

20. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 20. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1970-1971. 13. Mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404606>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

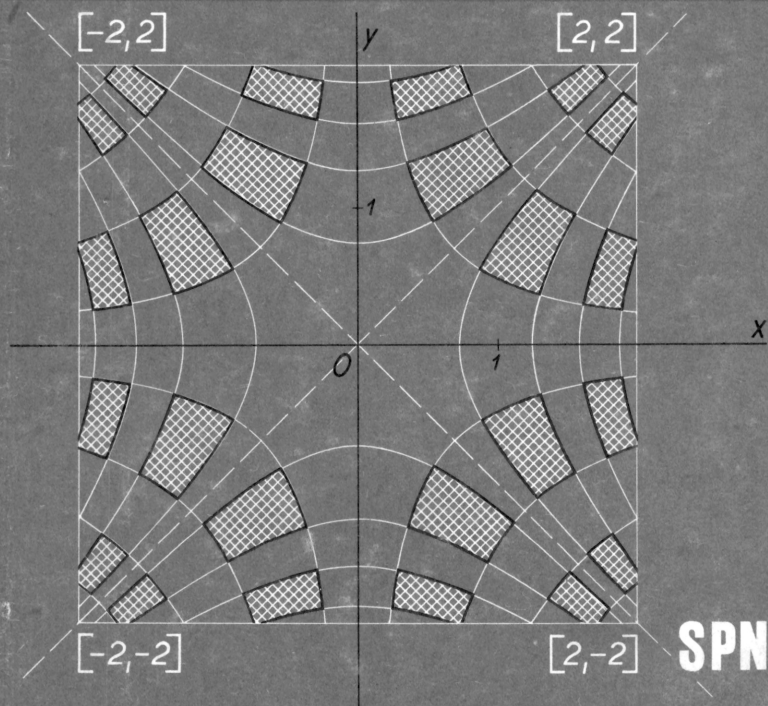


This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 66 01 - 3

XX. ročník matematické olympiády



SPN

DVACÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva a řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1970—1971*

TŘINÁCTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 66 01 - 3

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc., Vlastimil Macháček, Jiří Mída a dr. Jozef Moravčík, CSc.

Slovenské části textu přeložil dr. Jozef Moravčík, CSc.

Recenzovali Jitka Kučerová a dr. Miroslav Šisler, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, 1972

Předmluva

Milí mladí přátelé,

jako každoročně používáme i letos předmluvy, abychom si s Vámi pohovořili o některých závažných otázkách matematické olympiády.

1. Komentáře. V této brožuře jsou zpracována poprvé řešení přípravných i soutěžních úloh I. kola pro kategorie *Z* a *B* novým způsobem. Navazujeme tím na komentáře, které dostali Vaši učitelé a pracovníci *MO* a které — stručně řečeno — obsahují některé návrhy, jak uvést žáky do řešení úloh. Protože naši brožuru budou číst i žáci a učitelé, kteří se neseznámili s komentáři v průběhu *XX.* ročníku *MO*, otiskujeme je v upravené formě v této brožuře. Komentáře obvykle neobsahují přímo řešení úloh; věnují se spíše otázce „*jak na to?*“ a obsahují vcelkem úvahy kolem příslušné úlohy: jaké mohou být její varianty (obměny), zobecnění, jak se sestavují úlohy podobného typu, co je principem řešení apod. Pro úplnost je komentář ke každé úloze I. kola kategorií *Z* a *B* doplněn řešením — ovšem už jen zcela stručným.

Doufáme, že se tato novinka osvědčí, že ji přivítají žáci i učitelé. Prosíme Vás, abyste nám o tom napsali své mínění.

2. Kategorie C. Na základě řady podnětů z řad pracovníků matematické olympiády byla obnovena počínaje *XXI.* ročníkem *kategorie C* soutěže *MO* určená pro žáky 1. ročníku výběrových škol II. cyklu. Toto rozhodnutí

učinil *ÚVMO* na svém podzimním zasedání r. 1970 s odůvodněním, že je takřka nemožné vybrat soutěžní úlohy tak, aby vyhovovaly zároveň zkušenějším a pokročilejším žákům II. ročníku a „prvňáčkům“ gymnasií a odborných škol, kteří nedávno přišli ze ZDŠ a ještě si ani nezvykli na nové způsoby práce a abstraktnější charakter studia. Přílišná náročnost úloh kategorie *B* je odrazovala od soutěže a tomu chceme zabránit.

Jsme si ovšem vědomi, že obnovení kategorie *C* samo nezachrání situaci. Žáci 1. ročníku škol II. cyklu potřebují v studijním I. kole pomoc svých učitelů a nemusí se stydět se jí dožadovat. Z této potřeby vznikly komentáře, o kterých jsme hovořili na začátku.

3. Mezinárodní olympiáda. Výsledky našich reprezentantů na *XIII. mezinárodní olympiádě*, která se konala v r. 1971 v Československu (v Bratislavě a Žilině), jsou zcela neuspokojivé. Jak je vidět ze zprávy na konci brožury, dopadli jsme velmi špatně — naše družstvo získalo jen 55 bodů, tj. ztratilo proti roku 1970 téměř 100 bodů. Úlohy *XIII. MMO* byly sice těžké, ale přesto je vidět při podrobném rozboru žákovských řešení a výsledků, že péče o matematické talenty není u nás na takové výši jako např. v *MLR*, *NDR* nebo v *SSSR* a také, že naši studenti nemají vždy dost vůle a vytrvalosti bojovat. Po vzoru jiných socialistických států budeme pravděpodobně usilovat o zřízení matematických škol, které by mohly zlepšit naši situaci.

4. „Vyšší matematika“. Tato část předmluvy souvisí s předcházející. Přirozenou touhou mladého člověka je, aby se co nejdříve vyzul z dětských střevíčků a obul si sedmimilové boty, které ho ponesou rychle kupředu. Tak je tomu také v matematice, bohužel někdy ke škodě spěchajícího. Víme a chápeme, že Vás nebaví stálé přemíláním středoškolské matematiky — ale není jiné pomoci,

naučit se jí musíte, dokonce i mnoha partiím látky zcela tradiční. Uvědomte si, že i v „staré“, tradiční matematice je mnoho problémů jednoduše formulovaných, velmi zajímavých, ale často velmi obtížných k řešení. Naproti tomu se i tzv. *moderní matematika* může stát „otravnou“, když se jí učí špatně; totéž platí i o tzv. vyšších partiích matematiky. Uvědomte si, že každý, kdo chce matematiku dále studovat nebo aplikovat, musí mít jisté všeobecné matematické vzdělání. Je trapný pohled na středoškoláka, který chce užít k řešení školského problému parciálních derivací, ale věty o nich neovládá a nedovede aplikovat, nebo na účastníka *MO*, který ztroskotá na zcela jednoduché stereometrické úloze. *ÚV MO* se snaží vyjít vstříc Vaší touze naučit se něčemu novému; v *knižnici ŠMM* vycházejí svazečky tzv. *výběrové rady*, které značně vybočují ze středoškolského učiva jak obsahem, tak metodami. Ale prosíme Vás: nepřehlížejte a nepodceňujte středoškolskou matematiku, ani tu tradiční, a nepoužívejte zejména při soutěžích aparátu, který bezpečně neznáte a který neumíte aplikovat. Chcete-li studovat něco dalšího, poraďte se se svým učitelem matematiky nebo se obraťte na *ÚV MO*; sami si těžko vyberete vhodnou moderní a přístupnou knihu.

5. Matematická logika. Poslední dobou pronikly a pronikají do všech výběrových, a dokonce i nevýběrových škol v zahraničí i u nás elementy matematické logiky. Tato skutečnost byla vynucena situací, že malá exaktnost dřívějšího vyučování nestačí ani matematice samé, ani jejímu eventuálnímu použití. Precizovat myšlení v matematice znamená bezesporu studovat aspoň základy matematické logiky. Někdy se ovšem výklad o logice vulgarizuje triviálními ilustračními příklady, dále se poznatků z logiky nikde nevyužije a celá taková partie je pak pro posměch. To nás však nemůže odvrátit od úsilí naučit

žáky, a zejména ty nadanější, v matematice přesně myslet. Že i zdánlivě nevinné otázky v sobě mohou skrývat záludnosti a mohou být podnětem k vážnému zamyšlení, o tom svědčí dvě otázky, které předložil na mezinárodním setkání učitelů matematiky v Krakově v srpnu 1970 prof. Freudenthal. Otázky znějí:

- a) Je totéž: „nejstarší malíř mezi (žijícími) básníky“ jako „nejstarší básník mezi (žijícími) malíři“?
- b) Je totéž: „největší“ (ve smyslu proslulosti) malíř mezi (žijícími) básníky jako „největší básník mezi (žijícími) malíři“?

6. Spolupráce SSM. V závěru předmluvy konstatujeme s potěšením, že spolupráce *ÚVMO* se *Socialistickým svazem mládeže* se rozvíjí velmi slibně, mnohem lépe než spolupráce s bývalou mládežnickou organizací. *SSM* velmi pomohl při organizaci *XIII. MMO* po stránce organizačně společenské, odměňuje vynikající řešitele zvláštěními rekreačními pobyty; jeho vydavatelství *Mladá fronta* vydává a bude i nadále vydávat pomocnou studijní literaturu (*ŠMM*). Svaz pomáhá zajistit soustředění olympioniků, pomáhá při propagaci *MO* v prostředcích hromadné komunikace, spoluúčastní se výběrové soutěže *MO* ve znalosti cizí studijní literatury apod.

Milí přátelé, zmínili jsme se tu o několika aktuálních otázkách *MO*; víme, že máte málo času a mnoho zájmů i mimo matematickou olympiádu, víme však, že jistě máte i mnoho dobrých nápadů. Budete-li mít někdy chuť a chvilku volného času, napište nám o nich.

ÚV MO

I. O průběhu XX. ročníku matematické olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Pořadatelem soutěže XX. ročníku byla *ministerstva školství ČSR a SSR s Matematickým ústavem ČSAV v Praze (MÚ ČSAV)* a *Jednotou čs. matematiků a fyziků (JČSMF)* za spolupráce s orgány *Socialistického svazu mládeže (SSM)*. Také XX. ročník se řídil statutem uveřejněným ve *Věstníku MŠK*, roč. XIX, str. 126, 127, směrnice 37 ze dne 30. IV. 1963.

Ministerstva školství ČSR i SSR prodloužila funkční období ústředního výboru matematické olympiády (*ÚV MO*) jmenovaného v roce 1966 do konce roku 1970. V lednu 1971 obě ministerstva vyslovila (až na jediný případ) souhlas s návrhem *JČSMF* na sestavení nového *ÚV MO* pro další funkční období a vydala příslušné dekrety.

Žáci opět soutěžili jen ve třech kategoriích: v kategorii *A* žáci III. a IV. ročníků škol II. cyklu, v kategorii *B* žáci I. a II. ročníků škol II. cyklu a v kategorii *Z* žáci IX. ročníku *ZDŠ*. Bylo ovšem možné, aby žák soutěžil i v kategorii vyšší, než do které studijně patří; toho využila řada žáků především v kategorii *A*.

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Nový ústřední výbor matematické olympiády schválený přípisem ministerstva školství ČSR ze dne 18. ledna 1971

a ministerstva školství SSR ze dne 3. XII. 1970 pracoval v tomto složení:

Předseda: *Jan Vyšín, CSc.*, docent matematicko-fyzikální fakulty KU v Praze

I. místopředseda: *dr. Jozef Moravčík, CSc.*, odb. asistent VŠD v Žilině

II. místopředseda: *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.*, vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

I. jednatel: *Vlastimil Macháček, cdb.* asistent pedagogické fakulty KU v Praze

II. jednatel: *Jiří Mída*, odborný asistent pedagogické fakulty KU v Praze

Členové:

Zástupce MŠ ČSR: *Jaroslav Láník*, ústřední škol. inspektor MŠ ČSR, Praha

Zástupce MŠ SSR: *Michal Zöldy*, ústřední škol. inspektor MŠ SSR, Bratislava

Zástupce ÚV SSM: *Jana Pomazalová*, prof. gymnasia, Brno

dr. František Běloun, vedoucí matematického kabinetu KPÚ v Praze

Miloš Franek, profesor gymnasia, Prievídza

dr. Jozef Gruzka, Matematický ústav SAV, Bratislava

dr. Milan Hejný, CSc., docent PF UK, Bratislava

František Hradecký, odb. asistent MFF KU v. v., Praha

prof. dr. Milan Kolibiar, DrSc., profesor PF UK, Bratislava

dr. Ivan Korec, odb. asistent PF UK, Bratislava

akademik Josef Novák, vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Vítazoslav Repáš, ředitel gymnasia, Bratislava

dr. Jiří Sedláček, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Jiří Šídlo, zástupce ředitele gymnasia, Praha

Miroslav Šmerda, učitel ZDŠ, Bílovice nad Svitavou
František Veselý, odb. asistent v. v., Praha
dr. František Zítek, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV
v Praze III

Dalšími členy ÚV MO byli předsedové krajských výborů matematické olympiády:

prof. dr. Václav Pleskot, profesor ČVUT v Praze
Ludmila Tréglová, profesorka gymnasia, Říčany
Dr. Ing. Lada Vaňatová, profesorka gymnasia, Strakonice

Věra Rádllová, profesorka gymnasia J. Fučíka, Plzeň
Karel Hnyk, odb. asistent ped. fakulty, Ústí nad Labem
Jan Laštovka, vedoucí kabinetu matematiky KPÚ, Hradec Králové

Petr Benda, odb. asistent VUT FE, Brno
Josef Andrys, docent ped. fakulty, Ostrava
Vladimír Jodas, odb. asistent PFUK, Bratislava
dr. Ladislav Berger, odb. asistent VŠD, Žilina
Kveta Hončarivová, odb. asistentka PF UPJŠ, Košice

Pracovní předsednictvo ÚV MO (PÚV MO) tvořili (v abecedním pořadí): *prof. dr. M. Fiedler*, DrSc.; *Vl. Macháček*; *Ľ. Mida*; *dr. Ľ. Moravčík*, CSc.; *dr. Ľ. Sedláček*, CSc.; *doc. Ľ. Vyšín*, CSc.; *dr. Fr. Zítek*, CSc. a zástupci MŠ.

3. SCHŮZE ÚV MO

Plenární zasedání ústředního výboru MO, který řídí tuto soutěž, se konalo tradičně během XX. ročníku dvakrát. Na první schůzi ÚV MO v Praze dne 10. a 11. prosince 1970 se sešel ještě starý ÚV MO. Při hodnocení průběhu XIX. ročníku byl konstatován velký úbytek

soutěžících v kategorii *B*, a to především z řad žáků I. ročníků. Po diskusi bylo většinou hlasů rozhodnuto obnovit od XXI. ročníku soutěž v kategorii *C*. Usneseno bylo rovněž centrálně evidovat konání III. kol soutěže v kategorii *Z*; organizace i náplň soutěže zůstává zcela v rukou krajských výborů *MO*. Mimo obvyklé body programu (edice *Škola mladých matematiků*, hodnocení prázdninových soustředění, konkurs *ŽČSMF* na úlohy pro *MO*, zajištění III. kola kategorie *A* apod.) projednalo zasedání přípravu *XIII. mezinárodní matematické olympiády*, stav přípravy jubilejní brožury k 20 letům *MO* v ČSSR a další organizační zajištění průběhu *MO* (jako je jmenování nového *ÚV MO*, finanční zajištění akcí).

Byla provedena též *recenze modelů soutěže MO* v kategoriích *A*, *B* a *Z*. Tyto modely sestavily komise. *ÚV MO* práci komisi ocenil kladně a navrhl ji *ŽČSMF* k odměnění. Projednány byly též návrhy na odměny za práci v *MO*, které udělí *MŠ* v uplynulém ročníku i v jubilejním XX. ročníku, kdy by měla být vyhlášena poprvé i *Zelinkova cena*.

Druhá schůze ÚV MO, která byla první schůzí nově jmenovaného orgánu, se konala 7. a 8. května 1971 v *Pardubicích* u příležitosti III. kola kategorie *A*. Jednání se týkalo především přípravy *XIII. MMO* v *Žilině* (referoval *dr. Berger*), spolupráce s *ÚV SSM* (přítomen *ř. Řepiš*), zajištění jubilejního tisku a publikací *ŠMM* i soustředění kategorie *B* v *Rajnochovicích* (referoval *dr. Fuka*) a přípravného soustředění před *XIII. MMO* v *Brandýse n. L.* Byla ustavena komise *ÚV MO* pod vedením *dr. Fr. Bělouna*, která podle návrhů z *KV MO* sestaví návrh odměn za práci v *MO* pro obě *MŠ*. Byly stanoveny rovněž termíny pro odevzdání řešení úloh v I. kole XXI. ročníku.

4. PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

Řešení přípravných úloh I. kola odevzdávali soutěžící všech kategorií do 30. XI. 71; termíny odevzdání *soutěžních úloh* I. kola byly uspořádány tak, aby *KV MO* mohly lépe zvládnout agendu a aby ve *II. kole* (klauzurním) byla umožněna účast soutěžícím i ve dvou kategoriích. *Druhé kolo* kategorie *A* se konalo v sobotu 6. března 1971, kategorie *B* v sobotu 3. dubna 1971 a kategorie *Z* ve středu 7. dubna 1971. Podmínky pro pozvání soutěžících do II. kola byly stejné jako v XIX. ročníku. V kategorii *Z* byla doba čtyř hodin k řešení úloh II. kola rozdělena přestávkou na dvě dvouhodinové části.

Z přiložených tabulek je vidět v kategorii *A* jistý pokles počtu účastníků I. kola; ve II. kole je tento pokles jen nepatrný. V kategorii *B* (spojené i s býv. *C*) je celkový počet účastníků v XIX. i XX. ročníku prakticky stejný, avšak značně nižší, než byl v XVIII. ročníku součet počtu účastníků kategorií *B* a *C*.

Potěšitelný je stálý vzrůst počtu účastníků soutěže v kategorii *Z*, kde komentáře k úlohám velmi mnoho pomohly učitelům při získávání a přípravě soutěžících.

Celostátní III. kolo kategorie *A* se konalo 7. a 8. května 1971 v *Pardubicích*. Bylo vyhlášeno 8 vítězů a 12 úspěšných řešitelů (viz příloha B). Všichni vítězové a úspěšní řešitelé III. kola obdrželi od *MŠ* ceny a diplomy (jejich seznamy byly zaslány všem vysokým školám); *ÚV SSM* je odměnil týdenním rekreačním pobytem v srpnu v *Tatrách*.

Obtížný byl výběr účastníků pro *přípravné soustředění* před *XIII. MMO*, které se konalo od 21. do 28. června 1971 v *Brandýse n. L.* Tři z těch, kteří přicházeli v úvahu, dali totiž přednost účasti na mezinárodní fyzikální olympiádě v *Sofii*. O *XIII. MMO* v *Žilině* vydal

organizační výbor zvláštní zprávu; její upravené znění je v kapitole VI.

