

19. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 19. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1969-1970. 12. Mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404593>

Terms of use:

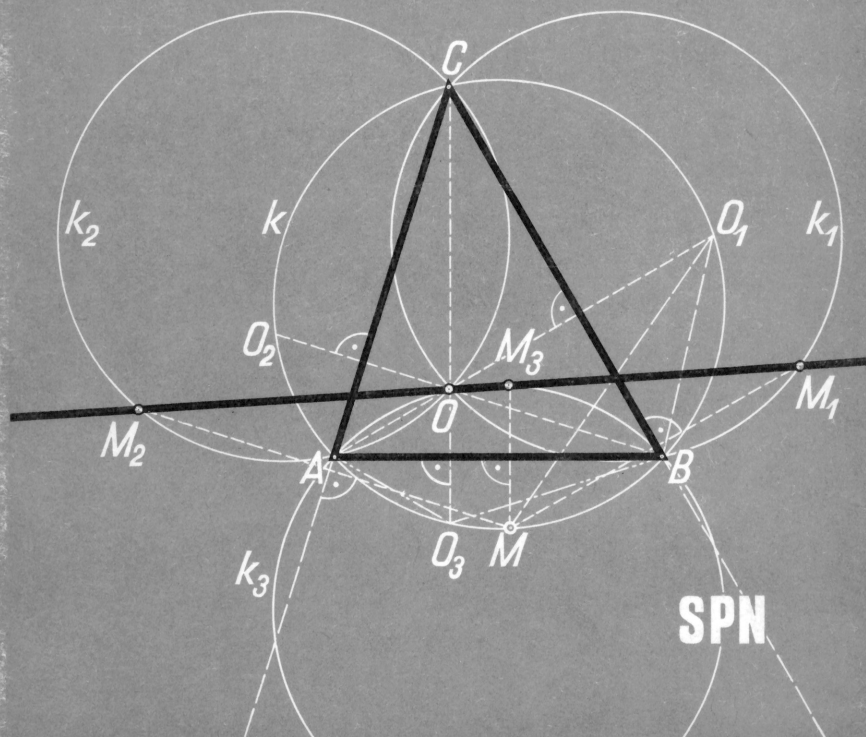
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 66 01 - 8

XIX. ročník matematické olympiády



SPN

DEVATENÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva a řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1969—1970*

DVANÁCTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 66 01 - 3

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Vlastimil Macháček, Jiří Mida a dr. Jozef Moravčík, CSc.

Slovenské části textu přeložil dr. Jozef Moravčík, CSc.

Recenzovali Jitka Kučerová a dr. Miroslav Šisler, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, 1971

Předmluva

Milí přátelé, účastníci a příznivci matematické olympiády,

v době vydání této brožury máme za sebou již jubilejní XX. ročník domácí celostátní olympiády a XIII. mezinárodní olympiádu, která se konala v r. 1971 v Slovenské socialistické republice; byla to druhá z mezinárodních matematických olympiád, která proběhla na území našeho státu.*)

Dvacet let domácí olympiády i třináct mezinárodních olympiád se stále rostoucím počtem účastnických zemí potvrzuje, že zájem o soutěžení v matematice u žáků, studentů i u jejich učitelů je stále živý a snad nikdy neuhasne. A současná společnost tento zájem opravdu velice potřebuje, neboť je třeba stále víc a více matematicky školených mladých lidí. Ve Spojených státech amerických odhadli, že potřeba profesionálů-matematiků vzroste během desetiletí 1965 až 1975 čtrnáctkrát; v téže době vzroste potřeba fyziků jen třikrát, inženýrů dokonce jen dvakrát. Domníváme se, že v socialistických státech jistě nebude potřeba matematicky vzdělaných lidí menší.

Tato situace — jazykem ekonoma můžeme říci stupňovaná poptávka všech možných odvětví lidské činnosti po

*) Poprvé se konala v ČSSR mezinárodní matematická olympiáda (čtvrtá) v r. 1962 při příležitosti stého výročí založení Jednoty čs. matematiků a fyziků, a to v Jihočeském kraji.

matematicích vyžaduje, aby se rozvíjely nejen špičkové talenty a jedinci nejnadanější, ale aby se věnovala zvýšená pozornost matematickému vzdělávání co nejširšího okruhu mladých lidí. Na tento úkol nestačí a asi nikdy nebude stačit škola: zde musí a budou musit pomáhat různé formy mimoškolní činnosti; mezi nimi jsou na neposledním místě žákovské soutěže, jakou je např. naše matematická olympiáda.

Účastnit se s úspěchem soutěže, to znamená umět aspoň trochu samostatně a tvořivě pracovat. Také v tomto směru nemůže dát škola žákům vše, co by potřebovali. Aktivitu a samostatnost získáte spíše v zájmových kroužcích, seminářích, prázdninových soustředěních, ale hlavně studiem odborné literatury přiměřené vašemu věku, vašim schopnostem a předchozímu matematickému vzdělání.

Milí účastníci celostátní matematické olympiády, my všichni, kteří tuto soutěž připravujeme, cítíme velmi bolestně nedostatek vhodné studijní literatury pro vás. Je nepříjemná pravda, že je velmi těžké psát o matematice populárně — ale správně, zábavně — i obsahově bohatě a poučně. Máme málo vhodných článků v Rozhledech, které by se hodily pro individuální studium a vedly k samostatné práci. V naší knižnici *Škola mladých matematiků* (*ŠMM*) vyšla sice již řada svazečků; některé z nich jsou psány skutečně pracovní formou. Najdete tu svazečky, o nichž říkáme, že patří do „základní řady“, tj. pojednávají zhruba jen o tématech školské matematiky. Najdete tu však také svazečky tzv. „výběrové řady“, které jsou psány náročněji, spíše výkladovou formou a které svými tématy už přesahují okruh středoškolské matematiky. Ale to všechno nestačí. Svazečků je poměrně málo, většina z nich je jen v několika exemplářích ve školních knihovnách, mladí čtenáři tu takřka nenajdou takové jednoduché a stručné texty, jaké vydávala před časem

Jednota čs. matematiků a fyziků ve své sbírce *Brána k vědě*. Nedostatek hodnotné a přístupné studijní matematické literatury pro mládež, speciálně pro účastníky olympiád, pociťují už delší dobu i v jiných státech. Již v r. 1963 při V. mezinárodní olympiádě konané v Polsku vystoupila jugoslávská delegátka s návrhem na jakousi kooperaci socialistických států v této oblasti. Navrhovala, aby významní matematici — popularizátoři nebo pedagogové z těchto zemí psali studijní texty pro žáky. Texty by se pak přeložily do národních jazyků a vydaly ve všech socialistických státech. Bohužel tento dobrý návrh, přijatý všemi delegáty se sympatiemi, zůstal až dosud na papíře.

Uvědomte si, že studovat matematický text je podstatně více než jej číst; umění studovat matematický text se musíte učit. V tomto směru jsou asi dále žáci experimentálních škol (ZDŠ i gymnasií); ti jsou více vedeni ke studiu pokusných textů, než žáci ostatních škol, kteří se učí tradiční matematice tradičním způsobem a z tradičních učebnic. Zato však žákům pokusných tříd málo vyhovují nynější témata soutěžních úloh a bude asi pro ně třeba pořádat jakousi „modernizovanou“ olympiádu.

Udělejme bilanci toho, co je v oblasti studijní literatury k dispozici a co je třeba udělat nebo zlepšit. Pro vás to bude zároveň jistý přehled pramenů ke studiu.

1. Bylo až dosud vydáno 19 brožur *MO*; každá z nich referuje o jednom ročníku *MO*, obsahuje texty a řešení všech úloh (přípravných i soutěžních) příslušného ročníku, popřípadě i texty a řešení úloh mezinárodní olympiády určitého roku. Protože brožury, hlavně starších ročníků, jsou většinou rozebrány a protože autorská řešení mnohých úloh nejsou metodicky právě nejlepší, neukazují totiž čtenářům „jak na to“, sestavili pracovníci *MO* tři sborníky úloh, a to první pro kategorii *Z* (ZDŠ), druhý pro kategorie *B* a *C* (1. a 2. ročník gymnasií a průmyslo-

vých škol, třetí pro kategorii *A* (3. a 4. ročník gymnasií a průmyslových škol); v tomto sborníku budou i některé úlohy z *MMO*. První sborník už vyšel, druhý a třetí vyjde v nejbližší době.

2. V knižnici *Škola mladých matematiků (ŠMM)*, vydávané nakladatelstvím *Mladá fronta*, vyšlo až dosud 27 svazeků. Z nich do základní, elementárnější řady patří 20 svazků, ostatní tvoří řadu výběrovou.

Seznam svazků najdete na konci této brožury. Většinou si je ovšem budete musit vypůjčit ve školní knihovně.

3. Těžko dostupné, ale velmi užitečné by vám byly *pokusné texty experimentálních ZDŠ i gymnasií*. Tyto texty mají formu skript, vydává je *Kabinet pro modernizaci vyučování matematice* v Praze 1, Krakovská 10, rozmnožuje je středisko *ŽČSMF* v Brně. Tyto texty obsahují řadu zajímavých úloh s moderní tematikou, zčásti s řešeními, zčásti bez řešení. Nejsnáze si je vypůjčíte na některé experimentální škole; seznam škol i seznam dosud vydaných pokusných textů je na konci této brožury.

4. V populární matematické literatuře starší i novější je řada knížek, vhodných pro vaše studium. Pokud nejsou k dostání na knihkupeckém trhu (a to je obvyklé), najdete je ve školních knihovnách nebo u starších kamarádů. Zejména bychom chtěli znovu upozornit na sovětskou *sbíрку řešených úloh z matematických olympiád*, kterou sestavil *Lidskij a kolektiv*. Tato sbírka byla přeložena do češtiny. Také seznam těchto publikací je na konci brožury.

5. Projděte staršími ročníky studentského matematického časopisu *Rozhledy*; v nich najdete řadu vhodných a zajímavých článků. Zahraniční studenti mnohem více čtou své matematické časopisy než naši. Můžeme říci, že leckde si takový časopis „dělají sami“, tj. že starší studenti do něho i píší krátké články a posílají originální úlohy i jejich řešení. Toho druhu je např. americký studentský časopis

The Mathematics Student Journal. Tak by tomu mělo být i u nás.

6. Zvláště rádi bychom upozornili na *cizojazyčnou*, zejména *ruskou literaturu*. Studenti gymnasií by měli umět z ruštiny tolik, aby po osvojení základů ruské matematické terminologie mohli číst sovětskou žakovskou matematickou literaturu. V SSSR vydali mimo velkou řadu sbírek úloh a svazečků populární literatury např. *Sborník úloh z mezinárodních matematických olympiád*. Vydávají, tak jako v jiných socialistických státech, letáky, které obsahují texty úloh běžného ročníku *MO*. Domníváme se, že ledacos z těchto publikací i z obdobných publikací ostatních socialistických států najdete v knihovnách, zejména v knihovnách gymnasií a pedagogických fakult. Pro vaši informaci je na konci této brožury uveden přehled některých vhodných knih.

Co bychom chtěli zlepšit v oblasti studijní literatury?

1. V knižnici *ŠMM* by měly vycházet svazečky, psané zcela elementárně, pojednávající o jednoduchých a nenáročných tématech; tyto svazečky by byly určeny nejmladším účastníkům *MO* (15—16letým).

2. Bude třeba intenzivnější styk s redakcí časopisu *Rozhledy*. Půjde o to ovlivnit redakci, aby uveřejňovala některé vhodné texty koncipované nikoli jako naučné články, ale jako podklady pro samostatné studium; čtenáři by měli dostávat impulsy pro jakousi „laboratorní práci“ v matematice. Dále by *Rozhledy* měly přinášet překlady nebo volné zpracování význačných prací a úloh ze zahraničních studentských časopisů.

3. Bude třeba vydávat další původní nebo přeložené *sbírky řešených úloh*. Zejména by se měly vydat texty a řešení úloh, které se uplatnily při školení žáků pro *MMO* nebo při prázdninových soustředěních. Studium mate-

matiky ovšem není jen řešení úloh, je třeba také studovat teorii. Počítáme, že úspěšné přednášky z prázdninových soustředění vyjdou jako zvláštní svazky ŠMM.

4. V minulých ročnících jsme začali rozmnožovat pro kategorie B a Z *komentáře k řešení úloh I. kola*; v této činnosti hodláme pokračovat. Snad tím trochu pomůžeme při odpovědích na věčnou otázku „*jak na to?*“, aniž bychom prozrazovali řešitelům předčasně řešení. Během času by se z těchto komentářů mohla sestavit jakási metodika řešení úloh pro žáky.

5. Zlepšení v oblasti studijní literatury předpokládá ovšem lepší podmínky organizačně administrativní a ekonomické. Mínilme tím větší pružnost a ochotu polygrafického průmyslu a větší volnost v distribuci, aby se tak většina publikací dostala do volného prodeje.

Jak vidíte, pokusili jsme se v předmluvě k letošní brožůře trochu analyzovat otázku samostatného studia literatury a říci, co v tomto směru dělají pracovníci olympiády. Páli bychom si, aby se naše snahy setkaly s pochopením školské správy, vydavatelství, polygrafického průmyslu a ovšem hlavně vás, účastníků MO, a vašich učitelů. Vaše kritické a podnětné hlasy jsou vítány, ve vaší úspěšné práci, zejména při studiu pomocné literatury, vám přejeme co nejvíce zdaru!

Ústřední výbor MO

I. O průběhu XIX. ročníku matematické olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Pořadatelem soutěže XIX. ročníku byla *ministerstva školství ČSR a SSR s Matematickým ústavem ČSAV v Praze (MÚ ČSAV) a jednotou čs. matematiků a fyziků (JČSMF)*. Také XIX. ročník se řídil statutem, uveřejněným ve *Věstníku MŠK*, roč. XIX, str. 126, 127, směrnice 37 ze dne 30. IV. 1963.

Soutěž řídil opět *ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO)*, v krajích nebo oblastech pak *krajské výbory matematické olympiády (KV MO)* a v okresech *okresní výbory matematické olympiády (OV MO)*; také v těchto výborech jsou zastoupeny pořadatelské složky.

Žáci poprvé soutěžili jen ve třech kategoriích: v kategorii *A* žáci III. a IV. ročníků škol II. cyklu, v kategorii *B* žáci I. a II. ročníků škol II. cyklu a v kategorii *Z* žáci 9. ročníků *ZDŠ*. Bylo ovšem možné, aby žák soutěžil i v kategorii vyšší, než do které studijně patří; toho využila řada žáků především v kategorii *A*.

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Ministerstva školství ČSR i SSR prodloužila funkční období *ÚV MO* jmenovaného v roce 1966 do konce roku 1970 s tím, že byli kooptováni další zástupci těchto

ministerstev a jednotlivých stupňů škol z ČSR i SSR.
Během XIX. ročníku pracoval ÚV MO v tomto složení:
Předseda: *Jan Vyšín, CSc.*, docent matematicko-fyzikální fakulty KU v Praze

Místopředseda: *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.*, vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Místopředseda za Slovensko: *dr. Jozef Moravčík, CSc.*, odb. asistent VŠD v Žilině

I. jednatel: *Vlastimil Macháček*, odb. asistent pedagogické fakulty KU v Praze.

II. jednatel: *Jiří Mída*, odb. asistent pedagogické fakulty KU v Praze

Členové: *dr. František Běloun*, vedoucí matematického kabinetu Krajského pedagogického ústavu v Praze

dr. Juraj Bosák, CSc., Matematický ústav SAV v Bratislavě

dr. Jaroslav Fuka, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

František Hradecký, odborný asistent matematicko-fyzikální fakulty KU v Praze

prof. dr. Karel Hruša, vedoucí katedry matematiky pedagogické fakulty KU v Praze

prof. dr. Milan Kolibiar, CSc., profesor přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě

Ladislav Krkavec, ústřední inspektor MŠ ČSR

Jiří Leiss, ústřední inspektor MŠ ČSR

akademik Josef Novák, vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

dr. Jiří Sedláček, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Jiří Šídlo, zástupce ředitele SVVŠ, Nad štolou, Praha 7

Miloslav Šmerda, učitel ZDŠ, Bílovice n. Svitavou

František Veselý, profesor v. v. v Praze

dr. František Zítek, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

prof. dr. Miloslav Zedek, prof. přírodovědecké fakulty university Palackého v Olomouci

Michal Zöldy, ústřední inspektor MŠ SSR

Dalšími členy ústředního výboru matematické olympiády jsou předsedové krajských výborů matematické olympiády:

prof. dr. Václav Pleskot, profesor ČVUT v Praze

dr. Václav Vilímek, docent katedry matematiky a deskriptivní geometrie strojní fakulty ČVUT v Praze

Marie Štěpánková, odborná asistentka katedry matematiky Vysoké školy zemědělské v Českých Budějovicích

Karel Hnyk, odborný asistent Pedagogické fakulty v Ústí nad Labem

Věra Rádlová, profesorka SVVŠ J. Fučíka v Plzni

Jan Laštovka, vedoucí kabinetu matematiky Krajského pedagogického ústavu v Pardubicích

Petr Benda, odborný asistent VUT v Brně

Josef Andrys, docent Pedagogické fakulty v Ostravě

dr. Ladislav Berger, odborný asistent katedry matematiky Vysoké školy dopravní v Žilině

Vladimír Jodas, odb. asistent, přír. fak. Komenského university v Bratislavě,

Kveta Hončarivová, odborná asistentka přírodovědecké fakulty v Košicích (zastupovala dr. Jána Černého, CSc., docenta přírodovědecké fakulty v Košicích, který t. č. pobýval studijně v cizině)

Náhradník: *dr. Miroslav Šisler, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze*

Pracovní předsednictvo ÚV MO (PÚV MO) tvoří (uvedeno v abecedním pořadí):

Prof. dr. M. Fiedler, DrSc.; dr. J. Fuka, CSc.; V. Macháček; J. Mída; dr. J. Moravčík, CSc.; akademik J. Novák; dr. J. Sedláček, CSc.; doc. J. Vyšín, CSc.; dr. F. Zítek, CSc.; zástupci MŠ L. Krkavec a M. Zöldy.

Podle usnesení plenárních schůzí ÚV MO byl vypracován návrh nového statutu MO i návrh složení nového ÚV MO, který byl postoupen prostřednictvím Ústředního výboru JČSMF oběma MŠ k dalšímu projednání, aby byla zajištěna kontinuita pořádání soutěže.

3. SCHŮZE ÚV MO

Také během XIX. ročníku se sešel ústřední výbor MO dvakrát. *První plenární schůze* se konala v Praze dne 4. a 5. prosince 1969. Mimo obvyklé hodnocení uplynulého, tj. XVIII. ročníku, se diskuse zabývala příčinami poklesu počtu účastníků a problémem návaznosti úloh v jednotlivých kolech soutěže. Bylo usneseno zřídit tři komise, které by vypracovaly „modely“ soutěže (pro kategorii *A* *Fr. Hradecký, J. Šídlo, E. Calda*, pro kategorii *B* *dr. Vlachynský, doc. Bosák, Vlad. Jodas* a pro kategorii *Z* *M. Šmerda, O. Černý a O. Štefík*). Kladně bylo hodnoceno *prázdninové soustředění úspěšných řešitelů kategorie B v Pardubicích* a projednáno zajištění *III. kola soutěže v Košicích*. Byla navržena úprava vyplácení odměn autorům přijatých úloh v konkursu JČSMF (viz samostatná zpráva). Jednáno bylo též o potížích s vydáváním vybraných řešených úloh z MO. MŠ SSR vyslovalo souhlas s pořádáním *XIII. MMO na Slovensku v roce 1971*; byly zvoleny komise pro přípravu statutu této MMO. Na návrh *akademika Nováka* byl požádán o předsednictví přípravného výboru *XIII. MMO akademik Schwarz*, který také tuto funkci přijal. Byl projednán též návrh na složení tohoto výboru. Byla ustavena

i komise pro přípravu materiálů k XX. výročí naší MO a pro XIII. MMO. Na závěr jednání byly projednány úpravy návrhu statutu naší celostátní MO, do něhož má být včleněno i ustanovení *Ceny R. Zelinky za práci v MO*.

Druhá plenární schůze se konala ve dnech 17. a 18. dubna 1970 v *Košicích* u příležitosti III. kola MO kategorie A.

Obsáhlé jednání se týkalo především budoucnosti MO; ukázalo se, že obě ministerstva se ještě neshodla na jmenování nového ÚV MO a tak byl podán návrh, aby se funkční období dosavadního ÚV MO prodloužilo ještě jednou, a to do 31. XII. 1970. Neujasněná však zůstala koncepce organizačního zajištění budoucích ročníků MO. Kromě dalších organizačních otázek byly stanoveny termíny pro XX. ročník MO.

Doc. Benda podal referát o přípravě materiálů do brožury o jubileu MO.

ÚV MO schválil návrh statutu na XIII. MMO po řadě doplňků.

Projednáno bylo i zajištění přípravného soustředění žáků pro XII. MMO ve *Štítně* i úspěšných řešitelů kategorie B v *Martině*. Schválení byli i recenzenti „modelů MO“, které byly připraveny komisemi stanovenými v minulém zasedání ÚV MO.

4. PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

a) *Studijní I. kolo* proběhlo v první etapě tzv. přípravných úloh od září do konce listopadu 1969; jejich řešení opět nebyla klasifikována a nebyla ani podmínkou dalšího postupu. Soutěžní část I. kola měla v kategorii A konečný termín odevzdání úloh 15. I. 1970, v kategorii B (spojené býv. B a C) 15. března a kategorie Z 28. února 1970. V kategoriích A a B v soutěžních úlohách měli žáci

možnost volby úloh, a to čtyř ze šesti, uspořádaných ve dvě trojice. Úspěšným řešitelem byl pak vyhlášen ten žák, který vyřešil správně nebo v podstatě správně (klasifikace 1 a 2) aspoň tři úlohy; přitom mezi těmito úlohami musela být zastoupena každá z trojic aspoň jednou úlohou.

Z *tabulky 1* v porovnání s obdobnými tabulkami z minulých ročníků je vidět jednou *opět* *vzrůst* počtu účastníků i úspěšných řešitelů v kategorii *A*. Bohužel, v kategorii *B*, tj. spojené bývalé *B* a *C*, je značný pokles; ubylo především účastníků z I. ročníků, jak je vidět např. ze seznamu úspěšných řešitelů II. kola v *příloze A*. Otázka spojení obou kategorií bude zřejmě ještě podrobně prodiskutována na plenárním zasedání *ÚV MO*.

V kategorii *Z* se v I. kole rovněž projevil vzrůst počtu účastníků i úspěšných řešitelů.

b) *Klauzurní II. kolo* proběhlo opět v různých termínech: v kategorii *A* se konalo v sobotu 7. března, v kategorii *B* 25. dubna a v kategorii *Z* dne 8. března 1970. Tato volba termínů umožnila opět zúčastnit se řadě žáků dvou kategorií; pro kategorii *B* však termín z konce dubna byl příliš pozdní a ztěžoval výběr účastníků pro soustředění úspěšných řešitelů kategorie *B* v Martině. Výběr úloh i jejich bodování byly v kategoriích *A* a *B* obdobně určeny jako v XVIII. ročníku. Z hlediska výsledků je možno v kategorii *A* opět jako v I. kole zaznamenat vzestup, a to dost značný. Počet účastníků soutěže II. kola v kategorii *B* odpovídá poklesu účastníků I. kola. Pokud se týká počtů úspěšných řešitelů, je jejich počet vzhledem k počtu účastníků relativně lepší než v XVIII. ročníku, kdy hlediska bodovací byla však velmi přísná.

V kategorii *Z* se i ve druhém kole projevil vzestup počtu účastníků i úspěšných řešitelů.

Jistě na vzestupu počtu účastníků i úspěšných řešitelů mají vliv komentáře, které byly k řešením úloh kate-

gorie *Z* pořízeny; v jejich vydávání pro učitele bude dále *ÚV MO* pokračovat.

Závěrečné celostátní III. kolo soutěže v kategorii *A* se konalo 17. a 18. dubna 1970 v *Košicích*. Tentokrát byl i počet navržených žáků a žákyň od *KV MO* vyšší, tj. 70, než v *XVIII. ročníku*. Po koordinaci klasifikace žákovských řešení ve *II. kole* pozvalo *PÚV MO* celkem 36 žáků a 8 žákyň k soutěži *III. kola*.

Soutěž proběhla již po druhé ve dvou dnech formou, jakou se soutěží na mezinárodních matematických olympiádách. Každý den řešili soutěžící tři úlohy ve čtyřech hodinách, přičemž jim bylo oznámeno bodové ohodnocení za úplná řešení úloh; texty a řešení těchto úloh jsou uvedeny na str. 124.

Nejvyšší dosažitelný počet bodů byl čtyřicet. Po opravě řešení byly stanoveny hranice pro vítěze (aspoň 25 bodů) a úspěšné řešitele (aspoň 17 bodů). *Seznam vítězů a úspěšných řešitelů* je uveden v příloze *B*; všichni uvedení byli odměněni od *MŠ ČSR* a *MŠ SSR* a obdrželi diplomy. Všem vysokým školám byl zaslán jejich seznam, aby přijímací komise mohly vzít zřetel při zkoušce z matematiky na úspěšné umístění uchazeče v závěrečném kole *MO*.

Do přípravného soustředění na *XII. MMO v Budapešti* byli do *Štírína* na dobu od 21. do 27. června 1970 povoláni nejlépe umístění žáci s přihlédnutím k ročníku, v němž studují. Na konec bylo vybráno družstvo, jehož jmenný seznam je ve zprávě o *XII. MMO* (str. 143).

5. POMOCNÉ AKCE

Podle zpráv z *KV MO* byly i v *XIX. ročníku* pořádány ve spolupráci s pobočkami *JČSMF* různé přednášky a školení pro *MO*, především v kategoriích *B* a *Z*. Pro kategorii *A* mělo školení ráz přípravy na mezinárodní mate-

matickou olympiádu a probíhalo podle sylabů, které připravili:

- a) *dr. Jaroslav Fuka, CSc.*: Odhady součtů, posloupností a nerovností;
- b) *dr. Jozef Moravčík, CSc.*: Úlohy z MMO (algebra);
- c) *dr. Milan Koman, CSc.*: Geometrické úlohy z MMO.

Souběžně s prvním tématem vedl v Praze *dr. P. Liebl* z MÚ ČSAV ještě kroužek, který postupoval podle knížky *Rudolfa Výborného Matematická indukce*, která byla vydána v edici ŠMM.

Podle uvedených materiálů probíhala *příprava na MMO* v následujících střediscích: *Praha, Plzeň, Bratislava, Košice, Žilina, Ostrava*. Zvláště úspěšná byla práce kroužku v Bratislavě, který vedl *dr. I. Korec, CSc.*, neboť 14 účastníků z tohoto kroužku se dostalo až do III. kola kategorie A v Košicích.

Další celostátní akcí bylo *soustředění úspěšných řešitelů v Martině*, které se konalo od 19. 6. do 3. 7. 1970. Již druhý rok byli účastníci rozděleni do tří tříd: *matematické, fyzikální a matematicko-fyzikální*. Toto rozdělení bylo celkem rovnoměrné a odpovídalo převážně zájmu jednotlivých žáků.

V *matematické třídě* přednášeli:

- a) *dr. Jaroslav Morávek, CSc.*: O dynamickém programování (14 hodin)
- b) *dr. Ivan Korec*: Úlohy matematické olympiády (16 hodin)
- c) *doc. dr. Lev Bukovský, CSc.*: Úlohy řešené pomocí jisté extrémální vlastnosti (6 hodin)
- d) *doc. dr. Milan Hejný, CSc.*: Geometrická zobrazení z vyššího hlediska (12 hodin)
- e) *dr. František Zítek, CSc.*: Soustavy mnohočlenů (16 hodin)

Ve *třídě matematicko-fyzikální* byly matematické před-

nášky uvedené v programu matematické třídy pod body a), b) a c).

Fyzikální přednášky ve třídě matematicko-fyzikální a ve třídě fyzikální zajišťoval ÚV FO.

6. STUDIJNÍ LITERATURA

Letáky s úlohami pro kategorie *A* a *B* byly vydány *Státním pedagogickým nakladatelstvím v Praze* v nákladu 5 000 kusů pro ČSR i SSR společně, kdežto leták pro kategorii *Z* vyšel jak česky tak i samostatně slovensky v počtu odpovídajícím potřebě každé z republik. Obvyklým způsobem byly texty úloh naší celostátní *MO* i texty a řešení úloh z *MMO* publikovány v časopisech *Matematika ve škole* a *Rozhledy matematicko-fyzikální*.

V nakladatelství *Mladá fronta* vyšly v roce 1970 další svazky edice *Škola mladých matematiků*:

č. 25 *Lev Bukovský — Igor Kluvánek*: Dirichletov princip

č. 26 *Karel Hruša*: Polynomy v moderní algebře

č. 27 *Stanislav Horák*: Mnohostěny

V dalším vydání vyšel svazek č. 8, *Jiří Váňa*: O rovnicích s parametrem.

Po obtížích, které se v průběhu roku 1969 objevily, podařilo se zajistit další vydávání *ŠMM* i sestavit výhledový plán publikací pro další léta.

7. KONKURS JČSMF NA NÁVRHY ÚLOH PRO MO

Tento časově neomezený konkurs vyhlásila *Jednota československých matematiků a fyziků* již v roce 1966. Od jeho zveřejnění do 1. XII. 1970 bylo zasláno celkem 605 úloh od 69 autorů. Recenzní řízení bylo ukončeno

u 591 úlohy, z nichž 368 bylo přijato. Z těchto přijatých úloh bylo v *MO* už užito 235. Např. v XIX. ročníku *MO* bylo celkem zadáno 50 úloh, z nichž 46 bylo z konkursu. Také československá úloha zadaná na XII. mezinárodní *MO* v Budapešti byla získána v konkursu.

Podmínky konkursu byly již několikrát uveřejněny, ale pro zájemce je znovu připomínáme.

Text a řešení každé úlohy je třeba zaslat napsané na listu formátu *A4* (vždy originál a jeden opis) na adresu: Ústřední výbor matematické olympiády, Praha 1 - Nové Město, Žitná 25. Za každou přijatou úlohu je vyplácena odměna ve výši 50 Kčs v kategoriích *A*, *B* a 30 Kčs v kategorii *Z*. Při recenzi se přihlíží k původnosti úlohy a odměna může být případně zvýšena, např. přijaté úlohy, s nimiž se počítá, že budou na některé *MMO* předloženy jako čs. návrh, jsou odměňovány částkou 80 Kčs. Odměny za přijaté úlohy vyplácí od roku 1970 autorům z ČSR *ŤČMF* a autorům ze SSR *ŤSMF*. Úlohy, které neprojdou úspěšně konkursním řízením, se autorům vrací. Přijaté úlohy jsou zařazeny do archívu *ÚV MO*. Vyplácením odměny autorovi získává *ÚV MO* dispoziční právo, zejména upravit text úlohy i autorská řešení a použít úlohy pro účely *MO* podle vlastní volby. Autor samozřejmě na sebe bere závazek, že přijatou úlohu utají, aby průběh olympiády nebyl narušen.

Díky konkursu získal *ÚV MO* sice řadu nových spolupracovníků, avšak potřeboval by další. Počet autorů úloh *MO* by měl být co největší, neboť jedině tak je možno dosáhnout toho, aby problémy zadávané k řešení v úlohách *MO* byly pro žáky skutečně přitažlivé a dále aby v *MO* byly pokud možno zastoupeny rovnoměrně všechny partie středoškolské matematiky. Problémům okolo výběru úloh pro *MO* byl v 10. čísle XX. ročníku (1969/70) časopisu *Matematika ve škole* věnován článek „O konkursu na úlohy pro *MO*“ od *Ť. Mídy*.

Příloha A

POŘADÍ ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ II. KOLA KATEGORIE B V XIX. ROČNÍKU MO

(pokud není uveden typ školy, jde o gymnasium,
resp. SVVŠ)

Praha - město

Pavel Dušek, Andrej Kugler, Helena Husová, Vladimír Burda, Ladislav Půst, Jiří Dominec, Eduard Kučera, Antonín Lešanovský a Richard Nykl, všichni 2g, Praha 2, W. Piecka; Miroslav Sůra 2b, Praha 6, Arabská ul.

Středočeský kraj

Jiří Doskočil, 2. roč. Poděbrady; Jiří Frýda, 2. roč. Kladno; Jindřich Kareš, 1. roč., Říčany.

Jihočeský kraj

Jarmila Voldřichová, 2. roč., Vimperk; Karel Horák, 1. roč., Strakonice; Pavel Kindlman, 9. roč. ZDŠ, Jirovcova ul., České Budějovice; Václav Kubant, 2. roč., Tábor; Ludmila Hlaváčová, 1. roč., Strakonice.

Západočeský kraj

Magda Fořtová, Stanislav Hála, oba 1. roč. spec.; Zdenka Černá, Václav Vacovský, oba 2. roč. spec.;

Blanka Hnilicová, 1. roč. spec.; Karel Fliegel a Tomáš Beneda, oba 2. roč. spec., všichni gymnasium Julia Fučíka v Plzni.

Severočeský kraj

Jasna Lupoměchová, 2. roč., Frýdlant v Č.; Karel Hájek, 2. roč., Liberec; Jiří Svoboda, 1. roč., Teplice; Jaroslav Klápště, 2. roč., SPŠ stroj. v Liberci.

