE v jejím vnitřním bodě X . Pak by bod C náležel úsečce DX , tj. trojúhelníku BED , což je spor.

Protože bod D náleží polorovině BEC , náleží buď úhlu $\sphericalangle CBE$, nebo $\sphericalangle CEB$; necht' náleží D např. úhlu $\sphericalangle CBE$

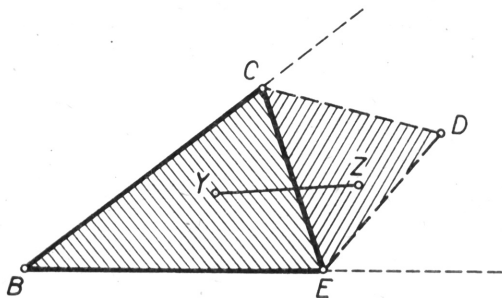


Obr. 2



Obr. 3

(ovšem nikoli trojúhelníku BEC); viz obr. 4. Pak sjednocení trojúhelníků BEC , CED je konvexní čtyřúhelník, jak se snadno dokáže pomocí úsečky YZ (viz obr. 4). Stejně se dokáže, že sjednocení trojúhelníku ABE a čtyřúhelníku $BEDC$ je konvexní pětiúhelník; čtyřúhelník $BEDC$ leží totiž v úhlu $\sphericalangle BAF$.



Obr. 4

Protože součet velikostí vnitřních úhlů konvexního pětiúhelníka je $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$, má aspoň jeden z těchto úhlů velikost $\alpha \geq 108^\circ$.

4. Výšky štvorstena $ABCD$ se pretínajú v tom istom bode (čiže štvorsten $ABCD$ je ortocentrický) práve vtedy, keď pre dĺžky jeho hrán platia rovnosti

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2. \quad (1)$$

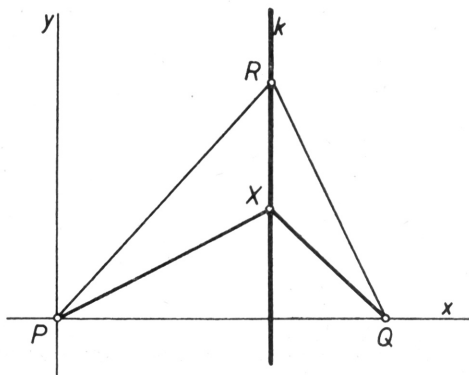
Dokážte.

RIEŠENIE. a) Najskôr odvodíme *pomocnú vetu P*: Nech je daný trojuholník PQR . Potom množina $\mathbf{M}$ všetkých bodov X roviny PQR , pre ktoré platí

$$PX^2 + QR^2 = QX^2 + PR^2 \quad (2)$$

je priamka predchádzajúca vrcholom R a kolmá na priamku PQ .

Pri *dôkaze* pomocnej vety P použijeme metódu súradníc. Súradnicovú sústavu zvolíme tak, ako ukazuje obr. 5. Súradnice bodov zapíšeme takto: $P \equiv [0; 0]$, $Q \equiv [t; 0]$ ($t > 0$), $R \equiv [r; s]$, $X \equiv [x; y]$. Rovnosť (2) je



Obr. 5

vyjadrená pomocou súradníc v tvare

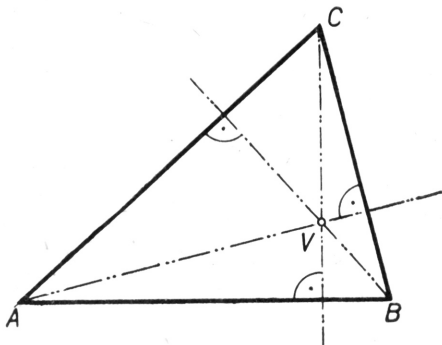
$$x^2 + y^2 + (r - t)^2 + s^2 = (x - t)^2 + y^2 + r^2 + s^2. (3)$$

Po jednoduchšej úprave dostaneme

$$x = r. (4)$$

Z toho vyplýva: Každý bod X množiny M leží na priamke určenej rovnicou (4). Je to priamka k kolmá na priamku PQ a prechádzajúca bodom R . Obrátene: súradnice každého bodu X priamky k vyhovujú rovnici (4), teda aj rovnici (3). Pre bod X platí teda rovnosť (2) a bod X patrí preto do množiny M .

Tým je veta P dokázaná.



Obr. 6

b) Nech je $ABCD$ ortocentrický štvorsten. Výšky v_A, v_B, v_C tohto štvorstena sa premietajú pri pravouhlom premietaní do roviny ABC ako výšky trojuholníka ABC , výška v_D sa premieta ako ortocentrum V (priesečník výšok) trojuholníka ABC . Podľa pomocnej vety P je (pozri obr. 6):

$$AV^2 + BC^2 = BV^2 + AC^2,$$

skadiaľ

$$(AV^2 + VD^2) + BC^2 = (BV^2 + VD^2) + AC^2$$

čiže

$$AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2. \quad (5)$$

Podobne dostaneme aj ostatné rovnosti vzťahu (1).

Nech obrátene platia pre štvorsten $ABCD$ rovnosti (1). Potom platí tiež rovnosť (5). Označme M päť výšky v_D . Potom je

$$AD^2 = AM^2 + MD^2, \quad BD^2 = BM^2 + MD^2. \quad (6)$$

Ak dosadíme do rovnosti (5) zo vzťahu (6), po úprave dostaneme

$$AM^2 + BC^2 = BM^2 + AC^2.$$

Podľa pomocnej vety P je bod M bodom výšky trojuholníka ABC vedenej bodom C . Použitím ostatných rovností vzťahu (1) podobne dokážeme, že bod M je tiež bodom ostatných dvoch výšok trojuholníka ABC . Je teda $M \equiv V$ a výšky v_A, v_B, v_C pretínajú výšku v_D . Zámenou písmen, vzhľadom na to, že označenie vrcholov štvorstena nie je podstatné, dostaneme, že každé tri výšky štvorstena $ABCD$ pretínajú jeho zostávajúcu výšku.

Štvorsten $ABCD$ je teda ortocentrický.

2. KATEGORIE B

1. Jsou-li koeficienty kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad (1)$$

lichá čísla, nemá tato rovnice racionální kořeny; dokažte.

ŘEŠENÍ. Pripustíme, že rovnice (1) má racionální kořen $\frac{p}{q}$ (p, q celá, nesoudělná, $q \neq 0$). Dosadíme-li

$x = \frac{p}{q}$ do (1) a vynásobíme číslem q^2 , dostaneme

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0. \quad (2)$$

První dva členy (2) jsou dělitelné číslem p ; protože p, q (i p, q^2) jsou čísla nesoudělná, je p dělitel čísla c . Protože je c liché, je i p liché. Obdobně dokážeme z (2), že q je dělitel čísla a , a že q tudíž je liché číslo.

Ježto a, b, c, p, q jsou čísla lichá, jsou všechny tři členy na levé straně (2) čísla lichá a jejich součet nemůže být roven nule. Tím je spor nalezen.

2. Vyšetrite a načrtnite množinu všetkých bodov v rovine, ktorých pravouhlé súradnice x, y vyhovujú nerovnostiam

$$1 \leq ||x + y| - |x - y|| \leq 2.$$

RIEŠENIE. Použijeme vzťah $|a| = |-a|$, ktorý platí pre každé reálne číslo a . Vypočítame hodnotu výrazu medzi znakmi nerovností pri dosadení:

- a) $-y$ miesto y ,
- b) $-x$ miesto x ,
- c) y miesto x a x miesto y ,
- d) $-y$ miesto x a $-x$ miesto y .

Dostaneme

$$\begin{aligned} \text{a) } & ||x + (-y)| - |x - (-y)|| = ||x - y| - |x + y|| = \\ & = ||x + y| - |x - y||, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & ||-x + y| - |-x - y|| = ||x - y| - |x + y|| = \\ & = ||x + y| - |x - y||, \end{aligned}$$

$$\text{c) } ||y + x| - |y - x|| = ||x + y| - |x - y||,$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & ||-y + (-x)| - |-y - (-x)|| = ||-(x + y)| - \\ & - |x - y|| = ||x + y| - |x - y||. \end{aligned}$$

Dané nerovnosti sa teda nezmenia, ak namiesto bodu $[x, y]$ vezmeme ľubovoľný z bodov $[x, -y]$, $[-x, y]$, $[y, x]$, $[-y, -x]$ čiže grafické znázornenie hľadanej množiny bude súmerné podľa súradnicových osí a podľa

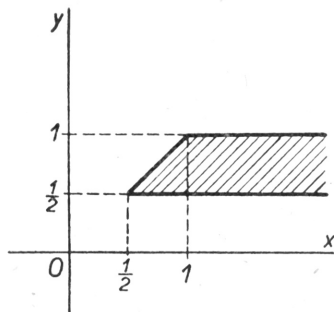
priamok $y = x, y = -x$ (súmernosť podľa priamky $y = -x$ sme však dokazovať ani nemuseli, pretože vyplýva z predchádzajúcich troch súmerností). Stačí preto nájsť tú časť hľadanej množiny, ktorá leží v uhle veľkosti 45° vyjadrenom nerovnosťami

$$0 \leq y \leq x. \quad (1)$$

Pri tejto podmienke dostanú dané nerovnosti tvar

$$\begin{aligned} 1 &\leq |x + y - (x - y)| \leq 2, \\ 1 &\leq |2y| \leq 2, \\ \frac{1}{2} &\leq y \leq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Množina bodov, ktoré súčasne vyhovujú nerovnostiam (1) a (2) je znázornená na obr. 7. Zo spomínanej súmernosti vyplýva, že grafickým znázornením celej hľadanej množiny je vyšrafovaná časť roviny na obr. 8.



Obr. 7

3. Jsou dána dvě kladná čísla m, s a pravý úhel $\sphericalangle ABC$ tak, že platí $AB = 2m$.

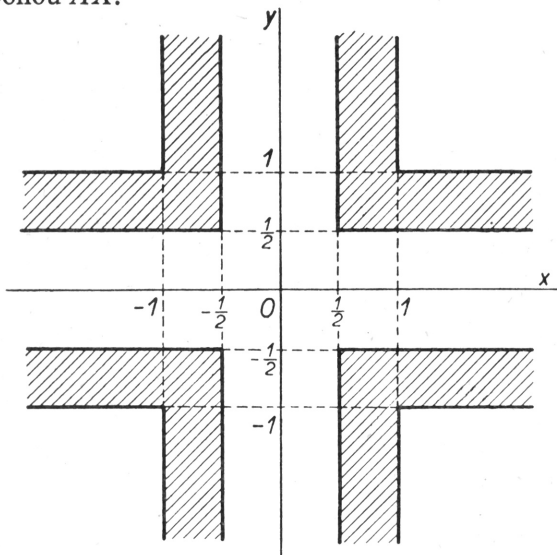
Sestrojte rovnoramenný trojúhelník AXY se základnou AY tak, aby měl obvod $2s$, aby vrchol X ležel na polopřímce AB a vrchol Y na polopřímce BC .

ŘEŠENÍ. Je-li $\triangle AXY$ řešením úlohy, vznikne situace znázorněná na obr. 9. Označíme Z střed strany AY , T patu kolmice spuštěné z bodu Z na přímku AB ; dále označíme $AZ = YZ = x, AX = z$. Protože ZT je střední

příčka trojúhelníka ABY , platí

$$AT = BT = \frac{1}{2} AB = m. \quad (1)$$

Úsečka XZ je výška rovnoramenného trojúhelníku AXY ; proto je $\sphericalangle AZX$ pravý a trojúhelník AXZ pravoúhlý s přeponou AX .



Obr. 8

Sestrojíme $\triangle AXZ$ na základě výpočtu: vypočteme délky jeho stran x , z . Podle textu úlohy platí

$$x + z = s. \quad (2)$$

Podle Eukleidovy věty o odvěsně je vzhledem k (1)

$$x^2 = mz. \quad (3)$$

Z rovnic (2), (3) vyloučíme z ; dostaneme

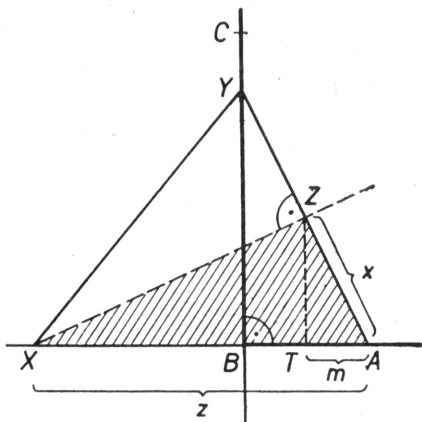
$$x^2 + mx = ms,$$

neboli

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 = m\left(\frac{m}{4} + s\right),$$

neboli (protože $x > 0$, $x + \frac{m}{2} > 0$, $\sqrt{m\left(\frac{m}{4} + s\right)} > \frac{m}{2}$)

$$x + \frac{m}{2} = \sqrt{m\left(\frac{m}{4} + s\right)}. \quad (4)$$



Obr. 9

Podle vzorců (4), (2) určíme délky x , z .

Z pravoúhlých trojúhelníků AXZ , AZT plynou nerovnosti:

$$x < z, \quad m < x. \quad (5)$$

Vzhledem k (2) dostaneme z první nerovnosti (5)

$$x < \frac{s}{2} \quad (6)$$

a spojením (6) s druhou nerovností (5) vyjde

$$m < \frac{s}{2}. \quad (7)$$

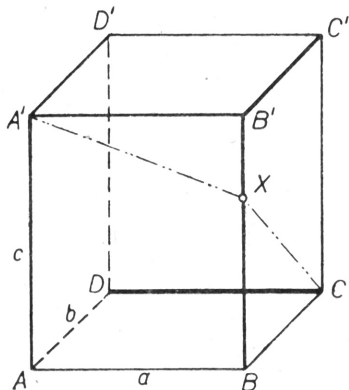
Dokážeme: platí-li (7), splňují délky x, z vypočtené podle vzorců (4), (2) všechny nerovnosti (5), (6).

Nepřímý důkaz: Kdyby platilo $m \geq x$, bylo by $\frac{3}{2}m \geq x + \frac{m}{2}$. Po dosazení z (4) a po umocnění bychom dostali $\frac{9}{4}m^2 \geq \frac{1}{4}m^2 + ms$, tj. $2m \geq s$, což odporuje nerovnosti (7). Kdyby platilo $x \geq \frac{s}{2}$, bylo by $x + \frac{m}{2} \geq \frac{s+m}{2}$. Po dosazení z (4) a po umocnění bychom dostali $\frac{m^2}{4} + ms \geq \frac{m^2}{4} + \frac{ms}{2} + \frac{s^2}{4}$, tj. $m \geq \frac{s}{2}$, což opět odporuje nerovnosti (7). Dokázali jsme tedy, že platí (6) i druhá nerovnost (5); z (2) pak plyne $x < z$, což je první nerovnost (5).

Z vypočtených délek x, z sestrojíme pravoúhlý trojúhelník AXZ tak, aby vrchol X ležel na polopřímce AB a vrchol Z v polorovině ABC ; to je možné, neboť platí $x < z$. Obrácením postupu odvodíme z rovnosti (4) rovnost (3); odtud vyplývá, že $AT = m$. Doplníme-li trojúhelník AXZ na rovnoramenný trojúhelník AXY , leží vzhledem k (1) bod Y na polopřímce BC .

Podmínkou řešitelnosti úlohy je tedy nerovnost (7); je-li úloha řešitelná, má jediné řešení.

4. Je dán kvádr $ABCD A'B'C'D'$ o hranách délek $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Na hraně BB' určete bod, jehož vzdálenosti od hran $A'D'$, CD mají součet a) co nejmenší, b) co největší. Oba tyto extrémní součty vyjádřete pomocí délek a , b , c .



Obr. 10

ŘEŠENÍ. Situaci znázorňuje obr. 10., vzdálenosti bodu X hrany BB' od hran $A'D'$, CD jsou délky úseček $A'X$, CX . Rozvineme-li část pláště (stěny $ABB'A'$, $BCC'B'$) do roviny podle obr. 11, plyne z trojúhelníkové nerovnosti, že pro všechny body X hrany BB' platí

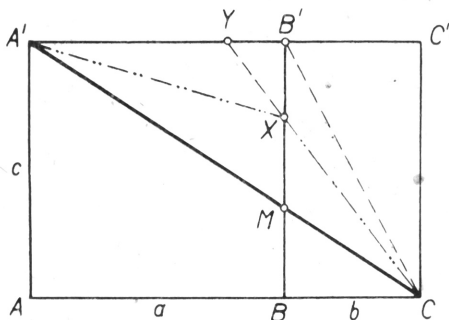
$$A'X + CX \geq A'M + CM, \quad (1)$$

kde M je průsečík úseček BB' , $A'C$. Podle (1) je tedy M bod s nejmenším součtem vzdáleností $A'X$, CX . Dále platí při označení z obr. 12 podle trojúhelníkové nerovnosti:

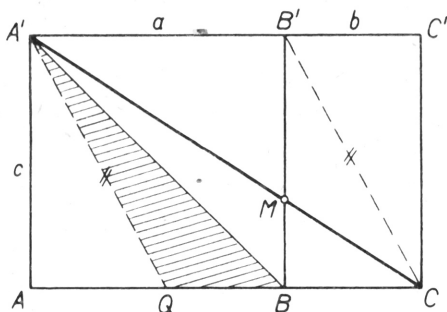
$$A'Y + YX > A'X, \quad YB' + B'C > YC = YX + XC. \quad (2)$$

Po sečtení nerovností (2) a po úpravě dostaneme

$$A'B' + B'C = A'Y + YB' + B'C > A'X + XC. \quad (3)$$



Obr. 11



Obr. 12

Podle (3) má tedy bod B' největší součet vzdáleností $A'X$, CX ze všech bodů úsečky $B'M$. Obdobně má bod B největší součet vzdáleností $A'X$, CX ze všech bodů úsečky BM .

Zbývá tedy porovnat $A'B' + B'C$ a $A'B + BC$. V situaci na obr. 11 a 12. je $a > b$; sestrojíme-li rovnoběžník $CB'A'Q$, leží bod Q uvnitř úsečky AB (platí totiž

$\triangle B'BC \cong \triangle A'AQ$). Z trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle A'QB$ vyjde $A'Q + QB > A'B$ a odtud $A'Q + QB + BC > A'B + BC$, neboli $A'Q + QC > A'B + BC$ neboli z rovnoběžníku $CB'A'Q$

$$B'C + A'B' > A'B + BC.$$

Bod B' má tedy větší součet vzdáleností $A'X$, CX než bod B . Tento extrémní součet vzdáleností je

$$A'B' + B'C = a + \sqrt{b^2 + c^2}. \quad (4)$$

Součet $A'M + MC = A'C$ je zřejmě

$$A'C = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}. \quad (5)$$

Jestliže $a = b$, je patrně $A'B' + B'C = A'B + BC = a + \sqrt{a^2 + c^2}$.

Odpověď: Bod M má minimální součet vzdáleností daný vzorcem (5). Maximální součet vzdáleností má bod $B'(B)$, jestliže $a \geq b$ ($b \geq a$). Tento součet je dán formulí (4) nebo formulí, kterou z ní dostaneme výměnou písmen a , b .

3. KATEGORIE C

1. Písmenem N označíme přirozené číslo, jehož zápis v desítkové soustavě obsahuje tři jedničky, z nich jednu na počátku, druhou na konci. Ostatní cifry zápisu jsou jen nuly.

Určete všechna tisíciciferná čísla N , která jsou dělitelná sedmi.

ŘEŠENÍ. Každé z čísel N lze napsat ve tvaru

$$10^n + (10^k + 1), \quad (1)$$

kde n , k jsou přirozená čísla, $n > k$. Např. číslo $N = 10\,010\,001$ lze napsat ve tvaru $N = 10^7 + (10^4 + 1)$.

Počítejme zbytky z po dělení sedmi u čísel 10^n a $10^k + 1$ a zapišme je do tabulek:

Tabulka (I)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
10^n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	...
z	3	2	6	4	5	1	3	2	...

Tabulka (II)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$10^k + 1$	11	101	1 001	10 001	100 001	1 000 001	10 000 001	100 000 001	...
z	4	3	0	5	6	2	4	3	...

Z tabulek a ze způsobu jejich sestavení je zřejmé, že se zbytky po šesti místech opakují. Tato opakování jsou dána pořadím zbytků

$$\begin{array}{l} a \quad 3, 2, 6, 4, 5, 1 \text{ pro } 10^n \\ \quad 4, 3, 0, 5, 6, 2 \text{ pro } 10^k + 1. \end{array}$$

Má-li být číslo N tisíciciferné, musí být $n = 999$, $k < 999$. V tabulce (I) je pro $n = 999$ zbytek $z = 6$, neboť $999 = 166 \cdot 6 + 3$, tj. z pro $n = 999$ je totéž jako pro $n = 3$. Má-li být číslo $10^{999} + 10^k + 1$ dělitelné sedmi, musí zbytek po dělení čísla $10^k + 1$ sedmi být roven $7 - 6 = 1$. Protože se však v tabulce (II) zbytek 1 vůbec nevyskytuje, je úloha neřešitelná.

Řešitelná varianta

Pro šestisetciferná čísla N dostaneme $n = 599$, v tabulce (I) $z = 5$. V tabulce (II) musí být $z = 2$, tj. číslo $k + 1$ je násobkem šesti neboli $k = 6 - 1$. Za k můžeme volit postupně všechna čísla

$$5, 11, 17, 23, \dots, 593.$$

Např. největší z těchto čísel $N = 10^{599} + 10^{593} + 1$.

2. Řešte soustavu rovnic s neznámými x, y

$$\begin{array}{l} ax + |y| = 1, \\ x + y = a, \end{array} \quad (1)$$

kde a je parameter. Prevedte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na parameter a .

RIEŠENIE. Rozoznávajme dva prípady: a) $y \geq 0$, b) $y \leq 0$. V prípade a) má sústava (1) tvar

$$\begin{array}{l} ax + y = 1, \\ x + y = a. \end{array} \quad (2)$$

Odčítaním druhej rovnice sústavy (2) od prvej rovnice

dostaneme

$$(a - 1)x = 1 - a. \quad (3)$$

Ak je $a \neq 1$, má rovnica (3) jediné riešenie $x = -1$. Z druhej rovnice sústavy (2) potom dostaneme $y = a + 1$. Dvojica $(-1, a + 1)$ je riešením sústavy (1) práve vtedy, keď je $a + 1 \geq 0$ čiže $a \geq -1$.

Ak je $a = 1$, má sústava (2) nekonečne mnoho riešení, a to všetky dvojice $(x, 1 - x)$. Sústave (1) z nich však vyhovujú len tie, pre ktoré $x \leq 1$.

V prípade b) má sústava (1) tvar

$$\begin{aligned} ax - y &= 1, \\ x + y &= a. \end{aligned} \quad (4)$$

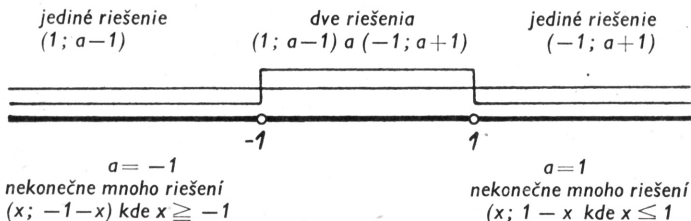
Sčítaním rovníc sústavy (4) dostaneme

$$(a + 1)x = a + 1. \quad (5)$$

Ak je $a \neq -1$, má rovnica (5) jediné riešenie $x = 1$. Z druhej rovnice sústavy (4) vypočítame $y = a - 1$. Dvojica $(1, a - 1)$ je však riešením sústavy (1) práve vtedy, keď je $a - 1 \leq 0$ čiže $a \leq 1$.

Ak je $a = -1$, má sústava (4) za riešenia všetky dvojice $(x, -1 - x)$, ktoré však vyhovujú sústave (1) len pre $-1 - x \leq 0$ čiže $x \geq -1$.

Zhrnutie znázorníme na číselnej osi (obr. 13).

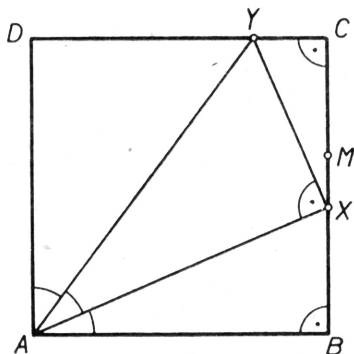


Obr. 13

3. Je dán čtverec $ABCD$, bod X probíhá vnitřek úsečky BC , bod Y náleží úsečce CD a je $XY \perp AX$.

Určete všechny body X , pro které platí

$$\sphericalangle BAX < \sphericalangle XAY < \sphericalangle YAD.$$



Obr. 14

ŘEŠENÍ (obr. 14). Stranu čtverce $ABCD$ zvolíme za jednotku délky. Všecky tři vyšetřované úhly jsou ostré, můžeme je porovnat pomocí tangent. Označíme-li $BX = x$, platí $CX = 1 - x$; protože

$$\triangle ABX \sim \triangle XCY \quad (uu)$$

(platí totiž $\sphericalangle BAX = 90^\circ - \sphericalangle AXB = \sphericalangle CXY$), platí

$$CY = x(1 - x). \quad (1)$$

Z trojúhelníku XCY dostaneme podle Pythagorovy věty

$$XY = (1 - x)\sqrt{1 + x^2} \quad (2)$$

a dále

$$DY = 1 - x(1 - x) = x^2 - x + 1. \quad (3)$$

Mimoto platí podle Pythagorovy věty pro $\triangle ABX$

$$AX = \sqrt{1 + x^2}. \quad (4)$$

Platí tedy podle (2), (3), (4):

$$\operatorname{tg} \sphericalangle BAX = x, \operatorname{tg} \sphericalangle XAY = \frac{(1-x)\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1-x, \\ \operatorname{tg} \sphericalangle YAD = x^2 - x + 1. \quad (5)$$

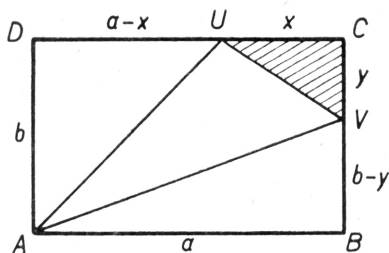
Jestliže $\operatorname{tg} \sphericalangle BAX < \operatorname{tg} \sphericalangle XAY$, pak $x < 1-x$ čili $x < \frac{1}{2}$ a obráceně. Jestliže $\operatorname{tg} \sphericalangle XAY < \operatorname{tg} \sphericalangle YAD$, pak $1-x < x^2 - x + 1$ neboli $x^2 > 0$ a obráceně.