V rámci působnosti KV MO bylo uspořádáno III. kolo kategorie Z v těchto krajích: v *Praze*, ve *Východočeském*, *Západoslovenském* a *Středoslovenském kraji*. Počet účastníků, kteří byli vítězi okresních II. kol MO kategorie Z, se pohyboval od 20 do 46; KV MO rovněž vyhlášovaly vítěze a úspěšné řešitele, které ve spolupráci se školskou správou i vhodně odměnily.

5. POMOCNÉ AKCE

Školení účastníků kategorie A, určené jako *příprava před MMO*, probíhalo v *Praze* podle příkladového materiálu ze švýcarských olympiád, doplňovaného vedoucími *ř. Zemánkem* z MÚ ČSAV a *dr. M. Komanem*, CSc., z pedagogické fakulty KU. Z těchto materiálů čerpala i ostatní střediska (Brno, Ostrava, Třebíč, Košice, Plzeň, Žilina, Bratislava).

Soustředění úspěšných řešitelů MO a FO kategorie B konalo se v *Rajnochovicích* od 13. do 28. června 1971 a bylo tedy časově velmi zkrácené. Rozdělení do tříd M, MF a F bylo rovnoměrné.

V matematické třídě přednášeli:

- a) *dr. Oldřich Odvárko*, odborný asistent MFF UK: *Booleovy algebry*,
- b) *dr. Jaroslav Morávek*, MÚ ČSAV: *Algoritmy a složitost úloh*,
- c) *dr. Petr Liebl*, MÚ ČSAV: *Lineární transformace v rovině*,
- d) *dr. Milan Koman*, CSc., odborný asistent PF UK: *Metoda souřadnic v geometrii*.

Ve třídě matematicko-fyzikální se konaly přednášky

b) a d); večer pak bylo několik besed s matematickým obsahem.

Soustředění proběhlo úspěšně, avšak jeho časové zkrácení a rozšíření počtu vyučovacích hodin ze 4 na 5 v jednom dni nepovažuje *ÚV MO* za únosné. Pro posluchače matematiky ve třídách *M* a *MF* byla uspořádána anonymní anketa zabývající se problematikou soustředění, matematické náplně přednášek a besed, zájmů jednotlivců i vztahu k *MO*.

Názory studentů jsou velmi zajímavé a často zcela bezprostřední. Lze říci, že hlavní přednost soustředění vidí v tom, že si rozšířili rozhled, získali nové poznatky a impulsy a zejména další povzbuzení k samostatnému studiu matematiky. Získané vědomosti prý se však jen málo bezprostředně uplatní v *MO* (*FO*). Někteří studenti oceňují i to, že se mohli seznámit „s mnoha lidmi podobného zaměření“, „s konkurenciou“ apod. Citujeme na ukázkou tento hlas: „Setkání s chytrými mladými lidmi z celé republiky je opravdu krásné (i když to zní frázovitě).“ Cenné jsou i připomínky, týkající se jednotlivých přednášek i organizace soustředění, i když jsou často protichůdné. Organizátoři matematické části soustředění se budou snažit reagovat na všechny poznatky, získané v anketě, i když to nebude snadné zejména pro značně rozdílnou úroveň matematické přípravy účastníků soustředění z jednotlivých krajů a škol.

6. STUDIJNÍ LITERATURA

Letáky s úlohami byly vydány celkem bez zpoždění (pro kat. *A*, *B* 5000 kusů celostátně, pro kat. *Z* česky i slovensky zvlášť). Včas byly úlohy publikovány v *Rozhledech matematicko-fyzikálních*; v *Matematice a fyzice ve škole* vyšly opožděně.

Po ukončení ročníku vyšly v *SPN Praha* dlouho připravované a očekávané sborníky *Vybrané úlohy z matematické olympiády*, a to jak pro kategorii *Z* (autoři: *doc. J. Vyšín, Vl. Macháček*), tak pro kategorie *B, C* (autoři: *prof. dr. Miroslav Zedek, Berta Daňková, dr. Alena Hartmanová, dr. Karel Holeš, dr. František Krutský, Jana Petlachová a dr. Jarmila Sedláčková*).

První kladný ohlas možno dedukovat z toho, že prakticky ihned po vyjití byla značná část nákladu rozebrána.

V nakladatelství *Mladá fronta* vyšly další dva svazky edice *ŠMM*:

č. 28: *Šmakal — Budinský*: Vektory v geometrii;

č. 29: *František Zitek*: Vytvořující funkce.

Další dva rukopisy jsou již také ve výrobě, tři další po recenzích má k dispozici redakční kroužek při *PŮV MO*.

7. KONKURS JČSMF NA NÁVRHY ÚLOH PRO MO

V roce 1971 uplynulo 5 let od vyhlášení tohoto nepřetržitě probíhajícího konkursu. Od jeho zveřejnění v roce 1966 do 30. září 1971 bylo zasláno celkem 671 úloh, přičemž recenzní řízení bylo skončeno u 615 úloh, z nichž bylo přijato a odměněno 390 úloh. Bohužel autorský okruh je značně úzký — úlohy zaslalo pouze 76 autorů.

V olympiádě se v současné době zadávají téměř výhradně úlohy získané konkursem. Ve XX. ročníku *MO* bylo zadáno celkem 50 úloh, přičemž pouze 4 neprocházely konkursem.

Příloha A

POŘADÍ ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ II. KOLA KATEGORIE B VE XX. ROČNÍKU MO

(pokud není uveden typ školy, jde o gymnasium, resp.
SVVŠ)

Praha-město

Petr Hejl, 2. roč. Praha 1, Štěpánská; Jan Frynta, 2. roč., Petr Sláčálek, 1. roč. a Miron Tegze, 2. roč., všichni Praha 2, ul. W. Piecka; Jan Trlifaj, 1. roč. Praha 3, Sladkovského; Dalibor Volný, Daniela Čepická, František Drašnar a Petr Jarolím, všichni 2. roč., Praha 2, ul. W. Piecka; Petr Dvořák, 2. roč. Praha 3, Sladkovského; Vladimír Komárek a Ondřej Štefl, 2. roč., Praha 2, ul. W. Piecka.

Středočeský kraj

Tomáš Fiala, 2. roč. Příbram; Jaromír Kukal, 2. roč. Benešov; Petra Novotná a Marie Barabášová, 2. roč. Kladno; Vladimír Meier, 1. roč. Mladá Boleslav; Karel Nalimánek, 2. roč. Kutná Hora; Ludmila Novotná, 2. roč. Brandýs; Miroslav Barták, 2. roč. Kladno.

Jihočeský kraj

Karel Horák, 2. roč. Strakonice; Pavel Kindlmann, 1. roč. a Zbyněk Neumann, 2. roč. České Budějovice;

Josef Voldřich, 9. roč. ZDŠ Stachy; Ludmila Hlaváčová, 2. roč. Strakonice; Martina Lískovcová, 2. roč. Tábor; Pavel Novák a Josef Urban, 2. roč. České Budějovice.

Západočeský kraj

Magda Fořtová a Svatopluk Machalka, 2. roč. Plzeň; Jiří Zymák a Ladislav Peksa, 1. roč. Plzeň; Karel Tesař, 1. roč. Mar. Lázně; František Žák a Blanka Hnilicová, 2. roč. Plzeň; Hubert Hasler, 1. roč. Plzeň.

Severočeský kraj

Jiří Svoboda, 2. roč. Teplice; Helena Korbová a Vladimír Špůr, 2. roč. Liberec-Horní Růžodol; Jiří Hora, 2. roč. Žatec; Jan Holub, 2. roč. Teplice; Michal Eben, 2. roč. Ústí nad L.

Východočeský kraj

Jaroslav Kučera, 2. roč. Pardubice; Aleš Verner, 2. roč. Dobruška; Ladislav Šolc, 2. roč. Broumov; Ludvík Bartošek, Jiří Mezina a Jiří Svoboda, 2. roč. Pardubice; Jiří Limpuch, 2. roč. Hradec Králové; Josef Ježek, 1. roč. Pardubice; Jan Fridrich, 2. roč. Chrudim; Zdeněk Drábek, 1. roč. Lanškroun.

Žihomoravský kraj a Brno-město

Miroslav Kmošek, 2. roč. Brno, tř. kpt. Jaroše; Pavel Šandera, 2. roč. Brno, Křenová; Vítězslav Ticháček, 2. roč. Kroměříž; Milan Jelen, 2. roč. Brno, Křenová; Jiří Horák, 2. roč. Kroměříž; Josef Mejzlík, 2. roč. SPŠ strojní, Třebíč.

Severomoravský kraj

Jaromír Šimša, 1. roč. Ostrava, Šmeralova ul.; Václav Janiš, 2. roč. Rožnov pod Radh.; Antonín Otáhal, 1. roč.

Ostrava-Zábřeh; Miroslava Foltýnková, 2. roč. Bílovec; Petr Bulirsch, 2. roč. Ostrava, Šmeralova ul.; Tomáš Zdráhal, 2. roč. Olomouc-Hejčín; Jiří Hranoš, 2. roč. Hranice; Vladimír Polách, 2. roč. Rožnov pod Radhoštěm; Tomáš Divák, 2. roč. Ostrava, Šmeralova ul.; Jiří Sobek, 2. roč. a Jiří Fuka, 1. roč. Ostrava-Zábřeh.

Západoslovenský kraj a Bratislava

Milan Lehotský a Milan Kolibiar, 2. roč. Bratislava, Novohradská ul.; František Šindler, 2. roč. Zlaté Moravce; Peter Hroško, 1. roč. Topoľčany; Lubor Kollár, 1. roč. Bratislava, Novohradská; Ján Kaňuk, 1. roč. Malacky; Pavel Zlatoš, 1. roč., Peter Dobrota a Dušan Prcúch, 2. roč. Bratislava, Novohradská; Ivan Tkáč, 2. roč. Bratislava, Metodova.

Středoslovenský kraj

Imrich Vrto, 2. roč. Rim. Sobota; Jozef Tvarožek, 2. roč. Žilina; Ivan Kulich, 2. roč. Lučenec; Miroslav Sýkora, 2. roč. Žilina; Štefan Baláž, 2. roč. Prievidza, Vlastimil Vrto, 1. roč. Rim. Sobota; Juraj Lanko, 1. roč. Prievidza; Kamil Hanuliak, 1. roč. Žilina-Hliny; Jana Števková, 1. roč. a Eva Siváková, 2. roč. Zvolen.

Východoslovenský kraj

Tibor Lefkovič, 1. roč. a Karol Pelikán, 2. roč. Košice, Šrobárova; Ivan Bača, 2. roč. SPŠ el., Košice; Danica Jakubiková, 2. roč. Košice, Šrobárova; Amalie Gombárová, 2. roč. Stropkov; Zoltán Loderer, 1. roč. SPŠ el., Košice.

Příloha B

SEZNAM VÍTĚZŮ A ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ III. KOLA KAT. A VE XX. ROČNÍKU MO

Vítězové

1. *Jan Brychta*, 3.a, gymnasium Pražáčka, Praha 3
2. *Štefan Sakaloš*, 3.d, SVŠ, Prievidza
- 3.—5. *Pavel Dušek*, 3.g, gymnasium, ul. W. Piecka, Praha 2
- 3.—5. *Jan Franců*, 3.b, SVŠ J. Hronca, Bratislava
- 3.—5. *Miroslav Kmošek*, 2.a, gymnasium, ul. kpt. Jaroše, Brno
- 6.—7. *Anton Černý*, 3.b, SVŠ J. Hronca, Bratislava
- 6.—7. *Andrej Kugler*, 3.g, gymnasium, ul. W. Piecka, Praha 2
8. *Miroslav Šůra*, 3.b, gymn., ul. Arabská, Praha 6

Úspěšní řešitelé

- 9.—12. *Ladislav Mišík*, 3.b, SVŠ J. Hronca, Bratislava
- 9.—12. *Václav Holý*, 3.s, gymnasium, ul. Křenová 36, Brno
- 9.—12. *Jiří Němec*, 3.s, gymnasium, ul. Křenová 36, Brno
- 9.—12. *Imrich Vrto*, 2.a, gymnasium, Rim. Sobota
- 13.—16. *Jiří Binder*, 3.b, gymnasium, Moravské Budějovice

- 13.—16. *Karel Horák*, 2. roč. gymnasia, Strakonice
13.—16. *Jiří Ivánek*, 3.b, gymnasium, Nový Bohumín,
okr. Karviná
13.—16. *Luboš Pospíšil*, 3.s, gymnasium, ul. Křenová 36,
Brno
17.—19. *Petr Filip*, 3.g, gymnasium, ul. W. Piecka, Praha 2
17.—19. *Ivan Gabaš*, 3.g, gymnasium, ul. W. Piecka,
Praha 2
17.—19. *Helena Husová*, 3.g, gymnasium, ul. W. Piecka,
Praha 2
20. *Pavel Hanula*, 3.b, SVŠ J. Hronca, Bratislava

Tabulka č. 1

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B — XX. ročník

K R A J	Kategorie A			Kategorie B			C e l k e m		
	P	Z toho dívek	Ú	P	Z toho dívek	Ú	P	Z toho dívek	Ú
Praha - město	52	9	49	117	25	81	169	34	130
Středočeský	16	4	14	68	23	39	84	27	53
Jihočeský	24	7	23	51	11	43	75	18	66
Západočeský	18	4	17	48	17	41	66	21	58
Severočeský	26	10	20	79	34	47	105	44	67
Východočeský	38	6	37	72	20	66	110	26	103
Jihomoravský	68	9	66	94	21	94	162	30	160
Severomoravský	26	5	22	62	14	62	88	19	84
Západoslovenský	67	19	49	105	28	61	172	47	110
Středoslovenský	48	13	41	113	19	98	161	32	139
Východoslovenský	16	3	14	34	5	24	50	8	38
C e l k e m	399	89	352	843	217	656	1242	306	1008

P — celkový počet účastníků; Ú — počet úspěšných řešitelů

Tabulka č. 2

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategorii Z – XX. roč.

K R A J	Kategorie Z			
	P	Z toho dívek	Ú	Z toho dívek
Praha - město	987	412	737	314
Středočeský	619	307	523	257
Jihočeský	656	345	472	234
Západočeský	482	262	398	205
Severočeský	775	361	498	223
Východočeský	752	367	609	291
Jihomoravský	1571	776	785	375
Severomoravský	1029	491	681	281
Západoslovenský	1187	619	942	489
Středoslovenský	1168	612	962	473
Východoslovenský	1140	552	769	395
C e l k e m	10366	5104	7376	3537

Tabulka č. 3

Přehled účastníků II. kola podle krajů v kategoriích A, B—XX. ročník

K R A J	Kategorie A			Kategorie B			C e l k e m		
	P	Z toho dívek	Ú	P	Z toho dívek	Ú	P	Z toho dívek	Ú
Praha - město	40	8	15	68	11	42	108	19	57
Středočeský	14	3	1	26	14	8	40	17	9
Jihočeský	23	7	1	42	8	8	65	15	9
Západočeský	17	4	1	39	12	8	56	16	9
Severočeský	18	6	0	47	17	10	65	23	10
Východočeský	36	6	9	62	18	22	98	24	31
Jihomoravský	68	9	16	89	18	14	157	27	30
Severomoravský	21	5	3	61	14	11	82	19	14
Západoslovenský	49	13	7	61	9	20	110	22	27
Středoslovenský	41	11	3	94	10	12	135	21	15
Východoslovenský	14	2	2	24	4	7	38	6	9
C e l k e m	341	74	58	613	135	162	954	209	220

Tabulka č. 4

Přehled počtu účastníků II. kola v kategorii Z – XX. ročník

K R A J	Kategorie Z			
	P	Z toho dívek	Ú	Z toho dívek
Praha - město	693	278	509	195
Středočeský	431	206	316	144
Jihočeský	440	213	151	60
Západočeský	288	148	159	74
Severočeský	424	193	263	113
Východočeský	570	278	483	229
Jihomoravský	741	353	420	176
Severomoravský	620	285	395	173
Západoslovenský	935	485	435	212
Středoslovenský	888	449	328	152
Východoslovenský	740	379	348	167
C e l k e m	6770	3267	3807	1695

II. Přípravné úlohy I. kola

1. RIEŠENIA ÚLOH KATEGÓRIE A

1. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(x+i)(x+i+1)} = x(x+1)(x+2) \dots (x+n) + \frac{n-1}{x(x+n-1)},$$

kde $n \geq 2$ je dané prirodzené číslo a x je neznáma.

RIEŠENIE. Pre každé $x \neq 0, -1, -2, \dots, -(n-1)$ platí

$$\frac{1}{(x+i)(x+i+1)} = \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x+i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-2),$$

takže

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(x+i)(x+i+1)} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n-1} = \\ &= \frac{n-1}{x(x+n-1)}. \end{aligned}$$

Pre hľadané čísla x teda platí

$$x(x+1)(x+2) \dots (x+n) = 0.$$

Z koreňov tejto rovnice vyhovuje však danej rovnici len $x = -n$. Úloha má teda jediné riešenie $x = -n$.

POZNÁMKA. Uvedené riešenie zostane v platnosti dokonca i v obore komplexných čísel.

2. Najdte všetky dvojice reálnych čísel x, y , ktoré splňujú soustavu rovníc

$$\cos x + \cos y = \cos (x + y),$$

$$\sin x + \sin y = \sin (x + y).$$

ŘEŠENÍ. Druhou rovnici ekvivalentně upravíme

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

$$\sin \frac{x+y}{2} \left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right) = 0,$$

$$\sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{y}{2} = 0.$$

Tato rovnice je splněna právě tehdy, nastane-li některý ze tří případů

$$\left. \begin{array}{ll} [1] & \frac{x+y}{2} = k\pi, \quad \text{tj. } x+y = 2k\pi; \\ [2] & \frac{x}{2} = k\pi, \quad \text{tj. } x = 2k\pi; \\ [3] & \frac{y}{2} = k\pi, \quad \text{tj. } y = 2k\pi. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{všude } k \text{ je} \\ \text{celé číslo.} \end{array}$$

Každou z těchto možností dosadíme do první rovnice.

[1] Je-li $y = -x + 2k\pi$, pak dostáváme

$$\cos x + \cos (-x + 2k\pi) = \cos 2k\pi,$$

$$2 \cos x = 1,$$

$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

Odtud nalézáme řešení (x_1, y_1) a (x_2, y_2) , kde

$$x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y_{1,2} = \mp \frac{\pi}{3} + 2l\pi,$$

přičemž k, l jsou libovolná celá čísla.

[2] Zde máme

$$\cos 2k\pi + \cos y = \cos(y + 2k\pi),$$

čili

$$1 = 0,$$

což však není možné. Podobně ani [3] nevede k řešení.

ZÁVĚR. Hledaná čísla x, y jsou právě tato:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi$$

a

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y = \frac{\pi}{3} + 2l\pi,$$

kde k, l jsou libovolná celá čísla.