Východočeský kraj

Jaroslav Kubík, 2. roč., Hradec Králové, Tylovo ná-
břeží; Daniel Dvorský, 2. roč., Vysoké Mýto; Jiří Žák,
2. roč., Česká Třebová; Michal Resl, 2. roč., Turnov;
Jiří Dohnal, 2. roč., Hradec Králové, Tylovo ná-
břeží; Zdenka Moravcová, 1. roč., Rychnov n. Kněžnou; Ludvík
Bartošek a Igor Koropecský, 1. roč., Pardubice, Na Spo-
řilově; Michaela Čermáková, 2. roč., Semily.

Jihomoravský kraj

a Brno - město

Jiří Němec a Václav Holý, 2. roč., Brno, Křenová ul.;
Jaromír Kuben, 2. roč., Prostějov (JKNV); Miloš Pa-
leček, Vladimír Škoda a Petr Firbas, 2. roč., Brno, Kře-
nová ul.; Vladimír Němeček, 2. roč., Kroměříž (JKNV);
Pavel Šandera a Ladislav Ptáček, 2. roč., Brno, Křenová
ul., Karel Sázel, 2. roč., Kroměříž (JKNV).

Severomoravský kraj

Jiří Ivánek, 2. roč., Nový Bohumín; Milan Menšík,
2. roč., Ostrava 1; Tomáš Homola, 2. roč., Olomouc-Hej-
čín; Tadeusz Feruga, 1. ročník, Český Těšín, Havlíč-
kova 13; Věra Jalůvková a Jan Segeta, oba 2. roč.,
Ostrava 1; Vladimír Tichý, 2. roč., Olomouc-Hejčín;

Igor Mačejovský a Eva Radková, 2. roč., Ostrava 1;
Jaroslav Švrček, 2. roč., Přerov.

Západoslovenský kraj

Karel Šafařík, Jan Franců a Anton Černý, 2. roč.,
J. Hronca, Bratislava, Novohradská ul.; Petr Visugi,
1. roč., Trenčín; Ladislav Mišík, Milan Lehocký, oba
1. roč., J. Hronca, Bratislava, Novohradská ul.; Petr
Škriečka, 1. roč., Trenčín; Roman Prokop a Pavol Ha-
nula, 2. roč., J. Hronca, Bratislava, Novohradská ul.

Středoslovenský kraj

Štefan Sakáloš, 2. roč., Prievidza; Anton Pištěk, 1. roč.,
Čadca; Imrich Vrto, 1. roč., Rimavská Sobota; Jaromír
Pleško, 1. roč., Martin; Jozef Tvarožek, 1. roč., Žilina;
Zdena Novotná, 2. roč., Turč. Teplice; Dušan Škrada,
2. roč., Lučenec.

Východoslovenský kraj

Karol Pelikán, 1. roč., Košice, Šrobárova ul.; Ján
Varga, 2. roč., Prešov, Tarasa Ševčenka; Peter Butkovič,
2. roč., Košice; Gedeon Mohr, 2. roč., Košice, Šrobá-
rova.

Příloha B

III. KOLO KATEGORIE A V XIX. ROČNÍKU MO

Vítězové

1. *Pavel Pudlák*, 3d, SVVŠ, Nad štolou, Praha 7
2. *Štefan Sakáloš*, 2d, SVŠ, Prievidza
3. *Rudolf Švarc*, 3f, SVVŠ J. Fučíka, nám. Odborářů, Plzeň
4. *Vladimír Černý*, 3b, SVŠ J. Hronca, Novohradská 3, Bratislava
5. *Helena Husová*, 2g, SVVŠ, ul. W. Piecka, Praha 2
6. *Miroslav Hradil*, 3f, SVVŠ, ul. W. Piecka, Praha 2
- 7.—9. *Anton Černý*, 2b, SVŠ J. Hronca, Novohradská 3, Bratislava
- 7.—9. *Jan Franců*, 2b, SVŠ J. Hronca, Novohradská 3, Bratislava
- 7.—9. *Jiří Tůma*, 3. roč. SVVŠ, Písek Bratislava
10. *Filip Gulda*, 3b, SVŠ J. Hronca, Novohradská 3, Bratislava
11. *Belo Zorkovský*, SVŠ, Šrobárova 46, Košice

Úspěšní řešitelé

12. *Jiří Šafařík*, 3b, SVŠ J. Hronca, Novohradská 3, Bratislava
- 13.—14. *Jiří Benda*, M3, SPŠ el., Koterovská ul., Plzeň
- 13.—14. *Ondřej Matouš*, 3f, SVVŠ, ul. W. Piecka, Praha 2

15. *Karol Šafařík*, 2b, SVŠ J. Hronca, Novohradská 3, Bratislava
16. *Pavol Černek*, 3b, SVŠ J. Hronca, Novohradská 3, Bratislava
- 17.—18. *Miloslav Handl*, 3f, SVVŠ, ul. W. Piecka, Praha 2
- 17.—18. *Michal Zajac*, 3b, SVŠ J. Hronca, Novohradská 3, Bratislava
19. *Ľaroslav Ramík*, 3a, SVVŠ, Ostrava I
20. *Miroslav Kmošek*, 1a, gymn., tř. kpt. Jaroše, Brno
21. *Ľaroslav Daniel*, 3a, SVVŠ, Moravské Budějovice
- 22.—24. *Alexander Kirschner*, 3a, SVŠ J. Hronca, Novohradská 3, Bratislava
- 22.—24. *Angela Leitmannová*, 3b, SVŠ J. Hronca, Novohradská 3, Bratislava
- 22.—24. *Zbyšek Stýblo*, 3c, SVVŠ, Arabská ul., Praha 6

Tabulka č. 1
Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Celkem		
	P	Z toho dívek	Ú	P	Z toho dívek	Ú	P	Z toho dívek	Ú
Praha-město	51	6	44	112	22	79	163	28	123
Středočeský	19	1	17	17	3	15	36	4	32
Jihočeský	24	4	24	45	14	45	69	18	69
Západočeský	12	2	12	31	10	22	43	12	34
Severočeský	55	15	42	77	37	40	132	52	82
Východočeský	56	13	55	71	21	69	127	34	124
Jihomoravský	138	24	106	173	30	126	311	54	232
Severomoravský	37	13	36	58	12	50	95	25	86
Západoslovenský	74	15	44	97	33	65	171	48	109
Středoslovenský	85	27	55	108	30	86	193	57	141
Východoslovenský	14	2	12	53	10	15	67	12	27
Celkem	565	122	447	842	222	612	1407	344	1059

P – celkový počet účastníků; Ú – počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 2

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategorii Z

Kraj	Kategorie Z			
	P	Z toho dívek	Ú	Z toho dívek
Praha-město	638	294	524	269
Středočeský	431	228	275	137
Jihočeský	482	254	340	170
Západočeský	235	119	170	79
Severočeský	574	285	287	136
Východočeský	589	308	422	222
Jihomoravský	1059	497	570	270
Severomoravský	594	272	376	153
Západoslovenský	1706	823	1441	673
Středoslovenský	1046	558	694	337
Východoslovenský	886	377	451	191
Celkem	8230	4015	5550	2637

P — celkový počet účastníků; Ú — počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 3

Přehled účastníků II. kola podle krajů v kategoriích A, B

Kraj	Kategorie A				Kategorie B			Celkem	
	P	Z toho dívěk	Ú	P	Z toho dívěk	Ú	P	Z toho dívěk	Ú
Praha-město	42	4	14	70	13	24	112	17	38
Středočeský	17	1	3	15	3	5	32	4	8
Jihočeský	20	3	2	42	12	5	62	15	7
Západočeský	12	2	4	21	6	7	33	8	11
Severočeský	36	9	5	40	25	9	76	34	14
Východočeský	55	13	27	62	16	26	117	29	53
Jihomoravský	60	8	10	105	26	38	165	34	48
Severomoravský	34	12	1	48	10	10	82	22	11
Západoslovenský	42	12	15	62	19	18	104	31	33
Středoslovenský	51	17	4	76	21	7	127	38	11
Východoslovenský	12	2	3	15	2	4	27	4	7
Celkem	381	83	88	556	153	153	973	236	241

P – celkový počet účastníků; Ú – počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 4

Přehled počtu účastníků II. kola v kategorii Z

Kraj	Kategorie Z			
	P	Z toho dívek	Ú	Z toho dívek
Praha-město	504	232	319	152
Středočeský	245	126	162	79
Jihočeský	336	169	49	18
Západočeský	160	76	24	7
Severočeský	246	113	115	48
Východočeský	407	217	285	152
Jihomoravský	530	242	110	38
Severomoravský	336	135	138	49
Západoslovenský	976	452	276	117
Středoslovenský	697	338	208	94
Východoslovenský	426	172	104	45
Celkem	4863	2272	1790	799

P – celkový počet účastníků; Ú – počet úspěšných řešitelů

II. Přípravné úlohy I. kola

1. KATEGORIE A

1. Najděte všechny reálné kořeny rovnice

$$\sqrt{x^2 + px + p} + \sqrt{x^2 - px + p} = x,$$

kde p je reálný parametr.

ŘEŠENÍ. Číslo x je reálný kořen dané rovnice tehdy a jenom tehdy, platí-li tyto vztahy:

$$x \geq 0, \quad (1)$$

$$x^2 + px + p \geq 0; \quad x^2 - px + p \geq 0, \quad (2)$$

$$(\sqrt{x^2 + px + p} + \sqrt{x^2 - px + p})^2 = x^2. \quad (3)$$

Rovnici (3) upravíme na ekvivalentní tvar

$$2\sqrt{x^2 + px + p} \cdot \sqrt{x^2 - px + p} = -x^2 - 2p. \quad (3')$$

Číslo x je reálný kořen dané rovnice tehdy a jenom tehdy, platí-li vztahy (1), (2) a dále

$$-x^2 - 2p \geq 0, \quad \text{tj.} \quad x^2 + 2p \leq 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (2\sqrt{x^2 + px + p} \cdot \sqrt{x^2 - px + p})^2 &= \\ &= (-x^2 - 2p)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Rovnici (5) upravíme na ekvivalentní tvar

$$x^2[3x^2 - 4p(p - 1)] = 0. \quad (4')$$

Z dané rovnice vidíme, že má kořen $x = 0$ tehdy a jenom tehdy, je-li parametr $p = 0$.

Nechť tedy v dalším je $p \neq 0$. Potom x je reálný kořen dané rovnice tehdy a jenom tehdy, platí-li vztahy (1), (2), (4) a rovnice

$$3x^2 - 4p(p - 1) = 0,$$

tj.

$$x^2 = \frac{4}{3}p(p - 1).$$

Vidíme, že musí být $p(p - 1) \geq 0$, tj.

$$p < 0 \quad \text{anebo} \quad p \geq 1$$

($p = 0$ nyní neuvažujeme). Z (4) je ovšem vidět, že p nemůže být kladné, a tedy zbývá $p < 0$.

Tedy: Je-li $p \neq 0$, musí být $p < 0$ (jinak by rovnice neměla řešení) a x je reálný kořen právě když platí (1), (2), (4) a

$$x = 2\sqrt{\frac{p(p - 1)}{3}}. \quad (6)$$

Reálné číslo (6) splňuje nerovnost (1). Musíme tedy dále prozkoumat nerovnosti (2) a (4); dosadíme do nich za x číslo (6) (které jediné může být hledaným řešením). Přitom víme, že je $p < 0$. Z nerovnosti (4) plyne

$$\frac{4p(p - 1)}{3} + 2p \leq 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{2(p - 1)}{3} + 1 \geq 0,$$

dostáváme tedy omezení

$$-\frac{1}{2} \leq p < 0.$$

Dále zkoumejme nerovnosti (2):

$$a) \quad x^2 + px + p \geq 0,$$

$$\frac{4p(p - 1)}{3} + 2p\sqrt{\frac{p(p - 1)}{3}} + p \geq 0,$$

$$\frac{4(p-1)}{3} + 2 \sqrt{\frac{p(p-1)}{3}} + 1 \leq 0,$$

$$\sqrt{\frac{p(p-1)}{3}} \leq \frac{1-4p}{6},$$

toto je ekv. s nerovnostmi

$$\frac{p(p-1)}{3} \leq \left(\frac{1-4p}{6}\right)^2,$$

$$0 \leq (2p+1)^2, \text{ a to platí.}$$

b) Druhá nerovnosť (2) je $x^2 - px + p \geq 0$,

$$\frac{4p(p-1)}{3} - 2p \sqrt{\frac{p(p-1)}{3}} + p \geq 0,$$

$$\frac{4(p-1)}{3} - 2 \sqrt{\frac{p(p-1)}{3}} + 1 \leq 0,$$

$$- \sqrt{\frac{p(p-1)}{3}} \leq \frac{1-4p}{6},$$

toto je splnené, neboť pro $-\frac{1}{2} \leq p < 0$
je levá strana záporná, pravá kladná.

ZÁVĚR. Daná rovnice má reálný kořen tehdy a jenom tehdy, je-li $-\frac{1}{2} \leq p \leq 0$. Kořen x je jediný a platí

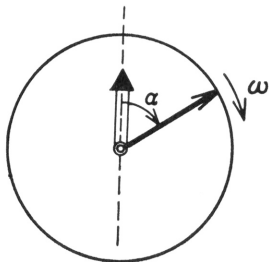
$$x = 2 \sqrt{\frac{p(p-1)}{3}}.$$

2. Zrkadlením na priemere ciferníka hodín prejdú ručičky do nových polôh, ktoré budú vo všeobecnosti v rozpore s mechanizmom hodín, t. j. nebudú ukazovať možný

čas. (Např. v okamžiku, keď je presne jedna hodina, bude zrkadlová poloha ručičiek vzhľadom na priemer 9—3 takáto: malá ručička je presne na 5-ke, veľká na 6-ke čiže neukazujú možný čas.)

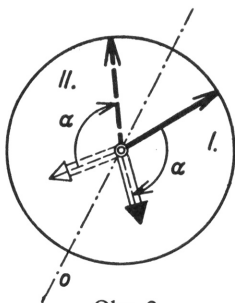
Nájdite všetky tie časy (polohy ručičiek) a polohy osi súmernosti, kedy po zrkadlení vzniká možný čas.

RIEŠENIE. Problém sa zjednoduší, ak budeme sledovať pohyb veľkej ručičky vzhľadom na malú ručičku (obr. 1). Veľká ručička sa vzhľadom na malú otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou ω radiánov za hodinu (v zmysle pohybu hodinových ručičiek, ktorý sa väčšinou označuje ako záporný zmysel). Veľkosť tejto rýchlosti možno ľahko



Obr. 1

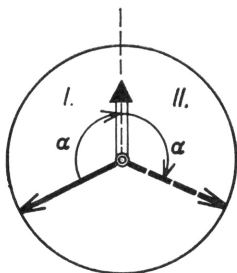
vypočítať — je to $\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ radiánov za hodinu — ale pri ďalších výpočtoch nepotrebuje-
me túto jej veľkosť poznať. Ak sa ručičky na ciferníku budú kryť, potom sa budú kryť aj na obr. 1. Ak je na ciferníku uhlová vzdialenosť veľkej ručičky od malej meraná v zápornom zmysle α , potom bude tomu tak aj na obr. 1.



Obr. 2

Nech sú I a II také stavy na ciferníku hodín (obr. 2), že existuje priemer ciferníka, podľa ktorého je stav I osove súmerný so stavom II (resp. stav II osove súmerný so stavom I). Pozorovateľovi, ktorý predpokladá, že malá ručička je v kľude, sa táto skutočnosť bude javiť tak ako

na obr. 3. Obrátene platí: situácia z obr. 3 znamená, že existuje aspoň jeden priemer ciferníka, ktorý je osou súmernosti prevádzajúcej stav I do stavu II (resp. stav II do stavu I). Možno teda urobiť tento čiastkový záver: Ku každému stavu I na ciferníku hodín existuje aspoň jeden taký stav II na ciferníku, že existuje osová súmernosť podľa priemeru ciferníka, ktorá prevádza stav I do stavu II.



Obr. 3

Ak boli hodiny v čase t_1 hodín v stave I, potom v stave II sú v čase

$$t_{2k} = t_1 + \frac{2\alpha + 2k\pi}{\omega} \quad (1)$$

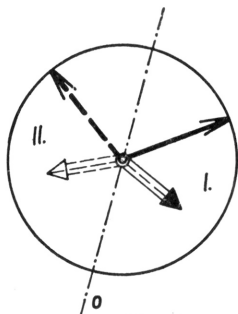
hodín, kde k je celé číslo, pretože do stavu II musí prejsť veľká ručička (pozri obr. 3) uhlovú dráhu $(2\alpha + 2k\pi)$ radiánov. Doby t_{2k} dané vzťahom (1), kde k je celé číslo, sú práve všetky doby, kedy existuje osová súmernosť požadovaná v texte úlohy. Príslušná os súmernosti sa určí ako priemer ciferníka, v ktorom je veľká ručička v čase

$$t_k = \frac{t_1 + t_{2k}}{2} = t_1 + \frac{\alpha + k\pi}{\omega},$$

čo sú, ako vidno z obr. 3, práve tie okamžiky, keď obe ručičky zvierajú uhol 0 alebo π radiánov, t. j. ležia v tom istom priemere ciferníka.

ZÁVER. Možný čas vzniká vždy práve vtedy, keď osou zrkadlenia je ciferníkový priemer, ktorý má tú vlastnosť, že mechanizmus hodín pripúšťa, aby obe ručičky súčasne ležali v tomto priemere.

JINÉ ŘEŠENÍ. Předpokládejme, že existují dva stavy I a II které jsou souměrně sdružené podle nějakého průměru o ciferníku (obr. 4). Představme si, že velká ručička, která je ve stavu I, se otočí o úhel α v kladném smyslu tak, aby ležela v ose o , a že velká ručička, která je ve stavu II, se otočí také o úhel α , ale v opačném smyslu (tj. v záporném). Malé ručičky se přitom pohybují v souhlase s mechanismem hodin. Potom dostaneme stavy I' a II', při nichž velké ručičky splývají na našem průměru o a polohy malých ručiček jsou opět souměrně sdruženy podle osy o (obr. 5).

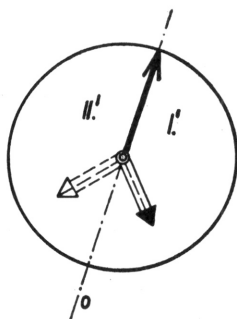


Obr. 4

Poněvadž stavy I' a II' představují možné časy, musí po určité době, uplynulé od stavu I', nastat stav II'. Z toho, že polohy velkých ručiček v I' a II' splývají, plyne, že tato doba je celý počet h hodin. Přitom ze symetrie I' a II' je

vidět, že přesně za $\frac{h}{2}$ hodin od stavu I' bude malá ručička na ose o . Jelikož $\frac{h}{2}$ je číslo buď celé,

anebo celé $+\frac{1}{2}$, bude velká ručička v té chvíli opět na ose o (buď se bude krýt s malou, anebo bude na opačné straně od ní).



Obr. 5

Tak jsme dokázali, že průměr o má tuto vlastnost: Existuje časový okamžik, v němž obě ručičky leží v ose o . Z předchozí úvahy však také plyne, že zrcadlový obraz každého možného stavu ručiček na hodinách podle takové osy o je opět stav, který mechanismus hodin připouští.

Nyní ještě můžeme určit počet os souměrnosti, které mají vlastnost požadovanou textem úlohy. Stačí jen najít ty průměry ciferníku, v nichž v souhlase s mechanismem hodin se ručičky v jistém okamžiku kryjí. Jestliže se totiž obě ručičky v některém okamžiku na jistém průměru kryjí, pak za 6 hodin budou ležet v témž průměru a svírat úhel π radiánů (a obráceně).

Jestliže se ručičky na ciferníku kryjí, pak se budou znovu krýt za

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi - \frac{\pi}{6}} = \frac{12}{11} \text{ (h)}.$$

Podle obr. 1 je zřejmé, že uvažujeme-li pohyb velké ručičky vzhledem k malé, musí velká ručička od okamžiku, kdy se kryla s malou ručičkou ($\alpha = 0$), urazit úhlovou dráhu 2π radiánů, aby se za nejkratší možnou dobu opět kryly. Za 12 hodin nastane tedy krytí ručiček $\left(12 : \frac{12}{11}\right)$ krát, tj. 11krát. Hledaných os je tedy 11.

§ 3. V rovině ϱ jsou dány dvě neshodné úsečky AB , CD . Sestrojte všechny takové body X roviny ϱ , pro které platí $\triangle ABX \sim \triangle CDX$.

ŘEŠENÍ. Podle textu úlohy platí $\triangle ABX \sim \triangle CDX$, tj.

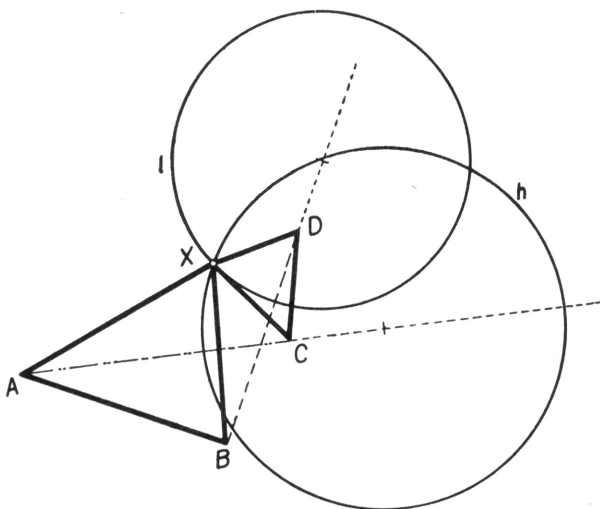
$$\frac{AX}{CX} = \frac{BX}{DX} = \frac{AB}{CD} \neq 1, \quad (1)$$

neboť úsečky AB a CD jsou neshodné. Ze vztahu (1) plyne, že bod X leží

(a) na Apolloniově kružnici h , která je množinou všech bodů Y roviny ϱ , pro něž platí $\frac{AY}{CY} = k$, kde $k = \frac{AB}{CD}$,

(b) na Apolloniově kružnici l , která je množinou všech bodů Z roviny ϱ , pro které platí $\frac{BZ}{DZ} = k$, kde $k = \frac{AB}{CD}$.

Z (a) a (b) plyne KONSTRUKCE: Bod X , existuje-li, je společným bodem kružnic h a l (obr. 6).



Obr. 6

Provedeme ZKOUŠKU. Z konstrukce vyplývá, že

$$\frac{AX}{CX} = k, \quad \frac{BX}{DX} = k, \quad \frac{AB}{CD} = k,$$

tj. skutečně $\triangle ABX \sim \triangle CDX$.

DISKUSE. Kružnice h a l lze sestrojít, právě když $A \neq C$ a $B \neq D$.

1. Je-li $A = C$ nebo $B = D$, potom nelze pro žádné X splnit (1), tj. úloha nemá řešení.

2. V případě $A \neq C$ a $B \neq D$ jsou řešením úlohy všechny takové body X , společné kružnicím h , l , pro které platí $X \notin AB$ a $X \notin CD$. (Pro $X \in AB$ nebo $X \in CD$ nevznikne $\triangle ABX$ nebo $\triangle CDX$.)

4. Určíte všechny hodnoty parametra a , pro které nemá rovnice

$$\sin^2 x = a \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \quad (1)$$

žiadny koreň.

RIEŠENIE. Podľa vzorca

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

dostaneme

$$\sin^2 x = -\frac{a}{2} \left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi}{3} \right)$$

čiže

$$\sin^2 x = -\frac{a}{2} \left(1 - 2 \sin^2 x + \frac{1}{2} \right)$$

čiže

$$(a - 1) \sin^2 x = \frac{3a}{4}. \quad (2)$$

Rovnice (1) a (2) sú ekvivalentné. Ak je $a = 1$, je rovnica (2) neriešiteľná. Ak je $a \neq 1$, vyplýva z (2)

$$\sin^2 x = \frac{3a}{4(a-1)}. \quad (3)$$

Rovnica (3) je neriešiteľná práve vtedy, keď buď

a) čitateľ a menovateľ zlomku na pravej strane majú opačné znamienka, t. j. keď platí buď

$$a > 0, \quad a - 1 < 0 \quad (4)$$

alebo

$$a < 0, \quad a - 1 > 0 \quad (5)$$

alebo

b) čitateľ a menovateľ sú súhlasných znamienok, ale zlomok na pravej strane rovnice (3) je väčší než 1, t. j. práve vtedy keď

$$1 < a < 4.$$

Z nerovnosti (4) vyplýva $0 < a < 1$, nerovnosti (5) si odporujú.

ZÁVER. Daná rovnica je neriešiteľná práve vtedy, keď platí: $0 < a < 4$.

2. KATEGORIE B

1. Rok 1967 začal i končil nedelí. Která příští léta 20. století budou mít tutéž vlastnost?

ŘEŠENÍ. Nechť žádaná událost nastane r. $1967 + x$.

Rok 1968 je přestupný. V x letech, která následují po roce 1967 je y roků přestupných a $3y + z$ roků obyčejných; přitom z znamená některé z čísel $0, -1, -2, -3$. Táž úvaha platí i pro záporné x . Je tedy

$$x = y + 3y + z = 4y + z.$$

V těchto letech je $366y + 365(3y + z) = 1461y + 365z$ dnů a toto číslo musí být násobek sedmi, takže

$$1461y + 365z = 7k,$$

kde k je celé číslo. Vynecháme-li násobky sedmi, dostaneme

$$5y + z = 7h,$$

kde h je opět celé číslo.

a) Pro $z = 0$ dostaneme $5y = 7h$ a tomu vyhovuje každé $y = 7u$, kde u je celé číslo. Pak je $x = 28u$.

b) Pro $z = -1$ vychází $5y - 1 = 7h$, odtud plyne $y = 7u + 3$, takže $x = 4(7u + 3) - 1 = 28u + 11$.

c) Pro $z = -2$ máme $5y - 2 = 7h$, z toho dostaneme $y = 7u + 6$ a $x = 4(7u + 6) - 2 = 28u + 22$.

d) Pro $z = -3$ je $5y - 3 = 7h$, takže $y = 7u + 2$, $x = 4(7u + 2) - 3 = 28u + 5$.

Řešení dávají formule a), b), c); formule d) řešení nedává, neboť vede k přestupným rokům, které sice končí nedělí, ale začínají sobotou. Nedělí začínají a končí následující roky tohoto století:

1905, 1911, 1922, 1933, 1939, 1950, 1961, 1967, 1978, 1989, 1995; řešením úlohy jsou tedy léta 1978, 1989 a 1995.

JINÉ ŘEŠENÍ. Úlohu lze řešit postupem, který je vhodný i pro kategorii Z. Z rovností

$$365 = 7 \cdot 52 + 1,$$

$$366 = 7 \cdot 52 + 2$$

plyne, že nepřestupný rok končí týmž dnem v týdnu jako začal (např. začne-li nedělí, pak nedělí také skončí) a že přestupný rok končí dnem v týdnu bezprostředně následujícím po dni, kterým začal (např. začne-li nedělí, pak skončí v pondělí). K řešení si stačí sestavit tabulku tohoto typu:

Rok	1. I.	31. XII.
<u>1967</u>	Ne	Ne
1968	Po	Ú
1969	St	St
1970	Č	Č
1971	Pá	Pá
1972	So	Ne
1973	Po	Po
1974	Ú	Ú
1975	St	St
1976	Č	Pá
1977	So	So
<u>1978</u>	Ne	Ne
1979	Po	Po
⋮	⋮	⋮

Dokončíme-li tabulku až do roku 2 000, nalezneme další řešení a zjistíme, že vlastnost požadovanou v úloze mají jen roky 1978, 1989 a 1995.

Použitá metoda se však zřejmě příliš nehodí k řešení úloh tohoto typu, jestliže počet v úvahu přicházejících roků je dost velký.

2. Ak sú $x_1, x_2, \dots, x_n$ kladné čísla, potom platí

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_2} + \frac{x_n}{x_1} \geq n; \quad (1)$$

dokážte.

RIEŠENIE. Pre $n = 1$ je veta evidentná. Ak je $n > 1$, rozlišujeme dva prípady: a) n párne, b) n nepárne. V oboch prípadoch použijeme pomocnú vetu P .

P . Ak sú a, b dve kladné čísla, potom je $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

DŮKAZ. Pre čísla a, b zrejme platí $(a - b)^2 \geq 0$, z čoho máme $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ čiže $a^2 + b^2 \geq 2ab$ a z toho vzhľadom na to, že čísla a, b sú podľa predpokladu kladné, vyplýva $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$ čiže $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, čo sme mali dokázať.

a) Ak je $n = 2m$ (m prirodzené), zoskupíme v (1) prvý a posledný člen, druhý a predposledný člen, atď. Dostaneme tak m dvojíc zlomkov takých, že súčet každej dvojice je podľa vety P väčší alebo rovný dvom. Súčet ľavej strany (1) je teda väčší alebo rovný číslu $2m = n$.

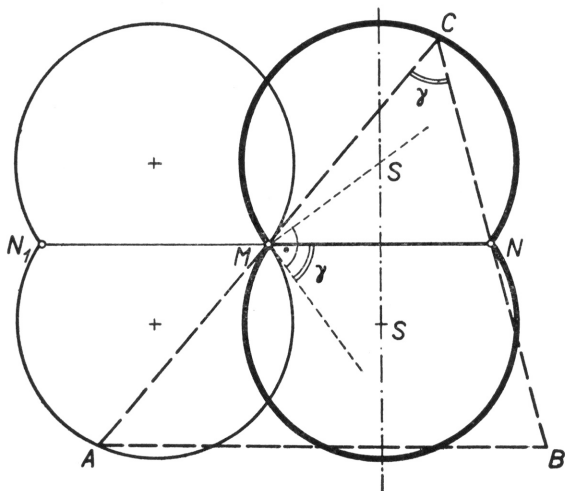
b) Ak je $n = 2m + 1$ (m prirodzené), postupujeme analogicky. Dostaneme tak m dvojíc zlomkov, z ktorých každá má súčet väčší alebo rovný dvom a okrem toho ešte jeden člen $\frac{x_{m+1}}{x_{m+1}} = 1$. Súčet ľavej strany (1) je teda v tomto prípade väčší alebo rovný číslu $2m + 1 = n$.

3. V rovine sú dané dva rôzne body M, N a veľkosť uhla γ ($0^\circ < \gamma < 180^\circ$). Trojuholník ABC má bod M za stred strany AC a bod N za stred strany BC . Ďalej platí $\sphericalangle ACB = \gamma$.

Určite: a) množinu vrcholov C ; b) množinu vrcholov A všetkých takých trojuholníkov ABC .

RIEŠENIE. a) Uhol $\sphericalangle MCN = \gamma$, t. j. podľa vety o obvodových uhloch ležia body C na dvoch kruhových oblúkoch, ktoré majú krajné body M, N a ktoré sú súmerne združené podľa priamky MN . Obrátene sa ľahko

presvedčíme, že ku každému bodu C týchto dvoch oblúkov s výnimkou bodov M, N možno zostrojiť dva body A, B tak, že vznikne trojuholník ABC s uhlom $\sphericalangle ACB = \gamma$ a so strednou priečkou $MN \parallel AB$. Množina bodov C je na obr. 7 hrubo vytiahnutá. Body M, N do nej nepatria.



Obr. 7

b) Bod M je stred strany AC . Z časti a) vyplýva, že množinou všetkých bodov A je útvar súmerne združený podľa stredu M k útvaru, ktorý je množinou bodov C (pozri obr. 7. Body N_1 a M do tejto množiny nepatria).

4. Jsou dána dvě kladná čísla a, b ($a > b$).

a) Určete všechny hodnoty podílu $\frac{a}{b}$, pro něž lze se-

strojit trojúhelník ABC se stranami délek $a, b, c = \sqrt{ab}$.

b) Určete všechny hodnoty podílu $\frac{a}{b}$, pro které bude trojúhelník ABC z odst. a) ostroúhlý (pravoúhlý, tupohúhlý).

ŘEŠENÍ. K tomu, aby existoval trojúhelník se stranami délek a, b, c , je nutné a stačí, aby byly splněny nerovnosti

$$b < a + \sqrt{ab}, \quad \sqrt{ab} < a + b, \quad a < b + \sqrt{ab}.$$

Jelikož předpokládáme $a > b$, je první nerovnost jistě splněna. Totéž platí pro druhou nerovnost, což uvidíme, povýšíme-li ji na druhou. Zbývá tedy poslední nerovnost; tu můžeme psát

$$a - b < \sqrt{ab}.$$

Odtud dostaneme

$$a^2 + b^2 - 3ab < 0$$

a po dělení b^2 dostaneme nerovnost, které má vyhovovat poměr $\frac{a}{b}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) + 1 < 0.$$

Jejím řešením je (vzhledem k $a > b$)

$$1 < \frac{a}{b} < \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

Jelikož a je zřejmě nejdelší z úseček a, b, c , může být pravý nebo tupý jenom úhel proti ní. Podle kosinové věty máme pro kosinus tohoto úhlu výraz

$$\frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} = \frac{(b^2 + ab - a^2)}{2b\sqrt{ab}},$$

takže stačí vyšetřit znaménko výrazu $(b^2 + ab - a^2)$ vyjádřeného jako funkce poměru (a/b) :

$$f(a/b) = 1 + (a/b) - (a/b)^2.$$

Funkce $f(x) = 1 + x - x^2$ (kvadratický trojčlen) má kladný kořen $k = (1/2)(1 + \sqrt{5}) = 1,618 \dots$, takže

trojúhelník ABC je ostroúhlý, když $f(a/b) > 0$,

trojúhelník ABC je pravoúhlý, když $f(a/b) = 0$,

trojúhelník ABC je tupoúhlý, když $f(a/b) < 0$.

