

18. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 18. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1968-1969. 11. Mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404581>

Terms of use:

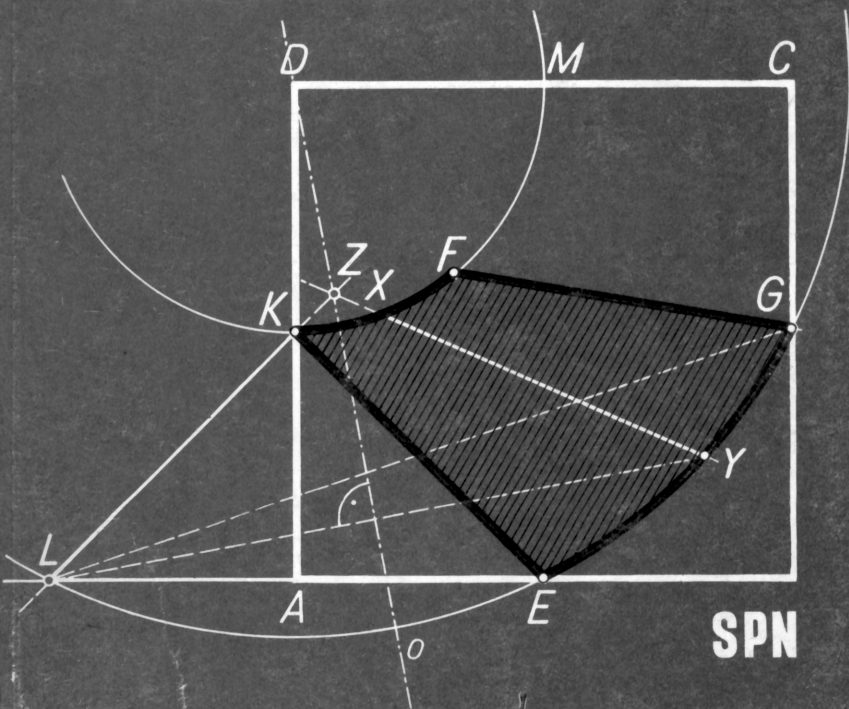
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

XVIII. ročník matematické olympiády



OSMNÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva a řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1968—1969*

JEDENÁCTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Vlastimil Macháček, Jiří Mída a dr. Jozef Moravčík, CSc.

Slovenské části textu přeložil dr. Jozef Moravčík, CSc.

Recenzovali Jitka Kučerová a dr. Miroslav Šisler, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, 1970

Předmluva

Milí účastníci a spolupracovníci celostátní matematické olympiády,

v době, kdy dostáváte do ruky tuto brožuru o XVIII. ročníku naší soutěže, začal už probíhat její jubilejní dvacátý ročník. Místo retrospektiv a bilancí uplynulých dvaceti let, jaké bývají obvyklé při takových příležitostech, pohovoříme si raději o přítomnosti a perspektivách naší matematické olympiády.

Víte všichni, že zejména v XIX. ročníku se objevily v organizaci soutěže některé změny, které byly přijaty někde se sympatiemi, jinde s nepochopením; chtěl bych upozornit, že dosavadními změnami není asi „přerod“ matematické olympiády ukončen, že si okolnosti vynutí změny další, zejména v pojetí a obsahu soutěže. Důvody změn jsou hlavně dvojího druhu: je to jednak reforma, kterou začíná procházet náš školský systém, jednak je to tlak měnícího se obsahu i vyučovacích metod ve středoškolské matematice. Kdežto první příčina je rázu spíše domácího, má druhá charakter mezinárodní, ba světový, i když pravděpodobně její vliv se bude uskutečňovat postupně a pomaleji.

Myslím, že proměny, kterými prochází a ještě bude procházet naše celostátní olympiáda, můžeme stručně charakterizovat tímto heslem: uvolnění tuhé organizace a takřka stabilního tradičního obsahu. Víte, že jsme za-

vedli v XIX. ročníku tři kategorie místo dřívějších čtyř a že každá z těchto tří kategorií je určena pro dva ročníky: kategorie *A* pro IV. a III. ročník gymnasií a odborných středních škol, kategorie *B* pro II. a I. ročník těchto škol a kategorie *Z* pro 9. a příp. 8. ročník základních devítiletých škol. Toto opatření bylo tvrdě kritizováno přívrženci tuhé organizace, kteří by si přáli, aby se obsah soutěže přimyká co nejtěsněji k školským osnovám. Jsme si vědomi, že při této nové organizaci budou v každé kategorii žáci nižšího z obou ročníků vždy trochu handicapováni, žáci vyššího ročníku budou ve výhodě. Neměli bychom však zapomínat, že účastníci *MO* jsou zpravidla žáci nadaní, se zvláštním zájmem o matematiku, kteří obvykle studují soukromě více, než předepisují školní osnovy. Na druhé straně je třeba jednak snížit náročnost úloh ve všech třech kategoriích, vybírat spíše úlohy, které vyžadují určité dovednosti a určitý způsob myšlení a přístup k problému, než úlohy, které jsou prostě aplikováním naučených stereotypů; takovéto úlohy nepatří podle našeho mínění do soutěže vůbec, protože účastník v nich nemůže uplatnit nic ze své tvořivé individuality. Druhá cesta k ulehčení práce v soutěži je v možnosti výběru úloh. Domníváme se, že v každém kole by měly být některé úlohy povinné, některé volitelné se dvěma přibližně stejně obtížnými variantami různé tematiky. Dále jsme pro zachování prvního studijního kola, které má podněcovat a vést účastníky ke studiu; druhé kolo, tj. v podstatě klauzurní práce, by mělo tematicky navazovat na první kolo; práce by měla obsahovat asi tři úlohy, na jejichž řešení by byly k dispozici čtyři hodiny čistého času, jak je tomu v mezinárodních olympiádách. Snad v první vývojové etapě by měly být z těchto tří úloh dvě povinné a jedna volitelná, později by se mohl poměr obou skupin úloh měnit ve prospěch úloh volitelných. Třetí klauzurní kolo by mělo zůstat v celostátní soutěži asi jen

v kategorii *A* s obdobnou organizací jako druhé kolo.*) Ovšem nic nebrání krajským výborům *MO* uspořádat třetí kolo i pro kategorii *Z*, podobně jako jim nic nebrání organizovat např. pro nižší třídy školní či okresní soutěže. Ve všech soutěžních kolech (druhém i třetím) by měl trvale zůstat zaveden systém bodovací, který ovšem nelze míchat se starým systémem klasifikačním. Podle bodovacího systému lze v kraji (republice nebo celostátní federaci) sestavit pořadí a je možno i určitý počet prvních účastníků prohlásit za vítěze, resp. jim udělit podle počtu dosažených bodů první, druhou a třetí cenu, tak jak tomu je na mezinárodních olympiádách i v jiných mezinárodních soutěžích, třeba sportovních.

Úprava organizace kategorií *A*, *B*, *Z*, pravděpodobné snížení jejich náročnosti si vyžádá asi zřízení zvláštní výběrové kategorie *V*, které by se mohli účastnit žáci kterékoli třídy; tato kategorie by byla určena pro vysoce nadprůměrné žáky, pro špičkové matematické talenty, kteří se vyskytují na našich školách ve větším počtu, než je na první pohled vidět, a z nichž mnozí se nezúčastní olympiády právě proto, že úlohy tradiční školské matematiky nejsou pro ně už dosti atraktivní.

Jak vidíte, některé z popsaných organizačních změn už byly provedeny, k některým teprve směřujeme — všechny změny však nejprve zkusíme — a teprve ze zkušeností s nimi vyplyne definitivní úprava. Stálou naší bolestí je jednak nedostatek soutěžních úloh, který nebyl zlikvidován ani vypsáním konkursu *Jednoty*, jednak časová přetíženost žáků pětidenním pracovním týdnem ve škole. Žáci ani jejich učitelé nemají čas na mimořádné studium, na přemýšlení o úlohách, na experimentování a zkoušení různých metod řešení, na vymýšlení variant

*) Jak víte z XIX. ročníku, skutečnost už předstihla tyto naše původní záměry.

úloh a jejich zobecňování, ačkoli toto vše by mělo být nedílnou součástí hlavně studijního kola. Pro nedostatek času neplní náležitě svůj úkol ani různé pomocné akce MO, jako přípravné semináře a kroužky, vydávání studijní literatury — hlavně sbírky *Škola mladých matematiků* — jejíž existenci se nám podařilo prozatím udržet jen s největšími obtížemi a ve zhoršené grafické úpravě. Poměrně nejlépe ještě plní svůj úkol prázdninová soustředění žáků 3. a 2. ročníku gymnasií a středních odborných škol; zde je ovšem třeba velmi citlivě vyvážit jednak zařazení úseků školské matematiky — a jednak extenzi do matematiky neškolské. Další dluh, který tato soustředění a MO vůbec má, je poměr k aplikacím matematiky; zde opět doslovně zápasíme s nedostatkem vhodných a přístupných úloh a s tím, že naši studenti neznají potřebný matematický aparát, tj. některé jednoduché partie tzv. moderní matematiky.

Nyní ještě několik poznámek k postupné přeměně tematické náplně soutěžních úloh, která by asi měla začít v kategorii V a pak ve fakultativních úlohách klauzurních prací. Ve školním roce 1969/70 se začalo učit v I. ročníku gymnasií podle změnžené osnovy, na gymnasia budou v nejbližších letech přicházet absolventi pokusných devítiletů, kteří budou ledacos umět z tzv. moderní matematiky. Mimo to žáci speciálních tříd, tj. žáci nadaní pro matematiku, budou v rozšířeném vyučování — třeba i v zájmových kroužcích — participovat na sondách (pokusech), kde se seznámí s různými zcela novými partiemi matematiky, s novými metodami řešení úloh i s jejich aplikacemi. Tito žáci — jejichž počet postupně stále poroste — budou asi průkopníky nového obsahu MO; pro ně bude třeba soutěž upravovat tak, aby se jim nepředkládaly k řešení muzeální problémy, které mohly být zcela dobře soutěžními úlohami před sto lety, jak trefně poznamenal před několika lety *prof. Adler*, vedoucí

francouzské delegace na IX. MMO v Jugoslávii. Nebudu se na tomto místě rozepisovat o modernější tematice matematických úloh; ti z vás, kteří se aspoň trochu zajímají o moderní matematiku, vědí, oč asi jde.

Nakonec ještě slovo k mezinárodním matematickým olympiádám. Zájem o ně mezi nejrůznějšími zeměmi stále vzrůstá a myslím, že při rozumném pojetí by tu mohla vzniknout pravidelná soutěž opravdu mezinárodní. Ministerstva školství ČSR i SSR předběžně před časem slíbila, že jsou ochotna uspořádat *XIII. MMO* v r. 1971 v Československu při příležitosti dvacátého jubilea domácí olympiády. Ostatní účastnické země mezinárodních olympiád s touto skutečností počítají a všechny okolnosti nasvědčují tomu, že naše ministerstva skutečně příslušná pozvání počátkem r. 1971 pošlou, i když jde o podnik neobyčejně nákladný. Při této příležitosti by se mohl pokusit náš přípravný výbor *XIII. MMO* o reformu neoficiálního statutu, který byl v podstatě vypracován v r. 1962 a který dnes už nevyhovuje.*)

Ještě jedna poznámka: naše družstvo nemá na *MMO* obvykle valné umístění; bývá v žebříčku zemí asi na prostředním místě. Psal jsem už několikrát o této situaci; jistě jedna z příčin je nedobrý psychologický stav našich reprezentantů: nejsou dosti klidní, počátečním neúspěchem snadno znervózní, nemají dost vytrvalosti při překonávání překážek. Ale je tu i jiná příčina: celková úroveň vyučování na našich školách (hlavně v speciálních třídách) je ve srovnání s cizinou nižší. Tento nedostatek se nedá odstranit doplňkovým školením a semináři. V zahraničí, zejména v socialistických státech, se věnuje špičkovým talentům mnohem více péče, tréninku a času než u nás. Nechci pronášet svůj úsudek o tom, zda je to

*) Přípravný výbor *XIII. MMO* se ustavil 16. 6. 1970 a počal již pracovat.

nutné a správné; ale rozhodně při reprezentaci na *MMO* a pravděpodobně i při dalším studiu nese tato péče dobré ovoce.

V závěru předmluvy bych chtěl znovu zdůraznit, že soutěž *MO* je jen jedním z prostředků, jak zainteresovat schopné žáky o matematiku, jak jim poskytnout příležitost získat profesionální přístup k řešení matematických problémů a v neposlední řadě i upevnit a rozšířit znalosti matematických faktů a metod.

Přesto nechceme, a to zdůrazňuji, pohlížet na kteroukoliv jinou zájmovou činnost žáků — účastníků *MO*, speciálně např. na jejich účast v jiných soutěžích, jako na cosi škodlivého a nežádoucího. Přitom však učitelé sami nesmějí při rozvíjení schopností žáků zapomínat, že jde o mladé lidi v období fyzického i duševního rozvoje a musí rozhodně bránit jakémukoli jejich přetěžování, jinak by naše střední školy vychovávaly buď lidi jednostranné a předčasně specializované nebo — což je ještě horší — neurotiky.

I. O průběhu XVIII. ročníku matematické olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Pořadatelem soutěže jsou *ministerstvo školství (MŠ)* s *Matematickým ústavem ČSAV* v Praze (*MÚ ČSAV*) a *Jednotou čs. matematiků a fyziků (JČSMF)*. Také XVIII. ročník se řídil statutem, uveřejněným ve *Věstníku MŠK*, roč. XIX, str. 126, 127, směrnice 37 ze dne 30. 4. 1963.

Soutěž řídil *ústřední výbor matematické olympiády (ÚVMO)*, v krajích *krajské výbory matematické olympiády (KVMO)* a v okresech *okresní výbory matematické olympiády (OVMO)*; v těchto výborech jsou také zastoupeny pořadatelské složky.

Žáci soutěžili naposled ve čtyřech kategoriích podle svého studijního věku, a to v kategoriích *A, B, C* (střední školy) a v kategorii *D* (základní školy).

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

V XVIII. ročníku nebyly proti předchozímu ročníku žádné změny, takže během období fungoval tento ÚVMO:

Předseda: *Jan Vyšín, CSc.*, docent matematicko-fyzikální fakulty KU v Praze

Místopředseda: *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.*, vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Místopředseda za Slovensko: *dr. Jozef Moravčík, CSc., odb. asistent VŠD v Žilině*

I. jednatel: *Vlastimil Macháček, odb. asistent pedagogické fakulty KU v Praze*

II. jednatel: *Jiří Mída, odb. asistent pedagogické fakulty KU v Praze*

Členové: *Dr. František Běloun, vedoucí matematického kabinetu Krajského pedagogického ústavu v Praze*
dr. Juraj Bosák, CSc., Matematický ústav SAV v Bratislavě

dr. Jaroslav Fuka, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

František Hradecký, odborný asistent matematicko-fyzikální fakulty KU v Praze

prof. dr. Karel Hruša, vedoucí katedry matematiky pedagogické fakulty v Praze

dr. Milan Kolibiar, CSc., profesor přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě

Josef Bartůněk, ústřední inspektor MŠ

akademik Josef Novák, vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

dr. Jiří Sedláček, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

František Veselý, profesor v. v. v Praze

dr. František Zítek, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

dr. Miloslav Zedek, docent přírodovědecké fakulty university Palackého v Olomouci

Dalšími členy Ústředního výboru matematické olympiády jsou předsedové krajských výborů matematické olympiády:

dr. Václav Pleskot, profesor ČVUT v Praze

dr. Václav Vilímek, docent katedry matematiky a deskriptivní geometrie strojní fakulty ČVUT v Praze
Marie Štěpánková, odborná asistentka katedry matematiky Vysoké školy zemědělské v Českých Budějovicích
Karel Hnyk, odborný asistent pedagogické fakulty v Ústí nad Labem

Věra Rádlová, profesorka SVVŠ J. Fučíka v Plzni
Jan Laštovka, vedoucí kabinetu matematiky Krajského pedagogického ústavu v Pardubicích

Petr Benda, odborný asistent VUT v Brně

Josef Andrys, docent pedagogické fakulty v Ostravě

dr. Ladislav Berger, odborný asistent katedry matematiky Vysoké školy dopravní v Žilině

Ján Gatiaľ, katedra matematiky elektrotechnické fakulty SVŠT v Bratislavě

RNDr. Ján Černý, CSc., docent přírodovědecké fakulty v Košicích

Náhradník: *dr. Miroslav Šisler, CSc.*, vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Pracovní předsednictvo ÚVMO (PÚVMO) tvoří (uvedeno v abecedním pořadí):

Ľ. Bartůňek; prof. dr. M. Fiedler, DrSc.; dr. Ľ. Fuka, CSc.; V. Macháček; Ľ. Mida; dr. Ľ. Moravčík, CSc.; akademik Ľ. Novák; dr. Ľ. Sedláček, CSc.; doc. Ľ. Vyštn, CSc.; dr. E. Zítek, CSc.

Koncem roku 1969 mělo vypršet tříleté funkční období uvedeného výboru. Vzhledem k přípravám na federativní uspořádání orgánů MO byla ministerstva školství ČSR i SSR požádána, aby funkční období ÚVMO bylo prodlouženo do 31. 12. 1970 a aby byli kooptováni zástupci nově vzniklých orgánů. ÚVMO připraví návrh nového statutu MO (viz další podrobnosti v poznámkách o jednání plenárních schůzí ÚVMO); tato práce

nebyla dosud uzavřena, neboť obě ministerstva školství provedla další organizační zásah do soutěží *MO*, *FO*, *CHO*. Nová organizace soutěže *MO* není proto dosud stabilisována.

3. SCHŮZE ÚV MO

Během *XVIII. ročníku MO* se ústřední výbor sešel tradičně dvakrát. *První schůze* se konala 5. a 6. prosince 1968 v Praze. Projednala řadu závažných otázek, především organizačních. První usnesení se týkalo III. kola kategorie *A* již v *XVIII. ročníku MO*. Bylo rozhodnuto, aby se *soutěž* konala *ve dvou dnech* — každý den budou soutěžící řešit tři úlohy ve 4 hodinách; tím se bude toto kolo podobat soutěži *MMO*.

Další usnesení se týkalo organizace *XIX. ročníku*: Bylo rozhodnuto zřídit jen tři kategorie: kategorii *Z* pro žáky *ZDŠ*, kategorii *B* pro žáky I. a II. ročníku středních škol a kategorii *A* pro žáky III. a IV. ročníku středních škol. Místo dosavadních 4 soutěžních úloh v II. a III. kole bude účastníkům předloženo vždy 6 úloh, a to ve dvou skupinách po třech. Jedna skupina bude obsahovat úlohy spíše algebraické, druhá skupina úlohy spíše geometrické (o způsobu hodnocení bylo diskutováno na jarní plenární schůzi *ÚV MO*).

Neméně závažné usnesení se týkalo zřízení české a slovenské subkomise pro návrh nového statutu *MO*, v němž by se již přihlédlo k nové situaci, kterou vytváří federalizace státu.

Druhá plenární schůze ÚV MO se konala u příležitosti závěrečného III. kola *MO*, kategorie *A* v *Haviřově* ve dnech 18. a 19. dubna 1969. Na schůzi bylo schváleno vedení československé delegace na *XI. MMO* v Rumunsku a s radostí byl přijat příslib tehdejšího náměstka ministra školství s. Ing. V. Hendrycha, že u příležitosti

20. výročí *MO* v *ČSSR* bude u nás uspořádána i *XIII. MMO*. Dalšími body jednání byly: příprava celostátního soustředění kat. *B*, záležitosti edice *ŠMM*, konkurs *ŽČSMF* na úlohy pro *MO* a *FO* a návrh evidenčního listu účastníka *MO*. Hodnocení průběhu *XVIII.* ročníku bylo velmi podrobné a obsírné; na závěr diskuse byly přijaty závěry pro organizaci *XIX.* ročníku: Pro postup do *III.* kola kat. *A* bude rozhodující počet bodů (termínu „úspěšný řešitel“ se nebude v tomto případě užívat); ve *II.* kole kategorií *A* a *B* budou zadány k řešení tři skupiny úloh. Každá skupina bude sestávat ze dvou úloh, které budou voleny tak, aby dosažitelný počet bodů za řešení každé z nich byl týž. Do celkového bodového hodnocení se bude žákovi započítávat počet bodů za řešení jediné úlohy z každé skupiny, a to té, jejíž řešení mu bylo bodově lépe hodnoceno. Byly rovněž určeny nové termíny soutěže. Elaborát slovenské subkomise pro *návrh nového statutu MO* byl vzat za základ pro připomínkové řízení *KV MO* a dalších orgánů; definitivně bude projednán na podzimním zasedání *ÚV MO* v roce 1969.

Zasedání *ÚV MO* prodiskutovalo rovněž otázku práce s žáky nadanými pro matematiku a konstatovalo, že ne všichni učitelé, a zvláště ne noví absolventi fakult, se těmto žákům věnují. *ÚV MO* se proto usneslo obrátit se dopisem s řadou podnětů na všechny fakulty připravující budoucí učitele matematiky se žádostí, aby této otázce věnovaly pozornost a aby eventuálně *ÚV MO* sdělily své zkušenosti a další podněty.

4. PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

a) *Studijní I. kolo* probíhalo od září 1968 až do 15. ledna 1969 jako obvykle ve dvou etapách. V první etapě řešili žáci všech čtyř kategorií přípravné úlohy s termínem

odevzdání do 15. listopadu 1968. Rozboru řešení těchto úloh, jejichž odevzdání nebylo opět podmínkou postupu do soutěžní části I. kola, využili mnozí učitelé k užitečným besedám s účastníky a zájemci o MO. Avšak, zřejmě vzhledem k mimořádným událostem, počet účastníků i úspěšných řešitelů této soutěžní části I. kola klesl někde i více než o 20 % oproti předcházejícímu ročníku (viz *tabulku 1*). Jediným uspokojujícím faktem tohoto kola je, že se ho účastní skutečně vážní a dobří zájemci o matematiku, neboť procento úspěšných řešitelů je poněkud vyšší než v předcházejících letech. V kategorii *D* je však pokles počtu účastníků i úspěšných řešitelů vyšší, přibližně o 30 %.

b) *Klauzurní II. kolo* proběhlo v krajských střediscích pro kategorii *A* v sobotu 8. března 1969 a pro kategorie *B* a *C* v neděli 9. března 1969. Kategorie *D* měla své II. kolo v okresních střediscích až ve středu dne 2. dubna 1969. Tato volba termínů umožnila opět některým zvláště schopným řešitelům účastnit se II. kola i ve dvou kategoriích. Nejen v kategorii *A*, ale i v kategoriích *B* a *C* bylo použito při klasifikaci řešení bodování. Texty úloh i bodové hodnoty dílčích úseků řešení jsou na str. 96 až 128. Žáci při zadání práce byli informováni pouze o počtu bodů za úplné řešení každé úlohy. Ukázalo se, že stanovení počtu bodů tak, aby odpovídalo reálné situaci při soutěži, je velmi obtížné. V kategorii *A*, i když soutěžící byli ve značné časové tísní, celkem bodování dobře odpovídalo. Avšak pro kategorii *B* a *C* byla stanovena měřítko zřejmě příliš přísná (viz *tabulku 2*). Proto vyšel návrh, aby bodové hodnoty za řešení úloh byly stanoveny až po vyzkoušení u experimentální skupiny. O dalších závěrech týkajících se organizace i průběhu II. kola jsou zmínky v „*Předmluvě*“ i v poznámkách ze schůzí ÚV MO.

Protože pro kategorie *B* a *C* soutěž II. kolem končí,

uvedeme v příloze A jmenný seznam úspěšných řešitelů (nejvýše však prvních deset) podle jednotlivých krajů.

Závěrečné celostátní III. kolo soutěže v kategorii A se konalo 18. a 19. dubna 1969 v Havířově. Pro účast do III. kola bylo od KV MO navrženo 36 žáků a žákyň. Podmínce stanovené komisí PÚV MO (úspěšný řešitel měl dosáhnout aspoň poloviny bodů a vyřešit aspoň jednu úlohu se ztrátou nejvýše jednoho bodu) nevyhovělo z těchto 36 žáků celkem 9, avšak 8 z nich vyřešilo podle starého kritéria „aspoň dvě úlohy aspoň na dvojku“, případně jednu z nich na 2—. Proto i těchto 8 bylo povoláno k soutěži.

Vlastní soutěž III. kola proběhla po prvé ve dvou dnech formou obdobnou soutěži na mezinárodních matematických olympiádách. Každý den řešili účastníci tři úlohy ve čtyřech hodinách. Žákům byly oznámeny počty bodů za úplná řešení úloh. (Texty úloh i stručná bodová ohodnocení jednotlivých úseků řešení jsou na str. 129 až 146.)

Po korektuře řešení úloh bylo stanoveno, že za vítěze budou prohlášeni ti soutěžící, kteří dosáhli aspoň 20 bodů (z možných 40 bodů). Úspěšným řešitelem je pak ten účastník, který dosáhl aspoň 15 bodů (viz jmenný seznam vítězů a úspěšných řešitelů v příloze B). Všichni vítězové a úspěšní řešitelé byli opět podle návrhu PÚV MO odměněni ministerstvem školství.

Do přípravného soustředění na XI. MMO byli do Štířina na dobu od 22. do 28. června 1969 povoláni všichni vítězové a dále s přihlédnutím k výsledkům II. kola Rudolf Švarc a Jiří Šafařík, kteří byli žáky II. ročníku a kteří měli vysoký vážený průměr bodů za II. a III. kolo soutěže. Definitivní složení družstva (viz Zpráva o XI. MMO, str. 147 až 179) bylo určeno až na schůzi předsednictva ÚV MO dne 28. června 1969.

5. POMOCNÉ AKCE

Jako každý rok, tak i v XVIII. ročníku pořádaly krajské výbory MO spolu s pobočkami JČSMF různé přípravné přednášky pro účastníky MO různých kategorií během roku i celá soustředění (např. opět v Západočeském, Jihomoravském a Severomoravském kraji). Rozsah i úroveň těchto akcí závisela jak na finančních možnostech, tak i na iniciativě příslušných činitelů.

Naproti tomu *přípravné školení pro mezinárodní matematické olympiády* mělo centrálně připravovaný program rozdělený do těchto tří úseků:

a) *Úlohy z teorie čísel* (připravil dr. Jiří Sedláček, CSc., z MÚ ČSAV);

b) *Analytická geometrie* (připravil dr. Vladimír Mahel, CSc., z ČVUT v Praze);

c) *Funkce a zobrazení* (připravil dr. Jaroslav Fuka, CSc., z MÚ ČSAV).

Podle těchto materiálů probíhala příprava v následujících střediscích (v závorce uveden průměrný počet účastníků): Praha (8), Plzeň (3), Brno (8), Bratislava (3), Nitra (1), Zvolen (1), Banská Bystrica (1), Prievidza (1), Košice (3) a Žilina (3), a to po celý školní rok.

Celostátní akcí je i *soustředění řešitelů kategorií B a C*, které se konalo v XVIII. ročníku v Pardubicích od 23. června do 12. července 1969. Tentokrát byly zřízeny třídy s odlišným obsahem výuky: *matematická, fyzikální a matematicko-fyzikální*.

Program přednášek a seminářů matematické třídy:

Dr. Milan Koman, CSc. (pedagogická fakulta UK v Praze): *Vyšetřování geometrických míst v prostoru metodou souřadnic.*

Dr. Pavel Goralčík, CSc. (MFF UK v Praze): *Kombinatorická algebra*.

Jan Vinař (přírodov. fak. UJPF v Košicích): *Jordanova eliminace*.

Ve fyzikální třídě zajišťoval celý program ústřední výbor fyzikální olympiády.

V matematicko-fyzikální třídě polovinu výuky tvořily matematické přednášky:

Dr. František Zítek, CSc. (MÚ ČSAV v Praze): *Vytvořující funkce*.

Dr. Milan Koman, CSc. (PedF UK v Praze): *Vyšetřování geometrických míst metodou souřadnic*.

6. STUDIJNÍ LITERATURA

Letáky s úlohami pro kategorie A, B a C (v nákladu 5 000 kusů) a pro kategorii D (v nákladu 10 000 kusů) vydalo včas Státní pedagogické nakladatelství; úlohy I. kola byly rovněž otištěny v časopisech „*Matematika ve škole*“ a v „*Rozhledech matematicko-fyzikálních*“.

Nakladatelství *Mladá Fronta* vydalo do konce roku 1969 další svazky edice „*Škola mladých matematiků*“; uvedeme jen několik posledních:

č. 20. Bruno Budinský — Stanislav Šmakal: *Goniometrické funkce*

č. 21. Alois Apfelbeck: *Kongruence*

č. 22. Tibor Šalát: *Dokonalé a spriatelené čísla*

č. 23. Jaroslav Morávek—Milan Vlach: *Oddělitelnost množin*

č. 24. Ján Gátial—Milan Hejný: *Stavba Lobačevského planimetrie*

V poslední době však nakladatelství *Mladá Fronta* při zadávání svazků edice *Škola mladých matematiků* do vý-

roby naráží na velké potíže. Podařilo se mu totiž zajistit vydání knihtiskem jen jednoho svazku ročně; ostatní svazky budou muset být tištěny rotaprintem. Snad pomůže i příslib, že vydání jednoho svazečku zajistí *na Slovensku* nakladatelství *Alfa*. Doufejme, že se všechny potíže podaří překonat a vydávání edice bude zachováno.

7. KONKURS JČSMF NA NÁVRHY ÚLOH PRO MO

Tento nepřetržitě probíhající konkurs vyhlásila *Jednota československých matematiků a fyziků* již v roce 1966. Připomeňme jeho podmínky.

Text a řešení každé úlohy je třeba zaslat napsané na listu formátu A4 (vždy originál a jeden opis) na adresu: *Ústřední výbor matematické olympiády, Praha 1-Nové Město, Žitná 25*. Za každou přijatou úlohu je vyplácena odměna ve výši 50,— Kčs v kategoriích A, B a 30,— Kčs v kategorii Z. Při recenzi se přihlíží k původnosti úlohy a odměna může být případně zvýšena, např. úlohy pro *mezinárodní MO* jsou odměňovány částkou 80,— Kčs. Úlohy, které neprojdou úspěšně konkursním řízením, se autorům vracejí. Přijaté úlohy jsou zařazeny do archivu ústředního výboru matematické olympiády, který vyplacením odměny autorovi získává dispoziční právo, zejména právo upravit text úlohy i autorské řešení a použít úlohy pro účely *MO* podle vlastní úvahy. Autor samozřejmě na sebe bere závazek, že přijatou úlohu utají, aby průběh olympiády nebyl narušen.

Výše uvedené podmínky jsou upraveny vzhledem ke změně organizaci olympiády od XIX. ročníku (kategorie D byla označena Z, kategorie B a C splynuly v kategorii B).

Pro autory, kteří se účastní nebo chtějí zúčastnit svými úlohami konkursu, jsou určeny následující řádky.

Při výběru úloh pro *MO* se dává vždy přednost úlohám s atraktivními náměty před úlohami se složitými výpočty, zvláště když není jejich výsledek nijak zajímavý. Početní zběhlosti se má účastník *MO* naučit ve škole. Olympijská úloha musí při řešení vyžadovat ne pouhou početní rutinu, ale hlavně dobrý nápad. Obrazně řečeno: úloha v *MO* má mít vtip! Ovšem za „vtipnost“ úlohy se nedá považovat užívání zcela umělých obrátů při jejím řešení.

Pro *MO* jsou vítané dvojice či trojice úloh, které spolu souvisejí. Řešitele totiž jistě potěší, když např. ve II. kole se setká s úlohou příbuznou úloze jemu známé z přípravného nebo I. kola. Ovšem v řešeních na sebe navazujících úloh se nelze odvolávat na předchozí úlohy. Každá úloha totiž musí tvořit nezávislý celek. Musí se počítat s tím, že řešitel předchozí úlohu nevyřešil, nebo že nemá její řešení po ruce (např. ve II. kole).

V olympiádě se v současné době zadávají téměř výhradně úlohy získané konkursem. Je to konec konců vidět také z těchto čísel: Od roku 1966 do 31. října 1969 došlo do konkursu celkem 537 úloh od 65 autorů. Recenzní řízení bylo ukončeno u 482 úloh, z nichž 281 bylo přijato. V XVIII. ročníku mezi 54 zadanými úlohami bylo pouze 5 úloh nepocházejících z konkursu.

PŘÍLOHA A

POŘADÍ ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ II. KOLA V KATEGORIÍCH B A C

(není-li uvedeno jinak, jde o SVVŠ, příp. gymnasium,
a o třídu odpovídající příslušné kategorii)

Praha-město

B. Ondřej Matouš, Praha 2, tř. W. Piecka; Svatopluk Poliak, Praha 2, tř. W. Piecka; Vladimír Šíma, Praha 2, tř. W. Piecka; Miloslav Handl, Praha 2, tř. W. Piecka; Martin Kašík, Praha 7, Nad Štolou.

C. Daniela Dlouhá, Praha 2, tř. W. Piecka; Vladimír Zajíc, Praha 10, Vodčerská.

Středočeský kraj

B. Jiří Gempřle, Radotín; Eva Nosková, Mladá Boleslav; Štěpán Vaněček, Benešov.

C. Jiří Doskočil, Poděbrady; Jiří Frýda, Kladno.

Jihočeský kraj

B. Jan Vyhnánek, České Budějovice.

C. Jarmila Voldřichová, Vimperk.

Západočeský kraj

B. Rudolf Švarc a Vladimír Junger, Plzeň, SVVŠ J. Fučíka, nám. Odborářů; Jiří Benda, Plzeň, SPŠ elektrotechnická.

C. Zdenka Černá, Plzeň, SVVŠ J. Fučíka, nám. Odborářů; Pavel Maglia, Karlovy Vary-Drahovice.

Severočeský kraj

B. Vladimír Šulc, Litoměřice; Jiří Skotnica, Chomutov; Jaroslav Klíma a Václav Urban, Liberec.

C. Zbyněk Pejchal, Litoměřice; Jiří Horák, Děčín; Jaroslav Klápště, Liberec, SPŠ strojnická.

Východočeský kraj

B. Zdeněk Jelínek, Pardubice; Pavel Schill, Ivan Škaloud, Karel Vaníček, Vladimír Čapek a Oldřich Sistr, Hradec Králové.

C. Jiří Dohnal a Jiří Horáček, Hradec Králové; Libor Slezák, Pardubice; Jaromír Kubík a Jarmila Semrádová, Hradec Králové; Pavel Maršíček a Karel Šklíba, Pardubice.

Jihomoravský kraj

B. Igor Kadeřávek, Brno, Lerchova; Jaroslav Kučera a Zdenko Staníček, Brno, Křenová.

C. Petr Firbas, Jiří Němec, Václav Holý, Slavomír Kolčava a Miloš Paleček, Brno, Křenová; Ivan Vaníček, Brno, Elgartova; Ivan Kubáček a Lubomír Pospíšil, Brno, Křenová; Antonín Povolný a Zbygniew Zalewski, Brno, Koněvova.

Severomoravský kraj

B. Marie Němčíková, Karviná.

C. Jiří Ivánek, Nový Bohumín; Marie Cívínová a Milan Konečný, Ostrava-Vítkovice.

Západoslovenský kraj

B. Karol Šafařík, Angela Leitmanová, Lívia Hoferková, Vladimír Černý, Štefan Pleško a Michal Zajac, Bratislava, Novohradská.