3. Označme T těžiště ostroúhlého trojúhelníka ABC , r poloměr kružnice jemu opsané. Pak platí

$$AT^2 + BT^2 + CT^2 > \frac{8}{3} r^2.$$

Dokažte.

ŘEŠENÍ. Při obvyklém označení máme s použitím kosinové věty:

$$t_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2,$$

$$t_b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2) - \frac{1}{4}b^2,$$

$$t_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2.$$

Sečtením dostaneme

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Poněvadž

$$\sigma = AT^2 + BT^2 + CT^2 = \frac{4}{9}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2),$$

platí

$$\sigma = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Jak známo $a = 2r \sin \alpha$ atd., tedy

$$\sigma = \frac{4}{3}r^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma).$$

Nyní provedeme výpočet

$$\begin{aligned} & 2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) = \\ & = 3 - (\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) = \\ & = 3 - [2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \cos 2(\alpha + \beta)] = \\ & = 3 - [2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + 2\cos^2(\alpha + \beta) - 1] = \\ & = 4 - 2\cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = \\ & = 4 - 2\cos(\alpha + \beta) \cdot 2\cos\alpha \cdot \cos\beta, \text{ tj.} \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma.$$

Poněvadž trojúhelník je ostroúhlý, platí

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma > 0,$$

takže

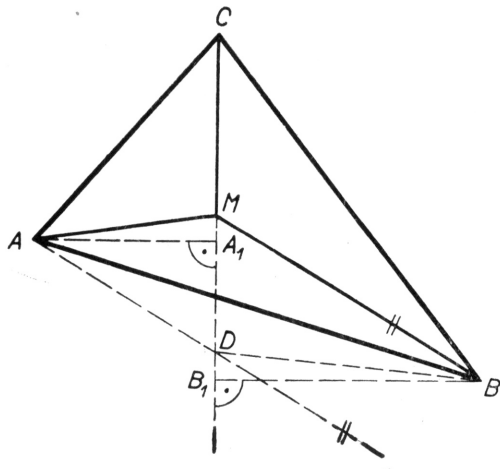
$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 2.$$

Nakonec vychází $\sigma > \frac{8}{3}r^2$, c. b. d.

4. Nech M je vnútorný bod trojuholníka ABC a p_A, p_B, p_C sú v uvedenom poradí plošné obsahy trojuholníkov BCM, CAM, ABM . Potom platí

$$p_A \vec{MA} + p_B \vec{MB} + p_C \vec{MC} = \vec{0},$$

kde $\vec{0}$ je nulový vektor. Dokážte!



Obr. 1

RIEŠENIE. Vedme bodom A rovnobežku s priamkou MB a označme D jej priesečník s priamkou MC . Potom zrejme platí (obr. 1)

$$\vec{AD} \uparrow \uparrow \vec{MB}, \quad \vec{DM} \uparrow \uparrow \vec{MC} \quad *)$$

a ďalej

*) Symbol $\uparrow \uparrow$ označuje súhlasnú rovnobežnosť vektorov (orientovaných úsečiek).

$$\frac{AD}{MB} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{\frac{1}{2}MC \cdot AA_1}{\frac{1}{2}MC \cdot BB_1} = \frac{p_B}{p_A},$$

kde A_1 , resp. B_1 je pāta kolmice spustenej z bodu A , resp. B na priamku CM . Máme teda

$$\vec{AD} = \frac{p_B}{p_A} \cdot \vec{MB}. \quad (1)$$

Ďalej platí

$$\frac{DM}{MC} = \frac{\frac{1}{2}DM \cdot BB_1}{\frac{1}{2}MC \cdot BB_1} = \frac{\text{obsah } \triangle DBM}{\text{obsah } \triangle MBC} = \frac{p_C}{p_A}.$$

Vzhľadom na to, že $AD \parallel MB$, je totiž obsah $\triangle DBM = p_C$. Z poslednej rovnosti máme

$$\vec{DM} = \frac{p_C}{p_A} \cdot \vec{MC}. \quad (2)$$

Použitím výsledkov (1), (2) dostávame

$$\begin{aligned} p_A \cdot \vec{MA} + p_B \cdot \vec{MB} + p_C \cdot \vec{MC} &= \\ &= p_A \left(\vec{MA} + \frac{p_B}{p_A} \vec{MB} + \frac{p_C}{p_A} \vec{MC} \right) = \\ &= p_A (\vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DM}) = p_A \cdot \vec{O} = \vec{O}, \end{aligned}$$

čo sme mali dokázať.

2. KOMENTÁŘE A ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE B

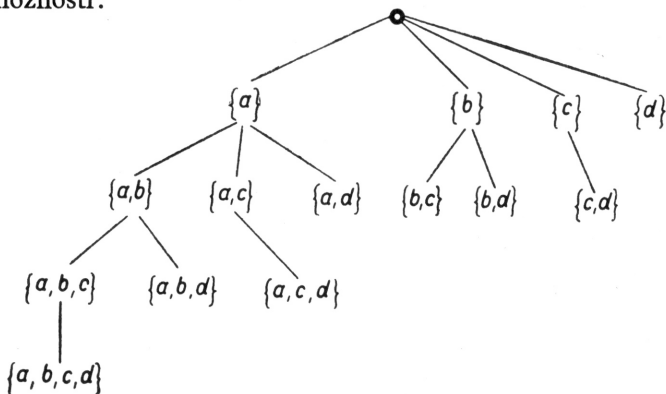
(Komentáře byly určeny hlavně pro žáky 1. ročníků gymnasií a středních odborných škol.)

1. Kolik neprázdných podmnožin má množina skládající se z deseti prvků?

KOMENTÁŘ. Je to vlastně úloha z kombinatoriky, kterou žáci 1. a 2. ročníků gymnasií neznají. Tuto úlohu by hravě rozřešili žáci pokusných ZDŠ, kde se kombinatorika probírá (v omezeném rozsahu) už v 7. ročníku. Úlohu lze nejpohodlněji rozřešit vtipným obratem, který souvisí s dvojkovou soustavou. Než však tento obrat prozradíme, necháme vás experimentovat: vyhledat všechny neprázdné podmnožiny tříprvkových, čtyřprvkových a pětiprvkových množin. Do vypsání podmnožin je třeba ovšem vnést určitý systém, opírající se třeba o uspořádání prvků. Tak např. při čtyřprvkové množině $M = \{a, b, c, d\}$ postupujeme takto: podmnožiny budeme zapisovat tak, aby prvky každé podmnožiny byly v abecedním pořádku. Dostaneme tak výčet:

$\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\},$
 $\{a, b, c, d\}, \{b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}, \{c\}, \{c, d\}, \{d\}.$

Dobře se znázorní podmnožiny na tzv. stromu logických možností:



V grafu chybí podmnožina $\{b, c, d\}$. Doplňte ji.

Počty neprázdných množin se zapíší do tabulky:

Počet prvků v M	1	2	3	4	5
Počet jejích neprázdných podmnožin	1	3	7	15	31

Nyní pravděpodobně vyslovíte domněnku, že hledaný počet podmnožin je $2^n - 1$, kde n je počet prvků množiny **M**.

A nyní „trik“, který dovolí přehledně registrovat všechny podmnožiny množiny **M**. Zapišeme prvky z **M**

$a \ b \ c \ d$

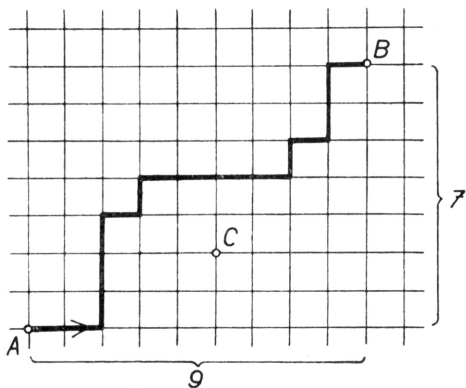
a pod každý z nich zapišeme buď 0, jestliže tento prvek *nenáleží* dané podmnožině, nebo 1, *náleží-li* jí. Podle této úmluvy jsou např. podmnožiny $\{a, c\}$, $\{b, c, d\}$ charakterizovány čtveřicemi 1010 a 0111. Nyní už snadno sami vypočítáte počet všech n -tic složených z nul a jedniček; je jich $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n\text{-krát}} = 2^n$. Ale n -tice složená vesměs z nul

n -krát

je vyloučena (proč?).

Můžete rozřešit ještě nějakou úlohu, kde se uplatní obdobně dvojková soustava. Např. v čtvercové síti se má „projít“ po stranách čtverců z vrcholu A do vrcholu B (viz obr. 2). Je dovoleno postupovat jen zleva doprava a zdola nahoru. Otázka zní: Kolik je možných různých cest z A do B ? Postup o jednu stranu doprava zapišeme znakem 0, postup o jednu stranu nahoru znakem 1. Tlustě vytažená cesta je registrována zápisem 001110100 0010110. Každý zápis musí obsahovat 16 znaků, z toho 9 nul a 7 jedniček (proč?). Tato úloha je ovšem podstat-

ně těžší než daná úloha o podmnožinách, neboť je ještě třeba uvažovat všechna možná umístění nul a jedniček. Situace se zjednoduší, zvolíme-li místo čísel 9, 7 menší přirozená čísla, např. 4, 3 apod. „Cestám“ můžeme pře-



Obr. 2

depsat další podmínku, např. aby procházely daným bodem C apod. Jak je vidět, nejde tu o jednotlivou úlohu, ale o celý komplex úloh, čili o tzv. *problémovou situaci*.

ŘEŠENÍ. Každou podmnožinu A dané množiny M můžeme jednoznačně určit tím, že každému jejímu prvku přiřadíme 1, zatímco ostatním prvkům z $M \setminus A$ přiřadíme 0. Počet všech podmnožin naší množiny je tedy $2^{10} = 1024$; neprázdných je o jednu méně, tj. 1023.

2. Najděte všechny trojčlenné aritmetické posloupnosti prvočísel s diferencí 1970.

KOMENTÁŘ. Tato úloha vyžaduje elementární znalosti z teorie čísel. Pravděpodobně bude třeba vy-

světlit nejdříve název „trojčlenná aritmetická posloupnost“, což dává příležitost vyslovit obecnou definici aritmetické posloupnosti; je to věc zcela přístupná, ilustrujeme-li ji několika příklady.

První impuls pro řešení bude asi tento: Zapišeme trojčlennou aritmetickou posloupnost

$$x, x + d, x + 2d$$

a budeme ji zkoumat (pokud jde o dělitelnost jejích členů), a to ve dvou případech:

- a) difference d **e** násobkem tří;
- b) difference d **není** násobkem tří.

Výsledky zkoumání se zapisují do tabulky tohoto tvaru:

	↓			↓			
d	4	5	7	3	2	10	6
x	5	2	1	11	31	67	3
$x + d$	9	7	8	14	33	77	9
$x + 2d$	13	12	15	17	35	87	15

Co vypočítáme a jakou domněnku vyslovíme? Je-li difference d násobek tří, pak posloupnost buď neobsahuje žádný násobek tří (sloupec 4), nebo obsahuje samé násobky tří (sloupec 7). **Není-li difference d násobkem tří, pak aspoň jeden člen posloupnosti je násobkem tří**, a tedy není prvočíslem, pokud je větší než 3.

Číslo $1970 = 3 \cdot 656 + 2$ není násobkem tří. Je-li správná výše vyslovená domněnka, pak hledaná posloup-

nost musí obsahovat číslo 3 a jediná možnost je

3, 1973, 3943.

Je ovšem ještě třeba:

- a) zjistit z tabulek (nebo jinak), zda čísla 1973, 3943 jsou prvočísla;
- b) dokázat vyslovenou domněnku.

Úkol b) splníme tak, že čísla d , x rozložíme vzhledem k číslu 3; je tedy

$$x = 3y, \text{ nebo } x = 3y + 1 \text{ nebo } x = 3y + 2,$$

$$d = 3k + 1 \text{ nebo } d = 3k + 2;$$

(d není násobek tří!). Ve všech čtyřech případech, kdy x není násobkem tří, vypočteme $x + d$ a $x + 2d$. Např. pro $x = 3y + 1$, $d = 3k + 2$ dostaneme

$$x + d = 3(y + k) + 3 = 3(y + k + 1),$$

$$x + 2d = 3(y + 2k) + 5.$$

Číslo $x + d$ je skutečně násobkem tří.

Za nejpodstatnější impuls zde pokládáme výzvu k experimentování, které vede po sestavení přehledné tabulky k vyslovení hypotézy.

ŘEŠENÍ. Snadno nahlédneme, že z čísel

$$p, \quad p + 1970, \quad p + 2 \cdot 1970$$

je vždy jedno dělitelné třemi. Nutně tedy $p = 3$ a dostáváme jediné řešení: 3, 1973, 3943 (viz tabulky).

3. Najděte množinu všech bodů, kterých pravouhlé souřadnice x , y splňují soustavu nerovnic

$$|x| \leq 2\pi, \quad |y| \leq 2\pi,$$

$$\operatorname{tg} x \geq 0, \quad \operatorname{tg} \left(y - \frac{x^2}{4} \right) \geq 0.$$

KOMENTÁŘ. Tato úloha je převážně počtářská; k jejímu řešení je třeba znát definici goniometrických funkcí pro všechna reálná čísla x .

Rada, kterou dáváme řešitelům, je tato: Vyšetřte odděleně každou z množin bodů s analytickým vyjádřením

- a) $|x| \leq 2\pi$, b) $|y| \leq 2\pi$,
 c) $\operatorname{tg} x \geq 0$, d) $\operatorname{tg} \left(y - \frac{x^2}{4} \right) \geq 0$

a pak stanovte průnik všech čtyř množin bodů.

Případy a) a b) jsou triviální, rovněž i případ c); případ d) je nejobtížnější. Zde je třeba zjistit, že daná nerovnice je ekvivalentní s nerovnicemi

$$k\pi \leq y - \frac{x^2}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

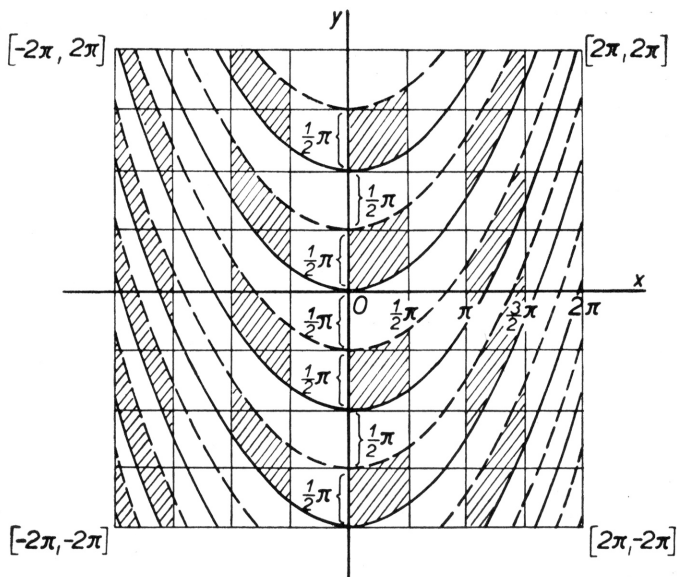
A pak je třeba probrat všechna celá čísla k , která přicházejí v úvahu; dostaneme tak zakřivené „pásy“ omezené parabolami (pozor na hranici!). Výsledek se dostane jako průnik pásů roviny s těmito zakřivenými pásy. Celý graf leží ve čtverci, jehož vrcholy jsou $[\pm 2\pi, \pm 2\pi]$.

Úloha je pracná, vyžaduje pozornost, ale je v podstatě bez vtipu; je určena jako záchytná úloha. Lze ji však modifikovat: Nerovnici a) nahradíme nerovnicí $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, nerovnice b), c) vypustíme a nerovnici d) nahradíme nerovnicí

$$0 \leq \operatorname{tg} \left(y - \frac{x^2}{4} \right) \leq 1.$$

RIEŠENIE (obr. 3). Riešenie nerovnice $\operatorname{tg} x \geq 0$ tvorí polopásky

$$k\pi \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \text{ celé číslo}). \quad (1)$$



Obr. 3

Riešenie nerovnice $\operatorname{tg}\left(y - \frac{x^2}{4}\right) \geq 0$ tvorí polopásky s parabolickými hranami

$$\frac{x^2}{4} + k\pi \leq y < \frac{x^2}{4} + k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \text{ celé číslo}). \quad (2)$$

Hľadaná množina sa skladá práve z tých bodov štvorca

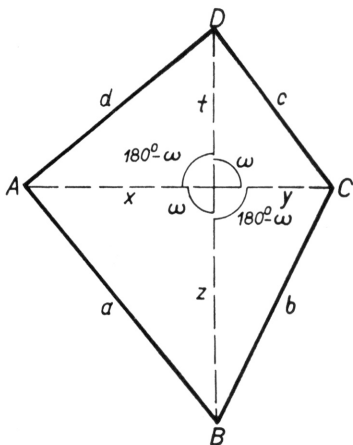
$$|x| \leq 2\pi, |y| \leq 2\pi,$$

ktoré ležia súčasne v (1) i (2); na obr. 3 je vyšrafovaná.

4. Uhlopriečky AC , BD konvexného štvoruholníka

$ABCD$ sú navzájom kolmé práve vtedy, ak platí $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$; dokážte.

KOMENTÁŘ. Čtvrtá úloha je triviálna, řešíme-li ji kosinovou větou. Kosinovou větu lze však snadno obejít. První část — důkaz nutné podmínky — záleží v prostém použití Pythagorovy věty. Označíme-li délky stran a úseček na úhlopříčkách podle obr. 4, platí pro $\omega = 90^\circ$: $a^2 = x^2 + z^2$, $c^2 = y^2 + t^2$, $b^2 = y^2 + z^2$, $d^2 = x^2 + t^2$, a tedy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Postačiteľnosť této podmínky dokážeme takto: Je-li $\omega \neq 90^\circ$, je $a^2 + c^2 \neq b^2 + d^2$. Zde je třeba provést jistou úvahu o tzv. kontraponovaných větách podle schématu:



Obr. 4

$(A \Rightarrow B)$ právě když $(\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)$,

$(B \Rightarrow A)$ právě když $(\text{non } A \Rightarrow \text{non } B)$.

Důkaz postačiteľnosti podmínky je pak druhá z uvedených implikací. [A je výrok (výroková forma) $\omega = 90^\circ$, B je výrok (výroková forma) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.]

Druhý impuls pro řešení implikace $\text{non } A \Rightarrow \text{non } B$ záleží v tom, že si připomeneme větu, která se dá jako úloha odvodit z Pythagorovy věty: Jsou-li x, y, z délky stran trojúhelníka a je-li vnitřní úhel proti straně z ostrý (pravý, tupý), pak platí $x^2 + y^2 > z^2$ ($= z^2$, $< z^2$).