Vzhledem k tomu, že $1 < (a/b) < (1/2)(3 + \sqrt{5})$, vidíme,

že ABC je ostroúhlý pro $(a/b) \in \left(1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$,

pravoúhlý pro $(a/b) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$,

tupoúhlý pro $(a/b) \in \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

3. KATEGORIE Z

1. Zdeněk krátil při výpočtech zlomky takto:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}; \quad \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}; \quad \frac{1\cancel{9}\cancel{9}}{\cancel{9}\cancel{9}5} = \frac{1}{5}.$$

Učitel tento způsob „krácení“ pochopitelně neschvaluje, ale Zdeněk se hájí tím, že výsledek je správný.

Najděte všechny zlomky a) s dvojcifernými, b) s troj-cifernými čitateli i jmenovateli, které mohl Zdeněk svým způsobem „krátit“ a přitom dostal správný výsledek.

ŘEŠENÍ. a) Čítec i jmenovatel zlomku, který je možno podle Zdenka „krátit“, jsou dvojciferná čísla, a proto můžeme takový zlomek psát ve tvaru

$$\frac{10a + b}{10b + c}.$$

V případech, kdy má Zdeněk pravdu, platí

$$\frac{10a + b}{10b + c} = \frac{a}{c}, \quad (1)$$

přičemž čísla a, b, c jsou přirozená menší než 10.

Z rovnice (1) plyne

$$c = \frac{10ab}{9a + b}. \quad (2)$$

O číslech a, b, c víme, že jsou přirozená menší než 10, přičemž číslo c splňuje vztah (2). Čísla a, b, c těchto vlastností vyhledáme tak, že a, b budeme volit a číslo c počítat pomocí vzorce (2). Chceme-li nalézt všechny zlomky, kde je možno „krátit“ Zdenkovým způsobem, musíme při volbě čísel a, b postupovat tak, abychom vystřídali všechny možnosti.

1. Zvolme $a = 1$. Pro b a c sestavme tabulku:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	$\frac{10}{10}$	$\frac{20}{11}$	$\frac{30}{12}$	$\frac{40}{13}$	$\frac{50}{14}$	$\frac{60}{15}$	$\frac{70}{16}$	$\frac{80}{17}$	$\frac{90}{18}$

Obdrželi jsme řešení: $a = b = c = 1$, tj. $\frac{11}{11} = \frac{1}{1}$,

$$a = 1, \quad b = 6, \quad c = 4, \quad \text{tj.} \quad \frac{16}{64} = \frac{1}{4},$$

$$a = 1, \quad b = 9, \quad c = 5, \quad \text{tj.} \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}.$$

2. Zvolme $a = 2$. Pro b a c sestavme tabulku:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	$\frac{20}{19}$	$\frac{40}{20}$	$\frac{60}{21}$	$\frac{80}{22}$	$\frac{100}{23}$	$\frac{120}{24}$	$\frac{140}{25}$	$\frac{160}{26}$	$\frac{180}{27}$

Nalezli jsme další řešení: $a = b = c = 2$, tj.

$$\frac{22}{22} = \frac{2}{2},$$

$$a = 2, \quad b = 6, \quad c = 5, \quad \text{tj.} \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}.$$

3.—9. Volíme-li postupně $a = 3, 4, \dots, 9$, najdeme další zlomky, pro něž platí $a = b = c$, tj.

$$\frac{33}{33} = \frac{3}{3}, \quad \frac{44}{44} = \frac{4}{4}, \dots, \frac{99}{99} = \frac{9}{9},$$

a ještě případ

$$a = 4, \quad b = 9, \quad c = 8, \quad \text{tj.} \quad \frac{49}{98} = \frac{4}{8}.$$

ZÁVĚR. Zlomky $\frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \dots, \frac{99}{99}, \frac{16}{64}, \frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}$

jsou všechny zlomky vyhovující úloze.

b) Postupujeme obdobně jako v části a). V tomto případě jde o nalezení přirozených čísel a, b, c menších než 10, které splňují rovnost

$$\frac{100a + 10b + b}{100b + 10b + c} = \frac{a}{c}.$$

Snadnou úpravou zjistíme, že pro c platí

$$c = \frac{10ab}{9a + b},$$

tj. vzorec (2). Je tedy možno využiť výsledků z části a). Všechny zlomky, které splňují část b) naší úlohy, jsou:

$$\frac{111}{111}, \frac{222}{222}, \dots, \frac{999}{999}, \frac{166}{664}, \frac{199}{995}, \frac{266}{665}, \frac{499}{998}.$$

POZNÁMKA.

Úlohu lze dále různými způsoby zobecňovat, např. platí

$$\frac{1\ 666}{666\ 4} = \frac{1}{4}, \quad \frac{4\ 999}{9999\ 8} = \frac{4}{8}.$$

Dále je možno i uvažovat jiné typy „krácení“. Označme krácenou číslicí a , nekrácené číslice x, y , potom by např. v úloze a) bylo možno celkem uvažovat zlomky těchto

$$\text{tvarů: } \frac{xa}{ay} \text{ (připušťeno úlohou); } \frac{ax}{ya}; \frac{ax}{ay}; \frac{xa}{ya}.$$

2. Nákladným autom sa má previezť m ton stavebného materiálu do vzdialenosti d km (po vodorovnej ceste). Auto má hmotu V ton. Pri stálom výkone motora je rýchlosť auta nepriamo úmerná celkovej hmote auta a nákladu. Čas nakladania a skladania (približne rovnaký) je priamo úmerný hmote nákladu. Materiál nemožno naložiť na jeden raz, ale treba ísť niekoľkokrát.

Rozhodnite výpočtom, čo je časove výhodnejšie: Nakladať menej, chodiť teda rýchlejšie, ale samozrejme viackrát, alebo nakladať viac, chodiť pomalšie, ale zato menejkrát. (Na čas rozbiehania a zastavovania vozidla neprihliadame.)

RIEŠENIE. Predpokladajme, že auto išlo celkom n -krát ($n \geq 2$). Nech $m_1, m_2, \dots, m_n$ sú hmoty jednotli-

vých nákladov v tonách, $v_1, v_2, \dots, v_n$ rýchlosti v km/h pri doprave týchto nákladov a $t_1, t_2, \dots, t_n$ doby v hodinách potrebné k naloženiu a k zloženiu týchto nákladov. Rýchlosť prázdneho auta v km/h označme c .

Celková doba T v hodinách potrebná na prevezenie všetkého materiálu je:

$$T = \left(t_1 + \frac{d}{v_1} + t_1 + \frac{d}{c}\right) + \left(t_2 + \frac{d}{v_2} + t_2 + \frac{d}{c}\right) + \dots + \left(t_n + \frac{d}{v_n} + t_n + \frac{d}{c}\right) = 2(t_1 + t_2 + \dots + t_n) + d\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}\right) + \frac{nd}{c}. \quad (1)$$

Podľa textu úlohy platí (q a k sú konštanty úmernosti):

$$t_1 = qm_1, \quad t_2 = qm_2, \quad \dots, \quad t_n = qm_n, \quad (2)$$

$$c = \frac{k}{V}, \quad v_1 = \frac{k}{V + m_1}, \quad v_2 = \frac{k}{V + m_2}, \quad \dots, \quad v_n = \frac{k}{V + m_n}. \quad (3)$$

Po dosadení z (2) a (3) do (1) dostaneme

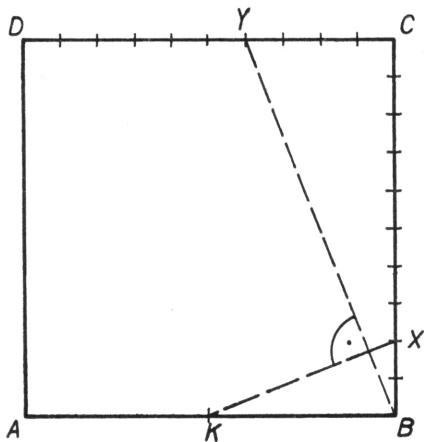
$$T = 2q(m_1 + m_2 + \dots + m_n) + d \frac{n \cdot V + (m_1 + m_2 + \dots + m_n)}{k} + \frac{ndV}{k}.$$

Zrejme platí $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$, a preto

$$T = n \cdot \frac{2dV}{k} + 2qm + \frac{dm}{k} = A \cdot n + B,$$

kde A a B sú konštanty. Celková doba T bude tým menšia, čím menšie bude n , t. j. časove výhodné je nakladať tak, aby počet ciest bol čo najmenší.

3. Je daný štvorec $ABCD$ so stranou $a = 10$ cm. Každá zo strán BC , CD je rozdelená deviatimi bodmi na desať zhodných úsečiek. Stred K strany AB je spojený s deliacim bodom X strany BC a vrchol B je spojený s deliacim bodom Y strany CD . Ktoré deliace body X , Y musíme vybrať, aby priamky KX , BY boli navzájom kolmé?



Obr. 8

RIEŠENIE. V zhode s obr. 8 označme hľadaný deliaci bod na strane BC X a deliaci bod na strane CD označme Y . K tomu, aby priamky KX , BY boli na seba kolmé, musí platiť

$$\triangle KBX \sim \triangle BCY.$$

Z toho máme

$$BX : BK = CY : BC. \quad (1)$$

Označme ďalej $BX = \alpha$, $CY = \beta$, kde pre prirodzené čísla α, β platí:

$$0 < \alpha < 10, \quad 0 < \beta < 10.$$

Keďže $BK = \frac{a}{2} = 5$, $BC = a = 10$, po dosadení do (1) dostaneme

$$\alpha : \frac{a}{2} = \beta : a,$$

z čoho

$$\beta = 2\alpha.$$

Vyhovujú teda tieto hodnoty

α	1	2	3	4
β	2	4	6	8

Úloha má podľa toho štyri rôzne riešenia.

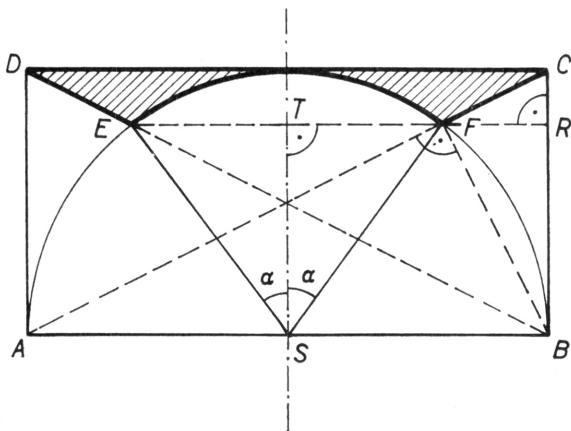
4. Je dán obdĺžnik $ABCD$, jehož strany AB , BC jsou v poměru $2 : 1$. Do obdĺžníku je vepsána polokružnice k nad stranou AB jako průměrem. Úhlopříčky AC a BD protínají kružnici k po řadě v bodech F , E .

Určete obsah obrazce, který je omezen obloukem EF polokružnice k a úsečkami FC , CD , DE .

ŘEŠENÍ. Obrazec $\bullet$ popsany v úloze dostaneme z rovnoramenného lichoběžníka $DCFE$ oddělením úseče nad tětivou EF (obr. 9). Označme P_1 obsah lichoběžníka $DCFE$, P_2 obsah výseče SFE a P_3 obsah $\triangle SFE$, kde S je střed strany AB . Je-li P obsah obrazce $\bullet$, potom

$$P = P_1 + P_3 - P_2. \quad (1)$$

Označíme-li r poloměr vepsané polokružnice, potom



Obr. 9

$AB = 2r$ a $BC = r$. Označme R průsečík přímky EF a BC . K výpočtu P_1 , P_2 , P_3 potřebujeme znát velikosti úseček EF a CR .

Platí

$$EF = 2r - 2 \cdot FR. \quad (2)$$

Podle Thaletovy věty je $\sphericalangle AFB = 90^\circ$ a FB je tedy výška v $\triangle ABC$. Pro obsah tohoto trojúhelníka platí:

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} AC \cdot FB,$$

tj.

$$FB = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{2r \cdot r}{\sqrt{4r^2 + r^2}} = \frac{2r}{\sqrt{5}}.$$

Protože je $\triangle BRF \sim \triangle ABC$ (věta *uu*), platí

$$\frac{FR}{FB} = \frac{CB}{CA},$$

tj.

$$FR = \frac{r}{r\sqrt{5}} \cdot \frac{2r}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \cdot r.$$

Z rovnosti (2) potom dostávame

$$EF = 2r - \frac{4}{5} r = \frac{6}{5} r. \quad (3)$$

Z podobnosti $\triangle FRC \sim \triangle ABC$ (věta *uu*) plyne

$$\frac{CR}{FR} = \frac{BC}{AB},$$

tj.

$$CR = \frac{r}{2r} \cdot \frac{2}{5} r = \frac{1}{5} r. \quad (4)$$

Užijeme-li (3) a (4), máme

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot CR \cdot (DC + EF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} r \cdot \left(2r + \frac{6}{5} r\right),$$

tj.

$$P_1 = \frac{8}{25} r^2. \quad (5)$$

Dále dostávame

$$P_3 = \frac{1}{2} EF \cdot BR = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} r \cdot \left(r - \frac{1}{5} r\right),$$

tj.

$$P_3 = \frac{12}{25} r^2. \quad (6)$$

Zbývá ještě určit P_2 . Označme $\sphericalangle ESF = 2\alpha$. Potom platí

$$P_2 = \frac{\pi r^2 \alpha}{180}, \quad (7)$$

kde

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{2} EF}{BR} = \frac{3}{4}, \quad \text{tj.} \quad \alpha \doteq 37^\circ. \quad (7')$$

(Užito bylo tabulek *M5* z tabulek pro ZDŠ.)

Spojením (1), (5), (6) a (7') dostáváme

$$P = \left(0,8 - \frac{\alpha\pi}{180} \right) \cdot r^2 \doteq 0,154r^2.$$

III. Súťažné úlohy I. kola

1. KATEGÓRIA A

1. V sáčku je 100 hracích známok označených číslami 1, 2, 3, ..., 100. Koľkými spôsobmi môžeme zo sáčku vytiahnuť tri známky tak, aby súčet čísel na nich uvedených nepresiahol 100? Koľko je to percent zo všetkých možných ťahov po troch známkach?

RIEŠENIE. Ide zrejme o počet všetkých trojíc prirodzených čísel x, y, z , z ktorých každé dve sú navzájom rôzne a pre ktoré platí

$$x + y + z \leq 100.$$

Pretože na označení čísel nezáleží, môžeme predpokladať, že $x < y < z$. Najväčšie možné x je 32, pretože preň máme tieto možnosti: $32 + 33 + 34 = 99$, $32 + 33 + 35 = 100$, zatiaľ čo $33 + 34 + 35 = 102 > 100$.

Ak zvolíme ľubovoľné prirodzené číslo x tak, aby $0 < x \leq 32$, môžeme za y voliť ktorékoľvek z čísel $x + 1, x + 2, \dots, x + n$, kde n je najväčšie prirodzené číslo, pre ktoré platí $(x + n) + (x + n + 1) \leq 100 - x$, t. j.

$$n = \frac{99 - 3x}{2} \text{ pre } x \text{ nepárne a } n = \frac{98 - 3x}{2} \text{ pre } x$$

párne. Číslo z je potom treba voliť tak, aby $y < z \leq 100 - x - y$. Máme teda pre každú dvojicu $x, y = x + k$, kde $k = 1, 2, \dots, n$ celkom $(100 - x - y) -$

— $y = 100 - 3x - 2k$ možností pre z a pre každú voľbu čísla x celkom

$$m = (100 - 3x - 2) + (100 - 3x - 4) + \dots + (100 - 3x - 2n) = n(99 - 3x - n)$$

možností pre voľbu čísel y a z . Pre nepárne x je

$$m = \frac{99 - 3x}{2} \cdot \left(99 - 3x - \frac{99 - 3x}{2}\right) = \left(\frac{99 - 3x}{2}\right)^2;$$

pre párne x je

$$\begin{aligned} m &= \frac{98 - 3x}{2} \cdot \left(99 - 3x - \frac{98 - 3x}{2}\right) = \\ &= \frac{100 - 3x}{2} \cdot \frac{98 - 3x}{2}. \end{aligned}$$

Celkový počet r všetkých riešení dostaneme, ak sem postupne dosadíme $x = 1, 2, \dots, 32$ a sčítame. Dostaneme

$$r = 48^2 + 47 \cdot 46 + 45^2 + 44 \cdot 43 + \dots + 3^2 + 2 \cdot 1.$$

Pretože pre ľubovoľné a je

$$(3a)^2 + (3a - 1)(3a - 2) = 18a^2 - 9a + 2,$$

dostávame

$$\begin{aligned} r &= 18(1^2 + 2^2 + \dots + 16^2) - \\ &\quad - 9(1 + 2 + \dots + 16) + 32 \end{aligned}$$

a s použitím známych vzorcov

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k &= \frac{1}{2} k(k + 1), \quad 1^2 + 2^2 + \dots + \\ &\quad + k^2 = \frac{1}{6} k(k + 1)(2k + 1), \end{aligned}$$

ktorých správnosť pre každé prirodzené číslo k sa ľahko dokáže matematickou indukciou, stadiaľ máme

$$r = 3 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 33 - 9 \cdot 8 \cdot 17 + 32 = \\ = 25\,736.$$

Existuje teda 25 736 trojíc čísel x, y, z , ktoré splňujú danú podmienku.

Všetkých trojíc čísel x, y, z je $\binom{100}{3} = 161\,700$. Trojice, ktoré vyhovujú úlohe, predstavujú teda 15,9 % všetkých možných trojíc.

2. Je-li n liché číslo, je číslo

$$N = n^6 + 3n^4 + 7n^2 - 11$$

dělitelné číslem 256. Dokažte.

ŘEŠENÍ. Pro zkoumání dělitelnosti je užitečné rozložit daný mnohočlen v součin jednodušších mnohočlenů. Dosadíme-li $n^2 = x$, má daný mnohočlen tvar $x^3 + 3x^2 + 7x - 11$. Protože $x = 1$ je kořenem rovnice

$$x^3 + 3x^2 + 7x - 11 = 0,$$

je mnohočlen $x^3 + 3x^2 + 7x - 11$ dělitelný dvojčlenem $x - 1$. Je tedy

$$x^3 + 3x^2 + 7x - 11 = (x - 1)(x^2 + px + q). \quad (1)$$

Koeficienty p, q zjistíme tím, že na pravé straně (1) vynásobíme a porovnáme koeficienty při týchž mocninách. Vyjde

$$x^3 + 3x^2 + 7x - 11 = x^3 + (p - 1)x^2 + \\ + (q - p)x - q;$$

odtud plyne $p - 1 = 3, p = 4, q - p = 7, q = 11$ a skutečně je $-11 = -q$. Máme tedy rozklad

$$x^3 + 3x^2 + 7x - 11 = (x - 1)(x^2 + 4x + 11). \quad (2)$$

Řešením kvadratické rovnice $x^2 + 4x + 11 = 0$ dostaneme kořeny imaginární, proto mnohočlen $x^2 + 4x +$

+ 11 nelze rozložit v dvojčleny s reálnými koeficienty. Dosadíme-li v (2) opět $x = n^2$, vyjde

$$N = (n^2 - 1)(n^4 + 4n^2 + 11). \quad (3)$$

Protože zjišťujeme dělitelnost číslem 256 ($= 16^2$), je vhodnější vyjádřit liché číslo n ve tvaru $4\nu + 1$ (ν celé), nebo ve tvaru $4\nu - 1$ (ν celé).

a) Je-li $n = 4\nu + 1$, je $n^2 - 1 = 16\nu^2 + 8\nu = 8\nu(2\nu + 1)$.

O druhém mnohočlenu v (3) platí po úpravě

$$\begin{aligned} n^4 + 4n^2 + 11 &= 256\nu^4 + 256\nu^3 + 160\nu^2 + 48\nu + 16 = \\ &= 32k + 16(3\nu + 1). \end{aligned}$$

Celkem tedy můžeme v případě $n = 4\nu + 1$ psát

$$N = 8\nu(2\nu + 1) [32k + 16(3\nu + 1)],$$

čili

$$N = 128\nu(2\nu + 1) [2k + 3\nu + 1].$$

Je-li nyní ν sudé, je hned vidět, že N je násobkem čísla 256. Je-li ν liché, je číslo v hranaté závorce sudé, takže N je opět násobkem čísla 256.

b) Je-li $n = 4\nu - 1$, je $n^2 - 1 = 16\nu^2 - 8\nu$ násobkem čísla 16 právě tehdy, když je ν sudé; je-li ν liché, je násobkem osmi.

O druhém mnohočlenu v (3) platí po úpravě

$$\begin{aligned} n^4 + 4n^2 + 11 &= (256\nu^4 - 256\nu^3 + 160\nu^2) - \\ &- 48 + 16 = 32k - 16(3\nu - 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Je-li ν sudé, je číslo (4) násobkem čísla 16, a tedy N násobkem čísla 16. $16 = 256$. Je-li ν liché, je $n^2 - 1$ násobkem osmi, ale $n^4 + 4n^2 + 11$ je podle (4) násobkem čísla 32. Je tedy také v tomto případě N násobkem čísla $256 = 8 \cdot 32$.

Tím je úloha rozřešena.

JINÉ ŘEŠENÍ. Ve výrazu pro N se n vyskytuje jen v sudých mocninách. Položíme proto $m = n^2$. Je-li n liché, tj. tvaru $n = 2k + 1$, bude

$$m = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1.$$

Ze dvou čísel $k, k + 1$ je nutně jedno sudé, je tedy m tvaru

$$m = 8r + 1.$$

Potom však

$$\begin{aligned} N &= m^3 + 3m^2 + 7m - 11 = \\ &= (8r + 1)^3 + 3(8r + 1)^2 + 7(8r + 1) - 11 = \\ &= 256r^3 + 192r^2 + 24r + 1 + 192r^2 + 48r + 3 + \\ &\quad + 56r + 7 - 11 = 256r^3 + 384r^2 + 128r = \\ &= 256r^3 + 128r(3r + 1). \end{aligned}$$

Je-li r liché, je $3r + 1$ sudé, takže součin $r(3r + 1)$ je vždy sudý: $r(3r + 1) = 2s$. Je potom

$$N = 256(r^3 + s),$$

tj. N je dělitelné číslem 256.

POZNÁMKA. Číslo 256 je zřejmě nejvyšší mocnina 2, kterou je N vždy dělitelné — stačí uvážit případ r tvaru $4l + 2 = 2(2l + 1)$.

3. Je daná nerovnost

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{2a}{y\sqrt{x}} < \frac{a\sqrt{y}}{y} + \frac{2\sqrt{y}}{y}, \quad (1)$$

kde x, y sú premenné a a reálny parameter.

a) Určite množinu všetkých bodov v rovine, ktorých pravouhlé súradnice x, y vyhovujú danej nerovnosti.

b) Pre $a = 3$ určite súradnice všetkých bodov s celočíselnými súradnicami, ktoré patria do tejto množiny.

RIEŠENIE. a) Daná nerovnosť má zmysel len pre

$$x > 0, \quad y > 0. \quad (2)$$

Preto v ďalšom budeme uvažovať len o I. kvadrante súradnicového systému. Postupnými úpravami nerovnosti (1) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{y}}{y} - \frac{a\sqrt{y}}{y} + \frac{2a}{y\sqrt{x}} &< 0, \\ \frac{xy - 2\sqrt{x}\sqrt{y} - a\sqrt{x}\sqrt{y} + 2a}{y\sqrt{x}} &< 0, \\ \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x}\sqrt{y} - 2) - a(\sqrt{x}\sqrt{y} - 2)}{y\sqrt{x}} &< 0, \\ \frac{(\sqrt{x}\sqrt{y} - 2)(\sqrt{x}\sqrt{y} - a)}{y\sqrt{x}} &< 0. \end{aligned}$$

Vzhľadom na (2) je menovateľ tohto zlomku kladné číslo. Musí preto platiť:

$$(\sqrt{x}\sqrt{y} - 2)(\sqrt{x}\sqrt{y} - a) < 0. \quad (3)$$

1. Ak $a = 2$, potom výraz na ľavej strane nerovnosti (3) má tvar $(\sqrt{x}\sqrt{y} - 2)^2$, čo je zrejme číslo nezáporné. Pre $a = 2$ nemá teda daná nerovnosť riešenie.

2. Ak $a < 2$, potom $-a > -2$ a tiež $\sqrt{x}\sqrt{y} - a > \sqrt{x}\sqrt{y} - 2$, z čoho vyplýva, že ak má platiť nerovnosť (3), musí byť

$$\sqrt{x}\sqrt{y} - a > 0, \quad (4)$$

$$\sqrt{x}\sqrt{y} - 2 < 0. \quad (5)$$

Treba preto rozoznávať dva prípady: $a \leq 0$, $0 < a < 2$.

Ak $a \leq 0$, potom nerovnosť (4) zrejme platí pre každé dve kladné čísla x, y . Nerovnosť (5) môžeme vzhľadom na (2) upraviť takto: $\sqrt{x}\sqrt{y} < 2$ čiže $xy < 4$, z čoho

$$y < \frac{4}{x}. \quad (6)$$

Z prvého kvadrantu vyhovujú nerovnosti (6) súradnice vonkajších bodov rovnoosej hyperboly určenej rovnicou

$$y = \frac{4}{x}. \quad (7)$$

Ak je $a \leq 0$, sú teda hľadanou množinou bodov, ktorých súradnice vyhovujú nerovnosti (1) tie body prvého kvadrantu, ktoré sú vonkajšími bodmi hyperboly (7).

Ak $0 < a < 2$, môžeme nerovnosť (4) vzhľadom na podmienky (2) upraviť takto: $\sqrt{x} \sqrt{y} > a$ čiže $xy > a^2$, z čoho

$$y > \frac{a^2}{x}. \quad (8)$$

Nerovnosti (8) vyhovujú súradnice vnútorných bodov rovnoosej hyperboly určenej rovnicou

$$y = \frac{a^2}{x}. \quad (9)$$

Ak je $0 < a < 2$, hľadanou množinou bodov, ktorých súradnice vyhovujú nerovnosti (1) sú teda tie body I. kvadrantu, ktoré sú vonkajšími bodmi hyperboly určenej vzťahom (7) a zároveň vnútornými bodmi hyperboly určenej vzťahom (9).

3. Ak $a > 2$, potom $-a < -2$ a tiež $\sqrt{x} \sqrt{y} - a < < \sqrt{x} \sqrt{y} - 2$, z čoho vyplýva, že ak má platiť nerovnosť (3), potom musí byť $\sqrt{x} \sqrt{y} - a < 0$, $\sqrt{x} \sqrt{y} - 2 > 0$. Vzhľadom na podmienky (2) možno však tieto nerovnosti upraviť takto: $\sqrt{x} \sqrt{y} < a$, $\sqrt{x} \sqrt{y} > 2$ čiže

$$xy < a^2, \quad (10)$$

$$xy > 4, \quad (11)$$

z čoho $y < \frac{a^2}{x}$, $y > \frac{4}{x}$. Tejto sústave vyhovujú súrad-

nice tých bodov, ktoré sú vonkajšími bodmi hyperboly určenej rovnicou

$$y = \frac{a^2}{x} \quad (12)$$

a zároveň vnútornými bodmi hyperboly určenej rovnicou

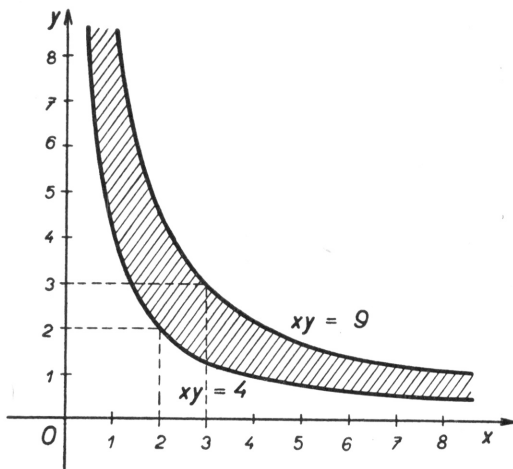
$$y = \frac{4}{x}. \quad (13)$$

Ak je $a > 2$, potom hľadanou množinou bodov, ktorých súradnice vyhovujú nerovnosti (1), sú teda tie body I. kvadrantu, ktoré sú vonkajšími bodmi hyperboly (12) a zároveň vnútornými bodmi hyperboly (13).

b) Ak $a = 3$, je $a > 2$ a teda podľa vzťahov (10), (11) musí platiť

$$4 < xy < 9.$$

Keďže xy má byť celé číslo, z týchto nerovností vyplýva, že



Obr. 10

$$5 \leq xy \leq 8.$$

Týmto nerovnostiam vyhovujú len tieto usporiadané dvojice prirodzených čísel: $[1,5]$, $[5,1]$, $[1,6]$, $[6,1]$, $[1,7]$, $[7,1]$, $[1,8]$, $[8,1]$, $[2,3]$, $[3,2]$, $[2,4]$, $[4,2]$, ktoré sú zároveň súradnicami hľadaných bodov. Časť uvažovanej množiny pre $a = 3$ je vyšrafovaná na obr. 10.

$$y = \frac{4}{x}$$

x	0,5	0,8	1,25	1,6	2	2,5	3,2	5	8
y	8	5	3,2	2,5	2	1,6	1,25	0,8	0,5

$$y = \frac{9}{x}$$

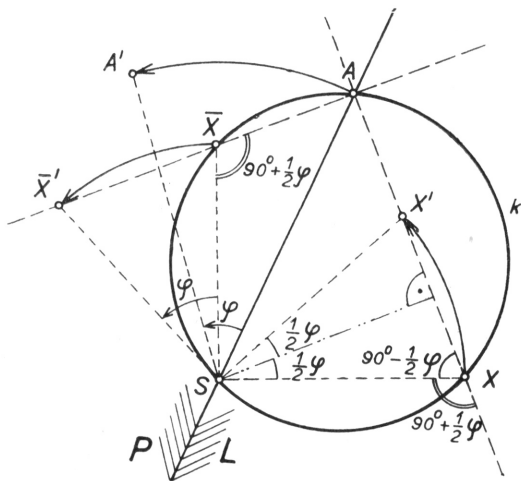
x	1	1,5	2	2,5	3	3,6	4,5	6	9
y	9	6	4,5	3,6	3	2,5	2	1,5	1

4. V rovině ϱ jsou dány dva různé body A , S a úhel velikosti φ , $0^\circ < \varphi \leq 180^\circ$. Určete množinu všech bodů X roviny ϱ takových, že bod X' , který z X dostaneme otočením okolo středu S o úhel φ (v kladném smyslu), leží na přímce AX .

ŘEŠENÍ. I. Nechť $\varphi = 180^\circ$. Poněvadž pak vždy X , X' a S leží na přímce, musí X ležet na přímce AS . Naopak každý bod přímky AS přejde otočením okolo S o 180° v bod přímky AS .

V tomto případě je tedy hledanou množinou bodů X přímka AS .

II. Necht' $0^\circ < \varphi < 180^\circ$. Je vidět, že oba body A , S patří do hledané množiny. Necht' A' je obraz bodu A v daném otočení. Buď dále X ještě nějaký jiný bod hledané množiny. Bod X zřejmě neleží na přímce AS a padne tedy buď dovnitř poloroviny ASA' , kterou označíme písmenem P , anebo dovnitř poloroviny L k ní



Obr. 11

opačné (obr. 11). Přitom v rovnoramenném trojúhelníku $\bar{X}SX'$ ($SX = SX'$, $\sphericalangle XSX' = \varphi$) je vnitřní úhel $\sphericalangle X'XS = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ a vnější úhel při vrcholu X má velikost $90^\circ + \frac{\varphi}{2}$. Body X , X' , A leží v přímce.

[1] Leží-li náš bod X v polorovině L , pak z kladného smyslu otáčení je zřejmé, že bod X' leží na polopřímce XA , a proto

$$\sphericalangle AXS = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

[2] Padne-li náš bod $\bar{X}$ dovnitř poloroviny P , pak bod $\bar{X}'$ leží na polopřímce opačné k $\bar{X}A$, a proto

$$\sphericalangle A\bar{X}S = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}.$$

Tak jsme dokázali, že bod X leží buď v polorovině L na kruhovém oblouku určeném ostrým úhlem $\sphericalangle AXS = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$, anebo na kruhovém oblouku v polorovině P

s tupým obvodovým úhlem $\sphericalangle AXS = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}$. Přitom je jasné, že tyto dva oblouky spolu se svými krajními body A, S dají dohromady celou kružnici k .

Obráceně se snadno uváží, že každý bod této kružnice k splňuje podmínky úlohy.

V tomto případě je tedy hledanou množinou bodů X kružnice k , kterou jsme před chvílí popsali.

Tím je úloha vyřešena.

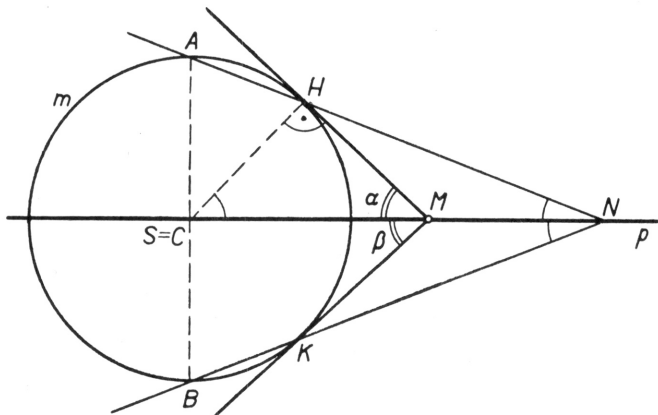
5. V rovině je dána kružnice m se středem S a poloměrem r a přímka p , která má od středu S vzdálenost $d < r$. Na přímce p zvolme libovolný bod M tak, že $SM \geq r$; z bodu M vedme tečny ke kružnici m a jejich dotykové body označme H, K ; patu kolmice vedené bodem S na přímku p označme C .