C. Anton Černý a Eva Ambrošová, Bratislava, Novohradská; Viliam Čuperka, Holič; Jan Franců, Bratislava, Novohradská.

Středoslovenský kraj

C. Štefan Sakáloš, Prievidza.

Východoslovenský kraj

B. Belo Zorkovský, Košice, Šrobárova; Mirko Hornák, Košice, Kováčska.

PŘÍLOHA B

Závěr XVIII. ročníku MO — III. kolo kat. A

Vítězové

1. *Tomáš Mašek*, III. f, SVVŠ tř. W. Piecka, Praha 2
2. *Bohuš Sivák*, III. a, SVŠ Zvolen
3. *Miloš Zahradník*, III. a, SVVŠ Tanvald
4. *Ľuboslav Vinárek*, III. f, SVVŠ tř. W. Piecka, Praha 2
5. *Petr Hadrava*, III. f, SVVŠ tř. W. Piecka, Praha 2
6. *Pavol Černek*, II. b, SVŠ J. Hronca, Novohradská, Bratislava
7. *Štefan Sakáloš*, I. d, SVŠ V. B. N. Prievidza
8. *Ľuboslav Benda*, M 2, SPŠE Plzeň, Koterovská 85

Úspěšní řešitelé

9. *Josef Ľirásko*, III. a, SVVŠ Semily
10. *Vladimír Černý*, II. b, SVŠ J. Hronca, Novohradská, Bratislava
- až *Peter Mach*, III. c, SVŠ Ružomberok
12. *Ľuboslav Kopřiva*, III. a, SVVŠ Broumov
13. *Josef Ľedlička*, III. b, SVVŠ Moravské Budějovice
14. *Karel Malík*, III. f, SVVŠ tř. W. Piecka, Praha 2
- až *Ľuboslav Reif*, III. f, SVVŠ J. Fučíka, nám. Odborářů, Plzeň
16. *Rudolf Švarc*, II. f, SVVŠ J. Fučíka, nám. Odborářů, Plzeň

17. *Hana Cagašová*, III. e, SVVŠ Křenová, Brno
a
18. *Jiří Šafařík*, II. b, SVŠ J. Hronca, Novohradská,
Bratislava
19. *Eva Dvořáková*, III. a, SVVŠ Kolín III, Žižkova 162
až *Jiří Jarušek*, III. f, SVVŠ tř. W. Piecka, Praha 2
21. *Vlasta Navarová*, III. a, SVVŠ, Praha 3-Žižkov,
Pražáčka
22. *Jaroslav Daniel*, II. a, SVVŠ Moravské Budějovice
a
23. *Zdena Štěrbová*, III. SVVŠ tř. W. Piecka, Praha 2

Tabulka č. 1

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

KRAJ	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	N toho dívěk	Ú	P	N toho dívěk	Ú	P	N toho dívěk	Ú	P	N toho dívěk	Ú
Praha-město	35	6	30	35	4	27	117	21	80	187	31	137
Středočeský	10	1	10	25	6	25	28	9	24	63	16	59
Jihočeský	20	5	11	33	7	26	45	12	36	98	24	73
Západočeský	11	1	11	15	3	8	45	15	34	71	19	53
Severočeský	29	8	17	51	18	27	56	22	26	136	48	70
Východočeský	21	4	21	62	18	61	77	28	77	160	50	159
Jihomoravský	83	24	50	89	18	68	202	56	107	374	98	225
Severomoravský	49	13	48	30	13	27	83	21	71	162	47	146
Západoslovenský	53	9	31	89	20	42	114	34	63	256	63	136
Středoslovenský	34	13	34	56	21	46	115	36	90	205	70	170
Východoslovenský	17	2	10	21	3	13	81	11	28	119	16	51
Celkem	362	86	273	506	131	370	963	265	636	1831	482	1279

*) P značí celkový počet účastníků; Ú značí počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 2

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategorii D)*

Kraj	Kategorie D			
	P	Z toho dívek	Ú	Z toho dívek
Praha-město	955	439	594	282
Středočeský	344	176	239	132
Jihočeský	408	226	226	107
Západočeský	217	109	116	53
Severočeský	485	255	247	118
Východočeský	485	210	255	126
Jihomoravský	763	401	450	239
Severomoravský	604	301	366	182
Západoslovenský	1082	525	829	410
Středoslovenský	846	492	492	339
Východoslovenský	570	272	350	154
Celkem	6759	3406	4264	2142

*) P značí celkový počet účastníků; Ú značí počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 3

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

KRAJ	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	Z toho dívč	Ú	P	Z toho dívč	Ú	P	Z toho dívč	Ú	P	Z toho dívč	Ú
Praha-město	27	4	8	24	3	5	79	14	2	130	21	15
Středočeský	10	1	1	15	3	3	19	2	2	44	6	6
Jihočeský	11	—	—	21	3	1	31	6	1	63	9	2
Západočeský	10	1	3	7	—	3	34	9	2	51	10	8
Severočeský	17	4	4	23	4	4	22	6	3	62	14	11
Východočeský	18	4	3	44	12	6	73	28	7	135	44	16
Jihomoravský	53	9	6	59	10	3	101	25	10	213	44	19
Severomoravský	48	13	2	27	12	1	64	16	3	139	41	6
Západoslovenský	30	3	5	42	11	6	62	18	4	134	32	15
Středoslovenský	34	10	3	42	14	—	77	25	1	153	49	4
Východoslovenský	9	—	2	13	1	2	23	2	—	45	3	4
Celkem:	267	49	37	317	73	34	585	151	35	1169	273	106

*) P značí celkový počet účastníků; Ú značí počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 4

*Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategorii D **

Kraj	Kategorie D			
	P	Z toho dívek	Ú	Z toho dívek
Praha-město	499	217	263	105
Středočeský	222	120	151	81
Jihočeský	200	93	43	16
Západočeský	106	46	26	9
Severočeský	219	99	110	48
Východočeský	241	111	197	85
Jihomoravský	402	211	75	34
Severomoravský	301	144	113	56
Západoslovenský	806	394	260	139
Středoslovenský	552	302	178	96
Východoslovenský	328	144	139	66
Celkem:	3876	1781	1455	734

*) P značí celkový počet účastníků; Ú značí počet úspěšných řešitelů

II. Přípravné úlohy I. kola

1. KATEGORIE A

1. Budte a, b, c tři kladná čísla, pro něž platí

$$a^n + b^n = c^n,$$

kde n je přirozené číslo větší než 1. Pak existuje trojúhelník, jehož strany mají délky a, b, c . Dokažte.

ŘEŠENÍ. Dané číslo c je větší než daná čísla a i b . Proto je

$$a + c > b,$$

$$b + c > a$$

a stačí dokázat, že také

$$a + b > c.$$

Podle binomické věty platí

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Protože $n > 1$, je na pravé straně kromě členů a^n a b^n alespoň jeden další člen. Všechny členy jsou kladné, takže

$$(a + b)^n > a^n + b^n = c^n,$$

tedy také

$$a + b > c.$$

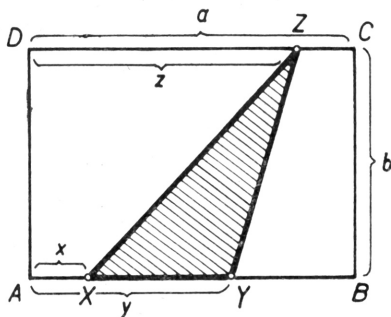
Tím je tvrzení dokázáno.

2. Je dán obdélník $ABCD$, jehož strany mají délky $AB = a$, $AD = b$. Trojúhelník XYZ je vepsán obdélníku $ABCD$ tak, že vrcholy X, Y náležejí straně AB , vrchol Z straně CD .

a) Dokažte, že poloměr r kružnice opsané trojúhelníku XYZ splňuje nerovnosti

$$\frac{b}{2} < r < \frac{a^2 + b^2}{2b}. \quad (1)$$

b) Dokažte, že každé číslo r splňující nerovnosti (1) je poloměrem kružnice opsané některému z takových trojúhelníků XYZ .



Obr. 1

ŘEŠENÍ (obr. 1). a) Zvolme označení vrcholů $\triangle XYZ$ tak, aby bylo $AX < AY$ a označme $AX = x$, $AY = y$, $DZ = z$.

Pro výpočet poloměru r užijeme známého vzorce

$$r = \frac{XY \cdot YZ \cdot ZX}{4P}, \quad (2)$$

kde P je obsah $\triangle XYZ$.

Vyjádríme

$$XY = y - x, \quad YZ = \sqrt{b^2 + (y - z)^2},$$

$$ZX = \sqrt{b^2 + (x - z)^2},$$

$$P = \frac{b}{2}(y - x). \quad (3)$$

Dosadíme z (3) do (2); po úpravě vyjde

$$r = \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + (y - z)^2} \cdot \sqrt{b^2 + (x - z)^2}. \quad (4)$$

Zřejmě je

$$b = BC \leq YZ \leq BD = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$b = AD \leq ZX \leq AC = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Z geometrického významu plyne, že nemůže současně platit

$$YZ = b, \quad ZX = b,$$

$$YZ = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad ZX = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (5)$$

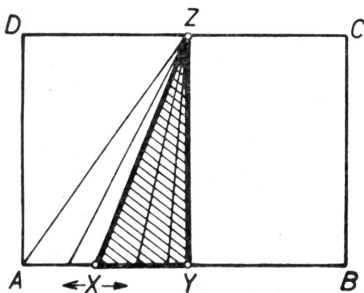
Spojením (3), (4) a (5) vyjde

$$\frac{b}{2} < r < \frac{a^2 + b^2}{2b},$$

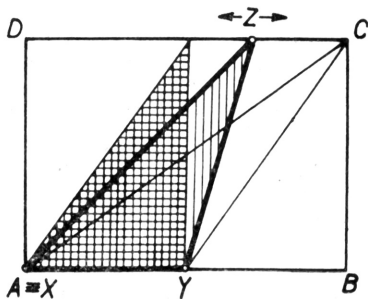
což jsou nerovnosti (1).

b) Abychom dokázali, že poloměr r nabývá každé hodnoty z intervalu (1), rozlišíme tři případy.

I. (obr. 2a). Nechť je $0 \leq x < \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, $z = \frac{a}{2}$.



Obr. 2a



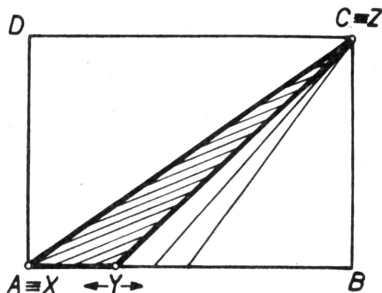
Obr. 2b

Pak je

$$r = \frac{1}{2b} \cdot b \cdot \sqrt{b^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}. \quad (4a)$$

Pak r nabývá podle (4a) všech hodnot z intervalu

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{2b} \cdot b \cdot b < r \leq \frac{1}{2b} \cdot b \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}. \quad (6a)$$



Obr. 2c

II. (obr. 2b). Necht' je $x = 0$, $y = \frac{a}{2}$, $\frac{a}{2} \leq z \leq a$.

Pak je

$$r = \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{b^2 + z^2}. \quad (4b)$$

Pak r nabývá podle (4b) všech hodnot z intervalu

$$\frac{1}{2} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2b} \cdot b \cdot \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \leq r \leq \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{b^2 + a^2}. \quad (6b)$$

III. (obr. 2c). Necht' je $x = 0$, $0 < y \leq \frac{a}{2}$, $z = a$.

Pak je

$$r = \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + (y - a)^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4c)$$

Pak r nabývá podle (4c) všech hodnot z intervalu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{b^2 + a^2} &\leq r < \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + a^2} \cdot \sqrt{b^2 + a^2} = \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2b}. \end{aligned} \quad (6c)$$

Spojíme-li (6a), (6b), (6c), zjistíme, že r nabývá všech hodnot z intervalu (1).

3. Určite všetky komplexné čísla z , ktoré vyhovujú rovnici

$$(1 + i)z^2 - i|z^2| + 1 - i = 0. \quad (1)$$

RIEŠENIE. Platí $|z^2| = |z|^2 = z\bar{z}$. Rovnica (1) má potom tvar

$$(1 + i)z^2 - iz\bar{z} + 1 - i = 0. \quad (2)$$

Ak do (2) dosadíme $z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$ (x, y reálne čísla), dostaneme:

$$(1 + i)(x^2 - y^2 + 2xyi) - i(x^2 + y^2) + 1 - i = 0. \quad (3)$$

Z rovnice (3) vyplýva, že reálna aj imaginárna časť ľavej strany sa rovná nule, t. j.

$$x^2 - y^2 - 2xy + 1 = 0, \quad (4a)$$

$$x^2 - y^2 + 2xy - (x^2 + y^2) - 1 = 0. \quad (4b)$$

Rovnicu (4b) upravíme na tvar

$$2xy - 2y^2 - 1 = 0. \quad (5)$$

Sčítaním rovníc (4a), (5) dostaneme $x^2 - 3y^2 = 0$ čiže

$$x = \varepsilon \sqrt{3} y, \text{ kde } \varepsilon = \pm 1. \quad (6)$$

Po dosadení zo (6) do (5) vyjde $2y^2(\varepsilon\sqrt{3} - 1) = 1$. Pretože y musí byť reálne, je $2y^2 > 0$ a preto je $\varepsilon = 1$. Máme teda

$$y^2 = \frac{1}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}. \quad (7)$$

Zo vzťahov (7) a (6) dostaneme

$$y_1 = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{3}}}{2}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3(1 + \sqrt{3})}}{2},$$

$$y_2 = -y_1, \quad x_2 = -x_1.$$

Danej rovnici môžu teda vyhovovať len čísla

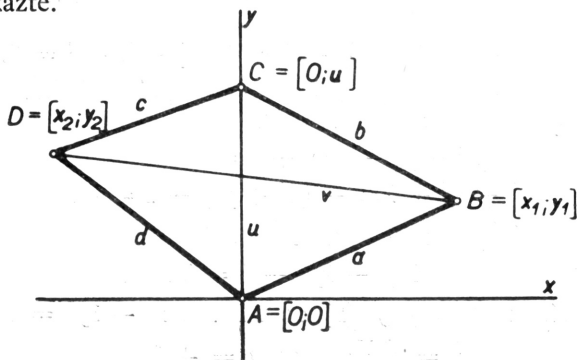
$$z_1 = x_1 + y_1 i, \quad z_2 = x_2 + y_2 i = -z_1.$$

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že tieto čísla rovnici (1) skutočne vyhovujú.

4. Buďte a, b, c, d dĺžky stran konvexného štvoruholníka, u, v dĺžky jeho úhlopříček, P jeho obsah. Pak platí

$$4u^2v^2 = 16P^2 + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2.$$

Dokažte.



Obr. 3

ŘEŠENÍ. Zvolme soustavu kartézských souřadnic podle obr. 3. Pak platí podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů

$$\begin{aligned}a^2 &= x_1^2 + y_1^2, \\b^2 &= x_1^2 + (y_1 - u)^2, \\c^2 &= x_2^2 + (y_2 - u)^2, \\d^2 &= x_2^2 + y_2^2.\end{aligned}\tag{2}$$

Dále je podle téhož vzorce

$$v^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.\tag{3}$$

Podle vzorce pro obsah trojúhelníka je

$$P = \frac{1}{2} u(|x_1| + |x_2|) = \frac{1}{2} u(x_1 - x_2),\tag{4}$$

neboť je $x_1 > 0$, $x_2 < 0$. Z druhé a třetí rovnosti (2) dostaneme

$$\begin{aligned}b^2 - c^2 &= x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - 2u(y_1 - y_2), \\ \text{neboli vzhledem k první a čtvrté rovnosti (2)} \\ 2u(y_1 - y_2) &= a^2 + c^2 - b^2 - d^2.\end{aligned}\tag{5}$$

Z (4) a (5) dosadíme do (3); vyjde

$$4u^2v^2 = 16P^2 + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2,$$

což je rovnost (1).

2. KATEGORIE B

1. a) Najděte všechny dvojice (x, y) celých kladných čísel, pro které platí

$$|2^x - 10^y| \leq 5.$$

b) Je-li p kladné číslo, pak nerovnice

$$|2^x - 10^y| \leq p$$

má v oboru dvojic celých kladných čísel (x, y) buď konečně řešení, nebo je neřešitelná. Dokažte.

ŘEŠENÍ. a) Dokažme nejprve, že nerovnice $|2^x - 10^y| \leq 5$ nemá řešení $x = y$. Je totiž $|2^x - 10^x| = 10^x - 2^x = (10 - 2)N = 8N \geq 8$, kde N je přirozené číslo. Protože mocniny čísla 2 rostou „pomaleji“ než mocniny čísla 10, napadne nás, že předchozí odůvodnění by se mohlo rozšířit i na případ $x \leq y$. Skutečně je pro $x \leq y$

$$|2^x - 10^y| = 2^x |1 - 2^{y-x} \cdot 5^y| \geq 2^x (2^{y-x} \cdot 5^y - 1) \geq 2 \cdot (5 - 1) = 2 \cdot 4 = 8.$$

Řešení nerovnice z úlohy a) můžeme hledat jen mezi dvojicemi x, y , pro něž platí $x > y$. Pak platí

$$|2^x - 10^y| = 2^y |2^{x-y} - 5^y| \leq 5,$$

tj.

$$|2^{x-y} - 5^y| \leq \frac{5}{2^y} \leq \frac{5}{2},$$

neboť $y \geq 1$. Je tedy $|2^{x-y} - 5^y| = 0$ nebo 1 nebo 2. Případy 0; 2 jsou vyloučeny, neboť číslo 5^y je liché, čísla 2^{x-y} ; 0; 2 jsou sudá. Je tedy buď

$$5^y + 1 = 2^{x-y}, \quad (1a)$$

nebo

$$5^y - 1 = 2^{x-y}. \quad (1b)$$

Dekadické vyjádření čísla 5^y končí dvojčíslím 05 nebo 25; proto dekadické vyjádření čísla $5^y + 1$ končí buď dvojčíslím 06, nebo 26. Je proto $5^y + 1$ dělitelné jen mocninou 2^1 , tj. $2^{x-y} = 2$, $x - y = 1$. Z (1a) pak plyne $5^y = 1$, což je nemožné, neboť y je přirozené číslo.

Rovnici (1b) rozřešíme pomocí rozkladu

$$5^y - 1 = 5^y - 1^y = 4(1 + 5 + \dots + 5^{y-2} + 5^{y-1}). \quad (2)$$

Má-li být číslo $5^y - 1$ mocninou dvou, musí mnohočlen v závorkách (2) být roven buď 1, nebo být číslo sudé, tj. musí obsahovat sudý počet členů. V posledním případě seskupíme členy ve dvojice a použijeme vzorce $5^k + 5^{k+1} = 5^k(1 + 5) = 6 \cdot 5^k$. To znamená: jsou-li v zá-

vorkách (2) aspoň dva členy, je číslo na pravé straně (2) násobkem tří a není mocninou dvou. V úvahu přichází tedy jen případ $y = 1$. Z (1b) dostaneme $x - y = 2$, tj. $x = 3$.

b) Tvrzení dokážeme sporem. Budeme předpokládat, že pro některé přirozené číslo p má nerovnice $|2^x - 10^y| \leq p$ nekonečně mnoho řešení. Mezi těmito řešeními lze vybrat takové dvojice $[x_i, y_i]$ a očíslovat je tak, že $x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3$ budou dvě posloupnosti přirozených čísel, která stále porostou. Tyto posloupnosti nemohou být totiž obě omezené (předpokládáme, že nerovnice má nekonečně mnoho řešení); také není možné, aby jedna posloupnost byla omezená a druhá neomezená, protože $[2^x - 10^y] \leq p$.

Můžeme tedy najít takové přirozené číslo n , že je

$$2^{x_n} > p, \quad 5^{y_n} > p. \quad (3)$$

Je-li $x_n \leq y_n$, počítáme s použitím (3) takto:

$$|2^{x_n} - 10^{y_n}| = 2^{x_n} |1 - 2^{y_n - x_n} \cdot 5^{y_n}| > p |5 - 1| = 4p.$$

To je spor s danou nerovnicí; $[x_n, y_n]$ není tedy jejím řešením.

Je-li $x_n > y_n$, počítáme s použitím (3) takto:

$$|2^{x_n} - 10^{y_n}| = 2^{y_n} |2^{x_n - y_n} - 5^{y_n}| > p \cdot N \geq p,$$

kde N je přirozené číslo. Také tato dvojice $[x_n, y_n]$ není řešením dané nerovnice. Tím je dokázáno, že nerovnice nemá nekonečně mnoho řešení.

Obrat, kterého jsme použili, je typický v disciplíně, zvané matematická analýza.

2. Platí-li zároveň

$$\sin x + \sin y + \sin z = 0, \quad (1)$$

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0, \quad (2)$$

pak je také

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0, \quad (3)$$

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0. \quad (4)$$

Dokažte.

ŘEŠENÍ. Upravíme

$$\begin{aligned} \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z &= \sin 2x + \sin 2y + \\ &+ 2 \sin z \cos z = \sin 2x + \sin 2y + 2(\sin x + \sin y) \\ &(\cos x + \cos y) = 2 \sin 2x + 2 \sin 2y + 2 \sin(x + y) = \\ &= 4 \sin(x + y) \cos(x - y) + 2 \sin(x + y) = \\ &= 2 \sin(x + y) [2 \cos(x - y) + 1] = 0. \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme z (1) a (2) $\sin z$, $\cos z$, dosadíme do formule $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; po úpravě dostaneme $2 \cos(x - y) + 1 = 0$. Platí tedy (3).

Obdobně počítáme

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z &= \cos 2x + \cos 2y + \cos^2 z - \\ &- \sin^2 z = \cos 2x + \cos 2y + (\cos x + \cos y)^2 - (\sin x + \\ &+ \sin y)^2 = 2 \cos 2x + 2 \cos 2y + 2 \cos(x + y) = \\ &= 4 \cos(x + y) \cdot \cos(x - y) + 2 \cos(x + y) = \\ &= 2 \cos(x + y) [2 \cos(x - y) + 1] = 0. \end{aligned}$$

Protože je $2 \cos(x - y) + 1 = 0$, platí i (4).

3. V rovine je daný dutý uhol MON , vnútorný bod P polpriamky opačnej k polpriamke OM a vnútorný bod Q dutého uhla NOP . Ďalej je daný štvorec so stranou d . Bodom Q vedte priamku p , ktorá pretína polpriamky OM , ON v uvedenom poradí v bodoch X , Y tak, aby trojuholník OXY a daný štvorec mali rovnaký obsah.

RIEŠENIE. *Rozbor.* Predpokladajme, že sme zostrojili priamku p žiadaných vlastností (obr. 4). Bodom Q vedme priamku $q \parallel ON$. Priamka q leží v polrovine NOP .

$$wx^2 - 2d^2x - 2d^2r = 0.$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice a ďalšou úpravou dostaneme:

$$x_{1,2} = \frac{2d^2 \pm \sqrt{4d^4 + 8d^2rw}}{2w} = \frac{2d^2 \pm 2d\sqrt{d^2 + 2rw}}{2w} = \frac{d(d \pm \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}.$$

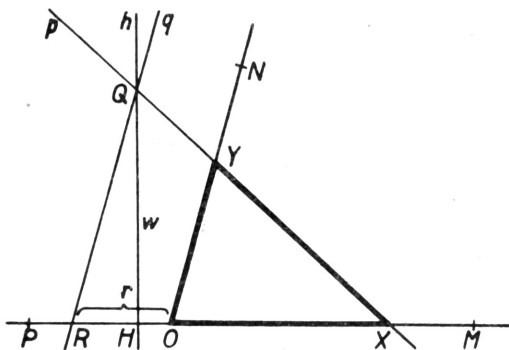
Pretože $\sqrt{d^2 + 2rw} > \sqrt{d^2} = d$ a x má byť číslo kladné, vyhovuje úlohe len prvý koreň, t. j.

$$x = \frac{d(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}. \quad (3)$$

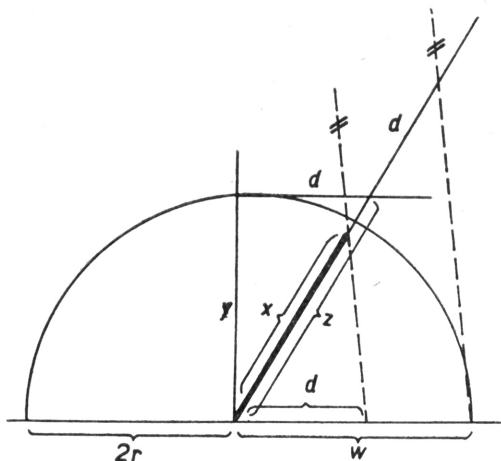
Úsečka veľkosti d je daná, úsečky veľkosti r, w môžeme zostrojiť a úsečku veľkosti x dostaneme konštrukciou algebraického výrazu (3).

Konštrukcia (obr. 5a, b).

1. Bodom Q vedieme priamku $q \parallel ON$ a jej priesečník



Obr. 5a



Obr. 5b

s polpriamkou OP označíme R , a priamku $h \perp OM$ a jej priesečník s priamkou OM označíme H . Veľkosti úsečiek RO a QH v uvedenom poradí označíme r , w (obr. 5a).

2. Zostrojíme úsečku veľkosti y , pre ktorú platí: $y^2 = 2rw$. Jej konštrukciu možno previesť napríklad na základe Euklidovej vety o výške (obr. 5b). Na základe Pytagorovej vety zostrojíme úsečku veľkosti z , pre ktorú $z = \sqrt{d^2 + y^2}$ a potom na základe podobnosti skonštruujeme úsečku veľkosti x , pre ktorú $x = \frac{d(d+z)}{w}$.

3. Na polpriamke OM zostrojíme bod X , pre ktorý platí $OX = x$. Priesečník priamky $p = QX$ s polpriamkou ON je bod Y .

Dôkaz. Z konštrukcie vyplýva, že

$$OX = x = \frac{d(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w} \quad (4)$$

a

$$\triangle OXY \sim \triangle RXQ. \quad (5)$$

Zo vzťahu (5) vyplýva, že $\frac{v}{x} = \frac{w}{r+x}$, z čoho $v = \frac{wx}{r+x}$. Po dosadení zo vzťahu (4) do tohto vzťahu dostaneme

$$v = \frac{\frac{wd(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}}{r + \frac{d(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}} = \frac{wd(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{rw + d^2 + d\sqrt{d^2 + 2rw}}.$$

Obsah P trojuholníka OXY je

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} xv = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w} \cdot \frac{wd(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{rw + d^2 + d\sqrt{d^2 + 2rw}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2d^2(d^2 + d\sqrt{d^2 + 2rw} + rw)}{d^2 + d\sqrt{d^2 + 2rw} + rw} = d^2. \end{aligned}$$

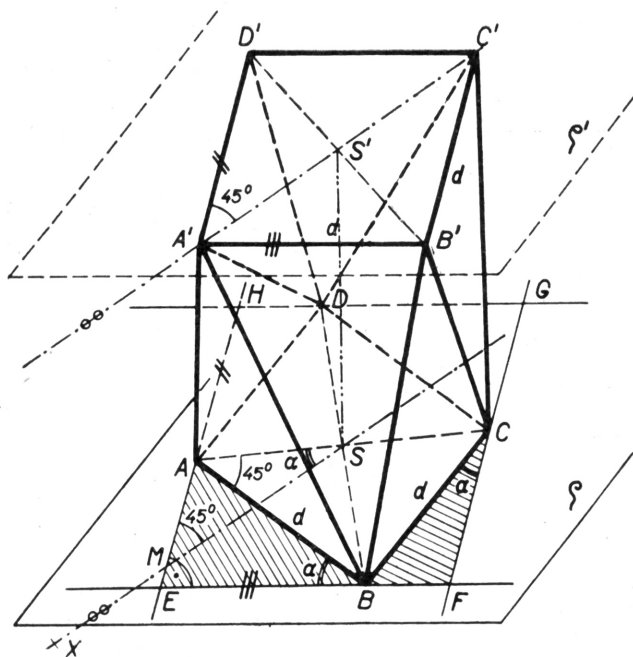
Diskusia. Z rozboru vyplýva, že úsečka veľkosti x je jednoznačne určená. Na polpriamke OM existuje jediný bod X , pre ktorý $OX = x$, z čoho vyplýva, že úloha má práve jedno riešenie.

4. Jsou dány roviny $\varrho \parallel \varrho'$, jejichž vzdálenost je $v > 0$. V rovině ϱ leží čtverec $ABCD$ o straně d a středu S , v rovině ϱ' s ním shodný čtverec $A'B'C'D'$ o středu S' . Přitom je $SS' \perp \varrho$, odchylka přímek $SA, S'A'$ je α , kde $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, a polopřímka SX souhlasně rovnoběžná s polopřímkou $S'A'$ má s úsečkou AB společný bod. Vypočítejte objem tělesa, které omezují čtverce $ABCD$,

$A'B'C'D'$ a trojúhelníky $AA'B$, $A'BB'$, $BB'C$, $B'CC'$, $CC'D$, $C'DD'$, $DD'A$, $D'AA'$.

ŘEŠENÍ. Roviny $A'BB'$, $B'CC'$, $C'DD'$, $D'AA'$ protínají rovinu ϱ v přímkách, které omezují čtverec $EFGH$; označení volme tak, aby $EF \parallel A'B'$ a aby body A , B , C , D ležely po řadě na stranách HE , EF , FG , GH (obr. 6).

Protože $S'A' \parallel SX$, je $\sphericalangle ASX = \alpha$. Označme M



Obr. 6

průsečík polopřímky SX s polopřímkou AE . Vzhledem k $A'D' \parallel HE$ je $\sphericalangle AMS = \sphericalangle D'A'S' = 45^\circ$. Protože $\sphericalangle SAB = 45^\circ$, v trojúhelníku AMS vypočítáme $\sphericalangle MAS = 180^\circ - (\alpha + 45^\circ) = 135^\circ - \alpha$. Je tedy $\sphericalangle MAB = 135^\circ - \alpha - 45^\circ = 90^\circ - \alpha$. Potom $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BCF = \alpha$ a $BE = d \cdot \cos \alpha$, $BF = d \sin \alpha$, takže $EF = d \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)$.

Popsané těleso vznikne, jestliže od komolého jehlanu s podstavami $EFGH$, $A'B'C'D'$ a s výškou v odetneme čtyři shodné jehlany $AEBA'$, $BFCB'$, $CGDC'$, $DHAD'$, jejichž podstavy jsou pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami $d \cdot \sin \alpha$, $d \cdot \cos \alpha$ a jejichž výška je v . Jeho objem je

$$\begin{aligned} V &= \frac{d^2 v}{3} [1 + (\sin \alpha + \cos \alpha) + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2] - \\ &- \frac{4}{3} \cdot \frac{d^2 v \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{d^2 v}{3} (2 + \sin \alpha + \cos \alpha) = \\ &= \frac{d^2 v}{3} [2 + \sqrt{2} \sin (\alpha + 45^\circ)]. \end{aligned}$$

POZNÁMKA. Pro $\alpha = 0^\circ$ a $\alpha = 90^\circ$ vznikne pravidelný čtyřboký hranol $ABCD A'B'C'D'$, popř. $ABCD D'A'B'C'$ o objemu $V = d^2 v$; pro $\alpha = 45^\circ$ máme

$$V = \frac{d^2 v}{3} (2 + \sqrt{2}) \doteq 1,138 \cdot d^2 v, \text{ což je zřejmě maximum.}$$

3. KATEGORIE C

1. Dva chodci jdou stálými rychlostmi podél železniční trati v téže směru. V též směru jede po trati vlak. Lokomotiva předjede prvního chodce τ minut poté, co předjela druhého chodce. Prvního chodce mine vlak za t_1 vteřin, druhého chodce, který jde rychleji, za t_2 vteřin. Za kolik minut dohoní druhý chodec prvního?

ŘEŠENÍ. Prvního chodce, který jde pomaleji, mine vlak za kratší dobu než druhého chodce, tj.

$$t_1 < t_2 . \quad (1)$$

Představme si, že v úloze popsáný děj sledujeme z uvedeného jedoucího vlaku. Označme d jeho délku v metrech. Potom se nám zdá, že se chodci pohybují kolem nás v obráceném pořadí pozpátku, a to první chodec rychlostí

$$v_1 = \frac{d}{t_1} \quad (2)$$

a druhý chodec rychlostí

$$v_2 = \frac{d}{t_2} . \quad (3)$$

Rychlosti v_1 a v_2 jsou ve vztazích (2) a (3) udány v m/s. Vzhledem k nerovnosti (1) platí

$$\frac{d}{t_1} > \frac{d}{t_2} ,$$

tj. podle (2) a (3)

$$v_1 > v_2 .$$

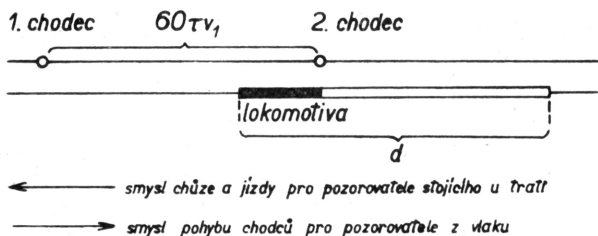
Z poslední nerovnosti plyne, že z vlaku se zdá, že první chodec je rychlejší a dohání druhého.

Popišme nyní, jak vypadá z hlediska pozorovatele ve vlaku předjíždění chodců. Jako první se objeví u předku lokomotivy druhý chodec. V okamžiku, kdy se octne druhý chodec u zádi lokomotivy (z jeho hlediska ho lokomotiva předjela), je od něho první chodec vzdálen

$$60 \cdot \tau \cdot v_1$$

metrů (obr. 7). Z vlaku se nám zdá, že se chodci k sobě přibližují s rychlostí

$$v_1 + v_2$$



Obr. 7

metrů za sekundu. Od okamžiku, kdy lokomotiva předjela druhého chodce, se oba chodci setkají za

$$t = \frac{1}{60} \cdot \frac{60 \tau v_1}{v_1 - v_2} = \frac{\tau v_1}{v_1 - v_2} \quad (4)$$

minut. Dosadíme-li z (2) a (3) do (4), máme

$$t = \frac{\tau \cdot t_2}{t_2 - t_1}. \quad (5)$$

Vztah (5) udává počet minut, který potřeboval druhý chodec v okamžiku, když ho předjela lokomotiva, k dosažení prvního chodce.

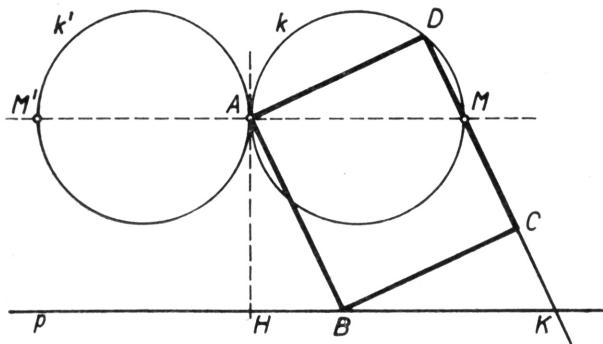
POZNÁMKA. Samozřejmě lze udávat počet minut i od jiného okamžiku, než kterého jsme užili. Musí být ovšem zajištěno, že v tomto okamžiku jsou už chodci v pohybu a že druhý chodec ještě není před prvním. U okamžiku, jenž jsme výše zvolili, je toto zřejmé podle textu úlohy. Podobně je tomu, počítáme-li čas potřebný k dosažení prvního chodce druhým od okamžiku, kdy lokomotiva předjela prvního chodce.

Dostáváme s užitím vztahu (5)

$$t' = \frac{\tau \cdot t_2}{t_2 - t_1} - \tau = \frac{\tau \cdot t_1}{t_2 - t_1}$$

minut.

2. V rovine je daná priamka p a bod A vzdialený od priamky p o $a > 0$. Ďalej je dané kladné číslo c . Určite geometrické miesto vrcholu D všetkých pravouholníkov $ABCD$, ktorých plošný obsah je c a ktorých vrchol B leží na priamke p .



Obr. 8

RIEŠENIE. Nech H je päta kolmice spustenej z bodu A na priamku p (obr. 8). Nech $ABCD$ je jeden z pravouholníkov vyhovujúcich podmienkam úlohy. Pretože priamka AB je zrejme rôznobežná s priamkou p , je tiež priamka CD s priamkou p rôznobežná a existuje preto priesečník K priamok p a CD . Podobne existuje priesečník M priamky CD s rovnobežkou s priamkou p vedenou bodom A . Pravouholník $ABCD$ a rovnobežník $ABKM$ majú spoločnú stranu AB a rovnakú výšku na ňu (je to dĺžka AD), preto sú rovnoploché. Plošný obsah pravouholníka sa podľa textu úlohy rovná c a plošný obsah pravouholníka sa zrejme rovná súčinu dĺžok AM a AH . Pretože čísla c a $AH = a$ nezávisia na voľbe pravouholníka $ABCD$, je tiež dĺžka úsečky $AM = c : a$ na tejto voľbe nezávislá. Existujú práve dva body vzdialené od bodu A o $c : a$ a le-

žiace na rovnobežke s priamkou p vedenej bodom A . Jeden z týchto bodov sme označili M , druhý označme M' . Z toho vyplýva podľa Thaletovej vety, že vrchol D leží na niektorej z kružníc k , resp. k' opísanej nad úsečkou AM , resp. AM' ako priemerom.