Dokazovaný vztah platí tedy právě pro všechny body X , které leží mezi vrcholem B a středem M strany BC .

4. Je dán obdélník $ABCD$, jehož strany mají délky $AB = a$, $BC = b$, $a > b$. Určete bod U ležící mezi body C , D a bod V mezi body B , C tak, aby trojúhelníky ABV , AUV , ADU měly obsahy sobě rovné.

a) Vypočítejte délky CU , CV pomocí a , b .

b) Sestrojte body , VU .



Obr. 15

ŘEŠENÍ (obr. 15).

a) Označme $CU = x$, $CV = y$. Pak pro obsahy $\triangle$ trojúhelníků platí

$$\triangle ABV = \frac{1}{2} a(b-y), \quad \triangle ADU = \frac{1}{2} b(a-x). \quad (1)$$

Pětiúhelník $ABVUD$ má obsah

$$P = ab - \frac{1}{2} xy. \quad (2)$$

Podle podmínek úlohy je vzhledem k (1), (2)

$$\frac{1}{2} a(b - y) = \frac{1}{3} ab - \frac{1}{6} xy, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} b(a - x) = \frac{1}{3} ab - \frac{1}{6} xy. \quad (4)$$

Odečtením rovnic (3), (4) dostaneme

$$ay = bx. \quad (5)$$

Rovnici (3) znásobíme číslem $6a$ a dosadíme za ay z (5):

$$3a^2b - 3abx = 2a^2b - bx^2,$$

neboli (po krácení číslem b)

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0. \quad (6)$$

Rovnici (6) řešíme doplněním na dvojmoc dvojčlenu

$$\left(x - \frac{3}{2} a\right)^2 = \frac{5}{4} a^2;$$

odtud

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} a.$$

Protože musí být $x < a$, vyhovuje jediný kořen

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} a \doteq 0,382a < a. \quad (7)$$

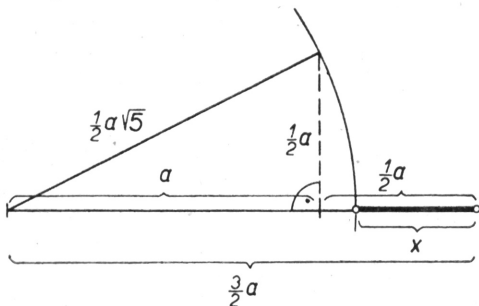
Z (5) dostáváme

$$y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} b \doteq 0,382b < b. \quad (8)$$

Obrácení postupu ukazuje, že body U , V , pro něž platí

$CU = x$, $CV = y$, kde x, y jsou dány vzorci (7), (8) splňující skutečně podmínky úlohy.

b) Konstrukci úsečky délky x ukazuje obr. 16.
Úloha má pro každé a, b jediné řešení.



Obr. 16

4. KATEGÓRIA D

1. Dokážte, že platí

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) < 2$$

pre všetky prirodzené $n > 1$.

RIEŠENIE. Premenný činiteľ vyšetřovaného súčinu s je

$$1 + \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{k^2}{k^2 - 1} = \frac{k^2}{(k - 1)(k + 1)}.$$

Súčin s možno teda napísať v tvare

$$s = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{n^2}{(n - 1)(n + 1)}$$

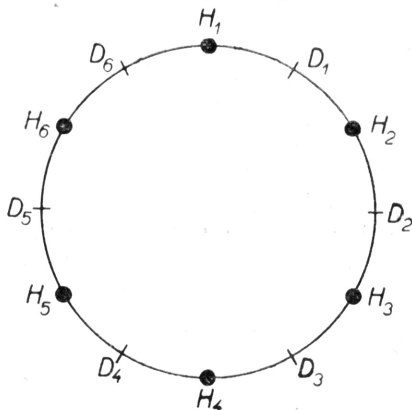
čiže

$$s = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot n^2}{2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (n-1)^2 \cdot n(n+1)}.$$

Stadial po skrátení dostaneme

$$s = 2n \cdot \frac{1}{n+1} = 2 \cdot \frac{n}{n+1} < 2.$$

2. Pri slavnosti sedí u kulatého stolu 6 hochů $H_1, H_2, \dots, H_6$ a 6 dívek $D_1, D_2, \dots, D_6$, rozmístěných tak, že vedle sebe sedí střídavě vždy chlapec a dívka (obr. 17).



Obr. 17

Před koncem slavnosti odešli 2 chlapci a 2 dívky. Přitom obě místa, která uvolnili chlapci, oddělují obě místa uvolněná děvčaty. (Např. mohli odejít H_1, H_3, D_2, D_5 , ale nemohli odejít H_1, H_3, D_4, D_6 .)

Zjistěte, kolika způsoby lze vybrat takovou dvojici chlapců a dvojici děvčat.

ŘEŠENÍ. Prozkoumáme systematicky všechny možné případy:

a) Místa uvolněná chlapci jsou H_1, H_2 nebo H_2, H_3 nebo H_3, H_4 nebo H_4, H_5 nebo H_5, H_6 nebo H_6, H_1 . Pro každou tuto dvojici chlapců lze vybrat $5 = 5 \cdot 1$ vhodných dvojic děvčat, tj. celkem $6 \cdot 5 = 30$ možností.

b) Místa uvolněná chlapci jsou H_1, H_3 nebo H_2, H_4 nebo H_3, H_5 nebo H_4, H_6 nebo H_5, H_1 nebo H_6, H_2 . Pro každou tuto dvojici chlapců lze vybrat $8 = 4 \cdot 2$ vhodných dvojic děvčat, tj. celkem $6 \cdot 8 = 48$ možností.

c) Místa uvolněná chlapci jsou H_1, H_4 nebo H_2, H_5 nebo H_3, H_6 . Pro každou tuto dvojici hochů lze vybrat $9 = 3 \cdot 3$ vhodných dvojic děvčat, tj. $3 \cdot 9 = 27$ možností.

Všech možných případů je tedy $105 = 30 + 48 + 27$.

3. Trojúhelník ABC má velikosti vnitřních úhlů $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ$.

a) Vyjadrite dĺžky strán b, c pomocou dĺžky strany a .

b) Vyjadrite pomer dĺžok všetkých troch výšok trojuholníka ABC .

RIEŠENIE. a) Pre tretí vnútorný uhol γ platí $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$. Pre dĺžky strán teda platí

$$a < b < c. \quad (1)$$

Označme D päť výšky na stranu c , E bod strany AB , pre ktorý platí $BE = BC = a$ (obr. 18). Trojúhelník BCE je potom rovnostranný. Je teda

$$CD = \frac{1}{2}a\sqrt{3}. \quad (2)$$

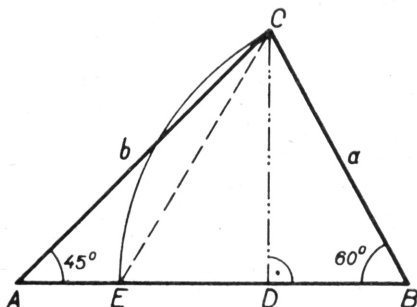
Trojúhelník ACD je rovnoramenný so základňou $AC =$

= b . Je preto

$$b = CD \cdot \sqrt{2}. \quad (3)$$

Dosadením zo vzťahu (2) do (3) dostaneme

$$b = \frac{1}{2} a \sqrt{6}. \quad (4)$$



Obr. 18

Okrem toho je $AB = AD + BD = CD + BD$ čiže podľa vzťahu (2)

$$c = \frac{1}{2} a \sqrt{3} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} (1 + \sqrt{3}). \quad (5)$$

Vzťahy (3) a (5) dávajú riešenie úlohy a).

b) Pre výšku v_c platí podľa (2)

$$v_c = \frac{1}{2} a \sqrt{3}. \quad (2')$$

Obsah P trojuholníka ABC je daný podľa vzťahov (2'), (5) vzorcom

$$P = \frac{1}{2} c v_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} (1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{3} \quad \text{čiže}$$

$$P = \frac{a^2}{8} (3 + \sqrt{3}). \quad (6)$$

Zo vztáhu (6) vypočítáme v_a a s použitím vztáhu (4) aj v_b :

$$v_a = \frac{2P}{a} = \frac{a}{4} (3 + \sqrt{3}), \quad (7)$$

$$v_b = \frac{2P}{b} = \frac{a}{4} (\sqrt{2} + \sqrt{6}). \quad (8)$$

Zo vztahov (2'), (7), (8) vyplýva

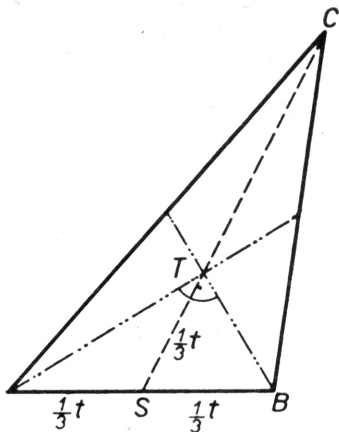
$$v_a : v_b : v_c = (3 + \sqrt{3}) : (\sqrt{2} + \sqrt{6}) : 2\sqrt{3}.$$

Numericky je približne: $v_a : v_b : v_c = 4,73 : 3,86 : 3,46$.

4. V trojuhelníku ABC jsou těžnice t_a a t_b navzájem kolmé. Dále je dána délka těžnice t_c a poloměr r opsané kružnice.

Sestrojte tento trojúhelník a proveďte diskusi řešitelnosti.

ŘEŠENÍ. *Rozbor* (obr. 19). Víme, že $CS = t$, $\sphericalangle ATB = 90^\circ$. Kružnice opsaná $\triangle ABC$ má střed O a poloměr r . Z pravoúhlého $\triangle ABT$ plyne $ST = AS = SB$ (S je střed úsečky AB), tedy $AB =$



Obr. 19

$= 2 ST = 2 \cdot \frac{1}{3} CS = \frac{2}{3} t$. Odtud konstrukce:

1. Zvolíme polohu úsečky $AB = \frac{2}{3}t$ a sestrojíme její střed S .

2. V jedné z polorovin vyřatých přímkou AB sestrojíme bod O tak, aby bylo $OA = OB = r$.

3. Sestrojíme kružnice $c \equiv (S, t)$ a $k \equiv (O, r)$.

4. Společný bod kružnic c, k označme C .

5. Sestrojíme $\triangle ABC$.

Zkouška správnosti konstrukce. Je jasné, že kružnice opsaná sestrojenému trojúhelníku má poloměr r . Označme T těžiště $\triangle ABC$, pak $ST = \frac{1}{3}t$. Protože podle konstrukce $AB = \frac{2}{3}t$, platí $SA = SB = ST$. Bod T leží proto na Thaletově kružnici nad průměrem AB , tedy je $\sphericalangle ATB = 90^\circ$. Těžnice AT, BT jsou tedy navzájem kolmé.

Diskuse. Bod 2 z konstrukce je možno provést, právě když

$$r \geq \frac{1}{3}t. \quad (1)$$

Bod 4: společný bod C kružnic $c \equiv (S, t)$, $k \equiv (O, r)$ existuje tehdy a jen tehdy, platí-li

$$|r - t| \leq SO \leq r + t.$$

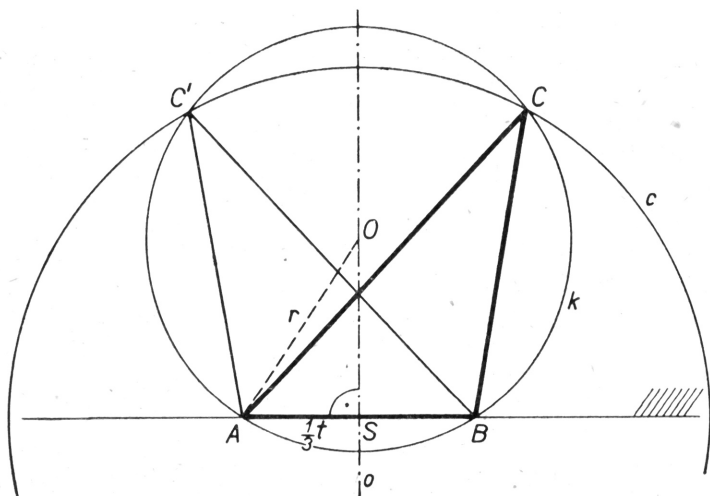
Dosadíme sem $SO = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{3}t\right)^2}$ (viz obr. 20); po úpravě dostaneme

$$r \geq \frac{5}{9}t. \quad (2)$$

Vztahy (1) a (2) platí současně právě tehdy, jestliže

$$r \geq \frac{5}{9} t.$$

Protože společný bod C kružnic c , k nikdy nepadne na přímku AB , možno provést bod 5.



Obr. 20

Podmínka řešitelnosti tedy je

$$\frac{r}{t} \geq \frac{5}{9}.$$

Snadno vyšetříme, že řešení jsou dvě (symetrická podle přímky o), pouze v případě $r = \frac{5}{9} t$ je řešení jen jedno (rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem C).

III. Súťažné úlohy I. kola

1. KATEGÓRIA A

1. Je daná úsečka AB . Množina bodov M je definovaná takto:

- a) obsahuje body A, B ;
- b) ak obsahuje X, Y , obsahuje aj bod Z úsečky XY , pre ktorý platí $YZ = 3 \cdot XZ$.

Dokážte, že každá úsečka ležiaca v úsečke AB obsahuje aspoň jeden bod množiny M .

RIEŠENIE. Z vlastností a) a b) je zrejmé, že množina M obsahuje všetky množiny $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ týchto vlastností:

M_0 obsahuje len body A, B .

M_1 obsahuje okrem bodov A, B také body C, D , pre ktoré platí: $AC = DB = \frac{1}{4} AB$, $CD = \frac{1}{2} AB$.

M_2 vytvoríme rovnakým spôsobom z úsečiek AC, DB, CD a patrí do nej desať bodov.

Z M_2 vytvoríme analogicky množinu M_3 , z nej M_4 , atď.

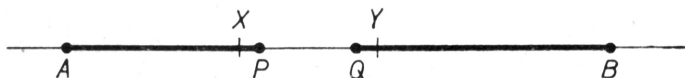
Dĺžka úsečky s koncovými bodmi z M_0 je AB . Najdlhšia z úsečiek s koncovými bodmi z M_1 , ktorá neobsahuje iné body z tejto množiny, má dĺžku $CD = \frac{1}{2} AB$. Najdlhšia z úsečiek s koncovými bodmi z M_2 , ktorá nemá iných bodov z M_2 , má dĺžku $\frac{1}{2} CD = \frac{1}{2^2} AB$. Matematickou indukciou ľahko dokážeme, že najdlhšia z úsečiek,

ktorá má s množinou $\mathbf{M}_n$ spoločné len koncové body, má dĺžku $\frac{1}{2^n} AB$.

Nech je teraz daná úsečka PQ s dĺžkou $d < 1$ ležiaca v úsečke AB . Predpokladajme, že PQ neobsahuje žiadny bod množiny $\mathbf{M}$. Zvoľme n tak, aby platilo

$$\frac{1}{2^n} \cdot AB < d. \quad (1)$$

Keďže PQ podľa predpokladu neobsahuje žiaden bod množiny $\mathbf{M}$, neobsahuje ani žiaden bod množiny $\mathbf{M}_n$, ktorá je časťou množiny $\mathbf{M}$. To znamená, že každý bod množiny $\mathbf{M}_n$ patrí buď úsečke AP alebo úsečke BQ (obr. 21).



Obr. 21

Nech je X bod množiny $\mathbf{M}_n$ najbližší k bodu P a ležiaci v úsečke AP , Y bod množiny $\mathbf{M}_n$ najbližší k bodu Q a ležiaci v úsečke BQ . Body X, Y sú teda dva susedné body množiny $\mathbf{M}_n$ a platí pre ne jednak

$$XY \leq \frac{1}{2^n} AB, \quad (2)$$

jednak

$$XY \geq d. \quad (3)$$

Z nerovností (2), (3) na základe tranzitívnosti relácie usporiadania dostaneme nerovnosť $d \leq \frac{1}{2^n} \cdot AB$, ktorá je však v spore s nerovnosťou (1).

Tým je tvrdenie dokázané.

2. Dokažte, že všechny nerovnosti

$$\sin x \leq \sin 2x \leq \sin 3x \leq \dots \quad (1)$$

platí jen pro čísla tvaru $x = k \cdot \pi$, kde k je celé číslo.

ŘEŠENÍ. a) Pro všechna $x = k\pi$, k celé, jsou všechny nerovnosti zřejmě splněny.

Nechť x je nyní číslo, které není tvaru $k\pi$, k celé, a necht' x vyhovuje všem nerovnostem (1). Potom platí podle (1) pro všechna přirozená n

$$\sin(n+2)x \geq \sin nx,$$

tj.

$$\sin(n+2)x - \sin nx \geq 0$$

neboli po úpravě podle vzorce pro rozdíl sinů

$$2 \sin x \cos(n+1)x \geq 0. \quad (2)$$

b) Dokážeme, že pro každé z , $0 < z < \pi$, existují celá čísla $m_1 \geq 2$, $m_2 \geq 2$ tak, že

$$\cos m_1 z > 0, \quad \cos m_2 z < 0. \quad (3)$$

$$\text{Intervaly } \left(\frac{3\pi}{2z}, \frac{5\pi}{2z}\right) \text{ a } \left(\frac{5\pi}{2z}, \frac{7\pi}{2z}\right)$$

mají oba délku $\frac{\pi}{z} > 1$ a každý z nich tedy obsahuje aspoň

jedno přirozené číslo: první z těchto čísel označíme m_1 ,

druhé m_2 . Protože je $\frac{\pi}{z} > 1$, je $\frac{3\pi}{2z} > \frac{3}{2}$, $\frac{5\pi}{2z} > \frac{5}{2}$,

tj. $m_1 \geq 2$, $m_2 \geq 2$. Je tedy

$$\frac{3}{2} \pi < m_1 z < \frac{5}{2} \pi,$$

$$\frac{5}{2} \pi < m_2 z < \frac{7}{2} \pi,$$

takže nerovnosti (3) jsou splněny.

c) Vraťme se k nerovnosti (2). Rozlišujeme dva případy:

A. Je $\sin x > 0$. Potom existuje číslo z , $0 < z < \pi$, tak, že $x = z + 2m\pi$, m celé. Nechť m_2 je celé číslo z nerovnosti (3), pro které je $\cos m_2 z < 0$. Potom je i $\cos m_2 x < 0$ a (2) neplatí pro přirozené $n = m_2 - 1$, což je spor.

B. Je $\sin x < 0$. Potom existuje číslo z , $0 < z < \pi$, tak, že $x = -z + 2m\pi$, m celé. Nechť m_1 je celé číslo z (3), pro které $\cos m_1 z > 0$. Potom je i $\cos m_1 x > 0$ a (2) neplatí pro přirozené $n = m_1 - 1$, což je opět spor.

Tím je dokázáno, že žádné číslo, které není tvaru $k\pi$, k celé, není řešením.

Uvedené řešení je řešení autorské a je dosti umělé, zejména v části b), kde se dokazují pomocné nerovnosti (3). Řešitelé žáci by jistě dovedli nalézt řešení myšlenkově jednodušší, i když třeba delší.

3. Vyšetřte množinu M všech bodů roviny komplexních čísel, jež jsou obrazy komplexních čísel z splňujících nerovnosti:

$$1 < \left| \frac{z}{|z|} + |z| \right| < a |z|, \quad (1)$$

kde a je kladné číslo. Zjistěte, pro která čísla a je množina M prázdná.

ŘEŠENÍ. Nerovnosti (1) uvedeme násobením kladným číslem $|z|$ (platí totiž $z \neq 0$) na tvar

$$|z| < |z + |z|^2| < a |z|^2. \quad (2)$$

Dosaďme $z = x + yi$ (x, y reálná); (2) nabude tvaru

$$\sqrt{x^2 + y^2} < |(x + x^2 + y^2) + yi| < a(x^2 + y^2),$$

neboli (po umocnění dvěma)

$$x^2 + y^2 < x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2) < a^2(x^2 + y^2)^2. \quad (3)$$

Levou nerovnost (3) dělíme kladným číslem $x^2 + y^2$ (platí totiž $z \neq 0$) a dostaneme

$$(x + 1)^2 + y^2 > 1. \quad (4)$$

Nerovnost (4) vyjadřuje vnějšek V_1 kružnice k_1 se středem $S_1 \equiv [-1, 0]$ a poloměrem $r_1 = 1$.

Také pravou nerovnost (4) dělíme kladným číslem $x^2 + y^2$; po úpravě vyjde

$$(1 - a^2)(x^2 + y^2) + 2x + 1 < 0. \quad (5)$$

Při vyšetřování nerovnosti (5) rozlišíme tři případy:

1. $a > 1$; 2. $a = 1$; 3. $a < 1$. Jestliže $a > 1$ nebo $a < 1$, vyjadřuje rovnice příslušná k nerovnosti (5) kružnici k_2 , která protíná osu x v bodech A, B (AB je průměr), jejichž souřadnice jsou kořeny rovnice

$$(1 - a^2)x^2 + 2x + 1 = 0, \quad (6)$$

$$\text{tj. } A \equiv \left[-\frac{1}{1+a}; 0 \right], \quad B \equiv \left[-\frac{1}{1-a}; 0 \right].$$

Nerovnost (5) pak vyjadřuje v případě 3 vnitřek V_2 kružnice k_2 a v případě 1 vnějšek V_2' kružnice k_2 .

Jestliže $a = 1$, vyjadřuje nerovnost (5) vnitřek P pol roviny s hranicí $x = -\frac{1}{2}$.

Vyšetřovaná množina je průnik $V_1 \cap V_2$ nebo $V_1 \cap V_2'$ nebo $V_1 \cap P$.

Zjistíme ještě, pro která a platí, že množina M je prázdná. To může nastat jen v případě 3 a to tehdy, padnou-li oba body A, B na průměr kružnice k_1 , omezený body $[-2; 0], [0, 0]$.

Jestliže $a < 1$, pak $1 + a > 1 - a > 0$, tj.

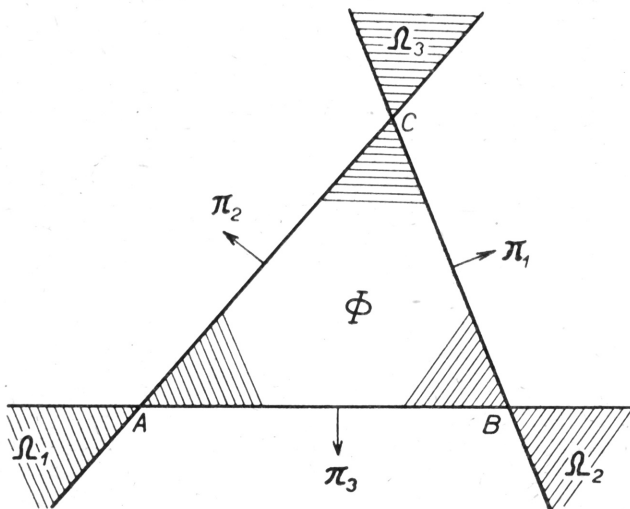
$$0 > -\frac{1}{1+a} > -\frac{1}{1-a}.$$

Stačí tedy vyšetřovat podmínku $-\frac{1}{1-a} \geq -2$.
 Z této nerovnosti plyne $a \leq \frac{1}{2}$ a naopak.

Výsledek. Vyšetřovaná množina $\mathbf{M}$ je prázdná právě tehdy, když platí $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

4. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Vyšetřte a popište množinu všech přímek x , které procházejí vrcholem D a mají tuto vlastnost: rovnoběžka s přímkou x vedená vhodným vrcholem čtyřstěnu $ABCD$ protne jeho protější stěnu v jejím vnitřním bodě.

ŘEŠENÍ. Obr. 22 znázorňuje situaci v rovině ABC .



Obr. 22

Přímky AB , BC , CA dělí rovinu ABC v sedm částí; jejich vnitřky jsou označeny podle obr. 22: Φ je vnitřek $\triangle ABC$, Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 jsou vnitřky úhlů vrcholových k úhlům trojúhelníka ABC , Π_1 , Π_2 , Π_3 jsou vnitřky zbývajících tří částí (např. Π_1 je průnik vnitřků polorovin ABC , ACB a vnitřku poloroviny opačné k BCA).

Množinu všech přímek DX , které mají požadovanou vlastnost, označme M . Do množiny M nenáleží žádná z přímek DX , kde X je bod některé z přímek AB , BC , CA , neboť tyto přímky jsou rovnoběžné s některou stěnou čtyřstěnu, a proto rovnoběžka se žádnou z nich vedená vrcholem čtyřstěnu neprotne protější stěnu v bodě jejího vnitřku.

Do M nenáleží z téhož důvodu žádná přímka procházející vrcholem D a rovnoběžná s rovinou ABC .

Do množiny M náleží však každá přímka DX , kde $X \in \Phi$. Zbývá zkoumat přímky DX , kde $X \in \Omega_i$ nebo $X \in \Pi_i$ ($i = 1, 2, 3$).