Pak pro všechny takové body M je součin

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sphericalangle CMK \cdot \cotg \frac{1}{2} \sphericalangle CMH$$

roven témuž číslu k (při vhodném označení bodů K, H).

Dokažte a vyjádřete k pomocí r, d . Platí tato věta i v případě $d \geq r$?



Obr. 12

ŘEŠENÍ. a) Počneme případem $d = 0$ (přímka p prochází středem S). Celý útvar je pak souměrný podle přímky p (obr. 12). Označme A, B krajní body průměru kružnice m kolmého k p . Platí $\sphericalangle HCM = 90^\circ - \alpha$,

$$\sphericalangle ACH = \alpha, \quad \sphericalangle CAH = \sphericalangle CHA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\sphericalangle ANC = \frac{\alpha}{2}. \quad \text{Obdobně } \sphericalangle BNC = \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2}. \quad \text{Je tedy}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} = 1. \quad (1)$$

($MN'K$). Z toho plyne, že $\sphericalangle MHN = \frac{\alpha}{2}$ ($\sphericalangle MKN =$
 $= \frac{\beta}{2}$), trojúhelníky $\triangle NHM$, $\triangle N'KM$ jsou rovnoramenné a je tedy $MN' = MK = MH = MN$. Protože oba body N , N' leží na polopřímce opačné k MC , je $N = N'$. Z (2a), (2b) plyne

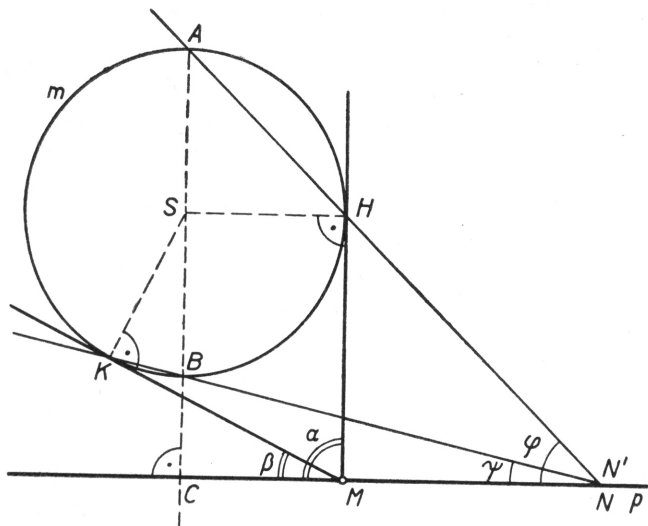
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} = \frac{r+d}{r-d}. \quad (3)$$

Formule (3) souhlasí s formulí (1), kterou dostaneme, dosadíme-li do (3) $d = 0$.

c) Je zřejmé, že při výměně označení bodů K , H je konstantní poměr ve vzorci (3) roven $\frac{r-d}{r+d}$. V případě $r = d$ zlomek ve vzorci (3) nemá smysl, zlomek $\frac{r-d}{r+d} = \frac{0}{2r}$ je konstantní.

d) Prozkoumejme ještě případ $d > r$ (obr. 13b). V tomto případě musíme volit $M \neq C$, neboť jinak by nebyly úhly $\sphericalangle CMK$, $\sphericalangle CMH$ definovány. Při důkazu rovnosti $\varphi = \frac{1}{2} \alpha$ postupujeme obdobně jako v odstavci

b), tj. využijeme vzorce pro součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka $CMHA$. Trochu je jiná situace pro body K , N' a úhly β , ψ . Zde nejprve dokážeme $\sphericalangle CBN' = \sphericalangle KBS =$
 $= \sphericalangle SKB = 90^\circ - \psi$. Proto je $\sphericalangle MKB = \psi$, a protože $\sphericalangle KMC = \beta$ je vnější úhel $\triangle MN'K$, je $\sphericalangle MKN' =$
 $= \psi = \frac{\beta}{2}$, $\triangle KMN'$ je rovnoramenný. Obdobně jako v odstavci b) dokážeme, že je $N = N'$ a dostaneme tedy



Obr. 13b

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{d+r}{CN}, \quad \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{CN}{d-r},$$

znásobením

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{d+r}{d-r}. \quad (4)$$

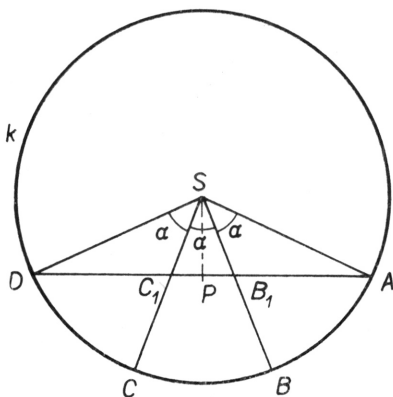
Souhrnně lze zapsat vzorce (3), (4) takto:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{d+r}{|d-r|};$$

Odst. c) ukazuje, že nemá smysl se zabývat případem $d = r$.

6. Je daná kružnica $k \equiv (S; r)$ a na nej štyri rôzne body A, B, C, D také, že $\sphericalangle BSA = \sphericalangle CSB = \sphericalangle DSC = \alpha < 60^\circ$. Zostrojte tetivu AD a jej priesečníky s priamkami SB, SC označte v uvedenom poradí B_1, C_1 . Dokážte, že ak rastie α , rastie i poměr $\lambda = AB_1 : B_1C_1$.

RIEŠENIE. Keďže $\sphericalangle ASD = 3\alpha < 180^\circ$, leží úsečka AD v tomto uhle a aj bod B_1 leží v uhle $\sphericalangle ASD$ (obr. 14).



Obr. 14

Pritom nemôže byť $B_1 = S$, pretože vtedy by bol uhol ASD priamy, ani B_1 nemôže ležať na polpriamkach SA, SD , pretože body A, B, C, D sú navzájom rôzne. To isté platí i o bode C_1 . Z textu úlohy taktiež vidieť, že body A, C ležia v opačných polrovinách vytáčených priamkou SB , t. j. bod B_1 leží vo vnútri úsečky AC_1 .

Z predchádzajúcej úvahy vyplýva, že

$$\sphericalangle DAS = \frac{180^\circ - 3\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha, \quad \sphericalangle ASC_1 = 2\alpha,$$

$$\overline{B_1C_1} = \overline{AC_1} - \overline{AB_1},$$

$$\sphericalangle SB_1A = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{3}{2}\alpha\right) - \alpha = 90^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

$$\sphericalangle SC_1A = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{3}{2}\alpha\right) - 2\alpha = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Podľa sínusovej vety je

$$\overline{AB_1} = \overline{AS} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = r \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$\begin{aligned} \overline{AC_1} &= \overline{AS} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = r \frac{\sin 2\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \text{ a } \overline{B_1C_1} = \\ &= r \frac{\sin 2\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} - r \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} = r \frac{\sin 2\alpha - \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Teda } \lambda &= \overline{AB_1} : \overline{B_1C_1} = r \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} : r \frac{\sin 2\alpha - \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha - 1}. \end{aligned}$$

Treba dokázať, že ak $\alpha_1 < \alpha_2 < 60^\circ$, potom je $\lambda_1 < \lambda_2$. Pretože funkcia $\cos x$ je v intervale $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ klesajúca, je $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2$, z čoho $2 \cos \alpha_1 - 1 > 2 \cos \alpha_2 - 1$ a keďže $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, je $\cos \alpha_1 > \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ a taktiež $\cos \alpha_2 > \frac{1}{2}$, prechádza posledná nerovnosť do tvaru

$$\frac{1}{2 \cos \alpha_1 - 1} < \frac{1}{2 \cos \alpha_2 - 1},$$

čo je už nerovnosť, ktorej správnosť sme mali dokázať.

2. KATEGORIE B

1. Jsou dána přirozená čísla $1, 2, 3, \dots, n$ (kde $n \geq 19$) vyjádřená v desítkové soustavě. Rozdělíme-li tato čísla libovolným způsobem na dvě neprázdné skupiny, pak je vždy možno vybrat z každé skupiny po jednom čísle tak, že obě vybraná čísla mají aspoň jednu společnou číslici. Dokažte.

Platí takové tvrzení i pro $n = 18$?

ŘEŠENÍ. Předpokládejme naopak, že existuje rozklad množiny daných čísel na dvě skupiny A, B takový, že žádné číslo z jedné skupiny nemá společnou číslici s žádným číslem z druhé skupiny. Číslo 10 necht' leží např. ve skupině A . Pak ale z našeho předpokladu vyplývá, že ve skupině A leží i 11, 12, 13, ..., 19, takže ve skupině A se vyskytují všechny číslice 0, 1, 2, ..., 9. Na skupinu B tedy žádné číslice nezbyvají. To je spor.

Pro $n = 18$ tvrzení neplatí, jak ukazuje rozklad, při němž jedna skupina obsahuje pouze číslo 9 a druhá všechna ostatní čísla.

2. Najděte všechny dvojice celých čísel x, y , pro které platí, že obě čísla $\frac{1+x}{y}$, $\frac{1+y}{x}$ jsou celá.

Výsledek znázorněte náčrtem v rovině pravoúhlých souřadnic x, y .

ŘEŠENÍ. x, y jsou celá čísla nutně různá od nuly.

[1] $x > 0, y > 0$. Je jasné, že musí platit

$$1+x \geq y \quad \text{a} \quad 1+y \geq x$$

neboli

$$1+x \geq y \quad \text{a} \quad y \geq x-1,$$

tj.

$$x - 1 \leq y \leq x + 1.$$

Tu jsou právě tři možnosti:

a) $y = x - 1$. Potom je $\frac{1+y}{x} = \frac{x}{x} = 1$ celé číslo pro všechna celá $x > 0$. Ale

$$\frac{1+x}{y} = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1},$$

a to je celé právě když $x - 1$ je dělitelem 2, tj. (viz $x > 0$) $x - 1 = 1$ nebo 2, tedy $x = 2$ nebo 3; příslušné $y = x - 1 = 1$ nebo 2.

Obě nalezené dvojice ($x = 2, y = 1$), ($x = 3, y = 2$) vyhovují úloze, jak se snadno přesvědčíme dosazením.

b) $y = x$. Pak $\frac{1+x}{y} = \frac{1+y}{x} = \frac{1+x}{x} =$
 $= 1 + \frac{1}{x}$. Nutně $x = 1$.

Dvojice ($x = 1, y = 1$) vyhovuje úloze.

c) $y = x + 1$, tj. $x = y - 1$. To je zřejmě obdobné jako v případě a); zaměníme x, y . Výsledek dostaneme jako symetrický obraz výsledků z a) podle přímky $y = x$.

V I. kvadrantu tedy vyhovuje pět bodů.

[2] $x < -1, y > 0$. Je zřejmé, že nyní musí platit

$$-(1+x) \geq y \quad \text{a} \quad 1+y \geq -x$$

čili

$$-(1+x) \geq y \quad \text{a} \quad y \geq -(1+x),$$

tj.

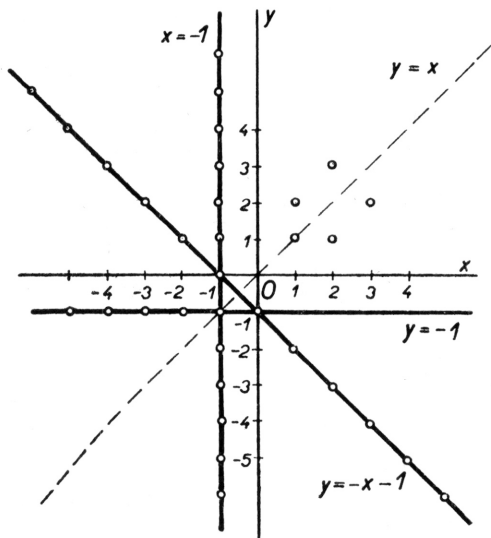
$$y = -x - 1.$$

Potom

$$\frac{1+x}{y} = -\frac{1+x}{1+x} = -1 \text{ celé číslo, } \frac{1+y}{x} =$$

$$= -\frac{x}{x} = -1 \text{ celé.}$$

Výsledek je znázorněn na obr. 15.



Obr. 15

Případ $x = -1$ je jednoduchý: vyhovuje každé celé $y \neq 0$ (viz obr. 15).

[3] Případ $y = -1$ je zase snadný. Mějme tedy $x < -1, y < -1$. Tu musí být

$$-(1+x) \geq -y \quad \text{a} \quad -(1+y) \geq -x,$$

tj.

$$1 + x \leq y \quad \text{a} \quad y \leq x - 1,$$

tedy

$$x + 1 \leq y \leq x - 1.$$

To však není možné, neboť vždy platí

$$x + 1 > x - 1 \quad (\Leftrightarrow 1 > -1).$$

V tomto případě tedy nenacházíme žádnou vyhovující dvojici x, y .

[4] IV. kvadrant už nemusíme vyšetřovat, vzhledem k souměrnosti výsledku podle přímky $y = x$. Uvedené body nejsou na obr. 15 ve IV. kvadrantu na přímce $y = -1$ vyznačeny.

Tím je celá rovnice prozkoumána.

Úloha má nekonečně mnoho řešení (viz obrázek 15).

3. Prirodzené číslo $N > 2$ je súčtom niekoľkých (aspoň dvoch) za sebou nasledujúcich prirodzených čísel práve vtedy, keď nie je mocninou čísla 2. Dokážte a uveďte príklad $N = 100$.

RIEŠENIE. a) Nech je

$$N = a + (a + 1) + \dots + (a + b), \quad (1)$$

kde a, b sú prirodzené čísla. Z (1) vyplýva, že platí

$$N = (a + b) + (a + b - 1) + \dots + a. \quad (2)$$

Sčítaním (1) a (2) dostaneme

$$2N = (2a + b)(b + 1). \quad (3)$$

Keďže z textu úlohy vyplýva, že je $a \geq 1, b \geq 1$, zrejme platí

$$2a + b \geq 3, \quad b + 1 \geq 2.$$

Ďalej platí: Ak je b párne, je $b + 1$ nepárne; ak je b nepárne, je aj $2a + b$ nepárne číslo. Číslo $2N$ a teda aj N

má aspoň jedného nepárneho prvočiniteľa a nie je preto mocninou čísla 2.

b) Nech $N > 2$ nie je mocninou čísla 2. Potom má N aspoň jedného nepárneho prvočiniteľa a číslo $2N$ možno rozložiť na súčin dvoch činiteľov, z ktorých jeden je párny, druhý nepárny a každý z nich je väčší než 1. Nech je $2N = \alpha\beta$ taký rozklad. Označenie činiteľov zvolme tak, aby platilo: $\alpha < \beta$.

Pretože $a \geq 1$ implikuje $2a + b \geq b + 2 > b + 1$, pokúsme sa nájsť prirodzené čísla a, b tak, aby platilo

$$b + 1 = \alpha, \quad 2a + b = \beta.$$

Z toho dostaneme

$$b = \alpha - 1, \quad 2a = \beta - \alpha + 1. \quad (4)$$

Čísla α, β sú však rôznej parity, preto je $\beta - \alpha + 1$ číslo párne a z podmienky $\alpha < \beta$ vyplýva, že je $\beta - \alpha + 1 \geq 2$. Zo (4) teda dostaneme

$$b = \alpha - 1, \quad a = \frac{1}{2}(\beta - \alpha + 1),$$

kde $a \geq 1$ je prirodzené číslo. Obrátením postupu z (3) dostaneme (1).

c) Ak je napr. $N = 100$, rozložíme číslo $2N = 200$ na súčin $8 \cdot 25$ a položíme $b + 1 = 8$, $2a + b = 25$. Z toho vyplýva $b = 7$, $a = 9$ a jedno z riešení úlohy teda je

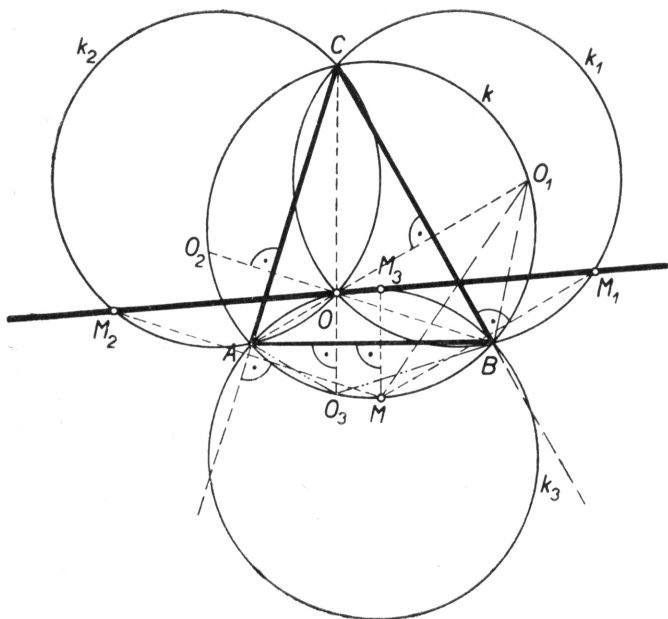
$$9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 100.$$

Iné riešenie dostaneme z rozkladu $2N = 200 = 5 \cdot 40$. V tomto prípade je $b + 1 = 5$, $2a + b = 40$ čiže $b = 4$, $a = 18$ a teda

$$18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100.$$

4. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC a na kružnici k jemu opísanej bod M , ktorý nesplýva so žiadnym z vrcholov A, B, C .

Označme M_1, M_2, M_3 body súmerne združené s bodom M podľa priamok BC, AC a AB v uvedenom poradí. Potom body M_1, M_2, M_3 ležia na priamke prechádzajúcej priesečníkom výšok trojuholníka ABC . Dokážte.



Obr. 16

RIEŠENIE. Priesečník výšok daného trojuholníka označme O a body s ním súmerne združené podľa priamok BC, AC, AB nech sú v uvedenom poradí O_1, O_2, O_3 (obr. 16). Pretože

$$\sphericalangle AO_3B = \sphericalangle AOB = 180^\circ - \sphericalangle ACB$$

a body C , O_3 sú oddelené priamkou AB , leží bod O_3 na kružnici k . Podobne aj body O_1 , O_2 ležia na kružnici k . Ak teda zostrojíme kružnice k_1 , k_2 , k_3 súmerne združené s kružnicou k podľa priamok BC , AC , AB , budú tieto tri (zhodné) kružnice prechádzať bodom O .

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že bod M leží na tom oblúku $\widehat{AB}$ kružnice k , na ktorom neľží vrchol C . Bod M_1 leží potom vo vnútri uhla $\sphericalangle BOC$ (a to na väčšom oblúku $\widehat{BC}$ kružnice k_1). Podobné tvrdenie možno vysloviť aj o bode M_2 .

Zo súmernosti podľa priamky BC vyplýva rovnosť

$$\sphericalangle BOM_1 = \sphericalangle BO_1M$$

a pretože $\sphericalangle BO_1M = \sphericalangle BCM$ (obvodové uhly nad tetivou BM v kružnici k), platí

$$\sphericalangle BOM_1 = \sphericalangle BCM.$$

Podobne sa dokáže, že $\sphericalangle AOM_2 = \sphericalangle ACM$. Celkom teda dostávame

$$\begin{aligned} \sphericalangle AOM_2 + \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOM_1 &= \sphericalangle ACB + \\ &+ \sphericalangle AOB = 180^\circ. \end{aligned}$$

Tak sme dokázali, že body M_1 , O , M_2 ležia v jednej priamke.

Ak je náhodou $M = O_3$, leží i bod $M_3 = O$ na tejto priamke. Predpokladajme preto, že bod $M \neq O_3$ leží napr. na oblúku $\widehat{AO_3}$. Potom zo súmernosti podľa priamky AB vyplýva, že

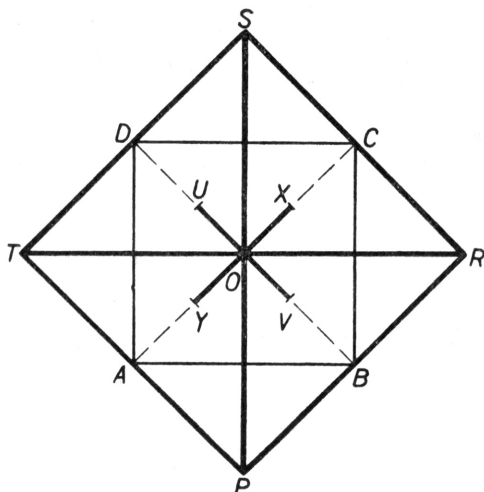
$$\sphericalangle AOM_3 = \sphericalangle AO_3M = \sphericalangle ACM = \sphericalangle AOM_2.$$

Pretože bod M_3 (ležiaci na menšom oblúku $\widehat{AO}$ kružnice k_3) padne rovnako ako bod M_2 do uhla $\sphericalangle AOC$, je jasné, že aj M_3 leží na našej priamke.

Tým je úloha vyriešená.

5. Je daný štvorec $ABCD$. Uhlopriečka štvorca $KLMN$ je zhodná so stranou štvorca $ABCD$ a vrcholy K aj M ležia na obvode štvorca $ABCD$.

Určite množinu všetkých vrcholov L všetkých takých štvorcov $KLMN$.

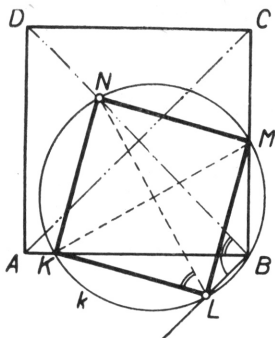


Obr. 17

RIEŠENIE. Nech $PRST$ je štvorec, ktorého stredné priečky sú AC , BD (pozri obr. 17).

I. Body K , M môžu ležať na dvoch protiľahlých stranách daného štvorca $ABCD$. V tomto jednoduchom prípade sa geometrické miesto bodov L skladá práve z úsečiek PS , RT .

II. Nech teraz body K , M ležia na dvoch susedných stranách daného štvorca $ABCD$, napríklad tak, ako to je



Obr. 18

naznačené na obr. 18. Štvorcu $KLMN$ opišme kružnicu k . Podľa Thaletovej vety leží aj vrchol B na kružnici k . Všimnime si teraz obvodové uhly v kružnici k (napr. $\sphericalangle KBN = \sphericalangle KLN = 45^\circ = \sphericalangle KBL$). Vidíme, že bod L leží na úsečke PR a bod N na úsečke OU (pozri obr. 17, kde $BU = AB$). Pritom však označenie vrcholov L, N možno zameniť. Obrátene sa ľahko zistí, že ku každému

bodu L úsečky PR , resp. OU možno zostrojiť štvorec $KLMN$ ($KM = AB$), ktorého vrchol K leží na úsečke AB a vrchol M na úsečke BC . Podobnú úvahu môžeme previesť pre každú dvojicu susedných strán daného štvorca $ABCD$.

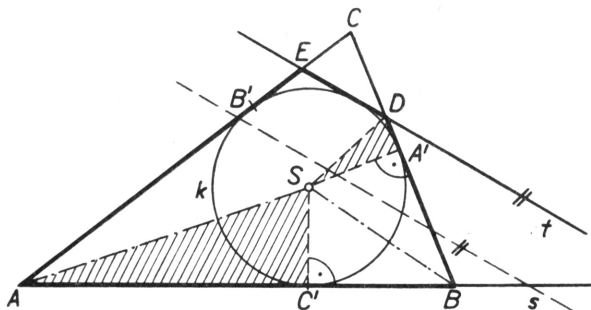
ZÁVER. Hľadané geometrické miesto bodov je na obr. 17 silno vytiahnuté.

6. Je dán trojuholník ABC , jehož strany majú dĺžky $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

a) Sestrojte bod D strany BC a bod E strany CA tak, aby štvoruholníku $ABDE$ bolo možno opsat i vepsat kružnici.

b) Vyjádřete vzdálenosti CD , CE i obvod čtyřúhelníka $ABDE$ pomocí délek a , b , c .

ŘEŠENÍ (obr. 19). a) Označme k kružnici vepsanou trojuholníku ABC a A', B', C' její body dotyku se stranami BC , CA a AB . Přímka DE musí být zřejmě tečnou kružnice k . Protože má být čtyřúhelník $ABDE$ tětiový, musí být $\sphericalangle BDE = 180^\circ - \sphericalangle BAE$; tím je dán směr s



Obr. 19

přímky DE . Sestrojíme tečnu t kružnice k , která je rovnoběžná s přímkou s tak, aby kružnice k i body A, B ležely v téže polorovině s hranicí t . Průsečíky D, E přímky t se stranami CB, CA leží uvnitř úseček CA', CB' . Obrácením postupu vyplývá, že čtyřúhelníku $ABDE$ lze i opsat kružnici.

b) Označme S střed kružnice k ; pak je $\sphericalangle SDA' = \frac{1}{2} (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, a tedy $\sphericalangle DSA' = \frac{\alpha}{2}$.

Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků je

$$\triangle ASC' \sim \triangle SDA'$$

a odtud

$$SA' : A'D = AC' : SC'. \quad (1)$$

Platí však $SA' = SC' = \varrho$, kde ϱ je poloměr kružnice k ; mimoto je podle známého vzorce $AC' = s - a$, kde $s =$

$$= \frac{1}{2} (a + b + c).$$

Dosadíme-li do (1), vyjde

$$A'D = \frac{\varrho^2}{s - a}. \quad (2)$$

Dále užijeme vzorce

$$\varrho = \frac{P}{s}, \text{ kde } P \text{ je obsah trojúhelníka } ABC.$$

Užijeme-li Heronova vzorce $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, dostaneme pro ϱ^2 rovnost

$$\varrho^2 = \frac{P^2}{s^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}; \quad (3)$$

spojením (3) a (2) vyjde

$$A'D = \frac{(s-b)(s-c)}{s}. \quad (4)$$

Protože podle známého vzorce je

$$BA' = s - b,$$

je podle (4)

$$BD = BA' + A'D = s - b + \frac{(s-b)(s-c)}{s}$$

a po úpravě

$$BD = \frac{s-b}{s} (a+b). \quad (5)$$

Z rovnosti (5) plyne dále

$$CD = a - BD = \frac{1}{s} (as - as - bs + ab + b^2),$$

$$CD = \frac{b}{s} (a + b - s) = \frac{b}{s} (2s - c - s),$$

neboli

$$CD = \frac{s-c}{s} \cdot b. \quad (6a)$$

Výměnou písmen $D \leftrightarrow E, a \leftrightarrow b$ dostaneme

$$CE = \frac{s - c}{s} \cdot a. \quad (6b)$$

Vzorce (6ab) jsou odpovědí na první otázku b).

Ze vzorce (5) dostaneme výměnou písmen $A \leftrightarrow B, D \leftrightarrow E, a \leftrightarrow b$ vzorec

$$AE = \frac{s - a}{s} (a + b).$$

$AE + BD$ je poloviční délka obvodu o čtyřúhelníka $ABDE$, který je tečnový. Je tedy

$$o = 2 \frac{s - a}{s} (a + b) + 2 \frac{s - b}{s} (a + b),$$

neboli

$$o = \frac{4(a + b)}{2s} (s - a + s - b),$$

čili

$$o = \frac{4(a + b) \cdot c}{a + b + c},$$

což je výsledná formule.

3. KATEGÓRIA Z

1. Je daná sústava dvoch rovníc s dvoma neznámymi x, y

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 0, \\ 2x - y &= -3. \end{aligned} \quad (1)$$

Z tejto sústavy dostaneme novú sústavu tak, že ku každému koeficientu pri neznámej pripočítame to isté číslo p . Nová sústava bude mať za riešenie dvojicu čísel x, y , ktorých rozdiel je 1. Určte všetky čísla p tejto vlastnosti.

RIEŠENIE. Riešením novej sústavy budú buď čísla x , $x + 1$ alebo čísla x , $x - 1$. Preskúmame obe možnosti.

a) Nech $y = x + 1$. Potom nová sústava sa dá prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}(3 + p)x + (2 + p)(x + 1) &= 0, \\ (2 + p)x + (p - 1)(x + 1) &= -3.\end{aligned}\tag{2}$$

Odčítaním druhej rovnice od prvej dostaneme $x = 0$. Po dosadení do prvej rovnice (2) vyjde $p = -2$. Pozmenená sústava (1) má pre $p = -2$ tvar: $x = 0$, $-3y = -3$ čiže $x = 0$, $y = 1$. Je teda $y - x = 1$.

b) Ak bude $y = x - 1$, potom po dosadení do novej sústavy máme

$$\begin{aligned}(3 + p)x + (2 + p)(x - 1) &= 0, \\ (2 + p)x + (p - 1)(x - 1) &= -3.\end{aligned}\tag{3}$$

Rovnakou úpravou ako v predchádzajúcom prípade zo sústavy (3) dostaneme $4x - 3 = 3$, z čoho $x = \frac{3}{2}$. Ak tento výsledok dosadíme do prvej rovnice (3), dostaneme $p = -\frac{11}{4}$. Pozmenená sústava (1) má v tomto prípade teda tvar

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y &= 0, \\ -\frac{3}{4}x - \frac{15}{4}y &= -3.\end{aligned}$$

Táto sústava má riešenie $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, takže je opäť splnená podmienka z textu úlohy: $x - y = 1$.

ZÁVER. Pretože sústavy (2), resp. (3) majú vždy len jediné riešenie $x = 0$, $p = -2$, resp. $x = \frac{3}{2}$, $p = -\frac{11}{4}$, sú teda $p = -2$, $p = -\frac{11}{4}$ hľadané čísla.

2. Udejte všetky pravoúhelníky, jejichž strany mají délky vyjádřené celými čísly (v centimetrech), a které mají tu vlastnost, že jejich obvod (v cm) je roven jejich obsahu (v cm²).

ŘEŠENÍ. Jsou-li a , b velikosti stran hledaného pravoúhelníka, pak podle podmínky úlohy platí

$$2a + 2b = ab. \quad (1)$$

Přepíšeme-li tuto rovnici v tvaru

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4,$$

vyplývá odtud

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

Čísla $a - 2$, $b - 2$ jsou tedy sdruženými děliteli čísla 4. Výsledky sestavíme do tabulky:

$a - 2$	4	2	1	-4	-2	-1
$b - 2$	1	2	4	-1	-2	-4
a	6	4	3	-2	0	1
b	3	4	6	1	0	-2

Geometrický význam mají jen kladné hodnoty. Hledané pravoúhelníky jsou dva: obdélník o stranách velikosti 3 cm a 6 cm a čtverec, jehož strana má velikost 4 cm.

POZNÁMKA. Při hledání dvojic přirozených čísel a, b , které splňují rovnici (1) lze také postupovat následujícím způsobem. Z (1) plyne

$$a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2(b-2) + 4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}.$$

Číslo $b-2$ je tedy dělitelem čísla 4. Na základě toho dojdeme tedy k obdobné tabulce jako v uvedeném řešení. Bude ovšem mít jen tři řádky, a to pro $b-2, b, a$.

3. Je dán obdélník $ABCD$, v němž $AB = 2a, BC = a$. Nad stranami AB, AD jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice, které kromě bodu A mají společný ještě bod K .

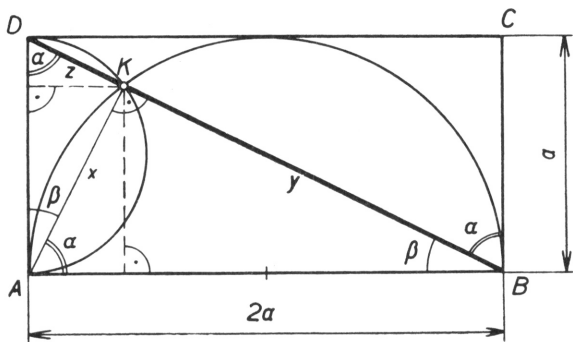
a) Dokažte, že bod K leží na úhlopříčce BD .

b) Vypočítejte vzdálenosti bodu K od vrcholů A, B, D .

ŘEŠENÍ. a) Poněvadž podle Thaletovy věty

$$\sphericalangle AKD = 90^\circ \text{ a zároveň } \sphericalangle AKB = 90^\circ,$$

leží body B, K, D v přímce, tj. na úhlopříčce BD daného obdélníka (obr. 20).



Obr. 20

b) Označme

$$AK = x, \quad BK = y, \quad BD = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ABK plyne

$$x^2 + y^2 = 4a^2,$$

a podobně z pravoúhlého trojúhelníka ADK plyne

$$x^2 + (a\sqrt{5} - y)^2 = a^2.$$

Upravujeme druhou rovnici

$$x^2 + y^2 - 2ay\sqrt{5} + 5a^2 = a^2.$$

Dosadíme z první rovnice

$$4a^2 - 2ay\sqrt{5} + 4a^2 = 0$$

a odtud

$$y = \frac{4a}{\sqrt{5}}, \quad x = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Nakonec ještě dostaneme

$$DK = a\sqrt{5} - y = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme $DK = z$. Z podobnosti $\triangle AKB \sim \triangle DKA$ (věta *uu*) plyne

$$z : x = x : y.$$

Dosadíme-li

$$z = a\sqrt{5} - y, \tag{1}$$

dostáváme

$$ay\sqrt{5} - y^2 = x^2,$$

odtud s použitím vztahu

$$x^2 + y^2 = 4a^2 \tag{2}$$

plyne $y = \frac{4a}{\sqrt{5}}$. Z (1) pak určíme z . Z (2) můžeme určit x .