Hľadané geometrické miesto vrcholu D je dvojica kružníc k a k' bez bodu A . Posledné tvrdenie *dokážeme*. Ukázali sme už, že vrchol D leží nutne buď na kružnici k , alebo k' . Je zrejmé z textu úlohy, že $D \neq A$.

Nech teraz $D \neq A$ je bod kružnice k alebo k' . Bodmi D a A a tým, že bod B leží na priamke p je pravouholník $ABCD$ jednoznačne určený. Dôkaz, že jeho plošný obsah je c sa prevedie rovnako ako v predchádzajúcej úvahe. Tým je dôkaz prevedený.

3. Športový krúžok školy má 79 členov. Z nich pestuje 45 futbal, 30 volejbal, 36 basketbal, 28 hokej, 25 plávanie a 34 ľahkú atletiku. Každý člen krúžku pestuje aspoň dva športy a najväčší počet športov pestuje 40 členov krúžku. Koľko členov krúžku pestuje práve dva športy, práve tri športy, atď.?

RIEŠENIE. Označme x_i počet členov krúžku, ktorí pestujú práve i športov, $i = 2, 3, \dots, k$, pričom $x_k = 40$. V počte $45 + 30 + 36 + 28 + 25 + 34 = 198$ je každý člen krúžku počítaný toľkokrát, koľko rôznych športov pestuje. Preto platí

$$2x_2 + 3x_3 + \dots + kx_k = 198 \quad (1)$$

a keďže členov krúžku je 79, platí

$$x_2 + x_3 + \dots + x_k = 79. \quad (2)$$

Vylúčením x_2 z rovníc (1) a (2) dostaneme

$$x_3 + 2x_4 + \dots + (k-2)x_k = 40.$$

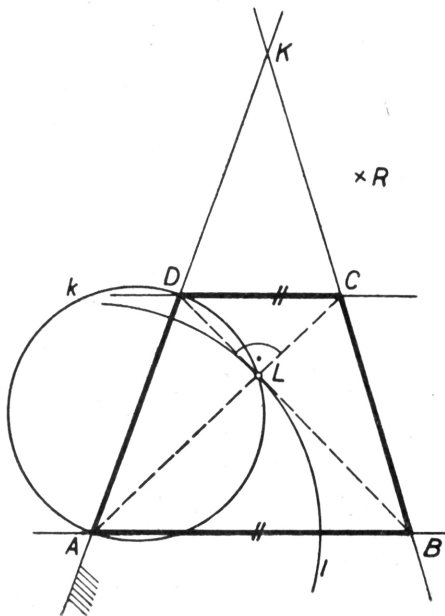
Keďže $x_k = 40$, musí byť $k = 3$, pretože inak by ľavá strana bola väčšia než 40. Potom rovnicu (2) môžeme zapísať v tvare

$$x_2 + x_3 = 79,$$

skadiaľ po dosadení $x_3 = 40$ dostaneme $x_2 = 39$.

Dva športy pestuje teda 39 členov a tri športy 40 členov krúžku.

4. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé, je-li dána délka jeho ramene $AD = d$, délka jeho úhlopříčky $AC = e$ a poměr obou základů $AB : DC = 5 : 3$.



Obr. 9

ŘEŠENÍ. Označme L průsečík úhlopříček AC a BD , K průsečík ramen AD a BC . Z podobnosti trojúhelníků (obr. 9)

$$\triangle KAB \sim \triangle KDC \text{ a } \triangle ABL \sim \triangle CDL$$

plyne

$$AK:DK = 5:3, AL:CL = BL:DL = AB:DC = 5:3 \text{ a } AL = \frac{5}{8} AC.$$

Poněvadž je $AC \perp BD$, leží bod L na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem AD .

Konstrukce (provedena na obr. 9 v polorovině ADR):

1. Nad úsečkou AD jako nad průměrem opíšeme kružnici k .

2. Sestrojíme kružnici $l \equiv (A; \frac{5}{8} AC)$.

3. Určíme průsečík $L \equiv k \cdot l$ ležící v polorovině ADR .

4. Na polopřímku AL nanese od A úsečku délky $AC = e$.

5. Sestrojíme $AB \parallel DC$; B leží na DL .

Důkaz. Z provedené konstrukce plyne, že $DL \perp AL$, tj. úhlopříčky jsou k sobě kolmé. Poněvadž je $AC:AL = 8:5$, je $AL:LC = 5:3$ a $AB:DC = 5:3$.

Diskuse. Úloha má řešení, a to jediné (v polorovině ADR), když $\frac{5}{8} e < d$. (Další řešení v polorovině opačné k polorovině ADR by bylo souměrné podle přímky AD .)

4. KATEGÓRIA D

1. Rozpočítali, že stavebný materiál odvezie auto za x dní, kde $x > 3$. Keďže odvoz bolo treba urýchliť, začali na štvrtý deň odvážať materiál ešte ďalšími dvoma autami.

Výkon prvého pomocného auta bol $\frac{5}{6}$ výkonu pôvodného auta, výkon druhého pomocného auta bol 1,5 výkonu pôvodného auta. Všetky tri autá dokončili odvoz za y dní.

a) Vyjadrite y pomocou x .

b) Pre ktoré celé čísla $x < 50$ je y celé číslo?

RIEŠENIE. Prvé auto odviezlo za jeden deň $\frac{1}{x}$ množstva všetkého materiálu, čiže celkom odviezlo $(y + 3) \frac{1}{x}$ materiálu. Druhé auto odviezlo za jeden deň $\frac{1}{x} \cdot \frac{5}{6}$ množstva všetkého materiálu a celkom teda $\frac{5y}{6x}$ materiálu. Tretie auto odviezlo za jeden deň $\frac{1}{x} \cdot 1,5$ množstva všetkého materiálu, čiže celkom $\frac{3y}{2x}$ materiálu. Všetky tri autá spolu odviezli všetok materiál, preto platí

$$\frac{y + 3}{x} + \frac{5y}{6x} + \frac{3y}{2x} = 1,$$

z čoho dostaneme

$$y = \frac{3}{10}(x - 3).$$

Číslo y je zrejme kladné, pretože $x > 3$. Ak je číslo y celé, potom kladné číslo $x - 3$ je násobkom čísla 10, t.j. $x - 3 = 10k$, kde k je číslo prirodzené. Pre prirodzené číslo x máme teda vzťah

$$x = 3 + 10k,$$

čiže $x \in \{13, 23, 33, 43, 53, \dots\}$.

Ak je $x < 50$, potom prichádzajú do úvahy čísla 13, 23, 33 a 43.

2. Určete všetky dvojice prirodzených čísel x, y , pro které, platí

$$8x^3 - y^3 = 387. \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. Platí $8x^3 - y^3 = (2x)^3 - y^3 =$
 $= (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$, tj. rovnice (1) zní

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 387.$$

Zřejmě je $4x^2 + 2xy + y^2 > 0$, $2x - y > 0$, $2x > y$.
 Rozložíme číslo 387 v součin prvočinitelů: $387 =$
 $= 3 \cdot 3 \cdot 43$. Sestavíme tabulku:

$2x - y$	1	3	43	9	129	387
$4x^2 + 2xy + y^2$	387	129	9	43	3	1
$(2x - y)^2$	1	9	1849	81	$129^2 > 3$	$387^2 > 1$
$4x^2 + 2xy + y^2 - (2x - y)^2 = 6xy$	386	120	záporné	záporné	záporné	záporné
xy	není celé	20	—	—	—	—
x	—	4	—	—	—	—
y	—	5	—	—	—	—

Rozložíme číslo 20 v součin dvou činitelů: $20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$; kladné rozdíly $2x - y$ jsou $2 \cdot 20 - 1 = 39$, $2 \cdot 10 - 2 = 18$, $2 \cdot 5 - 4 = 6$, $2 \cdot 4 - 5 = 3$. Vyhovuje jen poslední; proto do tabulky (sloupec 2) doplníme $x = 4, y = 5$. Skutečně je $8x^3 - y^3 = 8 \cdot 64 - 125 = 512 - 125 = 387$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Položíme-li $2x = z$, dostáváme

$$z^3 - y^3 = 387, \quad (1)$$

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 8$$

$$3^3 = 27$$

$$4^3 = 64$$

$$5^3 = 125$$

$$6^3 = 216$$

$$7^3 = 343$$

$$8^3 = 512$$

$$9^3 = 729$$

$$10^3 = 1000$$

$$11^3 = 1331$$

$$12^3 = 1728$$

$$13^3 = 2197$$

$$14^3 = 2744$$

.

.

.

tj. úlohu: nalezněte taková dvě přirozená čísla z a y , přičemž z je sudé, aby rozdíl jejich třetích mocnin byl 387.
Z rovnice (1) plyne, že pro sudé číslo z platí

$$z^3 > 387,$$

takže z tabulky třetích mocnin přirozených čísel snadno zjistíme, že

$$z \geq 8. \quad (2)$$

Z této tabulky lze také odhadnout, že sudé číslo z nemůže být větší než 10, tj. musí být

$$z \leq 10. \quad (3)$$

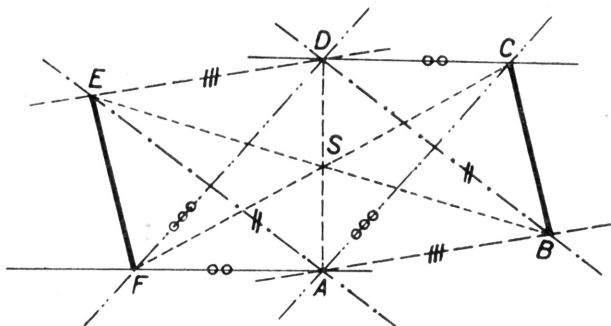
Odečteme-li totiž od třetí mocniny libovolného sudého čísla $z > 10$

třetí mocninu největšího čísla, které přichází v úvahu jako číslo y , tj. třetí mocninu čísla $z - 1$, potom, jak se zdá z tabulky, dostaneme vždy číslo větší než 387. Pravdivost tohoto odhadu snadno dokážeme. Každé sudé přirozené číslo $z > 10$ lze psát ve tvaru $12 + n$, kde n je celé nezáporné číslo. Platí:

$$(12 + n)^3 - [(12 + n) - 1]^3 = (12 + n)^3 - (12 + n)^3 + 3(12 + n)^2 - 3(12 + n) + 1 = 397 + n^2 + 69n > 387.$$

Ze vzťahů (2) a (3) plyne, že sudé číslo z je buď 8, nebo 10. Z tabulky třetích mocnin zjistíme, že úloha má jediné řešení $z = 8$ a $y = 5$, tj. $x = 4$ a $y = 5$.

3. Sú dané body A, B, C, D , z ktorých žiadne tri neležia v priamke. Zostrojte bod E tak, aby bolo $AE \parallel BD$, $DE \parallel AB$ a bod F tak, aby bolo $AF \parallel CD$ a $DF \parallel AC$. Dokážte, že $EF = BC$.



Obr. 10

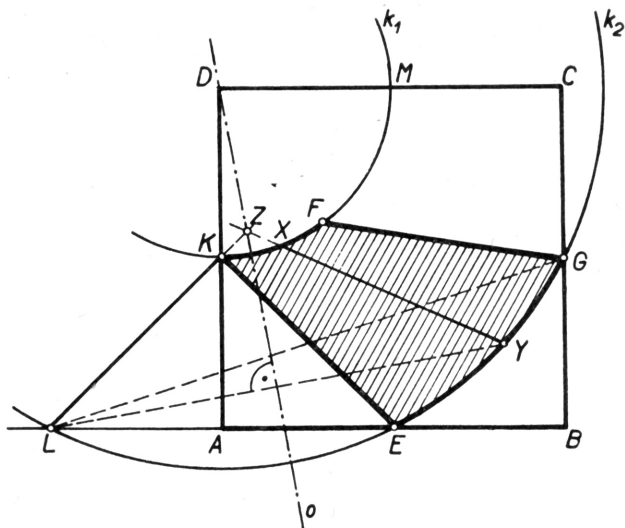
RIEŠENIE. Obrazec $ABDE$ je rovnobežník, pretože body A, B, D neležia v priamke. Priesečník jeho uhlopriečok označme S (obr. 10). Potom $AS = DS$, $BS = ES$. Obrazec $ACDF$ je taktiež rovnobežník, pretože ani body A, C, D neležia v priamke. Jeho uhlopriečky sa taktiež pretínajú v bode S , pretože uhlopriečka AD je spoločná pre oba rovnobežníky. Preto platí tiež $CS = FS$. Z podmienok $BS = ES$, $CS = FS$ vyplýva $EF = BC$, pretože body B, E a C, F tvoria dve dvojice bodov súmerne združených podľa stredu S .

4. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a ; K je střed strany AD , L je bod polopřímky BA , pro který platí $BL = \frac{3}{2}a$. Označme o nějakou takovou přímku procházející bodem D , že úsečka XY souměrně sdružená s KL podle osy o leží celá ve čtverci $ABCD$.

Jaký útvar vyplní všechny takto vytvořené úsečky XY ? Narýsujte obrázek a vyšrafujte tento útvar.

ŘEŠENÍ. Danou situaci znázorňuje obr. 11. Protože body K, X jsou souměrně sdruženy podle osy o , která prochází vrcholem D , platí

$$DK = DX.$$



Obr. 11

Bod X leží tedy na kružnici k_1 se středem D a poloměrem $DK = \frac{a}{2}$; ovšem jenom na tom oblouku kružnice k_1 , který leží ve čtverci $ABCD$ (je to čtvrtkružnice KM).

Protože body L , Y jsou souměrně sdruženy podle osy o , která prochází vrcholem D , platí

$$DL = DY.$$

Bod Y leží tedy na kružnici k_2 se středem D a poloměrem

$$DL = \frac{a}{2} \sqrt{5}, \text{ jak snadno vypočteme podle Pythagorovy}$$

věty z trojúhelníka ADL . Kružnice k_2 prochází středem G strany BC ; bod Y leží ovšem jen na tom oblouku kružnice k_2 , který leží ve čtverci $ABCD$. Tento oblouk je omezen středy E , G stran AB , BC .

Budiž Y libovolný bod oblouku EG ; dokážeme, že vznikne jako souměrně sdružený bod s bodem L podle vhodné osy o procházející vrcholem D . Tuto osu o sestrojíme jako osu úsečky LY ; určíme průsečík Z přímek o , KL a dále průsečík X přímky YZ s obloukem KM kružnice k_1 . Úsečka XY je souměrně sdružená s KL podle osy o . Je-li $Y = G$, je $X = F$. Proměnná úsečka XY vyplní vyšrafovanou část mezikruží (k_1 , k_2) omezenou obloukem EG kružnice k_2 , obloukem KF kružnice k_1 a úsečkami KE , FG .

III. Soutěžní úlohy I. kola

1. KATEGORIE A

1. Je dáno n ($n \geq 4$) reálných čísel ve vzestupném uspořádání $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Sestavte takovou jejich permutaci $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, aby součet absolutních hodnot

$$|b_1 - b_2| + |b_2 - b_3| + \dots + |b_{n-1} - b_n| + |b_n - b_1| \quad (1)$$

byl maximální. Popište vytvoření této permutace a napište vzorec pro maximální součet (1).

ŘEŠENÍ. a) Označíme $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ libovolnou permutaci daných čísel a dále označíme

$$s = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_1|.$$

Platí-li pro tři za sebou následující čísla, např. x_2, x_3, x_4 , nerovnosti

$$x_2 < x_3 < x_4, \quad (2)$$

je

$$|x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| = x_3 - x_2 + x_4 - x_3 = x_4 - x_2,$$

tj. platí-li (2), pak střední číslo x_3 trojice (2) se vůbec neúčastní tvoření součtu s . Toto tvrzení platí i pro trojice x_{n-1}, x_n, x_1 a x_n, x_1, x_2 . K stejnému výsledku dospějeme i tehdy, když místo nerovností (2) platí nerovnosti

$$x_2 > x_3 > x_4.$$

b) Nechť pro některá tři za sebou následující čísla, např. pro x_2, x_3, x_4 , platí nerovnosti

$$x_2 < x_3, \quad x_3 > x_4. \quad (3)$$

Pak je

$$|x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| = x_3 - x_2 + x_3 - x_4 = 2x_3 - x_2 - x_4,$$

tj. střední číslo trojice (3) se v součtu (1) vyskytne se součinitelem 2.

Nechť pro některá tři za sebou následující čísla, např. pro x_2, x_3, x_4 , platí nerovnosti

$$x_2 > x_3, \quad x_3 < x_4. \quad (4)$$

Pak je

$$|x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| = x_2 - x_3 + x_4 - x_3 = x_2 + x_4 - 2x_3,$$

tj. střední číslo trojice (4) se v součtu (1) vyskytne se součinitelem -2 .

Závěr odstavců a) a b):

Součet s vypočteme podle vzorce:

$$s = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + \dots + k_n a_n. \quad (5)$$

Koeficienty $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ určíme takto: je-li číslo a_i v cyklicky chápané permutaci $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ mezi sousedním menším a větším číslem, je $k_i = 0$; je-li číslo a_i mezi dvěma menšími čísly, je $k_i = 2$, je-li mezi dvěma většími čísly, je $k_i = -2$.

c) Při konstrukci permutace $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ se tedy budeme snažit, aby největší čísla dané skupiny ležela mezi menšími. Přitom je třeba rozlišit dva případy:

I. $n = 2\nu$ je sudé číslo. Pak sestrojíme permutaci $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ takto:

$$a_1, a_{\nu+1}, a_2, a_{\nu+2}, \dots, a_\nu, a_{2\nu}.$$

Zde je každé z čísel $a_{\nu+1}, \dots, a_{2\nu}$ mezi dvěma menšími čísly a kterékoli z čísel $a_1, a_2, \dots, a_\nu$ mezi dvěma většími čísly. Vyměníme-li mezi sebou kterákoli dvě z čísel $a_1, a_2, \dots, a_\nu$ nebo kterákoli dvě z čísel $a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \dots, a_{2\nu}$, součet s se nezmění. Naproti tomu při výměně čísla první skupiny s číslem druhé skupiny se součet s zmenší. Je tedy $k_{\nu+1} = \dots = k_{2\nu} = 2, \quad k_1 = k_2 = \dots = k_\nu = -2$ a podle (5)

$$S_{\max} = 2(a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \dots + a_{2\nu} - a_1 - a_2 - \dots - a_\nu).$$

II. $n = 2\nu + 1$ je liché číslo. Pak sestrojíme permutaci $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ takto:

$$a_1, a_{\nu+2}, a_2, a_{\nu+3}, \dots, a_\nu, a_{2\nu+1}, a_{\nu+1}. \quad (6)$$

V permutaci (6) leží každé z čísel $a_1, a_2, \dots, a_\nu$ mezi dvěma většími čísly, každé z čísel $a_{\nu+2}, a_{\nu+3}, \dots, a_{2\nu+1}$ mezi dvěma menšími čísly a číslo $a_{\nu+1}$ mezi menším a větším číslem. Je tedy $k_1 = k_2 = \dots = k_\nu = -2$, $k_{\nu+2} = k_{\nu+3} = \dots = k_{2\nu+1} = 2$, $k_{\nu+1} = 0$ a podle (5)

$$S = 2(a_{\nu+2} + a_{\nu+3} + \dots + a_{2\nu} + a_{2\nu+1} - a_1 - a_2 - \dots - a_\nu). \quad (7)$$

Jako v případě I se dokáže i zde, že s dané vzorcem (7) je maximální.

JINÉ ŘEŠENÍ. Máme $n(n \geq 4)$ čísel

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n. \quad (1)$$

Označme si $d_j = a_{j+1} - a_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n-1$.

Při $1 \leq j < k \leq n$ platí zřejmě rovnost

$$|a_j - a_k| = d_j + d_{j+1} + \dots + d_{k-1}, \quad (2)$$

takže součet

$$S = \sum_{j=1}^n |b_j - b_{j+1}|, \quad (3)$$

kde $b_1, b_2, \dots, b_n$ je hledaná permutace čísel $a_1, \dots, a_n$, $b_{n+1} = b_1$, můžeme vyjádřit ve tvaru

$$S = \sum_{j=1}^{n-1} c_j d_j, \quad (4)$$

kde koeficienty c_j jsou jistá celá nezáporná čísla. Porovnáním (2) a (4) vidíme, že c_j je právě počet dvojic b_i, b_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n$), $b_i = a_k, b_{i+1} = a_l$ takových, že platí $k \leq j < l$ anebo $l \leq j < k$.

Poněvadž každé číslo a_k vystupuje v součtu (3) právě dvakrát, je vidět, že

$$c_j \leq 2 \cdot \min [j, n - j] . \quad (5)$$

Stačí nyní jen udat permutaci, která realizuje v (4) právě koeficienty $c_j = 2 \cdot \min [j, n - j]$ — pokud existuje. Ukážeme, že existuje. Vytvoříme ji nejsnáze tak, že bereme čísla a_k postupně z obou konců posloupnosti (1), tedy v pořadí

$$a_1, a_n, a_2, a_{n-1}, \dots \quad (6)$$

V dalším rozlišíme dva případy podle toho, je-li n sudé či liché.

I. n sudé, $n = 2m$.

Poslední dva členy posloupnosti (6) budou a_m, a_{m+1} . Utvořme součet

$$S' = \sum_{j=1}^{n-1} |b_j - b_{j+1}| \quad (7)$$

pro permutaci (6); ve vyjádření obdobném (4) to bude

$$S' = d_1 + 3d_2 + 5d_3 + \dots + (2m-1)d_m + (2m-2)d_{m+1} + \dots + 4d_{n-2} + 2d_{n-1} . \quad (8)$$

Avšak $S = S' + |a_{m+1} - a_1| = S + d_1 + d_2 + \dots + d_m$, takže podle (8) je

$$S = 2d_1 + 4d_2 + 6d_3 + \dots + (2m-2)d_{m-1} + 2md_m + (2m-2)d_{m+1} + \dots + 2d_{n-1} ,$$

tzn.

$$c_j = 2 \cdot \min [j, n - j] .$$

II. n liché, $n = 2m - 1$.

Zde budou poslední dva členy v (6): a_{m+1}, a_m . Pro součet

$$S' = \sum_{j=1}^{n-1} |b_i - b_{i+1}| \quad \text{dostaneme vyjádření}$$

$$S' = d_1 + 3d_2 + \dots + (2m-3)d_{m-1} + (2m-2)d_m + \\ + (2m-4)d_{m+1} + \dots + 4d_{n-2} + 2d_{n-1}.$$

Avšak

$$S = S' + |a_m - a_1|, \text{ tzn. } S = S' + d_1 + d_2 + \dots + d_{m-1}.$$

$$S = 2d_1 + 4d_2 + \dots + 2(m-1)d_{m-1} + 2(m-1)d_m + \\ + 2(m-2)d_{m+1} + \dots + 4d_{n-2} + 2d_{n-1},$$

tedy opět $c_j = 2 \cdot \min [j, n-j]$.

POZNÁMKA 1. Existují i jiné permutace vedoucí k témuž maximálnímu součtu S , např. permutace

$$a_1, a_{m+1}, a_2, a_{m+2}, \dots, a_{2m-1}, (a_{2m}). \quad (6')$$

POZNÁMKA 2. Snadno zjistíme, že naopak vždy $c_j \geq 2$, takže minimální hodnota součtu S , odpovídající permutaci $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, je rovna

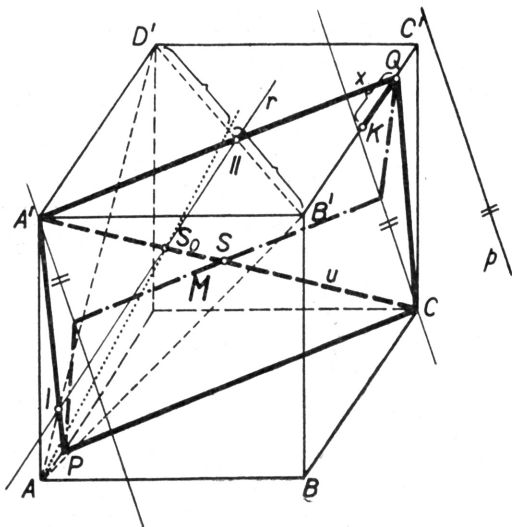
$$S = \sum_{j=1}^{n-1} 2d_j = 2 \cdot |a_1 - a_n|.$$

POZNÁMKA 3. Úloha má tuto geometrickou interpretaci. Mějme danu přímku p se zavedenou soustavou souřadnic a na ní body $A_1, A_2, \dots, A_n$, které mají po řadě souřadnice $a_1, a_2, \dots, a_n$. Potom součet $s = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_1|$, kde $x_1, x_2, \dots, x_n$ je permutace čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, představuje délku uzavřené cesty po přímce p z bodu $[x_1]$ přes body $[x_2], [x_3], \dots, [x_n]$ nazpátek do bodu $[x_1]$.

2. Je dána jednotková krychle a určitá její tělesová úhlopříčka u . Zvolíme přímku p tak, aby nebyla rovnoběžná ani s úhlopříčkou u , ani se žádnou stěnou dané krychle. Každým bodem úsečky u vedeme rovnoběžku x s přímkou p a sestrojíme střed X dvojice bodů, v nichž přímka x protne povrch krychle.

a) Dokažte, že množina M všech bodů X je při pevně zvolené přímce p buď úsečka, nebo lomená čára složená ze tří úseček.

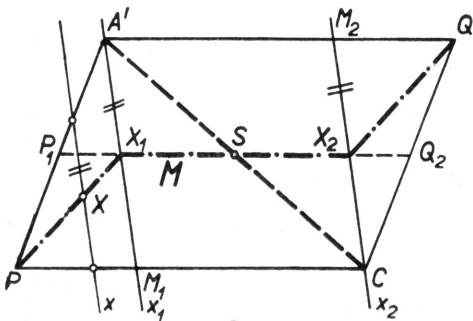
b) Dokažte, že při libovolné volbě přímky p má čára M délku menší než $1 + \sqrt{2}$.



Obr. 12

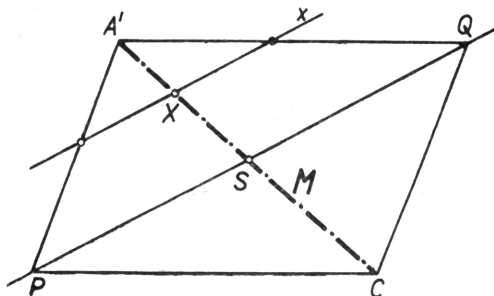
ŘEŠENÍ. a) Budiž $ABCD A' B' C' D'$ daná krychle ($AB = 1$), $A' C$ úhlopříčka u (obr. 12). Všechny rovnoběžky x s přímkou p , které protínají přímku $A' C$, vyplní rovinu ϱ ; rovina ϱ protne rovinu $AB' D'$ v přímce, kterou označíme r . Rovina $AB' D'$ je kolmá k přímce $A' C$ (je totiž jednak $AA' = B'A' = D'A' = 1$, jednak $AC = B'C = D'C = \sqrt{2}$) a protne ji v bodě S_0 . Z věty

Na obr. 14 je sestrojena množina $\mathbf{M}$ v případě, že přímka $x_1 \parallel p$ vedená bodem A' protíná stranu PC .



63

Vedeme ještě přímku $x_2 \parallel p$ bodem C , která protne stranu $A'Q$, a označíme průsečíky M_1, M_2 podle obr. 13. Jsou-li X_1, X_2 středy dvojic $A'M_1$ a CM_2 , skládá se hledaná množina M z težnic PX_1, QX_2 trojúhelníků $A'PM_1, CQM_2$ (jak snadno dokážeme stejnoolehlostí) a ze střední příčky X_1X_2 rovnoběžníka M_1CM_2A' . V případě, že je $p \parallel PQ$, splyne hledaná množina M s úsečkou u (obr. 15).



Obr. 15

Množina M je narysována čerchovaně na obr. 14, 15 i na obr. 12.

b) Z trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle PX_1P_1, \triangle QX_2Q_2$ (obr. 14) plyne

$PX_1 < PP_1 + P_1X_1, QX_2 < QQ_2 + Q_2X_2$, a tedy $PX_1 + X_1X_2 + X_2Q < PP_1 + P_1X_1 + X_1X_2 + X_2Q_2 + Q_2Q = PP_1 + P_1Q_2 + Q_2Q = PA' + PC$, neboli

$$PX + X_1X_2 + X_2Q < PC + CQ. \quad (1)$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle A'PC$ plyne $A'C < A'P + PC$, neboli

$$A'C < PC + CQ. \quad (2)$$

Vztahy (1) a (2) vyjadřují, že délka čáry **M** je v každém případě menší než součet délek sousedních stran průsečného rovnoběžníka $A'PCQ$. Jde tedy o to vyšetřit průběh délky $y = A'Q + CQ$, když bod Q probíhá úsečku $B'C'$ (obr. 12).

Označme K střed hrany $B'C'$, $KQ = x$; pak je $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Z pravoúhlých trojúhelníků $A'B'Q$, $CC'Q$ plyne

$$y = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} + x\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2}$$

neboli

$$y = \sqrt{\frac{5}{4} + x^2 + x} + \sqrt{\frac{5}{4} + x^2 - x}, \quad (3)$$

kde $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Máme dokázat, že je $y < 1 + \sqrt{2}$.

Tvrzení dokážeme sporem. Pripustíme, že je $y \geq 1 + \sqrt{2}$; pak z (3) dostaneme po umocnění

$$\frac{5}{2} + 2x^2 + 2\sqrt{\left(\frac{5}{4} + x^2\right)^2 - x^2} \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

a po úpravě

$$\sqrt{\left(\frac{5}{4} + x^2\right)^2 - x^2} \geq \frac{1}{4} + \sqrt{2} - x^2. \quad (4)$$

Protože na pravé straně (4) je kladné číslo, máme po umocnění a po úpravě

$$2x^2(1 + \sqrt{2}) \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Odtud plyne $x^2 \geq \frac{1}{4}$ neboli $x \geq \frac{1}{2}$, což je nemožné.

(Případ $x = \frac{1}{2}$ je vyloučen, neboť by bylo $Q = C'$, tj. $p \parallel CC'$.)

3. Je daná rovnica $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$ s komplexnými koeficientami, ktorá má (komplexné) korene z_1, z_2 . Zostavte rovnicu (s reálnymi koeficientami), ktorá má korene $|z_1|, |z_2|$.

RIEŠENIE. Pre korene z_1, z_2 danej rovnice platí $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$, $(z_1 - z_2)^2 = \frac{D}{a^2}$, kde $D = b^2 - 4ac$. Pre zostavenie hľadanej rovnice potrebujeme výrazy $|z_1| + |z_2|$, $|z_1| \cdot |z_2|$.

Z podmienky $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ vyplýva

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 z_2| = \left| \frac{c}{a} \right|. \quad (1)$$

Ak označíme $\bar{z}$ číslo komplexne združené k číslu z , potom z podmienky $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ vyplýva $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$, takže

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2 \bar{z}_2 = \\ &= \left(-\frac{b}{a}\right) \cdot \left(-\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right), \end{aligned}$$

z čoho dostaneme

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = \left| \frac{b}{a} \right|^2, \quad (2)$$

pretože $z\bar{z} = |z|^2$. Okrem toho platí

$$\begin{aligned}(z_1 - z_2)^2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2 &= (z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2)^2 = \\ &= \frac{D}{a^2} \cdot \frac{\bar{D}}{\bar{a}^2} = \left| \frac{D}{a^2} \right|^2,\end{aligned}$$

z čoho

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = \left| \frac{D}{a^2} \right|, \quad (3)$$

pretože $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2$ je zrejmé nezáporné číslo. Z podmienok (1), (2), (3) dostávame

$$\begin{aligned}(|z_1| + |z_2|)^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left| \frac{D}{a^2} \right| + \left| \frac{b}{a} \right|^2 + 4 \cdot \left| \frac{c}{a} \right| \right),\end{aligned}$$

z čoho

$$|z_1| + |z_2| = \frac{1}{|a|} \sqrt{\frac{1}{2} (|D| + |b|^2 + 4|ac|)}.$$

Hľadaná rovnica (s neznámou ξ) má teda po úprave tvar

$$|a| \cdot \xi^2 - \sqrt{\frac{1}{2} (|D| + |b|^2 + 4|ac|)} \xi + |c| = 0.$$

Riešením úlohy však môže byť každá ďalšia rovnica, ktorú z tejto rovnice dostaneme ekvivalentnou úpravou, alebo tiež rovnica vyššieho stupňa, ktorú dostaneme z tejto rovnice vynásobením mnohočlenom $f(\xi)$.

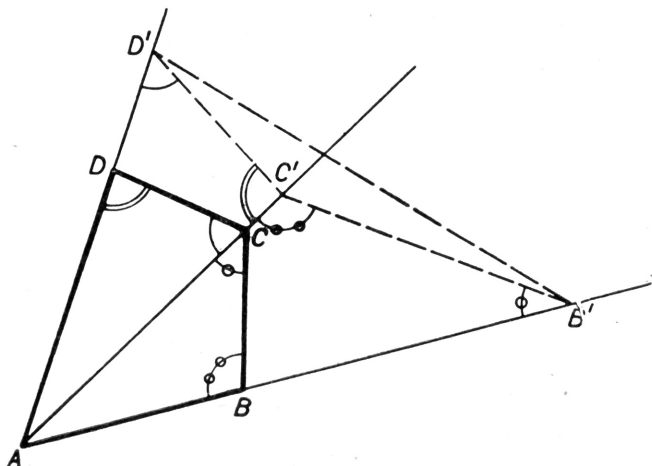
4. Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$. Na polpriamkach AB, AC, AD sú zostrojené v uvedenom poradí body B', C', D' tak, že platí $AB' \cdot AB = AC' \cdot AC = AD' \cdot AD = 1$. Dokážte vety:

a) Štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď body B' , C' , D' ležia v priamke.

b) Pre každý konvexný štvoruholník $ABCD$ platí

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD ; \quad (1)$$

v ktorom prípade nastane rovnosť?



Obr. 16

RIEŠENIE (obr. 16). I. Z konštrukcie bodov B' , C' vyplýva $AB : AC = AC' : AB'$. Podľa vety $\frac{s}{s}$ u $\frac{s}{s}$ o podobnosti trojuholníkov je

$$\triangle ABC \sim \triangle AC'B' . \quad (2)$$

Zo vzťahu (2) dostaneme $B'C' : BC = AB' : AC$, t. j.

$$B'C' = BC \cdot \frac{1}{AB \cdot AC} . \quad (3a)$$

Zámenou písmen dostaneme z tohto vzťahu

$$C'D' = CD \cdot \frac{1}{AC \cdot AD}, \quad B'D' = BD \cdot \frac{1}{AB \cdot AD}. \quad (3b)$$

Pretože platí

$$B'D' \leq B'C' + C'D', \quad (4)$$

dostaneme po dosadení z (3a), (3b) do (4) a po vynásobení súčinom $AB \cdot AC \cdot AD$ nerovnosť (1). Rovnosť vo vzťahu (1) nastane práve vtedy, keď nastane rovnosť vo vzťahu (4), t. j. keď bod C' leží medzi bodmi B' a D' .

II. Ak je štvoruholník $ABCD$ tetivový, je

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ. \quad (5)$$

Zo vzťahu (2) však vyplýva, že $\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle AC'D' = \sphericalangle ADC$, preto je podľa (5) $\sphericalangle AC'B' + \sphericalangle AC'D' = 180^\circ$, čiže body B' , C' , D' ležia v priamke (C' medzi B' a D'). Z obrátenia postupu vyplýva vzhľadom na odstavce I, že platí veta a). Rovnosť vo vzťahu (1) nastane preto práve vtedy, keď štvoruholník $ABCD$ je tetivový.

2. KATEGORIE B

1. Jestliže pro reálná čísla a, b, c platí

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0, \quad (1)$$

potom buď $a + b + c = 0$, nebo $a = b = c$. Dokažte.