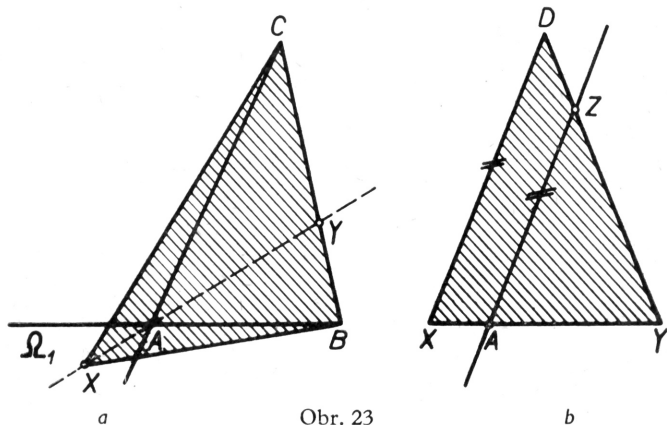
a) Budiž nejprve $X \in \Omega_1$. Pak bod A je bodem vnitřku $\triangle BCX$, neboť přímka AX protíná vnitřek úsečky BC v bodě Y (obr. 23a). Přímka DX obsahuje hranu DX tetraedru $BCXD$. Rovina DXA protne tetraeder $BCXD$ v trojúhelníku XYD (obr. 23b). Rovnoběžka s přímkou DX vedená bodem A protne stranu DY v bodě Z jejího vnitřku. Bod Z zřejmě náleží vnitřku stěny BCD a bod X náleží tedy množině M .

b) Budiž za druhé $X \in \Pi_1$. Pak lze snadno dokázat, že sjednocení trojúhelníků BCA , BCX je konvexní čtyřúhelník $ABXC$ (obr. 24a) a $ABXCD$ je tedy (konvexní) jehlan čtyřboký.

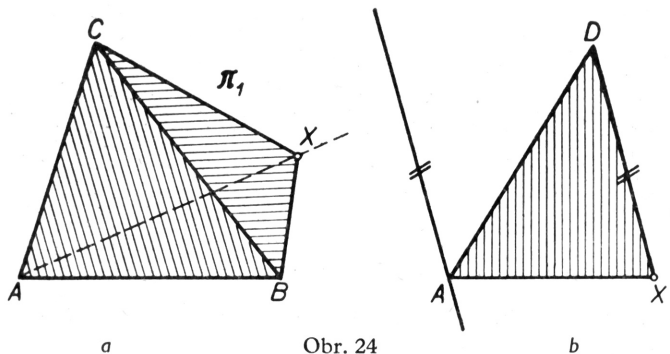
Každá z rovin DXA , DXB , DXC protne tento jehlan v trojúhelníku; na obr. 24b je trojúhelník DXA . Rovnoběžka s přímkou DX vedená bodem A je styčnou přímkou $\triangle DXA$ a nemá s ním mimo vrchol A žádný další spo-

lečný bod. Obdobně tomu je s přímkami, které jsou rovnoběžné s DX a procházejí vrcholy B, C .

Závěr odst. b): Přímka DX nenáleží množině M .



Obr. 23



Obr. 24

Shrnutí: Množina M se skládá ze všech přímek DX , kde X náleží sjednocení oblastí Φ , Ω_1 , Ω_2 a Ω_3 .

2. KATEGORIE B

1. Pěticiferné číslo N , jehož zápis v desítkové soustavě obsahuje jednu nulu a končí číslicí 1, dává při dělení číslem 43 trojciferný podíl a třikrát za sebou se při algoritmu dělení opakuje týž zbytek. Určete N .

ŘEŠENÍ. Budiž

$N = 10\,000x + 1\,000y + 100z + 10t + 1$; (1)
zápis čísla N v dekadické soustavě je

$$N = xyz t 1.$$

Protože podíl je trojciferný, začínáme při algoritmu dělit od prvního trojčíslí; je tedy

$$100x + 10y + z = 43a + r, \quad (2)$$

kde $1 \leq a \leq 9$ (a celé) a $0 \leq r \leq 42$ (r celé).

Pokračujeme-li v algoritmu dělení, dostaneme podle textu úlohy

$$10r + t = 43b + r, \quad (3)$$

kde $0 \leq b \leq 9$ (b celé). Při třetím kroku vyjde

$$10r + 1 = 43c + r, \quad (4)$$

kde platí opět $0 \leq c \leq 9$. Odečtením rovnic (3), (4) dostaneme

$$t - 1 = 43(b - c)$$

a odtud plyne (levá strana je násobek čísla 43)

$$t = 1, \quad b = c. \quad (5)$$

Vypišme násobky čísla 43:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$43b$	43	86	129	172	215	258	301	344	387	0
$43b-1$	42	85	128	171	214	257	300	343	386	-1

Podle rovností (3) a (5) je číslo $43b - 1$ násobkem devíti, neboť

$$43b - 1 = 9r. \quad (3')$$

Ježto $0 \leq b \leq 9$, vyhledáváme v třetím řádku tabulky násobky devíti; je to jediné číslo $171 = 43 \cdot 4 - 1$. Platí tedy podle (3')

$$b = 4, \quad r = 19. \quad (6)$$

Vypočteme nyní $43a + 19 = 100x + 10y + z$ pro $a = 1, 2, \dots, 9$; dostaneme tabulku

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$43a$	43	86	129	172	215	258	301	344	387
$43a + 19$	62	105	148	191	234	277	320	363	406

Čísla v třetím řádku (počínaje číslem 105, neboť N je pěti-ciferné) určují cifry x, y, z . Podmínky o nule vyhovují tři čísla 105, 320, 406. Úloha má tedy tři řešení

$$N_1 = 10\,511, \quad N_2 = 32\,011, \quad N_3 = 40\,611.$$

O správnosti se přesvědčíme zkouškou.

2. Ak sú α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov ľubovoľného trojuholníka ABC , potom platí

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8};$$

dokážte.

RIEŠENIE. Pre tupouhlý alebo pravouhlý trojuholník platí zrejme ostrá nerovnosť v danom vzťahu, pretože súčin na ľavej strane je buď záporný alebo nula.

Uvažujme preto ďalej len o ostrouhlom trojuholníku.

Môžeme predpokladať, že je

$$0^\circ < \gamma \leq \beta \leq \alpha < 90^\circ. \quad (1)$$

V tomto prípade sú všetky čísla $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ kladné a menšie než jedna. Špeciálne máme

$$0 < \cos \gamma < 1.$$

Vieme, že pre ľubovoľné α , β platí

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)].$$

Ak sú α , β , γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka (t. j. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$), platí $\cos (\alpha + \beta) = -\cos \gamma$. Teda v trojuholníku platí

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos \gamma]. \quad (2)$$

Zo vzťahu (1) ľahko usúdime, že platí $0^\circ \leq \alpha - \beta < 90^\circ$, teda $0 < \cos (\alpha - \beta) \leq 1$. Z (2) potom vyplýva

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \leq \frac{1}{2} (1 - \cos \gamma).$$

Pretože $\cos \gamma > 0$, dostaneme stadiaľ $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq$

$$\leq \frac{1}{2} (\cos \gamma - \cos^2 \gamma) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} - \left(\cos \gamma - \frac{1}{2} \right)^2 \right].$$

Platí teda

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \left(\cos \gamma - \frac{1}{2} \right)^2$$

a teda tým skôr

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8}.$$

Tým je daná nerovnosť dokázaná aj pre ostrouhlý trojuholník.

Rovnosť môže nastať len pre nejaký ostrouhlý troj-

uholník, a to taký, pre ktorý podľa vzťahu (3) musí byť $\frac{1}{2} \left(\cos \gamma - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$, t. j. $\cos \gamma = \frac{1}{2}$ čiže $\gamma = 60^\circ$. Podľa vzťahu (1) však potom v tomto trojuholníku musí byť $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. Rovnosť nastane teda len pre rovnostranný trojuholník. Tým je úloha vyriešená.

3. Trojuholník ABC má tu vlastnosť, že kružnice prechádzajúce stredy jeho stran se dotýkajú kružnice opsané.

Dokažte, že bod dotyku je jedným vrcholom trojuholníka ABC a že vnútorný úhel pri tomto vrchole je pravý.

ŘEŠENÍ. Stejnolehlost, která má střed v těžišti T trojuholníku ABC a koeficient $-\frac{1}{2}$, převede vrcholy trojuholníka ve stredy protějších stran; proto převede výšky trojuholníku (přímky) v osy stran s nimi rovnoběžné, průsečík výšek V ve střed S kružnice k opsané trojuholníku ABC . Mimoto převede ovšem střed S kružnice k ve střed S' kružnice k' , která prochází středy všech tří stran trojuholníku ABC .

Dokážeme, že $S \neq T$. Kdyby totiž platilo $S \equiv T$, pak by platilo $S \equiv T \equiv V$, splynuly by osy stran a výšky, trojuholník ABC by byl rovnostranný, kružnice k' by byla kružnicí jemu vepsanou a kružnice k, k' by neměly dotyk.

Protože $S \neq T$, pak $V \neq T$, $V \neq S$ a také $S' \neq T$, $S' \neq S$. Bod T odděluje jak body V, S , tak body S', S a platí

$$TS = \frac{1}{2} VT, \quad TS = \frac{1}{3} VS, \quad TS' = \frac{1}{2} TS = \frac{1}{6} VS,$$

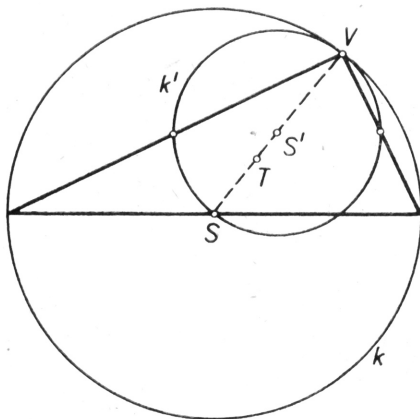
tj.

$$SS' = TS + TS' = \frac{1}{3} VS + \frac{1}{6} VS = \frac{1}{2} VS. \quad (1)$$

Je-li r poloměr kružnice k , je poloměr kružnice k' roven $\frac{1}{2}r$. Protože dotyk kružnic k, k' je zřejmě vnitřní, prochází kružnice k' bodem S , tj. podle (1) $\frac{1}{2}r = SS' = \frac{1}{2}VS$, neboli

$$r = VS.$$

Opsaná kružnice k prochází tedy průsečíkem výšek V . Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu $V \equiv C$. Bodem V zřejmě prochází také kružnice k' ; bod V je tedy bodem dotyku obou kružnic k, k' (viz obr. 25).



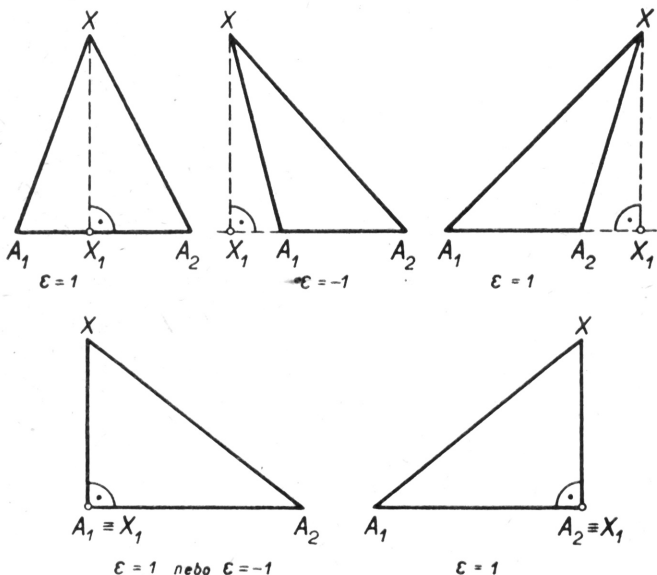
Obr. 25

4. V prostoru jsou dány čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4 , které neleží v rovině. Je-li X libovolný bod prostoru, označme X_1 patu kolmice spuštěné z X na přímku A_1A_2 , X_2 patu kolmice z X na A_2A_3 , X_3 patu kolmice z X na A_3A_4 , X_4 patu kolmice z X na A_4A_1 .

Dokažte, že mezi všemi body X prostoru má střed kulové plochy procházející body A_1, A_2, A_3, A_4 tu vlastnost, že součet

$(A_1X_1)^2 + (A_2X_2)^2 + (A_3X_3)^2 + (A_4X_4)^2$
je minimální.

ŘEŠENÍ. Dokažme nejprve *větu*: Je-li X_1 pata kolmice z X na A_1A_2 , platí (viz obr. 26 a, b, c, d, e).



Obr. 26

$$\begin{aligned} (X_1A_1)^2 &= \frac{1}{4}(A_1A_2)^2 + \frac{1}{2}[(A_1X)^2 - (A_2X)^2] + \\ &+ \frac{1}{4(A_1A_2)^2}[(A_1X)^2 - (A_2X)^2]^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Důkaz. Podle obr. 26 a, b, c, d, e platí totiž (i když $X \equiv X_1$)

$$(A_1 X_1)^2 = (A_1 X)^2 - (X X_1)^2,$$

$$(A_2 X_1)^2 = (A_2 X)^2 - (X X_1)^2.$$

Vhodnými úpravami eliminujeme XX_1 , $A_1 X_1$ a $A_2 X_1$; nejprve dostaneme

$$(A_1 X_1)^2 - (A_2 X_1)^2 = (A_1 X)^2 - (A_2 X)^2.$$

Dále je pro $\varepsilon = 1$ anebo -1

$$A_2 X_1 = |A_1 A_2 - \varepsilon A_1 X_1|, \text{ tj.}$$

$$(A_2 X_1)^2 = (A_1 A_2 - \varepsilon A_1 X_1)^2, \text{ takže}$$

$$(A_1 X_1)^2 - (A_1 A_2 - \varepsilon A_1 X_1)^2 = (A_1 X)^2 - (A_2 X)^2,$$

$$2 \varepsilon A_1 A_2 \cdot A_1 X_1 - (A_1 A_2)^2 = (A_1 X)^2 - (A_2 X)^2.$$

Odtud ($A_1 \neq A_2$)

$$(A_1 X_1)^2 = \frac{1}{4(A_1 A_2)^2} [(A_1 X)^2 - (A_2 X)^2 + (A_1 A_2)^2]^2,$$

$$(A_1 X_1)^2 = \frac{1}{4(A_1 A_2)^2} \{ (A_1 A_2)^4 + 2(A_1 A_2)^2 [(A_1 X)^2 - (A_2 X)^2] + [(A_1 X)^2 - (A_2 X)^2]^2 \}$$

neboli po roznásobení dostaneme vztah (1).

Obdobně platí

$$(X_2 A_2)^2 = \frac{1}{4} (A_2 A_3)^2 + \frac{1}{2} [(A_2 X)^2 - (A_3 X)^2] + \\ + \frac{1}{4(A_2 A_3)^2} [(A_2 X)^2 - (A_3 X)^2]^2,$$

.....

$$(X_4 A_4)^2 = \frac{1}{4} (A_4 A_1)^2 + \frac{1}{2} [(A_4 X)^2 - (A_1 X)^2] + \\ + \frac{1}{4(A_4 A_1)^2} [(A_4 X)^2 - (A_1 X)^2]^2.$$

Sečteme-li tyto rovnosti, dostaneme rovnost, kterou označíme (2):

$$\begin{aligned} (X_1A_1)^2 + (X_2A_2)^2 + (X_3A_3)^2 + (X_4A_4)^2 = \\ = \frac{1}{4} [(A_1A_2)^2 + (A_2A_3)^2 + (A_3A_4)^2 + (A_4A_1)^2] + \\ + \frac{1}{4(A_1A_2)^2} [(A_1X)^2 - (A_2X)^2]^2 + \frac{1}{4(A_2A_3)^2} [(A_2X)^2 - \\ - (A_3X)^2]^2 + \frac{1}{4(A_3A_4)^2} [(A_3X)^2 - (A_4X)^2]^2 + \\ + \frac{1}{4(A_4A_1)^2} [(A_4X)^2 - (A_1X)^2]^2. \end{aligned}$$

Odtud ihned plyne, že je-li X střed kulové plochy obsahující všechny čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4 , je $A_1X = A_2X = A_3X = A_4X$, tj. uvedený součet je roven prvnímu členu na pravé straně (2); pro každý jiný bod je součet vpravo větší.

3. KATEGÓRIA C

1. Vyšetrite a načrtnite množinu všetkých bodov v rovine, ktorých pravouhlé súradnice vyhovujú nerovnosti

$$\frac{(x^5 - 13x^3 + 36x)(x^4 - 17x^2 + 16)}{(y^5 - 13y^3 + 36y)(y^4 - 17y^2 + 16)} \geq 0.$$

RIEŠENIE. Hľadanú množinu označme písmenom M . Čitateľa zlomku upravíme na tvar

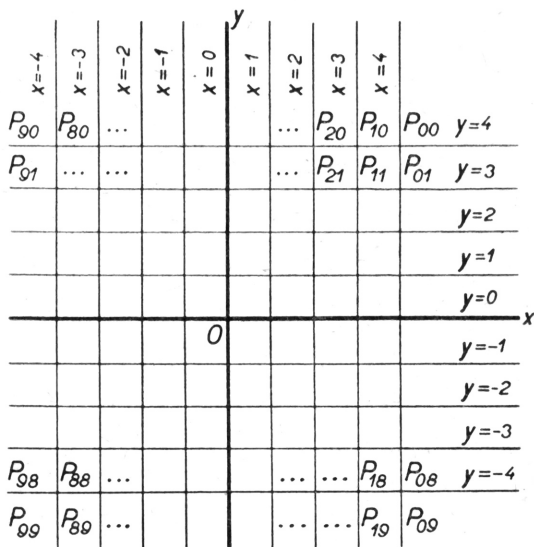
$$\begin{aligned} x(x^2 - 4)(x^2 - 9)(x^2 - 1)(x^2 - 16) = \\ = (x + 4)(x + 3)(x + 2)(x + 1)x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4). \end{aligned}$$

Dosadením y namiesto x dostaneme tvar menovateľa. Daná nerovnosť je teda ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{f(x)}{f(y)} \geq 0, \quad (1)$$

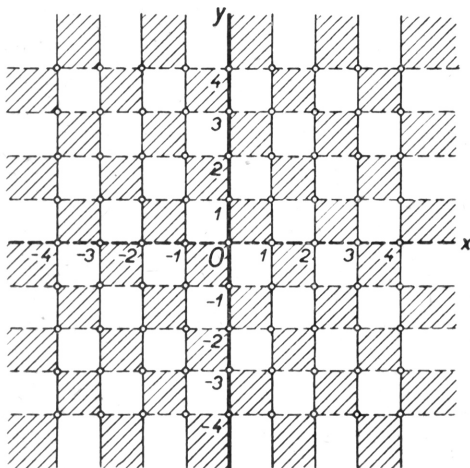
kde $f(x) = (x + 4)(x + 3)(x + 2)(x + 1)x(x - 1) \cdot (x - 2)(x - 3)(x - 4)$. Body priamok $y = q$ ($q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$) do množiny **M** zrejme nepatria, ale body priamok $x = p$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$) okrem bodov prv vylúčených do **M** patria, ako to vyplýva priamo z tvaru (1).

Spomínané priamky rozdelia rovinu na 100 obrazcov (ohraničených i neohraničených), ktorých vnútra nazveme oblasťami a označíme ich P_{ab} ($a, b = 0, 1, 2, \dots, 9$) podľa schémy na obr. 27. Vezmime ľubovoľný bod $[x, y] \in P_{ab}$. Potom a je zrejme počet čísel n z množiny $\mathbf{N} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, pre ktoré $x - n < 0$ a b je počet čísel m z množiny $\mathbf{N}$, pre ktoré $y - m < 0$. Ak je



Obr. 27

$a + b$ párne číslo, je zrejmé $\frac{f(x)}{f(y)} > 0$ a ak $a + b$ je nepárne číslo, je $\frac{f(x)}{f(y)} < 0$. Z toho vyplýva, že M je množina bodov $[x, y]$, ktoré sú na obr. 28 vyznačené vyšrafovaním, pričom body vodorovných hraničných čiar do M nepatria a body zvislých hraničných priamok okrem priesečníkov s vodorovnými hraničnými priamkami do M patria.



Obr. 28

2. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojuholník ABC , jehož základna má stred D a dĺžku 2.

a) Dokažte, že pro každý bod M výšky CD platí

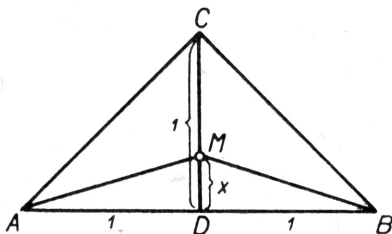
$$AM + BM + CM \geq 1 + \sqrt{3}. \quad (1)$$

b) Sestrojte ten bod M výšky CD , pro který je součet $AM + BM + CM$ nejmenší.

ŘEŠENÍ.

a) Označme $DM = x$; pak $CM = 1 - x$ a dále (viz obr. 29)

$$AM + BM + CM = 2\sqrt{1 + x^2} + 1 - x. \quad (1')$$



Obr. 29

Vzhledem k (1') stačí dokázat, že platí

$$2\sqrt{1 + x^2} + 1 - x \geq 1 + \sqrt{3} \quad (2)$$

pro všechna čísla x , pro něž platí $0 \leq x \leq 1$. Z (2) plyne

$$2\sqrt{1 + x^2} \geq \sqrt{3} + x \quad (2a)$$

a po umocnění

$$4(1 + x^2) \geq 3 + 2x\sqrt{3} + x^2, \quad (2b)$$

neboli

$$3x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 \geq 0, \quad (2c)$$

neboli

$$3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \geq 0. \quad (3)$$

Nerovnost (3) platí pro každé x . Z ní plyne obráceně (2c), z (2c) plyne (2b), z (2b) plyne (2a) — neboť na obou stranách (2a) jsou kladná čísla. Z nerovnosti (2a) plyne (2) a vzhledem k (1') je tím dokázána nerovnost (1).

b) Jako nejmenší hodnota pro $AM + BM + CM$ při-

cháží podle (1) v úvahu číslo $1 + \sqrt{3}$. Nastane-li tento případ, pak v (3) platí vztah rovnosti, tj.

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (4)$$

V případě, že platí (4), je $AM = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 2DM$. Je tedy $\sphericalangle MAD = 30^\circ$. Odtud plyne konstrukce bodu M .

3. Určete délky stran všech pravoúhlých trojúhelníků, které mají tyto vlastnosti:

- délky stran v centimetrech jsou celá čísla;
- obvod trojúhelníku v cm je roven obsahu trojúhelníku v cm^2 .

ŘEŠENÍ. Označme délky odvěsen hledaného pravoúhlého trojúhelníku v centimetrech a, b a délku jeho přepony v centimetrech c . Podle textu úlohy (podmínka b)

$$\frac{1}{2} ab = a + b + c,$$

tj.

$$c = \frac{1}{2} ab - a - b. \quad (1)$$

Rovnost (1) umocníme dvěma a dosadíme podle Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$; po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{4} a^2 b^2 + 2ab - a^2 b - ab^2 = 0,$$

tj.

$$ab(ab - 4a - 4b + 8) = 0.$$

Protože $a > 0, b > 0$, dostaneme po dělení součinem ab

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0,$$

tj.

$$(a - 4)(b - 4) = 8. \quad (2)$$

Každé z čísel $a - 4$, $b - 4$ je podle (2) dělitelem čísla 8. Sestavíme tabulku:

$a - 4$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$b - 4$	8	4	2	1	-8	-4	-2	-1
a	5	6	8	12	3	2	0	-4
b	12	8	6	5	-4	0	2	3
c	13	10	10	13	—	—	—	—

Úloha má tedy v podstatě dvě řešení 5 cm, 12 cm, 13 cm, a 6 cm, 8 cm, 10 cm.

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že oba tyto trojúhelníky úloze vyhovují.

JINÉ ŘEŠENÍ. Úlohu lze také řešit *pomocí věty*: Jestliže a , b jsou délky odvěsen a c délka přepony pravoúhlého trojúhelníku, přičemž a , b , c jsou celá čísla, potom existují taková přirozená čísla k , m , n , $m > n$, že platí

$$a = k(m^2 - n^2), \quad b = 2kmn, \quad c = k(m^2 + n^2).$$

Zřejmě platí i věta obrácená.

Podle podmínky b) v textu úlohy

$$\frac{1}{2} ab = a + b + c.$$

Po dosazení dostáváme

$$k^2 mn(m^2 - n^2) = 2km(m + n).$$

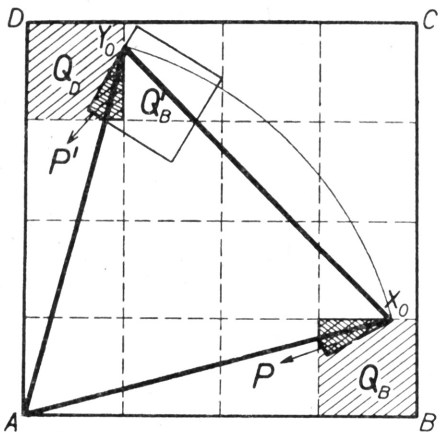
Čísla $m, k, m + n$ nemohou být rovna nule, a proto

$$kn(m - n) = 2.$$

Čísla $k, n, m - n$ jsou přirozená, takže z poslední rovnice plynou tyto tři možnosti:

- a) $k = 1, n = 1, m - n = 2$, tj. $a = 8, b = 6, c = 10$;
- b) $k = 1, n = 2, m - n = 1$, tj. $a = 5, b = 12, c = 13$;
- c) $k = 2, n = 1, m - n = 1$, tj. $a = 6, b = 8, c = 10$.

Řešením úlohy jsou tedy trojúhelníky o stranách 5 cm, 12 cm, 13 cm a 6 cm, 8 cm, 10 cm.



Obr. 30

4. Je daný štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 8 cm, ktorý je rozdelený na spôsob šachovnice na 16 zhodných polí. Zostrojte rovnostranný trojuholník AXY tak, aby vrchol X ležal v rohovom poli pri vrchole B , vrchol Y v rohovom poli pri vrchole D a aby dĺžka jeho strán $AX = XY = YA$ bola čo najväčšia.

RIEŠENIE (obr. 30). Nech je trojuholník AXY taký

rovnostranný trojuholník, ktorého vrchol X leží v rohovom poli pri vrchole B a vrchol Y v rohovom poli pri vrchole D . Otočenie $\mathcal{O}$ okolo stredu A o 60° v kladnom zmysle prevedie bod X do bodu Y . Otočenie $\mathcal{O}$ prevedie rohový štvorec Q_B (pozri obr. 30) do rohového štvorca Q'_B . Bod Y patrí do prieniku P' štvorca Q'_B a rohového štvorca Q_D .