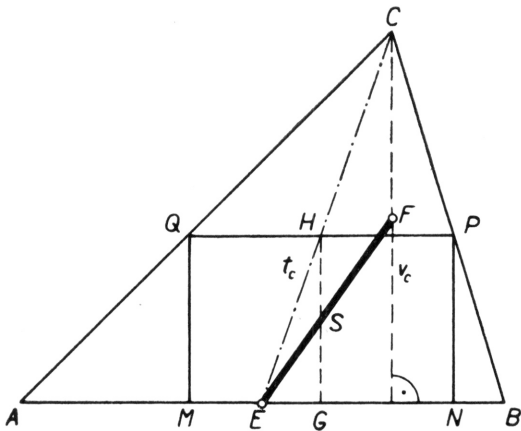
Rychleji lze x určit z podobnosti $\triangle ABK \sim \triangle DBA$ (věta *uu*), odkud plyne

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

4. Do ostrouhlého trojuholníka ABC je vpísaný obdĺžnik $MNPQ$ tak, že vrcholy M, N ležia na strane AB , vrchol P na strane BC a vrchol Q na strane CA .

Vyšetríte geometrické miesto ťstredov vťetkťch obdť-
nikov $MNPQ$.

RIEŠENIE. Zostrojme jeden obdĺžnik $MNPQ$, ktorý vyhovuje podmienkam úlohy a jeho stred S (obr. 21).



Obr. 21

Bod S ako stred obdlžnika $MNPQ$ je stredom jeho strednej priečky HG , kde H je stred strany QP a G stred strany MN . Zrejme je $HG \perp AB$.

Bod H je stredom pričky QP trojuholníka ABC , ktorá je rovnobežná so stranou AB , a preto bod H leží na ťažnici $t_c = EC$ trojuholníka ABC . Obrátene ľahko zistíme, že každý vnútorný bod H' ťažnice $EC = t_c$ je stredom strany $Q'P'$ nejakého obdĺžnika $M'N'P'Q'$ vyhovujúceho podmienkam úlohy. Dochádzame teda k úlohe, ktorú možno formulovať takto:

Určite geometrické miesto stredov S všetkých úsečiek HG , kde bod H prebieha vnútro úsečky $EC = t_c$, G leží na AB a $HG \perp AB$.

ZÁVER. Množinou stredov S je teda vnútro úsečky EF , kde F je stred výšky v_c z bodu C na stranu AB , čo platí aj v prípade, keď t_c splýva s v_c , t. j. keď $AC = BC$.

IV. Soutěžní úlohy II. kola

1. KATEGORIE A

1a. Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo a je výraz $(2a + 1)^{12} - (2a + 1)^8 - (2a + 1)^4 + 1$ dělitelný číslem $512 a^2$. (5 bodů)

ŘEŠENÍ. Nechť $2a + 1 = n$, pak postupně dostaneme

$$\begin{aligned}(2a + 1)^{12} - (2a + 1)^8 - (2a + 1)^4 + 1 &= \\&= n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = n^8(n^4 - 1) - (n^4 - 1) = \\&= (n^4 - 1)(n^8 - 1) = (n^4 - 1)(n^4 - 1)(n^4 + 1) = \\&= (n^4 - 1)^2(n^4 + 1) = (n^2 - 1)^2(n^2 + 1)^2(n^4 + 1) = \\&= (n + 1)^2(n - 1)^2(n^2 + 1)^2(n^4 + 1) = \\&= (n + 1)(n - 1)(n + 1)(n - 1)(n^2 + 1)(n^2 + 1) \cdot \\&\cdot (n^4 + 1) = 2a2(a + 1)2a2(a + 1)2(2a^2 + 2a + 1) \cdot \\&\cdot 2(2a^2 + 2a + 1)2(8a^4 + 16a^3 + 12a^2 + 4a + 1) = \\&= 128a^2(a + 1)^2(2a^2 + 2a + 1)^2 \cdot \\&\cdot (8a^4 + 16a^3 + 12a^2 + 4a + 1) \cdot\end{aligned}$$

Poněvadž a je liché, je $a + 1$ sudé číslo čili $a + 1 = 2k$; pak

$$\begin{aligned}128a^2(a + 1)^2(2a^2 + 2a + 1)^2 \cdot \\&\cdot (8a^4 + 16a^3 + 12a^2 + 4a + 1) = 512a^2k^2 \cdot \\&\cdot (2a^2 + 2a + 1)^2(8a^4 + 16a^3 + 12a^2 + 4a + 1) = \\&= 512a^2N,\end{aligned}$$

kde

$$N = k^2(2a^2 + 2a + 1)^2(8a^4 + 16a^3 + 12a^2 + 4a + 1).$$

Jiná možná úprava je:

$$\begin{aligned} & (2a + 1)^{12} - (2a + 1)^8 - (2a + 1)^4 + 1 = \\ & = (2a + 1)^8 [(2a + 1)^4 - 1] - [(2a + 1)^4 - 1] = \\ & = [(2a + 1)^8 - 1] \cdot [(2a + 1)^4 - 1] = \\ & = [(2a + 1)^4 + 1] [(2a + 1)^4 - 1]^2 = \\ & = [(2a + 1)^4 + 1] [(2a + 1)^2 - 1]^2 [(2a + 1)^2 + 1]^2 = \\ & = [(2a + 1)^4 + 1] \cdot [2a \cdot 2(a + 1)]^2 \cdot [(2a + 1)^2 + 1]^2 = \\ & = 2m \cdot 16a^2 \cdot (a + 1)^2 \cdot 4 \cdot p \text{ a protože } a \text{ je liché, je} \\ & a + 1 = 2k, \text{ takže celkem dostaneme } 512a^2mk^2p. \end{aligned}$$

JINÉ ŘEŠENÍ. Daný mnohočlen N lze rozložit takto:

$$\begin{aligned} N &= [(2a + 1)^4 - 1] \cdot [(2a + 1)^8 - 1] = \\ &= [(2a + 1)^2 + 1] \cdot [(2a + 1) + 1] \cdot \\ &\quad \cdot [(2a + 1) - 1] \cdot [(2a + 1)^4 + 1] \cdot \\ &\quad \cdot [(2a + 1)^2 + 1] \cdot [(2a + 1) + 1] \cdot \\ &\quad \cdot [(2a + 1) - 1] = 2 \cdot (2a^2 + 2a + 1) \cdot \\ &\quad \cdot 2(a + 1) \cdot 2a \cdot 2 \cdot (8a^4 + 16a^3 + 12a^2 + 4a + 1) \cdot \\ &\quad \cdot 2(2a^2 + 2a + 1) \cdot 2(a + 1) \cdot 2a. \end{aligned}$$

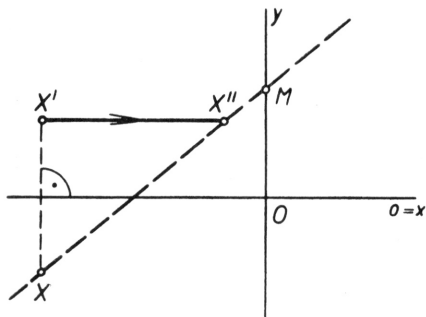
N je tedy dělitelný číslem $2^9 \cdot a^2 = 512a^2$, protože $(a + 1)$ je číslo sudé, $q \cdot e \cdot d$.

Řešil Pavel Pudlák,

3. D, SVVŠ, Nad štolou, Praha 7

1b. V rovině ϱ je dána přímka o , bod M a posunutí P ve směru přímky o . Souměrnost podle osy o převede bod X roviny ϱ v bod X' , posunutí P převede X' v bod X'' . Určete množinu všech takových bodů X roviny ϱ , pro něž leží body M , X , X'' v přímce. (5 bodů)

ŘEŠENÍ. Samo znění textu svádí k použití metody souřadnic. Přímku o zvolíme za osu x , a to tak, aby smysl kladné poloosy x byl souhlasný se smyslem posunutí P .



Obr. 22

Osu y zvolíme tak, aby bod M ležel na kladné poloose y (obr. 22). Souřadnice bodu M jsou pak $M = [0; b]$, kde $b \geq 0$. Dále označme $X = [x, y]$, $X' = [x', y']$, $X'' = [x'', y'']$. Z textu úlohy plyne pro souměrnost podle osy o :

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -y. \end{aligned} \quad (1)$$

Pro posunutí P pak platí

$$\begin{aligned} x'' &= x' + a, \\ y'' &= y', \end{aligned} \quad (2)$$

kde $a > 0$. Spojením (1) a (2) dostaneme

$$\begin{aligned} x'' &= x + a, \\ y'' &= -y. \end{aligned} \quad (3)$$

Podle (3) je vždy $X \neq X''$, neboť $a > 0$. Existuje tedy přímka XX'' a má rovnici

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0. \quad (4)$$

Z (4) plyne podle (3)

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta y + \gamma &= 0, \\ \alpha(x + a) - \beta y + \gamma &= 0\end{aligned}\quad (5)$$

a odtud

$$a\alpha - 2y\beta = 0. \quad (6)$$

V rovnici (6) můžeme volit $\alpha = 2y$, $\beta = a$, neboť $a > 0$. Z první rovnice (5) vypočteme $\gamma = -ay - 2xy$. Rovnice přímky XX'' tedy zní

$$2y\xi + a\eta - (ay + 2xy) = 0. \quad (7)$$

Prochází-li přímka XX'' bodem M , vyhovují rovnici (7) čísla $\xi = 0$, $\eta = b$. Ze (7) pak plyne

$$2xy + ay = ab,$$

neboli

$$y \left(x + \frac{a}{2} \right) = \frac{a}{2} b. \quad (8)$$

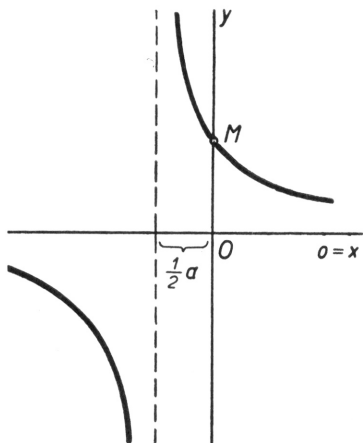
Obráceně, když souřadnice $[x; y]$ vyhovují rovnici (8), pak přímka (7) obsahuje bod $M(\xi = 0, \eta = b)$, bod $X(\xi = x, \eta = y)$ a podle (3) i bod $X''(\xi = x + a, \eta = -y)$. Je tedy rovnice (8) analytickým vyjádřením hledané množiny bodů.

Pro $b > 0$ rovnice (8) však vyjadřuje rovnosou hyperbolu, jejíž asymptoty jsou přímky $x + \frac{a}{2} = 0$, $y = 0$ a která prochází bodem M (obr. 23a). Pro $b = 0$ vyjadřuje rovnice (8) dvojici kolmých přímk (obr. 23b).

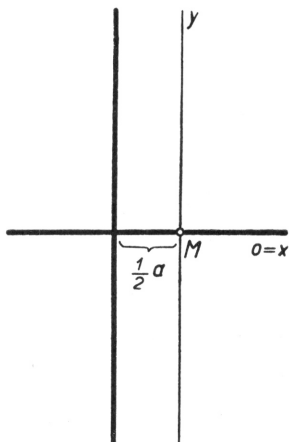
2a. Určte všechny hodnoty parametra a , pro které má rovnice

$$\cos(x + a) = \cos x + \cos a \quad (1)$$

řešení. (6 bodů)



Obr. 23a



Obr. 23b

RIEŠENIE. Rovnica (1) je ekvivalentná s rovnicou

$$\cos(x + a) - \cos x = \cos a ,$$

a teda tiež s rovnicou

$$-2 \sin \left(x + \frac{a}{2} \right) \cdot \sin \frac{a}{2} = \cos a . \quad (2)$$

Nutnou podmienkou riešiteľnosti rovnice (2) je

$$\sin \frac{a}{2} \neq 0 . \quad (3)$$

Ak by totiž bolo $\sin \frac{a}{2} = 0$, potom by rovnica (2) mala riešenie len vtedy, keď by zároveň platilo $\cos a = 0$, čo však nie je možné.

Rovnica (1) má teda riešenie práve vtedy, keď má riešenie rovnica

$$\sin \left(x + \frac{a}{2} \right) = - \frac{\cos a}{2 \sin \frac{a}{2}}, \quad (4)$$

čiže práve vtedy, keď platí

$$\left| \frac{\cos a}{2 \sin \frac{a}{2}} \right| \leq 1. \quad (5)$$

Pritom je zrejmé, že podmienka (3) je už zahrnutá v (5).

Úloha prešla teda na riešenie nerovnice (5). Nerovnica (5) je ekvivalentná s nerovnicou

$$|\cos a| \leq 2 \left| \sin \frac{a}{2} \right|, \quad (6)$$

pretože a , pre ktoré platí $\sin \frac{a}{2} = 0$, nemôže byť riešením (6), lebo by zároveň muselo platiť $\cos a = 0$.

Nerovnica (6) je ekvivalentná s nerovnicou

$$\cos^2 a \leq 4 \sin^2 \frac{a}{2}.$$

Ak použijeme vzťah $2 \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a$, dostaneme

$$\cos^2 a \leq 2 - 2 \cos a$$

čiže

$$(\cos a + 1)^2 \leq 3,$$

z čoho po odmocnení máme

$$\cos a \leq \sqrt{3} - 1. \quad (7)$$

Ak označíme α veľkosť ostrého uhla, pre ktorý platí $\cos \alpha = \sqrt[3]{3} - 1$, t. j. $\alpha \doteq 42^\circ 56'$, dostávame, že riešením nerovnice (7), a teda tiež (5), sú všetky a , ktoré vyhovujú nerovnostiam

$$\alpha + 2k\pi \leq a \leq (2\pi - \alpha) + 2k\pi, \quad (8)$$

kde k je celé číslo.

Nerovnosti (8) spolu s podmienkou $\cos \alpha = \sqrt[3]{3} - 1$ určujú množinu všetkých hodnôt parametra a , pre ktoré má rovnica (1) riešenie. Pri zvolenom a , ktoré vyhovuje podmienkam (8) sa x určí z rovnice (4).

INÉ RIEŠENIE. Rovnica (1) je ekvivalentná s rovnicou

$$\cos x \cdot \cos a - \sin x \cdot \sin a = \cos x + \cos a,$$

ktorú možno upraviť na tvar

$$\sin a \cdot \sin x + (1 - \cos a) \cos x = -\cos a. \quad (9)$$

Ak položíme $\sin a = A$, $1 - \cos a = B$, $-\cos a = C$, dostaneme goniometrickú rovnicu

$$A \sin x + B \cos x = C. \quad (10)$$

Riešenie goniometrickej rovnice typu (10) je podrobne rozobrané v knižke autorov *B. Budinského a S. Šmakala: Goniometrické funkce*, ktorá vyšla v nakladateľstve *Mladá fronta* r. 1968 ako 20. zväzok edície *Škola mladých matematikov*. V knižke sú vysvetlené tri spôsoby riešenia rovníc typu (10). Je tam tiež odvodené, že rovnica (10) má riešenie práve vtedy, keď $C^2 \leq A^2 + B^2$. Pre rovnicu (9) má táto podmienka tvar

$$\cos^2 a \leq \sin^2 a + (1 - \cos a)^2,$$

z čoho po jednoduchšej úprave dostaneme

$$(\cos a + 1)^2 \leq 3,$$

odkiaľ po odmocnení dostávame nerovnicu (7).

2b. Je daný štvorsten $ABCD$ taký, že päta P výšky v vedenej z bodu D na stenu ABC leží v trojuholníku ABC . Nech $v \geq \max(a, b, c)$, kde $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ a $c = \overline{AB}$. Dokážte, že potom

$$P_{ABC} < \frac{\sqrt{2}}{2} (P_{BCD} + P_{ACD} + P_{ABD}),$$

kde P_{XYZ} znamená plochu trojuholníka XYZ . (6 bodov)

RIEŠENIE. Označme vzdialenosti bodu P od strán BC , AC , AB v uvedenom poradí v_a , v_b , v_c (ak P leží na strane BC , kladieme $v_a = 0$, podobne v prípade iných strán trojuholníka ABC). Ľahko sa presvedčíme, že $v_a \leq v_A$, kde v_A je výška na stranu BC v trojuholníku ABC . Z vlastností pravouhlého trojuholníka však vyplýva, že platí

$$v_A \leq b, \quad (1)$$

z čoho vzhľadom na predchádzajúcu nerovnosť vyplýva, že $v_a \leq b$. Podobne zistíme, že $v_b \leq c$, $v_c \leq a$, a keďže vždy platí

$$\begin{aligned} a &\leq \max(a, b, c), & b &\leq \max(a, b, c), \\ c &\leq \max(a, b, c), \end{aligned} \quad (2)$$

dostávame

$$\begin{aligned} v_a &\leq \max(a, b, c), & v_b &\leq \max(a, b, c), \\ v_c &\leq \max(a, b, c). \end{aligned} \quad (3)$$

Dokážeme teraz, že z nerovností (3) je vždy aspoň jedna ostrá. Ak by totiž v (3) všade platila rovnosť, musela by platiť všade rovnosť aj v (2), z čoho vyplýva, že $a = b = c$, a teda aj v (1), čo však nie je možné, pretože v rovnostrannom trojuholníku je určite $v_A < b$. Tento spor dokazuje naše tvrdenie. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme teraz predpokladať, že v (3) je ostrá prvá nerovnosť. Potom platí

$$v_a < v, \quad v_b \leq v, \quad v_c \leq v.$$

Označme päty kolmíc spustených z bodu P na strany BC , CA , AB v uvedenom poradí A_1 , B_1 , C_1 (čiže $v_a = \overline{PA_1}$, $v_b = \overline{PB_1}$, $v_c = \overline{PC_1}$). Potom je $DP \perp BC$, CA , AB ; $PA_1 \perp BC$, $PB_1 \perp CA$, $PC_1 \perp AB$ čiže roviny DPA_1 , DPB_1 , DPC_1 sú kolmé v uvedenom poradí na priamky BC , CA , AB a teda DA_1 , DB_1 , DC_1 sú v uvedenom poradí výškami trojuholníkov BCD , ACD , ABD (spustenými z vrcholu D).

Teraz si dokážeme *vetu*: V pravouhlom trojuholníku s odvesnami x , y ($x \leq y$) a s preponou z platí

$$z > \sqrt{2}x \text{ pre } x < y; \quad z = \sqrt{2}x \text{ pre } x = y.$$

Pythagorova veta dáva totiž

pre $x < y$ je

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x \text{ čiže } z > \sqrt{2}x;$$

pre $x = y$ je

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x \text{ čiže } z = \sqrt{2}x.$$

Podľa tejto dokázanej vety máme

$$\overline{DA_1} > \sqrt{2} \overline{PA_1} = \sqrt{2} v_a, \quad \overline{DB_1} \geq \sqrt{2} \overline{PB_1} = \sqrt{2} v_b, \\ \overline{DC_1} \geq \sqrt{2} \overline{PC_1} = \sqrt{2} v_c,$$

pričom tieto vzťahy zostanú zrejme v platnosti aj v prípade, keď niektoré z čísel v_a , v_b , v_c sa rovná nule. Keďže bod P leží podľa predpokladu v trojuholníku ABC , platí

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} (\overline{BC} \cdot v_a + \overline{AC} \cdot v_b + \overline{AB} \cdot v_c)$$

a ďalej tiež

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{DA_1} > \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \sqrt{2} v_a,$$

$$P_{ACD} = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{DB}_1 \geq \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \sqrt{2} v_b,$$

$$P_{ABD} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{DC}_1 \geq \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \sqrt{2} v_c.$$

Sčítaním posledných troch nerovností dostaneme

$$P_{BCD} + P_{ACD} + P_{ABD} > \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} (\overline{BC} \cdot v_a + \overline{AC} \cdot v_b + \overline{AB} \cdot v_c) = \sqrt{2} \cdot P_{ABC},$$

z čoho už priamo dostaneme nerovnosť, ktorej správnosť sme mali dokázať.

JINÉ ŘEŠENÍ. Platí

$$P_{ABC} \leq \frac{1}{2} ab,$$

$$P_{ABC} \leq \frac{1}{2} bc,$$

$$P_{ABC} \leq \frac{1}{2} ca,$$

pričemž rovnosť môže nastať pouze v jednom prípade. Sečtením a užitím nerovnosti $v \geq \max(a, b, c)$ plyne

$$3 \cdot P_{ABC} < \frac{1}{2} v(a + b + c). \quad (1)$$

Dále platí

$$P_{ABD} \geq \frac{1}{2} c \cdot v,$$

$$P_{ACD} \geq \frac{1}{2} b \cdot v,$$

$$P_{BCD} \geq \frac{1}{2} a \cdot v,$$

z čehož sečtením plyne

$$P_{ABD} + P_{ACD} + P_{BCD} \geq \frac{1}{2} v(a + b + c). \quad (2)$$

Z (1), (2) dostáváme

$$P_{ABC} < \frac{1}{3} (P_{ABD} + P_{ACD} + P_{BCD}),$$

což je dokonce silnější nerovnost než ta, kterou jsme měli dokázat (je totiž $\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$).

Řešil Zbyšek Stýblo,

3. roč. SVVŠ, Arabská ul., Praha 6

3a. Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby menší z kořenů rovnice

$$qx^2 + px + 1 = 0,$$

kde p, q jsou reálná čísla, $q < 0$, splňoval nerovnost

$$x^2 + px + q < 0$$

je, aby platilo $p > q + 1$. Dokažte. (8 bodů)

ŘEŠENÍ. Rovnice

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

i daná rovnice

$$qx^2 + px + 1 = 0 \quad (2)$$

mají týž diskriminant

$$D = \frac{p^2}{4} - q > 0. \quad (3)$$

Proto každá z rovnic (1), (2) má dva navzájem různé reálné kořeny. Označme x_1, x_2 kořeny rovnice (1); pak je

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}. \quad (4)$$

Označme dále x_3, x_4 kořeny rovnice (2); snadno vypočteme, že je

$$x_3 = \frac{1}{q} x_1, \quad x_4 = \frac{1}{q} x_2. \quad (5)$$

Z (4) je patrné, že platí

$$x_1 > x_2. \quad (6)$$

Dále je $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < \frac{p^2}{4} - q = D$, tj. $\left|\frac{p}{2}\right| < \sqrt{D}$;

protože je $\frac{p}{2} \leq \left|\frac{p}{2}\right|$, je $\frac{p}{2} < \sqrt{D}$, tj. podle (4)

$$x_1 > 0. \quad (7)$$

Znásobíme-li (4) záporným číslem $\frac{1}{q}$, dostaneme vzhledem k (5) a (6) nerovnost $x_3 < x_4$. Úloha tedy žádá, aby byly splněny nerovnice

$$x_2 < x_3 < x_1. \quad (8)$$

Platí-li $x_3 < x_1$, je podle (4), (5) $\frac{x_1}{q} < x_1$ neboli $x_1 > qx_1$

neboli $x_1(1 - q) > 0$. Protože $1 - q > 0$ a protože platí (7), je poslední nerovnice splněna. Obrácením postupu zjistíme, že druhá nerovnice (8) je splněna pro každé p, q ($q < 0$), stačí tedy zabývat se první nerovnicí (8).

Nerovnici $x_2 < x_3$ přepíšeme podle (4), (5)

$$-\frac{p}{2} - \sqrt{D} < \frac{1}{q} \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D} \right).$$

Po znásobení záporným číslem $2q$ dostaneme

$$-pq - 2q\sqrt{D} > -p + 2\sqrt{D},$$

$$\text{tj.} \quad p(1 - q) > 2\sqrt{D}(q + 1). \quad (9)$$

Nyní rozlišíme dva případy: a) $q + 1 \geq 0$, b) $q + 1 < 0$.

V případě a) plyne z (9) $p \geq 0$. Umocníme (9) dvěma a dostaneme po úpravě

$$0 > -4q(q^2 + 2q + 1) + 4p^2q.$$

Dělíme tuto nerovnici kladným číslem $-4q$ a po další úpravě vyjde

$$p > q + 1. \quad (10)$$

Případ b): Je-li $p \geq 0$, je (10) evidentní. Je-li $p < 0$, umocníme (9) dvěma a dostaneme

$$p^2(1 - q)^2 < (p^2 - 4q)(q + 1)^2;$$

po úpravě jako v případě a) vyjde $p^2 < (q + 1)^2$, tj. $-p < -(q + 1)$, neboť v případě b) je $|q + 1| = -(q + 1)$ a ještě $p < 0$, je $|p| = -p$. Z nerovnice $-p < -(q + 1)$ plyne (10).

Tím je dokázáno, že (10) je *nutná podmínka* pro požadovanou vlastnost. *Obráceně*, nechť platí (10); rozlišíme opět případy: a) $q + 1 \geq 0$, b) $q + 1 < 0$. V případě a) plyne z (10) vztah $p > 0$; obrácením postupu odtud dospějeme k (9) a odtud k (8). Případ b): Je-li $q + 1 < 0$ a $p \geq 0$, je (9) evidentní a z (9) dospějeme obrácením postupu k (8). Je-li $q + 1 < 0$, $p < 0$, je $-p < -(q + 1)$; odtud umocněním a obrácením postupu vyjde (9) a konečně (8).

Je tedy (10) také *postačující podmínkou* pro požadovanou vlastnost.

JINÉ ŘEŠENÍ. Kořeny rovnice $qx^2 + px + 1 = 0$ jsou

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2q}.$$

(Protože $q < 0$, $p^2 \geq 0$, je $p^2 - 4q > 0$.) Menší z kořenů x_1, x_2 je kořen x_1 , neboť $q < 0$. Řešením nerovnosti $x^2 + px + q < 0$ je interval

$$x \in \left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right).$$

Má-li x_1 splňovat nerovnost $x^2 + px + q < 0$, musí být

$$x_1 \in \left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right), \text{ tedy}$$

$$\begin{aligned} \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} &< \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q} < \\ &< \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \end{aligned}$$

Protože $q < 0$, je $-4q > 0$, $p^2 - 4q > p^2$, $\sqrt{p^2 - 4q} > |p|$, takže $-p + \sqrt{p^2 - 4q} > 0$. Nerovnost

$$\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q} < \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

tedy vždy platí, takže nedostáváme z ní žádný nový vztah pro čísla p, q .

Budu řešit nerovnost

$$\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} < \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q},$$

jež je ekvivalentní s nerovností

$$q(p + \sqrt{p^2 - 4q}) < p - \sqrt{p^2 - 4q}, \quad (1)$$

neboť $q < 0$.

Nerovnost (1) je ovšem ekvivalentní s nerovností

$$\begin{aligned} pq - p &< -(q+1)\sqrt{p^2 - 4q}, \\ (q+1)\sqrt{p^2 - 4q} &< p(1-q). \end{aligned} \quad (2)$$

Rozliším nyní tři případy:

1. $q \in (-\infty; -1)$, pak levá strana nerovnosti (2) je záporná, $1 - q$ je číslo kladné. Je-li

a) $p \geq 0$, je $p(1-q) \geq 0 > (q+1)\sqrt{p^2 - 4q}$, takže nerovnost (2) je splněna. Protože $q < -1$, je $q+1 < 0$, $p \geq 0$, takže $p > q+1$.

b) $p < 0$, je $p(1-q) < 0$, tedy

$$(q+1)\sqrt{p^2 - 4q} < p(1-q) < 0.$$

Pak je ovšem nerovnost (2) ekvivalentní s nerovností $(q+1)^2(p^2 - 4q) > p^2(1-q)^2$, z níž dostávám postupně

$$\begin{aligned} p^2 - 4q &> p^2 \frac{(1-q)^2}{(1+q)^2}, \\ -4q &> p^2 \frac{(1-q)^2 - (1+q)^2}{(1+q)^2}, \end{aligned}$$

$$-4q > p^2 \frac{-4q}{(1+q)^2},$$

$$(1+q)^2 > p^2, \text{ neboť } q < 0, \text{ takže } -4q > 0,$$

$$|1+q| > |p|. \quad (3)$$

Avšak $p < 0$, $1+q < 0$, takže $|p| = -p$, $|1+q| = -1-q$ a z nerovnosti (3) dostávám

$$\begin{aligned} -1-q &> -p, \\ p &> q+1 \end{aligned}$$

2. $q = -1$, pak z nerovnosti (2) dostávám

$$0 < 2p, \text{ tedy}$$

$$p > 0. \quad (4)$$

Pro $q = -1$ je $q + 1 = 0$, což dosazeno do (4) dává

$$\underline{p > q + 1}.$$

3. $q \in (-1; 0)$; pak levá strana nerovnosti (2) je kladná, dále $1 - q > 0$, takže nutně musí být $p > 0$. Kdyby totiž bylo $p \leq 0$, bylo by $p(1 - q) \leq 0$, ale $(q + 1) \cdot \sqrt{p^2 - 4q} > 0$, takže by nemohlo být $(1 + q)\sqrt{p^2 - 4q} < p(1 - q)$. Je tedy

$$0 < (q + 1)\sqrt{p^2 - 4q} < p(1 - q)$$

a tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$(q + 1)^2 (p^2 - 4q) < p^2 (1 - q)^2, \text{ kterou upravíme}$$

$$p^2 - 4q < p^2 \frac{(1 - q)^2}{(1 + q)^2},$$

$$-4q < p^2 \frac{(1 - q)^2 - (1 + q)^2}{(1 + q)^2},$$

$$-4q < p^2 \frac{-4q}{(1 + q)^2},$$

$$(1 + q)^2 < p^2, \text{ neboť } -4q > 0, \text{ dále}$$

$$|1 + q| < |p|, \text{ a protože } 1 + q > 0, p > 0, \text{ je}$$

$$|1 + q| = 1 + q, |p| = p, \text{ takže}$$

$$\underline{q + 1 < p}.$$

Postup lze obrátit (upravovat nerovnost $1 + q < p$ pro $q \in (-\infty; -1)$, $q = -1$, $q \in (-1; 0)$ až do tvaru (2), pak do tvaru

$$\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} < \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q},$$

takže platí

$$\begin{aligned} \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} &< \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q} < \\ &< \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \end{aligned}$$

a kořen $x_1 < x_2$ rovnice $qx^2 + px + 1 = 0$ tedy skutečně splňuje nerovnost $x^2 + px + q < 0$. Tím je důkaz proveden.

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby menší z kořenů rovnice $qx^2 + px + 1 = 0$, kde p, q jsou reálná čísla, $q < 0$, splňoval nerovnost $x^2 + px + q < 0$ je tedy, aby platilo $p > q + 1$.

POZNÁMKA. Nejprve jsem dokázal, že má-li pro menší kořen rovnice $qx^2 + px + 1 = 0$ platit $x^2 + px + q < 0$, musí být $q + 1 < p$. Obrácením postupu jsem dokázal větu obrácenou, že totiž pro $p > q + 1$ pro menší kořen rovnice $qx^2 + px + 1 = 0$ platí $x^2 + px + q < 0$. Podle zákonů matematické logiky jsem tím dokázal, že $p > q + 1$ je nutná a postačující podmínka pro to, aby menší kořen rovnice $qx^2 + px + 1 = 0$ splňoval nerovnost $x^2 + px + q < 0$.

Řešil Rudolf Švarc,

3. F SVVŠ J. Fučíka, Plzeň

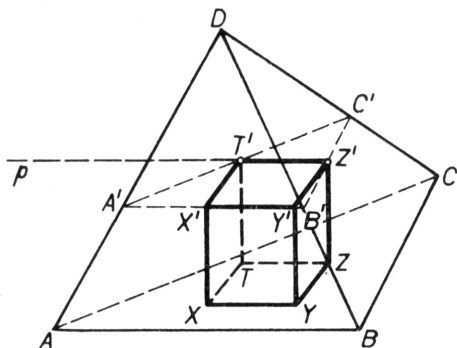
3b. Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož stěna ABC je ostroúhlý trojúhelník a jehož výška spuštěná z vrcholu D má patu uvnitř stěny ABC . Vyšetřte geometrické místo průsečíků tělesových úhlopříček takových kvádrů, které leží v čtyřstěnu $ABCD$, jejichž jedna stěna leží v rovině ABC , jedna hrana v rovině ABD a zbývající dva vrcholy v rovinách BCD , CAD . (8 bodů)

ŘEŠENÍ. Nejdříve uvedeme konstrukci jednoho z kvádrů $XYZTX'Y'Z'T'$, který má žádané vlastnosti.

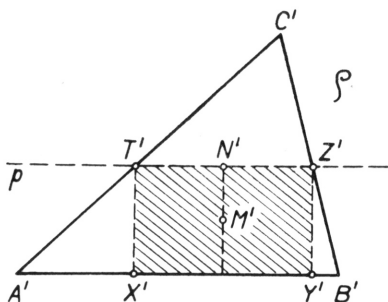
Nechť jeho stěna $XYZT$ leží v rovině ABC , jeho hrana $X'Y'$ v rovině ABD a vrcholy Z', T' po řadě v rovinách BCD, CAD . Rovina $\varrho = (X'Y'Z')$ protne čtyřstěn v trojúhelníku $A'B'C'$ (A' na AD , B' na BD , C' na CD) a platí

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC. \quad (1)$$

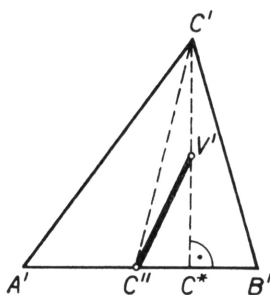
Vzhledem k (1) je $\triangle A'B'C'$ ostroúhlý, $X'Y' \subset A'B'$, Z', T' leží po řadě na stranách $B'C', C'A'$. Situace v prostoru je znázorněna na obr. 24, situace v rovině ϱ na obr. 25.