ŘEŠENÍ. Levou stranu rovnosti (1) vhodně upravíme. Platí

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc,$$

a proto

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3a^2c - 3ac^2 - 3b^2c - 3bc^2 - 9abc.$$

Avšak

$$\begin{aligned} 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 9abc &= \\ = 3ab(a + b + c) + 3ac(a + b + c) + 3bc(a + b + c) &= \\ = 3(a + b + c)(ab + ac + bc). \end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c) [(a + b + c)^2 - \\ &\quad - 3(ab + ac + bc)] = \quad (2) \\ &= \frac{1}{2} (a + b + c) [(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2]. \end{aligned}$$

Je-li splněna rovnost (1), pak buď

$$a + b + c = 0,$$

nebo

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0,$$

což lze splnit právě tehdy, když $a - b = 0$, $a - c = 0$, $b - c = 0$, tj. když

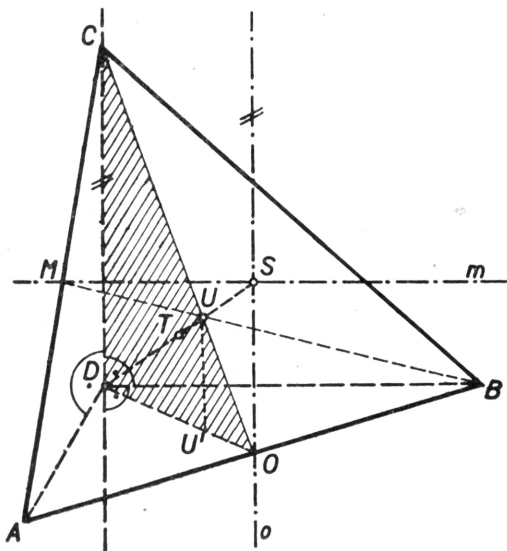
$$a = b = c.$$

POZNÁMKA. Při rozkladu levé strany rovnosti (1) na součin (2) lze postupovat také následujícím způsobem.

Dosadíme-li do mnohočlenu $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ za a číslo $-(b + c)$, dostaneme nulu. Dělením mnohočlenu $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ mnohočlenem $a - (-(b + c)) = (a + b + c)$, přičemž oba mnohočleny považujeme za mnohočleny v a , dostaneme

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \\ = (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc). \end{aligned}$$

2. Budiž $ABCD$ čtyřstěn té vlastnosti, že každé dvě z hran AD , BD , CD jsou navzájem kolmé. Označme U těžiště trojúhelníka ABC a T bod úsečky DU , pro který platí $DT = 3 \cdot TU$. Dále označme S střed kulové plochy, která prochází body A , B , C , D . Vyjádřete poloměr této kulové plochy jako funkci vzdálenosti ST .



Obr. 17

ŘEŠENÍ. Čtyřstěn $ABCD$, znázorněný na obr. 17, má uvedené vlastnosti ($\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 90^\circ$) a rovněž těžiště U trojúhelníka ABC a bod T jsou sestrojeny podle textu úlohy, tj.

$$DT = 3 \cdot TU. \quad (1)$$

Nyní sestrojíme střed S kulové plochy κ o poloměru r , která prochází body A, B, C, D . Kulová plocha κ protíná rovinu ABD v kružnici k , opsané pravoúhlému trojúhelníku ADB ; její střed O je středem přepony AB . Bod S leží na kolmici o v bodě O k rovině ABD . Protože $CD \perp DB$, $CD \perp DA$, je také $CD \perp ABD$, takže platí

$$CD \parallel o \quad (2)$$

a body C, D, O, S leží v téže rovině.

Rovina CDS protíná rovinu ABC v přímce CO , kde úsečka CO je zřejmě těžnicí trojúhelníka ABC . Přímka SD protíná tedy těžnici CO . Konstruuje-li obdobným způsobem přímku $m \perp ADC$, která prochází rovněž bodem S , zjistíme, že přímka SD protíná i druhou těžnici BM trojúhelníka ABC ; prochází tedy jeho těžištěm U .

Body D, T, U, S leží proto v přímce. Všechny tyto body leží v poloprostoru $(ABD)C$, neboť bod S leží v rovině souměrnosti úsečky CD rovnoběžné s ABD . Vzdálenost bodu S od roviny ABD je tedy

$$SO = \frac{1}{2} CD.$$

Označíme-li U' patu kolmice spuštěné z bodu U na rovinu ABD , dostáváme z podobnosti trojúhelníků $OU'U$ a ODC , že

$$\frac{UU'}{CD} = \frac{UO}{OC} = \frac{1}{3}.$$

Je tedy $UU' = \frac{1}{3} CD < \frac{1}{2} CD = SO$, takže body D, T, U, S leží v přímce v tomto pořádku.

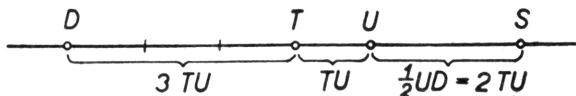
Vzhledem ke vztahu (2) jsou trojúhelníky OSU a CDU podobné podle věty *uu*, takže platí

$$\frac{US}{UD} = \frac{UO}{UC} = \frac{1}{2}.$$

Odtud dostáváme

$$US = \frac{1}{2} UD. \quad (3)$$

Situace na přímce bodů D, T, U, S je znázorněna na obr. 18. Vzhledem k (1) a (3) tedy platí



Obr. 18

$$ST = \frac{1}{2} DS = \frac{1}{2} r$$

čili

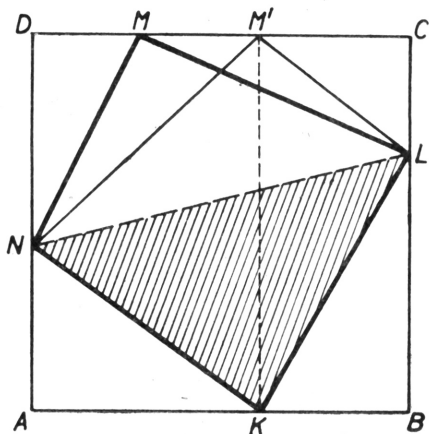
$$r = 2 \cdot ST,$$

kde r je poloměr kulové plochy κ . Tím je úloha vyřešena.

3. Je daný štvorec $ABCD$ so stranou $2a$. Vo vnútri jeho strán AB , BC , CD a DA zvolte v uvedenom poradí body K , L , M a N tak, aby sa plošný obsah štvoruholníka $KLMN$ rovnal číslu $2a^2$ a aby existovala kružnica k opísaná štvoruholníku $KLMN$. Vyšetrite geometrické miesto stredu S opísanej kružnice k .

RIEŠENIE. Nech $KLMN$ je štvoruholník vpísaný štvorcu $ABCD$ uvedeným spôsobom tak, že $KM \parallel AD$. Potom je zrejmé plošný obsah trojuholníka KMN , resp. KML rovný polovici plošného obsahu obdĺžnika $KMDA$, resp. $KMCB$. Pretože plošný obsah štvorca $ABCD$ sa rovná $4a^2$, je plošný obsah štvoruholníka $KLMN$ rovný $2a^2$.

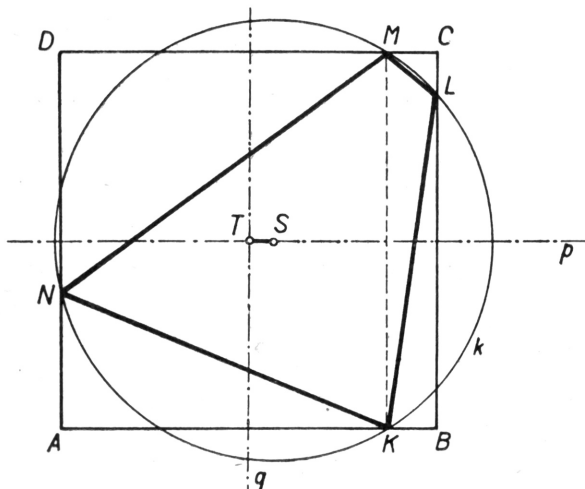
Nech teraz $KLMN$ je taký štvoruholník vpísaný štvorcu $ABCD$ uvedeným spôsobom, že $KM \nparallel AD$ a $LN \nparallel AB$ (obr. 19). Ukážeme, že plošný obsah tohto štvoruholníka je rôznyi od $2a^2$. Nech M' je bod z vnútra strany CD , pre ktorý $KM' \parallel AD$. Podľa vyššie dokázaného má štvoruholník $KLM'N$ plošný obsah rovný číslu $2a^2$. Z druhej



Obr. 19

strany však trojuholníky LMN a LMN' majú spoločnú stranu, ale ich výšky na túto stranu majú rôzne dĺžky (pretože $LN \nparallel DC$), majú teda nerovnaké plošné obsahy. Preto sú aj plošné obsahy štvoruholníkov $KLMN$ a $KLM'N$ rôzne, čím je dôkaz prevedený. Pre hľadaný štvoruholník musí teda platiť buď $KM \parallel AD$, alebo $LN \parallel AB$. Z toho vyplýva, že stred S kružnice opísanej hľadanému štvoruholníku $KLMN$ leží buď na priamke $p \parallel AB$ prechádzajúcej stredom T štvorca $ABCD$, alebo na priamke $q \parallel AD$ prechádzajúcej bodom T .

Nech $k = (S, r)$ je kružnica opísaná niektorému z daných štvoruholníkov $KLMN$ (obr. 20). Nech napr. S leží na priamke p , $SB < SA$. Pretože kružnica k pretína úsečky AD , BC , resp. sa ich dotýka, je nutne $a + TS < r < SB = \sqrt{a^2 + (a - TS)^2}$, z čoho po úprave do-



Obr. 20

staneme $TS < \frac{a}{4}$. Hľadaná množina stredov S sa skladá z dvoch otvorených úsečiek ležiacich na priamkach p a q tak, že stred T štvorca $ABCD$ je stredom každej z nich a obe majú dĺžku $\frac{a}{2}$.

K dôkazu tohto tvrdenia stačí ukázať, že ku každému bodu popísanej množiny skutočne možno nájsť štvoruholník $KLMN$ a kružnicu $k \equiv (S, r)$ so stredom vo zvolenom bode tak, aby boli splnené podmienky úlohy.

Nech je teda S bod popísanej množiny. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že S leží na priamke p , $SA > SB$. Potom je však tiež $a + TS < SB$ a existuje reálne číslo r tak, že $a + TS < r < SB$. Kružnica $k \equiv (S, r)$ pretína zrejme všetky štyri strany štvorca

$ABCD$ vo vnútorných bodoch a z priesečníkov so stranami AB , CD možno zvoliť požadované body K , M tak, aby $KM \parallel BC$. Za body L a N možno potom vziať ľubovoľný z priesečníkov kružnice k so stranami BC a AD . Takto zostrojený štvoruholník má požadované vlastnosti, čím je dôkaz úplne prevedený a úloha vyriešená.

4. Je dán lichý počet $2n + 1$ ($n \geq 2$) reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ tak, že platí $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n+1}$. Označme $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n+1}$ ľubovoľné jejich usporiadání a označme

$$s = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_2 - x_{2n+1}| + |x_{2n+1} - x_1|. \quad (1)$$

Dokažte, že každý z týchto součtů s je menší nebo roven součtu utvořenému z usporádání

$$a_1, a_{n+2}, a_2, a_{n+3}, \dots, a_n, a_{2n+1}, a_{n+1}. \quad (2)$$

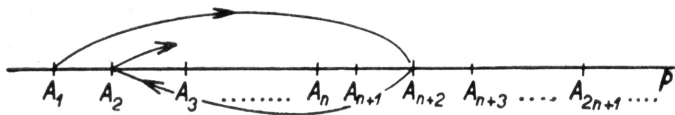
Najděte vzorec pro tento maximální součet s .

ŘEŠENÍ. Součet s získaný z usporádání (2) je

$$\begin{aligned} s_1 &= |a_1 - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_2| + |a_2 - a_{n+3}| + \dots + \\ &+ |a_n - a_{2n+1}| + |a_{2n+1} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_1| = \\ &= -(a_1 - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_2) - (a_2 - a_{n+3}) + \dots - \\ &- (a_n - a_{2n+1}) + (a_{2n+1} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_1) = \\ &= 2[(a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{2n+1}) - (a_1 + a_2 + \dots + \\ &+ a_n)], \end{aligned} \quad (3)$$

což je hledaný vzorec.

Úloha má následující geometrickou interpretaci. Mějme danu přímku p se zavedenou soustavou souřadnic a na ní body $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$, které mají po řadě souřadnice $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$. Potom součet s představuje délku uza-



Obr. 21

vřené cesty po přímce p z bodu $[x_1]$ přes body $[x_2]$, $[x_3]$, $\dots$, $[x_{2n+1}]$ nazpátek do bodu $[x_1]$. Obr. 21 naznačuje geometrický význam součtu (3).

Součet s lze zřejmě vypočítat pomocí velikostí úseček $A_i A_k$, kde $1 \leq i < k \leq n$. Označme si

$$d_j = a_{j+1} - a_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Pro $1 \leq j < k \leq n$ platí zřejmě rovnost

$$|a_j - a_k| = d_j + d_{j+1} + \dots + d_{k-1}, \quad (4)$$

takže součet s lze vyjádřit ve tvaru

$$s = c_1 d_1 + c_2 d_2 + \dots + c_{n-1} d_{n-1}, \quad (5)$$

kde koeficienty c_j , $j = 1, 2, \dots, n-1$ jsou jistá celá nezáporná čísla. Číslo c_j udává „kolikrát se při výše popsané cestě prošlo po úsečce $A_j A_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ “, a proto je c_j rovno počtu dvojic (x_i, x_{i+1}) , kde $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $x_{n+1} = x_1$, $x_i = a_k$, $x_{i+1} = a_l$, takových, že platí $k \leq j < l$ anebo $l \leq j < k$. Poněvadž každé číslo a_k vystupuje v součtu (1) právě dvakrát, je vidět

$$c_j \leq 2 \cdot \min [j, n-j], \quad (6)$$

kde $\min [j, n-j]$ je minimum z čísel j a $n-j$.

Nyní vypočteme součet (3) pomocí čísel d_j . Platí

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 \cdot [(a_{n+2} - a_1) + (a_{n+3} - a_2) + \dots + \\ &\quad + (a_{2n} - a_{n-1}) + (a_{2n+1} - a_n)] = \\ &= 2 \cdot [d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{n-1} + d_n + d_{n+1} + \end{aligned}$$

$$+ d_2 + d_3 + \dots + d_{n-1} + d_n + d_{n+1} + d_{n+2} + \dots \quad (7)$$

$$+ d_{n-1} + d_n + d_{n+1} + d_{n+2} + \dots + d_{2n-1} + d_n + d_{n+1} + d_{n+2} + \dots + d_{2n-1} + d_{2n}] =$$

$$= 2d_1 + 4d_2 + 6d_3 + \dots + 2(n-1)d_{n-1} + 2nd_n +$$

$$+ 2nd_{n+1} + 2(n-1)d_{n+2} + \dots + 4d_{2n-1} + 2d_{2n}.$$

Všechny koeficienty c_j v součtu (7) jsou podle (6) největší možné, a proto součet s_1 utvořený z uspořádání (2) je skutečně maximálním součtem s .

POZNÁMKA. Řešení této úlohy tvoří část řešení úlohy č. 1 z I. kola kat. A.

3. KATEGORIE C

1. Šachový kroužek sehrál klasifikační turnaj. (Hrálo se systémem „každý s každým“). Z hráčů, kteří vyhráli alespoň jednu partii, vyhrál jeden všechny partie až na jednu, jeden všechny kromě dvou, jeden všechny kromě tří, atd., až konečně poslední z nich všechny kromě deseti. Nerozhodných partií bylo celkem 20. Označme x počet hráčů.

a) Vypočítejte x .

b) Dokažte, že hráč, který získal právě $\frac{x-1}{2}$ bodů, nebyl ani na prvním, ani na posledním místě.

Poznámka. Na šachových turnajích se hodnotí výsledky takto: za vítězství v partii dostane hráč jeden bod, za nerozhodný výsledek půl bodu a za prohru nedostane žádný bod.

ŘEŠENÍ. a) Hrál se systémem „každý s každým“, a proto každý hráč sehrál $x - 1$ partií. Z hráčů, kteří vyhráli alespoň jednu partii, vyhrál jeden hráč celkem $x - 2$ partií, další hráč $x - 3$ partií, další $x - 4$ partie atd., až konečně poslední z nich $x - 11$ partií. Partií, které neskončily nerozhodně, tedy bylo $(x - 2) + (x - 3) + (x - 4) + \dots + (x - 11) = 10x - 65$. Nerozhodných partií bylo 20, takže hráči celkem sehráli

$$(10x - 65) + 20 = 10x - 45$$

partií. Vzhledem k tomu, že se použilo systému „každý s každým“, byl celkový počet partií

$$\frac{1}{2} x(x - 1),$$

takže pro x dostáváme rovnici

$$10x - 45 = \frac{1}{2} x(x - 1).$$

Řešením této rovnice dostáváme kořeny $x_1 = 15$ a $x_2 = 6$. Kořen $x_2 = 6$ zřejmě nevyhovuje, neboť podle textu úlohy bylo hráčů aspoň 10.

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že kořen $x_1 = 15$ je řešením úlohy. Turnaje se tedy zúčastnilo 15 hráčů.

b) Je-li hráčů x , pak při systému „každý s každým“ se sehraje $\frac{1}{2} x(x - 1)$ utkání. Při šachových turnajích je součet všech udělených bodů roven počtu utkání, tj. v našem případě bylo rozděleno $\frac{1}{2} x(x - 1)$ bodů. Na jednoho hráče tedy průměrně připadá $\frac{x - 1}{2}$ bodů.

Nezískají-li všichni hráči stejný počet bodů, což je zejména při větším počtu hráčů málo pravděpodobné a také v naší úloze zřejmě tento případ nenastal, musí

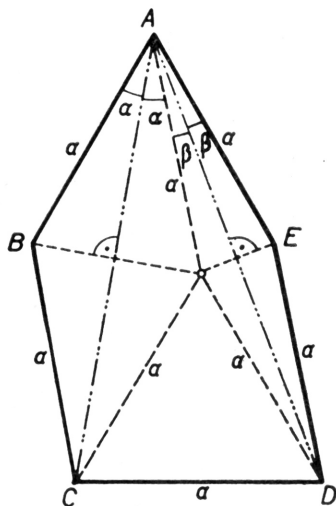
někteří hráči (aspoň jeden) dosáhnout nadprůměrného a jiní zase (aspoň jeden) podprůměrného počtu bodů. Hráč s $\frac{x-1}{2}$ body tedy není ani na prvním, ani na posledním místě.

Jiné řešení části b)

Za vyhrané partie získali jednotliví hráči

13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 0, 0, 0, 0, 0

bodů. Hráč se $\frac{15-1}{2} = 7$ body nemůže být zřejmě první. K tomu, aby byl poslední, je nutné (ale nestačí), aby posledních 5 hráčů sehrálo všechny partie nerozhodně, čímž by měli po 7 bodech. Toto však představuje 35 bodů, což je spor s textem úlohy, podle něhož bylo nerozhodných partií 20 a bylo možno tedy za ně získat celkem 20 bodů.



Obr. 22

2. Sestrojte konvexní rovnostranný (nikoliv nutně pravidelný) pětiúhelník $ABCDE$, v němž jsou dány délky úhlopříček AC , AD , platí-li

$$\sphericalangle BAE = 2 \cdot \sphericalangle CAD. \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. *Rozbor* (obr. 22). Necht $ABCDE$ je takový konvexní pětiúhelník. Pak je úhel BAE menší než 180° a vzhledem ke vztahu (1) je úhel

$$\begin{aligned} \sphericalangle CAD &= \\ &= \sphericalangle BAC + \sphericalangle DAE \quad (2) \end{aligned}$$

ostrý. Označme $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle DAE = \beta$. Sestrojíme-li k bodu B bod O souměrně sdružený podle přímky AC , platí

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAO = \alpha; AB = AO.$$

Pak vzhledem k (1) a (2) je

$$\sphericalangle OAD = \sphericalangle DAE = \beta.$$

Protože je $AB = AE = AO$ a $\alpha + \beta = \sphericalangle CAD$, je bod O souměrně sdružený s bodem E podle přímky AD . (Bod O není na obr. označen.)

Protože $AB = BC = a$, je vzhledem k souměrnosti podle přímky AC také $CO = BC = AB$. Obdobně dokážeme, že $DO = DE = AE$. Proto trojúhelník OCD je rovnostranný a platí

$$\sphericalangle COD = 60^\circ.$$

Trojúhelníku ACD je možno opsat kružnici o středu O a poloměru $OA = OC = OD$; podle věty o obvodu-
vém a středovém úhlu je tedy

$$\sphericalangle CAD = \frac{1}{2} \sphericalangle COD = 30^\circ.$$

Protože bod O je vnitřním bodem trojúhelníka ACD , je tento trojúhelník nutně ostroúhlý.

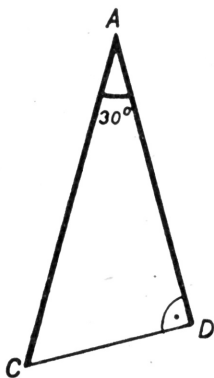
Z předchozích vztahů vyplývá zcela jednoduchá konstrukce. Podle věty *sus* sestrojíme trojúhelník ACD (AC , AD a $\sphericalangle CAD = 30^\circ$), najdeme střed O kružnice jemu opsané. Je-li trojúhelník ACD ostroúhlý, je bod O jeho vnitřním bodem. Sestrojíme pak k bodu O bod B souměrně sdružený podle přímky AC a bod E souměrně sdružený podle přímky AD .

Zkouška toho, že za uvedených podmínek sestrojený pětiúhelník je řešením úlohy, je jednoduchá. Snadno zjistíme, že všechny jeho vnitřní úhly jsou konvexní, tj. každý má velikost menší než 180° . Úseček AC , AD dané

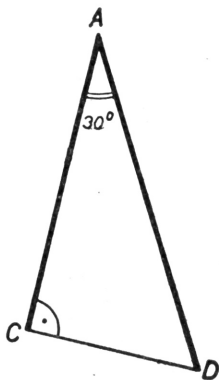
velikosti jsme použili při konstrukci a z použitých souměrností vyplývá, že $\sphericalangle BAE = 2 \cdot \sphericalangle CAD$.

Diskuse. Za předpokladu, že trojúhelník CAD je ostroúhlý, dostaneme podle konstrukce zřejmě jediné řešení. Nyní určíme nutné a postačující podmínky proto, aby trojúhelník ACD , daný stranami AC , AD a úhlem $\sphericalangle CAD = 30^\circ$, byl ostroúhlý. Na obr. 23a je znázorněn tento trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu D . Pak platí

$$\frac{AD}{AC} = \cos 30^\circ \quad \text{čili} \quad AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC.$$



Obr. 23a



Obr. 23b

Je zřejmé, že trojúhelník ACD může být ostroúhlý jen pro

$$AD > \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC. \quad (3)$$

Připustíme-li, že úhel ACD trojúhelníka ACD by byl pravý (obr. 23b), dostaneme ze vztahu $\frac{AC}{AD} = \cos 30^\circ$

další podmínku pro to, aby trojúhelník ACD byl ostroúhlý, je

$$AD < \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot AC. \quad (4)$$

Spojením vztahů (3) a (4) dostaneme

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot AC < AD < \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot AC,$$

což je zřejmě podmínka nejen nutná, ale i postačující pro to, aby trojúhelník ACD byl ostroúhlý a úloha měla řešení. Toto řešení je pak jediné.

3. Sústava dvou rovnic s dvoma neznámymi x, y

$$a(x - 1) + 2y = 1, \quad (1)$$

$$b(x - 1) + cy = 3$$

je neriešiteľná, zatiaľ čo sústava

$$a(x - 1) + 2y = 1, \quad (2)$$

$$b|x - 1| + cy = 3$$

má riešenie $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{5}{8}$. Vypočítajte koeficienty a, b, c .

RIEŠENIE. Pretože sústava (1) je neriešiteľná, je ľavá strana druhej rovnice tejto sústavy k -násobkom ľavej strany prvej rovnice, ale číslo 3 nie je k -násobkom čísla 1, čiže $k \neq 3$. Platí teda

$$b = ka, \quad c = 2k, \quad k \neq 3. \quad (3)$$

Ak do (2) dosadíme $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{5}{8}$, dostaneme

$$-\frac{1}{4}a + \frac{5}{4} = 1,$$

$$\frac{1}{4}b + \frac{5}{8}c = 3,$$

z čoho vyjde po úprave

$$a = 1, \quad (4)$$

$$2b + 5c = 24.$$

Ak do druhej rovnice sústavy (4) dosadíme zo vzťahov (3), pričom použijeme výsledok $a = 1$, dostaneme

$$2k + 10k = 24,$$

z čoho vyplýva

$$k = 2$$

a z (3) vyplýva $b = 2, c = 4$.

4. V rovine je daný rovnoramenný trojuholník PQR s pravým uhlom pri vrchole Q a bod A , ktorý je priesečníkom osi uhla $\angle QPR$ a strany QR . Ďalej je dané kladné číslo c . Určite geometrické miesto vrcholu D obdĺžnika $ABCD$, ktorého obsah je c a ktorého vrchol B leží na obvode trojuholníka PQR . Narysujte obrázok pre $c = 2AQ$.

RIEŠENIE. Obvod daného trojuholníka sa skladá z troch úsečiek. Hľadané geometrické miesto sa teda skladá z geometrických miest obdobnej úlohy pre úsečku PQ , úsečku PR a úsečku QR obsahujúcu bod A . Najprv vyšetríme dve pomocné úlohy:

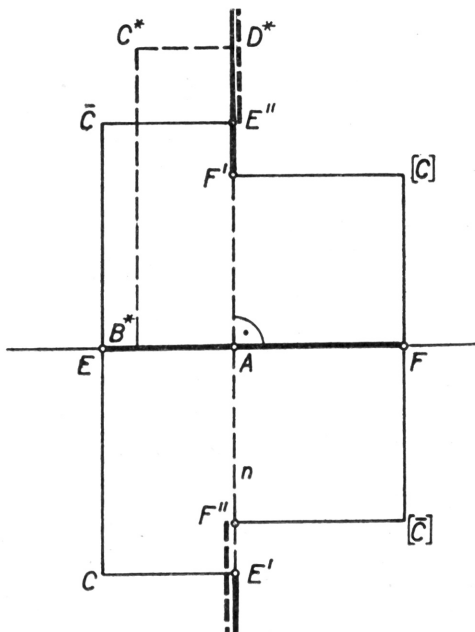
I. V rovine je daná úsečka EF a bod A , ktorý neleží na priamke $EF \equiv p$. Vyšetrite geometrické miesto vrcholu D obdĺžnika $ABCD$, ktorého obsah je dané číslo $c > 0$ a ktorého vrchol B prebieha úsečkou EF .

II. V rovine je daná úsečka EF a bod A vo vnútri tejto úsečky. Vyšetrite geometrické miesto vrcholu D

miesta vrcholu D obdĺžnika s kladnou orientáciou označenia vrcholov tvorí ten oblúk $E'F'$ kružnice k , ktorý neobsahuje bod A (na obr. 24a je hrubo vytiahnutý). Vrcholy $\bar{D}$ obdĺžnikov $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ so zápornou orientáciou označenia vrcholov vytvoria oblúk $E''F''$ na kružnici $\bar{k}$, ktorý je súmerne združený s oblúkom $E'F'$ podľa stredu A (na obr. 24a je vytiahnutý čiarkovane).

Hľadané geometrické miesto tvoria oba oblúky $E'F'$ a $E''F''$.

Teraz vyriešime úlohu II. Bodom A vedieme priamku $n \perp EF$ (obr. 24b). Je zrejmé, že body hľadaného geo-



Obr. 24b

metrického miesta budú ležať na tejto priamke. Pre dané $c > 0$ ľahko vypočítame ku každej zvolenej polohe bodu B vzdialenosť bodov A a D na priamke n . Platí

$$AD = \frac{c}{AB}.$$

Uvažujme najskôr o prípade, keď orientácia označenia vrcholov obdĺžnika je *kladná*. Bodu $B \equiv E$ zodpovedá začiatok E' polpriamky (na obr. 24b hrubo vytiahnutej) opačnej k polpriamke $E'A$. Ak sa teraz bod B pohybuje smerom k bodu A , znižuje sa rozmer AB obdĺžnika a pri zachovaní konštantného plošného obsahu c sa druhý rozmer AD zväčšuje. Bod D prebieha preto potom uvedenú hrubo vytiahnutú polpriamku. Ak prebieha vrchol B obdĺžnika s kladnou orientáciou označenia vrcholov úsečku AF , prebieha príslušný vrchol D polpriamku so začiatkom v F' opačnú k polpriamke $F'A$.

Pri *zápornej* orientácii označenia vrcholov obdĺžnika $ABCD$ leží bod D prislúchajúci bodu B úsečky EF na polpriamkach so začiatkami F'' a E'' , ktoré sú v uvedenom poradí opačné k polpriamkam $F''A$ a $E''A$ (na obr. 24b sú tieto polpriamky vytiahnuté hrubo čiarkovane a pre názornosť sú máličko posunuté z priamky n). Hľadané geometrické miesto tvorí zjednotenie všetkých štyroch uvedených polpriamok. K ľubovoľnému bodu týchto polpriamok, napr. k bodu D^* , možno zostrojiť obdĺžnik $AB^*C^*D^*$, ktorý vyhovuje podmienkam úlohy.

Pristúpme teraz k *riešeniu danej úlohy*. Na obr. 25 je zostrojený rovnoramenný trojuholník PQR s pravým uhlom pri vrchole Q tak, že $PQ = QR = 2$. Ak je bod A priesečníkom osi uhla QPR s úsečkou QR a bod H pätou kolmice vedenej bodom A ku strane PR , leží H vo vnútri prepony PR a platí

$$AH = AQ, \quad HP = PQ = 2. \quad (1)$$



88

ky opačné k polpriamkam $R'A$ a $Q'A$, ktoré prislúchajú polohám bodu D pri kladnej orientácii označenia vrcholov obdĺžnika $ABCD$. Druhú časť geometrického miesta tvorí útvar, ktorý je s popísanou prvou časťou súmerný podľa stredu A . Vzhľadom na vzťah (1) sú kružnice k_1, k_2, k_3 a k_4 zhodné. Pri inej voľbe rozmerov trojuholníka dostaneme obraz výsledného geometrického miesta ako homotetický podľa stredu A s vyššie popísaným riešením, pretože celý útvar je určený napr. polohou bodu P'' na pevnej polpriamke vychádzajúcej z bodu A .

4. KATEGORIE D

1. Určete nejmenší přirozené trojčíslné číslo n , jehož ciferný součet je roven trojnásobku ciferného součtu čísla $n + 69$.

ŘEŠENÍ. Když při sčítání dvou přirozených čísel podle algoritmu je součet dvou pod sebou stojících cifer větší nebo rovný deseti, nazveme tento krok přechodem. Ciferný součet čísla 69 je 15, ciferný součet čísla n označíme s . Při sčítání $n + 69$ může být počet přechodů 0, 1, 2, 3, jak ukazují následující numerické příklady:

$\begin{array}{r} 320 \\ 69 \\ \hline 389 \end{array}$	$\begin{array}{r} 322 \\ 69 \\ \hline 391 \end{array}$	$\begin{array}{r} 352 \\ 69 \\ \hline 421 \end{array}$	$\begin{array}{r} 952 \\ 69 \\ \hline 1021 \end{array}$
--	--	--	---

1 přechod 2 přechody 3 přechody:

Je-li sčítání $n + 69$ bez přechodu, je ciferný součet čísla $n + 69$ roven $s + 15$, je-li s jedním přechodem, změní se

tento ciferný součet o $(-10 + 1) = -9$ a je tedy $s + 6$.
Všecky možné případy udává přehledná *tabulka*:

Počet přechodů	0	1	2	3
Ciferný součet čísla $n + 69$	$s + 15$	$s + 6$	$s - 3$	$s - 12$

Podle textu úlohy platí některá z rovnic

$$\begin{array}{ll} 3(s + 15) = s, & 3(s + 6) = s, \\ 3(s - 3) = s, & 3(s - 12) = s, \end{array}$$

neboli

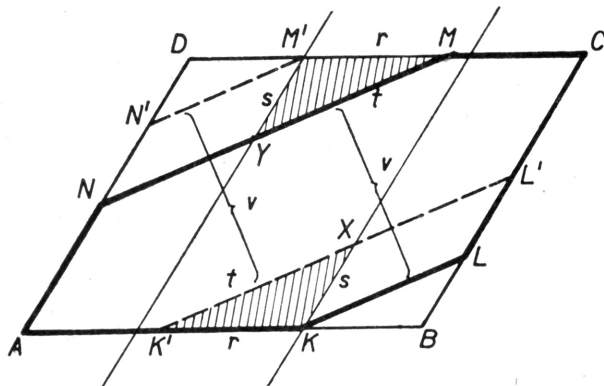
$$\begin{array}{ll} 2s + 45 = 0, & 2s + 18 = 0, \\ 2s - 9 = 0, & 2s - 36 = 0. \end{array} \quad (1)$$

První dvě rovnice (1) mají řešení záporné, třetí nemá řešení celočíselné. Přichází v úvahu jedině situace s třemi přechody. Pak ovšem musí být první cifra čísla n rovna 9, druhá cifra musí být nejméně 3, aby vznikl přechod. Třetí cifra je pak $18 - 9 - 3 = 6$ a hledané číslo n je $n = 936$. Skutečně platí

$$\begin{array}{rcl} 936 & \dots & \text{ciferný součet } 18 \\ \underline{69} & & \\ 1005 & \dots & \text{ciferný součet } 6 \end{array}$$

Číslo 936 je nejmenší číslo žádané vlastnosti.

2. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Uvnitř stran AB , BC , CD , DA zvolme po řadě body K , L , M , N tak, aby $KL \parallel MN$. Uvnitř týchž stran zvolme další body K' , L' , M' , N' tak, aby $K'L' \parallel M'N' \parallel KL$ a aby vzdálenost rovnoběžek $K'L'$, $M'N'$ byla táž jako vzdálenost rovnoběžek KL , MN . Dokažte, že šestiúhelníky $AKLCMN$ a $AK'L'CM'N'$ mají týž obvod.



Obr. 26

ŘEŠENÍ (obr. 26). Předpokládejme, že bod K' leží uvnitř úsečky AK (kdyby tomu tak nebylo, zaměníme označení bodů K, L, M, N a K', L', M', N'). Pak bod M' leží uvnitř úsečky DM a $KK' = MM'$. Vedme body K, M' rovnoběžky se stranou BC a označme po řadě X, Y jejich průsečíky s přímkami $K'L', MN$. Zřejmě platí $\triangle K'KX \cong \triangle MM'Y$. Označme $KK' = MM' = r$, $KX = M'Y = s$, $K'X = MY = t$. Potom (také vzhledem k vlastnostem stran pomocně vzniklých rovnoběžníků) dostáváme:

$$\begin{aligned} AK' &= AK - r; \\ K'L' &= KL + t, \\ L'C &= LC - s, \\ CM' &= CM + r, \\ M'N' &= MN - t, \\ N'A &= NA + s; \end{aligned}$$

sečtením těchto rovností dostaneme vztah

$$AK' + K'L' + L'C + CM' + M'N' + N'A = AK + KL + LC + CM + MN + NA,$$

což znamená, že obvody obou šestiúhelníků jsou si rovny.

3. Ak sú a, b, c nezáporné čísla také, že $a + b + c = 1$, potom platí:

$$\text{a) } ab + ac + bc < \frac{1}{2},$$

$$\text{b) } ab + ac + bc - abc < \frac{1}{3}.$$

Dokážte.

RIEŠENIE. a) Umocnením trojčlena $a + b + c$ na druhú dostaneme: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 1$
čiže

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2(ab + ac + bc) > 0, \quad (1)$$

pretože zo vzťahu $a + b + c = 1$ vyplýva, že čísla a, b, c nemôžu byť súčasne všetky tri rovné nule.

Zo vzťahu (1) už dostávame

$$ab + ac + bc < \frac{1}{2},$$

čo sme mali dokázať.