Zvolíme označení tak, aby bylo $\omega < 90^\circ$, je $180^\circ -$

— $\omega > 90^\circ$ a užitím předchozí věty dostaneme

$$a^2 + c^2 < b^2 + d^2.$$

RIEŠENIE. Ak je $AC \perp BD$, vyplýva uvedená rovnosť zo štvornásobného použitia Pythagorovej vety. Pri dôkaze obrátenej vety môžeme použiť toto tvrdenie: Ak je v $\triangle AXB$ uhol $\sphericalangle AXB$ ostrý, platí $AB^2 < AX^2 + BX^2$ (a analogické tvrdenie pre tupouhlé trojuholníky); i tieto pomocné tvrdenia sa dajú dokázať bezprostredným použitím Pythagorovej vety. Je možné riešiť tiež kosínusovou vetou.

3. KOMENTÁŘE A ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE Z

1. Součet druhých mocnin tří po sobě jdoucích lichých čísel je čtyřciferné číslo, jehož všechny číslice jsou stejné. Najděte všechny takové trojice lichých čísel.

KOMENTÁŘ. Už při čtení textu narazíme na pojem liché číslo. Lichá čísla jsou celá čísla, liché číslo může být tedy i číslo *záporné*. Každému matematikovi je známý „trik“, jak vyjádřit tři za sebou následující členy aritmetické posloupnosti. *Zpravidla* se osvědčuje vyjádření $a-d$, a , $a+d$. Kdybychom použili nesymetrického vyjádření b , $b+d$, $b+2d$, byl by výpočet asi složitější. Řešení úlohy je poloexperimentální, neboť situace nás přímo vybízí k tomu, abychom prozkoumali postupně všechna čísla s dekadickým zápisem $yyyy$ a čísla k nim opačná. Doporučujeme obměnit podmínku b) na trojicerná a pěticiferná čísla; zajímavé jsou tu důvody, proč je úloha neřešitelná. Mimoto je **cenná sama ta okolnost**, že se setkáváme s **neřešitelnou úlohou**.

ŘEŠENÍ. Je-li x prostřední číslo hledané trojice, máme $(x-2)^2 + x^2 + (x+2)^2 = 3x^2 + 8 = (yyyy)$, kde

$y \in \{1, \dots, 9\}$. Poněvadž $3x^2 + 8$ je liché číslo, musí být y lichá číslice. Číslo $3x^2 + 8$ se tedy nutně rovná některému z čísel 1111, 3333, 5555, 7777, 9999, načež $3x^2$ se rovná některému z čísel 1103, 3325, 5547, 7769, 9991. Z nich pouze 5547 je dělitelné třemi, takže $3x^2 = 5547$, tedy $x^2 = 1849 = 43^2$. Poněvadž

$$41^2 + 43^2 + 45^2 = 1681 + 1849 + 2025 = 5555,$$

jsou právě dvě vyhovující trojice: 41, 43, 45 a $-45, -43, -41$.

2. Ozubené pedálové kolečko jízdního kola (bicyklu) má 48 převodních zubů: malé převodní kolečko na zadním kole má 20 zubů. Průměr zadního kola bicyklu je 72 cm. (Uvědomte si, že vzdálenost dvou sousedních zubů u obou koleček je táž.) Cyklista jede po vodorovné silnici stálou rychlostí 25 km za hodinu na plný záběr (šlape rovnoměrně).

a) Kolikrát musí šlápnout za jednu minutu, aby si udržel stálou rychlost 25 km za hodinu?

b) Kolikrát musí šlápnout na trati dlouhé 4,5 km?

KOMENTÁŘ. Úloha je značně idealizována; může být proti ní oprávněná námitka, že se takto na kole nejedí. Úloha předpokládá jistou znalost o převodech. Pokud ji řešitel nemá, snadno si obstará příslušné názorné vysvětlení. Zde bychom doporučovali opustit numerické údaje a počítat algebraicky. Mají-li pedálové a převodní kolečko po řadě z_1, z_2 zubů a jsou-li po řadě n_1, n_2 počty jejich otáček, platí

$$n_1 z_1 = n_2 z_2. \quad (\text{V})$$

Měli bychom rozřešit několik úloh na využití vzorce (V). Tento vzorec je i klíčem k řešení dané úlohy. Vždy je třeba nejdříve odvodit vzorec, podle něhož budeme počítat. Např. má-li cyklista ujet v metrů a je-li poloměr jeho zadního kola r metrů (pozor na jednotky!), je počet

potřebných otoček pedálového kola

$$n_1 = \frac{v z_2}{2\pi r z_1} \quad (v, r \text{ v metrech}). \quad (\text{A})$$

Vzorec (A) můžeme upravit pro situaci, že v je dáno v kilometrech a r v centimetrech: čitatele násobíme tisícem a jmenovatele dělíme stem; celkem tedy násobíme zlomek $10^3 \cdot 10^2 = 10^5$ a dostaneme

$$n_1 = 10^5 \frac{v z_2}{2\pi r z_1} \quad (v \text{ v km}, r \text{ v cm}). \quad (\text{B})$$

Takovouto úpravu, jako je vzorec (B), pokládáme za velmi účelnou pro aplikace.

Také bychom si měli vysvětlit, **proč** dáváme přednost algebraickému výpočtu před numerickým (např. možnost krácení, co největší využití tabulek apod.).

I při zodpovědění otázky a) je třeba správně a obratně manipulovat s jednotkami (minuty—hodiny).

Celkem je tento příklad jen obtížnější a rozsáhlejší školská úloha.

ŘEŠENÍ. Otočí-li se pedálové kolečko jednou, otočí se zadní kolo $\frac{48}{20} = 2,4$ krát; na to, aby se pedálové kolečko otočilo jednou, musí cyklista šlápnout dvakrát.

Při jednom šlápnutí ujede zadní kolo dráhu délky (v cm)

$$\frac{\pi d \cdot 2,4}{2} = \frac{3,14 \cdot 72 \cdot 2,4}{2} = 271,296 \doteq 271,$$

kde d jsme označili průměr zadního kola bicyklu.

Na dráze 25 km = 2 500 000 cm cyklista šlápně tolikrát, kolik je $2\,500\,000 : 271$; to je přibližně 9 225. Za jednu hodinu tedy šlápně 9225krát a za jednu minutu $9225 : 60 = 153,75$ tj. přibližně 154krát.

Poměr drah 4,5 km a 25 km je $\frac{4,5}{25}$. V témže poměru se změní i počet šlápnutí, tj. číslo 9225; dostaneme

$$9225 \cdot \frac{4,5}{25} = 369 \cdot 4,5 = 1660,5 \doteq 1660.$$

Na dráze 4,5 km musí cyklista šlápnout asi 1660krát.

3. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky 8 cm. Dále je dán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$ o straně délky 4 cm tak, že vrcholy A a K v základní poloze splývají a vrchol L leží na polopřímce AB . Oba útvary leží v opačných polorovinách vyřatých přímkou AB .

Šestiúhelník $KLMNOP$ se kotálí po obvodu trojúhelníka ABC .

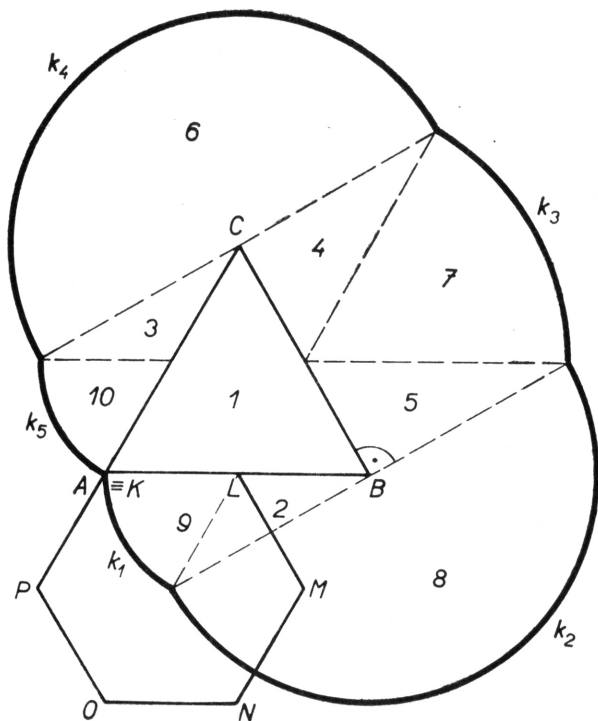
a) Vyšetřte dráhu vrcholu K .

b) Vypočtete obsah útvaru ohraničeného dráhou bodu K .

KOMENTÁŘ. Abychom dobře porozuměli textu úlohy, měli bychom si vystříhnout z lepenky trojúhelník i šestiúhelník a s modelem provést popsany pohyb, experimentálně zjistit a zakreslit dráhu bodu K . Pak provedeme konstrukci přesně pravítkem a kružítkem. Při výpočtu jde a) o aplikaci vzorců pro délku oblouku kružnice a obsah výseče, když je dán poloměr a velikost středového úhlu; b) o vhodné rozdělení vzniklého obrazce na trojúhelníky a výseče. Úloha je zcela běžná, vyžaduje spíše čas a trpělivost při počítání než vtip.

I tato úloha může být ovšem východiskem k problémové situaci o kotálení jednoho obrazce po obvodě druhého. Zkuste např. v dané úloze nahradit buď pevný trojúhelník, nebo pohyblivý šestiúhelník čtvercem, který má stranu téže délky.

ŘEŠENÍ (obr. 5). Dráha bodu K se skládá z pěti kružnicových oblouků, jak je naznačeno na obrázku.



Obr. 5

Obsah útvaru ohraničeného dráhou bodu K vypočteme jako součet obsahů celkem deseti obrazců, z nichž je pět trojúhelníků a pět kruhových výsečí (viz. obr. 5). Obsah obrazce označeného číslem i bude P_i v cm^2 ($i = 1, 2, \dots, 10$). Obsah rovnostranného $\triangle ABC$ je

$$P_1 = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 16 \cdot \sqrt{3} \doteq 27,68. \quad (1)$$

Dále platí $P_2 = P_3$, takže

$$P_2 + P_3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 8 \cdot \sqrt{3} \doteq 13,84. \quad (2)$$

Podobně $P_4 = P_5$, takže

$$P_4 + P_5 = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \right) = 16 \cdot \sqrt{3} \doteq 27,68. \quad (3)$$

Kruhová výseč označená na obr. 5 číslem 7 má poloměr roven $NK = 8$ cm a středový úhel 60° , její obsah tedy je

$$P_7 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 64 \doteq 33,60. \quad (4)$$

Dále $P_6 = P_8 = \frac{1}{2} \pi (4\sqrt{3})^2 = 24\pi$, takže

$$P_6 + P_8 = 48 \pi \doteq 150,72. \quad (5)$$

Nakonec $P_9 = P_{10}$, takže

$$P_9 + P_{10} = 2 \left(\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 4^2 \right) = 16 \cdot \frac{\pi}{3} \doteq 16,80. \quad (6)$$

Sečtením výsledků (1), (2), (3), (4), (5), (6) dostaneme

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{10} \doteq 270 \text{ cm}^2,$$

což je hledaný obsah.

4. Je dána velikost s střední příčky a velikost v výšky lichoběžníka $ABCD$, jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé. Průsečíky úhlopříček se střední příčkou lichoběžníka $ABCD$ dělí tuto střední příčku na tři shodné úsečky.

Sestrojte lichoběžník $ABCD$.

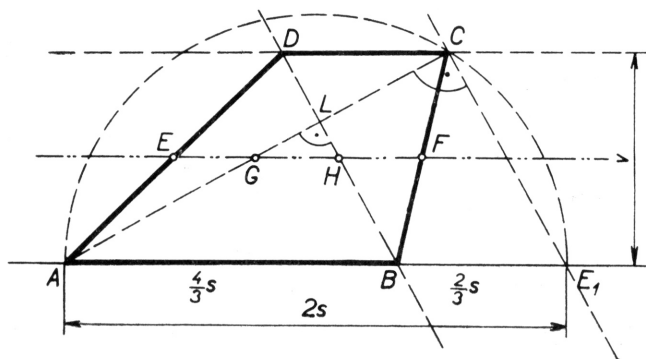
KOMENTÁŘ. Mezi impulsy pro řešení této úlohy patří bezesporu uvažování o tom, zda se mohou protínat úhlopříčky lichoběžníka na jeho střední příčce. (Zřejmě

nemohou, neboť by se pak navzájem půlily a obrazec by byl rovnoběžník.)

Dále provedeme rozbor dané konstrukční úlohy. Je to úloha **nepolohová**; první otázka je vždy, jak tuto úlohu „lokalizovat“, tj. který z daných prvků pevně umístit. V našem případě to bude asi střední příčka EF lichoběžníka $ABCD$, neboť

- a) známe její velikost;
- b) známe její vzdálenost od přímek, v nichž leží základny;
- c) víme, kterými jejími body procházejí úhlopříčky.

Vyjdeme-li ze střední příčky EF a jejích bodů G, H ($EG = GH = HF$), pak průsečík L obou úhlopříček zřejmě leží na kružnici k sestrojené nad průměrem GH



Obr. 6

(obr. 6). Mimoto víme, že vrcholy A, B a C, D leží na dvou rovnoběžkách s EF vedených ve vzdálenosti $\frac{1}{2} v$ (v je daná výška).

Zde se asi zarazíme: Nevíme ještě, který bod kružnice k

máme zvolit za průsečík L obou úhlopříček. Na první pohled situace vypadá tak, jako by úloha měla nekonečně mnoho řešení. Zvolíme tedy bod L na k , pak narýsujeme lichoběžník $ABCD$ a provedeme zkoušku; speciálně si ověříme (třeba grafickým sčítáním), zda platí

$$AB + CD = 2EF.$$

Tu se ukáže, že při libovolně zvoleném bodu L na k není podmínka b) splněna. To znamená, že vzdálenost bodu L od přímky EF není libovolná.

Další impuls je zkoumat tři podobné trojúhelníky ABL , GHL , CDL . Jejich vyšetřováním se zjistí, že vzdálenost bodu L od přímky EF je $\frac{1}{6}v$. Tím je vlastně teprve

dokončen rozbor úlohy a zkouška pak vyjde. Zároveň je tím také otevřena **cesta k diskusi**, v níž je třeba rozlišit případy $v < s$, $v = s$, $v > s$ (kde s značí délku střední příčky EF).

Tato úloha je poměrně nejtěžší z přípravných úloh, ale je velmi instruktivní.

Když jsme se „potrápili“ s předchozím poměrně složitým řešením, můžeme užít určitého triku: doplnit trojúhelník BCD na rovnoběžník $BDCE_1$. Tak vznikne pravoúhlý trojúhelník AE_1C , jehož přepona má délku $AE_1 = 2s$ a výška je v . Zůstane vám však ještě ledacos k dokázání a úvaze (vyjádřit délku CD a tedy i BE_1 pomocí s atd.).

Také z této úlohy bychom se mohli dopracovat k řadě variant, a tím k jisté problémové situaci. Např. místo dané výšky v můžeme požadovat, aby byl lichoběžník rovno-ramenný, místo podmínky $EG = GH = HF$ můžeme požadovat $2EG = GH = 2HF$ apod.

ŘEŠENÍ (obr. 6). Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný lichoběžník, a na prodloužení jeho větší základny AB

za bod B sestrojíme bod E_1 tak, aby $BE_1 = DC$. Pak bude $AE_1 = 2s$, přičemž $AB = \frac{4}{3}s$ (z $\triangle ABC$) a $BE_1 = DC = \frac{2}{3}s$ (z $\triangle BCD$). Poněvadž $E_1C \parallel BD$, je

$\sphericalangle ACE_1 = 90^\circ$. V pravoúhlém trojúhelníku ACE_1 známe tedy délku přepony $AE_1 = 2s$ a velikost příslušné výšky v .

Proto nejprve sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ACE_1 s přeponou $AE_1 = 2s$ a s příslušnou výškou v . To provedeme užitím Thaletovy věty: Nad průměrem AE_1 opíšeme polokružnici (jejíž poloměr tedy bude s) a najdeme její společný bod C s přímkou vedenou v téže polovině rovnoběžně s AE_1 ve vzdálenosti v . Na přeponě E_1A pak sestrojíme bod B tak, aby bylo $AB : BE_1 = 2 : 1$ (víme totiž, že musí být $AB = \frac{4}{3}s$, $BE_1 = \frac{2}{3}s$). Trojúhelník ABC nyní již snadno doplníme na hledaný lichoběžník $ABCD$ (bude $CD = BE_1$).

Proveditelnost celé konstrukce závisí pouze na existenci bodu C . V případě $v > s$ tento bod neexistuje, takže úloha nemá řešení. V případě $v \leq s$ bod C existuje (jeden nebo dva), takže úloha má řešení (jedno nebo dvě) zřejmě souměrná podle osy úsečky AB .

Jedinou podmínkou řešitelnosti úlohy je tedy splnění nerovnosti $v \leq s$.

III. Súťažné úlohy I. kola

1. RIEŠENIA ÚLOH KATEGÓRIE A

1. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$1 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \left(\frac{x_i}{i}\right)^2 = 2 \left[x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{x_i \cdot x_{i+1}}{i(i+1)} \right],$$

kde n je dané prirodzené číslo a $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú neznáme.

RIEŠENIE. Matematickou indukciou vzhľadom na n dokážeme, že pre reálne čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 1$) platí nerovnosť

$$a_0^2 + \binom{n}{1} a_1^2 + \dots + \binom{n}{n} a_n^2 \geq 2 \left[a_0 a_1 + \binom{n-1}{1} a_1 a_2 + \right. \\ \left. + \binom{n-1}{2} a_2 a_3 + \dots + \binom{n-1}{n-1} a_{n-1} a_n \right], \quad (1)$$

pričom rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Pre $n = 1$ naše tvrdenie platí, pretože potom sa (1) redukuje na známu nerovnosť $a_0^2 + a_1^2 \geq 2a_0a_1$.

Predpokladajme teda, že naše tvrdenie platí pre nejaké $n \geq 1$ a uvažujme o ľubovoľných reálnych číslach $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$. Podľa indukčného predpokladu platí okrem (1) tiež nerovnosť

$$a_1^2 + \binom{n}{1}a_2^2 + \dots + \binom{n}{n}a_{n+1}^2 \geq 2 \left[a_1a_2 + \binom{n-1}{1}a_2a_3 + \right. \\ \left. + \binom{n-1}{2}a_3a_4 + \dots + \binom{n-1}{n-1}a_na_{n+1} \right], \quad (2)$$

pričom vieme, že rovnosť v (1) nastane práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = \dots = a_n$ a v (2) práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}$. Sčítaním (1) a (2) dostaneme žiadanú nerovnosť

$$a_0^2 + \binom{n+1}{1}a_1^2 + \binom{n+1}{2}a_2^2 + \dots + \binom{n+1}{n+1}a_{n+1}^2 \geq \\ \geq 2 \left[a_0a_1 + \binom{n}{1}a_1a_2 + \dots + \binom{n}{n}a_na_{n+1} \right],$$

v ktorej platí rovnosť práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}$.