Obr. 24



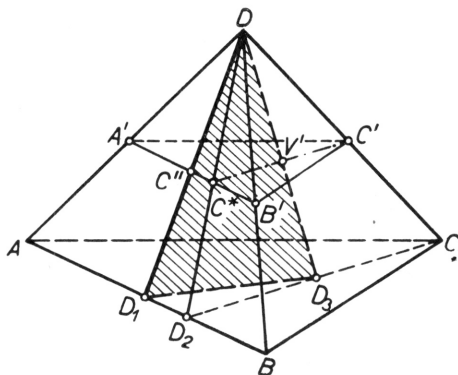
Obr. 25



Obr. 26

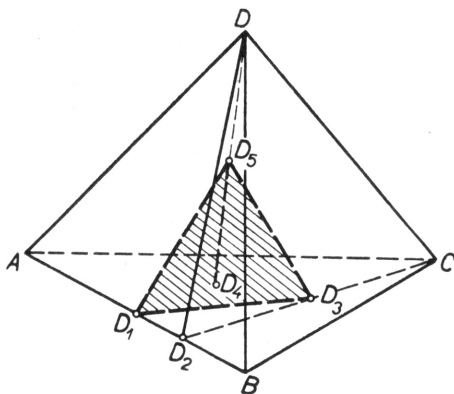
Pravoúhelník $X'Y'Z'T'$ sestrojíme tak, že vedeme vhodnou přímku $p \parallel A'B' \parallel AB$ v rovině ϱ , určíme její průsečíky Z', T' s vnitřky úseček $B'C', C'A'$ a z bodů Z', T' spustíme kolmice na $A'B'$; jejich paty jsou body X', Y' . Geometrické místo průsečíků S tělesových úhlopříček všech kvádrů daných vlastností najdeme takto: Zjistíme geometrické místo průsečíků M' úhlopříček pravoúhelníků $X'Y'Z'T'$; určíme patu M kolmice spuštěné z každého takového bodu M' na rovinu ABC ; S je pak zřejmě střed úsečky MM' (M je průsečík úhlopříček stěny $XYZT$).

Označme N' střed úsečky $Z'T'$ (obr. 25); všechny body N' ležící v rovině ϱ vyplní vnitřek těžnice $C'C''$ trojúhelníka $A'B'C'$. Všecky tyto body M' vyplní tedy vnitřek úsečky, jejichž krajní body jsou C'' a střed V' výšky $C'C^*$ spuštěné z vrcholu C' na stranu $A'B'$ (obr. 26). Všecky body C'' vyplní vnitřek těžnice DD_1 stěny ABD (viz obr. 27). Všecky body C^* vyplní vnitřek úsečky DD_2 , kde $CD_2 \perp AB$, $D_2 \in AB$. Protože je $C''V' \parallel (ABC)$, vy-



Obr. 27

plní všechny body V' vnitřek těžnice DD_3 trojúhelníka CDD_2 (viz obr. 27). Všecky úsečky $C''V'$ vyplní vnitřek trojúhelníka $\triangle DD_1D_3$. Tento vnitřek je tedy geometrické místo bodů M' (průsečíků úhlopříček stěn $X'Y'Z'T'$). Označme nyní D_4 patu výšky DD_4 čtyřstěnu $ABCD$. Body S vyplní vnitřek trojúhelníka $D_1D_3D_5$, kde D_5 je střed výšky DD_4 (obr. 28); to snadno zjistíme, vedeme-li v libovolném pravoúhlém trojúhelníku XD_4D (X na D_1D_3) všechny příčky rovnoběžné s odvěsnou D_4D a zjistíme-li jejich středy S . (Ve zvláštním případě, leží-li bod D_4 na úsečce D_1D_3 a je-li $X = D_4$, se redukuje $\triangle XD_4D$ na úsečku D_4D).



Obr. 28

ZÁVĚR. Geometrické místo středů S „vepsaných“ kvádrů $XYZTX'Y'Z'T'$ je vnitřek trojúhelníka $D_1D_3D_5$ (viz obr. 28), neboť je i možno ke každému bodu vnitřku trojúhelníka $D_1D_3D_5$ sestrojít kvádr požadovaných vlastností.

2. KATEGÓRIA B

1a. Určite všetky prirodzené čísla k , pre ktoré je číslo $3^k + 1$ deliteľné a) dvoma, b) štyrmi, c) ôsmimi.

RIEŠENIE. Tabuľka

k	1	2	3	4	5	...
$3^k + 1$	4	10	28	82	244	...

nám napovedá, že pre nepárne k je $3^k + 1$ násobkom štyroch, pre párne k len násobkom dvoch, ale nie štyroch.

Platí

$$3^{k+1} + 1 = 3^k \cdot 3 + 1 = 2 \cdot 3^k + (3^k + 1). \quad (1)$$

Číslo $2 \cdot 3^k$ je zrejme pre každé prirodzené k len násobkom dvoch, ale nie štyroch. Ak je číslo $3^k + 1$ tiež len násobkom dvoch, je podľa (1) $3^{k+1} + 1$ násobkom štyroch. Ak je $3^k + 1$ násobkom štyroch, potom je podľa (1) $3^{k+1} + 1$ násobkom dvoch, ale nie štyroch. Pretože $3^1 + 1 = 4$ je násobkom štyroch, je tým prvá a druhá časť úlohy vyriešená, a to tak, že je potvrdená naša domnienka:

a, b) Číslo $3^k + 1$, kde k je prirodzené číslo, je vždy párne, ale je deliteľné štyrmi vtedy a len vtedy, keď k je nepárne.

c) Platí

$$\begin{aligned} 3^k + 1 &= 9 \cdot 3^{k-2} + 1 = 9 \cdot 3^{k-2} + 9 - 8 = \\ &= 9 \cdot (3^{k-2} + 1) - 8. \end{aligned} \quad (2)$$

Ak by bolo číslo $3^k + 1$ pre niektoré prirodzené číslo k násobkom ôsmich, potom by to podľa (2) muselo platiť tiež o čísle $3^{k-2} + 1$. Opakovaním tejto úvahy dospejeme k záveru, že buď $3^1 + 1 = 4$ alebo $3^2 + 1 = 10$ je ná-

sobkom ôsmich. Toto protirečenie ukazuje, že číslo $3^k + 1$ nie je deliteľné ôsmimi pre žiadne prirodzené k .

1b. Součet druhých mocnin tří po sobě následujících celých lichých čísel je menší než 10^7 a jeho dekadický zápis má všechny číslice stejné. Najděte všechny takové trojice čísel.

ŘEŠENÍ. Označíme-li x prostřední ze tří hledaných čísel, pak součet čtverců je

$$s = (x - 2)^2 + x^2 + (x + 2)^2,$$

tj.

$$s = 3x^2 + 8. \quad (1)$$

Poněvadž x je liché číslo, končí x^2 některou z číslic

1, 5, 9.

Číslo s pak končí některou z číslic

1, 3, 5.

Z (1) plyne, že s není dělitelné třemi, takže číslice 3 nepřichází v úvahu. Vzhledem k tomu, že podle (1) číslo s má při dělení třemi dávat zbytek 2, zbývají pro s již jen tyto možnosti

11, 11 111,

5, 5 555, 5 555 555.

Dosadíme-li tyto možnosti postupně do (1), zjistíme, že číslo 11 vede ke trojicím

$[-1, 1, 3]$, $[-3, -1, 1]$,

číslo 5 555 ke trojicím

$[41, 43, 45]$, $[-45, -43, -41]$,

zatímco pro ostatní tři čísla s nemá rovnice (1) celočíselné řešení x .

Snadno se ověří, že nalezené čtyři trojice skutečně splňují podmínky úlohy. Úloha má tedy čtyři řešení.

2a. Určete reálná čísla a, b, c, d tak, aby platilo

$$\frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{a}{x+b} + \frac{c}{x+d} \quad (1)$$

pro všechna reálná x , pro něž není žádný z jmenovatelů roven nule.

ŘEŠENÍ. Existují nejvýše čtyři čísla x , která anulují některý ze jmenovatelů zlomků v (1). Pro *všechna ostatní reálná x* platí

$$\frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{a(x+d) + c(x+b)}{(x+b)(x+d)},$$

tj.

$$\begin{aligned} (x+1)(x+b)(x+d) &= \\ &= (x^2+x-2)[(a+c)x + (ad+bc)]. \end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} x^3 + x^2(1+b+d) + x(bd+b+d) + bd &= \\ &= x^3(a+c) + x^2(a+c+ad+bc) + \\ &+ x(ad+bc-2a-2c) - 2(ad+bc). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u týchž mocnin x dostaneme

$$a+c=1 \quad (2a)$$

$$1+b+d=a+c+(ad+bc) \quad (2b)$$

$$bd+b+d=(ad+bc)-2(a+c) \quad (2c)$$

$$bd=-2(ad+bc). \quad (2b)$$

Užijeme-li (2a) v (2b) a dále (2a) i (2b) v (2c), vyjde

$$a+c=1, \quad (3a)$$

$$b+d=ad+bc, \quad (3b)$$

$$bd=-2, \quad (3c)$$

$$bd=-2(ad+bc). \quad (3d)$$

Z (3c), (3d) dostaneme

$$ad + bc = 1 \quad (4)$$

a dosazením (4) do (3b)

$$b + d = 1. \quad (5)$$

Z (3c), (5) vyplývá, že b, d jsou kořeny kvadratické rovnice $t^2 - t - 2 = 0$; to jsou čísla 2, -1 . Zvolme označení tak, aby bylo

$$b = 2, \quad d = -1; \quad (6)$$

pak (4) zní

$$-a + 2c = 1. \quad (7)$$

Spojením (3a), (7) vyjde

$$c = \frac{2}{3}, \quad a = \frac{1}{3}. \quad (8)$$

Vzorce (6), (8) dávají řešení úlohy. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že je skutečně

$$\frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{\frac{1}{3}}{x+2} + \frac{\frac{2}{3}}{x-1}.$$

2b. Nайдите все значения параметра a , при которых в катетовской координатной системе с координатами x, y график уравнения

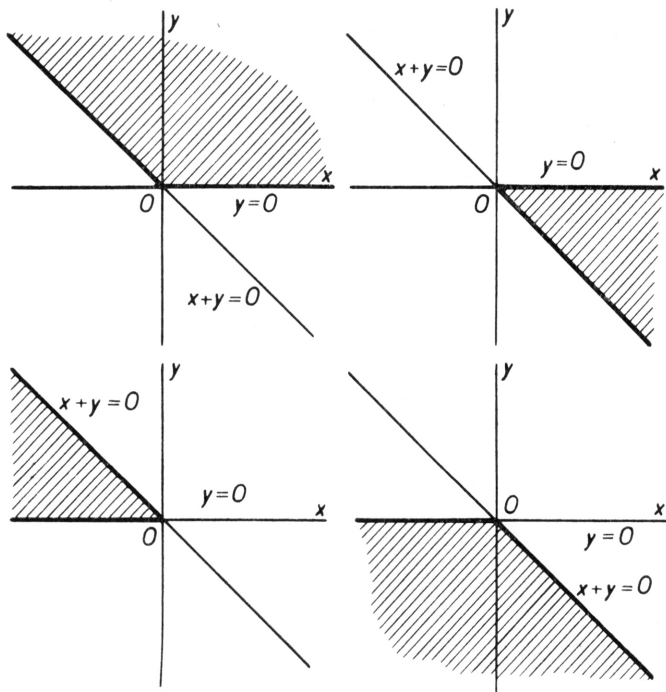
$$|x+y| + a|y| = 1 \quad (1)$$

обводит прямоугольник.

RIEŠENIE. Graf rovnice (1) zostrojíme zo štyroch častí, ktoré dostaneme uvažovaním o štyroch prípadoch:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x+y \geq 0, y \geq 0; & \text{b) } x+y \geq 0, y \leq 0; \\ \text{c) } x+y \leq 0, y \geq 0; & \text{d) } x+y \leq 0, y \leq 0. \end{array} \quad (2)$$

Na obr. 29abcd sú načrtnuté a vyšrafované uhly, ktoré sú grafickým znázornením štyroch dvojíc nerovností (2).



Obr. 29abcd

V prípadoch a)–d) nahradíme rovnicu (1) v uvedenom poradí rovnicami

$$x + (1 + a)y = 1, \quad (2a)$$

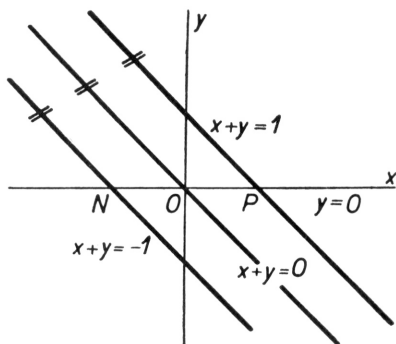
$$x + (1 - a)y = 1, \quad (2b)$$

$$x + (1 - a)y = -1, \quad (2c)$$

$$x + (1 + a)y = -1. \quad (2d)$$

Každá z rovníc (2a)–(2d) je rovnicou priamky. Prvé dve z týchto priamok pretínajú priamku $y = 0$ v bode $P = [1; 0]$, druhé dve v bode $N = [-1; 0]$.

Uvažujme zvlášť o prípade $a = 0$. V tomto prípade dávajú štyri grafy spolu dve rovnobežky $x + y = \pm 1$ prechádzajúce bodmi P, N (obr. 30).

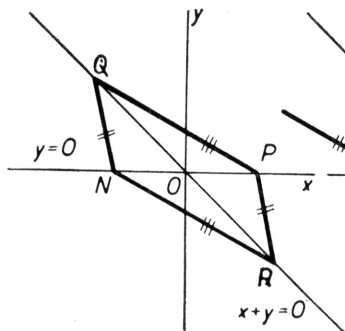


Obr. 30

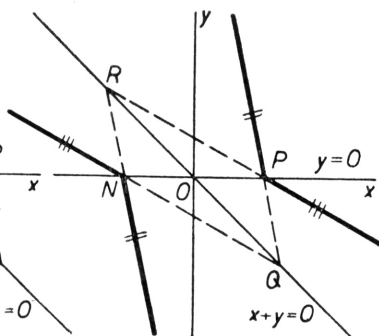
Ak je $a \neq 0$, pretína každá z priamok (2a) – (2d) priamku $x + y = 0$ v určitom bode, a to priamky (2a) a (2c) v bode $Q = \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]$ a priamky (2b), (2d) v bode $R = \left[\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}\right]$. Body Q, R patria do vyšrafovaných

uhlov práve vtedy, keď je $a > 0$. Pre $a > 0$ je teda grafom rovnice (1) obvod rovnobežníka $PQNR$ (obr. 31), pre $a < 0$ je týmto grafom štvorica polpriamok (obr. 32). Rovnobežník $PQNR$ je však pravouholníkom práve vtedy, keď je $NP = QR$. Platí však: $NP = 2$, $QR =$

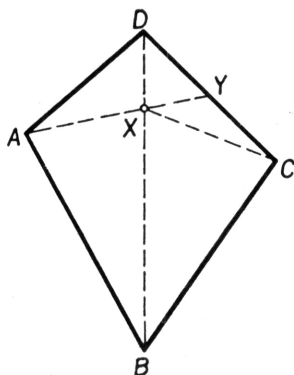
$= 2\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{a}$. Graf rovnice (1) je teda ob-
vodom pravouholníka práve vtedy, keď $a = \sqrt{2}$.



Obr. 31



Obr. 32



Obr. 33

3a. Je dán vypuklý čtyř-
úhelník $ABCD$ a bod X úhlo-
příčky BD tak, že přímka AX
protíná stranu CD v jejím
vnitřním bodě. Pak platí

$$AX + BX + CX < AD + \\ + BD + CD. \quad (1)$$

Dokažte. Platí vztah (1) i
v případě, že přímka AX
prochází vrcholem C nebo
protíná stranu BC ?

ŘEŠENÍ (obr. 33). a)
Označme Y průsečík pří-

mek AX , CD . Podle trojúhelníkové nerovnosti pak platí

$$\begin{aligned} AD + DY &> AX + XY (= AY), \\ XY + CY &> CX, \\ BD &> BX. \end{aligned} \quad (2)$$

Sečtením těchto tří nerovnic dostaneme nerovnici (1), neboť $DY + CY = CD$.

b) V případě, že přímka AX obsahuje bod C , je $Y = C$; nerovnice (2) se změní jen v tom, že druhá z nich přejde v rovnici $XY = CX$.

Platnost (1) tedy zůstává beze změny.

c) Obr. 34 ukazuje na deltoidu $ABCD$, vepsaném kružnici k o středu X , že vztah (1) neplatí. Zde je totiž

$$AX = BX = CX = DX = r, \quad BD = 2r. \quad (3)$$

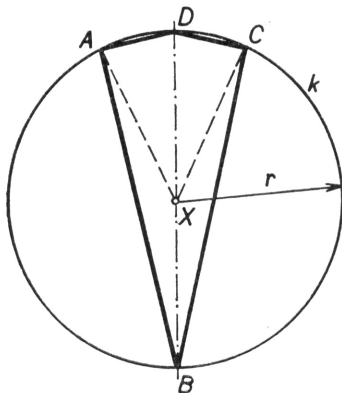
Body A , C jsou zvoleny tak, aby platilo

$$AD + CD < r. \quad (4)$$

Je tedy podle (3) a (4)

$$\begin{aligned} AX + BX + CX &= 3r, \\ AD + BD + CD &= 2r + \\ &+ AD + CD < 3r, \end{aligned}$$

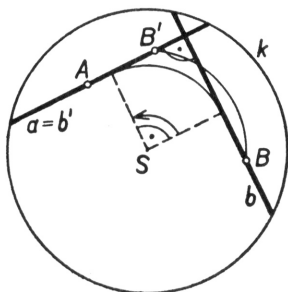
tj. (1) neplatí.



Obr. 34

3b. Uvnitř kružnice k se středem S a poloměrem r jsou dány dva body A , B tak, že A , B , S neleží v přímce. Sestrojte dvě navzájem kolmé tětivy kružnice k , které mají tutéž délku a obsahují po řadě body A , B .

ŘEŠENÍ. Rozbor. Předpokládejme, že tětivy $a \perp b$ na obr. 35 splňují podmínky úlohy. Je tedy možno např. rotací v kladném smyslu otáčení přenést tětivu b v tětivu



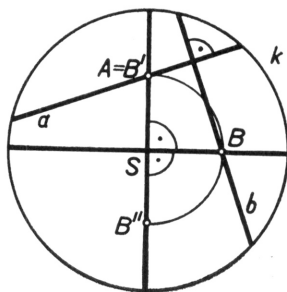
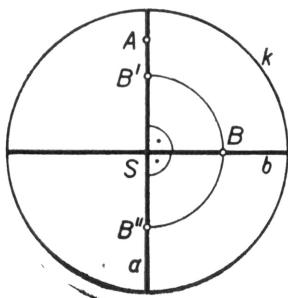
Obr. 35

$a = b'$; bod B po otočení pak přejde v bod B' ležící na přímce a . Pro $B' \neq A$ tak dospějeme k jednoduché konstrukci tětivy $a = AB'$. Protože o vzájemné poloze bodů A, B' nemůžeme předem rozhodnout, provedeme diskusi:

I. Vyšetříme nejprve případ, kdy $\sphericalangle ASB$ je pravý. Otočíme-li tětivu b procházející bodem B kolem středu S o pravý úhel v kladném nebo záporném smyslu, přejde

v tětivu a procházející bodem A (obě mají totiž tutéž délku). Otočený bod B' leží tedy také na tětivě a . A tu je třeba rozeznávat dva případy:

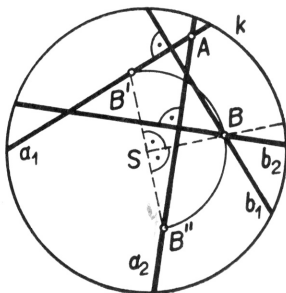
- a) $B' \neq A$, b) $B' = A$ (obr. 36ab).



Obr. 36ab

V případě b) má úloha nekonečně mnoho řešení: je to libovolná tětiva a procházející bodem $A = B'$ a k ní kolmá tětiva b procházející bodem B . V případě a) má úloha jediné řešení: jsou to tětivy $SA = a$, $SB = b$.

II. Nyní vyšetříme případ, kdy $\sphericalangle ASB$ není pravý (obr. 36c). Postupujeme jako v případě I. V tomto případě neleží bod B' na přímce AS , proto je vždy $B' \neq A$. Sestrojíme tětivy $a_1 = AB'$ a $a_2 = AB''$; k nim vedeme bodem B tětivy kolmé: $b_1 \perp a_1$; $b_2 \perp a_2$. Úloha má v tomto případě dvě řešení (obr. 36c).



Obr. 36c

3. KATEGÓRIA Z

1. Zlomok $\frac{178}{39}$ vyjadrite ako súčet dvoch kladných zlomkov s menovateľmi 3, 13 a s celočíselnými čitateľmi. Nájdite všetky riešenia úlohy.

RIEŠENIE. Podľa textu úlohy má platiť

$$\frac{178}{39} = \frac{x}{3} + \frac{y}{13},$$

t. j.

$$13x + 3y = 178,$$

kde x, y sú prirodzené čísla. Upravme túto rovnicu na tvar

$$y = 59 + \frac{1 - 13x}{3}.$$

Pretože hľadáme celočíselné a kladné riešenia, musíme určiť číslo x tak, aby zlomok

$$V = \frac{1 - 13x}{3}$$

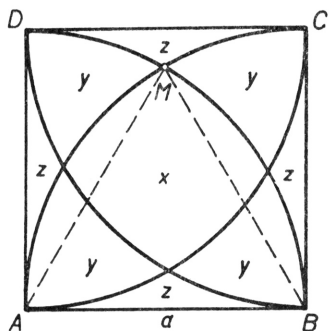
bolo celé číslo väčšie než -59 .

Pre $x = 1, 4, 7, 10, 13$ nadobúda výraz V hodnoty $-4; -17; -30; -43; -56$, takže

x	1	4	7	10	13
y	55	42	29	16	3

iných možností niet. Výpočtom sa ľahko presvedčíme, že daný zlomok možno teda rozložiť takto:

$$\begin{aligned} \frac{178}{39} &= \frac{1}{3} + \frac{55}{13} = \frac{4}{3} + \frac{42}{13} = \frac{7}{3} + \frac{29}{13} = \\ &= \frac{10}{3} + \frac{16}{13} = \frac{13}{3} + \frac{3}{13}. \end{aligned}$$



Obr. 37

2. Je dán čtverec, jehož strana má velikost a . Z jeho vrcholů jsou opsány dovnitř čtverce čtvrtkružnice s poloměrem a . Tím se rozdělí čtverec na 9 částí tří různých tvarů (viz obr. 37). Vypočítejte obsahy těchto částí.

ŘEŠENÍ. Průsečík oblouků opsaných z bodů A, B označme M . Písmeny x, y, z označme obsahy vzniklých

ploch tak, jak je uvedeno na obr. 37. Potom platí

$$z = P - (P_1 + 2P_2),$$

kde P je obsah čtverce $ABCD$ o straně a , P_1 obsah rovnostranného $\triangle ABM$ o straně a a P_2 obsah kruhové výseče o poloměru a a středovém úhlu 30° (tj. $2P_2$ je součet obsahů výsečí AMD a BCM). Tudíž

$$z = a^2 - \frac{1}{4} a^2 \cdot \sqrt{3} - 2\pi a^2 \cdot \frac{30}{360},$$

tj.

$$z = \frac{a^2}{12} (12 - 2\pi - 3\sqrt{3}) \doteq 0,043a^2. \quad (1)$$

Dále platí

$$y = P - (P_3 + 2z),$$

kde P_3 je obsah čtvrtkruhu ABD o poloměru a , tj.

$$y = \frac{a^2}{12} (\pi + 6\sqrt{3} - 12) \doteq 0,128a^2. \quad (2)$$

Pro x platí

$$x = P - (4y + 4z),$$

tj.

$$x = \frac{a^2}{3} (3 + \pi - 3\sqrt{3}) \doteq 0,315a^2. \quad (3)$$

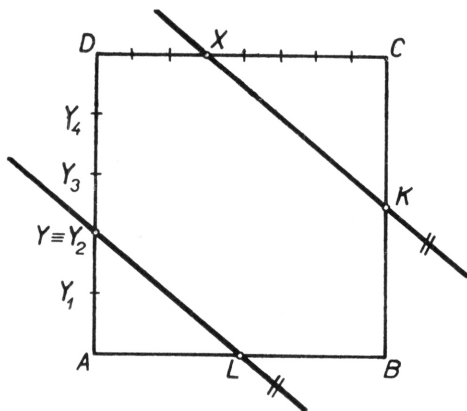
Řešení úlohy je dáno vztahy (1), (2) a (3).

3. Je dán čtverec $ABCD$. Stranu CD rozdělte na n shodných dílů tak, aby na ní existoval dělicí bod X takový, že

$$KX \parallel YL, \quad (1)$$

kde K je střed strany BC , L je střed strany AB a Y je dělicí bod na straně AD , která je rozdělena na 5 shodných dílů.

Určete nejmenší n této vlastnosti.



Obr. 38

ŘEŠENÍ (obr. 38). Ze vztahu (1) plyne

$$\triangle ALY \sim \triangle CXK,$$

tj.

$$\frac{AY}{AL} = \frac{CK}{CX}. \quad (2)$$

Označíme-li délku strany čtverce a , potom rovnost (2) nabývá tvaru

$$\frac{r \cdot \frac{a}{5}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{s \cdot \frac{a}{n}}, \quad (3)$$

kde r, s jsou přirozená čísla vyhovující nerovnostem

$$1 \leq r < 5, \quad 1 \leq s < n. \quad (4)$$

Vztah (3) po úpravě zní

$$4rs = 5n. \quad (5)$$

Z poslední rovnosti je zřejmé, že n je násobkem 4. Nejmenší takové n je 4. Pro $n = 4$ dává (5)

$$rs = 5,$$

což však nelze splnit čísly r, s vyhovujícími nerovností (4). Pro $n = 8$ rovnost (5) zní

$$rs = 10.$$

Této nerovnosti vyhovují čísla $r = 2, s = 5$, která také splňují nerovnosti (4). Potom $AY = \frac{2}{5}a$, $CX = \frac{5}{8}a$. V tomto případě skutečně platí (1).

ZÁVĚR. Nejmenší n požadované vlastnosti je $n = 8$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 dělicí body na straně AD (viz obr. 38). Ze vztahu (2) plyne

$$CX = \frac{CK \cdot AL}{AY} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{AY}.$$

Pro Y_1 platí

$$CX = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{a} = \frac{5}{4}a, \text{ tj. } X \text{ by nebyl bodem úsečky } DC;$$

pro Y_2 je

$$CX = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{2a} = \frac{5}{8}a, \text{ tj. } n = 8;$$

pro Y_3 je

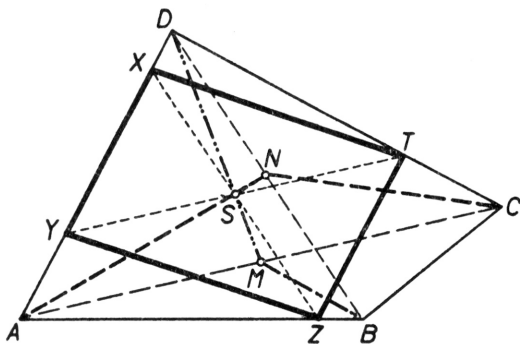
$$CX = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{3a} = \frac{5}{12}a, \text{ tj. } n = 12;$$

pro Y_4 je

$$CX = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{4a} = \frac{5}{16} a, \quad \text{tj. } n = 16.$$

Nejmenší n požadované vlastnosti je tedy $n = 8$.

4. Je daný štvoruholník $ABCD$, ktorého strany majú dĺžky $AB = 70$ mm, $BC = 35$ mm, $CD = 75$ mm, $DA = 65$ mm a uhlopriečka BD má dĺžku 70 mm. Zostrojte štvoruholník $ABCD$ a potom zostrojte rovnobežník, ktorého všetky štyri vrcholy ležia na obode štvoruholníka $ABCD$ a jeho uhlopriečky sú rovnobežné s uhlopriečkami daného štvoruholníka. Zostrojte najskôr stred hľadaného rovnobežníka.



Obr. 39

RIEŠENIE. Zostrojíme najskôr $\triangle ABD$ a potom v polrovine opačnej ku BDA zostrojíme $\triangle BCD$ (obr. 39). Stred S hľadaného rovnobežníka patrí do dvoch geometrických miest bodov: do geometrického miesta Γ_1 stredov všetkých priecok štvoruholníka $ABCD$ rovnobežných s priamkou AC a do geometrického miesta Γ_2 stredov všetkých priecok štvoruholníka $ABCD$ rovno-

bežných s priamkou BD . Geometrické miesto Γ_1 je zjednotením ťažníc BM , DM trojuholníkov ACB , ACD bez bodov B , D , geometrické miesto Γ_2 je zjednotením ťažníc AN , CN trojuholníkov BDA , BDC bez bodov A , C . Body M , N sú teda v uvedenom poradí stredmi uhlopriečok AC , BD . Geometrické miesta Γ_1 , Γ_2 majú jediný spoločný bod. Je to priesečník S ťažníc AN , DM . Bodom S vedieme rovnobežky s priamkami AC , BD . Tieto rovnobežky pretnú obvod štvoruholníka $ABCD$ v bodoch X , Y , Z , T , ktoré sú vrcholmi hľadaného rovnobežníka.

Skúška konštrukcie vyplýva z vety: Vypuklý štvoruholník je rovnobežníkom práve vtedy, keď sa jeho uhlopriečky navzájom delia na dve zhodné časti.

Z vrcholov X , Y , Z , T výsledného rovnobežníka ležia X , Y na strane AD , Z na strane AB a T na strane CD .

V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A

1. Necht' pro přirozená čísla a, b platí

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1},$$

kde p je prvočíslo větší než 2. Potom p je dělitelem čísla a .
Dokažte.

ŘEŠENÍ. DŮKAZ. Uvedením na společného jmenovatele $(p-1)!$ vyjde v čitateli $2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (p-1) + 1 \cdot 3 \cdot 4 \dots (p-1) + 1 \cdot 2 \cdot 4 \dots (p-1) + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-2)$, tj. součet součinů prvků v kombinacích $(p-2)$ třídy z $(p-1)$ prvků $1, 2, 3, \dots, (p-1)$.

Označme tento součet písmenem s .

Utvořme nyní mnohočleny $(p-2)$ ho stupně

$$\begin{aligned} & (p-2)(p-3)(p-4) \dots [p-(p-1)], \\ & (p-1)(p-3)(p-4) \dots [p-(p-1)], \\ & (p-1)(p-2)(p-4) \dots [p-(p-1)], \dots \\ & \dots, (p-1)(p-2)(p-3) \dots [p-(p-2)] \end{aligned}$$

a sečtěme je. Je to zřejmě zase součet s , jen jsou sčítanci v obráceném pořádku [např. první mnohočlen $(p-2) \cdot (p-3)(p-4) \dots [p-(p-1)]$ je roven součinu $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-2)$].

Prostý člen *výsledného* mnohočlenu v p , totiž $(-2)(-3)\dots[-(p-1)] + (-1)(-3)\dots[-(p-1)] + \dots + (-1)(-2)(-4)\dots[-(p-1)]$ atd. až $(-1)(-2)\dots(-3)\dots[-(p-2)]$ je zase, avšak záporně vzatý součet s (počet záporných činitelů v každém součinu je $(p-2)$, tedy lichý).

Ze všech ostatních členů výsledného mnohočlenu lze vytknout p . Dostáváme tak rovnici

$$s = p \cdot M - s,$$

kde M je mnohočlen v p s celistvými součiniteli.

Z toho plyne $2s = p \cdot M$ a $s = p \frac{M}{2} = pM_1$,

položíme-li $M = 2M_1$. (M je totiž sudé číslo.)

Celkem tedy součet prvních $(p-1)$ členů harmonické řady je $\frac{pM_1}{(p-1)!}$. Jelikož p je prvočíslo, zůstává jako činitel v čitateli, ať lze zlomek krátit nebo ne.

POZNÁMKA. Úlohu lze řešit také pomocí kongruencí modulu p .

JINÉ ŘEŠENÍ. Protože je p prvočíslo větší než 2, je p liché a počet sčítanců je sudý. Upravíme

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = & \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \dots + \\ & + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

a sečteme jednotlivé dvojice v závorkách takto:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p-n} = \frac{p-n+n}{n(p-n)} = \frac{p}{n(p-n)}.$$

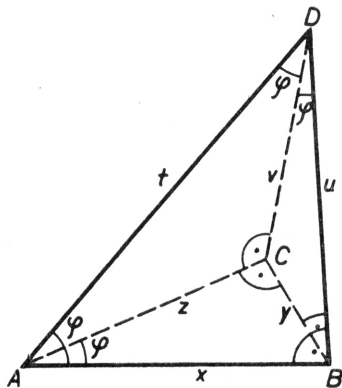
Celý součet potom je

$$\begin{aligned} & \frac{p}{1(p-1)} + \frac{p}{2(p-2)} + \dots + \frac{p}{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}} = \\ & = p \left(\frac{\check{c}}{1 \cdot 2 \dots \frac{p-1}{2} \cdot \left(\frac{p-1}{2} + 1 \right) \dots (p-1)} \right) = \\ & = \frac{p \cdot \check{c}}{(p-1)!}. \end{aligned} \quad (2)$$

Číselník $\check{c}$ je přirozené číslo, není nutno ho vyčíslovat. Nyní upravím rovnost (1) s použitím (2) a dostáváme: $a \cdot (p-1)! = p \cdot \check{c} \cdot b$.

$(p-1)!$ však podle zadání nemůže být dělitelno p , tudíž je a dělitelno p , což jsme měli dokázat.