POZNÁMKA. Za danej podmienky $a + b + c = 1$ pre nezáporné čísla a, b, c možno odhad veľkosti trojčlena $ab + ac + bc$ ešte zlepšiť. Dôkaz prevedieme takto: Označenie čísel písmenami a, b, c zvolíme tak, aby platilo $a \geq b \geq c$. Umocnením nezáporných dvojčlenov $a - b$, $b - c$, $a - c$ na druhú dostaneme

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad b^2 + c^2 \geq 2bc, \quad a^2 + c^2 \geq 2ac.$$

Sčítaním ľavých i pravých strán týchto nerovností dostávame

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac. \quad (2)$$

Ak do vzťahu (2) dosadíme zo vzťahu (1) za $a^2 + b^2 + c^2$,

máme

$$1 - 2(ab + ac + bc) \geq ab + ac + bc$$

čiže

$$ab + ac + bc \leq \frac{1}{3}.$$

b) Umocněním trojčlena $a + b + c$ na třetíu dostáváme

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3ac(a + c) + 3bc(b + c) + 6abc = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b + c) + 3ac(a + b + c) + 3bc(a + b + c) - 3abc = 1.$$

Pretože $a + b + c = 1$, je

$$a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 3(ab + ac + bc) + 3abc > 0,$$

z čoho priamo vyplýva

$$ab + ac + bc - abc < \frac{1}{3},$$

čo sme mali dokázať.

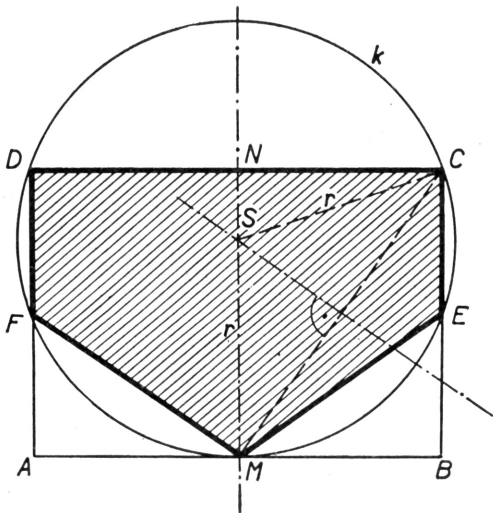
4. Je dán pravoúhelník $ABCD$, M je střed strany AB . Uvnitř úseček BC , AD sestrojte body E , F tak, aby pětiúhelníku $MECDF$ bylo možno opsat kružnici. Vyjádřete poloměr této kružnice i obsah pětiúhelníka pomocí délek stran pravoúhelníka $ABCD$. Určete podmínku řešitelnosti úlohy.

ŘEŠENÍ. Situaci ukazuje obr. 27. Kružnice k opsaná pětiúhelníku $MECDF$ je opsána rovnoramennému trojúhelníku MCD . Její střed S je průsečík osy úsečky CD a osy úsečky MC . Označme N střed strany CD , r poloměr kružnice k , $a = AB$, $b = BC$ délky stran pravoúhelníka $ABCD$. Pak je

$$SC = SM = r, SN = b - r, CN = \frac{1}{2} a,$$

tj. podle Pythagorovy věty platí

$$(b-r)^2 + \frac{a^2}{4} = r^2. \quad (1)$$



Obr. 27

Z (1) dostaneme po úpravě

$$r = \frac{4b^2 + a^2}{8b}. \quad (2)$$

Ze vzorce (2) vyjde vždy $r > 0$. Dále je $r < b$ právě když je $4b^2 + a^2 < 8b^2$, neboli $4b^2 > a^2$, $2b > a$, neboli

$$b > \frac{a}{2}. \quad (3)$$

Nerovnost (3) je podmínka řešitelnosti, jak plyne obrácením postupu.

Výpočet obsahu pětiúhelníka *MECDF*:
Protože je $\triangle CES$ rovnoramenný, je

$$CE = DF = 2SN = 2(b - r). \quad (4)$$

Dále je podle (4)

$$BE = BC - CE = b - 2(b - r) = 2r - b. \quad (5)$$

Pětiúhelník *MECDF* vznikne sjednocením pravoúhelníka *ECDF* a rovnoramenného trojúhelníka *MEF*. Jeho obsah *P* je tedy podle (4), (5)

$$P = a \cdot 2(b - r) + \frac{1}{2} a(2r - b) = \frac{a}{2} (3b - 2r). \quad (6)$$

Dosadíme-li za *r* ze vzorce (2) do (6), dostaneme po úpravě

$$P = ab - \frac{a^3}{8b}, \text{ což je výsledná formule.}$$

IV. Soutěžní úlohy II. kola

1. KATEGORIE A

1. Nájďte všetky komplexné čísla z , pre ktoré platí

$$2z^n + (1 + 3i) \cdot |z^n| = 1 + i, \quad (1)$$

kde n je prirodzené číslo. Koľko rôznych takých čísel existuje? (6 bodov)

RIEŠENIE. Číslo $z = 0$ rovnici (1) zrejme nevyhovuje, preto jej riešenie môžeme hľadať v goniometrickom tvare $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $r > 0$, φ sú reálne čísla. Po dosadení do (1) dostaneme

$$2r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) + (1 + 3i)r^n = 1 + i,$$

čo je splnené vtedy a len vtedy, keď čísla r a φ vyhovujú sústave rovníc

$$r^n(2\cos n\varphi + 1) = 1, \quad r^n(2\sin n\varphi + 3) = 1. \quad (2)$$

Zo sústavy (2) dostaneme

$$r^n = \frac{1}{2\cos n\varphi + 1} = \frac{1}{2\sin n\varphi + 3}, \quad (3)$$

z čoho pre φ vyplýva rovnica

$$\cos n\varphi = \sin n\varphi + 1. \quad (4)$$

Každé riešenie rovnice (4) splňuje však aj vzťah

$$\cos^2 n\varphi = 1 + 2\sin n\varphi + \sin^2 n\varphi$$

čiže

$$\sin n\varphi(\sin n\varphi + 1) = 0. \quad (5)$$

Skúmame teraz, ktoré z riešení rovnice (5) vyhovujú

rovnici (4). Ak $\sin n\varphi = 0$, potom zo (4) dostaneme $\cos n\varphi = 1$ a z oboch týchto podmienok vyplýva $n\varphi = 2k\pi$, kde k je celé číslo. Riešeniami rovnice (4) sú teda čísla $\varphi_{1k} = \frac{2k\pi}{n}$, k celé číslo a po dosadení do (3)

dostaneme $r_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$. Čísla r_1, φ_{1k} sú zrejme riešeniami

sústavy (2) a príslušné riešenia rovnice (1) sú preto dané vzorcom

$$z_{1k} = \frac{1}{\sqrt[n]{3}} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right), \quad k \text{ celé číslo.} \quad (6)$$

Ak $\sin n\varphi = -1$, potom zo (4) dostaneme $\cos n\varphi = 0$. Oboj podmienkam vyhovujú len tie φ , pre ktoré $n\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, kde k je celé. Riešenia rovnice (4) sú

teda v tomto prípade $\varphi_{2k} = \frac{(4k+3)\pi}{2n}$ a pre r zo vzťahov (3) dostávame $r_2 = 1$. Dvojice r_2, φ_{2k} sú riešeniami sústavy (2) a príslušné riešenia rovnice (1) majú tvar

$$z_{2k} = \cos \frac{(4k+3)\pi}{2n} + i \sin \frac{(4k+3)\pi}{2n}, \quad k \text{ celé číslo.} \quad (7)$$

Keďže každé celé číslo k možno zapísať v tvare $k = qn + k_1$, kde $q, 0 \leq k_1 \leq n-1$ sú celé čísla, je $\frac{2k\pi}{n} = 2q\pi + \frac{2k_1\pi}{n}$ a $\frac{(4k+3)\pi}{2n} = 2q\pi + \frac{(4k_1+3)\pi}{2n}$.

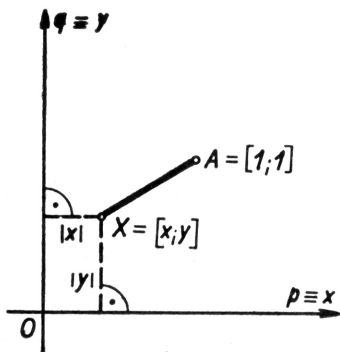
Vzhľadom na periodičnosť funkcií sínus a kosínus je každým zo vzťahov (6) a (7) určených práve n rôznych komplexných čísel, ktoré dostaneme napr. pre

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Záver: Rovnica (1) má práve $2n$ rôznych riešení, ktoré sú určené vzťahmi (6) a (7) pre $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

2. V rovině jsou dány dvě navzájem kolmé přímky p, q a bod A , který má od obou z nich tutéž kladnou vzdálenost.

Vyšetřete geometrické místo bodů X , pro které vzdálenost AX se rovná součtu vzdáleností bodu X od přímek p, q . (Použijte metody souřadnic.) (7 bodů)



Obr. 28

ŘEŠENÍ. I. Přímky p, q zvolíme za osy kartézských souřadnic: $p \equiv x, q \equiv y$ (obr. 28). Osy orientujeme tak, aby bod A ležel uvnitř prvního kvadrantu, jednotku délky zvolíme tak, aby obě souřadnice bodu A byly rovny jedné.*

Budiž $X = [x, y]$ proměnný bod hledaného geometrického místa bodů; podle podmínky úlohy je pak

$$|x| + |y| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \quad (1)$$

Rovnici (1) umocníme a upravíme; vyjde

$$|xy| + x + y = 1. \quad (2)$$

Rozlišíme dva případy: a) Leží-li bod X v I. nebo III. kvadrantě, je $xy \geq 0$, tj. $|xy| = xy$; rovnice (2) pak zní

$$xy + x + y = 1, \quad (2')$$

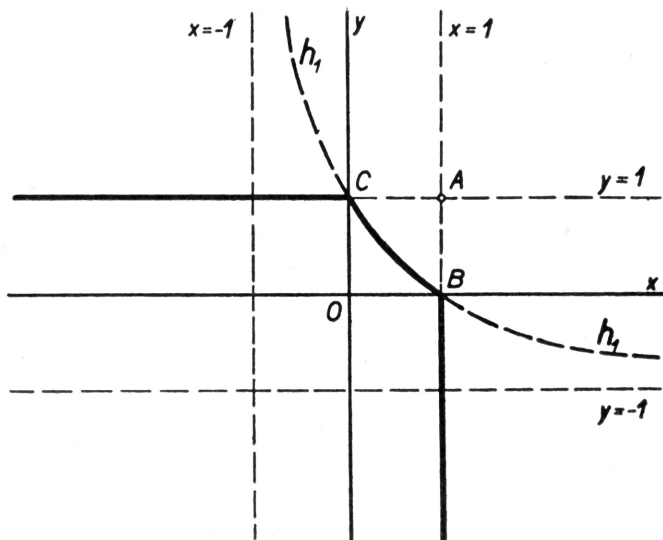
* Volba souřadnic bodu A rovných jedné není nutná; pouze zjednodušuje výpočty.

neboli po úpravě

$$(x + 1)(y + 1) = 2. \quad (3)$$

Rovnice (3) vyjadřuje rovnosou hyperbolu h_1 , jejíž asymptoty jsou přímky $x = -1$, $y = -1$ a která protíná osu x , popřípadě y v bodě

$$B = [1; 0], \text{ popř. } C = [0; 1]. \quad (4)$$



Obr. 29

Body X geometrického místa bodů náležejí jen těm obloukům hyperboly h_1 , které leží v I. a III. kvadrantě (na obr. 29 tlustě vytaženy — větev ležící ve 3. kvadrantu není na obr. 29 nakreslena).

b) Leží-li bod X ve II. neb IV. kvadrantě, je $xy \leq 0$,

tj. $|xy| = -xy$; rovnice (2) pak zní

$$xy - x - y + 1 = 0, \quad (2'')$$

neboli

$$(x - 1)(y - 1) = 0. \quad (5)$$

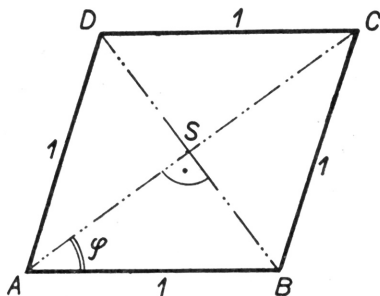
Rovnice (5) vyjadřuje dvojici kolmých přímek $x = 1$ a $y = 1$. Body X geometrického místa bodů náležejí ovšem jen těm částem přímek, které leží ve II. a ve IV. kvadrantu (na obr. 29 jsou tlustě vytaženy).

II. Zbývá dokázat, že každý bod tlustě vytažené čáry náleží vyšetřovanému místu bodů. Tak v případě a) platí-li pro souřadnice x, y rovnost (3), platí (2'); protože je $xy \geq 0$, platí i (2) a tudíž i (1). Obdobně je tomu i v případě b).

3. Jedna pobočná hrana čtyřbokého jehlanu má délku x , všechny ostatní jeho hrany mají délku 1.

a) Vyjádřete objem jehlanu jako funkci proměnné x .

b) Určete, pro které x je objem co největší. (6 bodů)

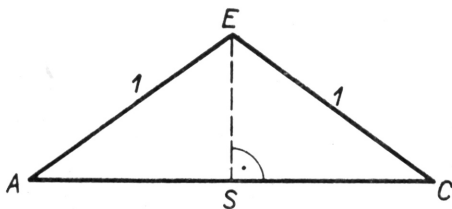


Obr. 30

ŘEŠENÍ. a) Podstava jehlanu $ABCD$ je rovnostranný čtyřúhelník (obr. 30). Označme φ velikost ostrého úhlu CAB . Pak je $AS = CS = \cos \varphi$, $BS = DS = \sin \varphi$. Můžeme předpokládat, že hrana DE má délku x . Trojúhelník ACE je rovnoramenný (dvě protější pobočné hrany mají délku 1) — viz obr. 31. Protože je $\triangle ACB \cong \triangle ACE$ (sss), je patrně $SE = \sin \varphi$. Situaci v rovině

BDE ukazuje obr. 32. Zde je $DE = x$, $BE = 1$. Protože bod E leží na Thaletově kružnici se středem S a poloměrem $\sin \varphi$, je $\angle DEB$ pravý, tj. platí

$$1 + x^2 = 4 \sin^2 \varphi. \quad (1)$$



Obr. 31

Výšku v trojúhelníka BSE na stranu BS vypočteme pomocí obsahu; je

$$v \cdot \sin \varphi = \frac{x}{2},$$

tj.

$$v = \frac{x}{2 \sin \varphi} \quad (2)$$

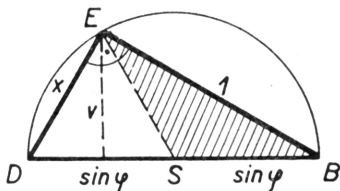
Protože obsah čtyřúhelníka $ABCD$ je $\sin 2\varphi$, je objem y jehlanu $ABCDE$

$$y = \frac{1}{3} \sin 2\varphi \cdot \frac{x}{2 \sin \varphi} = \frac{1}{3} x \cos \varphi \quad (3)$$

Dále vypočteme z (1)

$$4 \cos^2 \varphi = 4 - 4 \sin^2 \varphi = 4 - (1 + x^2) = 3 - x^2;$$

odtud plyne $2 \cos \varphi = \sqrt{3 - x^2}$.



Obr. 32

Dosadíme-li do (3), vyjde

$$y = \frac{x}{6} \sqrt{3 - x^2}, \quad (4)$$

což je výsledný vzorec.

b) y je maximální právě tehdy, je-li maximální $36y^2$, tj. $x^2(3 - x^2)$. Součin dvou čísel $(x^2, 3 - x^2)$, jejichž součet je číslo 3, je maximální právě tehdy, jsou-li obě čísla sobě rovna, tj. je-li

$$x^2 = 3 - x^2.$$

Odtud plyne $2x^2 = 3$, neboli

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Objem je pak

$$y_{\max} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{3 - \frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Zajímavé je, že maximální objem nemá pravidelný čtyřboký jehlan, jehož všechny hrany mají délku 1. Tento jehlan má totiž výšku $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a jeho objem je

$$y = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6} \sqrt{2} = 0,236 < \frac{1}{4}.$$

JINÉ ŘEŠENÍ. a) Budiž $ABCDV$ daný jehlan s podstavou $ABCD$ a necht' $AV = x$; ostatní hrany mají tedy délku 1. Zřejmě je $ABCD$ rovnostranný čtyřúhelník (kosočtverec, příp. čtverec) se stranami délky 1. Budiž S průsečík jeho úhlopříček. Poněvadž $AB = VB = CB = 1 = AD = VD = CD$, leží body A, V, C na kružnici, jež je průsečnicí jednotkových kulových ploch

se středy B , resp. D . Přitom AC je průměrem této kružnice, neboť střed úsečky AC je totožný se středem úsečky BD . Trojúhelník ACV je tedy pravoúhlý, s přeponou AC a odvěsnami AV a CV . Jest $AV = x$, $CV = 1$, tedy $AC = \sqrt{1 + x^2}$. Také trojúhelník ASB je pravoúhlý s přeponou AB délky 1 a s odvěsnami AS a SB , takže délku odvěsny SB dostaneme opět podle Pythagorovy věty $SB = \sqrt{AB^2 - AS^2}$, tedy

$$SB = \sqrt{1 - \frac{1 + x^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3 - x^2}.$$

Jehlan $ABCDV$ si můžeme představit složený ze dvou shodných trojbokých jehlanů $ABCV$ a $ADCV$, se společnou podstavou ACV a výškou SB , resp. SD . Pro objem jehlanu $ABCDV$ tak dostáváme vyjádření:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3 - x^2} = \frac{1}{6} x \sqrt{3 - x^2}.$$

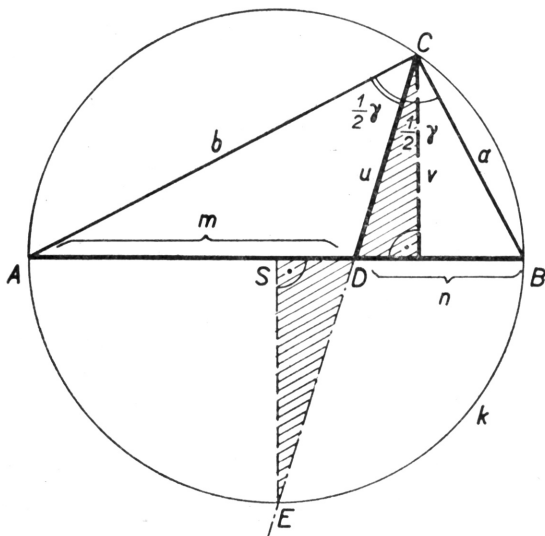
b) Stanovení maximálního objemu je stejné jako v prvním řešení: součin $x^2(3 - x^2)$ bude maximální při $x^2 = 3 - x^2$, tzn. pro $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$; maximální objem je pak roven $\frac{1}{4}$.

4. Pravoúhlý trojúhelník ABC má přeponu $AB = c$; D je takový bod přepony, že polopřímka CD je osa pravoúhého úhlu.

Vyjádřete výšku v na přeponu AB pomocí délek $c = AB$, $u = CD$. Jaký vztah mezi c a u je podmínkou, aby trojúhelník ABC existoval? (6 bodů)

ŘEŠENÍ (obr. 33).

a) Označme $m = AD$, $n = BD$; podle kosinové věty pro trojúhelníky ACD , BCD platí



Obr. 33

$$n^2 = a^2 + u^2 - 2au \cos \frac{\gamma}{2}, \quad (1)$$

$$m^2 = b^2 + u^2 - 2bu \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Pro tytéž trojúhelníky dostaneme ze sinové věty

$$m = \frac{b}{a} \cdot n. \quad (2)$$

Dosadíme z (2) do druhé rovnice (1) a po úpravě vyjde

$$b^2 n^2 = a^2 b^2 + a^2 u^2 - 2a^2 b u \cos \frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

První rovnici (1) násobíme číslem b^2 a dostaneme

$$b^2 n^2 = a^2 b^2 + b^2 u^2 - 2ab^2 u \cos \frac{\gamma}{2}. \quad (4)$$

Odečtením (3) a (4) vyjde

$$(a^2 - b^2)u^2 = 2abu \cos \frac{\gamma}{2} \cdot (a - b). \quad (5)$$

Je-li $a \neq b$, plyne z (5)

$$(a + b)u = 2ab \cos \frac{\gamma}{2} = ab \sqrt{2}, \quad (6)$$

neboť $\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC máme

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (7)$$

Ze vzorců pro obsah trojúhelníka dostaneme

$$ab = cv. \quad (8)$$

Ze (6), (7) a (8) eliminujeme a, b ; vyjde

$$2c^2 v^2 - 2cu^2 v - c^2 u^2 = 0. \quad (9)$$

Rovnice (9) má jediné kladné řešení

$$v = \frac{u + \sqrt{u^2 + 2c^2}}{2c} \cdot u. \quad (10)$$

Sestrojíme nyní pravoúhlý trojúhelník s přeponou c a výškou (na přeponu) v , danou vzorcem (10); označme v něm u_1 příslušnou úsečku na ose úhlu γ . Podle před-

chozího je pak

$$v = u_1 \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2c^2}}{2c}. \quad (11)$$

Porovnáním (10) a (11) zjistíme, že nutně $u_1 = u$.

Vzorec (10) platí i v případě, že $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot c$.

b) Je-li dáno c, u , je úloha řešitelná právě tehdy, jestliže $v \leq \frac{1}{2} c$, tj. podle (10)

$$\frac{u + \sqrt{u^2 + 2c^2}}{2c} \cdot u \leq \frac{1}{2} c.$$

Odtud

$$u^2 + u \sqrt{u^2 + 2c^2} \leq c^2,$$

neboli

$$u \sqrt{u^2 + 2c^2} \leq c^2 - u^2$$

a dále

$$u^4 + 2c^2 u^2 \leq c^4 - 2c^2 u^2 + u^4,$$

tj.

$$4c^2 u^2 \leq c^4,$$

tj.

$$u \leq \frac{c}{2}.$$

To je hledaná podmínka řešitelnosti úlohy.

Ke konstrukci trojúhelníka ABC z daných c, u se s výhodou použije známé vlastnosti osy úhlu (viz obr. 33). Označíme-li E průsečík polopřímky CD s kružnicí k (nad průměrem AB), jest

$$\sphericalangle ACE = \sphericalangle ABE = \frac{1}{2} \gamma$$

a obdobně

$$\sphericalangle ECB = \sphericalangle EAB = \frac{1}{2} \gamma.$$

Trojúhelník ABE je tedy rovnoramenný a bod E leží na ose strany AB . Sestrojíme bod D tak, že vypočteme délku $x = DE$. Z podobnosti vyšrafovaných trojúhelníků totiž plyne $x = \frac{uc}{2v}$, tj.

$$x = \frac{c^2}{u + \sqrt{u^2 + 2c^2}};$$

tuto délku lze snadno sestrojit z daných c, u .

2. KATEGORIE B

1. Budiž $l \geq 3$ přirozené číslo. Dokažte, že součin $l(l+1)(l+2) \dots (3l-4)(3l-3)$ (1) je dělitelný druhou mocninou každého přirozeného čísla $m \leq l$. (5 bodů)

ŘEŠENÍ. Součin (1) obsahuje $(3l-3) - (l-1) = 2l-2$ za sebou následujících přirozených čísel. Stačí dokázat, že tento součin obsahuje aspoň dva násobky čísla m .

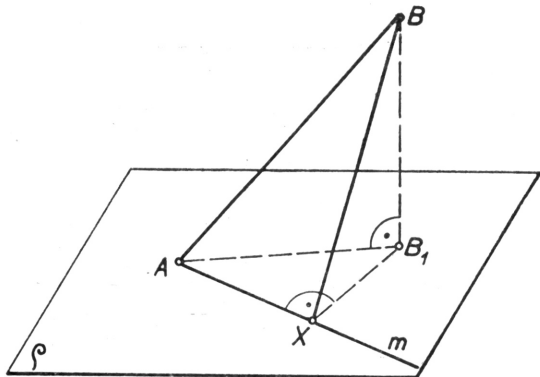
a) Je-li $m = l$, je $2l$ mezi těmito čísly (neboť $2l-2 > l$ vzhledem k předpokladu $l \geq 3$). Proto obsahuje součin (1) činitele l i $2l$; je tedy násobkem čísla l^2 .

b) Je-li $m < l$, tj. $m \leq l-1$, obsahuje součin (1) aspoň dva násobky čísla m , neboť $2l-2 = 2(l-1) \geq 2m > m$. Proto i v tomto případě je součin (1) násobkem čísla m .

2. Je dána rovina ϱ , v ní bod A a mimo ni bod B ; přímka AB není kolmá k rovině ϱ . Bod X se pohybuje v rovině ϱ tak, že $\sphericalangle AXB$ je a) pravý, b) tupý, c) ostrý.

Určete množinu těžišť všech trojúhelníků ABX , které tak vzniknou. (6 bodů)

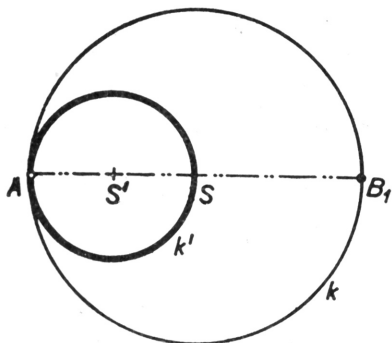
ŘEŠENÍ (obr. 34). a) Označme B_1 patu kolmice vedené bodem B na rovinu ϱ . Vedme bodem A v rovině



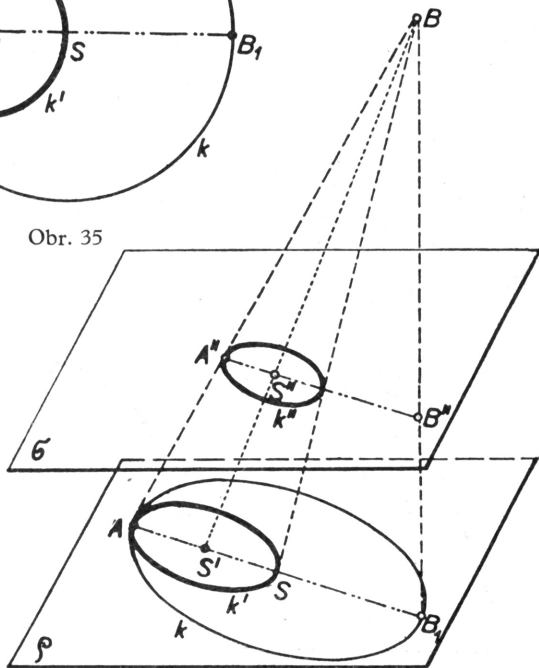
Obr. 34

ϱ libovolnou přímku m . Protože je $BB_1 \perp \varrho$, mají kolmice spuštěné z bodů B a B_1 na přímku m tutéž patu X . Body X vyplní tedy kružnici k sestrojenou v rovině ϱ nad průměrem AB_1 , z níž je vyloučen bod A (je-li $X \equiv A$, nevznikne totiž $\sphericalangle AXB$). Množina středů Y všech stran AX je kružnice k' , která je obrazem k v stejnolehlosti se středem A a konstantou $\frac{1}{2}$; z kružnice k' je ovšem také třeba vyloučit bod A (obr. 35). Těžiště Z každého trojúhelníka ABX leží na úsečce BY , a to tak, že $BZ =$

$= \frac{2}{3} BY$. Body Z vyplní tedy kružnici k'' , která leží v rovině $\sigma \parallel \varrho$; σ dělí úsečku BB_1 v poměru 2 : 1. Střed S'' kružnice k'' náleží úsečce BS' (obr. 36). Poloměr



Obr. 35



Obr. 36

kružnice k'' je $\frac{2}{3} AS' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AS = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB_1 = \frac{1}{6} AB_1$. Z kružnice k'' je třeba vyloučit bod, který je průsečíkem úsečky AB s rovinou σ .

b) , c) Je-li bod U *uvnitř* kruhu k , platí podle věty o vnějším úhlu pravoúhlého trojúhelníka (UBX)

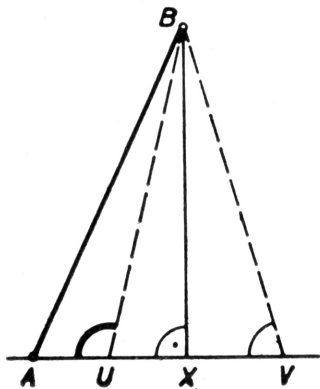
$$\sphericalangle AUB > \sphericalangle AXB = 90^\circ, \quad (1)$$

tj. $\sphericalangle AUB$ je tupý (obr. 37). Je-li bod V *vně* kruhu k , platí podle věty o pravoúhlém trojúhelníku (BXV)

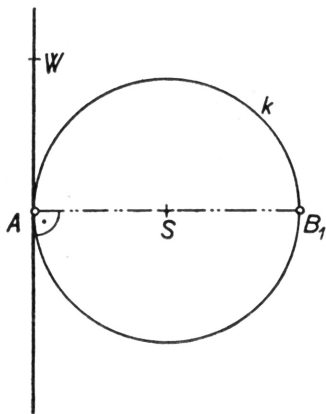
$$\sphericalangle AVB < 90^\circ, \quad (2)$$

tj. $\sphericalangle AVB$ je ostrý (obr. 37). Nerovnost (2) platí evidentně i v případě, když bod W leží na tečně sestrojené v bodě A ke kružnici k (obr. 38).

Ze vztahů (1), (2) vyplývá, že hledaná množina bodů je v případě b) vnitřek kruhu k'' , v případě c) jeho vnějšek.



Obr. 37



Obr. 38

3. Určite všetky kladné hodnoty parametra a , pre ktoré má sústava rovníc

$$\begin{aligned} |x - a| + a &= |x| + |y|, \\ x + 2y &= 2 \end{aligned} \quad (1)$$

s neznámymi x, y práve tri riešenia.

(Návod: Zostrojte graf prvej rovnice sústavy (1) napr. pre $a = 1$). (7 bodov)

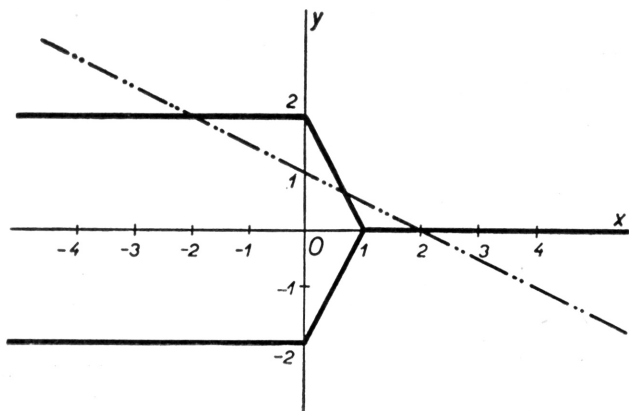
RIEŠENIE. Graf prvej rovnice sústavy (1) zostrojíme tak, že vyšetříme grafy funkcií

$$y = |x - a| + a - |x|, \quad (2)$$

$$y = -|x - a| - a + |x| \quad (3)$$

a utvoríme ich zjednotenie. Pri vyšetrovaní každého z týchto dvoch grafov rozdelíme množinu všetkých reálnych čísel x na tri intervaly:

I. $x \leq 0$; II. $0 \leq x \leq a$; III. $x \geq a$.



Obr. 39

Funkcia (2) je v týchto intervaloch určená v uvedenom poradí vzťahmi: I. $y = 2a$; II. $y = 2(a - x)$; III. $y = 0$. Funkcia (3) je zasa v uvedených intervaloch určená vzťahmi: I. $y = -2a$; II. $y = 2(x - a)$; III. $y = 0$. Grafické znázornenie prvej rovnice sústavy (1) je pre $a = 1$ na obr. 39. Na obr. 39 je zároveň prerušovanou čiarou znázornená priamka p , ktorá je grafom druhej rovnice sústavy (1). Obrázok nám napovedá, že v tomto prípade má sústava (1) tri riešenia. Ľahko vypočítame, že sú to dvojice reálnych čísel $[-2; 2]$, $\left[\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$ a $[2; 0]$.

Ak riešime druhú rovnicu sústavy (1) so šiestimi rovnicami, ktorými sme vyjadrili v intervaloch I., II., III. prvú rovnicu (1), dostaneme:

pre interval I.: $x = 2(1 - 2a)$, $x = 2(1 + 2a)$,

pre interval II.: $x = \frac{4a - 2}{3}$, $x = \frac{4a + 2}{5}$,

pre interval III.: $x = 2$.

Druhý vzťah pre I. nedáva nikdy riešenie, pretože je $2(1 + 2a) > 0$, zatiaľ čo prvý vzťah pre I. dáva riešenie len pre $1 - 2a \leq 0$, t. j. pre

$$a \geq \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Prvý vzťah pre II. dáva riešenie len pre $0 \leq \frac{4a - 2}{3} \leq a$,

t. j. pre

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 2. \quad (5)$$

Druhý vzťah pre II. dáva riešenie len pre $0 \leq \frac{4a + 2}{5} \leq a$, t. j. pre

$$a \geq 2. \quad (6)$$

Vzťah pre III. je riešením sústavy len pre

$$a \leq 2. \quad (7)$$

Zo vzťahov (4), (5), (6) a (7) je zrejmé, že pre $0 < a < \frac{1}{2}$ má sústava (1) len jediné riešenie (pozri (7), a to $[2; 0]$.

Pre $a = \frac{1}{2}$ má sústava (1) dve riešenia (pozri (4), (5), (7)), a to $[0; 1]$, $[2; 0]$.

Pre $\frac{1}{2} < a < 2$ má sústava (1) tri riešenia (pozri (5), (4), (7)), a to $[2(1 - 2a); 2a]$, $\left[\frac{1}{3}(4a - 2); \frac{2}{3}(2 - a)\right]$, $[2; 0]$.

Pre $a = 2$ má sústava (1) dve riešenia (pozri (4), (5), (6), (7)), a to: $[-6; 4]$, $[2; 0]$.

Konečne pre $a > 2$ má sústava (1) taktiež dve riešenia (pozri (4), (6)), a to $[2(1 - 2a); 2a]$,

$$\left[\frac{1}{5}(4a + 2); \frac{2}{5}(2 - a)\right].$$

Tri riešenia má sústava (1) teda práve vtedy, keď platí $\frac{1}{2} < a < 2$.

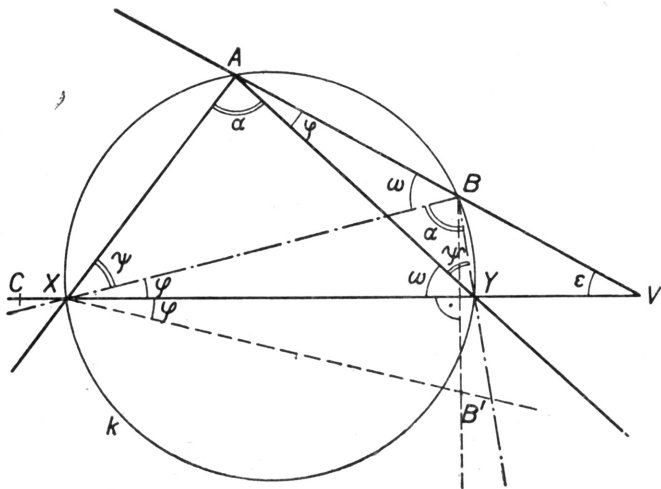
4. Je dán úhel $\sphericalangle AVC = \varepsilon$, kde $0 < \varepsilon \leq 90^\circ$ a ďalej druhý úhel veľkosti α . Uvnitř úsečky AV leží ďalší bod B .