Prienik P' je konvexný štvoruholník (na obr. 30 husto vyšrafovaný), ktorého každý bod Y dáva jeden rovnostranný trojuholník AXY . Príslušný vrchol X trojuholníka AXY vznikne otočením bodu Y okolo bodu A o 60° v zápornom zmysle a leží teda v konvexnom štvoruholníku P , ktorý vznikne otočením P' okolo A o 60° v zápornom zmysle.

Riešenie úlohy dostaneme, ak za vrchol Y zvolíme ten bod štvoruholníka P' , pre ktorý je vzdialenosť AY maximálna. Je to zrejme jeho vrchol Y_0 (pozri obr. 30).

4. KATEGORIE D

1. Mirek dostal za domácí cvičení známou úlohu o nádržce a čtyřech kohoutech, ale marně se snažil ji rozřešit. Úloha zněla:

Prvním a druhým kohoutem nateče dohromady za hodinu p hektolitrů vody; druhým a třetím nateče za hodinu o 30 hl více. Třetím a čtvrtým nateče za hodinu dvakrát více než druhým a třetím dohromady. Prvním a čtvrtým kohoutem nateče za hodinu o 20 hl více než prvním a druhým.

Kolik hl nateče za hodinu každým kohoutem zvlášť? Vyložte, proč Mirek nenašel řešení úlohy.

ŘEŠENÍ. Označíme x, y, z, t počet hektolitrů, který nateče za hodinu po řadě prvním, druhým, třetím a čtvrtým kohoutem; dále označíme p počet hektolitrů, který

nateče za hodinu prvním a druhým kohoutem dohromady. Dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + y &= p, \\y + z &= p + 30, \\z + t &= 2(p + 30), \\t + x &= p + 20.\end{aligned}\tag{1}$$

Z prvních dvou rovnic vyloučíme y odečtením; vyjde

$$x - z = -30.\tag{2}$$

Z třetí rovnice (1) a rovnice (2) vyplývá

$$x + t = -30 + 2(p + 30),$$

neboli

$$x + t = 2p + 30.\tag{3}$$

Čísla x a t musí splňovat jak rovnici (3), tak i čtvrtou rovnici (1); to je možné jen tak, že platí

$$2p + 30 = p + 20.$$

Odtud plyne $p = -10$, což je nemožné podle významu čísla p (nemůže být $p < 0$).

INÉ RIEŠENIE (bez použitia sústavy rovníc). Podľa textu úlohy platí:

- (1) 1. a 2. kohútikom spolu natečie za 1 hodinu p hektolitrov vody,
- (2) 2. a 3. kohútikom spolu natečie za 1 hodinu $p + 30$ hektolitrov vody,
- (3) 3. a 4. kohútikom spolu natečie za 1 hodinu $2(p + 30)$ hektolitrov vody,
- (4) 1. a 4. kohútikom spolu natečie za 1 hodinu $p + 20$ hektolitrov vody.

Všetkými štyrmi kohútikmi spolu natečie za 1 hodinu

- (a) vzhľadom na podmienky (1) a (3) $p + 2(p + 30)$ hektolitrov vody,
- (b) vzhľadom na podmienky (2) a (4) $(p + 30) + (p + 20)$ hektolitrov vody.

Ak má úloha riešenie, potom musí teda platiť

$$p + 2(p + 30) = (p + 30) + (p + 20) \text{ čiže} \\ 3p + 60 = 2p + 50,$$

skadiaľ vyplýva

$$p = -10.$$

Úlohe však môže vyhovovať len $p > 0$. Úloha teda nemá riešenie.

2. Určete čísla a, b tak, aby pro každé libovolně zvolené číslo x platilo

$$\frac{a-b}{a+b} [a(x-a) + b(x-b)] = \frac{x - 2ab(b-a)}{a+b} - \frac{2}{b-a}. \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. Zlomky v rovnosti (1) mají smysl, jestliže

$$a + b \neq 0, \quad (2a)$$

$$a - b \neq 0. \quad (2b)$$

Obě strany rovnosti (1) vynásobíme výrazem $(a+b)(a-b)$. Dostáváme

$$(a-b)^2 \cdot [a(x-a) + b(x-b)] = x(a-b) + \\ + 2ab(a-b)^2 + 2(a+b).$$

Po další úpravě

$$(a-b)^2 \cdot [(a+b) \cdot x - (a+b)^2] = x(a-b) + 2(a+b).$$

Výrazy s x převedeme na levou stranu, ostatní na pravou stranu rovnosti

$$x \cdot (a-b) \cdot [(a+b)(a-b) - 1] = \\ = (a+b) \cdot [(a-b)^2 \cdot (a+b) + 2]. \quad (3)$$

Rovnost (3) bude splněna pro každé x právě tehdy, když

bude zároveň platit

$$(a + b) \cdot [(a + b)(a - b) - 1] = 0, \quad (4)$$

$$(a + b) \cdot [(a - b)^2 \cdot (a + b) + 2] = 0. \quad (5)$$

Uvážíme-li platnost vztahů (2a) a (2b), plyne ze (4) a (5)

$$(a + b) \cdot (a - b) = 1, \quad (4a)$$

$$(a - b)^2 \cdot (a + b) = -2. \quad (5a)$$

Dosadíme-li (4a) do (5a), máme

$$a - b = -2, \quad (6)$$

což zase dosadíme do (4a) a dostáváme

$$a + b = -\frac{1}{2}. \quad (7)$$

Řešením soustavy rovnic (6) a (7) nalezneme

$$a = -\frac{5}{4}, \quad b = \frac{3}{4}.$$

Zkouška:

$$L = \frac{-8}{\frac{4}{-2}} \cdot \left[-\frac{5}{4} \left(x + \frac{5}{4} \right) + \frac{3}{4} \left(x - \frac{3}{4} \right) \right] =$$

$$= 4 \cdot \left[-\frac{5}{4}x - \frac{25}{16} + \frac{3}{4}x - \frac{9}{16} \right] = -2x - \frac{17}{2},$$

$$P = \frac{x + 2 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{8}{4}}{-\frac{2}{4}} - \frac{2}{\frac{8}{4}} = -2 \cdot \left(x + \frac{15}{4} \right) - 1 =$$

$$= -2x - \frac{17}{2},$$

tedy $L = P$ pro každé x .

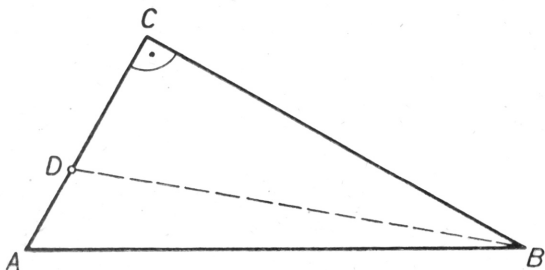
3. Trojuholník ABC je pravouhlý s preponou AB , D je bod vo vnútri odvesny AC .

a) Ak platí $BD^2 = AD \cdot CD$, potom platí $AD^2 = AB^2 - 3BD^2$. Dokážte.

b) Zistite, či možno vetu a) obrátiť.

RIEŠENIE. a) Nech bod D je vnútorným bodom odvesny AC pravouhlého trojuholníka ABC s preponou AB (obr. 31) a nech platí

$$BD^2 = AD \cdot CD. \quad (1)$$



Obr. 31

Podľa Pythagorovej vety pre trojuholník ABC platí

$$AB^2 = (AD + CD)^2 + BC^2. \quad (2)$$

Podobne pre trojuholník BCD platí

$$BD^2 = CD^2 + BC^2. \quad (3)$$

Ak upravíme vzťah (2), dostaneme $AB^2 = AD^2 + 2AD \cdot CD + (CD^2 + BC^2)$. Ak dosadíme do poslednej rovnosti za $AD \cdot CD$ podľa vzťahu (1) a za $(CD^2 + BC^2)$ podľa vzťahu (3), dostaneme $AB^2 = AD^2 + 2BD^2 + BD^2$, skadiaľ už vyplýva $AD^2 = AB^2 - 3BD^2$. Tým je veta a) dokázaná.

b) Nech D je taký vnútorný bod odvesny AC pravouhlého trojuholníka ABC s preponou AB , že preň platí $AD^2 = AB^2 - 3BD^2$ čiže $3BD^2 = AB^2 - AD^2$.

Z poslednej rovnosti po dosadení za AB^2 zo vzťahu (2) vyplýva

$$3BD^2 = (AD + CD)^2 + BC^2 - AD^2,$$

skadiaľ po úprave

$$3BD^2 = 2AD \cdot CD + (CD^2 + BC^2)$$

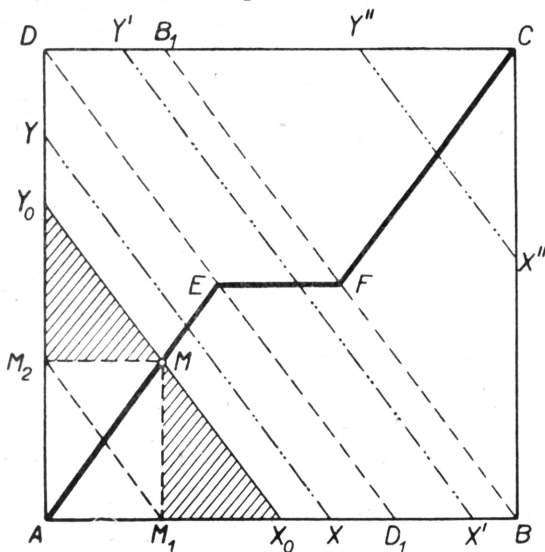
a vzhľadom na vzťah (3) z poslednej rovnosti dostaneme

$$BD^2 = AD \cdot CD.$$

Vetu a) je teda možno obrátiť.

4. Je dán čtverec, jehož strana má délku 6 cm. Bod M má od dvou sousedních stran čtverce vzdálenosti 15 mm a 20 mm.

Sestrojte lomenou čáru procházející bodem M , která se



Obr. 32

skládá ze středů všech úseček XY navzájem rovnoběžných, jejichž krajní body leží na obvodu daného čtverce. Vypočtete její délku.

ŘEŠENÍ. Sestrojme čtverec $ABCD$ o straně 6 cm. Necht' bod M má vzdálenost 20 mm od strany AB a 15 mm od strany AD (viz obr. 32).

Bod M sám musí být středem jedné takové úsečky XY , o nichž mluví text úlohy, a proto bod M musí být vnitřním bodem čtverce $ABCD$.

Nejdříve budeme řešit *dílčí úlohu*:

Na obvodu čtverce $ABCD$ sestrojte body X_0, Y_0 tak, aby bod M byl středem úsečky X_0Y_0 .

Jsou-li X_0, Y_0 takové body, potom

- neleží na téže straně čtverce $ABCD$, neboť bod M je vnitřním bodem čtverce $ABCD$;
- neleží na rovnoběžných stranách čtverce $ABCD$, neboť bod M neleží ani na jedné ze středních příček čtverce $ABCD$;
- neleží na stranách AB a BC , BC a CD , neboť M je vnějším bodem trojúhelníku ABC a trojúhelníku BCD .

Zbývají tedy dvě možnosti: X_0 a Y_0 leží po řadě na stranách AB a AD nebo AD a DC .

Uvažujme případ, že X_0 je bodem strany AB a Y_0 je bodem strany AD . Označme M_1 patu kolmice spuštěné z bodu M na AB a M_2 patu kolmice spuštěné z bodu M na AD . Potom zřejmě X_0 je bodem úsečky M_1B a Y_0 je bodem úsečky M_2D . Platí

$$\triangle M_1X_0M \cong \triangle M_2MY_0, \quad (1)$$

neboť oba trojúhelníky jsou pravoúhlé, $\sphericalangle M_1X_0M = \sphericalangle M_2MY_0$ a $X_0M = MY_0$. Tudíž platí

$$M_1X_0 = 15 \text{ mm}, M_2Y_0 = 20 \text{ mm}. \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že strana čtverce $ABCD$ má délku

6 cm, body X_0, Y_0 splňující podmínky (2) leží uvnitř úseček M_1B a M_2D , tj. na obvodu čtverce $ABCD$.

Jsou-li X_0 a Y_0 body ležící po řadě na úsečkách M_1B, M_2D , přičemž splňují podmínky (2), pak platí (1) a tudíž M je středem úsečky X_0Y_0 .

Uvažujeme-li možnost, že X_0, Y_0 leží po řadě na stranách AD, DC , potom stejnou úvahou, jaká byla právě užita pro strany AB a AD se zjistí, že takové body X_0 a Y_0 na obvodu čtverce $ABCD$ neexistují.

Řešením dílčí úlohy máme určen směr úseček XY .

Vedme rovnoběžky s úsečkou X_0Y_0 vrcholy D a B . Označme body D_1 a B_1 dle obrázku. Necht' E je střed úsečky DD_1 a F je střed úsečky BB_1 . Hledaná lomená čára je $AEFC$, neboť

1. AE je těžnice $\triangle AD_1D$, tj. je množinou středů všech úseček $XY \parallel D_1D$, jejichž krajní body leží na straně AD_1 a na straně AD (dokáže se z podobnosti $\triangle AD_1D \sim \triangle AXY$);
2. EF je střední příčka rovnoběžníku D_1BB_1D , a je tedy množinou středů všech úseček $XY \parallel DD_1$, jejichž krajní body leží na stranách D_1B a DB_1 ;
3. FC je těžnice $\triangle BCB_1$ a je tedy množinou středů všech úseček $XY \parallel BB_1$, jejichž krajní body leží na stranách BC a B_1C .

Zbývá určit délku lomené čáry $AEFC$. Bod F leží na střední příčce čtverce $ABCD$, a proto $FC = FB$. Čtyřúhelník D_1BFE je rovnoběžník, tj. $FC = FB = ED_1$. Trojúhelník AD_1D je pravoúhlý, E je střed jeho přepony, a proto $DE = AE$. Z předchozích úvah plyne, že

$$AE + FC = DD_1.$$

Délku úsečky DD_1 určíme pomocí podobnosti $\triangle M_1X_0M \sim \triangle AD_1D$.

Platí

$$DD_1 = MX_0 \cdot \frac{DA}{MM_1} = 3 \cdot MX_0.$$

Užijeme-li Pythagorovy věty pro $\triangle M_1X_0M$, dostáváme, že $MX_0 = 2,5$ cm, tj.

$$DD_1 = AE + FC = 7,5 \text{ cm.}$$

Čtyřúhelník D_1BFE je rovnoběžník, tj.

$$EF = D_1B;$$

dále platí

$$D_1B = AB - AD_1.$$

Z podobnosti trojúhelníků M_1X_0M a AD_1D plyne, že

$$AD_1 = 1,5 \cdot \frac{6}{2} \text{ cm} = 4,5 \text{ cm,}$$

tj.

$$EF = 1,5 \text{ cm.}$$

Délka lomené čáry $AEFC$ je $(7,5 + 1,5) \text{ cm} = 9 \text{ cm}$.

IV. Soutěžní úlohy II. kola

1. KATEGORIE A

1. Jsou dána kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$). Najděte všechna reálná řešení soustavy

$$x_1x_2 = a_1, x_2x_3 = a_2, \dots, x_{n-1}x_n = a_{n-1}, x_nx_1 = a_n. \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. Je-li $x_1, x_2, \dots, x_n$ řešení soustavy (1), jsou všechna čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ různá od nuly. Rozřešme soustavu (1) pro $n = 2$ a $n = 3$.

Pro $n = 2$ dostaneme soustavu $x_1x_2 = a_1, x_2x_1 = a_2$. Tato soustava je řešitelná právě tehdy, když je

$$a_1 = a_2; \quad (2)$$

pak má soustava (1) nekonečně mnoho řešení.

Pro $n = 3$ dostaneme soustavu $x_1x_2 = a_1, x_2x_3 = a_2, x_3x_1 = a_3$. Z ní vyjde $x_1^2 = \frac{a_1a_3}{a_2}$. Protože je $\frac{a_1a_3}{a_2} > 0$, dostaneme dvě navzájem různá čísla x_1 jako řešení rovnice $x_1^2 = \frac{a_1a_3}{a_2}$. Ke každému x_1 vypočteme $x_2 = \frac{a_1}{x_1}, x_3 = \frac{a_3}{x_1} = \frac{a_3}{x_1}$. Dále $x_2x_3 = \frac{a_1a_3}{x_1^2} = a_2$. Soustava (1) má tedy pro $n = 3$ právě dvě řešení.

Předchozí pokus ukazuje, že bude vhodné rozlišit n sudé a n liché.

a) Je-li n číslo sudé větší než 2, platí

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \dots (x_{n-1}x_n) = (x_2x_3)(x_4x_5) \dots (x_nx_1);$$

po dosazení z (1) dostaneme

$$a_1a_3 \dots a_{n-1} = a_2a_4 \dots a_n. \quad (3)$$

Není-li splněna podmínka (3), je soustava (1) neřešitelná. Platí-li (3), zvolíme $x_1 \neq 0$ a z první až $(n-1)$. rovnice (1) vypočteme postupně $x_2, x_3, \dots, x_n$. Tím je zaručeno, že

těchto n čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ splňuje prvních $n - 1$ rovnic (1); ověříme, že splňují i poslední rovnici (1). Platí totiž

$$x_n x_1 = \frac{(x_1 x_2)(x_3 x_4) \dots (x_{n-1} x_n)}{(x_2 x_3) \dots (x_{n-2} x_{n-1})} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{n-1}}{a_2 a_4 \dots a_{n-2}}. \quad (4)$$

Podle (3) je pravá strana (4) rovna a_n . Tím je dokázáno: platí-li (3), má soustava (1) nekonečně mnoho řešení. To platí i pro $n = 2$, kdy se podmínka (3) redukuje na podmínku (2).

b) Je-li n liché číslo, vypočteme

$$\frac{(x_1 x_2)(x_3 x_4) \dots (x_n x_1)}{(x_2 x_3) \dots (x_{n-1} x_n)} = \frac{a_1 a_3 \dots a_n}{a_2 a_4 \dots a_{n-1}}. \quad (5)$$

Levá strana (5) je zřejmě rovna x_1^2 ; pravá strana je číslo kladné. Z rovnice

$$x_1^2 = \frac{a_1 a_3 \dots a_n}{a_2 a_4 \dots a_{n-1}} \quad (6)$$

vypočteme dvě různé hodnoty x_1 ; z první až $(n - 1)$. rovnice (1) pak vypočteme k určitému kořenu x_1 rovnice (6) postupně $x_2, x_3, \dots, x_n$. Tím je zaručeno, že těchto n čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ splňuje prvních $n - 1$ rovnic (1); ověříme, že splňují i poslední rovnici (1).

Vypočteme $\frac{x_1}{x_n}$. Platí

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{(x_1 x_2)(x_3 x_4) \dots (x_{n-2} x_{n-1})}{(x_2 x_3)(x_4 x_5) \dots (x_{n-1} x_n)}. \quad (7)$$

Pravá strana (7) je rovna $\frac{a_1 a_3 \dots a_{n-2}}{a_2 \cdot a_4 \dots a_{n-1}}$, což je podle

rovnice (6) rovno $\frac{x_1^2}{a_n}$. Rovnice (7) má tedy tvar

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{x_1^2}{a_n};$$

a po dělení číslem x_1 ($x_1 \neq 0$) dostaneme $x_n x_1 = a_n$, což je poslední rovnice (1).

Shrnutí. Pro n sudé je soustava (1) neřešitelná, neplatí-li podmínka (3); platí-li (3), má nekonečně mnoho řešení. Pro n liché má soustava (1) právě dvě řešení.

2. Pre každé tri nezáporné čísla x, y, z platí nerovnosť

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{xz}) + z(z - \sqrt{xy}) \geq 0;$$

dokážte. V ktorých prípadoch nastane rovnosť?

RIEŠENIE. Pre každé dve nezáporné čísla x, y zrejme platí: $0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$, pričom rovnosť nastane len pre $x = y$. Z tejto nerovnosti priamo vyplýva tzv. *Cauchyho nerovnosť*: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, t. j. geometrický priemer nezáporných čísel je menší alebo rovný ich aritmetickému priemeru. S použitím Cauchyho nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} & x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{xz}) + z(z - \sqrt{xy}) \geq \\ & \geq x\left(x - \frac{y+z}{2}\right) + y\left(y - \frac{x+z}{2}\right) + z\left(z - \frac{x+y}{2}\right) = \\ & = \frac{1}{2}(2x^2 - xy - xz + 2y^2 - xy - yz + 2z^2 - xz - yz) = \\ & = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0, \end{aligned}$$

čím je daná nerovnosť dokázaná.

Rovnosť v poslednej nerovnosti môže zrejme nastať len pre $x = y = z$, kedy nastane rovnosť aj v dokazovanej nerovnosti.

Tým je úloha vyriešená.

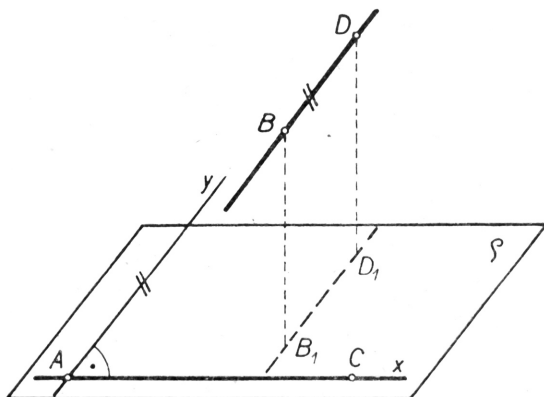
3. V prostoru jsou dány čtyři různé body A, B, C, D .

a) Jestliže $AC \perp BD$, pak je $AB^2 + CD^2 = BC^2 +$

+ AD^2 a obráceně: je-li $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$, pak je $AC \perp BD$.

b) Jestliže $AC \perp BD$ a zároveň $AD \perp BC$, pak je také $AB \perp CD$.

Dokažte.



Obr. 33

ŘEŠENÍ. a) (Obr. 33.) Přímku AC vedeme rovinu ϱ rovnoběžnou s přímkou BD a označíme B_1, D_1 průměty bodů B, D do roviny ϱ ; zřejmě $BD \parallel B_1D_1$. Označíme $BB_1 = DD_1 = v$ a v rovině ϱ zavedme soustavu kartézských souřadnic tak, aby polopřímka AC byla kladnou poloosou x ; pak jsou souřadnice bodů

$A \equiv [0; 0]$, $B_1 \equiv [x_1; y_1]$, $C \equiv [x_2; 0]$, $D_1 \equiv [x_3; y_3]$.
Jestliže $AC \perp BD$, pak

$$x_1 = x_3. \quad (1)$$

Dále podle Pythagorovy věty (vzorce pro vzdálenost dvou bodů)

$$AB^2 + CD^2 = x_1^2 + y_1^2 + v^2 + (x_2 - x_3)^2 + y_3^2 + v^2 = \\ = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_3^2 + 2v^2 - 2x_2x_3; \quad (2)$$

$$BC^2 + AD^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + v^2 + x_3^2 + y_3^2 + v^2 = \\ = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_3^2 + 2v^2 - 2x_1x_2. \quad (3)$$

Obě rovnosti (2), (3) platí i v tom případě, splyne-li některý z bodů B_1, D_1 s některým z bodů A, C nebo v případě, že $v = 0$.

Jestliže $BD \parallel B_1D_1 \perp AC$, pak $x_1 = x_3$; z (2), (3) pak plyne

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2. \quad (4)$$

Obráceně, platí-li (4), pak podle (2), (3) $x_2(x_1 - x_3) = 0$. Protože $x_2 \neq 0$ (platí totiž $A \not\equiv C$), pak $x_1 = x_3$, tj. $BD \parallel B_1D_1 \perp AC$.

b) Z předpokladů plyne podle odst. a) jednak (4), jednak (výměnou C, D) vztah

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2. \quad (5)$$

Spojením (4), (5) dostaneme $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$ a opět podle odst. a) vztah $AB \perp CD$.

JINÉ ŘEŠENÍ. a) Platí-li o čtyřech různých bodech A, B, C, D , že $AC \perp BD$, vedme přímkou BD rovinu ϱ kolmou k přímkě AC . Označme P průsečík přímky AC s rovinou ϱ . Zřejmě platí

$$AB^2 = AP^2 + BP^2,$$

$$CD^2 = CP^2 + DP^2$$

a obdobně

$$BC^2 = BP^2 + CP^2,$$

$$AD^2 = AP^2 + DP^2.$$

Sečtením dostáváme ihned

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2. \quad (1)$$

Předpokládejme nyní, že o různých bodech A, B, C, D platí (1). Označme P patu kolmice z bodu B na přímku

AC , Q patu kolmice z bodu D na přímku AC . Dokážeme, že $P \equiv Q$.

Protože $BC^2 = BP^2 + CP^2$, $AB^2 = AP^2 + BP^2$, je

$$BC^2 - AB^2 = CP^2 - AP^2. \quad (2)$$

Obdobně ze vztahů $CD^2 = CQ^2 + DQ^2$, $AD^2 = AQ^2 + DQ^2$ dostáváme

$$CD^2 - AD^2 = CQ^2 - AQ^2. \quad (3)$$

Podle (1)

$$BC^2 - AB^2 = CD^2 - AD^2,$$

takže z (2) a (3)

$$CP^2 - AP^2 = CQ^2 - AQ^2. \quad (4)$$

Na přímce AC zavedme jednu souřadnici takto: bod A bude počátek se souřadnicí nula, bod C bude bod o souřadnici 1. Označme p souřadnici bodu P , q souřadnici bodu Q . Platí tedy $AP^2 = p^2$, $AQ^2 = q^2$, $CP^2 = (1 - p)^2$, $CQ^2 = (1 - q)^2$. Ze (4) vyplývá, že

$$(1 - p)^2 - p^2 = (1 - q)^2 - q^2$$

neboli po úpravě

$$p = q.$$

Platí tedy $P \equiv Q$. To však znamená, že přímka BD leží v rovině ρ vedené bodem P kolmo k přímce AC . Proto $BD \perp AC$.

b) Necht' $AC \perp BD$ a zároveň $AD \perp BC$. Podle části a)

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$$

a zároveň

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2.$$

Proto také

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2,$$

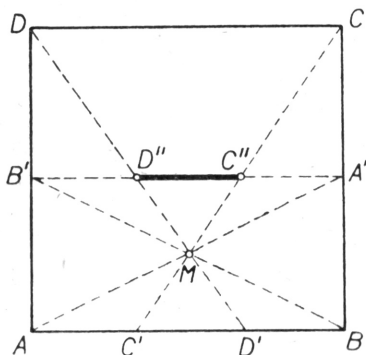
odkud podle a) vyplývá, že

$$AB \perp CD.$$

Tím je úloha rozřešena.