Řešil Pavel Pudlák,
3. D, SVVŠ Praha



Obr. 40

2. Stěny čtyřstěnu $ABCD$ jsou čtyři navzájem podobné pravoúhlé trojúhelníky s pravými úhly při vrcholech B, C . Nejdelší hrana čtyřstěnu má délku 1. Zjistěte, zda takový čtyřstěn existuje. Určete, která jeho hrana je nejdelší, která hrana je nejkratší a jakou má délku.

ŘEŠENÍ. Předpokládejme, že existuje čtyřstěn

žádaných vlastností. Necht' stěny, které mají pravé úhly při vrcholu B , jsou ABD a BCD (obr. 40). Protože každá stěna má právě jeden pravý úhel, jsou pravé úhly $\sphericalangle ACB$ a $\sphericalangle ACD$. Označme délky hran podle obr. 40 ($x = AB$, $y = BC$, $z = CA$, $t = AD$, $u = BD$, $v = CD$) a dále označme φ velikost ostrého úhlu $\sphericalangle DAB$. Pak plyne z $\triangle ABD$

$$u = t \sin \varphi, \quad x = t \cos \varphi. \quad (1)$$

Pro trojúhelník $\triangle ACD$ máme dvě možnosti: a) $\sphericalangle CAD = \varphi$, b) $\sphericalangle ADC = \varphi$. V případě a) dostaneme

$$z = t \cos \varphi, \quad v = t \sin \varphi. \quad (2)$$

Z (1) a (2) plyne $x = z$, což je spor, neboť v pravoúhlém trojúhelníku ABC je x délka přepony a z délka odvěsny. Příklad a) je tedy nemožný a nastane případ b). Je tedy

$$v = t \cos \varphi, \quad z = t \sin \varphi. \quad (3)$$

Z (1) a (3) plyne

$$u = z, \quad v = x. \quad (4)$$

Z (1) a (3) plyne dále $\frac{z}{x} = \operatorname{tg} \varphi$; podle textu úlohy je

bud' $\frac{z}{x} = \cos \varphi$, nebo $\frac{z}{x} = \sin \varphi$. Ze vztahu $\frac{z}{x} = \sin \varphi$

dostaneme vzhledem k vztahu $\frac{z}{x} = \operatorname{tg} \varphi$ vztah $\cos \varphi =$

$= 1$, což je nemožné. Je tedy $\frac{z}{x} = \cos \varphi$, tj. podle (1)

$$z = t \cos^2 \varphi. \quad (5)$$

Z $\triangle ABC$ pak plyne $\frac{y}{x} = \sin \varphi$ (neboť $\sphericalangle ACB$ je pravý

a $\frac{z}{x} = \cos \varphi$), tj. podle (1)

$$y = t \sin \varphi \cos \varphi. \quad (6)$$

Z (3) a (5) vyjde $\sin \varphi = \cos^2 \varphi$, neboli

$$\sin^2 \varphi + \sin \varphi - 1 = 0$$

a odtud ($\sin \varphi > 0$)

$$\sin \varphi = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) \doteq 0,618. \quad (7)$$

Podle (7) je $\varphi < \frac{\pi}{4}$ ($\sin \varphi < \frac{\sqrt{2}}{2}$), tj.

$$\sin \varphi < \cos \varphi. \quad (8)$$

Tak dostaneme z (1), (3), (4), (5) a (6) vzhledem k (8) uspořádání délek hran podle velikosti:

$$y < u = z < x = v < t.$$

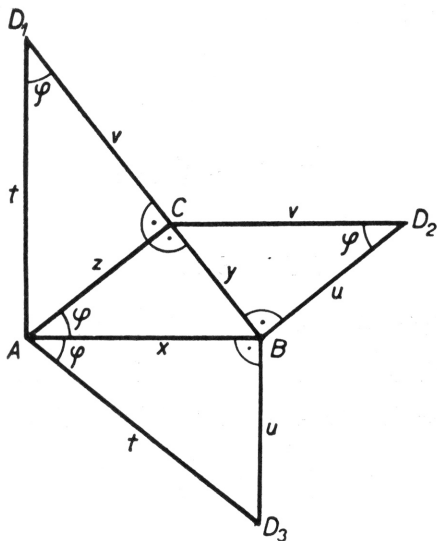
Podle textu úlohy je $t = 1$; nejkratší hrana je BC ; její délka je vzhledem k (7), (6)

$$BC = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{\frac{3}{2}},$$

neboť $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$; numericky $BC \doteq 0,486$. Ze vztahu (7) zjistíme, že je $\varphi \doteq 38^\circ 10'$.

Existence čtyřstěnu je prokázána sestrojením sítě, která je na obr. 41. Vyjde se z $\triangle ACD$ ($\varphi \doteq 38^\circ 10'$), sestrojí se $\triangle ABC$ a bod D leží na kolmici vztyčené k rovině ABC tak, že $BD = u = z$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Předpokládejme, že takový čtyřstěn **Z** existuje a promítněme ho pravoúhle do roviny ABC . Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\triangle ABC$ má pravý úhel při vrcholu C . Trojúhelník ACD má pravý úhel při vrcholu C a tento úhel se při promítnutí zachová. Obraz D_1 bodu D musí tedy ležet na přímce BC . Obdobně $\triangle ABD$ má pravý úhel při vrcholu B a ten se při



Obr. 41

promítnutí opět zachová. Bod D_1 musí proto ležet i na přímce $r \perp AB$, $B \in r$. Z toho plyne, že $B \equiv D_1$, tudíž BD je kolmé na rovinu ABC a $\triangle BCD$ má pravý úhel při vrcholu B .

Poněvadž AB je odvěsnou v $\triangle ABD$, je

$$AD > AB > AC.$$

Obdobně je

$$AD > CD > BD,$$

$$AD > CD > BC.$$

Nejdelší je tedy hrana $AD = 1$.

Z podobnosti $\triangle ABD \sim \triangle DBC$ plyne

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{CD},$$

takže

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{CD} > 1,$$

tudíž

$$BD > BC.$$

(Nemůže být $\frac{BD}{AD} = \frac{BD}{CD}$, neboť by potom bylo $AD = CD$, což by byl spor s již dokázaným $AD > CD$.)

Obdobně se dokáže, že platí $\triangle ACD \sim \triangle BCA$ a odtud

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AB},$$

takže

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AB} > 1,$$

proto

$$AC > BC.$$

Nejkratší hranou tedy bude BC .

Poněvadž $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ mají být podobné, musí pro jejich odvěsny ($AC > BC$, $BD > BC$) platit

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BD}{BC},$$

tedy

$$AC = BD.$$

Podobně z $\triangle ACB \sim \triangle DBC$ vyplývá

$$AB = CD.$$

Ve čtyřstěnu **Z** tedy máme

$$AD = 1, \quad BC = a, \quad AC = BD = b, \quad AB = CD = c.$$

Z podobnosti $\triangle DBA \sim \triangle CBD$ plyne

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{b},$$

tedy

$$b^2 = ac.$$

Podle Pythagorovy věty máme

$$b^2 + c^2 = 1,$$

$$b^2 + a^2 = c^2.$$

Z posledních tří rovností plyne

$$ac + c^2 = 1,$$

$$ac + a^2 = c^2,$$

čili

$$ac = 1 - c^2,$$

$$ac = c^2 - a^2.$$

Srovnáním dostaneme

$$c^2 = \frac{1 + a^2}{2},$$

což dosadíme do rovnice $ac + c^2 = 1$:

$$a \sqrt{\frac{1 + a^2}{2}} = 1 - \frac{1 + a^2}{2};$$

odtud po úpravě přichází v úvahu jediný kořen

$$a = \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \tag{1}$$

a pak můžeme též vypočítat

$$c = \sqrt[3]{\frac{1 + a^2}{2}} > a. \tag{2}$$

Dokážeme nyní, že náš čtyřstěn $\mathbf{Z}$ existuje. Z předchozího je jasné, že pravoúhlý trojúhelník ABC s $\sphericalangle C = 90^\circ$ je jednoznačně určen odvěsnou $BC = a$ a přeponou $AB = c$ (viz vzorce (1), (2)). K rovině ABC pak vztyčíme kolmici v bodě B a sestrojíme na ní úsečku $BD = b$. Z Pythagorovy věty pak $CD = c$. Poněvadž $AC \perp BC$, $AC \perp BD$, je také $AC \perp CD$, takže i trojúhelník ACD je pravoúhlý ($\sphericalangle C = 90^\circ$) a platí

$$\begin{aligned} AD^2 &= b^2 + c^2 = (c^2 - a^2) + c^2 = \\ &= 2c^2 - a^2 = 1 + a^2 - a^2 = 1. \end{aligned}$$

Podobnost všech čtyř stěn je pak zajištěna vzájemným poměrem hran.

Tím je úloha vyřešena; čtyřstěn existuje, nejdelší hrana je $AD = 1$ a nejkratší $BC = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

Řešil Jiří Tůma,
III. roč. SVVŠ, Písek

3. Nájďte všetky reálne čísla x , pre ktoré platí

$$\frac{1}{x + \sqrt{p - x^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{p - x^2}} \geq \frac{1}{p}, \quad (1)$$

kde p je dané kladné číslo. Urobte diskusiu.

RIEŠENIE. Ak reálne číslo x vyhovuje nerovnosti (1), potom musí preň platiť $p - x^2 \geq 0$ čiže

$$-\sqrt{p} \leq x \leq \sqrt{p} \quad (2)$$

a súčasne $(x + \sqrt{p - x^2})(x - \sqrt{p - x^2}) \neq 0$ čiže

$$x \neq -\sqrt{\frac{p}{2}}, \quad x \neq \sqrt{\frac{p}{2}}. \quad (3)$$

Nech platia vzťahy (2) a (3). Po zlúčení zlomkov na ľavej strane nerovnosti (1) dostaneme

$$\frac{2x}{2x^2 - p} \geq \frac{1}{p}. \quad (4)$$

a) Nech $2x^2 - p > 0$ čiže

$$\text{buď } x < -\sqrt{\frac{p}{2}}, \text{ alebo } x > \sqrt{\frac{p}{2}}. \quad (5)$$

Potom je nerovnosť (4) ekvivalentná s nerovnosťou $2x^2 - 2px - p \leq 0$, z čoho postupne dostaneme

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} p (p + 2),$$

$$\frac{1}{2} (p - \sqrt{p(p+2)}) \leq x \leq \frac{1}{2} (p + \sqrt{p(p+2)}). \quad (6)$$

Pre $p > 0$ zrejme platí $\left(\sqrt{\frac{p}{2}} + 1\right)^2 > \frac{p}{2} + 1$, z čoho postupne dostaneme

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{p}{2}} + 1 &> \sqrt{\frac{p}{2} + 1}, \\ \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p}{2}} &> \frac{1}{2} \sqrt{p(p+2)}, \\ -\sqrt{\frac{p}{2}} &< \frac{1}{2} (p - \sqrt{p(p+2)}), \end{aligned} \quad (7)$$

z čoho vyplýva, že žiadne z čísel vyhovujúcich ľavej nerovnosti vo vzťahu (6) nesplňuje prvú z nerovností (5). Pretože pre $p > 0$ zrejme platí

$$\sqrt{\frac{p}{2}} < \frac{1}{2} (p + \sqrt{p(p+2)}),$$

nerovnostiam (5) a (6) súčasne vyhovujú všetky tie x , pre ktoré platí

$$\sqrt{\frac{p}{2}} < x \leq \frac{1}{2} (p + \sqrt{p(p+2)}) . \quad (8)$$

Čísla určené vzťahom (8) splňujú však podmienku (2) vtedy a len vtedy, keď platí

$$\frac{1}{2} (p + \sqrt{p(p+2)}) \leq \sqrt{p} \quad (9)$$

čiže $\sqrt{p(p+2)} \leq 2\sqrt{p} - p$, z čoho postupne dostaneme

$$p^2 + 2p \leq 4p - 4p\sqrt{p} + p^2 ,$$

$$\sqrt{p} \leq \frac{1}{2} ,$$

$$0 < p \leq \frac{1}{4} ; \quad (10)$$

obrátením postupu sa však ľahko presvedčíme, že každé číslo určené nerovnosťou (10) vyhovuje tiež nerovnosti (9).

Zistili sme teda, že ak x vyhovuje nerovnosti (1) za podmienky a), potom musí platiť:

$$\text{Ak } 0 < p \leq \frac{1}{4} , \text{ je}$$

$$\sqrt{\frac{p}{2}} < x \leq \frac{1}{2} (p + \sqrt{p(p+2)}) , \quad (8')$$

$$\text{ak } p > \frac{1}{4} , \text{ je } \sqrt{\frac{p}{2}} < x \leq \sqrt{p} . \quad (11)$$

Obrátením postupu ľahko zistíme, že pre čísla x určené vzťahmi (8'), resp. (11), platí: $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} p(p+2)$,

$$2x^2 - 2px - p \leq 0 ,$$

čo je za podmienky a) ekvivalentné s nerovnosťou (4) a

teda aj s nerovnosťou (1) pričom podmienky (2) a (3) sú zrejme splnené.

b) Nech $2x^2 - p < 0$ čiže

$$-\sqrt{\frac{p}{2}} < x < \sqrt{\frac{p}{2}}. \quad (12)$$

Čísla určené vzťahom (12) zrejme splňujú podmienky (2) a (3) a za uvedeného predpokladu je nerovnosť (4) ekvivalentná s nerovnosťou

$2x^2 - 2px - p \geq 0$, z ktorej postupne máme

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} p(p+2) \quad \text{čiže buď}$$

$$x \leq \frac{1}{2} (p - \sqrt{p(p+2)}) \quad (13)$$

alebo

$$x \geq \frac{1}{2} (p + \sqrt{p(p+2)}). \quad (14)$$

Vzhľadom na (7) je množina čísel súčasne splňujúcich (12) a (13) vždy neprázdna a určená vzťahom

$$-\sqrt{\frac{p}{2}} < x \leq \frac{1}{2} (p - \sqrt{p(p+2)}), \quad (15)$$

zatiaľ čo množina čísel súčasne vyhovujúcich vzťahom (12) a (14) je pre každé $p > 0$ zrejme prázdna.

Obrátením postupu sa opäť ľahko presvedčíme, že čísla určené vzťahom (15) za podmienky (12) vyhovujú nerovnosti (4) a teda aj nerovnosti (1).

ZÁVER. Nerovnosti (1) vyhovujú pre $0 < p \leq \frac{1}{4}$

všetky čísla x určené vzťahmi (8') a (15) a pre $p > \frac{1}{4}$ všetky čísla x určené vzťahmi (11) a (15).

4. Po moři (jeho hladina je považována za rovinu) pluly dvě lodi stálými rychlostmi při stálých kursech. Jejich vzájemná vzdálenost činila v 9.00 h 20 námořních mil, v 9.35 h 15 mil a v 9.55 h 13 mil.

a) Zjistěte, jakou funkcí času je druhá mocnina jejich vzdálenosti.

b) Zjistěte, kdy si byly lodi nejbližší a jaká byla přitom jejich vzdálenost.

ŘEŠENÍ. a) Snadno se ukáže, že čtverec vzdálenosti obou lodí je kvadratickou funkcí času.

Budte A, B polohy lodí v okamžiku $t = 0$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektory jejich rychlostí. Polohy v okamžiku t tedy budou $A + t\mathbf{u}$, $B + t\mathbf{v}$. Čtverec vzdálenosti $d^2(t)$ je skalární čtverec vektoru

$$(A - B) + t\mathbf{u} - t\mathbf{v},$$

tedy

$$d^2(t) = (A - B, A - B) + 2t(\mathbf{u} - \mathbf{v}, A - B) + t^2(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}),$$

což je skutečně kvadratická funkce času t .

b) Zvolíme-li za začátek časové osy čas 9.00 h a za jednotku času 5 minut, máme najít minimum kvadratické funkce

$$d^2(t) = at^2 + bt + c,$$

známe-li její hodnoty

t	0	7	11
$d(t)$	20	15	13
$d^2(t)$	400	225	169

Máme tedy $c = 400$

a pro a, b soustavu rovnic

$$49a + 7b = -175$$

$$121a + 11b = -231,$$

jejímž řešením je $a = 1, b = -32$.

Je tedy

$$d^2(t) = t^2 - 32t + 400.$$

Hledané minimum nastane pro $t = 16$ a činí

$$d^2(16) = 256 - 512 + 400 = 144,$$

$$\text{tzn. } d(16) = 12.$$

Obě lodi si tedy byly navzájem nejbliže v

$$9^{00} + 16.0^{05} = 10^{20}$$

hodin a byly od sebe vzdáleny 12 námořních mil.

5. V rovine sú dané dva rôzne body S, A tak, že $\overline{SA} = 1$, a je dané reálne číslo k . Bod A otočíme okolo stredu S o orientovaný uhol veľkosti φ do polohy A' , k bodu A' zostrojíme jeho obraz A'' v rovnoľahlosti so stredom S a

s koeficientom rovnoľahlosti $\frac{1}{\cos \varphi - k \sin \varphi}$. Keď nadobúda φ všetky hodnoty, pre ktoré $\cos \varphi - k \sin \varphi \neq 0$, vyplnia body A'' priamku prechádzajúcu bodom A . Dokážte.

RIEŠENIE. Označme x', y' kartézské súradnice bodu A' , x'', y'' kartézské súradnice bodu A'' v súradnicovej sústave, ktorá má počiatok v bode S a bod A má v nej súradnice $[1; 0]$. Potom platí

$$x' = \cos \varphi, \quad y' = \sin \varphi,$$

$$x'' = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - k \sin \varphi}, \quad y'' = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - k \sin \varphi}. \quad (1)$$

Vyšetrujme najskôr tie hodnoty φ , pre ktoré je $\cos \varphi \neq 0$, $\sin \varphi \neq 0$, $\cos \varphi - k \sin \varphi \neq 0$. Z (1) vyplýva

$$x'' = \frac{1}{1 - k \operatorname{tg} \varphi}, \quad y'' = \frac{1}{\operatorname{cotg} \varphi - k}. \quad (2)$$

Za uvedených predpokladov pre φ je podľa (1) $x'' \neq 0$, $y'' \neq 0$ a z (2) dostaneme

$$k \cdot \operatorname{tg} \varphi = 1 - \frac{1}{x''}, \quad \operatorname{cotg} \varphi = k + \frac{1}{y''}. \quad (3)$$

Po vynásobení oboch rovníc zo vzťahu (3) a jednoduchšej úprave dostaneme

$$ky'' - x'' + 1 = 0, \quad (4)$$

čo je rovnica priamky prechádzajúcej bodom $A = [1; 0]$.

Zo vzťahu (1) je vidieť, že aj v prípade, keď buď $\cos \varphi = 0$ alebo $\sin \varphi = 0$, leží príslušný bod A'' na (4).

Obrátene zvolme bod $[x'', y'']$ priamky (4), pre ktorý je $x'' \neq 0$, $y'' \neq 0$. Z druhej rovnice (3) určíme φ . Platí preň $\operatorname{cotg} \varphi \neq 0$, pretože inak by z druhej rovnice (3) vyplývalo $ky'' + 1 = 0$ a v dôsledku toho zo (4) $x'' = 0$. Pretože podľa druhej rovnice (3) je $\operatorname{cotg} \varphi - k \neq 0$, je tiež $\cos \varphi - k \sin \varphi \neq 0$. Z existencie $\operatorname{cotg} \varphi$ a z nerovnosti $\operatorname{cotg} \varphi \neq 0$ vyplýva $\sin \varphi \neq 0$, $\cos \varphi \neq 0$. Tým sme našli hodnotu φ , ku ktorej prislúcha zvolený bod $[x'', y'']$ priamky (4).

Zostávajú ešte tie body priamky (4), pre ktoré je buď $x'' = 0$ alebo $y'' = 0$. Pre $y'' = 0$ dostaneme $x'' = 1$, t. j. bod A'' , ktorý zodpovedá hodnotám $\varphi = 2n\pi$ alebo $\varphi = \pi + 2n\pi$. Keďže $k \neq 0$ (inak by nemohlo byť $x'' = 0$), dostaneme pre $x'' = 0$ zo (4) $y'' = -\frac{1}{k}$. Bod

$\left[0, -\frac{1}{k}\right]$ zodpovedá hodnotám $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ alebo $\varphi = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$.

Tým je veta úplne dokázaná.

INÉ RIEŠENIE. Zvoľme kartézsku súradnicovú sústavu tak, aby $S = [0, 0]$ a $A = [1, 0]$. Bodu S priradíme komplexné číslo $s = 0$ a bodu A komplexné číslo $a = 1$. Bodu A' priradíme číslo a' , bodu A'' číslo a'' .

Keďže otočeniu o uhol φ odpovedá násobenie čísla $a = 1$ komplexnou jednotkou s amplitúdou φ , dostaneme

$$a' = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Číslo a'' dostaneme tak, keď číslo a' vynásobíme reálnym

čísлом $\frac{1}{\cos \varphi - k \sin \varphi}$ čiže

$$a'' = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - k \sin \varphi} + i \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - k \sin \varphi}.$$

Ak označíme $a'' = a_1'' + ia_2''$, kde a_1'' , a_2'' sú reálne súradnice bodu A'' v nami zvolenej súradnicovej sústave, dostaneme

$$a_1'' - ka_2'' = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - k \sin \varphi} - k \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - k \sin \varphi} = 1$$

čiže $a_1'' - ka_2'' = 1$.

Body A'' prislúchajúce jednotlivým hodnotám φ ležia teda na priamke určenej rovnicou $x - ky = 1$. Na tejto priamke leží však aj bod A , pretože jeho súradnice vyhovujú danej rovnici.

Dokážme teraz, že aj obrátene každý bod tejto priamky je nejakým bodom A'' . Ľubovoľný bod tejto priamky má

súradnice $[1 + ky_0, y_0]$. Musíme dokázať, že existuje taký uhol φ_0 , že

$$y_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 - k \sin \varphi_0},$$

t. j. $y_0 \cos \varphi_0 - ky_0 \sin \varphi_0 = \sin \varphi_0$ a $\cos \varphi_0 - k \sin \varphi_0 \neq 0$. Pre $y_0 = 0$ existuje $\varphi_0 = 0$. Ak $y_0 \neq 0$, musí byť aj $\sin \varphi_0 \neq 0$ a pre hľadané φ_0 máme rovnicu

$$y_0 \cotg \varphi_0 - ky_0 = 1 \quad \text{čiže}$$

$$\cotg \varphi_0 = \frac{1}{y_0} + k. \quad (5)$$

Pretože funkcia $\cotg \varphi$ nadobúda všetky reálne hodnoty, uhol φ_0 existuje pre každú hodnotu $y_0 \neq 0$. Pretože $\cotg \varphi_0 \neq k$, dostaneme z rovnosti (5) obráteným postupom, že

$$y_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 - k \sin \varphi_0}.$$

Potom však

$$\begin{aligned} x_0 = 1 + ky_0 &= 1 + \frac{k \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 - k \sin \varphi_0} = \\ &= \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_0 - k \sin \varphi_0}. \end{aligned}$$

Tým je úloha vyriešená.

Riešil Štefan Sakáloš,
2. D, SVŠ Prievidza

6. Najdšte všechna reálná x , pro něž platí

$$\sqrt{\lg x - 1} [\log_{\lg x} (2 + 4 \cos^2 x) - 2] \geq 0. \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. Levá strana nerovnice (1) má podle definic druhé odmocniny a logaritmické funkce smysl pro všechna x , pro něž současně platí

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x - 1 &\geq 0, \\ \operatorname{tg} x &> 0, \quad \operatorname{tg} x \neq 1, \\ 2 + 4 \cos^2 x &> 0.\end{aligned}$$

Všechny tyto nerovnosti jsou současně splněny, právě když je

$$\operatorname{tg} x > 1. \quad (2)$$

Za toho předpokladu je nerovnice (1) ekvivalentní nerovnici

$$\log_{\operatorname{tg} x} (2 + 4 \cos^2 x) \geq 2. \quad (3)$$

Nerovnice (1) je tedy ekvivalentní soustavě tvořené nerovnicemi (2) a (3). Podle (2) je základ logaritmu v nerovnici (3) větší než 1, a proto soustava nerovnic (2) a (3) je ekvivalentní soustavě nerovnic

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x &> 1, \\ 2 + 4 \cos^2 x &\geq \operatorname{tg}^2 x.\end{aligned} \quad (4)$$

Dosadíme-li do druhé nerovnice soustavy (4)

$$\cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1},$$

což platí pro všechna x , pro něž je definována funkce $\operatorname{tg} x$, dostáváme následující soustavu nerovnic

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x &> 1, \\ \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x - 6 &\leq 0,\end{aligned} \quad (5)$$

která je ekvivalentní soustavě (4).

Upravujeme postupně druhou nerovnici soustavy (5). Dostáváme

$$\left(\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}.$$

Vzhledem k tomu, že $\operatorname{tg} x > 1$, je tedy

$$\operatorname{tg}^2 x \leq 3,$$

tj.

$$-\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}.$$

Přihlédneme-li k první nerovnici soustavy (5), máme

$$1 < \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3},$$

odkud již plyne řešení soustavy nerovnic (5), a tedy také nerovnice (1):

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

kde k je libovolné celé číslo.

VI. Zpráva o XII. mezinárodní matematické olympiádě

1. ORGANIZACE A PRŮBĚH SOUTĚŽE

Tato soutěž pro žáky středních škol se konala ve dnech 9. až 21. července 1970 z větší části v městě *Keszthely* u Balatonu v MLR. Zúčastnilo se jí z pozvaných 17 států jen 14; *Itálie* odřekla pro nevyhovující časový termín, *Belgie* a *Finsko* pro nepřipravenost. Vedoucí delegací, kteří s pracovníky pořadatelské země tvoří mezinárodní jury, se sjeli dne 8. 7. 1970 v Budapešti, odkud příští den ráno odjeli autobusem do lázeňského městečka *Hévizu*; zde se po čtyři dni věnovali vybírání soutěžních úloh a přípravě soutěže. Mezinárodní jury předsedal na těchto jednáních *akademik G. Hajós*, který se však pro nemoc neúčastnil závěru soutěže; zastupoval jej *prof. J. Surányi*, který byl předsedou přípravného výboru. Řízení schůzí se zúčastnil i dlouholetý pracovník mezinárodních matematických olympiád a hlavní sekretář přípravného výboru *prof. E. Hódi*.

Soutěžní úlohy se vybíraly z 12 úloh, které ze zaslaných návrhů předem připravil přípravný výbor a ke kterým připojil i stručná řešení. Jednání začalo oficiálně 9. 7. o 16. hodině.

Akademik G. Hajós vzpomněl zesnulého spoluzakladatele mezinárodních matematických olympiád *Rudolfa*

Zelinky. Pak byly rozdány návrhy soutěžních úloh; jako obvykle měli delegáti poměrně málo času na prostudování úloh (možností různých řešení) a tak se stalo, že vybrané úlohy nebyly právě nejvhodnější a také jejich ohodnocení body nebylo zcela přiléhavé. Témata úloh byla z tradiční středoškolské matematiky, což nevyhovovalo zejména západním státům. Nesmírné potíže působila formulace textů. Když byl konečně stanoven definitivní text ve čtyřech jazycích (angličtina, francouzština, němčina a ruština), přeložili jej delegáti do národních jazyků a připravili jako obvykle obálky s texty úloh pro oba dny soutěže (viz přílohu).

Na vypracování každé práce byly stanoveny jako obvykle 4 hodiny čistého času. Delegátům ani žákům nebyly předem oznámeny zásady a požadavky, které budou uplatňovat maďarští koordinátoři při sjednocování klasifikace řešení, což se stalo později předmětem řady nedorozumění. Žáci také neznali bodové hodnocení úloh.

Družstva jednotlivých států se sjížděla se zástupci vedoucích v Budapešti během 10. července. Po přenocování v internátu — hotelu Universitas odcestovali 11. 7. do Keszthely, kde byli ubytováni v internátě — hotelu Juventus a měli téměř dva dny volné na rekreaci a koupání v Balatonu; počasí bylo překrásné.

Vlastní soutěž probíhala v Keszthely dne 13. a 14. července. *Slavnostní zahájení* se konalo v aule *Vysoké školy zemědělské* (nejstarší v Evropě, založené r. 1779). Promluvil vedoucí odboru ministerstva školství MLR *Miklósvary Sándor* a *prof. J. Surányi*. Zahájení se zúčastnili vedoucí delegací, kteří přijeli ráno autobusem z *Hévizu* (vzdálenost je jen asi 6 km). Také druhý den soutěže byli přítomni vedoucí delegací na začátku soutěže; po oba dny jim byl povolen asi na 5 minut vstup do sálů, kde žáci pracovali; proti tomu vznášela jak maďarská strana, tak

i někteří členové jury námitky. Teprve dne 14. 7. se přestěhovali delegáti z *Hévizu* do *Keszthely*, kde byli ubytováni v témž internátě jako žáci. Tím skončila izolace delegátů od žáků i jejich pedagogických průvodců. Toto řešení se ukázalo nevýhodné, neboť delegáti tu neměli dosti klidu pro opravování úloh a pro koordinování. Proti původnímu plánu byl na korektury vyhrazen jen jeden půlden (!), takže se opravovalo 14. 7. až do 2. hodiny noční. Naproti tomu pro koordinaci oprav byly stanoveny dva dny (15. a 16. 7.).

Koordinace byla značně ostrá; nejvíce se ohrazovali delegáti proti tomu, že žákům byly ubírány až dva body za to, že výslovně neuvedli triviální úsudky a věty a že o tomto požadavku nebyli předem informováni ani oni, ani opravující delegáti. Večer 15. 7. uspořádal župní výbor v *Keszthely* *receptci* pro delegáty i žáky, promluvil na ní předseda župního výboru *Bask Sándor*. Dne 16. 7. byla dokončena koordinace oprav zbývajících úloh; čs. delegát mimoto musel koordinovat 4. úlohu domácího maďarského družstva a byl přizván ke koordinování 4. úlohy (čs. původu) k jiným družstvům, kde vznikly rozpory. Žáci byli bez programu, neboť počasí se velmi zhoršilo a plánované koupání v Balatonu i hry odpadly. V pátek 17. 7. za chladného, větrného a deštivého počasí podnikli všichni účastníci XII. MMO dvěma motorovými loďmi po rozbouřeném Balatonu výlet do *Badacsony*, který se přesto celkem vydařil. V těchto dnech si vyměnily delegace tradiční upomínkové dárky.

Mimo společné exkurze se žáky měli delegáti samostatnou exkurzi dne 13. 7. Prohlédli si krásný kostel v *Sümege* i zříceniny stejnojmenného hradu. Po silnici pocházející z římských dob dojeli do *Sarvaly*, kde v krásném prostředí v myslivně poobědvali. Pak navštívili krasovou jeskyni v *Tapolce* a po koupání v Balatoně se vrátili do *Hévizu*.

Bouřlivá a dlouhá byla obě poslední zasedání jury dne 18. 7.; závěrečné zasedání skončilo až ve 23.15 h. Obtížné bylo zejména stanovit hranice pro I., II. a III. cenu (nakonec se určily hranice 37, 30 a 19 z dosažitelných 40 bodů pro žáka). Dále byla obtížná úloha rozhodnout o udělení zvláštních cen za vynikající řešení. Byly ustaveny zvláštní komise, ale při rozhodování se návrhy komise pro 4. úlohu znovu přezkoumávaly. Ukázalo se nakonec, že 1., 2. a 5. úloha neposkytovaly žádnou příležitost k elegantnímu řešení, 3. úloha byla příliš obtížná a nevhodná. 6. úloha obtížná, ale vhodná. Nejvíce bylo diskutováno kolem 4. úlohy. Výsledek jednání byl tento: byla udělena jedna zvláštní cena za 3. úlohu, 4 zvláštní ceny za 4. úlohu (mezi nimi jedna čs. účastníku Černému) a 2 zvláštní ceny za 6. úlohu. V *závěru* zasedání přednesl čs. delegát na základě písemného příslibu obou ministerstev školství ČSSR *pozvání* na XIII. MMO do ČSSR na rok 1971. Zároveň rozdál všem přítomným delegátům *návrh nového statutu*, podle kterého má být XIII. MMO organizována. V živé diskusi, která se rozvinula v nočních hodinách, se ukázalo, že bude třeba poslat všem účastnickým zemím XII. MMO, ale i Belgii, Finsku a Itálii nový, podrobnější vysvětlující dopis o nové koncepci olympiád, zejména o volitelnosti úloh. Je třeba podotknout, že mezinárodní jury jednohlasně přijala *pozvání ČSSR* a celkem se vyslovila kladně k chystaným změnám; definitivní stanovisko k návrhu statutu měly sdělit jednotlivé země pořadatelské zemi (tj. ČSSR) do 31. 10. 1970.

Dne 19. 7. se přemístili všichni účastníci vlakem (Balaton-expresem) do *Budapešti* a ubytovali se všichni v internátě — hotelu Universitas. 20. 7. ráno byla prohlídka města pro delegáty, jejich zástupce i žáky, večer byla velmi působivá projížďka osvětlenou Budapeští (zejména *Margitín ostrov* s vodotryskem, *Buda*, královský

zámek a citadela se sochou Svobody). Jinak bylo dne 20. 7. i 21. 7. (až do 16 h) volno na procházky a nákupy.

V 16 hod. uspořádal v technické universitě náměstek ministra školství *Lugossy Jenő* malou recepci pro delegáty a pak následovala závěrečná slavnost za přítomnosti všech účastníků (anglické družstvo se však nezúčastnilo, neboť předčasně odjelo) XII. MMO a dalších hostů. Zahájil ji *prof. Surányi*, promluvil náměstek ministra, který zdůraznil společenský význam olympiád pro porozumění mezi národy a upevňování míru. Pak osobně rozdál *diplomy* (ceny) vítězům; každý účastník dostal upomínkovou obrazovou publikaci. Za delegáty pak poděkoval vedoucí čs. družstva, připomněl význam vědecké analýzy matematického nadání pro současnou společnost i pokrokové ideje *J. A. Komenského* o demokratizaci vzdělání, které realizují zejména socialistické státy. V závěru opakoval pozvání všech účastnických zemí do ČSSR na XIII. MMO.