Na polopřímce VC sestrojte body X , Y tak, aby platilo

$$\sphericalangle XAY = \sphericalangle XBY = \alpha. \quad (1)$$

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Rozbor. Na obr. 40 je znázorněno předpokládané řešení úlohy: platí tedy vztah (1) a podle věty o shodných obvodových úhlech velikosti α nad tětivou XY leží body A, B, X a Y na téže kružnici k (uvažujme



Obr. 40

pořadí bodů na kružnici A, B, Y, X jako na obr. 40). Proto také platí

$$\sphericalangle YAB = \sphericalangle YXB = \varphi, \quad (2)$$

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle AYB = \psi, \quad (3)$$

$$\sphericalangle AYZ = \sphericalangle ABX = \omega. \quad (4)$$

S použitím vztahů (1) až (4) dostaneme pro součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka $ABYX$

$$2(\alpha + \varphi + \psi + \omega) = 360^\circ. \quad (5)$$

Podle věty o vnějším úhlu ω trojúhelníka XVB

$$\omega = \varphi + \varepsilon ;$$

odtud dosazením do (5) dostaneme

$$\alpha + 2\varphi + \psi + \varepsilon = 180^\circ ,$$

čili

$$2\varphi + \psi = 180^\circ - (\alpha + \varepsilon) ; \quad (6)$$

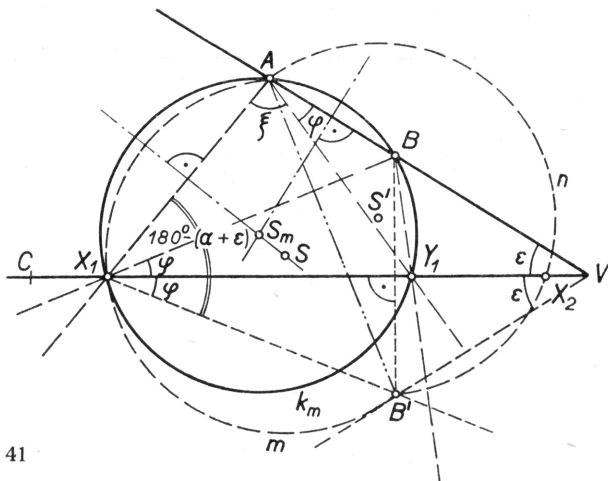
úhel $2\varphi + \psi$ je tedy z daných podmínek sestrojitelný a dostaneme jej jako úhel $\sphericalangle AXB'$, kde B' je bod souměrně sdružený s bodem B podle přímky VC . Odtud už plyne *konstrukce*.

1. Sestrojíme bod B' souměrně sdružený s bodem B podle přímky CV .

2. Nad úsečkou AB' jako tětivou sestrojíme množinu všech bodů X , pro něž platí

$$\sphericalangle AXB' = 2\varphi + \psi = 180^\circ - (\alpha + \varepsilon) ;$$

tuto množinu tvoří dva kruhové oblouky m, n (obr. 41).



Obr. 41

3. Každý z těchto oblouků protne přímku VC (neboť body A, B' jsou odděleny touto přímkou) v hledaném bodě X_1 , popř. X_2 (pokud leží na polopřímce VC).

4. Průsečík polopřímky VC s kružnicí opsanou trojúhelníku ABX_1 , popř. ABX_2 je druhý hledaný bod Y_1 , popř. Y_2 .

Zkouška. a) pro řešení X_1, Y_1 (viz obr. 41). Kružnice k_m opsaná trojúhelníku ABX_1 vždy protne polopřímku VC v dalším bodě Y_1 ; kdyby totiž bylo $X_1 = Y_1$, dutý úhel $\sphericalangle X_1AY_1$ by byl nulový, avšak $\alpha \neq 0$ podle předpokladu. Bod Y_1 leží na polopřímce VC proto, že dvě přímky, obsahující dvě různé tětivy této kružnice, se protnou buď ve vnějším bodě obou tětiv (tj. náš případ), nebo ve vnitřním bodě tětiv.

Dokážeme, že úhel $\sphericalangle X_1AY_1 = \xi$ má danou velikost α . Protože body A, B, Y_1, X_1 leží na kružnici k_m , platí

$$\sphericalangle BAY_1 = \sphericalangle BX_1Y_1 = \sphericalangle Y_1X_1B' = \varphi.$$

Potom pro součet vnitřních úhlů trojúhelníka X_1VA platí

$$180^\circ - (\alpha + \varepsilon) - \varphi + \varepsilon + \xi + \varphi = 180^\circ,$$

čili

$$\xi = \alpha;$$

potom také úhel $\sphericalangle X_1BY_1 = \alpha$.

b) Pro řešení X_2, Y_2 , pokud existuje, proběhne zkouška obdobně, pouze pořadí bodů na kružnici k je A, B, X_2, Y_2 .

Diskuse. Konstrukce a řešení a) je proveditelné vždy právě tehdy, je-li $\alpha + \varepsilon < 180^\circ$ (viz 2. bod konstrukce).

Řešení typu b) dostaneme jen tehdy, jestliže oblouk n protne polopřímku VC ve vnitřním bodě X_2 . To nastane právě tehdy, je-li

$$\sphericalangle AXB' > \sphericalangle AVB',$$

tj.

$$180^\circ - (\alpha + \varepsilon) > 2\varepsilon,$$

čili $180^\circ > \alpha + 3\varepsilon$.

Shrnutí. Platí-li

$$\alpha + 3\varepsilon < 180^\circ,$$

má úloha dvě řešení (při uvažovaných pořadích bodů A, B, X, Y na kružnici k), platí-li

$$\alpha + 3\varepsilon \geq 180^\circ > \alpha + \varepsilon,$$

má řešení jediné. Pro $\alpha + \varepsilon \geq 180^\circ$ řešení neexistuje.

3. KATEGORIE C

1. Je dán vypuklý pětiúhelník, kterému lze vepsat kružnici.

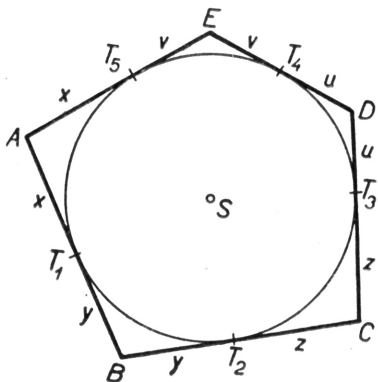
a) Dokažte větu: Jestliže všechny strany mají celočíselné velikosti a obvod je sudé číslo, potom také všechny úsečky na jeho stranách, omezené vrcholy a dotykovými body, mají celočíselné délky.

b) Je možno větu obrátit?

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. a) Velikosti úseček na stranách pětiúhelníka označme podle obr. 42 písmeny x, y, z, u, v . Jsou-li a, b, c, d, e po řadě velikosti stran AB, BC, CD, DE a EA , dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ y + z &= b, \\ z + u &= c, \\ u + v &= d, \\ v + x &= e. \end{aligned} \quad (1)$$



Obr. 42

Po výpočtu z rovnic (1) dostaneme např.

$$2x = a - b + c - d + e$$

čili

$$x = \frac{a + b + c + d + e}{2} - b - d. \quad (2)$$

Obdobně získáme

$$y = \frac{a}{2} - c - e, \quad (3)$$

$$z = \frac{a}{2} - d - a, \quad (4)$$

$$u = \frac{a}{2} - e - b, \quad (5)$$

$$v = \frac{a}{2} - a - c. \quad (6)$$

Protože velikost obvodu podle předpokladů je sudé číslo, velikosti stran a, b, c, d, e jsou celočíselné, plyne z rovnic (2) až (6), že i délky úseků x, y, z, u, v jsou celočíselné.

b) Obrácená věta zní: Jestliže všechny úsečky na stranách vypuklého pětiúhelníka, omezené vrcholy a dotykovými body vepsané kružnice, mají celočíselné délky, potom délky stran jsou celočíselné a obvod je sudé číslo.

Věta je zřejmě správná; první tvrzení o celočíselnosti délek stran plyne bezprostředně z rovnic (1). Druhé tvrzení dokážeme sečtením rovnic (1); dostaneme rovnost

$$2(x + y + z + u + v) = a + b + c + d + e,$$

z níž je zřejmé, že velikost obvodu je sudé číslo.

2. V 8 hodin ráno vyjel cyklista z A do B ($AB = 50$ km). Když ujel 10 km, předjelo ho auto, které vyjelo z A v 8 hodin 25 minut. Tento automobilista dojel do B , tam se zdržel 1 hodinu 15 minut a potom se

opět vracel do A . Zpáteční cesta mu trvala o třetinu kratší dobu než cesta do B . Našeho cyklistu potkal 5 kilometrů před B . (Všechny jízdy byly rovnoměrné pohyby.)

V kolik hodin se automobilista vrátil do A ?

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Označme v_1 a v_2 po řadě rychlosti v km/h cyklisty a auta na cestě do B . Ze setkání 10 km za A plyne rovnice

$$\frac{10}{v_1} = \frac{10}{v_2} + \frac{25}{60}, \quad (1)$$

ze setkání před B rovnice

$$\frac{25}{60} + \frac{50}{v_2} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{v_2} = \frac{45}{v_1}. \quad (2)$$

Položíme-li

$$\frac{1}{v_1} = x, \quad \frac{1}{v_2} = y,$$

dostaneme spojením (1) a (2) soustavu rovnic o neznámých x, y :

$$10x - 10y = \frac{5}{12},$$

$$45x - \frac{160}{3}y = \frac{5}{3}.$$

Soustava (3) má řešení

$$x = \frac{1}{15}, \quad y = \frac{1}{40},$$

o čemž se snadno přesvědčíme *zkouškou*. Rychlost cyklisty byla tudíž 15 km/h a rychlost auta na cestě do B 40 km/h.

Automobilista byl na cestě celkem

$$\frac{50}{40} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{50}{40} = \frac{10}{3}$$

hodiny, tj. 3 h 20 min, takže se do A vrátil v 11 h 45 min, o čemž se přesvědčíme zkouškou.

Zkouška. Auto se vrátilo do A v 11 h 45 min, tj. automobilista byl na cestě 3 h 20 min. Z toho na jízdy připadá 2 h 5 min. Zpáteční cesta do A mu trvala o $\frac{1}{3}$ méně než z A do B ; dojel tedy z A do B za $\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{125}{60}\right)$ min = 1 h 15 min.

Z toho se snadno vypočte, že při jízdě z A do B byla rychlost auta 40 km/h, při návratu 60 km/h. Cyklistu předjel na 10. km v $(8 \text{ h } 25 \text{ min} + \frac{10}{40} \text{ h}) = 8 \text{ h } 40 \text{ min}$, tj. cyklista za 40 min ujel 10 km, tj. jel rychlostí 15 km/h. 5 km před B je tudíž cyklista v $(8 \text{ h} + \frac{45}{15} \text{ h}) = 11 \text{ h}$. Automobilista je na tomtéž místě skutečně také v $8 \text{ h } 25 \text{ min} + \frac{50}{40} \text{ h} + 1 \text{ h } 15 \text{ min} + \frac{5}{60} \text{ h} = 11 \text{ h}$.

POZNÁMKA. Za neznámé by bylo možno také zvolit doby t_1 a t_2 , které potřebuje cyklista a auto k dojetí do B . Je to však asi pro žáky méně obvyklé.

3. Je daná sústava troch rovníc

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= a, \\3x + y + 2z &= 2a - 11, \\2x + 3y + z &= a + 1\end{aligned}$$

s neznámymi x, y, z a parametrom a . Určíte všetky hodnoty parametra a , pre ktoré má daná sústava riešenie týchto vlastností: x, y, z sú celé čísla a žiadne dve z nich nedávajú pri delení tromi ten istý zvyšok.

RIEŠENIE. Danú sústavu budeme riešiť obvyklým spôsobom: z druhej a tretej rovnice a potom z prvej a tretej rovnice vylúčime z . Dostaneme

$$\begin{aligned} x + 5y &= 13, \\ 5x + 7y &= 2a + 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Z rovníc (1) vypočítame

$$y = \frac{1}{9}(31 - a), \quad x = \frac{1}{9}(5a - 38). \quad (2)$$

Ak dosadíme z (2) do tretej rovnice danej sústavy, dostaneme

$$z = \frac{1}{9}(2a - 8). \quad (3)$$

Skúškou sa presvedčíme, že čísla x, y, z dané vzťahmi (2) a (3) sú v obore reálnych čísel skutočne riešením danej sústavy.

Ak hľadáme riešenie sústavy v obore celých čísel, musí byť zrejme a tiež číslo celé a z prvého vzťahu (2) vidíme, že musí byť číslo $31 - a$ násobkom deviatich. Ako je známe, číslo a sa dá vyjadriť práve v jednom z nasledujúcich tvarov

$$\begin{aligned} 9k, 9k + 1, 9k + 2, 9k + 3, 9k + 4, 9k + 5, 9k + 6, \\ 9k + 7, 9k + 8, \end{aligned} \quad (4)$$

kde k je vhodné celé číslo. Ak dosadíme zo (4) do vzťahu (2) pre y , zistíme, že y je celé jedine v prípade, keď platí

$$a = 9k + 4. \quad (5)$$

[Např. pro $k = 1$ má daná soustava řešení $x = 3$, $y = z = 2$.]

Po dosazení z (5) do (2) a (3) vypočítáme

$$x = 5k - 2, y = 3 - k, z = 2k. \quad (6)$$

Zo (6) však vyplývá $y - z = 3 - 3k = 3(1 - k)$, což znamená, že číslo $y - z$ je dělitelné třema, čiže čísla y a z dávají pro každé celé k , a teda aj pro každé přípustné celé a ten istý zvyšok pri delení troma.

Neexistuje teda žiadne a , ktoré by vyhovovalo podmienkam úlohy.

4. Je dána úsečka AB a její vnitřní bod C . Nad průměrem AC je sestrojena kružnice k_0 , bodem B je vedena přímka p kolmá k AB . Budiž k kružnice, která protíná kružnici k_0 v bodech X, Y a přímku p v bodech X', Y' .

Leží-li body A, X, X' v přímce, leží také body A, Y, Y' v přímce; dokažte. (7 bodů)

ŘEŠENÍ (obr. 43). Necht body A, X, X' leží v přímce. Označme Y'' průsečík přímek AY, p . Je-li $X \equiv C$, je $X' \equiv B$ a platí

$$AX \cdot AX' = AB \cdot AC \quad (1)$$

Je-li $X \neq C$, vznikne $\triangle ACX$ ($\triangle ABX'$) a podle Thaletovy věty je $\sphericalangle AXC$ pravý. Proto platí

$$\triangle AXC \sim \triangle ABX' \quad (uuu)$$

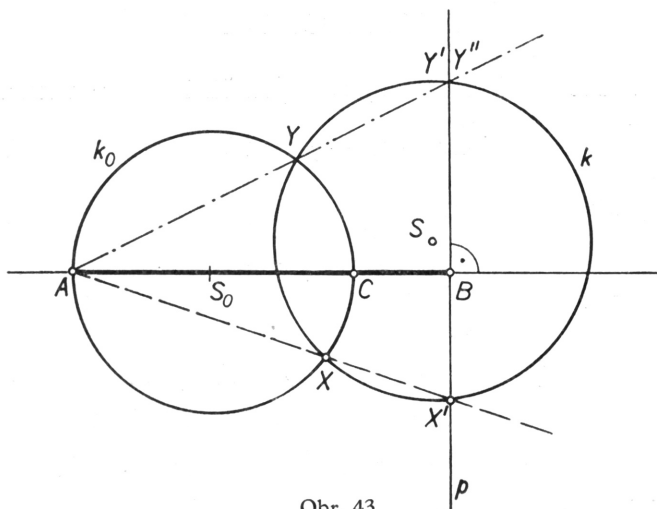
a odtud

$$\frac{AX}{AC} = \frac{AB}{AX'}$$

čili opět platí (1). Z obdobného důvodu platí

$$AY \cdot AY'' = AB \cdot AC. \quad (2)$$

Porovnáním (1), (2) dostaneme $AX \cdot AX' = AY \cdot AY''$,



Obr. 43

neboli

$$\frac{AX}{AY} = \frac{AY''}{AX'} \quad (3)$$

Z (3) vyplývá

$$\triangle AXY'' \sim \triangle AYX' \quad \left(\frac{s}{s} \text{ u } \frac{s}{s} \right)$$

a odtud

$$\sphericalangle AY''X = \sphericalangle AX'Y,$$

neboli

$$\sphericalangle YY''X = \sphericalangle XX'Y. \quad (4)$$

Protože oba body X' , Y'' leží vně k_0 (na přímce p), a tedy v téže polorovině určené přímkou XY , plyne z obrácení věty o obvodových úhlech, že bod Y'' leží na k . Je tedy $Y'' \in k \cap p$, tj. $Y'' = Y'$.

Tím je věta dokázána, neboť body A , Y , Y' leží v přímce.

4. KATEGORIE D

1. Určete všechny dvojice celých čísel x, y , pro které platí

$$4x^2 - 4x - y^2 = 20. \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. Rovnici (1) upravíme na tvar

$$(2x - 1)^2 - y^2 = 21. \quad (2)$$

Levou stranu poslední rovnice rozložíme pomocí vzorce pro rozdíl čtverců. Dostáváme

$$(2x + y - 1)(2x - y - 1) = 21.$$

Číslo 21 lze rozložit v tyto součiny celých čísel:

$$1 \cdot 21 = 3 \cdot 7 = (-1) \cdot (-21) = (-3) \cdot (-7).$$

Sestavíme tabulku:

$2x + y - 1$	1	21	-1	-21	3	7	-3	-7
$2x - y - 1$	21	1	-21	-1	7	3	-7	-3
x	6	6	-5	-5	3	3	-2	-2
y	-10	10	10	-10	-2	2	2	-2

Každá z 8 dvojic čísel x, y je řešením úlohy, jak se přesvědčíme zkouškou.

2. Určite všetky čísla a , pre ktoré koreň rovnice

$$a(x - 2) + x - 5 = 0 \quad (1)$$

s neznámou x vyhovuje rovnici

$$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0. \quad (2)$$

RIEŠENIE. Najprv riešme rovnicu (1). Po úprave dostaneme

$$(a + 1)x = 2a + 5.$$

Ak $a \neq -1$, potom má rovnica (1) riešenie

$$x = \frac{2a + 5}{a + 1}, \quad (3)$$

ako sa presvedčíme skúškou. Pre $a = -1$ rovnica riešenie nemá.

Číslo x dané vzorcom (3) za predpokladu $a \neq -1$ má vyhovovať tiež rovnici (2), t. j. má platiť

$$\left(\frac{2a + 5}{a + 1}\right)^3 - 7\left(\frac{2a + 5}{a + 1}\right)^2 + 7 \cdot \frac{2a + 5}{a + 1} + 15 = 0. \quad (4)$$

Tým sme dostali rovnicu pre neznámu a .

Z rovnice (4) po vynásobení výrazom $(a + 1)^3 \neq 0$ a úprave dostaneme rovnicu

$$a^3 - 4a = 0,$$

ktorú možno písať v tvare

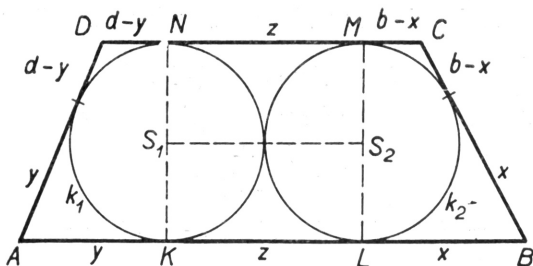
$$a(a - 2)(a + 2) = 0,$$

z čoho vyplýva, že je buď $a = 0$, alebo $a = 2$, alebo $a = -2$. Skúškou sa presvedčíme, že danej úlohe vyhovujú všetky tri tieto čísla, t. j. úloha má tri riešenia: $a = -2$, $a = 0$, $a = 2$.

3. Do lichobežníka $ABCD$ sú vpísané kružnice k_1, k_2 , ktoré sa dotýkajú strán a, c, d a a, c, b (pozri obr. 44). Pre dĺžky strán lichobežníka platí: $a + c > b + d$.

Dokážte vetu: Ak má výška lichobežníka dĺžku

$\frac{1}{2}(a + c - b - d)$, potom majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk.



Obr. 44

RIEŠENIE. Body a dĺžky úsečiek označme podľa obrázku (úsečky ohraňované daným a dotýkovým bodom na dotýčniciach vedených z bodu mimo kružnice ku kružnici majú totiž rovnaké dĺžky). Potom je $KLMN$ pravouholník. Ďalej platí

$$a = x + y + z, \quad c = b + d - x - y + z.$$

Sčítaním oboch týchto rovností dostaneme

$$a + c = b + d + 2z,$$

čiže

$$z = \frac{1}{2}(a + c - b - d).$$

Pravouholník $KLMN$ je teda štvorec, vzdialenosť S_1S_2 sa rovná súčtu polomerov kružníc k_1, k_2 a obe kružnice majú vonkajší dotyk.

4. V rovine je dána úsečka AM . Určete geometrické miesto stredů ramen AC všech rovnoramenných trojúhelníků ABC se základnou AB , v nichž je úsečka AM těžnicí.

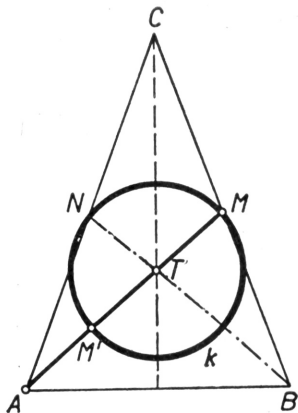
ŘEŠENÍ. a) Budiž T těžiště trojúhelníků ABC , tj. T je bod úsečky AM , pro který platí $AT = 2TM$. Označme N střed ramene AC (obr. 45), pak BN je těžnice trojúhelníka ABC . Poněvadž trojúhelník ABC je rovno-ramenný, je $AM = BN$, a tedy $TM = TN$. Bod N leží tedy na kružnici k se středem T a poloměrem TM .

b) Nyní ještě musíme zjistit, zda ke každému bodu kružnice k existuje rovno-ramenný trojúhelník požadovaných vlastností.

Označme M' střed úsečky AT (který je také bodem kružnice k). Zvolme libovolný bod N kružnice k , různý od M , M' . Dokážeme, že existuje rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a těžnicemi AM , BN . Na polopřímce opačné k polopřímce TN sestrojíme bod

B , aby platilo $TB = 2TN$. Dále sestrojíme bod C souměrně sdružený s bodem B podle bodu M . Poněvadž $N \neq M$, M' , leží bod B mimo přímku AM , body B , C jsou odděleny přímkou AM , a tudíž body A , B , C neleží v přímce a jsou vrcholy trojúhelníka ABC .

Protože AM je těžnice trojúhelníka ABC (neboť $BM = CM$) a protože $AT = 2TM$, je T těžiště trojúhelníka ABC . Protože T je těžiště trojúhelníka ABC , leží jeho těžnice z vrcholu B v přímce BT , a protože $BT = 2TN$, je N středem strany AC . Protože těžnice AM , BN trojúhelníka ABC mají touž délku, je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB .



Obr. 45

Odpověď. Hledané geometrické místo bodů je kružnice k bez bodů M, M' .

POZN. 1. Kdyby $N \equiv M$, nebo $N \equiv M'$, ležely by sestrojené body A, B, C v přímce.

POZN. 2. Trojúhelník ABC je rovnostranný, právě když $\sphericalangle MTN = 120^\circ$.

V. Úlohy III. kola kategorie A

1. Určete všechny dvojice racionálních čísel x, y , pro které platí

$$(x + y\sqrt{5})^2 = 7 + 3\sqrt{5}. \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. Budiž x, y dvojice racionálních čísel, pro kterou platí (1). Potom

$$x^2 + 5y^2 + 2xy\sqrt{5} = 7 + 3\sqrt{5},$$

takže

$$x^2 + 5y^2 - 7 = (3 - 2xy)\sqrt{5}.$$

Kdyby bylo $3 - 2xy \neq 0$, byla by

$$\sqrt{5} = \frac{x^2 + 5y^2 - 7}{3 - 2xy}$$

racionální číslo, což není. Máme tedy $2xy = 3$, tj.

$$xy = \frac{3}{2} \quad (2)$$

a ovšem také

$$x^2 + 5y^2 = 7. \quad (3)$$

Umocníme rovnici (3) dvěma; vyjde

$$x^4 + 10x^2y^2 + 25y^4 = 49. \quad (4)$$

Zároveň však podle (2) je

$$20x^2y^2 = 45. \quad (5)$$

Odečteme (5) od (4) a dostaneme

$$x^4 - 10x^2y^2 + 25y^2 = 4,$$

tj.

$$(x^2 - 5y^2)^2 = 4.$$

Je tedy buď

$$x^2 - 5y^2 = 2, \quad (6)$$

anebo

$$x^2 - 5y^2 = -2. \quad (7)$$

Sečtením (3) a (6) dostáváme $2x^2 = 9$, tj.

$$x^2 = \frac{9}{2},$$

což není možné, neboť x je racionální číslo.

Sečtením (3) a (7) dostaneme $2x^2 = 5$, tj.

$$x^2 = \frac{5}{2},$$

což také není možné.

Poněvadž jsme z předpokladu existence dvojice racionálních čísel x, y vyhovujících (1) dostali vždy spor, žádná taková dvojice neexistuje.

2. V rovine leží pět bodov O, A, B, C, D . Pre ich vzdialenosti platí $OA \leq OB \leq OC \leq OD$.

Dokážte, že pre obsah P konvexného štvoruholníka, ktorého vrcholmi sú body A, B, C, D , vždy platí

$$P \leq \frac{1}{2} (OA + OD) (OB + OC)$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

RIEŠENIE. V ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku $KLMN$ nech je Q priesečníkom uhlopriečok KM a LN .

Pre obsah trojuholníka KLM zrejme platí

$$P_{KLM} \leq \frac{1}{2} KM \cdot LQ,$$

pretože úsečka LQ nie je kratšia než výška v trojuholníku KLM prislúchajúca strane KM . Pre trojuholník KMN analogicky platí

$$P_{KMN} \leq \frac{1}{2} KM \cdot NQ,$$

takže pre obsah štvoruholníka $KLMN$ vždy platí

$$P_{KLMN} \leq \frac{1}{2} KM \cdot LN,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď je $KM \perp LN$.

Nech je R ľubovoľným bodom roviny $KLMN$. Podľa trojuholníkovej nerovnosti platí $KM \leq KR + MR$ a $LN \leq LR + NR$, takže

$$P_{KLMN} \leq \frac{1}{2} (KR + MR) (LR + NR).$$

Rovnosť v tomto vzťahu nastane práve vtedy, keď leží R jednak medzi bodmi K a M a jednak medzi bodmi L a N čiže, ak je $R \equiv Q$, kde Q je priesečníkom navzájom kolmých uhlopriečok KM a LN .

V konvexnom štvoruholníku s vrcholmi A, B, C, D sú uhlopriečkami buď AB a CD , alebo AC a BD , alebo AD a BC . Podľa predchádzajúcej úvahy platí potom v prvom prípade

$$P \leq \frac{1}{2} (AO + BO) (CO + DO),$$

v druhom prípade

$$P \leq \frac{1}{2} (AO + CO) (BO + DO)$$

a v treťom prípade

$$P \leq \frac{1}{2} (AO + DO) (BO + CO),$$

pričom rovnosť nastane vždy práve vtedy, keď O je priesečníkom navzájom kolmých uhlopriečok.

Pretože $AO \leq BO \leq CO \leq DO$, platí

$$\begin{aligned} & (AO + DO) (BO + CO) - (AO + BO) (CO + DO) = \\ & = AO \cdot BO + BO \cdot DO + AO \cdot CO + CO \cdot DO - \\ & - AO \cdot CO - AO \cdot DO - BO \cdot CO - BO \cdot DO = \\ & = AO \cdot BO + CO \cdot DO - AO \cdot DO - BO \cdot CO = \\ & = (DO - BO) (CO - AO) \geq 0, \end{aligned}$$

takže

$$(AO + BO) (CO + DO) \leq (AO + DO) (BO + CO),$$

pričom rovnosť nastane vždy práve vtedy, keď $DO = BO$ alebo $CO = AO$.

Analogicky tiež

$$\begin{aligned} & (AO + DO) (BO + CO) - (AO + CO) (BO + DO) = \\ & = AO \cdot BO + AO \cdot CO + BO \cdot DO + CO \cdot DO - \\ & - AO \cdot BO - AO \cdot DO - BO \cdot CO - CO \cdot DO = \\ & = AO \cdot CO + BO \cdot DO - AO \cdot DO - BO \cdot CO = \\ & = (DO - CO) (BO - AO) \geq 0, \end{aligned}$$

takže

$$(AO + CO) (BO + DO) \leq (AO + DO) (BO + CO),$$

pričom rovnosť nastane vždy práve vtedy, keď $DO = CO$ alebo $BO = AO$.

Platí teda vždy

$$P \leq \frac{1}{2} (AO + DO) (BO + CO).$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď O je priesečníkom navzájom kolmých uhlopriečok štvoruholníka $XYZV$,

kde X, Y, Z, V je také uspořádaná štvorica bodov A, B, C, D , že $OX = OA$ a $OZ = OD$.

3. Necht' p je prvočíslo. Kolik existuje různých posloupností přirozených čísel

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

takových, že pro každé přirozené $n = 1, 2, 3, \dots$ platí

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} + \frac{p}{a_{n+1}} = 1? \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. Necht' $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ je posloupnost vyhovující podmínkám úlohy. Vztah (1) si napíšeme pro $n = m + 1$ a $n = m$ a pak odečteme:

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \dots + \frac{a_0}{a_{m+1}} + \frac{p}{a_{m+2}} = 1,$$

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \dots + \frac{a_0}{a_m} + \frac{p}{a_{m+1}} = 1,$$

$$\frac{p}{a_{m+2}} + \frac{a_0 - p}{a_{m+1}} = 0,$$

takže

$$a_{m+2} = \frac{p}{p - a_0} a_{m+1}. \quad (2)$$

Tento vztah platí pro všechna $m = 1, 2, 3, \dots$. Vynásobíme (2) pro $m = 1, 2, \dots, k$

$$a_3 a_4 \dots a_{k+2} = \left(\frac{p}{p - a_0} \right)^k \cdot a_2 a_3 \dots a_{k+1}$$

a po zkrácení

$$a_{k+2} = \left(\frac{p}{p - a_0} \right)^k a_2 \quad (3)$$

pro $k = 1, 2, 3, \dots$. Poněvadž všechna čísla a_n jsou přirozená, musí být $p - a_0 > 0$, tedy $0 < a_0 < p$. Zároveň musí být buď p dělitelné číslem $p - a_0$, anebo musí být a_2 dělitelné libovolnou mocninou čísla $p - a_0$; obojí je však možné jen v tom případě, že

$$a_0 = p - 1. \quad (4)$$

Napišeme si nyní vztah (1) pro $n = 1$ s použitím (4):

$$\frac{p-1}{a_1} + \frac{p}{a_2} = 1,$$

tj.

$$p(a_1 + a_2) = (a_1 + 1)a_2. \quad (5)$$

Vidíme odtud, že buď číslo $a_1 + 1$, anebo číslo a_2 musí být násobkem prvočísla p .

I. Nechť tedy za prvé $a_1 + 1 = kp$ (k přirozené číslo). Dosadíme do (5); vyjde

$$\begin{aligned} p(kp - 1 + a_2) &= kpa_2, \\ kp - 1 + a_2 &= ka_2, \end{aligned}$$

takže

$$(kp - 1) = (k - 1)a_2.$$

Poněvadž k je přirozené a $p \geq 2$, je $kp > 1$, takže nemůže být $k = 1$; a můžeme dělit číslem $k - 1$. Dostaneme tak

$$a_2 = \frac{kp - 1}{k - 1} = p + \frac{p - 1}{k - 1}. \quad (6)$$

Poněvadž a_2 je přirozené, musí být číslo $p - 1$ dělitelné číslem $k - 1$. Zároveň vidíme, že takovéto číslo a_2 není dělitelné číslem p .

Ke každému přirozenému číslu $k - 1$, jež je dělitelem čísla $p - 1$, dostaneme ze vzorce (6) a z $a_1 = kp - 1$ dvojici čísel

$$a_1 = kp - 1, \quad a_2 = \frac{a_1}{k - 1};$$

poněvadž však a_0 je určeno v (4) a a_m pro $m > 2$ vzorcem (3), odpovídá každému přirozenému děliteli čísla $p - 1$ právě jedna posloupnost vyhovující úloze.

II. Necht $a_2 = kp$, k přirozené. Dosadíme do (5); vyjde

$$p(a_1 + kp) = (a_1 + 1)kp,$$

$$a_1 + kp = ka_1 + k,$$

$$a_1(k - 1) = k(p - 1).$$

Poněvadž $k \geq 1$ a $p \geq 2$, nemůže být $k = 1$; můžeme tedy dělit číslem $k - 1$:

$$a_1 = \frac{k(p - 1)}{k - 1} = p - 1 + \frac{p - 1}{k - 1}. \quad (7)$$

Poněvadž a_1 je přirozené číslo a $p \geq 2$, vidíme opět, že je číslo $p - 1$ dělitelné číslem $k - 1$.

Ke každému přirozenému číslu $k - 1$, jež je dělitelem čísla $p - 1$, dostaneme podle předchozího dvojici čísel

$$a_1 = p - 1 + \frac{p - 1}{k - 1}, \quad a_2 = kp;$$

poněvadž však čísla a_0 a a_m ($m > 2$) jsou pak plně určena vzorci (3) a (4), odpovídá každému přirozenému děliteli čísla $p - 1$ právě jedna posloupnost vyhovující úloze.

Zároveň je vidět, že posloupnosti, které dostaneme podle I a podle II jsou různé, neboť v případě II je a_2 dělitelné číslem p , kdežto v případě I tomu tak není.

Celkem tedy je počet různých posloupností vyhovujících úloze roven právě dvojnásobku počtu přirozených dělitelů čísla $p - 1$.

4. Určite všetky komplexné čísla z , ktoré vyhovujú nerovnosti

$$|z - |z + |z|| - |z| \sqrt{3} \geq 0 \quad (1)$$

a zobrazte ich v rovine komplexných čísel.

RIEŠENIE. Nerovnosť (1) je zrejme ekvivalentná s nerovnosťou

$$|z - |z + |z|||^2 \geq 3 |z|^2, \quad (2)$$

ktorej evidentne vyhovuje číslo $z = 0$. Nech $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $r > 0$, $\varphi \in <0; 2\pi)$ sú reálne čísla, je riešením nerovnosti (2). Potom zrejme platí

$$|r(\cos \varphi + i \sin \varphi) - |r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + r||^2 \geq 3r^2,$$

skadiaľ po vynásobení číslom $\frac{1}{r^2}$ a vyjadrení absolútnej hodnoty vo vnútri výrazu na ľavej strane dostaneme

$$|\cos \varphi - \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} + i \sin \varphi|^2 \geq 3,$$

čiže

$$\cos^2 \varphi - 2\cos \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} + 2(1 + \cos \varphi) + \sin^2 \varphi \geq 3.$$

Po jednoduchšej úprave máme

$$\cos \varphi \geq \cos \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}. \quad (3)$$

Z prevedených úprav je zrejmé, že číslo $z \neq 0$ vyhovuje nerovnosti (1) práve vtedy, keď jeho amplitúda $\varphi \in <0; 2\pi)$ splňuje vzťah (3).

Nerovnosti (3) vyhovujú zrejme všetky tie čísla φ , pre ktoré $\cos \varphi = 0$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Nech $\cos \varphi > 0$. Potom z (3) máme $1 \geq \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}$, z čoho po umocnení na druhú a jednoduchšej úprave dostávame nerovnosť $\cos \varphi \leq -\frac{1}{2}$, ktorá je v spore s predpokladom, čo znamená, že uhly φ , pre ktoré $\cos \varphi > 0$ nerovnosti (3) nevyhovujú.