Tým je naše tvrdenie dokázané. Z neho bezprostredne vyplýva, že jediným riešením danej rovnice sú čísla

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n.$$

2. Najdte všechna přirozená čísla, která není možno vyjádřit jako součet aspoň dvou, ale méně než 1970, za sebou následujících přirozených čísel.

ŘEŠENÍ. Hledaná čísla jsou

- (1) všechny celé nezáporné mocniny čísla 2;
- (2) čísla tvaru $1024 \cdot 2^c \cdot M$, kde c je celé nezáporné číslo a M je součinem prvočísel větších než 1970.

Důkaz. I. Nechť $N = 2^\alpha$, α je celé nezáporné, a nechť

$$2^\alpha = N = \sum_{j=0}^{r-1} (n+j) = \frac{1}{2} r (2n+r-1)$$

je vyjádřením čísla N ve tvaru součtu r (≥ 2) sčítanců $n, n+1, \dots, n+r-1$. Je tedy

$$2^{\alpha+1} = r(2n + r - 1);$$

avšak jedno z čísel $r, 2n + r - 1$ je nutně liché a větší než 1.

II. Necht' N není mocninou 2; budiž p nejmenší prvočíslo větší než 2, které je dělitelem čísla N . Číslo N lze tedy psát ve tvaru

$$(3) \quad N = 2^{\alpha} p^{\beta} m,$$

kde $\beta > 0, \alpha \geq 0$ (celá čísla), a m je buď 1, nebo součin prvočísel větších než p . Takové číslo N lze vyjádřit ve tvaru

$$(4) \quad N = \sum_{j=0}^{r-1} (n+j),$$

kde n je přirozené a $r = \min [2^{\alpha+1}, p]$.

A. Necht' $2^{\alpha+1} < p$, takže $r = 2^{\alpha+1}$. Číslo

$$p^{\beta} m - 2^{\alpha+1}$$

je nutně liché ($p^{\beta} m$ je liché) a kladné; označme je $2n-1, n \geq 1$. Pro toto přirozené n pak máme

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (n+j) &= \frac{1}{2} r (2n-1+r) = \frac{1}{2} 2^{\alpha+1} (p^{\beta} m - 2^{\alpha+1} + \\ &+ 2^{\alpha+1}) = 2^{\alpha} p^{\beta} m = N. \end{aligned}$$

B. Necht' $p < 2^{\alpha+1}$, takže $r = p$. Číslo

$$2^{\alpha+1} p^{\beta-1} m - p$$

je nutně liché ($\alpha+1 > 1, p$ je liché) a kladné ($p^{\beta-1} m \geq 1$); označme je $2n-1, n \geq 1$. Pro toto přirozené n pak

máme

$$\sum_{j=0}^{r-1} (n+j) = \frac{1}{2} r (2n - 1 + r) = \\ = \frac{1}{2} p(2^{\alpha+1} p^{\beta-1} m - p + p) = 2^{\alpha} p^{\beta} m = N.$$

C. Mějme N tvaru (3) a vyjádříme je ve tvaru (4) s nějakým přirozeným $r, r \geq 2$; dokážeme, že $r \geq \min [2^{\alpha+1}, p]$.

C. a) Necht' r je sudé,

$$2^{\alpha} p^{\beta} m = \sum_{j=0}^{r-1} (n+j) = \frac{1}{2} r (2n + r - 1);$$

číslo $2n + r - 1$ je pak liché, takže z rovnosti

$$2^{\alpha+1} p^{\beta} m = r(2n + r - 1)$$

plyne $r \geq 2^{\alpha+1} \geq \min [2^{\alpha+1}, p]$.

C. b) Necht' r je liché, a tedy nutně dělitelné nějakým prvočíslem $q > 2$. Je

$$N = 2^{\alpha} p^{\beta} m = \sum_{j=0}^{r-1} (n+j) = \frac{1}{2} r (2n + r - 1).$$

Také číslo N je tedy dělitelné prvočíslem q , takže $q \geq p \geq \min [p, 2^{\alpha+1}]$.

Čísla N tvaru $1024 \cdot 2^c \cdot M$ tedy nelze vyjádřit ve tvaru součtu méně než 1970 po sobě následujících přirozených čísel, neboť i 2048 i dělitelé čísla M jsou větší než 1970.

Naopak čísla N , která nejsou tvaru ani (1), ani (2) buď nejsou dělitelná číslem 1024, takže ve vyjádření (3) je $2^{\alpha+1} \leq 1024 < 1970$, anebo jsou dělitelná prvočíslem p ,

$2 < p < 1970$; v obou případech je

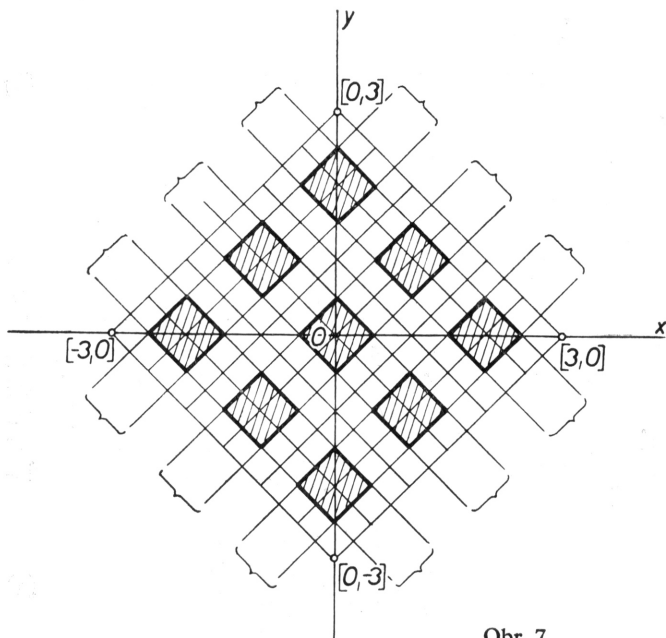
$$r = \min [2^{\alpha+1}, p] < 1970$$

a N lze vyjádřit podle toho, co bylo dokázáno před C ve tvaru (4).

3. Nájďte množinu všech bodů v rovine, kterých pravouhlé souřadnice x, y vyhovují systému nerovností

$$|x| + |y| < 3,$$

$$\sin \pi \left(x + y + \frac{1}{2} \right) \geq 0, \quad \sin \pi \left(x - y + \frac{1}{2} \right) \geq 0.$$



Obr. 7

RIEŠENIE. Nerovnosť $\sin \pi \left(x + y + \frac{1}{2} \right) \geq 0$ je splnená práve vtedy, keď platí

$$2k\pi \leq \pi \left(x + y + \frac{1}{2} \right) \leq 2k\pi + \pi$$

čiže

$$-x + 2k - \frac{1}{2} \leq y \leq -x + 2k + \frac{1}{2}, \quad (1)$$

kde k je celé číslo.

Podobne nerovnosť $\sin \pi \left(x - y + \frac{1}{2} \right) \geq 0$ je splnená práve vtedy, keď platí

$$x + 2m - \frac{1}{2} \leq y \leq x + 2m + \frac{1}{2}, \quad (2)$$

kde m je celé číslo.

Hľadaná množina bodov je potom prienikom štvorca $|x| + |y| < 3$ a pásov (1) a (2); pozri obr. 7.

4. Jsou dána kladná čísla a, b, c, d . Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ s $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ tak, aby jeho obsah byl co největší. Najděte podmínku řešitelnosti.

ŘEŠENÍ. Nutnou podmínkou, aby existoval vůbec nějaký čtyřúhelník daných rozměrů, je, aby největší z čísel a, b, c, d bylo menší než součet tří zbývajících. Budeme proto předpokládat, že tato podmínka je splněna (a nakonec uvidíme, že je i postačující pro existenci hledaného čtyřúhelníka). Máme tedy

$$\left. \begin{aligned} a &< b + c + d, \\ b &< a + c + d, \\ c &< a + b + d, \\ d &< a + b + c. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(Jedna z těchto nerovností právě vyjadřuje naši podmínku a zbývající tři jsou pak triviálně splněny.)

Předpokládejme, že $ABCD$ je čtyřúhelník daných rozměrů; označme S jeho obsah, α resp. γ velikost jeho

vnitřního úhlu při vrcholu A , resp. C , $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$. Pak platí

$$S = \frac{1}{2}(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma), \quad (2)$$

$$4S = 2(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma).$$

Z dvojího vyjádření BD^2 podle kosinové věty plyne

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad \cos \alpha - 2bc \cos \gamma. \quad (3)$$

Vztahy (2), (3) umocníme dvěma

$$16S^2 = 4a^2d^2 \sin^2 \alpha + 8abcd \sin \alpha \sin \gamma + 4b^2c^2 \sin^2 \gamma,$$

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 =$$

$$= 4a^2d^2 \cos^2 \alpha - 8abcd \cos \alpha \cos \gamma + 4b^2c^2 \cos^2 \gamma$$

a pak sečteme.

$$16S^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd \cos(\alpha + \gamma).$$

Dosadíme sem $\cos(\alpha + \gamma) = 2\cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} - 1$ a dostaneme

$$16S^2 = 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Upravíme

$$4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 =$$

$$= (a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + 2ad + 2bc) \cdot$$

$$\cdot (-a^2 - d^2 + b^2 + c^2 + 2ad + 2bc) =$$

$$\begin{aligned}
&= [(a + d)^2 - (b - c)^2] \cdot [(b + c)^2 - (a - d)^2] = (a + d + b - c) \cdot (a + d - b + c) (b + c + a - d) (b + c - a + d) = \\
&= 16 (p - a) (p - b) (p - c) (p - d).
\end{aligned}$$

Odvodili jsme tedy vzorec

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}}. \quad (4)$$

Úloha bude rozřešena, sestrojíme-li (za předpokladů (1)) tětiový čtyřúhelník $ABCD$ s $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ a dokážeme-li, že existuje jediný takový tětiový čtyřúhelník. V něm bude $\alpha + \gamma = 180^\circ$, takže podle (4) bude jeho obsah větší než obsah každého jiného (tedy netětivového) čtyřúhelníka daných rozměrů.

Sestrojme $\triangle ABD$ s

$$AB = a, \quad AD = d, \quad BD = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}.$$

(Dvojitým užitím kosinové věty snadno plyne, že úhlopříčka BD tětiového čtyřúhelníka $ABCD$ musí mít tuto velikost.) Je zřejmé, že úsečku BD lze sestroit eukleidovskými konstrukcemi; musíme však ověřit trojúhelníkové nerovnosti. To provedeme metodou ekvivalentních úprav:

$$\begin{aligned}
a + d &> \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}, \\
(a^2 + 2ad + d^2)(ad + bc) &> (ab + cd)(ac + bd), \\
a^3d + 2a^2d^2 + ad^3 + a^2bc + 2abcd + bcd^2 &> \\
&> a^2bc + ac^2d + ab^2d + bcd^2, \\
a^2 + 2ad + d^2 + 2bc &> b^2 + c^2,
\end{aligned}$$

$$0 < (a + d)^2 - (b - c)^2,$$

$$0 < (a + b - c + d)(a - b + c + d),$$

což podle (1) platí. Podobně

$$|a - d| < \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}},$$

$$(a^2 - 2ad + d^2)(ad + bc) < (ab + cd)(ac + bd),$$

$$a^3d - 2a^2d^2 + ad^3 + a^2bc - 2abcd + bcd^2 <$$

$$< a^2bc + ac^2d + ab^2d + bcd^2,$$

$$a^2 - 2ad + d^2 - 2bc < c^2 + b^2,$$

$$0 < (b + c)^2 - (a - d)^2,$$

$$0 < (a + b + c - d)(-a + b + c + d),$$

což opět platí podle (1).

Nakonec v polorovině opačné k BDA sestrojíme trojúhelník BCD s $BC = b$, $CD = c$: jeho existence plyne analogicky z (1).

Podle kosinové věty vypočteme

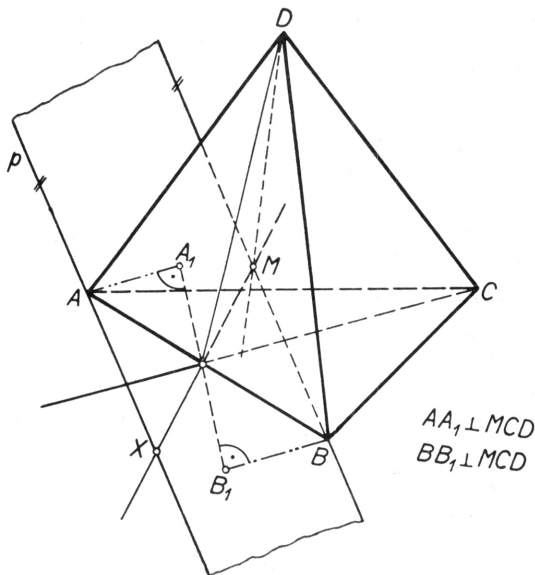
$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{2ad} \left[a^2 + d^2 - \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc} \right] = \\ &= \frac{1}{2ad} \cdot \frac{a^3d + ad^3 + a^2bc + bcd^2 - a^2bc - ac^2d - ab^2d - bcd^2}{ad + bc} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}; \quad \text{analogicky} \\ \cos \gamma &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{ad + bc}. \end{aligned}$$

Je tedy $\cos \alpha = -\cos \gamma$, takže $ABCD$ je tětíkový čtyřúhelník.

Dokázali jsme, že úloha má jediné řešení, jakmile je splněna podmínka vyslovená na začátku.

5. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho vnitřní bod M ; objemy čtyřstěnů $MBCD$, $MACD$, $MABD$, $MABC$ označme po řadě V_A , V_B , V_C , V_D . Dokažte, že platí

$$V_A \cdot \vec{MA} + V_B \cdot \vec{MB} + V_C \cdot \vec{MC} + V_D \cdot \vec{MD} = \vec{0}.$$



Obr. 8

ŘEŠENÍ. Vedme bodem A přímku $p \parallel MB$ a označme X její průsečík s rovinou MCD . Buďte A_1 , B_1 pravoúhlé průměty bodů A , B do roviny MCD (obr. 8). Platí

$$\frac{AX}{BM} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{V_B}{V_A}.$$

Poněvadž rovina MCD odděluje body A, B , jsou vektory $\vec{AX}, \vec{MB}$ souhlasně rovnoběžné a máme

$$\vec{AX} = \frac{V_B}{V_A} \cdot \vec{MB}. \quad (1)$$

Vedme dále bodem X přímkou $q \parallel MC$ a označme Y její průsečík s rovinou MBD . Buďte C_1, X_1, A_2 pravoúhlé průměty bodů C, X, A na rovinu MBD . Poněvadž $AX \parallel MB$, máme $XX_1 = AA_2$. Nyní platí

$$\frac{XY}{CM} = \frac{XX_1}{CC_1} = \frac{AA_2}{CC_1} = \frac{V_C}{V_A}.$$

Přímka p (a tedy i její bod X) leží v poloprostoru $MBDA$, takže rovina MBD odděluje body X, C a můžeme psát

$$\vec{XY} = \frac{V_C}{V_A} \cdot \vec{MC}. \quad (2)$$

Přímka q leží v rovině MCD , neboť v této rovině leží její bod X (podle konstrukce) a je $q \parallel MC$. Proto i bod Y (přímky q) leží v rovině MCD . Avšak (podle konstrukce) Y leží také v rovině MBD . Z toho plyne, že Y leží na přímce MD . Označme nyní D_1, Y_1, X_2, A_3 pravoúhlé průměty bodů D, Y, X, A na rovinu MBC . Body X, Y určují přímku $q \parallel MC$; je $YY_1 = XX_2$ a protože $p \equiv \equiv AX \parallel MB$, je také $XX_2 = AA_3$; z toho plyne, že $YY_1 = AA_3$. Poněvadž body Y, M, D leží na jedné přímce, platí

$$\frac{YM}{DM} = \frac{YY_1}{DD_1} = \frac{AA_3}{DD_1} = \frac{V_D}{V_A}.$$

Jelikož vektory $\vec{AX}, \vec{MB}$ jsou souhlasně rovnoběžné, leží oba body X, B v témž poloprostoru určeném rovinou MAC , tj. v $MACB$. Proto i přímka $q \parallel MC$ leží v tomto poloprostoru, takže její bod Y na MD je oddělen bodem

M od D . Tak môžeme psáť

$$\vec{YM} = \frac{V_D}{V_A} \cdot \vec{MD}. \quad (3)$$

Vzhľadom k výsledkům (1), (2), (3) nakoniec dostávame

$$\begin{aligned} V_A \cdot \vec{MA} + V_B \cdot \vec{MB} + V_C \cdot \vec{MC} + V_D \cdot \vec{MD} &= \\ = V_A \cdot \left(\vec{MA} + \frac{V_B}{V_A} \cdot \vec{MB} + \frac{V_C}{V_A} \cdot \vec{MC} + \frac{V_D}{V_A} \cdot \vec{MD} \right) &= \\ = V_A \cdot (\vec{MA} + \vec{AX} + \vec{XY} + \vec{YM}); \end{aligned}$$

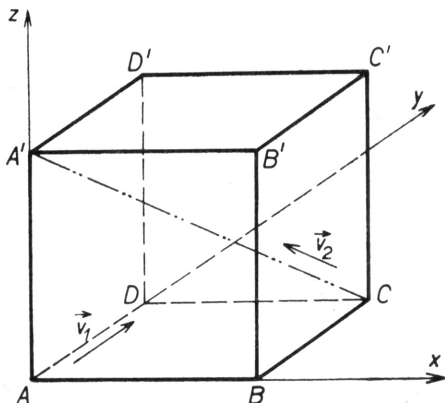
avšak vektor v poslednej závorke je zrejme nulový. Tím je dôkaz hotov.

POZNÁMKA. Rýchlejší dôkaz se dostane užitím tzv. Carathéodoryho vety (dokonce pro simplex v $\mathbf{E}_n$).

6. Je daná jednotková kocka $ABCD A'B'C'D'$. Z vrcholov A a C vylezú súčasne dva chrobáky. Jeden z nich lezie po hrane AD a za časovú jednotku dolezie do bodu D . Druhý je rýchlejší a za tú istú časovú jednotku sa dostane po telesovej uhlopriečke CA' do bodu A' . Zistite, kedy si budú oba chrobáky najbližšie a aká bude v tom okamihu ich vzdialenosť, ak predpokladáme, že sa pohybujú rovnomerne.