Večer 21. 7. se konala *společná večeře* všech účastníků, která vyzněla v opravdu přátelskou besedu mezi delegáty, jejich zástupci i žáky.

Ráno dne 22. 7. se počaly delegace rozjíždět. Jako jedna z prvních odjela v 7.50 h. rychlíkem *Hungaria* čs. delegace; 22. 7. večer byli už všichni čs. účastníci XII. MMO ve svých domovech.

Při celkovém hodnocení je třeba uznat, že soutěž byla dobře připravena, a to po stránce odborné i společenské. Zároveň se však ukázalo, že mají-li se MMO udržet, bude asi třeba připustit volitelné úlohy, neboť koncepce školské matematiky se v mnoha zemích velmi rozcházejí.

Pokud jde o výsledky družstev, dává neoficiální „žebříček“ toto pořadí zemí (v závorce jsou počty dosažených bodů):

1. Maďarsko (233), 2. a 3. SSSR a NDR (221), 4. Jugoslávie (209), 5. Rumunsko (208), 6. Velká Británie (180),

7. a 8. Bulharsko a ČSSR (145), 9. Francie (141), 10. Švédsko (110), 11. Polsko (105), 12. Rakousko (104), 13. Holandsko (87), 14. Mongolsko (58).

Celkem bylo uděleno 65 cen, a to 7 prvních, 11 druhých, 40 třetích a 7 zvláštních. Rozdělení cen mezi jednotlivé státy ukazuje tabulka 1 (státy jsou označeny mezinárodními zkratkami a uvedeny abecedně):

Tabulka č. 1

Stát Cena	A	BG	CS	D	F	GB	H	M	NL	PL	R	S	SU	YU
I.	—	—	—	1	—	1	3	—	—	—	—	—	2	—
II.	—	—	—	2	1	—	1	—	—	—	3	—	1	3
III.	1	3	4	4	4	6	3	1	1	1	4	2	3	3

Z bývalé „silné pětky“ se stala „silná šestka“: patří do ní tyto státy: NDR, GB, H, R, SU, YU. Československo vede s Bulharskem slabší skupinu (všimněte si rozdílu počtu bodů mezi V. Británií a ČSSR!). Státy silné šestky mají lépe připravené žáky. Z rozhovoru s delegáty je patrné, že významnou roli hrají matematické školy (nikoli *třídy*), kde v učebním plánu je 10 hodin matematiky i více a kde vyučují hlavně vysokoškolští učitelé. Takovéto školy už zavádí i Bulharsko. Pro nás z toho vyplývá jednoznačné poučení: zřídit v ČSR i SSR aspoň po jedné matematické škole, a to co nejdříve.

Tabulka 2 výsledků našeho družstva ukazuje jasně, že máme nadějně talenty mezi mladšími žáky, ale že se tito žáci nemohou rozvinout, neboť úroveň vyučování je i v tzv. speciálních třídách poměrně nízká.

Tabulka č. 2

Číslo	Žák	Ročník Místo	Počet bodů dosažených v úloze						Součet počtu bodů	Cena
			1	2	3	4	5	6		
1	Anton Černý	² Bratislava	5	7	0	6	0	0	18	zvláštní
2	Miroslav Hradil	³ Praha	0	7	0	5	6	0	18	—
3	Helena Husová	² Praha	1	7	0	4	4	5	21	III.
4	Pavel Pudlák	³ Praha	0	3	0	1	5	1	10	—
5	Štefan Sakáloš	² Prievdza	5	7	0	4	6	0	22	III.
6	Rudolf Švarc	³ Plzeň	5	7	0	6	2	0	20	III.
7	Jiří Tůma	³ Písek	5	7	0	5	6	0	23	III.
8	Belo Zorkovský	Košice	5	3	0	5	0	0	13	—
Součet počtu bodů			26	48	0	36	29	6	145	

Pro úplnost uvádíme ještě seznam členů mezinárodní jury, tj. seznam těch účastníků, kteří měli právo hlasovací (bohužel se příliš často hlasovalo):

1. Akademik Hajós György, předseda
2. Prof. Surányi János, doktor Akademie, místopředseda

Vedoucí delegací účastnických států:

3. Thomas Mühlgassner, prof. reál. gymnasia Eisenstadt, A
4. Kiril Dočev, docent mat. fakulty university v Sofii, BG
5. Jan Vyšín, docent mat.-fyz. fakulty UK v Praze, CS
6. Dr. hab. Helmut Bausch, Něm. akademie věd, NDR
7. André Warusfel, profesor lycée Louis le Grand, Paříž, F
8. Dr. Bryan Twaite^hs, Westfield College, London, GB
9. Hódi Endre, technický poradce Maď. optických závodů v Budapešti, H
10. Uržincerendijn Sanžimjatov, Mongolská státní universita v Ulánbátoru, M
11. Ary van Tooren, inspektor středních škol, Haag, NL
12. Andrzej Małowski, lektor Matematického ústavu university ve Varšavě, PL
13. Gleb Simionescu, ústřední inspektor min. školství v Bukurešti, R
14. Åke H. Samuelsoon, Matematický ústav university v Göteborgu, S
15. Michail Iljič Serov, Karelský pedagogický institut v Petrozavodsku, SU
16. Dr. Milenko Steković, profesor strojní fakulty university v Sarajevu, YU

2. ŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍCH ÚLOH

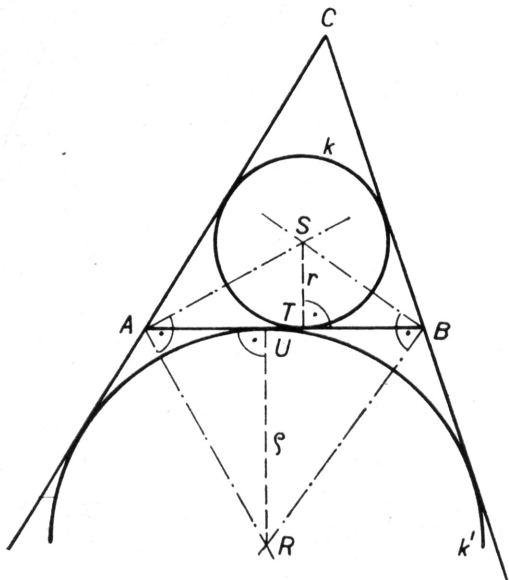
První den soutěže (13. července 1970)

(Doba určená pro vypracování jsou 4 hodiny)

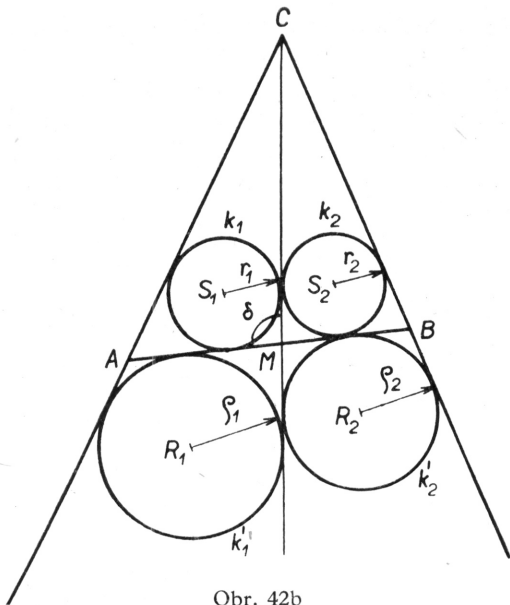
1. Uvnitř strany AB trojúhelníka ABC je dán bod M . Označme r_1, r_2, r poloměry kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům ACM, BCM, ABC . Označme dále $\varrho_1, \varrho_2, \varrho$ poloměry kružnic, které jsou po řadě vně vepsány týmž trojúhelníkům a které leží v úhlu $\sphericalangle ACB$. Dokažte, že platí

$$\frac{r_1}{\varrho_1} \cdot \frac{r_2}{\varrho_2} = \frac{r}{\varrho}. \quad (\text{Polsko, 5 bodů})$$

ŘEŠENÍ. Situace je znázorněna na obr. 42 a,b. Při označení z obr. 42a dostaneme



Obr. 42a



Obr. 42b

$$AT = r \cotg \frac{\alpha}{2}, \quad BT = r \cotg \frac{\beta}{2},$$

$$AU = \varrho \cotg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \varrho \tg \frac{\alpha}{2},$$

$$BU = \varrho \cotg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = \varrho \tg \frac{\beta}{2}.$$

Protože $AB = AT + BT = AU + BU$, je

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\tg \frac{\alpha}{2} + \tg \frac{\beta}{2}}{\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2}}. \quad (1)$$

Vzorec (1) upravíme podle součtových vzorců pro sinus

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}. \quad (2)$$

Označíme-li $\sphericalangle AMC = \delta$, je $\sphericalangle BMC = \pi - \delta$ a podle (2) vyjde

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{\varrho_1} &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}, \quad \frac{r_2}{\varrho_2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi - \delta}{2} = \\ &= \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Vynásobíme-li podle (3) a přihlídneme k (2), dostaneme výslednou formuli.

2. Buďte a, b, n přirozená čísla větší než 1. Čísla a, b jsou základy dvou číselných soustav. Čísla A_n, B_n mají totéž vyjádření

$$x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$$

v obou číselných soustavách o základech a, b ; přitom $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ jsou ^{cifry} a platí $x_{n-1} \neq 0, x_n \neq 0$. Čísla, která dostaneme z A_n, B_n vynecháním cifry x_n , označíme po řadě A_{n-1}, B_{n-1} .

Dokažte, že je $a > b$ právě tehdy, když platí

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}. \quad (\text{Rumunsko, 7 bodů})$$

ŘEŠENÍ. K zapsání čísel $A_n, B_n, A_{n-1}, B_{n-1}$ uijeme polynomických funkcí. Označme

$$\begin{aligned} f(t) &= x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \dots + x_1 t + x_0, \\ g(t) &= x_{n-1} t^{n-1} + x_{n-2} t^{n-2} + \dots + x_1 t + x_0. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned} A_n &= f(a), & B_n &= f(b), & A_{n-1} &= g(a), \\ & & B_{n-1} &= g(b). \end{aligned} \quad (1)$$

Máme dokázat oboustrannou implikaci

$$a > b \Leftrightarrow \frac{g(a)}{f(a)} < \frac{g(b)}{f(b)}. \quad (2)$$

Protože pro $t > 0$ je $f(t) > 0$ a $g(t) > 0$, je i $f(a) > 0$, $g(a) > 0$. Důkaz implikace (2) je tedy ekvivalentní s důkazem implikace

$$a > b \Leftrightarrow g(a)f(b) - f(a)g(b) < 0. \quad (3)$$

Důkaz může pokračovat takto:

Protože je $f(t) = g(t) + x_n t^n$, je

$$g(a)f(b) - f(a)g(b) = x_n(g(a) \cdot b^n - g(b) \cdot a^n). \quad (4)$$

Dokážeme snadno, že pro každé $k < n$ platí pro $a > b > 0$

$$a^k b^n - b^k a^n < 0.$$

Skutečně

$$a^k b^n - b^k a^n = a^k b^k (b^{n-k} - a^{n-k}) < 0.$$

Z toho plyne, že $g(a)b^n - g(b)a^n < 0$ a podle (4) je věta dokázána.

3. Posloupnost reálných čísel $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ splňuje podmínky

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \quad (1)$$

Posloupnost $\{b_n\}$ je definována vzorcem

$$b_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}}. \quad (n = 1, 2, \dots)$$

I. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$0 \leq b_n < 2.$$

II. Je-li c číslo z intervalu $0 \leq c < 2$, pak lze najít takovou posloupnost $\{a_n\}$ splňující podmínky (1), že v odpovídající posloupnosti $\{b_n\}$ platí $b_n > c$ pro nekonečně mnoho indexů n . Dokažte. (Švédsko, 8 bodů)

ŘEŠENÍ. I. Protože $\frac{a_{k-1}}{a_k} \leq 1$, je $b_n \geq 0$ pro všechna n .

Označme $\sqrt{a_k} = \alpha_k$ a provedme tuto úpravu

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k^2}\right) \frac{1}{\alpha_k} &= \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k^2} \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}^2} - \frac{1}{\alpha_k^2}\right) = \\ &= \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k^2} \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\alpha_k}\right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right) = \\ &= \left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} + \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right) \leq 2 \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right), \end{aligned}$$

tedy pro každé přirozené číslo k platí

$$\left(1 - \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k^2}\right) \frac{1}{\alpha_k} \leq 2 \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right).$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro $k = 1, 2, \dots, n$, dostaneme

$$b_n \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_n}\right) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) < 2.$$

II. Zkusme zvolit za a_n rostoucí geometrickou posloupnost.

Zvolme číslo d , pro které platí $0 < d < 1$ a položíme $\alpha_k = d^{-k}$, neboli $a_k = d^{-2k}$. Pak je

$$\left(1 - \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k^2}\right) \frac{1}{\alpha_k} = \left(1 - \frac{d^{2-2k}}{d^{-2k}}\right) \cdot \frac{1}{d^{-k}} = (1 - d^2) \cdot d^k$$

a tedy

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^n (1 - d^2) d^k = (1 - d^2) \sum_{k=1}^n d^k = \\ &= (1 - d^2) \cdot d \cdot \frac{1 - d^n}{1 - d} \end{aligned}$$

neboli

$$b_n = d(1 + d)(1 - d^n). \quad (1)$$

Je-li $0 \leq c < 2$ a má-li platit $b_n > c$, musí být

$$d(1 + d)(1 - d^n) > c,$$

tj.

$$1 - d^n > \frac{c}{d(1 + d)},$$

tj.

$$d^n < 1 - \frac{c}{d(1 + d)}. \quad (2)$$

Je ještě třeba dokázat, že ke každému c z intervalu $0 \leq c < 2$ lze zvolit takové d z intervalu $0 < d < 1$, že

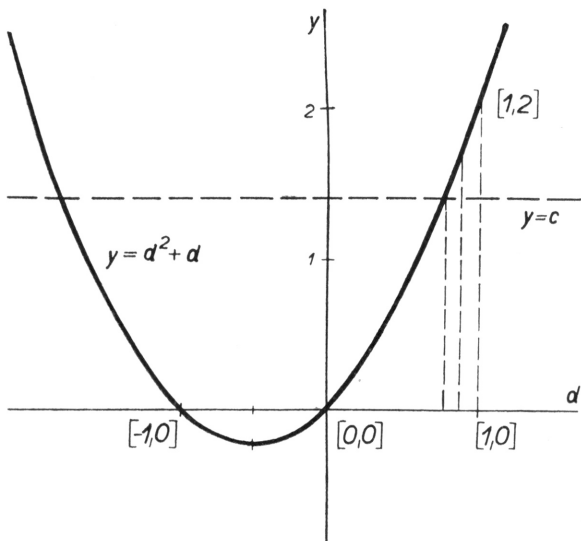
číslo $1 - \frac{c}{d(1 + d)}$ je kladné.

Podmínka $1 - \frac{c}{d(1 + d)} > 0$ je ekvivalentní s podmínkou $\frac{c}{d(1 + d)} < 1$ neboli s podmínkou

$$d^2 + d > c. \quad (3)$$

Funkce $y = d^2 + d$ je znázorněna grafem na obr. 43. Tento graf je parabola, která protíná osu d v bodech $[-1; 0]$, $[0; 0]$ a prochází bodem $[1; 2]$.

Z grafu je patrné, že pro každé $0 \leq c < 2$ protíná přímka



Obr. 43

$y = c$ parabolu v bodě, jehož souřadnice d_1 je z intervalu $0 \leq d < 1$. Je to číslo

$$d_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{1+4c} - 1) < \frac{1}{2} (\sqrt{1+4 \cdot 2} - 1) = 1.$$

Zvolíme-li d tak, že $d_1 < d < 1$, je nerovnice (3) splněna a protože $\{d^n\}$ je nulová posloupnost, splňují všechny její členy od určitého počínaje nerovnost (2), tj. pro všechna příslušná n platí $b_n > c$.

Druhý den soutěže (14. července 1970)

(Doba určená pro vypracování je 4 hodiny)

4. Určete všechna přirozená čísla n , která mají tuto vlastnost: Množinu $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ lze rozložit ve dvě podmnožiny bez společného prvku tak, že součin všech prvků jedné z těchto podmnožin je roven součinu všech prvků druhé podmnožiny.

(ČSSR, 6 bodů)

ŘEŠENÍ. Označme $E = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$, E_1, E_2 obě hledané podmnožiny. Zřejmě je $E_1 \neq \emptyset$, $E_2 \neq \emptyset$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cup E_2 = E$. Žádná z podmnožin E_1, E_2 není jednoprvková, neboť pro největší číslo z E , tj. pro $n+5$ platí

$$(n+2)(n+3) - (n+5) = \\ = n^2 + 4n + 1 > 0.$$

Lze tedy hovořit o součinu všech prvků E_1 i E_2 .

Budiž p prvočinitel čísla $a \in E$; pak existuje aspoň jedno číslo $b \in E$ ($b \neq a$), jehož prvočinitelem je p . Protože $5 \geq |a - b| = p \cdot k$, je $p \leq 5$, tj.

p je 2 nebo 3 nebo 5.

Je zřejmé, že 5 může být prvočinitelem jediné čísel $n, n+5$ (jinak by E neobsahovala dva násobky pěti).
Množina

$$F = \{n+1, n+2, n+3, n+4\}$$

obsahuje tedy jediné čísla tvaru $2^\alpha 3^\beta$. Množina F však obsahuje zřejmě dvě čísla sudá a dvě lichá. Obě lichá čísla z F můžeme tedy napsat ve tvaru

$$3^\gamma, 3^\delta.$$

Avšak $|3^\gamma - 3^\delta| < 4$; protože $3^\gamma - 3^\delta$ je číslo sudé, je $|3^\gamma - 3^\delta| = 2$. Zvolíme-li označení tak, aby bylo $\gamma > \delta$, je

$$3^\gamma - 3^\delta = 3 \cdot N = 2;$$

přítom N je přirozené číslo; to je však nemožné.

Úloha je tedy neřešitelná.

5. Pata E výšky DE čtyřstěnu $ABCD$ je průsečík výšek trojúhelníka ABC ; dále je $BD \perp CD$.

Dokažte, že platí

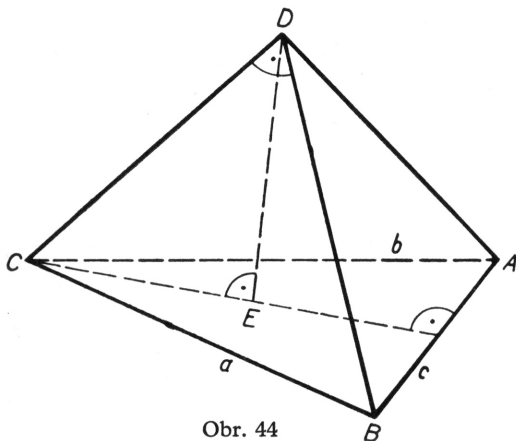
$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2).$$

Určete všechny čtyřstěny, pro které nastane v předchozím vztahu rovnost.

(Bulharsko, 6 bodů)

ŘEŠENÍ (obr. 44). Platí $(DE \perp AB) \wedge (CE \perp AB)$; proto $(CDE) \perp AB$ a odtud dále

$$CD \perp AB. \quad (1)$$



Vztah (1) platí i v případě, že $E = C$, tj., že body C, D, E neurčují rovinu, neboť pak je $CD = DE$.

Protože $AB \perp CD$ podle (1) a $BD \perp CD$ podle předpokladu, je $(ABD) \perp CD$. Odtud plyne

$$CD \perp AD. \quad (2)$$

Protože v (1) i v předpokladu lze vyměnit body B, C , platí to i v (2), tj.

$$BD \perp AD.$$

Čtyřstěn $ABCD$ má tedy všechny tři stěnové úhly při vrcholu D pravé. Podle Pythagorovy věty (pro $\triangle ABD, BCD, CAD$) dostaneme

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

nebo při obvyklém označení stran $\triangle ABC$

$$6(AD^2 + BD^2 + CD^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2). \quad (3)$$

Dále $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - (a + b + c)^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$, tj. podle (3)

$$6(AD^2 + BD^2 + CD^2) = (a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Odtud plyne tvrzení obsažené v textu úlohy. Rovnost nastane, právě když $a = b = c$.

6. V rovině je dáno 100 bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Vyšetřujeme všechny trojúhelníky, jejichž všechny tři vrcholy jsou některé z daných bodů.

Dokažte, že nejvýše 70 % všech těchto trojúhelníků jsou trojúhelníky ostroúhlé.

(SSSR, 8 bodů)

ŘEŠENÍ. Označme T_n počet všech trojúhelníků, daných systémem n nekolineárních bodů, O_n počet všech ostroúhlých trojúhelníků daných tímž systémem.

Dokážeme lemmu

$$O_n \leq a T_n \Rightarrow O_{n+1} \leq a T_{n+1}.$$

Ze systému $n + 1$ bodů vynecháme po řadě 1., 2. až $(n + 1)$ -tý bod; příslušné počty všech trojúhelníků (ostroúhlých trojúhelníků) v těchto $n + 1$ systémech o n bodech označíme $T_{nk}, O_{nk} (k = 1, 2, \dots, n + 1)$.

Pak platí

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{T_{n1} + T_{n2} + \dots + T_{n, n+1}}{n-2}, \\ O_{n+1} &= \frac{O_{n1} + O_{n2} + \dots + O_{n, n+1}}{n-2}, \end{aligned} \quad (1)$$

neboť každý trojúhelník (ostroúhlý trojúhelník) je zahrnut do $(n+1) - 3 = n-2$ systémů. Podle předpokladu platí $O_n \leq aT_n$, speciálně

$$O_{nk} \leq aT_{nk}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1. \quad (2)$$

Dosadíme z (2) do druhého vzorce (1) a dostaneme

$$O_{n+1} \leq a \frac{T_{n1} + T_{n2} + \dots + T_{n, n+1}}{n-2} = aT_{n+1}.$$

Tím je lemma dokázáno. 

Protože je $T_4 = 4$, $O_4 \leq 3$, $\frac{O_4}{T_4} \leq 0,75$ tj.

$a = 0,75$. Dále je $T_5 = 10$, a teda podle lemmy $O_5 \leq 0,75 \cdot 10 = 7,5$, neboli $O_5 \leq 7$, $\frac{O_5}{T_5} \leq 0,7$ čili 70 %, tj. $a \leq 70 \%$.

Indukcí se dokáže pro libovolné n (tedy také $n = 100$).

POMOCNÁ STUDIŽNÍ LITERATURA

A. Edice „Škola mladých matematiků“ (vydává nakladatelství Mladá fronta)

1. Hradecký — Koman — Vyšín: *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles* (3 Kčs)
2. Jiří Sedláček: *Co víme o přirozených číslech* (1,50 Kčs)
3. Jaroslav Šedivý: *Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách* (2,60 Kčs)
4. Miroslav Šisler — Jiří Jarník: *O funkcích* (1,80 Kčs)
5. František Veselý: *O nerovnostech* (2,50 Kčs)
6. Rudolf Výborný: *Matematická indukce* (2 Kčs)
7. Jaroslav Šedivý: *Podobná zobrazení* (3 Kčs)
8. Jiří Váňa: *O rovnicích s parametrem* (2 Kčs)
9. Jan Vyšín: *O konvexních útvech* (3 Kčs)
10. Jiří Sedláček: *Faktoriály a kombinační čísla* (3 Kčs)
11. Josef Holubář: *Geometrická místa bodů v prostoru* (2 Kčs)
12. Karel Havlíček: *Prostory o více dimensích* (3 Kčs)
13. Miroslav Šisler — Josef Andrys: *O řešení algebraických rovnic* (4 Kčs)
14. František Veselý: *O dělitelnosti čísel celých* (4 Kčs)
15. Milan Koman: *Geometrická místa vyšetřovaná metodou souřadnic* (3,50 Kčs)
16. Stanislav Horák: *Kružnice* (4 Kčs)
17. Jaromír Hroník: *Úlohy o maximech a minimech funkcí* (3 Kčs)
18. Karel Havlíček: *Analytická geometrie a nerovnosti* (4 Kčs)
19. Jiří Jarník: *Komplexní čísla a funkce* (3,50 Kčs)
20. Bruno Budínský — Stanislav Šmakal: *Goniometrické funkce* (4,50 Kčs)

21. Alois Apfelbeck: *Kongruence* (6 Kčs)
22. Tibor Šalát: *Dokonalé a spriateléné čísla* (4 Kčs)
23. Jaroslav Morávek — Milan Vlach: *Oddělitelnost množin* (6,50 Kčs)
24. Ján Gatiaľ — Milan Hejný: *Stavba Lobačevského planimetrie* (7 Kčs)
25. Leo Bukovský — Igor Kluvánek: *Dirichletov princíp* (6 Kčs)
26. Karel Hruša: *Polynomy v moderní algebře* (8 Kčs)
27. Stanislav Horák: *Mnohostěny* (8 Kčs)

Ve vydávání těchto svazeků se pokračuje.

B. Knížky dalších nakladatelství

1. Hruša — Kraemer — Sedláček — Vyšín — Zelinka: *Přehled elementární matematiky* (vydalo Státní nakladatelství technické literatury, cena 25 Kčs)
2. Medek — Mišík — Šalát: *Prehľad stredoškolskej matematiky* (vydalo Slovenské vydavateľstvo technickej literatury, cena 13,20 Kčs)
3. Kraemer a kol.: *Sbírka řešených úloh z matematiky pro 6. až 8. ročník* (vydalo Státní pedagogické nakladatelství, cena 7,50 Kčs)
4. *Brožury matematické olympiády*, kterých dosud vyšlo 19, obsahují vždy texty a řešení úloh z jednoho ročníku soutěže. V brožurách najdete řadu zajímavých úloh, jejichž řešením si jednak prohloubíte své vědomosti, jednak se seznámíte s různými metodami řešení.
5. Hruša — Sedláček: *Řešené úlohy z matematiky* (vyd. Státní nakladatelství technické literatury, cena 6,70 Kčs)
6. Jarník — Šisler: *Jak řešit rovnice a jejich soustavy* (vyd. Státní naklad. technické literatury, cena 9,40 Kčs)
7. Sedláček: *Nebojte se matematiky* (vyd. Státní naklad. techn. literatury, cena 5,50 Kčs). Tato knížka vyšla letos znovu.
8. Hruša a kol.: *Úvod do studia matematiky* (vyd. Státní ped. naklad., cena 8,40 Kčs)
9. J. B. Dynkin — V. A. Uspenskij: *Matematické besedy* (vyd. Stát. naklad. techn. literatury, cena 20,50 Kčs)
10. Lidskij a kol.: *Úlohy z elementární matematiky* (vyd. Stát. pedagog. naklad., cena 19,50 Kčs)
11. Juraj Bosák: *Rovnice a nerovnosti* (vyd. Slov. pedagog. nakl., cena 4 Kčs)
12. Jiří Kůst: *Sférická trigonometrie* (vyd. Stát. pedagog. nakl., cena 9,50 Kčs)
13. Petr Benda a kol.: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky* (vyd. Státní pedagog. nakl., cena 6 Kčs)
14. Miroslav Menšík: *Geometrické základy fotogrammetrie* (vyd. Státní pedagogické naklad., cena 9,50 Kčs)

Mimoto upozorňujeme na knížky sovětského autora Perelmana „Zajímavá aritmetika“, „Zajímavá algebra“, „Zajímavá geometrie“, které vyšly v českém překladu v nakladatelství Mladá fronta; jsou zvláště vhodné pro pořádání matematických besed a večerů. Z příruček o dějinách matematiky uvádíme:

1. I. Depman: Besedy o matematice (český překlad vyd. Stát. pedagog. naklad., cena 5,70 Kčs)
2. Fr. Balada: Z dějin elementární matematiky (vyd. Státní pedagog. naklad., cena 12 Kčs)
3. Dirk J. Struik: Dějiny matematiky (vyd. Orbis, cena 11 Kčs)

SEZNAM EXPERIMENTÁLNÍCH MATEMATICKÝCH ŠKOL

1. ZDŠ, Praha 8-Karlín, Lyčkovo nám. 6,
2. ZDŠ, Praha 3-Vinohrady, Jiřího nám. 8,
3. ZDŠ, Brno, tř. kpt. Jaroše 14,
4. ZDŠ, Brno-Lesná, Hakenova 24,
5. ZDŠ, Brno, Staňkova 14,
6. ZDŠ, Liberec I, Lesní 14,
7. ZDŠ, Bratislava, Košická ul.,
8. ZDŠ, Bratislava, Kvačalova 18,
9. Gymnasium, Praha 3-Žižkov, Sladkovského nám. 8,
10. Gymnasium, Brno, tř. kpt. Jaroše 14,
11. Gymnasium, Bratislava, Novohradská.

SEZNAM EXPERIMENTÁLNÍCH MATEMATICKÝCH TEXTŮ*)

1. Hruša: Návrh modernizace, pro 1. roč., Kčs 5,40 (4,—)
2. Hruša: Návrh modernizace, pro 2. roč., Kčs 5,40 (4,—)
3. Hruša: Návrh modernizace, pro 3. roč., Kčs 8,— (6,—)
4. Hruša: Pracovní listy, pro 1. roč., Kčs 15,80 (11,80)
5. Hruša: Pracovní listy, pro 2. roč., Kčs 19,20 (14,40)
6. Hruša: Pracovní listy, pro 3. roč., Kčs 22,— (16,60)
7. Taišl—Kůst: Matematika, pro 4. roč., Kčs 13,60 (10,20)
8. Taišl—Koman: Matematika, pro 5. roč., Kčs 23,20 (17,40)
9. Vyšín: Úvod do množ. matematiky I., Kčs 28,80 (21,60)
10. Vyšín: Úvod do množ. matematiky II., Kčs 29,60 (22,20)
11. Koman—Taišl: Matematika, pro 6. roč., I., Kčs 34,— (25,40)
12. Koman: Matematika, 6. roč., II., Kčs 20,80 (15,60)
13. Koman: Kombinatorika, Kčs 9,40 (7,—)
14. Dlouhý: Relace, Kčs 17,60 (13,20)
15. Hájek a kol.: Zlomky, Kčs 21,40 (16,—)
16. Vyšín: Zobrazení, Kčs 18,— (13,60)
17. Dlouhý: Matematika, pro 7. roč., I., Kčs 19,— (14,20)
18. Vyšín a kol.: Množiny a relace, Kčs 20,40 (15,40)
19. Vyšín: Nezáporná racionální čísla, Kčs 14,20 (10,60)

*) Uvedené texty možno objednat na adrese: Kabinet pro modernizaci vyučování fyzice ČSAV, Žitná 25, Praha 1-Nové Město. Členové JČSMF mohou uplatnit slevu!

20. Vyšín: Rovnice, Kčs 10,80 (8,—)
21. Čech—Blažek: Obrazce, Kčs 9,20 (7,—)
22. Dlouhý: Reálná čísla, Kčs 24,— (18,—)
23. Hruša: Operace v množině reálných čísel, Kčs 18,40 (13,80)
24. Vyšín: Množiny bodů a grafy relací, Kčs 22,80 (17,20)
25. Vyšín: Stereometrie, Kčs 18,— (13,60)
26. Vyšín: Grupy, Kčs 12,60 (9,40)
27. Vyšín: Funkce, Kčs 10,40 (7,80)
28. Šedivý: Matematika pro 1. roč. g., I., Kčs 12,80 (9,60)
29. Šedivý: Matematika pro 1. roč. g., II., Kčs 13,40 (10,—)
30. Šedivý: Zobrazení, funkce a operace, I., Kčs 12,20 (9,20)
31. výt. Algebraické struktury, text pro žáky, Kčs 7,20 (5,40)
32. výt. Algebraické struktury, pro učitele, Kčs 13,40 (10,—)
33. Vyšín: Aritmetika a logika
34. Vyšín: Geometrické struktury I.
35. Vyšín: Metoda souřadnic
36. Dlouhý: Matematika pro sedmý ročník, II.

OBSAH

Předmluva	3
I. O průběhu XIX. ročníku matematické olympiády	9
II. Přípravné úlohy I. kola	28
1. Kategorie A	28
2. Kategorie B	37
3. Kategorie Z	43
III. Soutěžní úlohy I. kola	53
1. Kategorie A	53
2. Kategorie B	70
3. Kategorie Z	81
IV. Soutěžní úlohy II. kola	88
1. Kategorie A	88
2. Kategorie B	108
3. Kategorie Z	117
V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A	124
VI. Zpráva o XII. mezinárodní matematické olympiádě	143
Pomocná studijní literatura	162

Edice Pomocné knihy pro žáky

**Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Vlastimil Macháček, Jiří Mída a dr. Jozef Moravčík, CSc.**

**DEVATENÁCTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY**

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský

Vydání 1. — Praha 1971 — Počet stran 168

Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová

Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk

Technická redaktorka: Eva Skřivánková

**Vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 2, Ostrovní 30, Praha 1.
AA 5,37 (4,67 AA textu, 0,70 AA grafiky) — VA 5,75 — Náklad
3 000 výtisků — Tematická skupina a podskupina 03/2 — Cena
brožovaného výtisku Kčs 7,50**

505/21, 852

**Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 15—0—06**

14-451-71 Kčs 7,50

matematická
olympiáda

MO

SPN 15-0-06

14-451-71

03/2

Kčs 7,50