4. Je daný štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 8 cm. V jeho vnútri je daný bod M , ktorého vzdialenosti od strán AB , AD sú v uvedenom poradí 2 cm a 4 cm. Vyšetrite množinu stredov všetkých úsečiek, ktoré obsahujú bod M a ktorých koncové body ležia na obvodě štvorca $ABCD$. (Použite metódu súradníc.)

RIEŠENIE. Bod M spojíme so všetkými vrcholmi štvorca $ABCD$ a určíme priesečníky A' , B' , C' , D' týchto priamok s obvodom štvorca (obr. 34). Teraz budeme



Obr. 34

skúmať úsečky XY obsahujúce bod M , ktorých koncové body X , Y sú bodmi obvodu štvorca $ABCD$, a ktoré ležia vo dvojiciach vrcholových uhlov:

- | | | |
|---------------------------|---|---------------------------|
| a) $\sphericalangle CMD$ | a | $\sphericalangle C'MD'$; |
| b) $\sphericalangle DMB'$ | a | $\sphericalangle D'MB$; |
| c) $\sphericalangle B'MA$ | a | $\sphericalangle BMA'$; |
| d) $\sphericalangle AMC'$ | a | $\sphericalangle A'MC$. |

V prípade a) je častou hľadanej množiny $\mathbf{M}$ stredov úsečiek XY úsečka $C''D''$, ktorá je prienikom strednej priečky $A'B'$ s uhlom $\sphericalangle CMD$ (obr. 34). V prípade c) dostaneme jediný bod M ako časť množiny $\mathbf{M}$.

Zostáva vyšetriť prípady b) a d). Ak vyšetríme časť množiny $\mathbf{M}$ v prípade b), budeme poznať aj jej časť v prípade d), pretože obe časti sú zrejme súmerne združené podľa osi úsečky AB .

Časť množiny $\mathbf{M}$ v prípade b) vyšetríme metódou súradníc. Za kladné polosi kartézskej súradnicovej sústavy zvolíme polpriamky AB (x) a AD (y). Potom je $M \equiv [4; 2]$. Budeme vyšetrovať analyticky množinu $\mathbf{P}$ stredov všetkých úsečiek XY , ktoré obsahujú bod M , a ktorých koncové body ležia na priamkach AB , AD . Do úvahy pritom zrejme neprichádzajú úsečky rovnobežné s osami AB , AD , preto môžeme skúmať len úsečky ležiace v priamkach

$$y - 2 = t(x - 4), \quad (1)$$

kde t je parametr. Rovnica (1) vyjadruje potom ľubovoľnú priamku prechádzajúcu bodom M a rôznobežnú s osou y ($\equiv AD$). Priesečníky priamky (1) so súradnicovými osami sú

$$X \equiv \left[4 - \frac{2}{t}; 0\right], \quad Y \equiv [0; 2 - 4t]. \quad (2)$$

Je totiž $t \neq 0$, pretože podľa predchádzajúceho je priamka (1) rôznobežná tiež s osou x ($\equiv AB$). Súradnice stredu Z úsečky XY sú podľa (2)

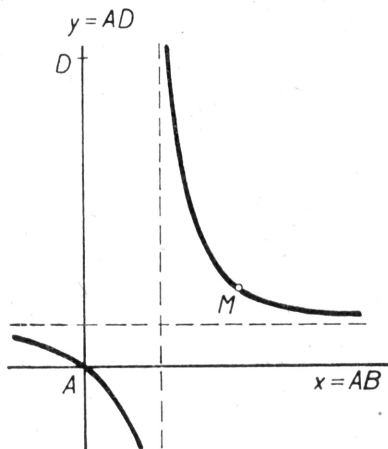
$$x = 2 - \frac{1}{t}, \quad y = 1 - 2t. \quad (3)$$

Vylúčením parametra t z rovníc (3) dostaneme

$$(x - 2)(y - 1) = 2, \quad (4)$$

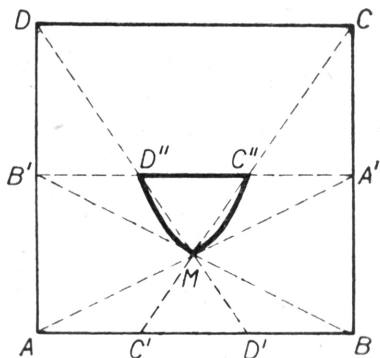
čo je rovnica rovnoosej hyperboly s asymptotami $x = 2$,

$y = 1$, ktorá obsahuje body $[0; 0]$ i $[4; 2]$ (obr. 35). Obrátením postupu zistíme, že každý bod hyperboly (4) patrí do množiny **P**. Časť množiny **M** v prípade b) je prienik hyperboly (4), (resp. jej vetvy ležiacej v prvom kvadrante) s vrcholovými uhlami $\sphericalangle DMB'$ a $\sphericalangle D'MB$.



Obr. 35

Ľahko zistíme, že hyperbola (4) sa dotýka v bode M priamky BB' . Táto priamka má totiž rovnicu $x + 2y = 8$. Ak dosadíme stadiť za x do (4), po úprave vyjde $y^2 - 4y + 4 = 0$ čiže $(y - 2)^2 = 0$. Priamka BB' má teda s hyperbolou (4) jediný spoločný bod $M \equiv [4; 2]$ a nie je rovnobežná s asymptotou. Je to teda skutočne dotýčnica hyperboly. Pretože vďaka vyššie uvedenej symetrii je tým vyšetrená aj časť množiny **M**, ktorá leží vo vrcholových uhloch $\sphericalangle AMC'$ a $\sphericalangle A'MC$ (prípád d), môžeme doplniť obr. 34 na „erb“, ktorého obvod je hľadaná množina **M** (obr. 36).



Obr. 36

2. KATEGORIE B

1. Na kruhové dráze vyjeli z téhož místa A v témž okamžiku v opačných směrech dva cyklisté. Pomalejší, který jel rychlostí 6 m/s , potkal druhého cyklistu v prvním svém okruhu dvakrát, v druhém okruhu třikrát, v třetím okruhu zase dvakrát, přitom vždycky mimo místo A . Najděte co nejvyšší meze pro rychlost druhého cyklisty.

ŘEŠENÍ. Je-li t_k doba (měřená v sekundách od počátku jízdy), v které se oba cyklisté potkali po k -té, je

$$6t_k + vt_k = k \cdot s, \quad (1)$$

kde s je délka kruhové dráhy v metrech a v rychlost druhého cyklisty v m/s . Z (1) plyne

$$t_k = \frac{ks}{6 + v}. \quad (2)$$

Protože $\frac{s}{6}$ je doba, za kterou projel pomalejší cyklista

jednou kruhovou dráhu, pak podle textu úlohy

$$t_2 < \frac{s}{6} < t_3, \quad t_5 < \frac{2s}{6} < t_6, \quad t_7 < \frac{3s}{6} < t_8, \quad (3)$$

tj. vzhľadom ke (2)

$$\frac{2s}{6+v} < \frac{s}{6} < \frac{3s}{6+v}, \quad \frac{5s}{6+v} < \frac{2s}{6} < \frac{6s}{6+v},$$

$$\frac{7s}{6+v} < \frac{3s}{6} < \frac{8s}{6+v}. \quad (4)$$

Z (4) dostaneme po úpravě

$$6 < v < 12, \quad 9 < v < 12, \quad 8 < v < 10, \quad \text{tj.}$$

$$9 < v < 10. \text{ Rychlost druhého cyklisty je mezi 9 a 10 m/s.}$$

2. Na kružnici k je daných n bodov, z ktorých žiadne dva neležia na tom istom priemere. Potom možno viesť stredom kružnice k takú priamku p , že každá z opačných polrovín s hranicou p obsahuje z daných bodov rovnaký počet. Dokážte.

RIEŠENIE. Označme $\mathbf{M}$ množinu daných bodov, S stred kružnice k . Ku každému bodu X kružnice k priradíme celé číslo $p(X) = m - m'$, kde m je počet bodov množiny $\mathbf{M}$, ktoré ležia v tej polrovine $v^+(X)$ s hraničnou priamkou SX , ktorá vznikne otočením polpriamky SX o uhly 0° až 180° v kladnom zmysle, m' je počet bodov množiny $\mathbf{M}$, ktoré ležia v polrovine $v^-(X)$ opačnej k polrovine $v^+(X)$.

Číslo $p(X)$ môžeme zrejme vyjadriť tiež iným spôsobom: Označme $\mathbf{M}'$ množinu súmernú k množine $\mathbf{M}$ podľa stredu S . Množina $\mathbf{M}'$ sa skladá taktiež z n bodov ležiacich na kružnici k . Pretože žiadne dva body z množiny $\mathbf{M}$ neležia na tom istom priemere, nemajú množiny $\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}'$ žiadny spoločný bod. Číslo $p(X)$ je preto tiež roz-

dielom medzi počtom bodov z $\mathbf{M}$ a počtom bodov z $\mathbf{M}'$ (v uvedenom poradí), ktoré ležia v polrovine $v^+(X)$.

Zvoľme teraz na kružnici k ľubovoľný bod O , ktorý neleží ani v $\mathbf{M}$, ani v $\mathbf{M}'$. Označme O' druhý priesečník priamky SO s kružnicou k . Ak je $p(O) = 0$, má priamka SO hľadanú vlastnosť. Ak je $p(O) > 0$, potom

$$p(O') = -p(O) < 0. \quad (1)$$

Nech teraz premenný bod X prebieha polkružnicu OO' kružnice k v polrovine $v^+(O)$ z bodu O do bodu O' . Vyšetrimo, ako sa mení číslo $p(X)$. Číslo $p(X)$ je celé a nemení sa vo vnútri takého oblúka polkružnice, ktorý neobsahuje žiadny bod z $\mathbf{M}$ ani z $\mathbf{M}'$. Ak príde bod X do bodu A z množiny $\mathbf{M}$, číslo $p(X)$ sa v bode A zväčší o jednu, po prejdení bodom A sa opäť zväčší o jednu. Ak príde bod X do bodu A' z množiny $\mathbf{M}'$, číslo $p(X)$ sa v bode A' zmenší o jednu, po prejdení bodom A' sa zmenší opäť o jednu.

Pretože začiatočná hodnota $p(X)$ v bode O je $p(O) > 0$ a koncová hodnota je podľa (1) $-p(O) < 0$, nadobúda funkcia $p(X)$ na polkružnici OO' všetky celé hodnoty medzi číslami $p(O)$ a $-p(O)$, teda tiež hodnotu 0 (resp. i niekoľkokrát). Ak je $p(X_0) = 0$, je SX_0 hľadaná priamka, pretože v polrovine $v^+(X_0)$ aj v polrovine $v^-(X_0)$ je ten istý počet bodov z $\mathbf{M}$.

Ak je $p(O) < 0$, postupujeme analogicky alebo začneme z bodu O' súmerne združeného s O podľa S .

Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Podrobnejším rozborom možno zistiť, že pre n párne je nekonečne mnoho riešení (priamka p môže prechádzať ľubovoľným bodom X na niektorom oblúku medzi dvoma bodmi z $\mathbf{M}$ alebo $\mathbf{M}'$), pre n nepárne má úloha len konečne mnoho riešení (priamka p vždy prechádza niektorým bodom z množiny $\mathbf{M}$).

3. Jestliže kvadratická funkce

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

nabývá v intervalu $-1 \leq x \leq 1$ pouze hodnot $-1 \leq f(x) \leq 1$, potom $|a| \leq 2$; dokažte. Může být $|a| = 2$?

ŘEŠENÍ. Pro $x = 0$ plyne

$$|c| \leq 1. \quad (2)$$

Pro $x = 1$ a $x = -1$ dostaneme

$$|a + b + c| \leq 1, \quad |a - b + c| \leq 1. \quad (3)$$

Z (3) odvodíme podle známého vzorce $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ tento výsledek

$$\begin{aligned} |2a + 2c| &\leq |(a + b + c) + (a - b + c)| \leq \\ &\leq |a + b + c| + |a - b + c| \leq 2, \end{aligned}$$

neboli

$$|a + c| \leq 1. \quad (4)$$

Podle vzorce $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta|$ plyne z (4)

$$|a| - |c| \leq |a + c| \leq 1,$$

neboli podle (2)

$$|a| \leq 1 + |c| \leq 2.$$

Hledaný odhad je tedy skutečně $|a| \leq 2$.

Funkce $y = 2x^2 - 1$ (kde $a = 2$) splňuje v intervalu $-1 \leq x \leq 1$ podmínku $-1 \leq f(x) \leq 1$. Neboť pro $x = 0$ nabývá hodnoty -1 , pro $x = 1$ hodnoty 1 a v intervalu $0 \leq x \leq 1$ je rostoucí. Jestliže totiž $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, platí.

$$(2x_2^2 - 1) - (2x_1^2 - 1) = 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

V intervalu $-1 \leq x \leq 0$ nabývá tato funkce týchž hodnot jako v intervalu $0 \leq x \leq 1$.

4. Jsou dány dva body A, B a bod S ležící uvnitř úsečky AB . Sestrojte $\triangle ABC$, pro který platí $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ASC$ a jehož těžnice t_b má danou délku d . Proveďte diskusi vzhledem k délkám d, AB a AS .

ŘEŠENÍ. Rozbor (obr. 37). Podle věty uu platí

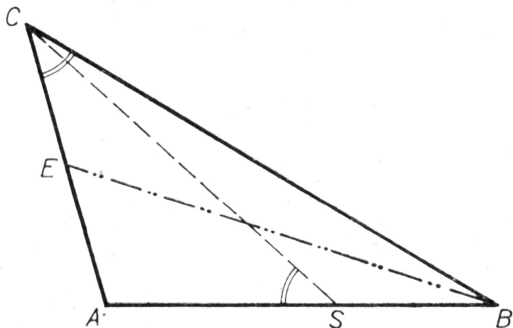
$$\triangle ACB \sim \triangle ASC,$$

neboť $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ASC$ a $\sphericalangle CAB = \sphericalangle SAC$. Tudiž

$$\frac{AC}{AS} = \frac{AB}{AC},$$

tj.

$$AC^2 = AB \cdot AS. \quad (1)$$



Obr. 37

Z posledního vztahu už plyne *konstrukce*. Nejdříve sestrojíme podle Euklidovy věty o výšce nebo o odvěsně úsečku velikosti $b = AC$ tak, aby platil vztah (1). Nyní se už jedná o známou úlohu sestrojiti trojúhelník, je-li dáno $AB = c$, $AC = b$, délka d těžnice t_b . Užije se pomocného $\triangle ABE$, kde E je střed strany AC . Tento trojúhelník se sestrojí podle věty sss. Bod C sestrojíme na prodloužení úsečky AE za bod E tak, aby bylo $EC = AE = \frac{b}{2}$.

Zkouška. Zřejmě má sestrojený $\triangle ABC$ vrcholy A , B a těžnici t_b o délce d . Je ovšem nutno dokázat, že platí

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ASC. \quad (2)$$

Pro trojúhelníky $\triangle ACB$ a $\triangle ASC$ platí

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle SAC,$$

$$\frac{AC}{AS} = \frac{AB}{AC},$$

což plyne z (1). Tudíž $\triangle ACB \sim \triangle ASC$, takže platí (2).

Diskuse. Úloha bude mít řešení, právě když půjde sestavit pomocný $\triangle ABE$, tj. právě když bude platit

$$|AB - AE| < BE < AB + AE. \quad (3)$$

Avšak $AE = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}\sqrt{AB \cdot AS}$ (plyne z (1)), $0 < AS < AB$, takže $|AB - AE| = AB - AE$. Dosadíme-li do

(3) $BE = d$ a $AE = \frac{1}{2}\sqrt{AB \cdot AS}$, dostáváme podmínku řešitelnosti úlohy

$$AB - \frac{1}{2}\sqrt{AB \cdot AS} < d < AB + \frac{1}{2}\sqrt{AB \cdot AS}. \quad (4)$$

Je-li splněno (4), má úloha jediné řešení. Neplatí-li (4), nemá úloha řešení.

3. KATEGORIE C

1. V dekadickém zápisu čísla $23A5B6$ nahraďte písmena A, B ciframi tak, aby vzniklo číslo dělitelné devatenácti. Kolik má úloha řešení?

ŘEŠENÍ. Číslo je napsáno v desítkové soustavě, a proto platí $23A5B6 = 230506 + A \cdot 10^3 + B \cdot 10$, $0 \leq A \leq 9$, $0 \leq B \leq 9$. Protože číslo 230506 dává při dělení 19 zbytek 17, je číslo $23A5B6$ dělitelné 19, právě když $A \cdot 10^3 + B \cdot 10$ dává při dělení 19 zbytek 2. Avšak 10^3 dává při dělení 19 zbytek 12, a tedy $A \cdot 10^3 + B \cdot 10$ dává

při dělení 19 týž zbytek jako číslo $12A + 10B = 2(6A + 5B)$. Poněvadž číslo 19 je prvočíslo, dává $12A + 10B$ zbytek 2, právě když $6A + 5B$ dává zbytek 1.

Máme tedy najít všechny dvojice čísel A, B , $0 \leq A \leq 9$, $0 \leq B \leq 9$, tak, aby číslo $6A + 5B$ dávalo při dělení 19 zbytek 1, tj. číslo $5B$ musí dávat při dělení 19 týž zbytek jako číslo $1 - 6A$. Sestavme si tabulku zbytků těchto čísel při dělení 19:

A	$1 - 6A$	B	$5B$
0	1	0	0
1	14	1	5
2	8	2	10
3	2	3	15
4	15	4	1
5	9	5	6
6	3	6	11
7	16	7	16
8	10	8	2
9	4	9	7

Z těchto tabulek vidíme, že jediné dvojice, které dávají týž zbytek, jsou

A	B
0	4
3	8
4	3
7	7
8	2

Úloze tedy vyhovují tato čísla:

230 546, 233 586, 234 536, 237 576, 238 526.

Dělením 19 se o tom snadno přesvědčíme.

2. Určete všetky trojice prvočísel a, b, c , pro ktoré platí $abc < ab + bc + ca$.

ŘEŠENÍ. Zvolme označení tak, aby platilo

$$a \leq b \leq c. \quad (1)$$

Jestliže $a \geq 3$, je pak

$$ab + bc + ca \leq 3bc \leq abc.$$

Pro každé řešení nerovnosti

$$abc < ab + bc + ca \quad (2)$$

platí tedy $a = 2$. Z (2) pak plyne $2bc < 2b + bc + 2c$ neboli po úpravě

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Jestliže $5 \leq b \leq c$, je $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{5}, \frac{1}{c} \leq \frac{1}{5}, \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, tj. neplatí (3). Pro každé řešení nerovnosti (2) platí tedy $b = 2$ nebo $b = 3$. Trojice $a = b = 2, c$ libovolné, je zřejmě řešením nerovnosti (2). Jestliže $b = 3, c \geq 7$, je $\frac{1}{b} = \frac{1}{3}, \frac{1}{c} \leq \frac{1}{7}, \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21} < \frac{1}{2}$. Pro $a = 2, b = 3$ máme tedy jen dvě možnosti pro c , a to $c = 3$ nebo $c = 5$.

Shrnutí. Nerovnost (2) má tato prvočíselná řešení: 2, 2, c (c libovolné prvočíslo); 2, 3, 3; 2, 3, 5.

3. Je daná úsečka AB a bod S jej vnútra. Aký útvar je množinou vrcholov C všetkých trojuholníkov ABC , pre ktoré platí $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ASC$?

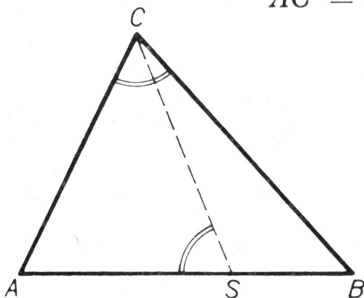
RIEŠENIE (obr. 38). Nech je C jeden z bodov hľadaneho útvaru U . Potom podľa vety *uu* o podobnosti troj-

uholníkov platí vzťah

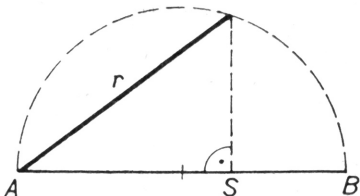
$$\triangle ASC \sim \triangle ACB. \quad (1)$$

Z (1) vyplýva $AC : AS = AB : AC$ čiže

$$AC^2 = AB \cdot AS. \quad (2)$$



Obr. 38



Obr. 39

Podľa (2) je teda vzdialenosť AC konštantná a bod C leží na kružnici k so stredom A a s polomerom $r = \sqrt{AB \cdot AS}$.

Zvoľme *obrátene* ľubovoľný bod C kružnice k tak, aby neležal na priamke AB . Potom vzniknú trojuholníky $\triangle ASC$, $\triangle ACB$ a pre dĺžky ich strán platí rovnosť (2). Z rovnosti (2) vyplýva vzťah $AC : AS = AB : AC$. Okrem toho majú oba trojuholníky spoločný uhol

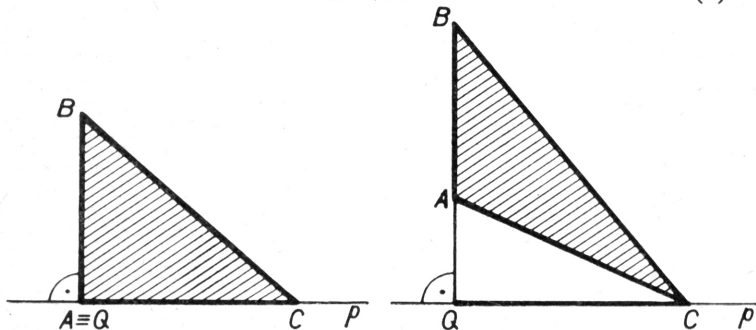
$\sphericalangle CAS = \sphericalangle CAB$. Podľa vety $\frac{s}{s}$ u $\frac{s}{s}$ o podobnosti trojuholníkov platí teda vzťah (1). Z (1) potom vyplýva zhodnosť uhlov $\sphericalangle ASC = \sphericalangle ACB$, t. j. bod C patrí do útvaru **U**.

Záver. Útvar **U** je kružnica k so stredom A a polomerom $r = \sqrt{AB \cdot AS}$ s vylúčením jej priesečníkov s priamkou AB . Polomer r kružnice k zostrojíme napr. pomocou Euklidovej vety o pravouhlom trojuholníku (obr. 39).

4. Je dána úsečka AB a přímka p kolmá k AB ; oba body A, B leží v téže polorovině s hranicí p . Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby vrchol C ležel na přímce p a aby platilo $\sphericalangle ABC = 2 \sphericalangle BAC$. Určete podmínku řešitelnosti úlohy.

ŘEŠENÍ. Označme Q průsečík přímek p, AB ; dále označme $a = AQ, b = BQ$. Názor nám napovídá, že úloha je neřešitelná, je-li

$$a < b. \quad (1)$$



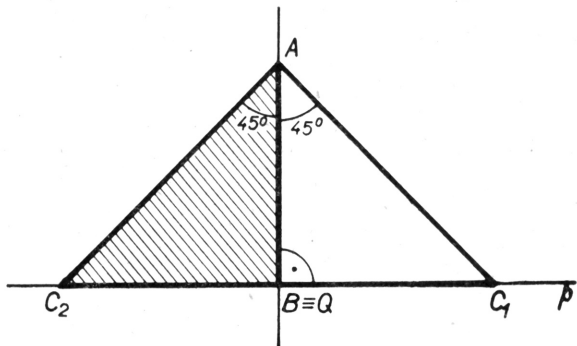
Obr. 40a, b

Skutečně, je-li $a = 0$, tj. $A \equiv Q$ (obr. 40a), je $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, $\sphericalangle ABC < 90^\circ$, proto neplatí

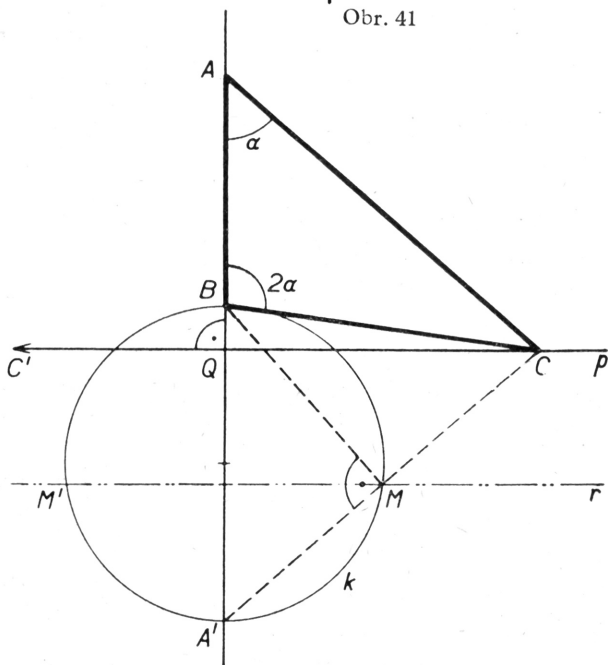
$$\sphericalangle ABC = 2 \sphericalangle BAC. \quad (2)$$

Je-li $0 < a < b$ (obr. 40b), je $\sphericalangle QAC < 90^\circ$, $\sphericalangle BAC > 90^\circ$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle QBC < 90^\circ$, proto také neplatí (2).