RIEŠENIE. Zvoľme v priestore kartézsku súradnicovú sústavu tak, že $A = (0, 0, 0)$, $D = (0, 1, 0)$, $A' = (0, 0, 1)$, $C = (1, 1, 0)$ (obr. 9). Rýchlosť prvého chrobáka je $\vec{v}_1 = (D - A) = (0, 1, 0)$, rýchlosť druhého $\vec{v}_2 = (A' - C) = (-1, -1, +1)$ (príslušných jednotiek). V okamihu t ($0 \leq t \leq 1$) sa prvý chrobák nachádza v bode

$$A + t \cdot \vec{v}_1 = (0, t, 0)$$



Obr. 9

a druhý chrobák v bode

$$C + t \cdot \vec{v}_2 = (1 - t, 1 - t, t).$$

Štvorec ich vzdialenosti $d(t)$ v čase t teda je

$$\begin{aligned} d^2(t) &= (1 - t)^2 + [(1 - t) - t]^2 + t^2 = 6t^2 - 6t + 2 = \\ &= 6 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Táto kvadratická funkcia nadobúda minimum zrejme pre $t = \frac{1}{2}$, čo je hodnota z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, na ktorom o nej uvažujeme. Chrobáky budú teda k sebe najbližšie v okamihu

$$t = \frac{1}{2}$$

a ich najmenšia vzdialenosť bude $d\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. KOMENTÁŘE A ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE B

(Komentáře byly určeny hlavně pro žáky 1. ročníků gymnasií a středních odborných škol.)

1. Jestliže a, b jsou kladná čísla menší než 1, platí nerovnost

$$|a - b| \leq \frac{|\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)}|}{\sqrt{a(1-b)} + \sqrt{b(1-a)}}; \quad (1)$$

dokažte. Zjistěte, kdy nastane rovnost.

KOMENTÁŘ. První úloha je v podstatě část řešení nerovnice o dvou proměnných; úloha je usnadněna tím, že se nežádají všechna řešení dané nerovnice; má se **provést jen zkouška** pro udaná řešení

$$(0 < a < 1, \quad 0 < b < 1).$$

Můžeme pohlížet na úlohu také tak, že daná nerovnice se má řešit v oboru

$$\{[a, b] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}; \quad 0 < a < 1, \quad 0 < b < 1\}.$$

Tímto omezením je usnadněno řešení, neboť můžeme celkem snadno provést **rozbor** úlohy. Důležitá jsou tato fakta:

- Daná nerovnice je souměrná v a, b ; proto *můžeme volit označení* tak, že je např. $a \geq b$. Tím dosáhneme zjednodušení při práci s absolutními hodnotami. Bylo by ovšem třeba uvést ještě jiné příklady, třeba označení úhlu v trojúhelníku podle rostoucí velikosti apod.

- Je třeba zjistit, zda všechny výrazy mají v daném oboru smysl, neboť jsou tu zlomky a odmocniny. Z předpokladů však skutečně plyne

$$0 < 1 - a < 1, \quad 0 < 1 - b < 1.$$

● Volbou označení a, b zmizí z dané nerovnice absolutní hodnoty, neboť je $a - b \geq 0$ i $a(1 - b) \geq b(1 - a)$, tj. $\sqrt{a(1 - b)} \geq \sqrt{b(1 - a)}$. (Můžeme ovšem postupovat obvyklým způsobem, tj. např. umocněním. Sami pak budeme hledat obratnější způsob, abychom se vyhnuli komplikovaným výpočtům; tím dojdeme nenásilně k volbě označení.)

● Když se rozbořem určila všechna možná řešení úlohy, tj. všechny dvojice $[a, b]$, pro něž platí $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, provede se **zkouška obrácením postupu z rozboru, neboť jde o nekonečně mnoho dvojic čísel.**

● Nerovnice

$$0 \leq (\sqrt{a(1 - a)} - \sqrt{b(1 - b)})^2,$$

ke které dojdeme naznačeným způsobem, umožňuje i vyšetřit, pro které dvojice $[a, b]$ platí rovnost. Tyto dvojice jsou řešením rovnice

$$\sqrt{a(1 - a)} = \sqrt{b(1 - b)}$$

neboli rovnice

$$(a - b)(1 - a - b) = 0. \quad (1)$$

Z (1) plyne buď $a = b$, nebo $a + b = 1$.

Můžeme tak pokládat a, b za ortonormální souřadnice v rovině a prozkoumat řešení dané rovnice graficky. Jako úvodní úlohu můžeme porovnat aritmetický, geometrický a harmonický průměr dvou kladných čísel u, v .

Je $a = \frac{u + v}{2}$, $g = \sqrt{uv}$, $h = \frac{2uv}{u + v}$; porovnáním dostaneme

$$a \geq g \geq h;$$

rovnost platí jen v případě $u = v$.

ŘEŠENÍ. Za daných předpokladů $0 < a < 1, 0 < b < 1$ mají zřejmě všechny výrazy v nerovnosti (1) smysl.

Pro $a = b$ vztah (1) platí, dokonce v něm nastává rovnost.

Vyšetříme případ, kdy $a \neq b$. Vzhledem k tomu, že výrazy na obou stranách nerovnosti (1) jsou souměrné v a, b , můžeme označení a, b volit tak, že

$$0 < b < a < 1. \quad (2)$$

Označme r rozdíl pravé a levé strany nerovnosti (1). Pak vzhledem k (2) platí

$$r = \frac{\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)}}{\sqrt{a(1-b)} + \sqrt{b(1-a)}} - (a-b). \quad (3)$$

Protože je $a \neq b$, můžeme zlomek v rovnosti (3) rozšířit výrazem $(\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)})$. Po dalších úpravách pak dostaneme

$$r = \frac{(\sqrt{a(1-a)} - \sqrt{b(1-b)})^2}{a-b}. \quad (4)$$

Ze (4) plyne, že pro každou dvojici čísel a, b splňujících (2) platí

$$r \geq 0,$$

tj. také nerovnost (1). Tím je platnost nerovnosti (1) dokázána pro všechna kladná čísla a, b menší než 1.

Zbývá vyšetřit, kdy v (1) nastává nerovnost. Je třeba zjistit, zda může v (1) nastat rovnost i pro nějakou dvojici a, b splňující podmínky (2). Pak by bylo $r = 0$, tj.

$$a(1-a) = b(1-b),$$

tedy

$$(a-b)(1-a-b) = 0.$$

Vzhledem k (2) je $a-b \neq 0$, takže

$$a+b=1. \quad (5)$$

Dosazením do (1) se snadno přesvědčíme, že pro kladná čísla a, b splňující (5) platí v (1) skutečně rovnost. Ověříme ještě případ $a = b$, který jsme během úprav vyloučili. Po dosazení do (1) zjistíme, že i pro $a = b$ platí ve vztahu (1) rovnost. Závěr tedy zní:

Rovnost v (1) nastává pro dvojici kladných čísel a, b menších než 1 právě když

$$a = b \quad \text{nebo} \quad a + b = 1.$$

2. Nechť n je přirozené číslo a $f(x)$ polynom jedné proměnné x s celočíselnými koeficienty. Písmenem **M** označme množinu všech celých čísel x takových, že n dělí $f(x)$. Rozhodněte, zda se počet prvků množiny **M** může rovnat číslu 1970 nebo 1971.

KOMENTÁŘ. Na scestí nás mohou zavádět určitá čísla 1970 a 1971 (současně letopočty), která jsou však pro řešení úlohy nepodstatná.

Osvědčená je metoda řešit nejprve problém pro speciální případy, tj. nejprve experimentovat, pak vyslovit hypotézu a dokázat ji popř. metodou, které jsme užili při experimentování. Jako první případ zvolíme lineární polynomické funkce.*) Nechť je tedy $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Impuls zní zkoumat hodnotu polynomické funkce pro $x + kn$ (kde k je celé číslo). Platí

$$\begin{aligned} f(x + kn) &= a(x + kn) + b = (ax + b) + akn = \\ &= f(x) + (ak) \cdot n. \end{aligned} \quad (2)$$

Z (2) vyplývá pro lineární polynomické funkce: Je-li $x \in \mathbf{M}$, je také $x + kn \in \mathbf{M}$. Z toho plyne dále:

Je-li $\mathbf{M} \neq \emptyset$, je $\mathbf{M}$ množina nekonečná. (V)

Dalším krokem bude zkoumání, zda věta (V) platí

*) Nebudeme ovšem volit numerické koeficienty, specializujeme jen stupeň.

i pro polynomické funkce druhého stupně. Je-li $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, je

$$f(x + kn) = a(x + kn)^2 + b(x + kn) + c = ax^2 + bx + c + (2akx + ak^2n + bk)n = f(x) + p \cdot n, \quad (3)$$

kde p je celé číslo. Z (3) odvodíme (jako z (2)), že i pro polynomické funkce druhého stupně platí věta (V).

Snad nyní už lze vyslovit hypotézu o obecné platnosti věty (V); můžeme se o tom však ještě přesvědčit na některých zvláštních polynomických funkcích vyššího stupně, např.

$$f(x) = x^3 + 1, \quad g(x) = ax^4 + bx + c \quad \text{apod.}$$

Důkaz hypotézy (bez znalosti binomické formule) se může opřít o vztah platný pro každé přirozené a

$$(x + kn)^a = \underbrace{(x + kn) \cdot (x + kn) \cdot \dots \cdot (x + kn)}_{a\text{-krát}} = x^a + C \cdot n,$$

kde C je celé číslo.

Problémem zůstává umělý obrat (trik) zkoumat vztah mezi funkčními hodnotami $f(x)$ a $f(x + kn)$ nebo jednodušeji mezi $f(x)$ a $f(x + n)$. Toto zkoumání lze **navodit** (v souvislosti s vyšetřováním lineárních funkcí) otázkou, zda dovedeme **z jednoho známého** prvku množiny určit nějaký její **další prvek**.

Z věty (V) ovšem plyne na otázku úlohy záporná odpověď.

ŘEŠENÍ. Buď x celé a k přirozené číslo. Uvědomme si nejprve, že $(x + n)^k = x^k + n \cdot C$, kde C je celé číslo. Proto $f(x + n) = f(x) + n \cdot F$, kde F je jisté celé číslo. Jakmile tedy $x \in \mathbf{M}$, pak také $x + n \in \mathbf{M}$. Z toho plyne, že množina $\mathbf{M}$ je buď prázdná, anebo nekonečná. Počet prvků naší množiny $\mathbf{M}$ se tedy nemůže rovnat číslu 1970 ani 1971. Tím je úloha vyřešena.

3. Najděte největší přirozené číslo n s touto vlastností: Množinu čísel $1, 2, 3, \dots, n$ lze rozdělit na dvě části tak, že žádná z nich neobsahuje trojčlennou aritmetickou posloupnost s kladnou diferencí.

KOMENTÁŘ. V textu úlohy má být místo „rozdělit“, „rozložit“ neboť jde skutečně o nalezení dvou **disjunktních** částí $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ tak, že

$$\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 = \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Předně asi bude třeba vysvětlit si termín trojčlenná aritmetická posloupnost. Podle textu úlohy se mají všechna přirozená čísla n roztrždit do dvou skupin:

Skupina **I** obsahuje všechna taková n , že existuje aspoň jeden rozklad množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ v části $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ tak, že ani $\mathbf{M}_1$, ani $\mathbf{M}_2$ neobsahuje žádnou trojčlennou aritmetickou posloupnost.

Skupina **II** obsahuje všechna taková n , že **každý** rozklad množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ v části $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ má tu vlastnost, že buď $\mathbf{M}_1$, nebo $\mathbf{M}_2$ obsahuje nějakou trojčlennou aritmetickou posloupnost. Konečným úkolem je *najít největší číslo ze skupiny I*.

Předně je zřejmé, že všechna čísla $n < 6$ patří do skupiny **I**. Dále se pokusíme zjistit, do které skupiny patří čísla 6, 7, 8. Zkusmo snadno zjistíme, že patří do skupiny **I**. Je totiž

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 4\} \cup \{3, 5, 6\},$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 5\} \cup \{3, 4, 6, 7\},$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 3, 6, 8\} \cup \{2, 4, 5, 7\}.$$

Dalším podnětem pro řešení úlohy může být tato otázka: *Zdá se, že čím větší bude n , tím bude nesnadnější najít takový rozklad množiny $1, 2, \dots, n$ ve dvě části tak, aby žádná z nich neobsahovala žádnou trojčlennou aritmetickou posloupnost.* Ptáme se tedy: **Když číslo n náleží do skupiny II, náleží tam také $n + 1$?**

Odpověď je kladná; tvrzení se dokáže „skrytou“ matematickou indukcí. Vyjdeme z množiny $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ (to je velmi podstatné, v tom asi budeme chybovat!); předpokládáme, že $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ je její libovolný rozklad ve dvě části, tedy

$$\{1, 2, \dots, n, n+1\} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \emptyset.$$

Číslo $n+1$ se vyskytuje v jediné z částí $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$; zvolme označení množin $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ tak, aby bylo $n+1 \in \mathbf{M}_2$. Pak množiny $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \setminus \{n+1\}$ tvoří rozklad množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Protože číslo n patří do skupiny **II**, obsahuje aspoň jedna z množin $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \setminus \{n+1\}$ trojčlennou aritmetickou posloupnost; totéž tedy platí i o množinách $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$, a tím je tvrzení dokázáno.

Tato část řešení je obtížná a vyžaduje vydatnou pomoc.

Zbývá vyšetřit případ $n=9$. Ukáže se, že 9 patří do skupiny **II**, a že tedy 8 je největší číslo ze skupiny **I**. Fakt, že 9 náleží do skupiny **II**, se dokáže experimentálně. Nechť je

$$\{1, 2, \dots, 9\} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \emptyset.$$

Nejprve zkoumáme případy, kdy $\mathbf{M}_2$ je množina o jednom nebo dvou prvcích; pak najdeme v $\mathbf{M}_1$ vždy trojčlennou aritmetickou posloupnost s diferencí 1, neboť $\mathbf{M}_1$ vznikne z $\mathbf{M}_2$ vynecháním jednoho nebo dvou čísel.

Dále zkoumáme případy, kdy $\mathbf{M}_1$ i $\mathbf{M}_2$ obsahují aspoň tři prvky; označení množin $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ zvolíme tak, aby $\mathbf{M}_1$ obsahovalo více prvků než $\mathbf{M}_2$; $\mathbf{M}_1$ tedy obsahuje 6 nebo 5 prvků.*)

Zabývejme se nejprve případem, kdy $\mathbf{M}_1$ obsahuje 6 prvků. Uspořádáme těchto 6 čísel vzestupně a dostaneme sled s **kladnými** diferencemi:

$$d_1, d_2, d_3, d_4, d_5. \quad (4)$$

*) Zde je jiná volba označení $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ než při předchozím důkazu indukci.

Probereme případy, kdy největší z čísel (4) je postupně 4, 3, 2, 1, a vždy dokážeme, že existuje v $\mathbf{M}_1$ trojčlenná aritmetická posloupnost. Bylo by sice možné prozkoumat experimentálně všechny možné rozklady množiny $\{1, 2, \dots, 9\}$ ve dvě části, z nichž každá obsahuje 3 až 6 prvků ($3 + 6$ nebo $4 + 5$), avšak těchto rozkladů je $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = (12 + 18) \cdot 7 = 210$; toto primitivní řešení by bylo úmorné. Takovéto situace ospravedlňují deduktivní přístup.

Vraťme se ke zkoumání sledu (4). Platí $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 \leq 8$ (proč?); proto každé z čísel d_i je rovno nejvýše čtyřem. Je-li některé z čísel d_i rovno čtyřem, jsou ostatní čtyři rovna jedné a žádaná posloupnost (s diferencí 1) je nalezena. Stačí totiž, aby dvě sousední difference byly sobě rovny. Je-li největší z čísel d_i rovno třem, je nejvýše jedno ze zbývajících rovno dvěma a ostatní tři jsou rovna jedné. Pak je třeba zkoumat možnosti sledu (4) a dokázat, že vždycky dostaneme trojčlennou aritmetickou posloupnost. Zařazení členů této posloupnosti ukazují znaky $\bullet$, např. v těchto případech:

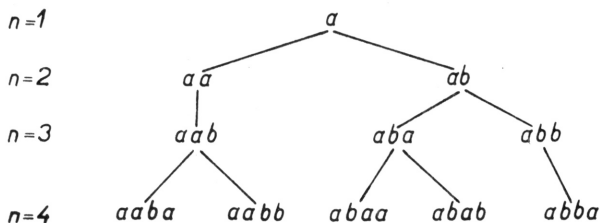
$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & 1 & \bullet & 1 & \bullet & 3, & 1, & 2 & & 1 & \bullet & 2, & 1 & \bullet & 3 & \bullet & 1. \end{array}$$

Obdobně probíhá zkoumání, jsou-li všechna d_i sledu (4) rovna jedné nebo dvěma a v případě, kdy množina $\mathbf{M}_1$ je jen pětiprvková, tj. kdy sled (4) obsahuje jen čtyři kladné difference.

Úloha 3 vlastně nepředpokládá žádné matematické znalosti. Je těžká, ale jejím řešením získáme mnoho užitečných matematických dovedností.

ŘEŠENÍ. Znázorníme všechny možné rozklady množiny čísel $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ na dvě části tak, aby žádná z nich neobsahovala trojčlennou aritmetickou posloupnost s kladnou diferencí. Při řešení naší úlohy se zřejmě

můžeme zabývat jen disjunktními rozklady. Písmeno a , resp. b , napsané na i -tém místě zleva v příslušné n -členné posloupnosti (viz níže), bude znamenat, že číslo i patří do první, resp. druhé skupiny rozkladu, který tato posloupnost znázorňuje. Můžeme ještě předpokládat, že číslo 1 bude patřit vždy do první skupiny. Sestavíme si nyní schéma (obr. 10), v jehož n -tém řádku shora jsou



Obr. 10

vypsány všechny možné přípustné rozklady množiny čísel $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Tyto rozklady se vždy najdou užitím předchozího $(n - 1)$ -ho řádku: má-li se totiž množina čísel $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dát rozdělit na dvě (disjunktní) části, z nichž žádná neobsahuje trojčlennou aritmetickou posloupnost, pak totéž pochopitelně musí platit i pro podmnožinu $\{1, 2, \dots, n - 1\}$; poslední číslo n pak přidáváme buď k první, nebo k druhé skupině každého rozkladu uvedeného v $(n - 1)$ -ém řádku, přičemž ovšem dbáme na to, aby ze žádné z nově vznikajících skupin nebylo možno vybrat trojčlennou aritmetickou posloupnost s nenulovou diferencí. Tak se ukazuje, že v osmém řádku našeho schématu vyjdou právě tři možnosti: $aabbaabb$, $ababbaba$, $abbaabba$; z nich už však nelze pokračovat na devátém řádku.

ODPOVĚĎ: Hledané číslo je $n = 8$.

POZNÁMKA: Řešení úlohy 3 bylo v komentáři podrobně naznačeno; uvádíme zde proto další možné řešení.