Nech $\cos \varphi < 0$, potom z (3) dostaneme

$$1 \leq \sqrt{2(1 + \cos \varphi)},$$

z čoho rovnakým postupom ako v predchádzajúcom prí-

pade dostaneme nerovnosť

$$-\frac{1}{2} \leq \cos \varphi < 0, \quad (4)$$

ktorej vyhovujú práve tie čísla φ z uvažovaného intervalu, pre ktoré platí jeden zo vzťahov

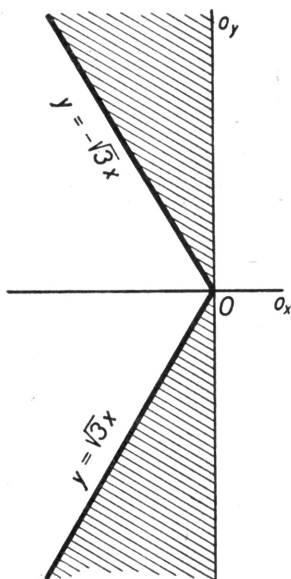
$$\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}. \quad (5)$$

Pre riešenia nerovnosti (4) však zrejme platí:

$$2(1 + \cos \varphi) \geq 1 \text{ čiže } \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} \geq 1 \text{ a}$$

$$\cos \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} \leq \cos \varphi, \text{ t. j. vyhovujú nerovnosti (3).}$$

Obr. 46



ZÁVER. Nerovnosti (1) vyhovuje číslo $z = 0$ a tie čísla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$, pre ktorých amplitúdy platí:

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}, \text{ resp.}$$

$$\frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \text{ (pozri obr. 46).}$$

INÉ RIEŠENIE. Ak použijeme vzťah $|z|^2 = z\bar{z}$, z nerovnosti (2) dostaneme

$$\begin{aligned}(z - |z + |z||) (\bar{z} - |\bar{z} + |\bar{z}||) &\geq 3z\bar{z}, \\ z\bar{z} - (z + \bar{z}) |z + |z|| + |z + |z||^2 &\geq 3z\bar{z}, \\ - (z + \bar{z}) |z + |z|| + (z + |z|) (\bar{z} + |\bar{z}|) &\geq 2z\bar{z},\end{aligned}$$

z čoho po jednoduchšej úprave vyplýva

$$(z + \bar{z}) (|z| - |z + |z||) \geq 0, \quad (6)$$

pričom je zrejmé, že nerovnosť (6) je ekvivalentná s nerovnosťou (2) a teda aj s nerovnosťou (1).

Nerovnosti (6) vyhovujú však len tie komplexné čísla z , pre ktoré platí buď

$$z + \bar{z} \geq 0, \quad |z| - |z + |z|| \geq 0, \quad (7)$$

alebo

$$z + \bar{z} \leq 0, \quad |z| - |z + |z|| \leq 0. \quad (8)$$

Nech platia nerovnosti (7). Z druhej z nich máme $|z| \geq |z + |z||$, z čoho po umocnení na druhú dostaneme $|z|^2 \geq (z + |z|) (\bar{z} + |\bar{z}|)$ čiže $|z|^2 \geq z\bar{z} + (z + \bar{z}) |z| + |z|^2$, skadiaľ

$$(z + \bar{z}) |z| \leq -|z|^2. \quad (9)$$

Vzhľadom na prvú z nerovností (7) vyhovuje však nerovnosti (9) zrejme len číslo $z = 0$, ktoré splňuje sústavu (7).

Ak platia nerovnosti (8), potom z druhej z nich analogicky ako v predchádzajúcom prípade dostaneme postupne

$$\begin{aligned}|z| &\leq |z + |z||, \quad |z|^2 \leq (z + |z|) (\bar{z} + |\bar{z}|), \\ |z|^2 &\leq z\bar{z} + (z + \bar{z}) |z| + |z|^2, \quad \text{tj.} \\ (z + \bar{z}) |z| &\geq -|z|^2, \text{ z čoho pre } z \neq 0 \text{ dostaneme} \\ -|z| &\leq z + \bar{z} \leq 0.\end{aligned} \quad (10)$$

Číslo $z = 0$ vyhovuje však tiež nerovnosti (10) i predchádzajúcej nerovnosti. Nech $z = x + iy$, kde x, y sú reál. čísla, je riešením nerovnosti (10). Potom je táto ekvivalentná s nerovnosťou

$$-\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2x \leq 0, \quad (11)$$

ktorej vyhovujú len tie dvojice reálnych čísel $[x, y]$, pre ktoré platí: $x \leq 0$, $x^2 + y^2 \geq 4x^2$ čiže $y^2 \geq 3x^2$, tj. $|y| \geq \sqrt{3}|x| = -\sqrt{3}x$. Z posledného vzťahu pre $y \geq 0$ vyplýva $y \geq -\sqrt{3}x$ a pre $y \leq 0$: zasa $y \leq \sqrt{3}x$. Obrátením postupu sa ľahko presvedčíme, že dvojice $[x, y]$, pre ktoré $x \leq 0$ a $y \geq -\sqrt{3}x \geq 0$, resp. $y \leq \sqrt{3}x \leq 0$ vyhovujú nerovnosti (11).

ZÁVER: Nerovnosti (1) vyhovujú všetky tie komplexné čísla z , ktorých obrazy ležia v spoločnej časti polrovín $x \leq 0$, $y \leq \sqrt{3}x$, a polrovín $x \leq 0$, $y \geq -\sqrt{3}x$ (pozri obr. 46).

INÉ RIEŠENIE. Nech $z = x + iy$, kde x, y sú reál. čísla, je riešením nerovnosti (1). Po dosadení do nerovnosti (2), ktorá je s ňou ekvivalentná, dostaneme

$$|x + iy - |x + iy + \sqrt{x^2 + y^2}||^2 \geq 3(x^2 + y^2),$$

$$|x + iy - \sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)}|^2 \geq 3(x^2 + y^2),$$

$$x^2 - 2x\sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)} + 2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2) + y^2 \geq 3(x^2 + y^2),$$

z čoho po jednoduchšej úprave vyplýva

$$x\sqrt{x^2 + y^2} \geq x\sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)}. \quad (12)$$

Nerovnosti (12) vyhovujú zrejme všetky dvojice $[x, y]$ reál. čísel, kde $x = 0$, y je ľubovoľné.

Nech $x > 0$. Potom z (12) dostaneme

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)},$$

z čoho postupne vyplýva

$$x^2 + y^2 \geq 2(x^2 + y^2) + 2x\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 + 2x\sqrt{x^2 + y^2} \leq 0,$$

čo však neplatí pre žiadnu dvojicu $[x, y]$, kde $x > 0$, pretože na ľavej strane je súčet dvoch kladných a jedného nezáporného čísla.

Nech $x < 0$, potom

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)},$$

z čoho postupne máme

$$x^2 + y^2 \leq 2(x^2 + y^2) + 2x\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 \geq -2x\sqrt{x^2 + y^2} > 0, \quad (13)$$

a pretože pre $x < 0$ je $\sqrt{x^2 + y^2} > 0$, je nerovnosť (13) ekvivalentná s nerovnosťou

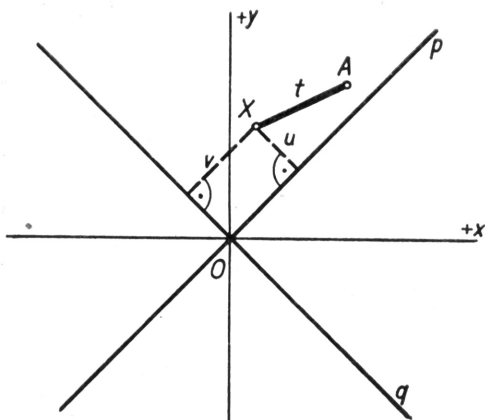
$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq -2x > 0,$$

ktorej vyhovujú všetky dvojice $[x, y]$, pre ktoré $x < 0$ a $y \geq -\sqrt{3}x$, resp. $y \leq \sqrt{3}x$, o čom sa presvedčíme podobne ako pri riešení nerovnosti (11).

5. Jsou dány dvě kolmice p, q a bod A jejich roviny, který neleží na žádné z nich. Označme vzdálenosti bodu X roviny přímek p, q od přímek p, q a bodu A po řadě u, v, t . Určete množinu všech takových bodů X , pro něž platí $t = \sqrt{uv}$.

[Návod: zvolte za osy souřadnic osy daných dvou různoběžek.]

ŘEŠENÍ. Zvolme osy souměrnosti přímek p, q za osy soustavy ortonormálních souřadnic. Orientaci os zvolme tak, aby bod A náležel 1. kvadrantu (obr. 47). Označme souřadnice $A = [x_0, y_0]$, $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$, $X = [x, y]$.



Obr. 47

Rovnice přímek p, q jsou pak $x \pm y = 0$. Podmínka pro body X hledané množiny zní

$$t^2 = uv. \quad (1)$$

Použijeme vzorců:

$$t^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \quad u = \frac{|x - y|}{\sqrt{2}},$$

$$v = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Po dosazení z (2) do (1) dostaneme

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{|x^2 - y^2|}{2}. \quad (3)$$

Z (3) plynou dvě rovnice — buď

$$2(x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2) = x^2 - y^2, \quad (4)$$

nebo

$$2(x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2) = y^2 - x^2. \quad (5)$$

Po úpravě (4) dostaneme

$$(x - 2x_0)^2 + 3(y - \frac{2}{3}y_0)^2 = 4x_0^2 + \frac{4}{3}y_0^2 - 2x_0^2 - 2y_0^2. \quad (6)$$

Po úpravě (5) dostaneme

$$3(x - \frac{2}{3}x_0)^2 + (y - 2y_0)^2 = \frac{4}{3}x_0^2 + 4y_0^2 - 2x_0^2 - 2y_0^2. \quad (7)$$

Obráceně z (6) a (7) plyne (4) a (5), odtud (3), a tedy podle (2) i (1). Analytické vyjádření vyšetřované množiny je tedy dáno rovnicemi (6) a (7).

Označme $P_6(P_7)$ pravou stranu rovnice (6), (7) po dělení dvěma.

Pak je

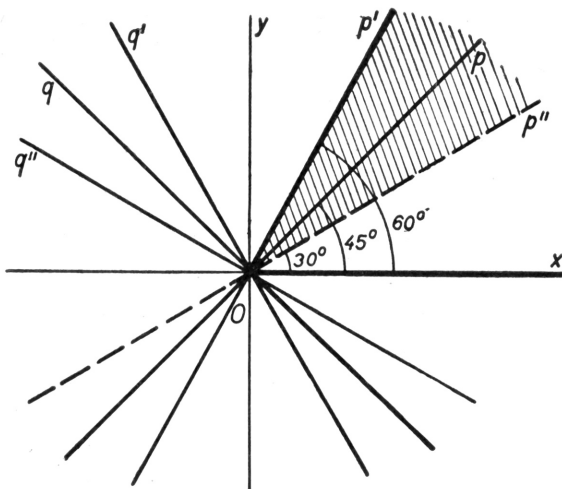
$$P_6 = x_0^2 - \frac{1}{3}y_0^2, \quad P_7 = y_0^2 - \frac{1}{3}x_0^2.$$

Upravíme

$$3P_6 = (x_0 \sqrt{3} - y_0)(x_0 \sqrt{3} + y_0), \quad (6')$$

$$P_7 = \left(y_0 - \frac{x_0}{\sqrt{3}}\right) \left(y_0 + \frac{x_0}{\sqrt{3}}\right). \quad (7')$$

$P_6 = 0$ je analytickým vyjádřením dvou přímek p', q' , které mají od osy x odchylku 60° . $P_7 = 0$ je analytickým vyjádřením dvou přímek p'', q'' , které mají od osy x odchylku 30° (obr. 48). Nerovnost $P_6 \geq 0$ vyjadřuje v 1. kvadrantě úhel s tlustě vytaženými rameny, nerovnost $P_7 \geq 0$ vyjadřuje v 1. kvadrantě úhel sevřený čárkovaným ramenem a polopřímku $+y$.



Obr. 48

Vyšetřovaná množina bodů je tedy dána touto tabulkou

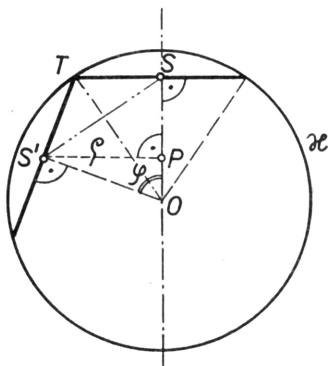
Bod A leží	Vyšetřovaná množina bodů je
Uvnitř úhlu $\sphericalangle p'y$ nebo na rameni y	Elipsa (7)
Na rameni p'	Elipsa (7) a bod $\left[2x_0, \frac{2}{3}y_0\right]$
Uvnitř úhlu $\sphericalangle p'p''$	Elipsa (6) a elipsa (7)
Na rameni p''	Elipsa (6) a bod $\left[\frac{2}{3}x_0, 2y_0\right]$
Uvnitř úhlu $\sphericalangle p''x$ nebo na rameni x	Elipsa (6)

Symetriemi podle os a počátku dostaneme situaci v ostatních kvadrantech.

6. Je dána kulová plocha o poloměru délky 1. Na této kulové ploše jsou umístěny shodné kružnice $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n (n \geq 3)$ o poloměru r . Kružnice k_0 se dotýká ^{x)} každé z kružnic $k_1, k_2, \dots, k_n$. Dále se dotýkají ^{x)} každé dvě kružnice k_i, k_{i+1} , kde $i = 1, 2, \dots, n$, přičemž kružnice k_{n+1} a k_1 jsou totožné.

a) Najděte vztah, který platí mezi čísly r, n .

b) Zjistěte, pro která n může nastat popsaná situace a vypočítejte příslušný poloměr r .



Obr. 49

ŘEŠENÍ. a) Necht' kružnice k, k' o poloměru r leží na dané kulové ploše a mají dotyk. Jejich středy S, S' a středem O kulové plochy je určena rovina σ , která protne kulovou plochu v hlavní kružnici x ; situaci v rovině σ znázorňuje obr. 49. Označíme T bod dotyku kružnic k, k' ; bod T leží zřejmě v rovině σ . Protože je $TS = TS' = r$, $OT = 1$, dostaneme z pravoúhlého trojúhelníka OST ($OS'T$)

$$OS = OS' = \sqrt{1 - r^2}. \quad (1)$$

Pro vzdálenost $a = SS'$ vyjde z deltoidu $OSTS'$ (po-

*) „Dotykem“ dvou kružnic (neležících v rovině) rozumíme případ, kdy obě kružnice mají jediný společný bod a v něm společnou tečnu.

rovnáním dvojího vyjádření obsahu)

$$\frac{1}{2} a = r \sqrt{1 - r^2},$$

neboli

$$a = 2r \sqrt{1 - r^2}. \quad (2)$$

Označme podle obr. 49 $\varphi = \angle SOS'$; z trojúhelníka $\triangle OST$ plyne

$$\sin \frac{\varphi}{2} = r. \quad (3)$$

Středy všech kružnic $k_0, k_1, \dots, k_n$ jsou podle předchozího vrcholy pravidelného jehlanu n -bokého, jehož všechny hrany mají délku a . Poloměr ϱ kružnice opsané podstavě tohoto jehlanu (je to pravidelný n -úhelník o straně a) je roven délce úsečky $S'P \perp OS$ (obr. 49). Z pravoúhlého trojúhelníka $OS'P$ plyne

$$\varrho = S'P = OS' \sin \varphi = \sqrt{1 - r^2} \cdot \sin \varphi \quad (4)$$

tj.

$$\varrho = \sqrt{1 - r^2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

a podle (3)

$$\varrho = 2r(1 - r^2). \quad (5)$$

Pro pravidelný n -úhelník o straně a a poloměru ϱ opsané kružnice dostaneme

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{a}{2\varrho},$$

tj. podle (2) a (5)

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2 \sqrt{1 - r^2}}. \quad (6)$$

Rovnice (6) je řešením úlohy a).

b) Z obr. 49 je patrné, že je $S'P < S'S$, neboli $\varrho < a$.

Protože je $r < 1$, je $\sqrt{1-r^2} < 1$, a tedy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} > \frac{1}{2}$.

Podle (6) je

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

neboť $\frac{\pi}{n}$ je velikost ostrého úhlu. Z nerovností (7) dostáváme řešení $n = 3, 4, 5$. Sestavíme tabulku

n	3	4	5
$\sin \frac{\pi}{n}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin 36^\circ$
r	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1 - \frac{1}{4 \sin^2 36^\circ}$

VI. Jedenásta medzinárodná matematická olympiáda v Bukurešti v dňoch 5.—20. 7. 1969.

1. ORGANIZÁCIA A PRIEBEH SÚŤAŽE

Na XI. MMO, ktorá sa konala v *Bukurešti* v dňoch 5.—20. 7. 1969, opäť vzrástol počet účastníckych zemí, keď sa súťaže po prvý raz zúčastnili družstvá *Belgicka* a *Holandska*. Z účastníckych zemí X. MMO chýbalo tentoraz *Taliansko*, takže bukureštská olympiáda zaznamenala rekordný počet — 14 zemí: *Anglicko*, *Belgicko*, *Bulharsko*, *ČSSR*, *Francúzsko*, *Holandsko*, *Juhoslávia*, *Maďarsko*, *Mongolsko*, *NDR*, *Poľsko*, *Rumunsko*, *SSSR*, *Švédsko*. Ako pozorovateľ sa na práci jury zúčastňoval zástupca *Rakúska*.

Vedúci delegácií jednotlivých zemí (ich mená spolu s menami ich zástupcov — pedagogických sprievodcov sú uvedené v *tabuľke* č. 1), ktorí boli súčasne členmi medzinárodnej jury, sa schádzali v Bukurešti v dňoch 4. a 5. júla 1969. Ihneď po svojom príchode boli ubytovaní v priestoroch telovýchovného zariadenia *Complexul sportiv Snagov* asi 35 km od Bukurešti. V Snagove sa konali tiež zasadania jury v období prípravy vlastnej súťaže, kedy boli vedúci delegácií dôkladne izolovaní od žiakov a pedagogických sprievodcov.

Predsedom jury bol *akademik Gr. C. Moisil*, predseda rumunskej vedeckej matematickej spoločnosti *Societăția de științe matematice*. Rokovania jury však viedol zväčša jej podpredseda *akademik N. N. Teodorescu*, podpredseda Národnej rady pre vedecký výskum a podpredseda rumunskej vedeckej matematickej spoločnosti. Ďalším podpredsedom jury bol *prof. C. Ionescu — Bujor*,

profesor bukureštskej polytechniky. Do vedenia organizačného komitétu súťaže patrili okrem menovaných ešte *prof. Gh. Rizescu*, profesor matematiky na lýceu Dimitrie Cantemir v Bukurešti, ako sekretár, *prof. Stefan Văgăi* z toho istého lýcea ako technický sekretár a *prof. Simion Cioată*, ústr. inšpektor Ministerstva školstva RSR.

Prvé zasadnutie jury sa uskutočnilo v nedeľu 6. 7. 69. Delegáti boli na ňom zoznamení s programom olympiády a s návrhmi úloh, medzi ktorými však chýbali návrhy predložené delegáciami Anglicka, Bulharska, Juhoslávie a Maďarska, ktoré ich neposlali vopred, ale priviezli so sebou. O výbere úloh, ktorému boli venované tiež zasadnutia jury v dňoch 7. a 8. 7., sa zmienime podrobnejšie na inom mieste.

Jednotlivé delegácie, na čele se zástupcami vedúcich ako pedagogickými sprievodcami, pricestovali do Bukurešti v dňoch 7. a 8. 7. 1969. Ubytovatí boli vo vysokoškolskom internáte „*Căminul 6. Martie*“ na bulváre Gheorghe Gheorghiu-Dej v centre Bukurešti. Na rozdiel od niekoľkých predchádzajúcich olympiád zostali pedagogickí sprievodcovia ubytovaní spolu so žiakmi a nezúčastňovali sa prvej etapy práce jury — výberu úloh a ich prekladu do materskej reči súťažiacich žiakov.

V dňoch 7.—9. 7. 1969 sa žiaci zoznamovali s miestom súťaže a jeho najbližším okolím. V utorok 8. 7. podnikli autokarový zájazd k zámku *Mogoșoaia* neďaleko Bukurešti a k jazeru *Snagov*. Predpoludnie dňa 9. 7. bolo venované *prehliadke Bukurešti*, ktorú žiaci absolvovali na autobusoch s dvoma dlhšími zastávkami — na *ștadióne 23. augusta* a v *Muzeul Satului* (rumunský skanzen). Počas popoludňajších horúčav mohli žiaci oddychovať v príjemnom prostredí internátu.

Vedúci delegácií počas stredy 9. 7. rozmnožovali texty úloh vybraných pre súťaž a zavčas ráno dňa 10. 7. 1969 sa

definitívne presťahovali zo Snagova do Bukurešti, kde boli ubytovaní na zostávajúcu časť svojho pobytu v Rumunsku v hoteli *Ambassador* na bulvári Magheru, najjužnejšej tepne hlavného mesta.

Vo štvrtok 10. 7. 1969 o 9. hodine bolo v *lyceu Nicolae Bălcescu* slávnostné zahájenie súťaže. Krátky prejav k zhromaždeným členom delegácií predniesol po rumunsky námestník ministra školstva *Traian Pop*. Po niekoľkých organizačných pokynoch *prof. Ionescu-Bujora* sa žiaci rozišli po jednom z každej delegácie do ôsmich tried lýcea, kde asi o 9.03 hod. začali pracovať na riešení prvej trojice súťažných úloh. Vedúci delegácií boli potom odvezení do *Valca Călegărească* (asi 70 km od Bukurešti), kde si prehliadli vinárske závody a neskoro večer sa vrátili do svojho nového bydliska — hotelu *Ambassador*.

Druhá časť súťaže sa začala v piatok 11. 7. o 9. hodine a žiaci opäť riešili 3 úlohy za 4 hodiny čistého času. Potom sa vedúci delegácií po prvý raz od príchodu do Rumunska stretli so svojimi zástupcami a za vytrvalého dažďa podnikli výlet do údolia rieky *Prahovy*, kde si prezreli kráľovský zámok *Peleș* v kúpeľnom mestečku *Sinaia*, a do *Brașova*. Do Bukurešti sa vrátili opäť neskoro v noci. Žiaci večer pod vedením tlmočníkov jednotlivých delegácií navštívili v bukureštskom divadle *Nottara* vystúpenie rumunského súboru ľudových piesní a tancov „*Perinica*“.

Ráno 12. 7. 1969 sa vydali z Bukurešti na sedemdnňový zájazd okolo Rumunska tri autobusy so žiakmi, tlmočníkmi a rumunskými organizátormi. V prvý deň cesty prechádzali mestami *Buzau*, *Focșani*, *Marazești*, kde si prezreli pamätník rumunských hrdinov z 1. svetovej vojny, a *Bacău*.

Dňa 13. 7. navštívili priehradu a jazero *Roșu* a mesto *Bicaz*, mesto *Piatre Neamt* a cestu zakončili prehliadkou monastýra *Agapia*, v ktorom nocovali.

V nasledujúci deň sa presťahovali do mesta *Suceava*, z ktorého podnikli výlety do klášterov *Sucevica*, *Moldovica* (14. 7.), *Humor* a *Voronec* (15. 7.).

Dňa 16. 7. viedla trasa zájazdu zo *Suceavy* cez *Gura Humorului*, *Vatra Dornai*, *Bistricu* (návšteva pionierskeho tábora) do *Tirgu Mureș*.

V predposledný deň zájazdu navštívili jeho účastníci mestá *Sighișoara* a *Brașov*. Dňa 18. 7. absolvovali cestu z Brašova cez *Predeal* a *Poianu Tapului* do *Sinaie*, kde si so záujmom prehliadli kráľovský palác *Peleș* a krátko pred polnocou sa vrátili do Bukurešti.

Počas dlhej a na dojmy bohatej cesty sa účastníci zájazdu zoznámili s históriou Rumunska a vo všetkých krajoch videli desiatky nových tovární, ktorých počet neustále rastie.

Pri ceste Rumunskom priam cítiť, ako sa poľnohospodársky štát mení na krajinu s vyspelým priemyslom.

V sobotu 12. 7. 1969 začali vedúci delegácií so svojimi zástupcami opravu riešení súťažných úloh. O 14. hodine sa v *Univerzitnom dome* zúčastnili na obede poriadanom ministrom školstva RSR pre zahraničných delegátov olympiády a organizačný výbor.

Opravy žiackych riešení pokračovali v lýceu *Nicolae Balcescu* i v nedeľu 13. 7. 1969, kedy sa začala zároveň koordinácia opráv a hodnotenia riešení s rumunskými koordinátormi.

Oprava, bodovanie a koordinácia klasifikácie úloh boli sťažené tým, že sa principiálne otázky neprejednali vopred na spoločnej schôdzke vedúcich delegácií, ich zástupcov a koordinátorov. Koordinátori boli pôvodne len štyria, až na žiadosť členov jury bol ich počet zvýšený na šesť tak, aby pre každú úlohu bol zvláštny koordinátor. Práce rumunských žiakov koordinovali — ako je to na

olympiádach obvyklé — vedúci delegácií tých zemí, z ktorých boli autori súťažných úloh.

Koordinácia riešení prebiehala tiež v dňoch 14. 7. a 15. 7. V utorok 15. 7. o 19.00 hod. navštívili vedúci delegácií so svojimi zástupcami predstavenie súboru *Perinica v divadle Nottara*.

V stredu 16. 7. bol pre delegátov prakticky voľný deň, ktorý využívali na *prehliadku Bukurešti* a jej najbližšieho okolia.

Vo štvrtok 17. 7. sa v lýceu Nicolae Bălcescu konali záverečné zasadnutia jury, ktorých sa bez hlasovacieho práva zúčastnili aj pedagogickí sprievodcovia. Na programe predpoludňajšieho zasadnutia bolo schválenie výsledkov jednotlivých žiakov a stanovenie podmienok pre udelenie cien. Rokovanie o cenách bolo komplikované a zdĺhavé, takže rozhodnutie o udelení zvláštnych cien za originalitu a eleganciu riešení bolo odložené na popoludňajšie zasadnutie jury. Na predpoludňajšom rokovaní predložil tiež podpredseda jury prof. Ionescu-Bujor návrh na zmenu programu záverečných dní olympiády. Jeho návrh, aby sa v sobotu 19. 7. nekonal spoločný výlet delegátov a žiakov do *Curtea de Argeș* vzhľadom na neskorý plánovaný návrat žiakov zo zájazdu okolo Rumunska a aby sa slávnostné vyhlásenie výsledkov a odozdanie diplomov preložilo z nedele 20. 7. na 19. 7., prijala jury bez námietok.

V závere popoludňajšieho zasadnutia sa prihlásil o slovo vedúci maďarskej delegácie prof. E. Hódi, ktorý predniesol pozvanie na XII. MMO do Maďarska. O usporiadanie XIII. MMO v r. 1971 sa uchádza ČSSR, o čom československí zástupcovia v neoficiálnych rozhovoroch informovali zástupcov ostatných delegácií, ktorí prijímali túto správu so súhlasom. V piatok 18. 7. mali vedúci delegácií a ich zástupcovia opäť voľný deň, ktorý väčšina z nich

venovala neúspešným pokusom o získanie cestovných lístkov, resp. leteniek pre návrat do vlasti so skorším dátumom.

O 20.30 hod. poriadal výbor *Societatea de științe matematice* večeru pre zahraničných delegátov a organizačný výbor olympiády. Večera sa konala opäť v *Univerzitnom dome* a zúčastnil sa jej tiež námestník ministra školstva s. *Traian Pop*.

V sobotu 19. 7. o 10.00 hod. sa v aule lýcea Nicolae Bălcescu konalo *slávnostné vyhlásenie výsledkov a rozdelenie cien*. Za prítomnosti nám. ministra školstva s. Traiana Popa prehovoril *akad. Gr. C. Moisil*, ktorý vo svojom prejave zhodnotil význam medzinárodných matematických olympiád, ktoré se pred rokmi začali konať z iniciatívy rumunských matematikov a práve *Rumunsko* už po tretí raz hostilo desiatky nádejných matematikov, ktorí si prišli zmerať sily v súťaži. V závere prejavu úprimne želan účastníkom olympiády, aby po celý život udržiavali a upevňovali medzinárodné priateľstvá, ktoré počas svojho pobytu v Rumunsku uzavreli.

Po prejave odovzdal *akad. Moisil* diplomy o udelení cien a zvláštnych cien odmeneným žiakom a účastnícke diplomy ostatným účastníkom olympiády.

V mene zahraničných delegácií poďakoval za dobrú organizáciu a vynaloženú starostlivosť rumunským hosťom vedúci maďarskej delegácie *prof. E. Hódi*, ktorý v závere svojho prejavu opätovne pozval delegácie všetkých zúčastnených zemí i *Rakúska*, ktoré malo v Bukurešti len svojho pozorovateľa, na budúci rok do *Maďarska na XII. MMO*.

O 13.00 hod. sa v jedálni internátu „*Căminul 6. Martie*“ uskutočnil slávnostný obed všetkých účastníkov olympiády, ktorým sa skončil oficiálny program. Pred obedom odovzdali rumunskí hostitelia knižné a drobné vecné

darčeky všetkým zahraničným účastníkom olympiády.

Zvyšok času do svojho odchodu využívali jednotlivé delegácie na prehliadku niektorých miest Bukurešti a nákup suvenírov a darčkov pre svojich blízkych. *Odchod delegácií* sa uskutočnil v nedeľu 20. 7. popoludní a v pondelok 21. 7. 1969. Zhodou okolností odchádzala ako posledná z Bukurešti československá delegácia, ktorá opustila dejisko *XI. MMO* až v pondelok večer.

Rumunskí poriadatelia urobili všetko pre to, aby *XI. MMO* skončila plným úspechom, pripravili žiakom a ich vedúcim tie najlepšie podmienky pre prácu. Počas celého svojho pobytu sa všetky delegácie stretávali s pozornosťou a pohostinstvom. Olympiáde venovala pozornosť aj rumunská televízia, ktorá 10. 7. večer vysielala zábery zo slávnostného zahájenia súťaže a v sobotu 19. 7. večer zasa zábery z rozdeľovania cien a rozhovor s akad. Moisiľom, predsedom jury, a so všetkými 3 žiakmi, ktorí získali 1. cenu.

2. O VÝBERE SÚŤAŽNÝCH ÚLOH

Výber 6 súťažných úloh na rokovaní jury v *Snagove* sa ukázal byť veľmi zložitým problémom. Pretože pozvanie na *XI. MMO* v Rumunsku došlo pomerne neskoro (v polovici apríla), neposlali niektoré zúčastnené štáty (*Anglicko, Bulharsko, Južoslávia, Maďarsko*) úlohy vopred, ale vedúci delegácií ich priviezli až so sebou do *Snagova*. Sekretariát *MMO* mohol potom včas rozmnožiť iba texty týchto úloh. Ich autorské riešenia neboli známe a členovia jury nemali už čas úlohy rozriešiť a preštudovať. To isté platí aj o sovietskych úlohách, pretože *SSSR* poslal do stanoveného termínu poriadateľom len texty navrhovaných úloh bez riešení.

Rumunská prípravná komisia vybrala 12 úloh z tých, ktoré prišli včas, aby z nich jury vybrala 6 súťažných úloh. Medzi týmito úlohami boli aj *2 úlohy československé*. Dodatočne predložené úlohy však zmenili situáciu. Prof. Ionescu-Bujor, ktorý viedol zasadnutia jury pri výbere úloh, doplnil skupinu 12 úloh o ďalšie návrhy, a to podľa jednotlivých úsekov školskej matematiky. Pritom sa ukázal nedostatok vhodných úloh zo školskej algebry, planimetrie a trigonometrie, ale zato bol nadbytok úloh napr. z číselnej teórie.

Výber súťažných úloh sa previedol potom z upravenej skupiny 12 úloh hlasovaním o jednotlivých úlohách. Táto metóda výberu, ktorá bola použitá po prvý raz s nevelkým úspechom na X. MMO v Moskve, sa príliš neosvedčila ani tento raz. Medzi súťažné úlohy sa dostala celkom nevhodná *úloha č. 1* z číselnej teórie, ktorá sa hodí skôr pre žiakov nižšieho stupňa strednej školy, málo vhodná planimetrická *úloha č. 4*, ktorá nedáva takmer žiadne možnosti elegantného riešenia, a neobvyklá a pre žiakov značne obťažná *úloha č. 6*. Stereometrická *úloha č. 3* bola sformulovaná tak, že jej riešenie nevyžadovalo detailné preskúmanie najobťažnejšieho prípadu pre $k = 3$, ktoré mal autor hlavne na mysli, čím sa príliš zjednodušila, pretože jej riešenie sa opieralo v podstate len o použitie trojuholníkovej nerovnosti.

Ďalšia ťažkosť sa objavila pri *stanovení maximálneho počtu bodov* dosiahnuteľného za úplné riešenie jednotlivých úloh. Predsedajúci prof. Ionescu-Bujor stanovil pre počet bodov hranice 5–8. Pretože toto rozpätie bolo vzhľadom na rôznu obťažnosť úloh napr. č. 1 a č. 6 príliš malé, zdržal sa čs. delegát hlasovania o tejto otázke. Pri hlasovaní bola tiež *úloha č. 3* nadhodnotená 7 bodmi. Najlepšie boli vybrané a ohodnotené úlohy č. 2 (po úprave pôvodnej formulácie) a č. 5.

Je pozoruhodné, že na XI. MMO sa po prvý raz nedostala medzi súťažné úlohy úloha z ČSSR. Pri stále rastúcom počte účastníckych zemí je to však celkom prirodzené a samozrejmé.

Pri celom rokovaní jury o výbere úloh sa ukázalo, že rozdielnosť osnov toľkých zúčastnených štátov sťažuje výber. Tematikou navrhovaných úloh je podľa doterajšej tradície tzv. „klasická“ školská matematika. Viacerým zemiam, v ktorých modernizácia vyučovania matematiky viac pokročila, to však nevyhovuje. Pravdepodobne už v blízkej budúcnosti bude treba uvažovať o zmene koncepcie súťažných úloh.

3. RIEŠENIE SÚŤAŽNÝCH ÚLOH

1. DEŇ (10. JÚLA 1969)

1. Existuje nekonečne mnoho prirodzených čísel a , ktoré majú tú vlastnosť, že číslo $a + n^4$ nie je prvočíslom pre žiadne prirodzené číslo n . Dokážte.

(NDR, 5 bodov)

RIEŠENIE. Položme $a = 4k^4$, kde k je prirodzené číslo, abysme číslo $a + n^4$ vyjadrili ako rozdiel druhých mocnín. Potom je $a + n^4 = n^4 + 4k^4 = (n^2 + 2k^2)^2 - 4n^2k^2 = (n^2 + 2k^2 - 2nk)(n^2 + 2k^2 + 2nk) = [(n - k)^2 + k^2][(n + k)^2 + k^2]$.

Ak zvolíme $k \geq 2$, sú oba činitele v hranatých zátvorkách väčšie alebo rovné 4 pre každé prirodzené n a číslo $a + n^4$ nie je teda prvočíslo.

2. Nech sú $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 1$) reálne konštanty a nech $f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2} \cos(a_2 + x) + \dots +$

$+\frac{1}{2^{n-1}} \cos (a_n+x)$ je funkcia reálnej premennej x .
 Ak je $f(x_1)=f(x_2)=0$, potom je $x_2-x_1=m\pi$, kde m je celé číslo; dokážte. (Maďarsko, 7 bodov)

RIEŠENIE. Podľa vzorca pre kosínus súčtu uhlov platí $f(x)=A \cos x-B \sin x$, kde

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos a_1}{2^0} + \frac{\cos a_2}{2^1} + \dots + \frac{\cos a_n}{2^{n-1}}, \\ B &= \frac{\sin a_1}{2^0} + \frac{\sin a_2}{2^1} + \dots + \frac{\sin a_n}{2^{n-1}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Podľa predpokladu je

$$\begin{aligned} A \cos x_1 - B \sin x_1 &= 0, \\ A \cos x_2 - B \sin x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Nepriamo dokážeme, že nie je súčasne $A=B=0$.
 Nech platí opak, tj. $A=B=0$. Potom, ak prvú rovnicu v (1) vynásobíme číslom $\cos a_1$, druhú číslom $\sin a_1$ a sčítame, dostaneme

$$1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} (\cos a_1 \cos a_k + \sin a_1 \sin a_k) = 0,$$

čiže

$$1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} \cos (a_1-a_k) = 0. \tag{3}$$

Platí však

$$\left| 1 + \sum_{k=2}^n \frac{\cos (a_1-a_k)}{2^{k-1}} \right| \geq 1 - \sum_{k=2}^n \left| \frac{\cos (a_1-a_k)}{2^{k-1}} \right| \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} > 0,$$

čo je spor s (3).

Môžeme preto predpokladať, že je napr. $A \neq 0$. Ak vynásobíme prvú rovnicu (2) číslom $A \sin x_2$, druhú číslom $-A \sin x_1$ a sčítame, dostaneme

$$A^2 (\cos x_1 \sin x_2 - \cos x_2 \sin x_1) = A^2 \sin (x_2 - x_1) = 0.$$

Pretože $A \neq 0$, je $\sin (x_2 - x_1) = 0$, tj. $x_2 - x_1 = m\pi$, kde m je celé číslo.

V prípade $A = 0$ musí byť $B \neq 0$ a dôkaz sa prevedie analogicky.