Je-li $B \equiv Q$ (obr. 41), jsou řešením úlohy zřejmě dva rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky ABC_1, ABC_2 . Zbývá případ $0 < b < a$ (obr. 42). Označíme-li $\sphericalangle BAC = \alpha$, je $\sphericalangle ABC = 2\alpha$, $\sphericalangle QBC = 180^\circ - 2\alpha$. Označme A' bod souměrně sdružený s bodem A podle



Obr. 41



Obr. 42

přímky p ; pak je $\sphericalangle BA'C = \sphericalangle QA'C = \sphericalangle QAC =$
 $= \sphericalangle BAC = \alpha$. Osa úhlu $\sphericalangle QBC = \sphericalangle A'BC$ protne
 úsečku $A'C$ v bodě M a je $\sphericalangle A'BM = \frac{1}{2} \sphericalangle QBC = 90^\circ -$
 $-\alpha$, tj. $BM \perp A'M$. Bod M leží tedy na kružnici k
 sestrojené nad průměrem $A'B$. Protože je $\sphericalangle A'BM =$
 $= \sphericalangle CBM$, $\sphericalangle A'MB = \sphericalangle CMB = 90^\circ$, je $\triangle A'MB \cong$
 $\cong \triangle CMB$, a tedy $A'M = CM$. Bod M leží tedy také
 na přímce $r \parallel p$, která prochází středem úsečky $A'Q$,
 neboli na ose r úsečky $A'Q$.

Bod M sestrojíme jako průsečík kružnice k s přímkou r
 (jsou dvě řešení) a bod C (jsou opět dvě řešení) sestrojíme
 jako průsečík přímk p , A' , M .

Obrácení předchozího postupu ukáže, že takto sestro-
 jené body C jsou skutečně řešením úlohy.

Závěr. Úloha je řešitelná, právě když platí $a > b$; pak
 má dvě řešení. Tento výsledek dostaneme spojením uve-
 deného řešení s podmínkou neřešitelnosti (1).

JINÉ ŘEŠENÍ. Proti delším stranám trojúhelníka leží
 větší úhly a naopak. Je tedy vidět, že úloha nemůže mít
 řešení, je-li bod A blíže k přímce p nežli bod B .

Předpokládejme tedy, že $BQ < AQ$, kde Q je průsečík
 (viz obr. 43) přímk p a AB . Použijeme opět vlastnosti
 obvodového a středového úhlu. Sestrojíme kružnici k
 se středem B tak, aby *dvojnásobek* úhlu $\sphericalangle ABC$ byl
 úhlem středovým (je to úhel nevypuklý, neboť $\sphericalangle ABC$
 je tupý) a aby *dvojnásobek* úhlu $\sphericalangle BAC$ byl úhlem obvo-
 dovým. Za tím účelem sestrojíme opět bod A' souměrně
 sdružený s bodem A podle přímky p ; kružnici k pove-
 deme bodem A' . Poněvadž B a A' leží v různých polo-
 rovinách s hranicí p , protne kružnice k přímku p ve dvou
 bodech C_1, C_2 . Trojúhelníky ABC_1, ABC_2 jsou řešením
 úlohy, jak snadno dokážeme.

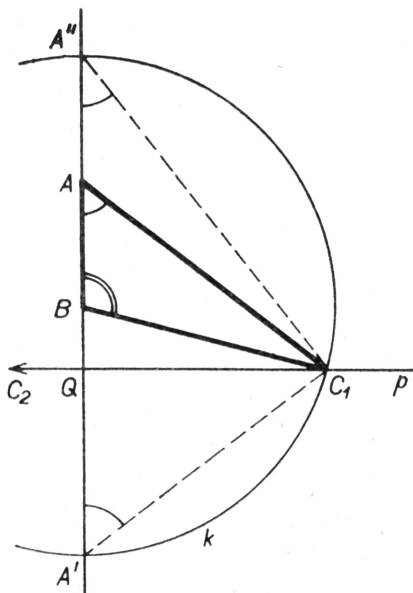
Důkaz. Budiž $A'A''$ průměr v k .

$\sphericalangle A''A'C_i$ je obvodový úhel příslušný k tětivě $A''C_i$.

$\sphericalangle A''BC_i$ je středový úhel příslušný k tětivě $A''C_i$.

Avšak $\sphericalangle A''BC_i = \sphericalangle ABC_i$, a na druhé straně $\sphericalangle A''A'C_i = \sphericalangle QA'C_i = \sphericalangle QAC_i = \sphericalangle BAC_i$. Tedy z věty o obvodovém a středovém úhlu plyne

$$2 \sphericalangle BAC_i = \sphericalangle ABC_i \quad (i = 1, 2).$$



Obr. 43

4. KATEGORIE D

1. Dokažte, že výraz

$$V = a^2 - ab + b^2 - a + b + 1$$

je kladný pro každá dvě čísla a, b .

ŘEŠENÍ. Daný výraz V znásobíme dvěma a pokusme se upravit výraz $2V$ tak, aby byl součtem druhých mocnin. Z prvních tří členů výrazu $2V$ sestavíme druhou mocninu dvojčlenu $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Platí tedy

$$2V - (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2a + 2b + 2. \quad (1)$$

Z prvního, třetího a pátého členu na pravé straně (1) sestavíme druhou mocninu $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1$. Platí tedy dále

$$2V - (a - b)^2 - (a - 1)^2 = b^2 + 2b + 1 = (b + 1)^2$$

a odtud

$$2V = (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2. \quad (2)$$

Z rovnosti (2) vyplývá, že $V \geq 0$. Jestliže $V = 0$, plyne z (2) $a - b = 0$, $a - 1 = 0$, $b + 1 = 0$, tj. $a = b$, $a = 1$, $b = -1$, což je nemožné. Proto nemůže být $V = 0$ a pro každé a, b platí $V > 0$.

2. Prirodzené čísla $1, 2, 3, \dots, n$ napísaná v nejakom poradí označme $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Ak je n číslo nepárne, je súčin

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_n - n)$$

deliteľný dvoma. Dokážte.

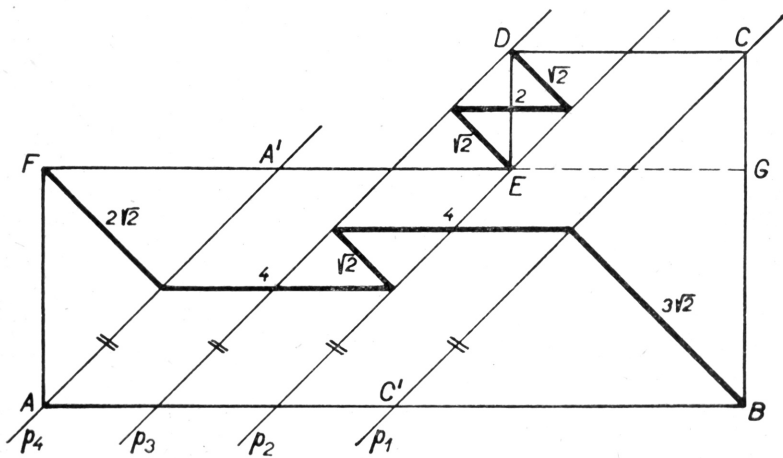
RIEŠENIE. Medzi číslami $1, 2, \dots, n$ je pri nepárnom n nepárnych čísel o jedno viac ako párných. Preto v usporiadaní $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ stojí aspoň jedno nepárne číslo a_k na „nepárnom“ mieste k . Párných miest je totiž o jedno menej. Rozdiel $a_k - k$ je potom deliteľný dvoma a preto aj súčin $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_n - n)$ je deliteľný dvoma.

3. Je daný šesťuholník $ABCDEF$ zložený z obdĺžnika $ABGF$ s rozmermi $AB = 12$ cm, $AF = 4$ cm a z obdĺžnika $CDEG$ s rozmermi $CD = 4$ cm, $CG = 2$ cm (pozri obr. 44). Narysujte tento šesťuholník a zakreslite geometrické miesto stredov všetkých úsečiek kolmých k priamke BE , ktorých koncové body ležia na obvode šesťuholníka. Geometrické miesto sa skladá z ôsmich úsečiek. Vypočítajte súčet ich dĺžok.

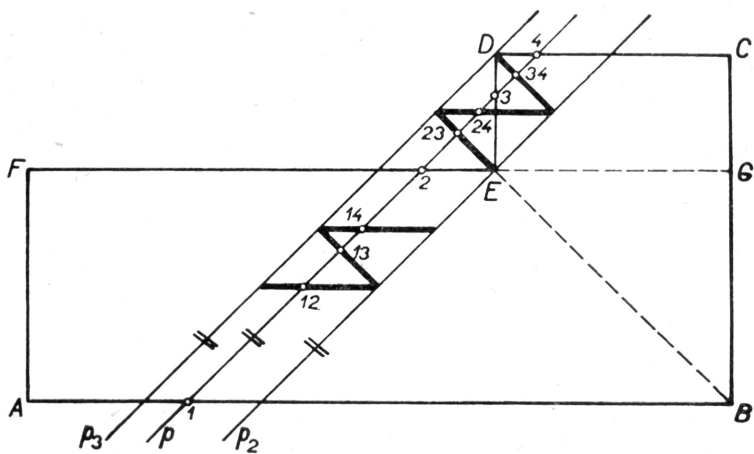
RIEŠENIE. Na obr. 44 je narysovaný daný šesťuholník. Vrcholmi C, E, D, A vedieme v uvedenom poradí priamky p_1, p_2, p_3, p_4 kolmé k BE . Časť hľadaného geometrického miesta (množiny) M , ktorá leží v polrovine p_1B , je výška rovnoramenného pravouhlého trojuholníka BCC' (C' je priesečník priamky p_1 a úsečky AB). Podobne je tomu v polrovine p_4F , kde príslušnou časťou množiny M je výška rovnoramenného pravouhlého trojuholníka FAF' (A' je priesečník priamky p_4 s úsečkou FG). V pásoch (p_1p_2) a (p_3p_4) sú príslušnými časťami množiny M úsečky. Ležia v osiach súmernosti dvojice rovnobežiek AB, CD a AB, EF . Najzložitejšia je situácia v páse (p_2p_3) . Na obr. 45 je zakreslená priamka p tohto pásu kolmá k priamke BE . Číslami 1, 2, 3, 4 sú označené jej priesečníky s obvodom šesťuholníka $ABCDEF$. Dvojicami 12, 13, 14, 23, 24, 34 je označených šesť stredov dvojíc vybraných zo štyroch bodov 1, 2, 3, 4. Ak priamka p prebieha pás p_2p_3 , dostaneme ako časti množiny M hrubo vytiahnuté úsečky na obr. 45. Na obr. 44 sú k jednotlivým úsečkám, ktoré tvoria množinu M , pripísané ich dĺžky.

Súčet týchto dĺžok je $10 + 8\sqrt{2} \doteq 21,3$.

4. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB , je-li dána délka jeho těžnice t_c a velikost úhlu ω , který svírá těžnice t_c s osou úhlu $\sphericalangle ACB$. Pro která ω má úloha řešení?



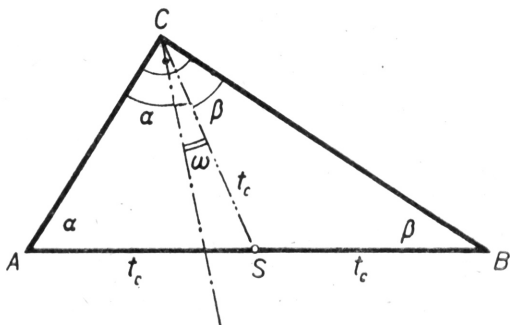
Obr. 44



Obr. 45

ŘEŠENÍ. *Rozbor* (obr. 46). Označme S střed přepony AB . Podle Thaletovy věty $SA = SC = SB = t_c$. Trojúhelníky $\triangle ASC$ a $\triangle BSC$ jsou tedy rovnoramenné, a proto

$$\begin{aligned}\sphericalangle ACS &= \sphericalangle CAS = \alpha, \\ \sphericalangle BCS &= \sphericalangle SBC = \beta.\end{aligned}$$



Obr. 46

Je-li ω úhel, jenž svírá těžnice t_c s osou úhlu $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, potom

$$\alpha = 45^\circ + \omega, \quad \beta = 45^\circ - \omega \quad (1)$$

nebo

$$\alpha = 45^\circ - \omega, \quad \beta = 45^\circ + \omega. \quad (2)$$

Z posledních vztahů již plyne *konstrukce*. Jde o konstrukci trojúhelníku podle věty *usu*: $AB = 2 \cdot t_c$ a úhly α, β jsou určeny vztahy (1), resp. (2).

Zkouška. Ze vztahů (1), resp. (2), je zřejmé, že sestrojený $\triangle ABC$ je pravoúhlý. Protože je jeho přepona rovna $2t_c$, má těžnice na přeponu předepsanou délku.

Diskuse. Ovšem, aby úloha měla řešení, musí být úhly

α, β dané vztahy (1), resp. (2), ostré, tj.

$$0^\circ \leq \omega < 45^\circ.$$

Jestliže $\omega = 0^\circ$, má úloha jedno řešení — sestrojený $\triangle ABC$ je rovnoramenný. Jestliže $0^\circ < \omega < 45^\circ$, má úloha dvě řešení.

Pro $\omega \geq 45^\circ$ nemá úloha řešení.

V. Úlohy III. kola kategorie A

1. Necht' $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n > 2$) jsou reálná čísla, z nichž nejvýše jedno je rovno nule. Řešte v reálném oboru soustavu

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= a_1, \\ x_2 x_3 &= a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_{n-1} x_n &= a_{n-1}, \\ x_n x_1 &\geq a_n. \end{aligned} \quad [8 \text{ bodů}]$$

ŘEŠENÍ. A. Zabývejme se řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= a_1, \\ x_2 x_3 &= a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_l x_{l+1} &= a_l, \end{aligned} \quad (1)$$

kde $a_i \neq 0$ pro $1, 2, \dots, l$; $l \geq 1$.

Na pravých stranách těchto rovnic jsou čísla různá od nuly, a proto musí být $x_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, l+1$. Chceme-li ze soustavy (1) vypočítat $x_i, i = 2, 3, \dots, l+1$, je nutno rozlišit zda i je číslo sudé nebo liché.

1. Necht' i je číslo sudé. Pro $i = 2$ dostáváme z první rovnice

$$x_2 = \frac{a_1}{x_1}.$$

Necht' $i = 2k$, kde k je přirozené číslo splňující nerovnosti $2 < 2k \leq l+1$. Vezměme prvních $2k-1$ rovnic soustavy (1) a přepišme je následujícím způsobem

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= a_1, \\ a_2 &= x_2 x_3, \\ x_3 x_4 &= a_3, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{2k-2} &= x_{2k-2} x_{2k-1}, \\ x_{2k-1} x_{2k} &= a_{2k-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Rovnice (2) spolu znásobme. Dostáváme

$$(x_1 x_2 \dots x_{2k})(a_2 a_4 \dots a_{2k-2}) = (x_2 x_3 \dots x_{2k-1})(a_1 a_3 \dots a_{2k-1}).$$

Po úpravě

$$(x_2 x_3 \dots x_{2k-1})[x_1 x_{2k}(a_2 a_4 \dots a_{2k-2}) - (a_1 a_3 \dots a_{2k-1})] = 0,$$

odkud již plyne

$$x_{2k} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2k-2} \cdot x_1}. \quad (3)$$

Poznámka. Vztah (3) platí i pro $i = 2$, tj. $k = 1$, klademe-li $a_2 a_4 \dots a_{2k-2} = 1$ pro $k = 1$.

2. Necht $i = 2k + 1$, kde k je přirozené číslo splňující nerovnosti $3 \leq 2k + 1 \leq l + 1$. Z $2k$ -rovnice soustavy (1) plyne

$$x_{2k+1} = \frac{a_{2k}}{x_{2k}},$$

tj. podle (3)

$$x_{2k+1} = \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k}}{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}} x_1. \quad (4)$$

Z tvaru vzorců (3) a (4) je zřejmé, že x_{2k} a x_{2k+1} dané (3) a (4) vyhovují $2k$ -rovnici soustavy (1) pro $2 \leq 2k \leq l$ a libovolné $x_1 \neq 0$; $(2k + 1)$ -rovnici soustavy (1), (kde $3 \leq 2k + 1 \leq l$) splňují x_{2k+1} dané (4) a $x_{2(k+1)}$ určené pomocí (3) pro libovolné $x_1 \neq 0$. První rovnici soustavy (1) splňuje x_2 dané vztahem (3) pro $k = 1$ při libovolném $x_1 \neq 0$.

Soustava (1) má tedy nekonečně mnoho řešení daných vztahy $x_1 = t$ a (3) a (4) pro $x_2, x_3, \dots, x_{l+1}$, kde t je libovolné reálné číslo různé od nuly.

B. Výsledků získaných v odstavci **A.** využijeme pro řešení soustavy dané v úloze. Je třeba rozlišovat několik případů.

1 Necht' $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \neq 0$. Potom řešení z odstavce **A.**, položíme-li $l = n - 1$, musí splňovat podmínku

$$x_n x_1 \geq a_n. \quad (5)$$

1.1 Je-li n sudé, pak podle (3) má platit

$$\frac{a_1 a_3 \dots a_{n-1}}{a_2 a_4 \dots a_{n-2}} \geq a_n. \quad (5\alpha)$$

Označme zlomek na levé straně nerovnosti (5 α) písmenem a . Jestliže $a \geq a_n$, má soustava nekonečně mnoho řešení; v případě, že $a < a_n$, soustava řešení nemá.

1.2 Jestliže je n liché, potom ze vztahů (5) a (4) plyne, že má platit

$$\frac{a_2 a_4 \dots a_{n-1}}{a_1 a_3 \dots a_{n-2}} \cdot x_1^2 \geq a_n. \quad (5\beta)$$

Označme zlomek na levé straně nerovnosti (5 β) písmenem b . Zřejmě tedy $b \neq 0$.

1.21 Jestliže $b > 0$, potom

$$x_1^2 \geq \frac{a_n}{b}$$

a čísel $x_1 \neq 0$ splňujících tuto nerovnost je nekonečně mnoho a soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž a_n je libovolné reálné číslo.

1.22 Jestliže $b < 0$, potom

$$x_1^2 \leq \frac{a_n}{b}.$$

Vzhledem k tomu, že musí být $x_1 \neq 0$, má soustava řešení, a to nekonečně mnoho, právě když $\frac{a_n}{b} > 0$, tj. $a_n < 0$.

2 Necht' $a_1 = 0$. Potom z prvních dvou rovnic soustavy plyne, že $x_1 = 0$, neboť $a_2 \neq 0$. Lze opět využít výsledků z odstavce **A.**, ovšem nyní jde o soustavu

$$x_2 x_3 = a_2,$$

$$x_3 x_4 = a_3,$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$x_{n-1} x_n = a_{n-1},$$

takže je třeba nejdříve x_i a a_i přechíslovat (snížit indexy o jedničku).

Řešení ovšem musí splňovat podmínku

$$x_n x_1 \geq a_n,$$

tj.

$$x_n \cdot 0 \geq a_n.$$

Soustava má tedy pro $a_n < 0$ nekonečně mnoho řešení a pro $a_n > 0$ nemá žádné řešení ($a_n \neq 0$, neboť $a_1 = 0$).

3 Necht' $a_i = 0$, kde $i \in \{2, 3, \dots, n-2\}$, přičemž $n > 3$. Potom $x_i = 0$ nebo $x_{i+1} = 0$, což však není možné, neboť $a_{i-1} \neq 0$ a $a_{i+1} \neq 0$. Soustava nemá tedy v tomto případě řešení.

4 Necht' $a_{n-1} = 0$. Potom zřejmě $x_n = 0$ ($x_{n-1} \neq 0$, neboť $a_{n-2} \neq 0$). Řešení opět získáme pomocí výsledků z odstavce **A.**, položíme-li $l = n-2$.

Řešení ovšem musí splňovat podmínku

$$x_n x_1 \geq a_n,$$

tj.

$$0 \cdot x_1 \geq a_n.$$

Jestliže $a_n < 0$, má soustava nekonečně mnoho řešení; pro $a_n > 0$ žádné řešení ($a_n \neq 0$, neboť $a_{n-1} = 0$).

Závěr:

Soustava má nekonečně mnoho řešení, právě když nastane jeden z těchto případů:

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1} \neq 0, n \text{ je sudé číslo}, a \geq a_n \quad [\text{viz } 1.1]$$

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1} \neq 0, n \text{ je liché číslo}, b > 0 \quad [\text{viz } 1.21]$$

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1} \neq 0, n \text{ je liché číslo}, \\ b < 0, a_n < 0 \quad [\text{viz } 1.22]$$

$$a_1 = 0, a_n < 0 \quad [\text{viz } 2]$$

$$a_{n-1} = 0, a_n < 0 \quad [\text{viz } 4].$$

Soustava nemá řešení, právě když nastane jeden z těchto případů:

$$\begin{array}{ll}
 a_1 a_2 \dots a_{n-1} \neq 0, n \text{ je sudé číslo, } a < a_n & [\text{viz 1.1}] \\
 a_1 a_2 \dots a_{n-1} \neq 0, n \text{ je liché číslo,} & \\
 \quad b < 0, a_n \geq 0 & [\text{viz 1.22}] \\
 a_1 = 0, a_n > 0 & [\text{viz 2}] \\
 a_i = 0, i \in \{2, 3, \dots, n-2\}, n > 3 & [\text{viz 3}] \\
 a_{n-1} = 0, a_n > 0 & [\text{viz 4}]
 \end{array}$$

2. Je-li n celé číslo, potom číslo

$$a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

je celé. Dokažte a vyšetřete, pro která n je a_n dělitelné třemi. [5 bodů]

ŘEŠENÍ. a) Necht' n je číslo přirozené. Použijeme binomické věty. Potom

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot (\sqrt{3})^k - (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot (\sqrt{3})^k \right]}{2\sqrt{3}} = \\
 &= \frac{2 \left[\binom{n}{1} 2^{n-1} \cdot \sqrt{3} + \binom{n}{3} 2^{n-3} (\sqrt{3})^3 + \binom{n}{5} \cdot 2^{n-5} (\sqrt{3})^5 + \dots \right]}{2\sqrt{3}} = \\
 &= \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} + \binom{n}{3} 2^{n-3} \cdot 3 + \binom{n}{5} \cdot 2^{n-5} \cdot 3^2 + \dots,
 \end{aligned}$$

tj. a_n je celé číslo. Všechny členy této řady s možnou výjimkou prvního jsou dělitelné třemi. Z tohoto důvodu číslo a_n je dělitelné třemi právě tehdy, jestliže je

$\binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}$ dělitelné třemi, tj. když n je dělitelné třemi (neboť 2^{n-1} není dělitelné 3).

b) Pro $n = 0$ platí:

$$a_0 = \frac{1 - 1}{2\sqrt{3}} = 0.$$

Číslo a_0 je tedy celé a dělitelné 3.

c) Je-li n celé záporné číslo, pak užitíme rovnosti

$$2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}};$$

proto

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} = \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})^{-n} - (2 + \sqrt{3})^{-n}}{2\sqrt{3}} = -a_{-n}. \end{aligned}$$

Číslo $(-n)$ je přirozené, a proto podle a) je číslo $-a_{-n} = a_n$ celé. Z a) dále plyne, že a_n je dělitelné 3, právě když je $-n$, tj. také n , dělitelné třemi.

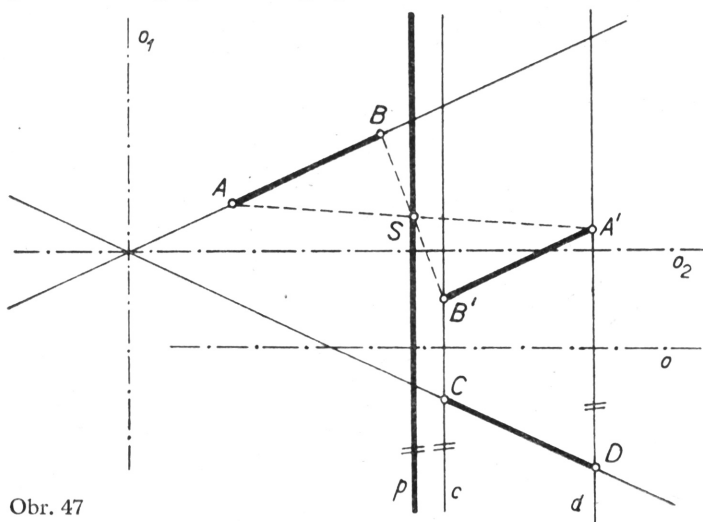
Závěr: Dokázali jsme, že pro každé celé číslo n je číslo a_n celé a že číslo a_n je dělitelné 3, právě když je n dělitelné 3.

Řešil *Tomáš Mašek*,
žák třídy 2. f SVVŠ, W. Piecka,
Praha 2

3. V rovine sú dané dve zhodné úsečky AB , CD ; priamky AB , CD sú rôznobežné. Vyšetrite množinu všetkých bodov S , ktoré majú túto vlastnosť: súmernosť podľa stredu S prevedie úsečku AB na úsečku súmerne združenú s úsečkou CD podľa vhodnej osi o . [6 bodov]

RIEŠENIE. Označme $A'B'$ úsečku súmerne združenú s úsečkou AB podľa stredu S (obr. 47). Zrejme platí

$A'B' \parallel AB$. Rôznobežné priamky AB a CD majú dve osi súmernosti; označme ich o_1 a o_2 . Pretože $A'B' \parallel AB$, platí buď $o \parallel o_1$ alebo $o \parallel o_2$.