4. Ze všech čtyřúhelníků, které mají daný obvod, má největší obsah čtverec; dokažte.

KOMENTÁŘ. a) Jako průpravu pro řešení čtvrté úlohy by bylo vhodné řešit tzv. izoperimetrický problém pro pravoúhelník. Označme s poloviční obvod pravoúhelníka, x délku jedné strany. Pro jeho obsah y platí

$$y = x(s - x) = sx - x^2 = \frac{s^2}{4} - \left(x - \frac{s}{2}\right)^2. \quad (5)$$

Funkce y (obsah) nabývá svého maxima, právě když je $x - \frac{s}{2} = 0$, tj. $x = \frac{s}{2}$. Pravoúhelník je pak čtverec.

b) Druhá část řešení je zkoumání libovolného čtyřúhelníka $ABCD$. Úvodem by měla být úvaha, že ke každému *nekonvexnímu* čtyřúhelníku existuje *konvexní* čtyřúhelník *téhož obvodu a většího obsahu*. Stačí tedy zabývat se konvexními čtyřúhelníky. To je druhá přípravná úvaha.

c) Třetí přípravný krok je tento: Zkoumejme obsah trojúhelníka, jehož dvě strany mají **konstantní** délky p, q a úhel jimi sevřený má **proměnnou velikost** ω . Bez trigonometrie je patrné, že obsah je maximální, právě když je maximální výška na stranu p , tj. když je $p \perp q$.

d) Následuje vlastní řešení úlohy. Impuls je ve výzvě: odhadněte pomocí délek stran čtyřúhelníka $ABCD$ ($AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$) obsahy trojúhel-

níků ABC , ADC , ABD , CBD ; vyjde

$$\begin{aligned}\triangle ABC &\leq \frac{1}{2}ab, & \triangle ADC &\leq \frac{1}{2}cd, \\ \triangle ABD &\leq \frac{1}{2}ad, & \triangle CBD &\leq \frac{1}{2}bc.\end{aligned}\tag{6}$$

Sečtením vyjde pro obsah P čtyřúhelníka $ABCD$:

$$2P \leq \frac{1}{2}a(b+d) + \frac{1}{2}c(b+d) = \frac{1}{2}(a+c)(b+d).$$

Označíme-li $2s$ obvod (délku obvodu), $a+c=x$, dostaneme

$$4P \leq x(2s-x) = s^2 - (s-x)^2.\tag{7}$$

Maximum funkce (7) dostaneme (viz odst. a)) pro $x=s$, tj. $a+c=b+d$. Spojíme-li tento výsledek se skutečností, že v (6) platí rovnost, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ pravoúhelník, dostaneme $a=b=c=d$. Ostatně pak shledáme, že vztah (7) nebylo třeba odvozovat, neboť je to repríza odvození a využití vztahu (5). Obě úvahy se ztotožní, jakmile si uvědomíme, že čtyřúhelník $ABCD$ s maximálním obsahem musíme hledat mezi pravoúhelníky.

ŘEŠENÍ. Buď $ABCD$ libovolný čtyřúhelník se stranami $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Pak platí

$$\text{obsah } \triangle ABC \leq \frac{1}{2}ab,$$

$$\text{obsah } \triangle BCD \leq \frac{1}{2}bc,$$

$$\text{obsah } \triangle CDA \leq \frac{1}{2}cd,$$

$$\text{obsah } \triangle DAB \leq \frac{1}{2}da.$$

Sečtením dostaneme

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{obsah } ABCD &\leq \frac{1}{2}(ab + bc + cd + da) = \\ &= \frac{1}{2}(a + c)(b + d), \end{aligned}$$

tedy

$$\text{obsah } ABCD \leq \frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}. \quad (1)$$

Přitom je jasné, že rovnost v (1) platí právě když $ABCD$ je pravoúhelník. Dále máme

$$\sqrt{\frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}} \leq \frac{\frac{a + c}{2} + \frac{b + d}{2}}{2} = \frac{a + b + c + d}{4},$$

čili

$$\frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2} \leq \left(\frac{a + b + c + d}{4} \right)^2 \quad (2)$$

s rovností právě když $a + c = b + d$. Z (1), (2) konečně dostáváme

$$\text{obsah } ABCD \leq \left(\frac{a + b + c + d}{4} \right)^2$$

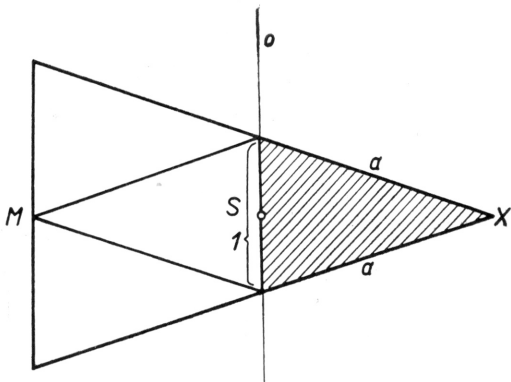
s rovností právě když $ABCD$ je čtverec. Tím je věta dokázána.

5. Stěny čtyřstěnu jsou čtyři navzájem podobné rovno-ramenné trojúhelníky; nejkratší hrana má délku 1. Určete všechny takové čtyřstěny.

KOMENTÁŘ. Tato úloha je v podstatě zkoumání sítí hledaného čtyřstěnu. Je třeba rozlišit dva případy:

Nejkratší hrana*) je a) základnou rovnoramenného trojúhelníka, b) jeho ramenem.

V případě a) vychází zkoumání z rovnoramenného trojúhelníka o stranách $(1, a, a)$, kde $a \geq 1$. S použitím podobnosti snadno dokážeme shodnost všech čtyř stěn, síť čtyřstěnu je nakreslena na obr. 11. Je pak ještě třeba

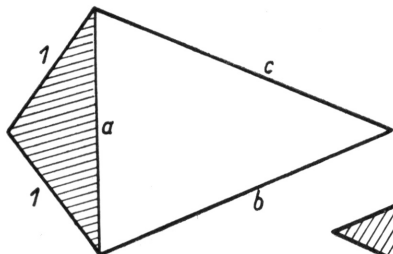


Obr. 11

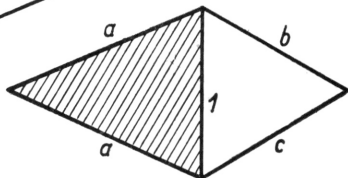
dokázat existenci čtyřstěnu, což je ryze stereometrická úvaha; užije se tu otáčení bodu X kolem osy o , bod X vyplní kružnici k se středem S a poloměrem $\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$ a na ní leží vrchol V čtyřstěnu ve vzdálenosti $MV = 1$. Obdobně se postupuje v případě b): Zde je však třeba rozlišit dvě možnosti (viz obr. 12). Předpokládáme $a > 1$, neboť případ, kdy všechny stěny jsou rovnostranné trojúhelníky, je zahrnut v a): A) $b = c = 1$, B) $b = a$,

*) Vysvětlíme si i termín „nejkratší“: znamená to, že žádná jiná hrana nemá *menší* délku.

$c = a^2$. Příklad B) se přivede ke sporu ($a = 1 \wedge a > 1$), případ A) dá čtyřstěn, jehož síť tvoří čtyři shodné tupohlé rovnoramenné trojúhelníky. V případě A) je ovšem také třeba dokázat existenci čtyřstěnu jako v odst. a).



Obr. 12



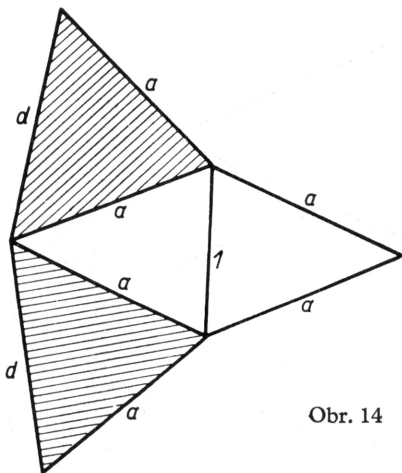
Obr. 13

ŘEŠENÍ. Rozlišíme dva typy čtyřstěnů: I. Nejkratší hrana je základnou některé stěny (tj. rovnoramenného trojúhelníka); II. nejkratší hrana je ramenem některé stěny.

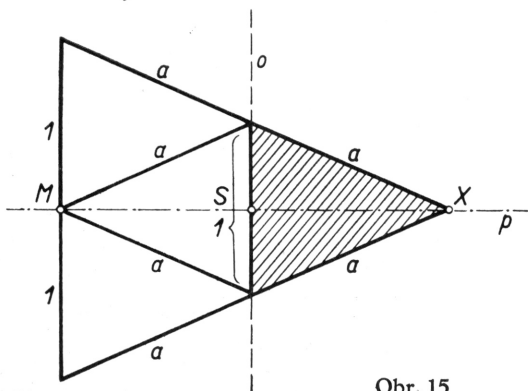
Ad I. Stěna, která je rovnoramenným trojúhelníkem se základnou délky 1, nechť má rameno délky a ; podle textu úlohy je $a \geq 1$. Začneme rýsovat síť čtyřstěnu (obr. 13). Vycházíme z vyšrafované stěny a k ní připojíme trojúhelník o stranách délek 1, b , c . Tento nevyšrafovaný trojúhelník má buď za základnu základnu vyšrafovaného trojúhelníka, a pak je vzhledem k jejich podobnosti $b = c = a$, nebo má za základnu např. stranu c , a pak je $\frac{1}{c} = \frac{b}{c} = \frac{a}{1}$. Odtud plyne $b = 1$, $c = \frac{1}{a} \leq 1$.

Protože nejkratší hrana má délku 1, je $c = 1$, $a = 1$ a oba trojúhelníky z obr. 13 jsou tedy opět rovnoramenné se

společnou základnou délky 1; vzhledem k své podobnosti jsou shodné (obr. 14). Připojíme další dva trojúhelníky (vyšrafované) o stranách délek a, a, d . Vzhledem k podobnosti všech stěn je $d = 1$ a definitivní tvar sítě je na obr.15.



Obr. 14



Obr. 15

Existenci čtyřstěnu, jehož síť je na obr. 15, dokážeme pro $a \geq 1$ snadno. Otáčíme-li vyšrafovaný trojúhelník kolem osy o , opisuje bod X kružnici k , která leží v rovině kolmé k nákresně a vedené přímkou p , která má střed S a poloměr $r = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$. Na kružnici k leží dva body, které mají od bodu M vzdálenost 1, neboť platí

$$1 < \sqrt{3} \leq \sqrt{4a^2 - 1} = 2 \cdot \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}},$$

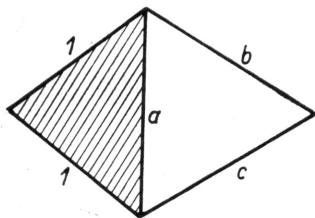
což je průměr kružnice k . Tyto dva body jsou vrcholy hledaných čtyřstěnů.

Ad II. Stěna, která je rovnoramenným trojúhelníkem, má ramena délky 1 a základnu délky a , pro kterou platí

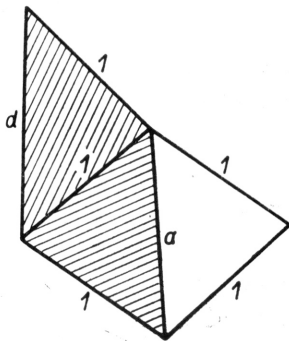
$$1 < a < 2 \quad (1)$$

(nerovnost $a < 2$ plyne z trojúhelníkové nerovnosti). Jako v případě I. začneme sestavovat síť (obr. 16). Buď je strana délky a základnou nevyšrafovaného trojúhelníka, a pak je $b = c = 1$ (případ A), nebo je např. strana c základnou nevyšrafovaného trojúhelníka, a pak je $b = a$, $c = a^2$ (případ B).

V případě A pokračujeme dále podle obr. 17. Vzhledem



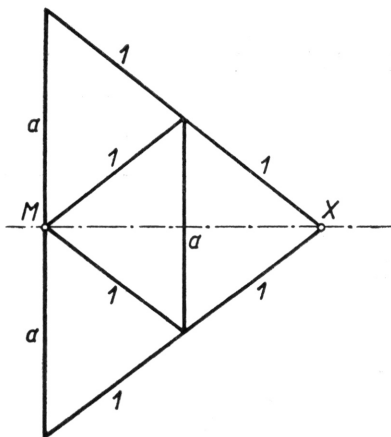
Obr. 16



Obr. 17

k podobnosti obou vyšrafovaných trojúhelníků je $d = a$ a definitivní tvar sítě ukazuje obr. 18.

Existenci čtyřstěnu, jehož síť je na obr. 18, vyšetříme jako v případě I. Čtyřstěn vznikne právě tehdy, leží-li



Obr. 18

na kružnici k sestrojené nad průměrem MX bod Y , pro který platí $MY = a$, tj. platí-li

$$a < 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{4 - a^2}. \quad (2)$$

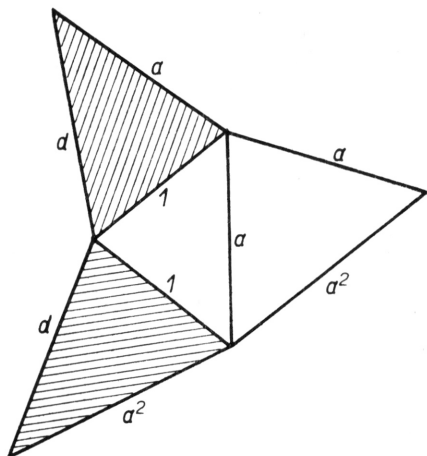
Úpravou nerovnice (2) je

$$1 < a < \sqrt{2}, \quad (3)$$

což je zúžení podmínky 1.

Případ B. Doplníme začátek sítě z obr. 16. Žádný z vyšrafovaných trojúhelníků na obr. 19 nemůže mít základnu 1 (jinak by měl vzhledem k podobnosti stěn

rameno délky $r < 1$, což není možné, protože nejkratší hrana má délku 1). Proto je $d = 1$, $a^2 = d = 1$, tj. $a = 1$; to je však ve sporu s předpokladem $a > 1$. Příklad B nemůže tedy nastat.



Obr. 19

ZÁVĚR. Existuje jen jediný typ hledaných čtyřstěnů. Jeho síť je na obr. 15, kde je $a \geq 1$, nebo na obr. 18, kde je $1 < a < \sqrt{2}$. V obou případech jsou všechny čtyři stěny čtyřstěnu shodné trojúhelníky.

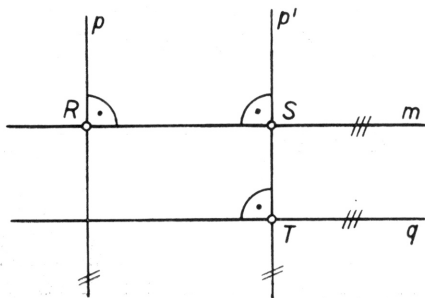
6. V rovině jsou dány dvě navzájem kolmé přímky p, q a bod S , který neleží na žádné z nich. K libovolnému trojúhelníku ABC sestrojíme trojúhelník $A_1B_1C_1$ s ním sdružený podle přímky p , k trojúhelníku $A_1B_1C_1$ sestrojíme trojúhelník $A_2B_2C_2$ s ním sdružený podle středu S a k trojúhelníku $A_2B_2C_2$ trojúhelník s ním sdružený

podle přímky q . Dokažte, že trojúhelník $A_3B_3C_3$ můžeme dostat posunutím trojúhelníka ABC .

KOMENTÁŘ. Úloha je snadným příkladem na skládání zobrazení. Impuls: V podstatě lze postupovat dvojím způsobem: 1. „ryze geometricky“ tak, že rozložíme souměrnost podle středu S ve dvě souměrnosti podle os rovnoběžných s přímkami p, q ; 2. *analyticky* — metodou souřadnic — tak, že zvolíme přímky p, q za osy souřadnic, vyjádříme analyticky všechna tři zobrazení a jejich složení provedeme výpočtem. Při prvním způsobu řešení je třeba dokázat rozklad středové souměrnosti ve dvě osové souměrnosti s osami navzájem kolmými. Tato věta a věta o skládání dvou souměrností s rovnoběžnými osami v translaci je vám snad známa. Je ovšem také třeba zdůraznit, že obráceně složením každých dvou souměrností s navzájem kolmými osami vznikne souměrnost podle středu. Pak už jde řešení hladce. Metoda souřadnic (p je osa y, q je osa x) vede k tomuto analytickému vyjádření souměrnosti:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_0, & y_1 &= y_0; & x_2 &= 2k - x_1, & y_2 &= 2m - y_1; \\ & & & & x_3 &= x_2, & y_3 &= -y_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Přitom $x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ jsou *proměnné* souřadnice vzorů a obrazů; k, m jsou *konstantní* souřadnice bodu

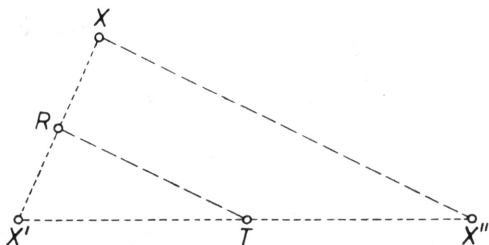


Obr. 20

S . Složením všech tří zobrazení (postupným dosazením v (8)) vyjde $x_3 = x_0 + 2k$, $y_3 = y_0 - 2m$, což je analytické vyjádření posunutí čili vektoru $(2k; -2m)$.

ŘEŠENÍ. a) Souměrnost podle středu S se dá složit ze souměrnosti podle přímky m kolmé k p vedené bodem S a přímkou p' rovnoběžné s p vedené bodem S (obr. 20). Ale souměrnosti podle přímek p , m navzájem kolmých skládají souměrnost podle středu R , který je průsečíkem přímek p , m . Souměrnost podle přímky p' a souměrnost podle přímky q ($p' \perp q$) však skládají souměrnost podle středu T , který je průsečíkem přímek p , q .

b) Trojúhelník $A_3B_3C_3$ můžeme tedy sestavit takto: Sestrojíme nejprve trojúhelník $A'B'C'$ souměrně sdružený s trojúhelníkem ABC podle středu R a pak trojúhelník $A''B''C''$ souměrně sdružený s $\triangle A'B'C'$ podle středu T ; zřejmě trojúhelníky $A''B''C''$ a $A_3B_3C_3$ splynou.



Obr. 21

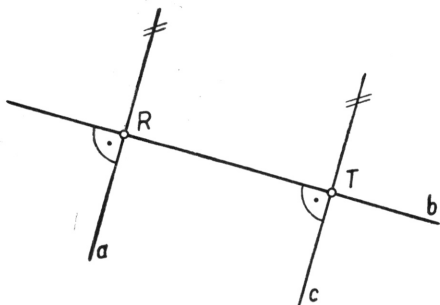
Je-li X' bod souměrně sdružený s libovolným bodem X podle středu R a X'' bod souměrně sdružený s X' podle středu T , vznikne X'' posunutím bodu X ve směru RT , ve smyslu RT ; velikost posunutí XX'' je $2RT$. Toto tvrzení je zřejmé z vlastnosti střední příčky trojúhelníka $XX'X''$, jak ukazuje obr. 21, ale dá se snadno dokázat

i v případě, že body R, T, X, X', X'' leží v přímce (viz např. obr. 22, $XX'' = XX' + X'X'' = 2RX' + 2TX' =$



Obr. 22

$= 2RT$). Jinak se dá toto tvrzení dokázat rozložením souměrností podle středů R, T v souměrnosti podle os a, b, c (viz obr. 23).