3. Pre každé z čísel $k = 1, 2, 3, 4, 5$ riešte úlohu: Určite nutné a postačujúce podmienky pre kladné číslo a , aby existoval štvorsten, ktorého k hrán má dĺžku a a zostávajúcich $6 - k$ hrán má dĺžku 1. (Poľsko, 7 bodov)

RIEŠENIE. Keďže prípady $k = 4$, $k = 5$ možno voľbou úsečky veľkosti a za jednotkovú previesť na prípady $k = 2$, $k = 1$, stačí vyšetrovať len prípady $k = 1, 2, 3$.

I. $k = 1$. Nech $AB = a$, $AC = AD = BC = BD = CD = 1$ a nech M je stred hrany CD (obr. 50).

Potom je $AM = BM = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $AB < AM + BM$, čiže

$$0 < a < \sqrt{3}. \quad (1)$$

Podmienka (1) je však zrejme aj postačujúcou podmienkou pre to, aby bolo možné zostrojiť štvorsten typu I.

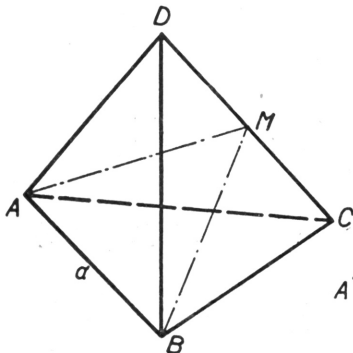
II. $k = 2$. Treba rozlišovať 2 prípady: a) Hrany dĺžky a sú mimobežné, napr. $AB = CD = a$, $AC = BC = AD = BD = 1$. Pri označení ako v obr. 50 potom platí

$$AM = BM = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}, \quad AB < AM + BM, \text{ čiže}$$

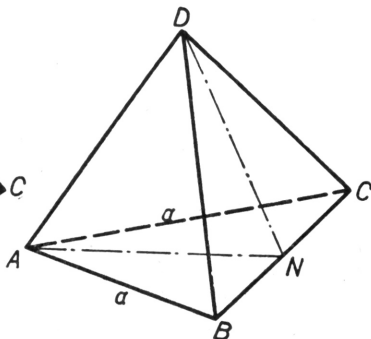
$$a < 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}, \text{ z čoho } a^2 < 4 - a^2, \text{ čiže } |a| < \sqrt{2}, \text{ a teda}$$

$$0 < a < \sqrt{2}, \quad (2)$$

čo je opäť aj podmienka postačujúca.



Obr. 50



Obr. 51

b) Hrany, dĺžky a sú rôznoobežné, napr. $AB = AC = a$; $AD = BD = BC = CD = 1$. Označme N stred hrany BC (obr. 51). Z existencie trojuholníka ADN vyplýva: $AD + DN > AN > |AD - DN|$, čiže

$$1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} < \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} < 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

odkiaľ postupne dostaneme

$$1 - \sqrt[3]{3} + \frac{3}{4} < a^2 - \frac{1}{4} < 1 + \sqrt[3]{3} + \frac{3}{4},$$

$$2 - \sqrt[3]{3} < a^2 < 2 + \sqrt[3]{3},$$

$$\sqrt{2 - \sqrt[3]{3}} < a < \sqrt{2 + \sqrt[3]{3}},$$

z čoho po úprave surdických výrazov dostaneme nutnú podmienku pre existenciu štvorstena v tomto prípade v tvare

$$\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) < a < \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}). \quad (3)$$

Ak platí (3), je $a > \frac{1}{2}$, možno preto zostrojiť trojuholník ABC so stranami $AB = AC = a$, $BC = 1$ a určiť bod D tak, že bude $AD = BD = CD = 1$.

Keďže $\sqrt{2 - \sqrt[3]{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) < \sqrt{2}$, je nutnou a postačujúcou podmienkou k tomu, aby pre $k = 2$ existoval štvorsten uvedených vlastností splnenie nerovnosti

$$0 < a < \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

ktorú dostaneme z (2) a (3).

III. $k = 3$. Môžu nastať celkom 3 prípady: a) Hrany dĺžky a sú strany trojuholníka; b) hrany dĺžky a vychádzajú z toho istého vrcholu; c) dĺžku a majú dve mimobežné hrany a ich prička.

a) Nech je napr. $AB = BC = CA = a$, $DA = DB = DC = 1$. Kolmý priemet bodu D do roviny ABC je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC . Nutnou a postačujúcou podmienkou pre existenciu štvorstena

tohto typu je, aby polomer kružnice opísanej $\triangle ABC$ bol menší než 1, tj. $a \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$, čiže

$$0 < a < \sqrt{3} \doteq 1,732. \quad (4)$$

b) Nech je napr. $DA = DB = DC = a$, $AB = BC = CA = 1$. Podobne ako v prípade a) dostaneme pre polomer R kružnice opísanej $\triangle ABC$ podmienku $R < a$, tj.

$$a > \frac{1}{3} \sqrt{3} \doteq 0,577. \quad (5)$$

Zo (4) a (5) dostávame $0 < a$, čo je zrejme nutná aj postačujúca podmienka pre existenciu štvorstena uvedených vlastností pre $k = 3$ a o prípade c) netreba uvažovať.

Nutnú a postačujúcu podmienku pre existenciu štvorstena uvedených vlastností pre jednotlivé k možno zhrnúť v tabuľke

$k = 1$	$0 < a < \sqrt{3}$
$k = 2$	$0 < a < \frac{1}{2} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$
$k = 3$	$0 < a$
$k = 4$	$\frac{1}{2} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) < a$
$k = 5$	$\frac{1}{3} \sqrt{3} < a$

POZNÁMKA. Keďže skúmanie prípadu IIIc je najzaujímavejšie a podľa zámeru autora úlohy malo byť jadrom riešenia, rozoberme ešte tento prípad.

Nech napr. $AD = BD = BC = a$, $AB = AC = CD = 1$. Zvoľme si súradnicovú sústavu v priestore tak, že $A \equiv [0, 0, 0]$, $B \equiv [1, 0, 0]$, $C \equiv [u, v, 0]$, $D \equiv [x, y, z]$ (obr. 52).

Potom platí

$$(AC^2 =) u^2 + v^2 = 1, \quad (6)$$

$$(BC^2 =) (u - 1)^2 + v^2 = a^2, \quad (7)$$

$$(AD^2 =) x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad (8)$$

$$(BD^2 =) (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad (9)$$

$$(CD^2 =) (x - u)^2 + (y - v)^2 + z^2 = 1. \quad (10)$$

Zo (6) a (7) odčítaním dostaneme

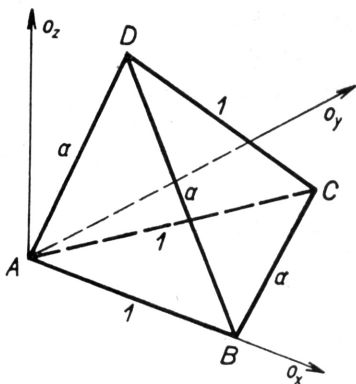
$$u = 1 - \frac{a^2}{2}. \quad (11)$$

Zo (6) a (11) po dosadení za u máme

$$v = \frac{a}{2} \sqrt{4 - a^2}. \quad (12)$$

Z (8) a (9) po odčítaní dostaneme

$$x = \frac{1}{2} \quad (13)$$



Obr. 52

a z (9) a (10) po odčítaní

bude $2ux + 2vy = a^2$, z čoho po dosadení z (11), (12), (13) máme

$$y = \frac{3a^2 - 2}{2a \sqrt{4 - a^2}}. \quad (14)$$

Päta P výšky z vrcholu D na stenu ABC má súradnice $P[x, y, 0]$. Pre dĺžku AP platí $AP = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nutná

a postačujúca podmienka existencie štvorstena je $AD > AP$ čiže $AD^2 > AP^2$, tj.

$$x^2 + y^2 < a^2. \quad (15)$$

Ak do (15) dosadíme z (13) a (14), bude

$$\frac{1}{4} + \frac{(3a^2 - 2)^2}{4a^2(4 - a^2)} < a^2,$$

z čoho po úprave máme

$$a^6 - 2a^4 - 2a^2 + 1 < 0. \quad (16)$$

Štvorčen na ľavej strane (16) sa však dá rozložiť,

$a^6 - 2a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)(a^4 - 3a^2 + 1)$, takže podmienkou existencie štvorstena typu IIIc je splnenie nerovnosti $a^4 - 3a^2 + 1 < 0$, čiže

$$\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} < a < \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}.$$

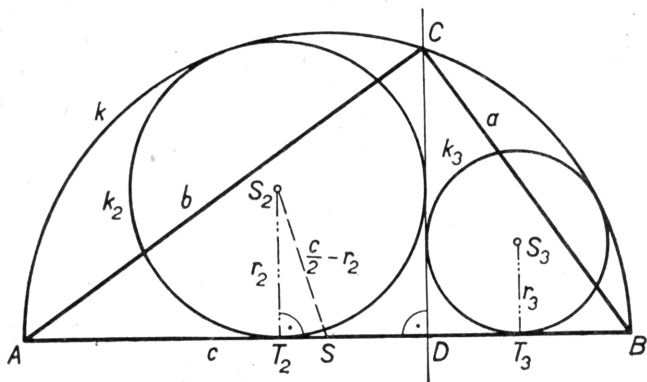
2. DEŇ (11. JÚLA 1969)

4. Je daný pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB a jemu opísaná kružnica k . Označme D päť výšky spustenej z vrcholu C na preponu AB , k_1 kružnicu vpísanú trojuholníku ABC , k_2, k_3 dve navzájom rôzne kružnice, z ktorých každá sa dotýka priamok AB, CD , leží v polrovine ABC a dotýka sa zvnútra kružnic k . Dokážte, že kružnice k_1, k_2, k_3 majú okrem priamky AB ešte ďalšiu spoločnú dotýčnicu. (Holandsko, 6 bodov)

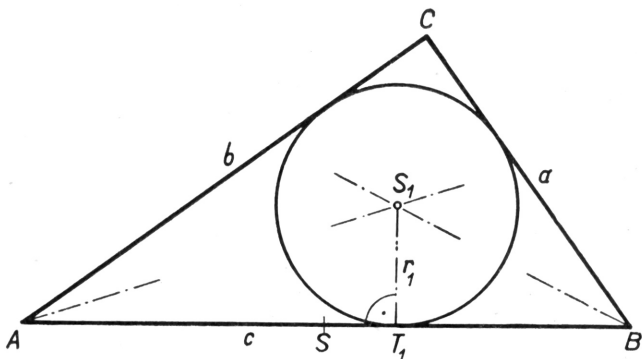
RIEŠENIE. Označme podľa obr. 53 $AB = c, BC = a, CA = b, AD = p, BD = q$. Ďalej označme S_1, S_2, S_3 stredu a r_1, r_2, r_3 polomery kružnic k_1, k_2, k_3 v uvedenom poradí. Ich dotykové body s priamkou AB označme $T_1,$

T_2, T_3 a stred prepony AB označme S . Predpokladajme (bez ujmy na všeobecnosti), že je $b \geq a$.

Pre $\triangle S_2T_2S$ platí podľa Pythagorovej vety (i vtedy, keď je $T_2 = S$): $\left(\frac{c}{2} - r_2\right)^2 = r_2^2 + \left(q + r_2 - \frac{c}{2}\right)^2$,



Obr. 53



Obr. 54

z čoho vyplýva $(r_2 + q)^2 = qc = a^2$, čiže

$$r_2 = a - q. \quad (1)$$

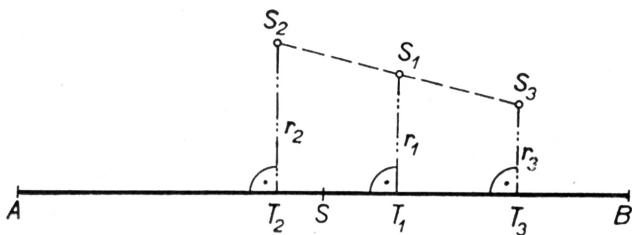
Použitím Pythagorovej vety na $\triangle S_3T_3S$ analogicky dostaneme

$$r_3 = b - p. \quad (2)$$

Pretože je podľa predpokladu $b \geq a$, leží bod T_1 na polpriamke SB (obr. 54). Podľa známeho vzorca je

$$r_1 = s - c, \quad AT_1 = s - a. \quad (3)$$

Pre body T_1, T_2, T_3 (ležiace na polpriamke AB) a pre body S_1, S_2, S_3 nastane teda situácia z obr. 55).



Obr. 55

Podľa vzťahov (1), (2), (3) pritom platí:

$$AT_2 = p + q - a, \quad AT_3 = p + b - p = b,$$

$$AT_1 = s - a,$$

čiže

$$\begin{aligned} AT_1 &= \frac{1}{2}(a + b + c) - a = \frac{1}{2}(b + c - a) = \\ &= \frac{1}{2}(AT_2 + AT_3), \end{aligned}$$

$$r_1 = \frac{1}{2}(a + b + c) - c = \frac{1}{2}(a + b - c) = \frac{1}{2}(r_2 + r_3),$$

pretože

$$p + q = c.$$

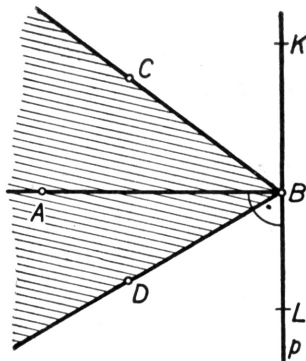
Bod S_1 je teda stredom úsečky S_2S_3 . Priamka súmerne združená s AB podľa priamky S_2S_1 je preto ďalšou spoločnou dotýčnicou kružníc k_1, k_2, k_3 .

5. V rovine je daných n bodov ($n > 4$), z ktorých žiadne tri neležia v priamke. Potom existuje aspoň $\frac{1}{2}(n-3)$.
 $(n-4)$ rôznych konvexných štvoruholníkov, ktorých všetky vrcholy sú niektoré z daných bodov. Dokážte.
(Mongolsko, 7 bodov)

RIEŠENIE. Medzi $\binom{n}{2}$ úsečkami, ktoré spájajú body danej množiny $\mathfrak{M}$ po dvoch vyberieme najdlhšiu úsečku AB (tj. pre všetky dvojice bodov X, Y množiny $\mathfrak{M}$ platí $XY \leq AB$). Bodom B vedieme priamku $p \perp AB$. Podľa voľby úsečky AB ležia všetky body množiny $\mathfrak{M}$ okrem bodu B vo vnútri polroviny pA (obr. 56).

Na priamke p zvolíme body K, L tak, aby boli oddelované bodom B a určíme také body C, D množiny $\mathfrak{M}$, aby vo vnútri uhlov $\angle KBC$ a $\angle LBD$ neležal žiadny bod množiny $\mathfrak{M}$. Potom všetky body množiny $\mathfrak{M}$ s výnimkou bodov B, C, D ležia vo vnútri dutého uhla $\angle CBD$.

Zvoľme ľubovoľné dva body X, Y z $\mathfrak{M}$ rôzne od B ,



Obr. 56

C, D . Body X, Y ležia vo vnútri uhla $\sphericalangle CBD$. Môže nastať práve jeden z týchto 5 prípadov: a) Priamka XY pretína obe úsečky BC, BD ; b) priamka XY pretína úsečku BD (BC) a polpriamku opačnú k CB (DB); c) priamka XY pretína úsečku BD (BC) a je rovnobežná s priamkou BC (BD); d) priamka XY pretína polpriamku opačnú k DB (CB) a je rovnobežná s priamkou BC (BD); e) priamka XY pretína polpriamky opačné k CB, DB . Jednotlivé prípady sú načrtnuté na obr. 57a)–e).

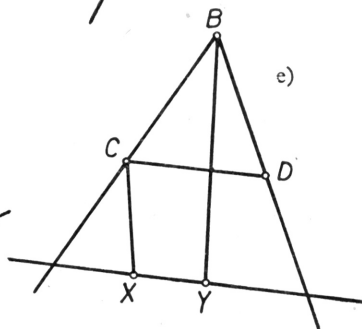
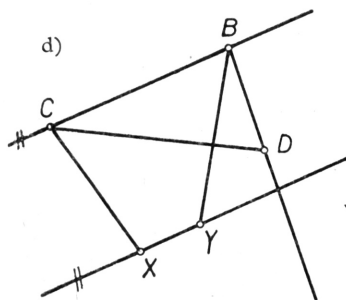
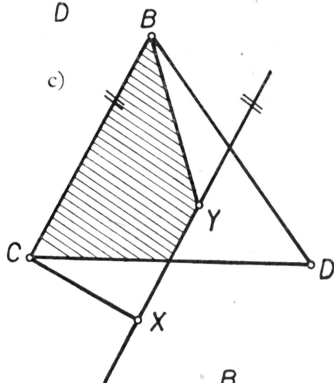
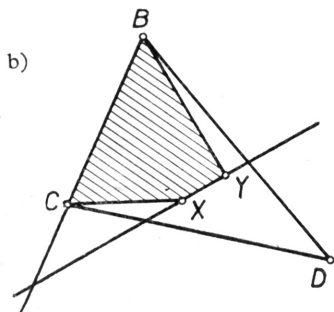
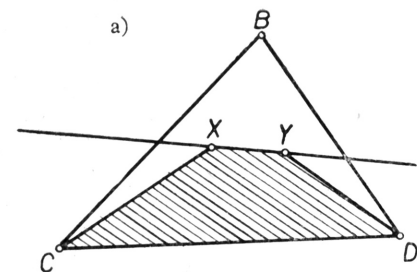
Štvoruholník $CXYD$ v prípade a) (obr. 57a) je zrejme prienikom polrovín CDX, CXD, DYC a XYC . Ako prienik konečného systému konvexných množín je to teda konvexná množina. Analogicky sa dokáže konvexita štvoruholníkov s vrcholmi X, Y vyšrafovaných na obr. 57b)–e) v ostatných prípadoch. Z každej dvojice bodov X, Y dostaneme teda aspoň jeden konvexný štvoruholník so stranou XY (na obr. 57d i 57e sú také štvoruholníky tri: $CXYB, CXYD, BXYD$). Dvojíc bodov X, Y je $\binom{n-3}{2} = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)$. Tým je tvrdenie dokázané.

6. Ak sú $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ reálne čísla, pre ktoré platí $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1y_1 - z_1^2 > 0, x_2y_2 - z_2^2 > 0$, potom platí

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}. \quad (1)$$

Dokážte. Nájdite nutné a postačujúce podmienky pre to, aby v (1) platila rovnosť.

(SSSR, 8 bodov)



Obr. 57

RIEŠENIE. Označme $D_1 = x_1 y_1 - z_1^2$, $D_2 = x_2 y_2 - z_2^2$. Potom platí

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 &= D_1 + D_2 + x_1 y_2 + \\ &+ x_2 y_1 - 2z_1 z_2 = D_1 + D_2 + \frac{x_1}{x_2}(D_2 + z_2^2) + \\ &+ \frac{x_2}{x_1}(D_1 + z_1^2) - 2z_1 z_2 = D_1 + D_2 + \frac{x_1}{x_2} D_2 + \frac{x_2}{x_1} D_1 + \\ &+ \frac{x_1}{x_2} z_2^2 + \frac{x_2}{x_1} z_1^2 - 2z_1 z_2 = D_1 + D_2 + \frac{x_1^2 D_2 + x_2^2 D_1}{x_1 x_2} + \\ &+ \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} z_2 - \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} z_1 \right)^2 \geq D_1 + D_2 + 2\sqrt{D_1 D_2} = \\ &= (\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2, \end{aligned}$$

tj.

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 \geq (\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2. \quad (2)$$

Z toho

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{8}{(\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2}. \quad (3)$$

Keďže pre každé reálne čísla $a > 0$, $b > 0$ platí

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab},$$

čiže

$$\frac{4a^2 b^2}{(a+b)^2} \leq ab$$

a tiež

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$

platí

$$\frac{4a^2 b^2}{(a+b)^2} \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$

z čoho

$$\frac{8}{(a+b)^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \quad (4)$$

Po dosadení do (4) za $a = \sqrt{D_1}$, $b = \sqrt{D_2}$ dostaneme

$$\frac{8}{(\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2} \leq \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}. \quad (5)$$

Z nerovností (3) a (5) vyplýva (1).

Rovnosť vo vzťahu (1) nastane zrejme práve vtedy, keď platí rovnosť vo vzťahu (2), t.j. keď platí

$$x_1 \sqrt{D_2} = x_2 \sqrt{D_1} \quad (6)$$

a súčasne

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} z_2 = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} z_1 \quad (7)$$

a ak zároveň platí rovnosť vo vzťahu (5), t.j. keď platí tiež

$$\sqrt{D_1} = \sqrt{D_2}. \quad (8)$$

Vzhľadom na (8) máme zo (6): $x_1 = x_2$, v dôsledku čoho zo (7) bude $z_1 = z_2$ a z (8) $y_1 = y_2$.

Rovnosť vo vzťahu (1) nastane teda práve vtedy, keď platí

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2.$$

4. VÝSLEDKY SÚŤAŽE

Prehľad počtu bodov, ktoré získali jednotliví žiaci ukazuje tabuľka 2. Dosiahnuté výsledky potvrdzujú to, čo sme povedali o výbere úloh. O obťažnosti 6. úlohy svedčí napr. to, že plný počet bodov za jej riešenie

dosiahlo len 7 žiakov zo 112 (1 z Anglicka; 1 z ČSSR, 3 z Maďarska, 1 z Poľska a 1 z SSSR). Celkove boli výsledky podstatne horšie než na X. MMO v Moskve, keď plný počet 40 bodov za riešenie všetkých 6 úloh dosiahli len 3 žiaci.

Tabuľka 2 ukazuje, že v poradí družstiev nedošlo v porovnaní s predchádzajúcim rokom k podstatným zmenám. Do skupiny silnejších (*Maďarsko, NDR, SSSR, Anglicko*) se opäť zaradilo domáce *Rumunsko* a relatívne sa zlepšilo *Bulharsko*, ktoré malo tohto roku pomerne vyrovnané družstvo, a *Juhoslávia*. ČSSR, ako už tradične, uzatvára skupinu vyrovnaných družstiev stredú. Na čelo slabšej skupiny sa dostalo *Mongolsko*, ktoré v súčte bodov predstihlo *Poľsko* a *Francúzsko*. *Švédsko* prišlo opäť so slabším družstvom a najslabších výsledkov dosiahli *Belgicko* a *Holandsko*, ktoré prišli na MMO po prvý raz s družstvami bez špeciálnej prípravy, ktorých členovia neabsolvovali žiadnu domácu súťaž. Úspech *Mongolska* nie je určite náhodný a v budúcich rokoch možno očakávať ďalšie zlepšenie jeho družstva.

Pokiaľ ide o ceny, hranice pre ich udelenie boli na zdĺhavom rokovaní jury, na ktorom bol jedným z najiniciatívnejších vedúci sov. delegácie *prof. V. J. Levin*, stanovené takto:

- I. cena: 40 bodov;
- II. cena: 37—30 bodov;
- III. cena: 29—24 bodov.

Podľa tohto kľúča získali účastníci z jednotlivých zemí ceny uvedené prehľadne v *tabuľke 3*. V protiklade s tradíciou, keď ceny dostávalo približne 50 % účastníkov, je počet odmenených nepomerne nižší.

Okrem týchto cien boli udelené niekoľkým žiakom *zvláštne odmeny za originálne a elegantné riešenie*. Pri zlo-

žitom rokovaní o tejto otázke sa nedosiahlo v jury jednotné hľadisko na podsuzovanie metódy riešenia, použitia aparátu nepreberaného na strednej škole a z toho vyplývajúcu krátkosť či tzv. eleganciu riešenia. Sovietsky delegát *prof. Levin* vyslovil napr. názor, že žiak, ktorý pri riešení úlohy vie použiť diferenciálnych rovníc, sa nemá zúčastniť *MMO*, hoci inak (vekom a školským zaradením) podmienky splňuje.

Je zaujímavé, že nikto nedostal zvláštnu cenu za riešenie 1. a 4. úlohy, čo opäť potvrdzuje nevhodnosť ich voľby. Ani úloha č. 3 v predloženej formulácii nedala možnosť originálnych a elegantných riešení. Za riešenie úlohy č. 2 dostali zvláštnu cenu 1 anglický, 1 československý (*Tomáš Mašek*) a 1 švédsky žiak, za riešenie úlohy č. 5 po 1 žiakovi z *Anglicka*, *Maďarska*, *NDR*, *Polska* a *SSSR* a za riešenie úlohy č. 6 jeden sovietsky žiak.

5. ČESKOSLOVENSKÁ DELEGÁCIA

Naša delegácia sa skladala z *vedúceho*, jeho *zástupcu* a *ôsmich žiakov*. Mená žiakov i výsledky, ktoré dosiahli sú uvedené v *tabuľke 4*.

Po vlaňajšom relatívnom úspechu, keď naše družstvo získalo dve prvé a 4 druhé ceny, sú tohtoročné výsledky sklamaním. Pre družstvo, v ktorom boli jeden päťnásobný (*Sivák*), jeden trojnásobný (*Mašek*) a 1 dvojnásobný (*Vinárek*) účastník *MMO* je zisk len troch tretích cien menej než chudobným vysvedčením. Najmenej sa dal očakávať neúspech *Siváka*, ktorý už ako 13-ročný na *VII. MMO* získal 3. cenu a na *XI. MMO* sa musel uspokojiť s diplomom účastníka. No, ani ostatní členovia družstva — snáď až na *Hadravu* a *Vinárka* — nepodali očakávané výkony.

Najmenej možno žiakom vyčítať malý úspech v *úlohe 6* (celkom 18 bodov), pretože s úlohami tohto druhu sa nestretli ani v školskej praxi, ani v špeciálnej príprave. Najviac zaráža nevalný výsledok v *úlohe 4*, obe nuly v stĺpci 1 a to, že úlohu č. 3 riešili s plným bodovým ziskom len 2 žiaci. V predloženej formulácii nemusela robiť problémy ani jednému z našich žiakov.

Pri pátraní po príčinách nášho malého úspechu by sme opäť museli opakovať to, čo sa v správach o *MMO* povedalo už niekoľkokrát, a to, že žiadna špeciálna mimoškolská príprava nemôže nahradiť systematické, náročné a dobre vedené vyučovanie. Aj pri organizácii špeciálnych matematických tried by sme sa mali poučiť z osvedčených zahraničných skúseností, kde sa takéto triedy zriaďujú len v miestach, kde sú pre to podmienky a učia v nich prevažne vysokoškolskí učitelia.

Nedostatkom, ktorý sa zvlášť vypukle prejavil u nášho družstva, je snaha používať aparát vyššej matematiky, ktorý žiak poriadne neovláda namiesto aplikácie stredoškolských metód. Ďalej sa stále prejavuje častokrát kritizované bezhlavé počítanie bez predchádzajúcej logickej úvahy o rozumnej ceste.

Ako ďalšia príčina pomerne malého úspechu našich žiakov sa javí opäť ich nedobrý nervový stav, ich malá sebadôvera, húževnatosť a vytrvalosť v prekonávaní prekážok. Nazdávame sa, že korene týchto nedostatkov treba hľadať v nedostatkoch vo výchove, a to už v nižších triedach.

Záverom uvedme ešte *dve riešenia úlohy č. 2*, za ktoré boli naši žiaci navrhnutí na zvláštnu cenu, ale pod vplyvom vyššie spomínaných názorov, ktoré sa presadili pri rokovaní jury, dostal ju len prvý z nich.

RIEŠENIE T. MAŠKA

$$f(x) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} e^{i(a_n+x)} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{ix} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} e^{ia_k} \right).$$

Položme $z = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} e^{ia_k}$. Platí: $1 = |e^{ia_1}| =$

$$= \left| z - \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} e^{ia_k} \right| \leq |z| + \sum_{k=2}^n \left| \frac{1}{2^{k-1}} e^{ia_k} \right| =$$

$$= |z| + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < |z| + 1. \text{ Z toho vyplýva } |z| > 0,$$

teda $z = r e^{i\varphi}$, kde $r = |z| > 0$, φ sú reálne čísla.

Teda $f(x) = \operatorname{Re} (e^{ix} z) = \operatorname{Re} (r e^{i(x+\varphi)}) = r \cos (x + \varphi)$; $r > 0$. Ak platí $f(x_1) = f(x_2) = 0$, potom $\cos (x_1 + \varphi) = \cos (x_2 + \varphi) = 0$, čiže $x_1 + \varphi = \frac{\pi}{2} + l\pi$, $x_2 + \varphi = \frac{\pi}{2} + p\pi$, kde l, p sú celé čísla. Potom však $x_2 - x_1 = (p - l)\pi = m\pi$, kde m je celé číslo.

RIEŠENIE B. SIVÁKA

Zrejme je $f(-a_1) = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} \cos (a_k - a_1)$. Potom

$$|f(-a_1) - 1| \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

čiže

$$0 < f(-a_1) < 2.$$

$$f''(x) = -\cos(a_1 + x) - \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) - \dots - \\ - \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x) = -f(x).$$

Funkcia $f(x)$ vyhovuje teda dierenciálnej rovnici $f''(x) + f(x) = 0$, ktorej všeobecné riešenie má tvar $f(x) = A \cos(x + \varphi)$, kde A, φ sú ľubovoľné konštanty.

Keďže $f(-a_1) = A \cos(-a_1 + \varphi) > 0$, je $A \neq 0$. Ak $f(x_1) = f(x_2) = 0$, potom $\cos(x_1 + \varphi) = \cos(x_2 + \varphi) = 0$ a $x_2 - x_1 = m\pi$, kde m je celé číslo sa dokáže rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Tabuľka 1
Vedúci delegácii a ich zástupcovia

Krajina	Vedúci delegácie	Zástupca ped. sprievodca
Anglicko	F. R. Watson, profesor University of Keele, Staffordshire	Lenon Beeson, profe- sor Biskop Otter Col- lege, Chichester
Belgicko	Svens Marcel, inšpektor Sint Martens-Latem	Nachtere Jaelle Jean, inšpektor, Bruxelles
Bulharsko	Doc. Kiril Dočev, ved. katedry vyššej algebry, Mat. fakulta Sofia	Dimo Serafimov Ange- lov, inšpektor, Sofia
ČSSR	Doc. Jan Vyšín, CSc., Mat. fyz. fakulta, KU, Praha	Dr. Jozef Moravčík, CSc., odb. asistent VŠD, Žilina
Francúzsko	A. Warusfel, profesor Lyceé Louis le Grand, Paris	Geril Denis, profesor Lycée Louis le Grand, Paris
Holandsko	Prof. dr. Hans Freuden- thal, Utrecht	Ary van Tooren, asistent, Haag
Juhoslávia	Vladimír Mičič, magister, asistent Univerzity v Belehrade	Mila Mršević, asist. Univ. v Belehrade
Maďarsko	Endré Hódi, vedúci ved. pracovník, Budapešť	István Reiman, ve- decký pracovník, Budapešť

Pokračovanie tabuľky 1

Krajina	Vedúci delegácie	Zástupca ped. sprievodcu
Mongolsko	Doc. Gunže Gatavyn, vedúci katedry mat. analýzy, Štátna univerzita, Ulanbator	Gombyn Zagdragca, inšpektor, Ulanbator
NDR	Dr. Helmut Bausch, vedúci ved. pracovník, Berlín	Doc. dr. Rolf Lüders, Berlín
Poľsko	Doc. dr. Mieczysław Czyżykowski, Polytechnika Waršawa	Andrzej Mąkowski, magister, Waršawa
Rakúsko	Prof. dr. Willi Flick, Univerzita Graz (pozorovateľ)	
Rumunsko	Zlate Bogdanov, profesor lýcea Nicolae Balcescu, Bukurešť	Florea Pasarica, prof., Bukurešť
SSSR	Prof. Viktor Josifovič Levin, doktor fyz. mat. vied, Moskva	Ivan Semjonovič Pettrakov, inšpektor-metodik, Moskva
Švédsko	Prof. dr. Thomee Vidar, Göteborg	Dr. Ake H. Samuelsson, asist. Univer. Göteborg

Tabuľka 2
Počty získaných bodov

Krajina	Počet bodov žiaka č.								Celkový počet bodov
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Anglicko	40	20	18	30	22	18	24	21	193
Belgicko	5	5	10	10	3	5	3	16	57
Bulharsko	25	28	28	20	21	22	22	23	189
ČSSR	13	25	28	14	20	20	28	22	170
Francúzsko	30	4	8	10	22	13	14	18	119
Holandsko	4	15	9	12	1	0	6	4	51
Juhoslávia	22	17	25	30	32	27	10	18	181
Maďarsko	31	34	40	24	35	25	37	21	247
Mongolsko	21	13	13	17	17	10	25	4	120
NDR	35	35	36	29	32	24	25	24	240
Poľsko	34	7	18	9	20	10	13	8	119
Rumunsko	15	37	30	27	21	31	28	30	219
SSSR	40	30	24	27	32	27	21	30	231
Švédsko	10	16	14	8	11	16	9	12	104

Tabuľka 3
Prehľad udelených cien

Krajina	Počet získaných cien			Celkom
	I.	II.	III.	
Anglicko	1	1	1	3
Belgicko	0	0	0	0
Bulharsko	0	0	3	3
ČSSR	0	0	3	3
Francúzsko	0	1	0	1
Holandsko	0	0	0	0
Juhoslávia	0	2	2	4
Maďarsko	1	4	2	7
Mongolsko	0	0	1	1
NDR	0	4	4	8
Poľsko	0	1	0	1
Rumunsko	0	4	2	6
SSSR	1	3	3	7
Švédsko	0	0	0	0
Celkom	3	20	21	44

Tabuľka 4
Prehľad výsledkov československého družstva

Por. čis.	Meno žiaka	Škola a trieda	Počet bodov za rieš. úl. č.						Spolu bodov	Cena
			1	2	3	4	5	6		
1.	Pavol Černek	SVŠ J. Hronca, Bratislava, 2. r.	2	4	2	3	2	0	13	—
2.	Petr Hadrava	SVVŠ Praha, W. Piecka, 3. r.	2	5	4	6	7	1	25	III.
3.	Tomáš Mašek	SVVŠ Praha, W. Piecka, 3. r.	5	7	7	1	7	1	28	III.
4.	Štefan Sakáloš	SVŠ V. B. N., Prievidza, 1. r.	0	7	6	1	0	0	14	—
5.	Bohuš Sivák	SVŠ Zvolen, 3. r.	5	7	7	0	0	1	20	—
6.	Rudolf Švarc	SVVŠ Plzeň, 2. r.	5	5	4	2	0	4	20	—
7.	Jiří Vinárek	SVVŠ Praha, W. Piecka, 3. r.	5	2	1	6	6	8	28	III.
8.	Miloš Zahradník	SVVŠ Tanvald, 3. r.	0	5	4	4	6	3	22	—
Celkom			27	39	35	23	28	18	170	

<i>Předmluva</i>	3
<i>I. O průběhu XVIII. ročníku matematické olympiády</i>	9
<i>II. Přípravné úlohy I. kola</i>	29
1. Kategorie A	29
2. Kategorie B	35
3. Kategorie C	44
4. Kategorie D	50
<i>III. Soutěžní úlohy I. kola</i>	57
1. Kategorie A	57
2. Kategorie B	69
3. Kategorie C	78
4. Kategorie D	89
<i>IV. Soutěžní úlohy II. kola</i>	96
1. Kategorie A	96
2. Kategorie B	107
3. Kategorie C	117
4. Kategorie D	124
<i>V. Úlohy III. kola kategorie A</i>	129
<i>VI. Jedenáctá mezinárodní matematická olympiáda</i>	147

Edice Pomocné knihy pro žáky
Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Vlastimil Macháček, Jiří Mída a dr. Jozef Moravčík, CSc.

OSMNÁCTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1970 — Počet stran 181
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk
Technická redaktorka: Jana Dostálová

Vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 4, Ostrovní 30, Praha 1.
AA 6,99 (6,01 AA textu, 0,98 AA grafiky) — VA 7,37 — Náklad
6 550 výtisků — Tematická skupina a podskupina 03/2 — Cena
brožovaného výtisku Kčs 9,50
505/21, 852

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha jako svou
publikaci č. 05—0—06

14-375-70 Kčs 9,50

matematická
olympiáda



SPN 05-0-06

14-375-70

03/2 Kčs 9,50