Obr. 47

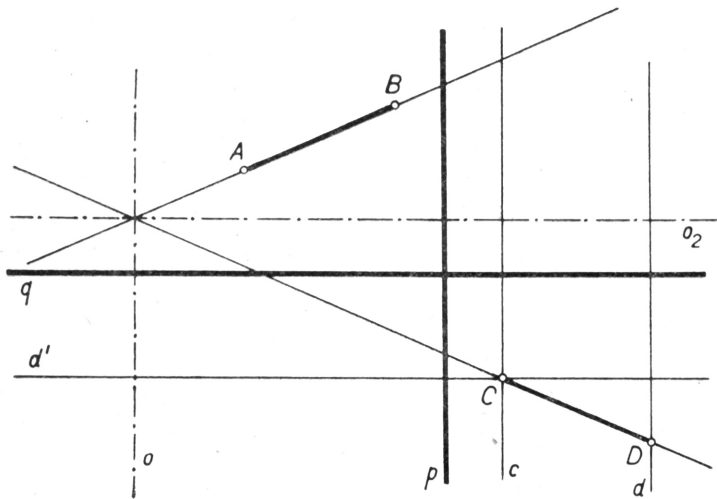
1. Ak je $o \parallel o_2$, potom body súmerne združené s bodmi C, D podľa osi o ležia na priamke c , resp. d , ktoré sú kolmé na os o a teda aj na os o_2 , pričom bod C leží na priamke c , bod D leží na priamke d . Všetky úsečky $A'B'$ sú zrejme navzájom rovnobežné (pretože $A'B' \parallel AB$) a ich koncové body ležia na priamkach c a d (pretože sú súmerne združené s úsečkou CD podľa osi o). Bod S je stredom úsečky $A'A$. Keďže bod A' prebieha priamku d , prebieha bod S priamku $p \parallel d$, ktorá má rovnakú vzdialenosť od bodu A a priamky d .

Ak je $o \parallel o_1$, dokáže sa analogickou úvahou, že bod S prebieha priamku q rovnobežnú s priamkou d' (d' je

priamka rovnobežná s osou o_2 prechádzajúca bodom C)
a rovnako vzdialenú od bodu A a priamky d' .

2. Teraz dokážeme, že každý bod priamky p i každý bod priamky q patrí k hľadanej množine. Nech S je bod priamky p . Potom bod A' súmerne združený s bodom A podľa stredu S leží na priamke $d \parallel o_1$, bod B' súmerne združený s bodom B podľa stredu S leží na priamke $c \parallel o_1$ a platí $AB \parallel A'B'$. Osou súmernosti úsečiek $A'B'$ a CD je priamka o , ktorá je osou súmernosti úsečky $A'D$, resp. $B'C$.

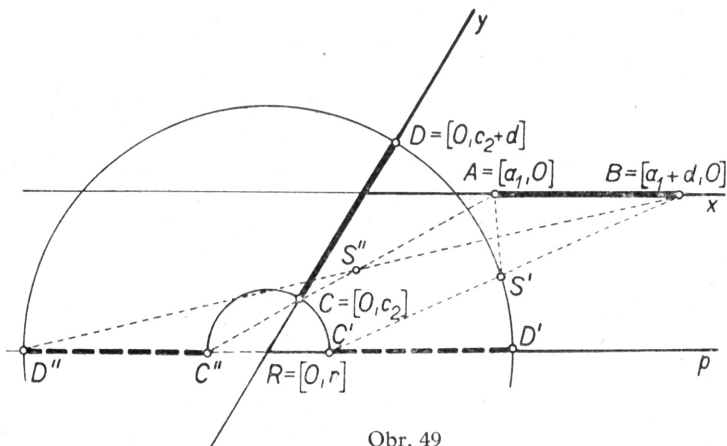
Āk S je bod priamky q , sa analogicky ukáže, že osou súmernosti úsečky $A'B'$ súmerne združenej s úsečkou AB podľa stredu S a úsečky CD je priamka o , ktorá je osou súmernosti úsečky $B'D$, resp. $A'C$.



Obr. 48

Záver: Ukázali sme, že hľadanou množinou bodov S je zjednotenie priamok p a q , ktoré majú tieto vlastnosti: Priamka $p \parallel d$ je rovnako vzdialená od bodu A a priamky d , kde priamka d je rovnobežka s osou o_1 vedená bodom D . Priamka $q \parallel d'$ je rovnako vzdialená od bodu A a priamky d' , kde d' je rovnobežka s osou o_2 vedená bodom C (obr. 48).

Riešil *Marián Déněš*,
žiak 9c ZDŠ, Košická, Bratislava



Obr. 49

JINÉ ŘEŠENÍ. V rovině (obr. 49) zvolme rovnoběžkovou soustavu souřadnou tak, aby $A \equiv [a_1; 0]$, $B \equiv [a_1 + d; 0]$, $C \equiv [0; c_2]$; $D \equiv [0, c_2 + d]$, kde $d > 0$. Při středové souměrnosti je obraz přímky rovnoběžný se vzorem, to znamená, že úsečka $C'D'$ souměrně sdružená s úsečkou CD dle nějaké osy o leží na přímce rovnoběžné s AB . Označme tuto přímku p ; nechť má rovnici

$$y = r.$$

Na této přímce p sestrojíme otočením úsečky CD kolem průsečíku $R = p \cap CD$ dvě úsečky $C'D'$ a $C''D''$. Označme S , S' středy souměrnosti úseček AB , $C'D'$ a AB , $C''D''$. Platí

$$\begin{aligned} C' &\equiv [c_2 - r; r], & D' &\equiv [c_2 + d - r; r], \\ C'' &\equiv [r - c_2; r], & D'' &\equiv [r - c_2 - d; r], \end{aligned}$$

čili

$$S' = \frac{A + B + C' + D'}{4} = \left[\frac{a_1 + c_2 + d - r}{2}; \frac{r}{2} \right],$$

$$S'' = \frac{A + B + C'' + D''}{4} = \left[\frac{a_1 + r - c_2}{2}; \frac{r}{2} \right].$$

Protože bod R probíhá celou přímkou CD , probíhá parametr r množinu všech reálných čísel. Označme $\frac{r}{2} = t$.

Potom parametrické vyjádření množiny bodů S' je

$$x = \frac{a_1 + c_2 + d}{2} - t,$$

$$y = t,$$

$$t \in (-\infty, \infty);$$

parametrické vyjádření množiny bodů S'' je

$$x = \frac{a_1 - c_2}{2} + t,$$

$$y = t,$$

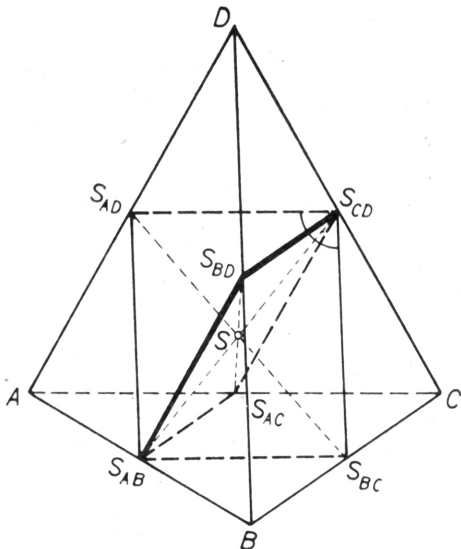
$$t \in (-\infty, \infty).$$

Množinou středů souměrnosti je dvojice navzájem kolmých přímek, které jsou rovnoběžné s osami úhlů přímek AB , CD a prochází bodem, jenž ve výše zvolené soustavě souřadnic má souřadnice $\left[\frac{2a_1 + d}{4}; \frac{2c_2 + d}{4} \right]$.

Řešil Jan Mašek, žák 3f SVVŠ,
Praha 2, W. Piecka

4. V priestore sú dané štyri rôzne body A, B, C, D také, že $AC \perp BD$ a $AD \perp BC$. Potom existuje guľová plocha, ktorá prechádza stredmi všetkých úsečiek AB, AC, AD, BC, BD, CD . Dokážte. [7 bodov]

RIEŠENIE. Označme stredy úsečiek AB, AC, AD, BC, BD, CD v uvedenom poradí $S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD}$ (obr. 50). Nech je S stred úsečky $S_{AB}S_{CD}$ (o prí-



Obr. 50

pade $S_{AB} \equiv S_{CD}$ budeme uvažovať zvlášť; zatiaľ predpokladajme, že body $S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD}$ sú navzájom rôzne). Podľa známej planimetrickej vety je $S_{AB}S_{AD} \parallel BD$ a tiež $S_{BC}S_{CD} \parallel BD$, z čoho vyplýva, že $S_{AB}S_{AD} \parallel S_{BC}S_{CD}$. Analogicky sa ukáže, že $S_{AD}S_{CD} \parallel$

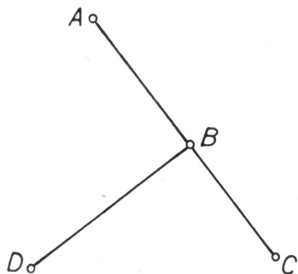
$\parallel S_{AB}S_{BC}$. Štvoruholník $S_{AB}S_{BC}S_{CD}S_{AD}$ je teda rovnobežník a bod S je súčasne stredom úsečky $S_{AD}S_{BC}$. Platí preto: $SS_{AB} = SS_{BC} = SS_{CD} = SS_{AD}$ a keďže $AC \perp BD$ a $S_{AB}S_{BC} \parallel AC$, $S_{BC}S_{CD} \parallel BD$, je $S_{AB}S_{BC} \perp S_{BC}S_{CD}$ a rovnobežník je zrejme obdĺžnikom, čo znamená, že tiež $SS_{BC} = SS_{CD}$.

Analogicky sa dokáže, že $S_{AB}S_{BD}S_{CD}S_{AC}$ je obdĺžnik a teda platí: $SS_{AB} = SS_{BD} = SS_{AC} = SS_{CD}$. Bod S je teda rovnako vzdialený od všetkých bodov S_{AB} , S_{AC} , S_{AD} , S_{BC} , S_{BD} , S_{CD} čiže existuje guľová plocha so stredom S , ktorá všetkými týmito bodmi prechádza.

Zostáva nám ešte uvažovať o prípade $S_{AB} \equiv S_{CD}$. Ak by tento prípad nastal, boli by body A, B, C, D vrcholmi rovnobežníka $ACBD$, v ktorom $AD \parallel BC$. Vzhľadom na predpoklad $AD \perp BC$ nemôže však tento prípad nastať. Analogicky se vylúčia prípady: $S_{AC} \equiv S_{BD}$, $S_{AD} \equiv S_{BC}$.

Riešil *Bohuš Sivák*,
žiak 2a SVŠ, Zvolen

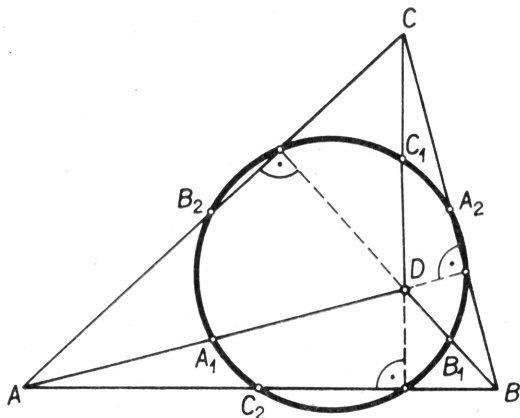
JINÉ ŘEŠENÍ. Žádné tři z těchto čtyř bodů nemohou ležet v přímce. Po označení podle obr. 51 by totiž musel být $\angle DAC = 90^\circ$, takže body A, B by splývaly, což by



Obr. 51

byl spor s předpokladem. Při jiné poloze bodů dojdeme obdobným postupem opět ke sporu.

Budou-li body A, B, C, D ležet v rovině, budou body A, B, C tvořit vrcholy trojúhelníku a bod D bude ortocentrem $\triangle ABC$ (obr. 52). Střed y zmíněných úseček označené $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ pak budou ležet na tzv. *Feuerbachově kružnici* devíti bodů.*) Touto kružnicí lze proložit nekonečně mnoho kulových ploch.



Obr. 52

Neleží-li tyto body v rovině, tvoří vrcholy čtyřstěnu. Střed y úseček AB, AC, AD, BC, BD, CD označme podle obr. 53. Sestrojíme-li pravoúhlý průmět tohoto čtyřstěnu do roviny ABC , bude obrazem vrcholu D ortocentrum D' trojúhelníku ABC . Úsečky BC a CA jsou

*) *Poznámka.* Feuerbachova kružnice trojúhelníku ABC prochází těmito devíti body: a) střed y stran A_2, B_2, C_2 , b) střed y A_1, B_1, C_1 úseček, určených vrcholy a průsečíkem výšek a c) (v úloze nepoužitými) patami výšek tohoto trojúhelníku.

velikosti, je kružnice jemu opsaná shodná s kružnicí opsanou trojúhelníku $A_2B_2C_2$ a úsečka spojující středy je kolmá k rovinám obou kružnic. Tyto dvě kružnice tedy leží na kulové ploše, tj. existuje kulová plocha, která prochází středy všech úseček AB , AC , AD , BC , BD , CD .

133

VI. Desátá mezinárodní matematická olympiáda

Jubilejní desátý ročník *MMO* uspořádal *SSSR* v *Moskvě* ve dnech 5.—19. července 1968. Zúčastnily se ho delegace dvanácti zemí: *Anglie, Bulharska, Československa, Itálie, Jugoslávie, Maďarska, Mongolska, NDR, Polska, Rumunska, SSSR a Švédska*; celkem soutěžilo 96 žáků (z toho jedna žákyně). Mimoto byl přítomen též jeden zástupce *Rakouska* jako pozorovatel.

Vedoucí delegací — členové mezinárodní jury, která soutěž řídí — se sjeli v *Moskvě* již 5. července, aby soutěž připravili; osmičlenná *žákovská družstva* přijela spolu se zástupci vedoucích ve dnech 7. a 8. července. *Vlastní soutěž* probíhala ve dnech 10. a 11. července v internátní fyzikálně-matematické střední škole v *Moskvě-Davydkově*. V následujících dnech jury *žákovská* řešení úloh korigovala a hodnotila; dne 14. července pak podle výsledků rozhodla o udělení cen. Slavnostní rozdělení cen se konalo v aule *Moskevské státní university* dne 18. července; 19. července se jednotlivé delegace rozjely opět domů.

Jak je tomu při *MMO* zvykem, zahrnoval program vedle samotné matematické soutěže také řadu vedlejších akcí společenských a kulturních. Účastníkům *MMO* bylo umožněno seznámit se s historickými památkami *Moskvy* (*Kreml, Tretjakovská galérie, muzeum v Ostankinu, borodinské panorama*), navštívili též *Leninovo muzeum v Gorkách u Moskvy*. Ve dnech 15.—17. července byli všichni účastníci olympiády na zájezdu v *Leningradě*, kde si rovněž prohlédli místní pamětihodnosti (*Petro-pavlovská pevnost, křižník Aurora, Isakčejevské muzeum, a zejména nezapomenutelná je návštěva Ermitáže*) a odkud si zajeli také na prohlídku *Petrodvorce*. V *Leningradě* shlédli též představení baletu (*Antonius a Kleopatra*)

a v Moskvě, kde divadelní sezóna již skončila, představení státního cirkusu. Kromě toho se v Leningradě účastníci MMO setkali s místními pionýry v jejich domě na přátelském večírku. Celý program byl tedy velmi bohatý.

Úlohy pro X. MMO byly vybírány jako obvykle z návrhů zaslaných, resp. dodatečně předložených, účastnickými zeměmi. Jednání o výběru úloh vyplnila program zasedání mezinárodní jury v prvních dnech. Výsledkem dlouhých diskusí byl výběr *šesti úloh*, jejichž text uvádíme v dalším. Výběr ani tentokrát nelze pokládat za ideální; i na zasedání jury byly proti němu vznášeny námitky, hlavně v tom smyslu, že v úlohách je málo zastoupena geometrie a že úlohy jsou vesměs dosti snadné. Většina členů jury však, jak se zdá, dávala záměrně přednost úlohám spíše snazším.

Soutěž se konala v osmi třídách internátní střední školy, ve které byli žáci po dobu svého pobytu v Moskvě také ubytováni. Bylo to poprvé, co nebyli všichni účastníci pohromadě; v každé třídě seděl z každého družstva jeden žák. Toto uspořádání zaručilo bezpochyby větší klid pro soutěžící, s výjimkou prvních okamžiků, kdy třídy postupně navštěvovala skupina dvanácti vedoucích delegací, aby mohla soutěžícím vysvětlit event. nejasnosti v textu úloh.

V dalších dnech 10.—13. července byla žákovská řešení úloh obvyklým způsobem opravována a koordinována. Koordinátory bylo šest moskevských mladých matematiků, většinou bývalých olympioniků. *Závěrečné hodnocení* se konalo na schůzi jury dne 14. července. Definitivní schválení bodového hodnocení nezabralo mnoho času, o to více se ho věnovalo diskusi okolo stanovení hranic pro jednotlivé ceny. Většina delegací se snažila o získání co největšího počtu cen; prestižní otázky hrály bezpochyby opět značnou roli. Nakonec bylo rozhodnuto udělit

celkem 64 ceny, ve srovnání s minulými ročníky tedy enormní počet (právě 2/3 soutěžících); hodnotu cen je nutno brát i z tohoto hlediska. *Prvních cen* bylo uděleno 22, *druhých* také 22 a *třetích* 20. K získání třetí ceny postačilo tentokrát 26 bodů (ze 40 možných), k získání druhé ceny 34 bodů, na první cenu bylo zapotřebí 38 bodů. Vedle těchto cen bylo uděleno ještě pět *zvláštních cen*; čtyři za zvláště originální či elegantní řešení, pátou dostala mongolská žákyně za relativně nejlepší výkon.

Československé družstvo soutěžící na X. MMO bylo složeno z osmi žáků vesměs 2. a 3. ročníku SVVŠ. Byli to:

1. *Bohuš Sivák*, Zvolen,
2. *Tomáš Mašek*, Praha,
3. *Martin Bukovčan*, Bratislava,
4. *Pavel Polcar*, Velké Meziříčí,
5. *Libor Polák*, Brno,
6. *Jiří Vinárek*, Praha,
7. *Michal Kaukič*, Námestovo,
8. *Vladimír Müller*, Praha.

Výsledky, jichž dosáhli v soutěži, jsou uvedeny v přiložené *tabulce*. Vzhledem k výsledkům minulých let by se mohlo zdát, že jsou to výsledky velmi dobré. Je však třeba si uvědomit, že úlohy byly vesměs snadné, takže dobrých výsledků dosáhl poměrně značný počet účastníků. V pořadí podle celkového počtu bodů skončila ČSSR na sedmém místě (viz další *tabulka pořadí družstev*); toto umístění vyjadřuje dosti dobře skutečný poměr sil.

V jistém smyslu lze tvrdit, že snadné úlohy odhalí spíše slabší žáky nežli výrazné matematické talenty. Z tohoto hlediska nás pak ovšem zarazí, jestliže tři naši žáci totálně neuspěli při řešení velmi snadné *čtvrté úlohy*, jestliže *třetí úlohu* dokázali bez chyby rozřešit jenom tři z osmi. Potiže činilo našim žákům také tvoření negace tvrzení s kvantifikátory, rovněž nevynikali v schopnosti systematického pro-

bírání jednotlivých případů, které se vyskytovaly v rozboru některých úloh (např. *první, druhé, šesté*).

Při přípravě čs. družstva na další, *XI. MMO*, které se má konat *v červenci 1969 v Rumunsku*, bude proto potřeba ještě více prohloubit nejen znalost matematických obrátů, metod a algoritmů, ale také umění logických rozborů; nelze přitom opomenout ani zdánlivě „vedlejší“ formální stránku: formulace tvrzení a vůbec redakce a stylizace textu řešení. Vedle toho však bude, zdá se, potřeba vzít v úvahu i tendenci, která se začíná u *MMO* projevovat: od klasické, elementární, školské matematiky k matematice modernější, k matematické analýze i event. jiným moderním disciplínám. I když se pravděpodobně v příštím ročníku opět dostane ke slovu syntetická geometrie, přijdou jistě znovu návrhy úloh podobných, jako se vyskytly v *X. ročníku*: vyšetřování průběhu funkcí, nerovnosti i odhady, limity posloupností a součty řad.

Zároveň však v Moskvě bylo možno pozorovat určitou diferenciaci mezi delegacemi v názoru na *MMO* vůbec: lze se na ni dívat jako na vyvrcholení obdobných soutěží domácích (a pak ovšem nemůže být příliš snadná) anebo jako na prostředek propagace matematiky a povzbuzení zájmu o ni. Není vyloučeno, že při event. dalším rozšíření počtu účastnických zemí nabudou podobné problémy na významu.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY A JEJICH ŘEŠENÍ

1. Dokažte, že existuje jediný trojúhelník takový, že délky jeho stran jsou vyjádřeny třemi po sobě jdoucími přirozenými čísly a jeden z jeho úhlů je dvojnásobkem jednoho ze zbývajících dvou.

(*Rumunsko, 6 bodů*)

ŘEŠENÍ (B. Sivák)

Nechť existuje trojúhelník ABC se stranami $BC = n - 1$, $CA = n$, $AB = n + 1$, kde n je přirozené číslo a v němž je jeden úhel dvojnásobkem jednoho ze zbývajících dvou. Označme úhly $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. Protože proti větší straně leží v trojúhelníku vždy větší úhel, takže nutně $\alpha < \beta < \gamma$, máme jen tyto tři možnosti:

a) $\beta = 2\alpha$, b) $\gamma = 2\beta$, c) $\gamma = 2\alpha$. Podle kosinové věty máme

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \\ &= \frac{(n+1)^2 + n^2 - (n-1)^2}{2(n+1) \cdot n} = \frac{n+4}{2(n+1)}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \\ &= \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - n^2}{2(n+1)(n-1)} = \frac{n^2 + 2}{2(n^2 - 1)} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \\ &= \frac{n^2 + (n-1)^2 - (n+1)^2}{2n(n-1)} = \frac{n-4}{2(n-1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

a) Jestliže $\beta = 2\alpha$, je $\cos \beta = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, tedy

$$\frac{n^2 + 2}{2(n^2 - 1)} = \frac{(n+4)^2}{2(n+1)^2} - 1$$

a odtud

$$n^3 - 2n^2 - 4n + 8 = 0,$$

tj.

$$(n-2)^2(n+2) = 0.$$

Protože n je přirozené, muselo by být $n = 2$ a trojúhelník ABC by měl strany délek 1, 2, 3, které ovšem nevyhovují trojúhelníkové nerovnosti. Tento případ tedy vyloučíme.

b) Jestliže $\gamma = 2\beta$, je $\cos \gamma = 2 \cos^2 \beta - 1$, tzn.

$$\frac{n-4}{2(n-1)} = \frac{(n^2+2)^2}{2(n^2-1)^2} - 1,$$

čili

$$2n^4 - 3n^3 - 13n^2 + 3n + 2 = 0$$

neboli

$$n(2n^3 - 3n^2 - 13n + 3) = -2.$$

Na obou stranách této rovnosti stojí celá čísla, z čehož plyne, že je nutně buď $n = 2$ nebo $n = 1$. První možnost jsme vyloučili již v předchozím případě, avšak ani $n = 1$ není možné, neboť by pak strana BC měla nulovou délku.

c) Nechtě tedy konečně $\gamma = 2\alpha$, tedy

$$\frac{n-4}{2(n-1)} = \frac{(n+4)^2}{2(n+1)^2} - 1$$

a odtud

$$2n^3 - 7n^2 - 17n + 10 = 0,$$

což lze napsat ve tvaru

$$(n-5)(2n^2 + 3n - 2) = 0.$$

Víme již, že je nutně $n > 2$, avšak pro $n > 2$ je $2n^2 + 3n - 2 > 8 + 6 - 2 > 0$, takže jediným řešením je $n = 5$.

Pro $n = 5$ má trojúhelník ABC strany 4, 5, 6; přesvědčíme se, že pak skutečně $\gamma = 2\alpha$. Podle vzorců (1) – (3)

je $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $\cos \gamma = \frac{1}{8}$. Odtud snadno vyplývá $\cos 2\alpha =$

$= \cos \gamma$. Úhel α je nejmenší (leží proti nejkratší straně), takže $0^\circ < \alpha < 60^\circ$. Musí tedy být $2\alpha = \gamma$. Trojúhelník o stranách 4, 5, 6 má tedy všechny požadované vlastnosti a je jediný takový, c . b . d.

2. Najděte všechna přirozená čísla x taková, že součin jejich cifer (v dekadickém zápisu) je roven $x^2 - 10x - 22$.

(Československo, 7 bodů)

ŘEŠENÍ. (M. Kaukič)

Označme $P(x)$ součin cifer čísla x . Nejprve si dokážeme, že pro každé přirozené x je $P(x) \leq x$. Skutečně, nechť

$$x = c_0 + 10c_1 + 10^2c_2 + \dots + 10^nc_n,$$

kde $c_i (i = 0, \dots, n)$ jsou cifry čísla x ; $0 \leq c_i \leq 9$, $0 < c_n \leq 9$. Součin n -cifer $c_0c_1 \dots c_{n-1}$ je zřejmě menší než 10^n , takže

$$\begin{aligned} P(x) &= c_0c_1 \dots c_n < 10^n c_n \leq \\ &\leq 10^n c_n + 10^{n-1}c_{n-1} + \dots + 10c_1 + c_0 = x. \end{aligned}$$

Má-li platit $P(x) = x^2 - 10x - 22$, musí být

$$x^2 - 10x - 22 \leq x,$$

tedy

$$x^2 - 11x - 22 \leq 0.$$

Řešením této kvadratické nerovnosti dostáváme $x \leq 13$.

Pro jednociferná x je ovšem $P(x) = x$, bylo by tedy

$$x^2 - 10x - 22 = x,$$

tzn.

$$x^2 - 11x - 22 = 0,$$

avšak tato rovnice nemá žádné přirozené řešení.

Pro dvojciferné $x < 20$ je $P(x) = x - 10$, tedy má být

$$x^2 - 10x - 22 = x - 10,$$

čili

$$x^2 - 11x - 12 = 0.$$

Jediným přirozeným řešením je $x = 12$; to je tedy jediné přirozené číslo vyhovující podmínkám úlohy.

3. Je dána soustava rovnic s neznámými $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$ax_1^2 + bx_1 + c = x_2,$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = x_3,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n,$$

$$ax_n + bx_n + c = x_1,$$

kde a, b, c jsou reálná čísla, $a \neq 0$. Dokažte, že tato soustava:

I. nemá žádné reálné řešení, jestliže

$$(b - 1)^2 - 4ac < 0;$$

II. má právě jedno reálné řešení, jestliže

$$(b - 1)^2 - 4ac = 0;$$

III. má více než jedno reálné řešení, jestliže

$$(b - 1)^2 - 4ac > 0.$$

(Bulharsko, 7 bodů).

ŘEŠENÍ. (B. Sivák)

Označme $P(x) = ax^2 + (b - 1)x + c$; danou soustavu pak můžeme přepsat ve tvaru

$$P(x_1) = x_2 - x_1,$$

$$P(x_2) = x_3 - x_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P(x_{n-1}) = x_n - x_{n-1},$$

$$P(x_n) = x_1 - x_n.$$

Sečtením všech rovnic dostáváme

$$P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) = 0. \quad (*)$$

I. Necht' $(b - 1)^2 - 4ac < 0$. Potom je buď $P(x) > 0$ pro všechna reálná x (při $a > 0$), anebo je $P(x) < 0$ pro všechna reálná x (při $a < 0$). V žádném případě tedy nemůže platit rovnost (*).

II. Necht' $(b - 1)^2 - 4ac = 0$. Při $a > 0$ je opět $P(x) \geq 0$ pro všechna reálná x , při $a < 0$ je $P(x) \leq 0$ pro

všechna reálná x , takže rovnost (*) může být splněna jen v tom případě, jestliže $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_n) = 0$. Avšak rovnice $P(x) = 0$ má při $(b-1)^2 - 4ac = 0$ právě jedno řešení, a to $x = \frac{1-b}{2a}$. Jediným řešením dané

soustavy je tedy

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1-b}{2a},$$

které skutečně soustavě vyhovuje.

III. Necht' $(b-1)^2 - 4ac > 0$. Rovnice $P(x) = 0$ má v tomto případě dvě různá reálná řešení $x = \alpha$ a $x = \beta$. Snadno se přesvědčíme, že pak také

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \alpha$$

a

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \beta$$

jsou dvě (různá) řešení dané soustavy, (která ovšem může mít event. ještě jiná, další řešení).

4. Dokažte, že v každém čtyřstěnu existuje takový vrchol, že z úseček rovných hranám, které z něho vycházejí, lze sestavit trojúhelník.

(*Polsko*, 5 bodů)

ŘEŠENÍ. (*B. Sivák*)

Budiž $ABCD$ libovolný daný čtyřstěn, přičemž označení volíme tak, aby hrana AB byla nejdelší (jedna z nejdelších). Pro stěny ABC , ABD čtyřstěnu platí trojúhelníkové nerovnosti, tj.

$$\begin{aligned} AC + BC &> AB, \\ AD + BD &> AB; \end{aligned}$$

sečtením dostaneme nerovnost

$$AC + BC + AD + BD > 2AB,$$

kteřou můžeme napsat též jako

$$(AC + AD - AB) + (BC + BD - AB) > 0.$$

Nutně tedy platí buď $AC + AD > AB$ anebo $BC + BD > AB$. Protože hrana AB je nejdelší, je možné buď z úseček AC , AD , AB anebo z BC , BD , BA sestrojit trojúhelník.

5. Necht' f je funkce s reálnými hodnotami definovaná pro všechna reálná x a taková, že pro každé x platí

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}, \quad (*)$$

kde a je dané kladné číslo.

I. Dokažte, že funkce f je periodická (tzn. že existuje kladné číslo b takové, že $f(x + b) = f(x)$ pro všechna x).

II. Udejte pro $a = 1$ příklad funkce f s uvedenými vlastnostmi, která není identicky rovna konstantě.

(NDR, 7 bodů)

ŘEŠENÍ

I. Má-li funkce f být definována pro všechna x a přitom vyhovovat (*), musí nutně být

$$f(x) \geq [f(x)]^2$$

a tedy $f(x) \leq 1$, a současně $f(x) \geq \frac{1}{2}$, takže celkem

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$$

pro všechna reálná x .

Počítejme dále $f(x + 2a)$ podle (*). Je

$$\begin{aligned}
 f(x + 2a) &= f[(x + a) + a] = \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x + a) - [f(x + a)]^2} = \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x + a)[1 - f(x + a)]} = \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} \cdot \left\{ \frac{1}{2} - \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} \right\}} = \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \{f(x) - [f(x)]^2\}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left[f(x) - \frac{1}{2}\right]^2} = \\
 &= \frac{1}{2} + \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} = f(x).
 \end{aligned}$$

Platí tedy

$$f(x + 2a) = f(x)$$

pro všechna x ; za číslo b lze tedy vzít $b = 2a$.

II. Příkladů funkce s požadovanými vlastnostmi je ovšem mnoho. Obecně lze takovou funkci definovat takto:

1. pro $0 \leq x < 1$ definujeme $f(x)$ zcela libovolně, ale tak, aby $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$;

2. pro $1 \leq x < 2$ určíme $f(x)$ pomocí (*), tj. tak, aby

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x - 1) - [f(x - 1)]^2};$$

3. pro všechna ostatní x určíme $f(x)$ tak, aby f byla periodická s periodou 2.

Lze ostatně udat i některé jednoduché konkrétní příklady jako

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|,$$

anebo

$$f(x) = \frac{1}{2} \text{ pro } 0 \leq x < 1,$$

$$f(x) = 1 \text{ pro } 1 \leq x < 2$$

a dále periodicky, atp.

6. Pro každé přirozené číslo n vypočtěte součet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{4} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] + \dots$$

a dokažte správnost odvozeného vzorce.

Symbol $[x]$ zde značí celou část čísla x , tj. největší celé číslo m takové, že $m \leq x$.

(Anglie, 8 bodů)

Poznámka.

Tato úloha byla poprávu ohodnocena největším počtem bodů ani ne proto, že by snad byla nejtěžší (uvidíme, že má velmi krátké a elegantní řešení), ale proto, že je podnětná a inspiruje k dalšímu zobecnění získaných výsledků, a to v několika různých směrech. Proto si tu také uvedeme různé způsoby řešení.

ŘEŠENÍ 1 (autorské)

Vypíšeme si součet $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right]$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$

$$n = 1: \left[\frac{2}{2} \right] + \left[\frac{3}{4} \right] + \left[\frac{5}{8} \right] + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots,$$

$$n = 2: \left[\frac{3}{2} \right] + \left[\frac{4}{4} \right] + \left[\frac{6}{8} \right] + \dots = 1 + 1 + 0 + 0 + \dots,$$

$$n = 3: \left[\frac{4}{2} \right] + \left[\frac{5}{4} \right] + \left[\frac{7}{8} \right] + \dots = 2 + 1 + 0 + 0 + \dots,$$

výsledky nás vedou k formulaci hypotézy $S_n = n$, kterou se pokusíme dokázat. Předně je zřejmé, že pro $n < 2^k$ je už $\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} < 1$, a tedy $\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right] = 0$. V každém součtu

S_n je tedy jen konečný počet nenulových sčítanců. Pozorujme, jak se liší sčítanci

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right] \text{ a } \left[\frac{(n + 1) + 2^k}{2^{k+1}} \right].$$

v součtech S_n a S_{n+1} . Zřejmě vždy

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right] \leq \left[\frac{(n + 1) + 2^k}{2^{k+1}} \right],$$

takže nutně $S_n \leq S_{n+1}$. Poněvadž však

$$\frac{(n + 1) + 2^k}{2^{k+1}} - \frac{n + 2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

nemůže být rozdíl

$$\left[\frac{(n + 1) + 2^k}{2^{k+1}} \right] - \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right]$$

větší než 1. Kdy však je právě roven 1? V takovém případě musí existovat přirozené číslo m takové, že

$$\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} < m \leq \frac{n + 1 + 2^k}{2^{k+1}}.$$

Odtud

$$n + 2^k < m \cdot 2^{k+1} \leq n + 2^k + 1.$$

Avšak $n + 2^k$ a $n + 2^k + 1$ jsou dvě po sobě následující přirozená čísla a také číslo $m \cdot 2^{k+1}$ je přirozené. Musí tedy být

$$m \cdot 2^{k+1} = n + 2^k + 1,$$

tj.

$$n + 1 = 2^k(2m - 1).$$

Snadno je vidět, že při daném n existuje právě jedno celé nezáporné k takové, že lze najít m tak, aby $n + 1 = 2^k(2m - 1) - k$; k tomu stačí rozložit číslo $n + 1$ na prvočinitele: k pak bude počet dvojek v tomto rozkladu.

Pro všechna ostatní k bude pak nutně

$$\left[\frac{n + 1 + 2^k}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right].$$

Při přechodu od S_n k S_{n+1} změní se tedy právě jeden sčítanec o jednotku, všechny ostatní zůstanou nezměněny. Platí tedy pro každé n : $S_{n+1} = S_n + 1$. Poněvadž však $S_1 = 1$, je skutečně $S_n = n$, c.b.d.

ŘEŠENÍ 2

Číslo n vyjádříme v dvojkové soustavě, tedy ve tvaru $n = c_0 + 2c_1 + 2^2c_2 + 2^3c_3 + \dots + 2^rc_r + \dots$; $c_j = 0, 1$.

Potom

$$n + 2^k = c_0 + \dots + 2^{k-1}c_{k-1} + 2^k(c_k + 1) + 2^{k+1}c_{k+1} + \dots + 2^rc_r + \dots$$

$$\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} = 2^{-k-1}c_0 + 2^{-k}c_1 + \dots + 2^{-2}c_{k-1} + 2^{-1}(c_k + 1) + c_{k+1} + c_{k+1} + \dots + 2^{r-k-1}c_r + \dots$$

a dále zřejmě

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{1 + c_k}{2} \right] + c_{k+1} + 2c_{k+2} + \dots + 2^{r-k-1}c_r + \dots$$

Avšak $c_k = 0$ nebo 1, takže $\left[\frac{1 + c_k}{2} \right] = c_k$. Máme tedy

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] = c_0 + c_1 + 2c_2 + 2^2c_3 + \dots$$

$$\left[\frac{n+2}{4} \right] = c_1 + c_2 + 2c_3 + \dots$$

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] = c_k + c_{k+2} + 2c_{k+2} + \dots$$

Sečtením dostáváme na levé straně právě součet S_n a na pravé straně

$$c_0 + 2c_1 + 2^2c_2 + \dots + 2^rc_2 + \dots = n,$$

tedy

$$S_n = n.$$

ŘEŠENÍ 3. (*M. Bukovčan*— upraveno)

Uvažujme všechna přirozená čísla od 1 do n . Můžeme si je rozdělit do dvou skupin: na čísla lichá, kterých je právě $\left[\frac{n+1}{2} \right]$, a na čísla sudá. Sudá čísla si dále rozdělíme opět do dvou skupin: na čísla nedělitelná čtyřmi — a těch je právě $\left[\frac{n+2}{4} \right]$ a na čísla dělitelná čtyřmi. Tuto poslední skupinu dále dělíme na čísla nedělitelná osmi — a těch je $\left[\frac{n+4}{8} \right]$ — a zbytek —. Tímto způsobem postupujeme dále až bude při některém dělení druhá skupina prázdná. Poněvadž takto vyčerpáme všechna přirozená čísla od 1 do n (a těch je právě n) a přitom každé číslo bude právě v jedné skupině — vidíme, že platí $S_n = n$.

Ukážeme si ještě, že skutečně $\left\lceil \frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right\rceil$ je právě počet těch přirozených čísel $\leq n$, která nejsou dělitelná 2^{k+1} , ale jsou dělitelná 2^k , kde $k = 0, 1, 2, \dots$. Čísla s těmito vlastnostmi jsou tvaru

$$m = 2^k(2l - 1), \quad l = 1, 2, \dots,$$

přítom z nerovnosti $m \leq n$ plyne postupně

$$2^k(2l - 1) \leq n,$$

$$2l - 1 \leq \frac{n}{2^k},$$

$$l \leq \frac{n + 2^k}{2^{k+1}}.$$

Největší přípustná hodnota l je tedy $\left\lceil \frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right\rceil$, avšak to je zároveň hledaný počet těchto čísel m .

Toto řešení vede k *zobecnění úlohy*, kdy dvojku nahradíme libovolným prvočíslem p . Každé přirozené číslo m lze vyjádřit — a to právě jedním způsobem — ve tvaru

$$m = p^k \cdot q,$$

kde q není dělitelno prvočíslem p . Toto číslo q pak lze dále vyjádřit — opět jediným způsobem — ve tvaru

$$q = lp - r, \quad 1 \leq r < p, \quad l = 1, 2, \dots$$

Analogicky jako v předchozím případě pak dostaneme z nerovnosti $m \leq n$ postupně

$$n \geq m = p^k \cdot q = p^k(lp - r),$$

$$\frac{n}{p^k} + r \geq lp,$$

$$l \leq \frac{n + rp^k}{p^{k+1}},$$

takže $\left[\frac{n + rp^k}{p^{k+1}} \right]$ je opět právě počet všech těch přirozených čísel m nejvýše rovných n , která jsou dělitelná p^k , ale při dělení číslem p^{k+1} dávají zbytek $p - r$. Vidíme tak, že platí

$$\begin{aligned} & \left[\frac{n+1}{p} \right] + \left[\frac{n+p}{p^2} \right] + \left[\frac{n+p^2}{p^3} \right] + \dots + \\ & + \left[\frac{n+2}{p} \right] + \left[\frac{n+2p}{p^2} \right] + \left[\frac{n+2p^2}{p^3} \right] + \dots + \\ & \quad + \dots + \\ & + \left[\frac{n+p-1}{p} \right] + \left[\frac{n+p(p-1)}{p^2} \right] + \left[\frac{n+p^2(p-1)}{p^3} \right] + \\ & \quad + \dots = n. \end{aligned}$$

ŘEŠENÍ 4. (M. J. Williamson, Anglie)

Nejprve si dokážeme, že pro každé nezáporné reálné x platí

$$\left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x+1}{2} \right] = [x].$$

Skutečně, pro $2l \leq x < 2l+1$ je

$$l \leq \frac{x}{2} < l + \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{2} < l+1,$$

takže

$$\left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x+1}{2} \right] = l + l = 2l = [x].$$

Pro $2l+1 \leq x < 2l+2$ je pak

$$l + \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < l+1 \leq \frac{x+1}{2} < l + \frac{3}{2},$$

takže

$$\left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x+1}{2} \right] = l + l + 1 = 2l + 1 = [x].$$

Platí tedy pro každé nezáporné x

$$[x] - \left[\frac{x}{2} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right].$$

Do této rovnosti dosazujeme za x postupně $\frac{x}{2^k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ a všechny rovnosti pak sečteme:

$$[x] - \left[\frac{x}{2} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right],$$

$$\left[\frac{x}{2} \right] - \left[\frac{x}{2^2} \right] = \left[\frac{\frac{x}{2} + 1}{2} \right] = \left[\frac{x+2}{2^2} \right],$$

$$\left[\frac{x}{2^k} \right] - \left[\frac{x}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right].$$

Pro dosti velké k bude ovšem $\left[\frac{x}{2^{k+1}} \right] = 0$, takže sečtením dostaneme na levé straně $[x]$ a na pravé straně součet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right].$$

Tím je úloha rozřešena, a to dokonce obecněji nežli jen pro celé hodnoty x .

Třetí a čtvrtý způsob řešení lze ještě dále kombinovat. Budiž p prvočíslo, potom pro každé nezáporné reálné x

platí

$$\sum_{j=0}^{p-1} \left[\frac{x+j}{p} \right] = [x],$$

takže opět

$$[x] - \left[\frac{x}{p} \right] = \sum_{j=1}^{p-1} \left[\frac{x+j}{p} \right].$$

Dosazujeme sem za x postupně $x, \frac{x}{p}, \frac{x}{p^2}, \dots$ a po sečtení dostaneme jako konečný výsledek rovnost

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{p-1} \left[\frac{x + jp^k}{p^{k+1}} \right] = [x].$$

Vědoucí delegací na X. MMO

Země	vedoucí	zástupce
Anglie	dr. Norman Routledge	dr. David Monk
Bulharsko	doc. Dojčin Bogdanov Dojčinov	Christo Stojanov Doganov
ČSSR	dr. František Zítek	dr. Jozef Moravčík
Itálie	prof. Tullio Viola	prof. Angelo Pescarini
Jugoslávie	prof. France J. Križanić	Vladimir P. Mičić
Maďarsko	doc. Hódi Endré	dr. Reiman István
Mongolsko	doc. Uršin Sanžimjativ	Aivan Duger
NDR	dr. Helmut Bausch	Herbert Titze
Polsko	prof. Mieczysław Czyżykowski	Mgr. Andrzej Mąkowski
Rumunsko	prof. Constantin Ionescu- -Bujor	Z. Bogdanov
SSSR	doc. E. Morozova	N. B. Vasiljev
Švédsko	dr. Per Martin-Löf	Peter Hackman

Rakouský pozorovatel: prof. Alexander

Přehled výsledků čsl. účastníků.

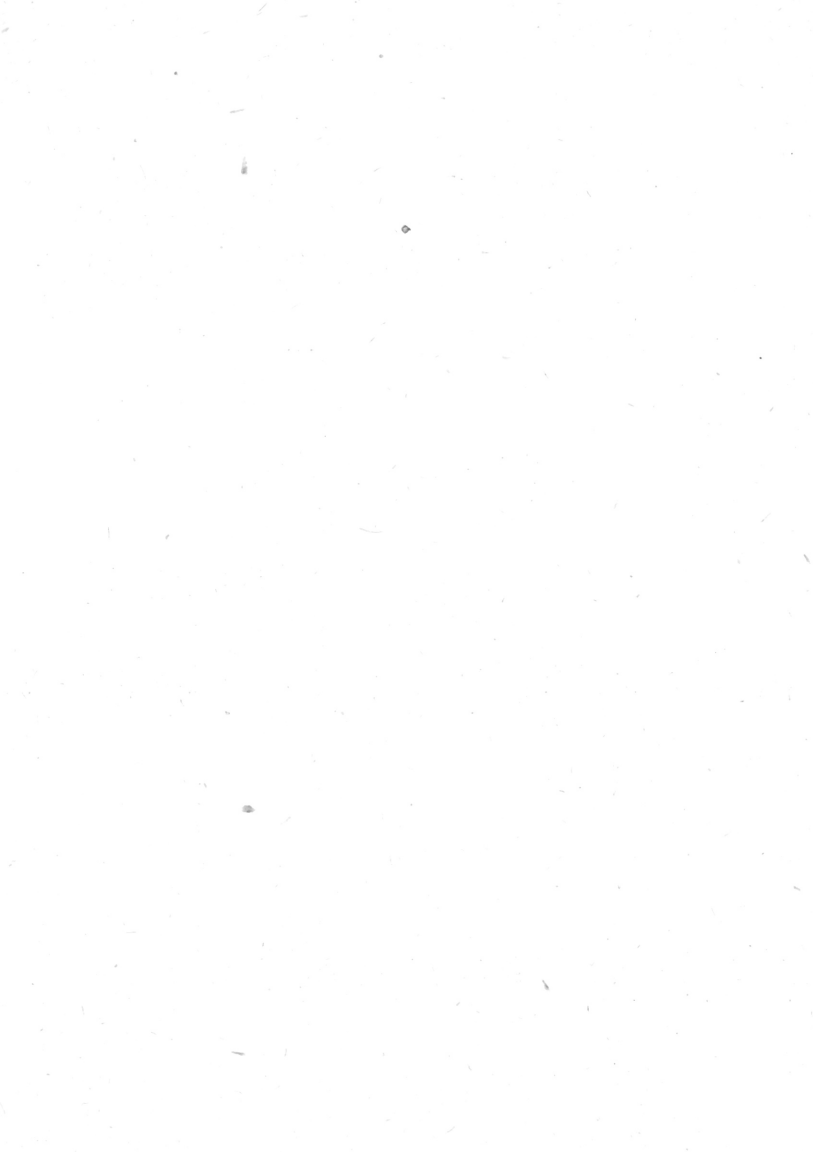
Jméno	Úloha číslo						Celkem
	1	2	3	4	5	6	
B. Sivák	6	7	7	5	7	8	40
T. Mašek	6	7	7	5	7	8	40
M. Bukovčan	3	4	1	0	0	8	16
P. Polcar	5	7	7	0	7	8	34
L. Polák	5	7	1	5	7	8	33
J. Vinárek	6	7	1	5	7	8	34
M. Kaukič	4	7	4	0	0	1	16
V. Müller	6	7	2	5	7	8	35
Družstvo celkem	41	53	30	25	42	57	248

Žáci *B. Sivák* a *T. Mašek* dosáhli maximálního možného počtu bodů a získali tak *první cenu*, žáci *P. Polcar*, *L. Polák*, *J. Vinárek* a *V. Müller* získali *druhou cenu*.

Přehled celkových výsledků družstev

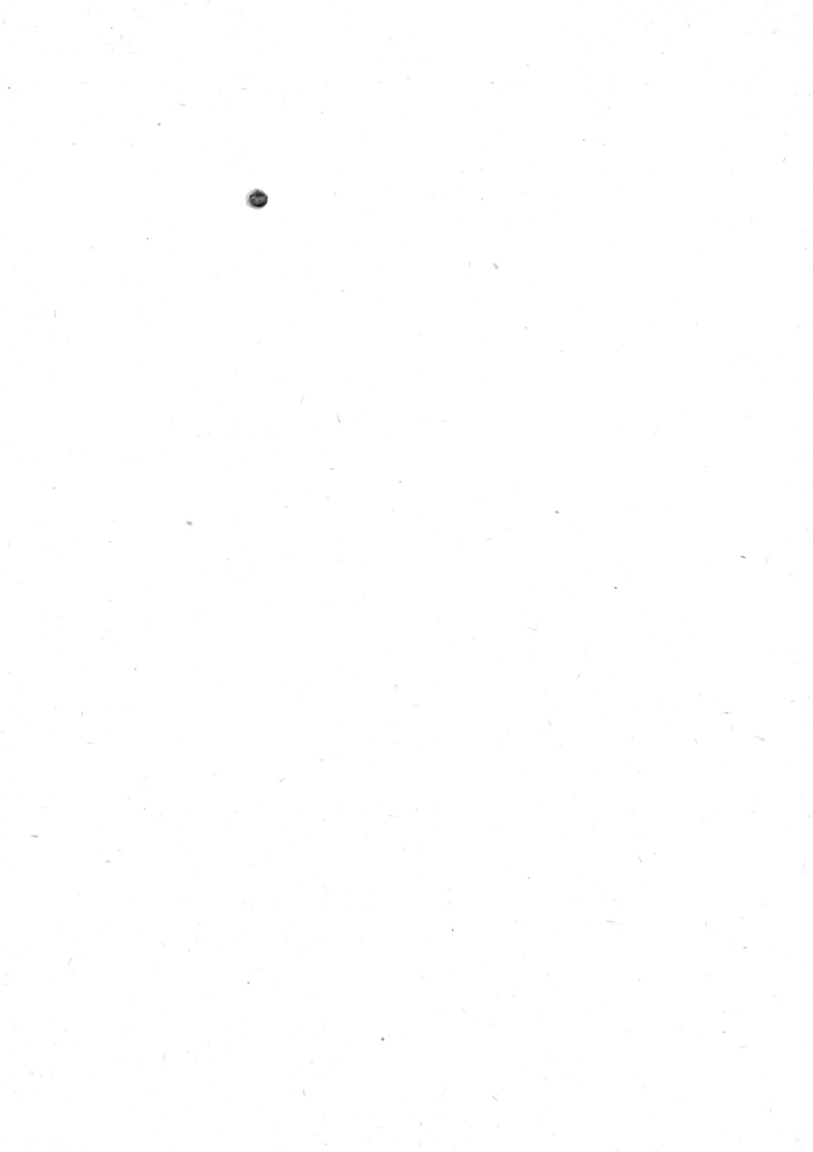
Země	Počet cen					Pořadí podle počtu bodů
	I.	II.	III.	Cel- kem	celkový počet bodů	
Anglie	3	2	2	7	263	4
Bulharsko	0	3	1	4	204	9
Československo	2	4	0	6	248	7
Itálie	0	0	1	1	132	11
Jugoslávie	0	0	3	3	177	10
Maďarsko	3	3	2	8	291	3
Mongolsko	0	0	0	0	74	12
NDR	5	3	0	8	304	1
Polsko	2	3	2	7	262	5
Rumunsko	1	1	2	4	208	8
SSSR	5	1	2	8	298	2
Švédsko	1	2	5	8	256	6
Celkem	22	22	20	64	—	—

Vedle těchto cen bylo uděleno ještě 5 *zvláštních cen*: Dva maďarští, jeden anglický a jeden jugoslávský žák dostali ceny za originální řešení, příp. zobecnění úloh; pátou zvláštní cenu dostala mongolská žákyně za nejlepší výkon (získala 19 bodů).



OBSAH

<i>Předmluva</i>	3
<i>I. O průběhu XVII. ročníku matematické olympiády</i>	10
<i>II. Přípravné úlohy I. kola</i>	31
1. Kategorie A	31
2. Kategorie B	40
3. Kategorie C	48
4. Kategorie D	55
<i>III. Soutěžní úlohy I. kola</i>	62
1. Kategorie A	62
2. Kategorie B	70
3. Kategorie C	77
4. Kategorie D	84
<i>IV. Soutěžní úlohy II. kola</i>	93
1. Kategorie A	93
2. Kategorie B	102
3. Kategorie C	107
4. Kategorie D	114
<i>V. Úlohy III. kola kategorie A</i>	120
<i>VI. Desátá mezinárodní matematická olympiáda</i>	134



Edice Pomocné knihy pro žáky
Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. Jan Vyšín, Vlastimil Macháček a dr. František Zítek, Csc.

SEDMNÁCTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1969 — Počet stran 158
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk
Technický redaktor: Pavel Leden

Vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 4, Ostrovní 30, Praha 1
— 5,97 AA (text 5,12 AA, grafika 0,85 AA) — 6,34 VA — Tematická
skupina a podskupina 03/2 — Cena brožovaného výfisku Kčs 8,50
505/21, 852

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou
publikaci č. 95—0—06

15-095-69 Kčs 8,50



matematická
olympiáda

MO

SPN

95-0-06

15-095-69

03/2

Kčs 8,50