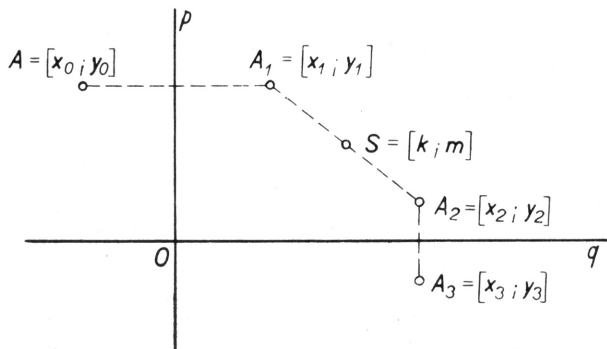
Obr. 23

JINÉ ŘEŠENÍ. Zvolme p, q přímky za osy kartézských souřadnic. Bod S necht' má souřadnice $[k, m]$, bod A souřadnice $[x, y]$, bod A_1 souřadnice $[x_1; y_1]$, bod A_2 souřadnice $[x_2; y_2]$, bod A_3 souřadnice $[x_3; y_3]$ (obr. 24). Podle formule pro souřadnice středu úsečky je $x_1 = -x_0$, $y_1 = y_0$; $x_2 = 2k - x_1$, $y_2 = 2m - y_1$; $x_3 = x_2$, $y_3 = -y_2$. Postupným dosazením dostaneme

$$x_3 = x_0 + 2k, \quad y_3 = y_0 - 2m.$$

Bod A_3 vznikne z A posunutím daným počátkem souřad-

nic a bodem $[2k, -2m]$. Totéž platí pro body B_3 , B a C_3 , C .



Obr. 24

3. KOMENTÁŘE A ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE Z

1. Je dán zlomek

$$V = \frac{a^2 - ab - ac + bc}{a^3 - a^2b - a^2c - a^2d + abc + abd + acd - bcd}.$$

Určete, pro která čísla a, b, c, d

- ztrácí tento zlomek smysl, a pak ho zkratíte;
- je daný zlomek rovný nule;
- je daný zlomek kladný, popř. záporný.

KOMENTÁŘ. První soutěžní úloha je typická rutinní úloha. První její otázka se týká určení tzv. maximálního definičního oboru dané funkce V o čtyřech proměnných a zjednodušení dané funkce; je to úloha na **postupné vytýkání**. Připomeňme si, že každý zápis rovnosti dvou výrazů s *proměnnými* je třeba doplnit údajem, pro které

hodnoty proměnných rovnost platí (jde tedy vlastně o rovnici); např.

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad \text{pro všechna } x \neq 1.$$

Postupné vytýkání připomene třeba ukázka:

$$\begin{aligned} a^2 + ab - ac - bc &= a(a + b) - c(a + b) = \\ &= (a + b)(a - c). \end{aligned} \quad (1)$$

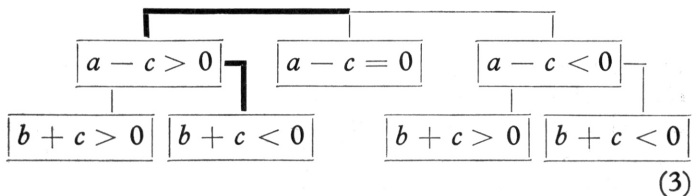
Vztah (1) platí pro všechna reálná čísla a, b, c .

Úlohy b) a c) se mohou řešit současně. Jde přitom o užití vět: Součin (podíl) je kladný, právě když oba činitele (dělenec a dělitel) jsou oba čísla kladná nebo oba čísla záporná — a obdobných dalších vět. Připomeňme si, že zde zlomková čára je znakem pro dělení — nejde o zlomky ve smyslu aritmetickém (uspořádané dvojice celých čísel), neboť a, b, c, d mohou být racionální a iracionální.

Podnětná ukázka pro vyšetřování je tato:

$$V = \frac{a^2 + ab - ac - bc}{ab + b^2 + ac + bc} = \frac{(a - c)(a + b)}{(b + c)(a + b)} = \frac{a - c}{b + c}. \quad (2)$$

Vztah (2) platí právě když $b \neq -c$, $a \neq -b$. Při vyšetřování, zda $V > 0$, $V = 0$, $V < 0$, tedy předpokládáme, že jsou tyto podmínky splněny, a užijeme schématu zvaného **strom**:



Ve schématu (3) je tlustě zakreslena jedna z pěti možných cest. Zkoumání zapíšeme přehledně takto:

- $a - c > 0, b + c > 0$ $V > 0$
- $a - c > 0, b + c < 0$ $V < 0$
- $a - c = 0$ $V = 0$
- $a - c < 0, b + c > 0$ $V < 0$
- $a - c < 0, b + c < 0$ $V > 0$

ŘEŠENÍ. Čitatele i jmenovatele daného zlomku vhodným vytýkáním rozložíme v činitele:

$$a^2 - ab - ac + bc = a(a - b) - c(a - b) = (a - b) \cdot (a - c)$$

$$\begin{aligned} a^3 - a^2b - a^2c - a^2d + abc + abd + acd - bcd &= \\ = a^3 - a^2b - a^2c + abc - a^2d + abd + acd - bcd &= \\ = a^2(a - b) - ac(a - b) - ad(a - b) + cd(a - b) &= \\ = (a - b)[a^2 - ac - ad + cd] = (a - b)[a(a - c) - & \\ - d(a - c)] = (a - b)(a - c)(a - d) . \end{aligned}$$

Pro zlomek V tedy platí

$$V = \frac{(a - b)(a - c)}{(a - b)(a - c)(a - d)},$$

takže má smysl pro všechna taková čísla a, b, c, d , pro která je jmenovatel různý od nuly, tj. a musí být různé od každého z čísel b, c, d .

Za tohoto předpokladu lze daný zlomek V psát ve tvaru

$$V = \frac{1}{a - d}.$$

Odtud vidíme, že daný zlomek se nikdy nerovná nule; v případě $a > d$ je kladný, v případě $a < d$ záporný.

2. Hrací kostka má tvar krychle; její stěny jsou označeny oky v počtu 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, že součet počtu ok na dvou protějších stěnách je vždy týž.

K hrací kostce přilepíme další dvě stejné hrací kostky z téhož materiálu vždy celými stěnami. Jak kostky slepit a pak slepenec položit na stůl aspoň jednou stěnou tak, aby počet viditelných ok byl a) maximální; b) minimální?

(Za viditelné považujeme všechny stěny slepence, které nepřiléhají ke stolu.)

KOMENTÁŘ. Druhá úloha nepotřebuje téměř žádné matematické znalosti; je snadnou kombinací představivosti, jednoduchých úsudků, např. systematického výčtu všech možností apod. Je možno ji uvést jednodušší obměnou (dvě hrací kostky) a případ tří kostek řešit jako druhý.

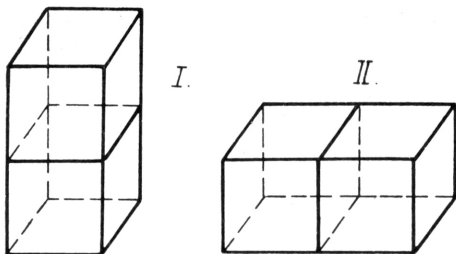
Postup řešení se skládá asi z těchto částí:

zjištění, že součet počtů ok na dvou protějších stěnách je $7[1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, 21 : 3 = 7]$;

zjištění tvarů všech možných slepenců a jejich postavení;

rozřídění dvojic stěn krychle slepence na dvojice, kde vidíme

- α) obě stěny,
- β) jedinou stěnu,
- γ) žádnou stěnu.



Obr. 25

Úvodní úlohu s dvěma hracími kostkami řešíme takto: O součtu viditelných ok rozhodují jen dvojice stěn α , β . Dvě krychle tvoří vždy slepenec tvaru pravidelného hranolu čtyřbokého. Je-li kvádr položen na jednom čtverci, existují čtyři dvojice čtverců druhu α a jediný čtverec druhu β , je-li kvádr položen na dvou čtvercích, jsou čtyři čtverce druhu β . Celkem jsou tedy možné tyto případy (obr. 25):

	Počet dvojic stěn α	Součet ok	Počet dvojic stěn β	Součet ok
I. Kvádr spočívá na jednom čtverci	4	28	1	x
II. Kvádr spočívá na dvou čtvercích	2	14	4	y

Snadno zjistíme meze pro x a y . Je totiž $1 \leq x \leq 6$, $6 \leq y \leq 22$; viditelné stěny obsahují totiž v případě II **aspoň** $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6$ ok a **nejvýše** $2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 22$ ok. Pro celkový součet ok tedy platí:

v případě I

$$29 \leq 28 + x \leq 34, \quad (1)$$

v případě II

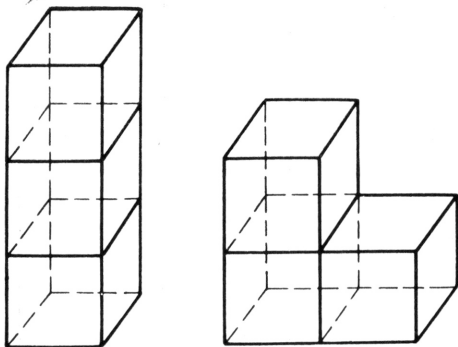
$$20 \leq 14 + y \leq 36. \quad (2)$$

Z nerovnic (1) a (2) vyplývá, že minima i maxima dosáhneme v případě II; počty ok jsou 20 a 36.

Je samozřejmé, že nemusíme zapisovat odhady nerovnicemi (1) a (2), ale můžeme prostě v každém z případů I, II stanovit výpočtem horní a dolní mez počtu viditelných ok.

V případě tří kostek vzniknou **dva tvary** slepenců (obr. 26), u každého z nich je třeba uvážit různé jeho polohy.

ŘEŠENÍ. Jsou možné dva různé tvary slepence a celkem pět možností, jak tyto útvary postavit na stůl;

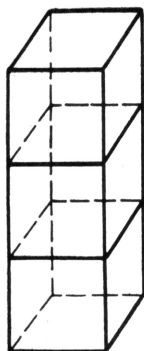


Obr. 26

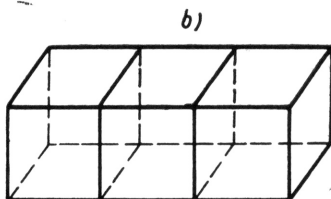
těchto pět možností je znázorněno na obr. 27. Prozkoumáme-li největší, resp. nejmenší možný počet viditelných ok u jednotlivých soustav, docházíme k závěru, že největší počet viditelných ok může být 52 (u sestavy podle obr. 27e) a nejmenší 26 (podle obr. 27d).

3. Je dán trojúhelník ABC o stranách $AB = 9$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 8$ cm. Vepište mu kružnici k a na kružnici k sestrojte všechny body X této vlastnosti: Přímka p rovnoběžná s AC vedená bodem X protíná strany AB , BC po řadě v takových bodech Y a Z , že X je středem úsečky YZ .

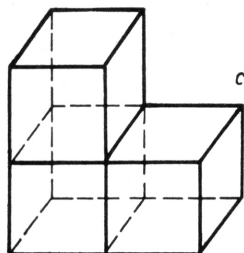
KOMENTÁŘ. Třetí úloha je snadná typová konstrukční úloha. Hledaný bod X náleží dvěma množinám bodů:



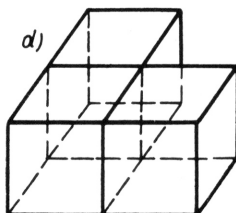
a)



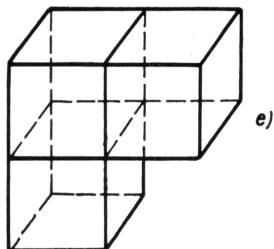
b)



c)



d)

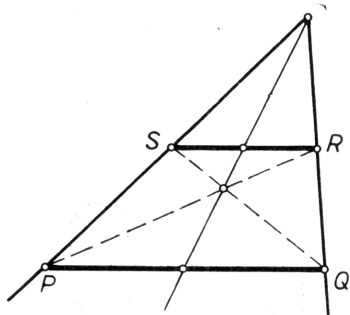


e)

Obr. 27

kružnici k a množině $\mathbf{M}$ středů všech úseček $YZ \parallel AC$, jejichž krajní body Y, Z leží po řadě na stranách AB, BC . Úvodem do této úlohy by mohlo být, že bychom kružnici k nahradili přímkou, úsečkou nebo jinou kružnicí. Takto obměněná úloha může být složitější než úloha soutěžní, neboť při diskusi se může objevit i případ s jediným řešením nebo případ neřešitelný. Naproti tomu soutěžní úloha má vždy právě dvě řešení, což je třeba ovšem dokázat.

Klíčem k řešení úlohy je vyšetření množiny $\mathbf{M}$. Experimentálně se zjistí, že $\mathbf{M}$

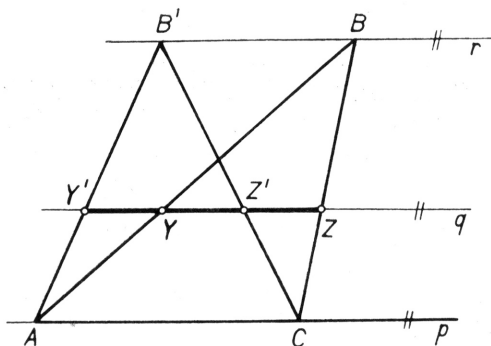


Obr. 28

je těžnice BB_0 , kde B_0 značí střed strany AC . Tento experimentálně zjištěný fakt se musí dokázat. Jde v podstatě o tzv. **harmonickou vlastnost lichoběžníka**: Je-li $PQRS$ lichoběžník se základnami PQ, RS , pak spojnice průsečíků $PR \cap QS$ a $PS \cap QR$ půlí každou z obou základů (obr. 28). Známe-

li tuto větu, můžeme z ní vyjít. Jinak si ji můžeme dokázat takto:

Harmonická vlastnost lichoběžníka se dokazuje obyčejně pomocí stejnolehlosti, ale je obecně známo, že každý důkaz opírající se o podobnost lze převést na důkaz založený na obsazích obrazců (trojúhelníků); tato druhá cesta je intuitivnější a přístupnější. V našem případě by mohla být východiskem věta o situaci načrtnutá na obr. 29. Zde jsou p, q, r tři rovnoběžky, $\triangle ACB'$ je rovno-ramenný se základnou AC . Pomocí obsahů nejprve dokážeme sporem, že platí



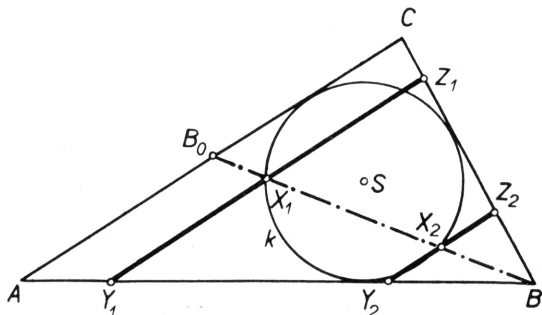
Obr. 29

$$YZ = Y'Z'. \quad (1)$$

Předpokládejme, že je např. $Y'Z' > YZ$; pak platí pro obsahy trojúhelníků a lichoběžníků:

$$\begin{aligned} \text{trapezoid } ACZY &< \text{trapezoid } ACZ'Y', \\ \triangle YZB &< \triangle Y'Z'B'. \end{aligned}$$

Sečtením předchozích vztahů vyplýne



Obr. 30

$$\triangle ACB < \triangle ACB',$$

což je ve sporu s předpokladem $r \parallel p$.

Nyní stačí na obr. 29 přikreslit body X, X' jako průsečíky přímky q a těžnic $BB_0, B'B_0$ (B_0 je střed strany AC). Použitím předchozí věty, tj. vztahu (1), dostaneme

$$XY = X'Y' = X'Z' = XZ.$$

ŘEŠENÍ (obr. 30). Množina středů všech úseček rovnoběžných se stranou AC , jejichž krajní body leží na stranách AB, BC , je vnitřek těžnice BB_0 a bod B_0 . Hledané body X jsou dva: jsou to průsečíky kružnice k s těžnicí BB_0 .

4. Jsou dány dva různé pravidelné šestiúhelníky $ABCDEF$ a $KLMNOP$, které mají společnou stranu ($A = K, B = L$).

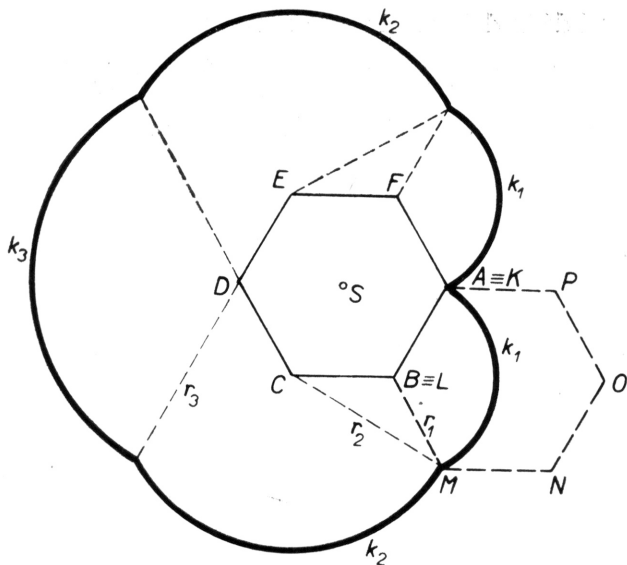
a) Určete dráhu, kterou opíše vrchol K šestiúhelníka $KLMNOP$, který se kotálí vně po obvodu šestiúhelníka $ABCDEF$.

b) Vypočtěte délku této dráhy.

KOMENTÁŘ. Čtvrtá úloha v podstatě nepotřebuje návod. Navazuje na přípravnou úlohu 3 kategorie Z. Je to konstrukčně početní úloha. Dráha bodu K se skládá z pěti oblouků kružnic tří různých poloměrů. Nanejvýš snad je třeba připomenout, že musíme určit středy i poloměry kružnic, po nichž se bod K pohybuje, a dále velikosti středových úhlů pro příslušné oblouky. Narýsujeme si opět šestiúhelník $ABCDEF$, vystříháme si z kreslicí čtvrtky šestiúhelník $KLMNOP$ a na tomto modelu si skutečně provedeme kotálení druhého šestiúhelníka.

ŘEŠENÍ. Dráha bodu K se skládá z pěti kružnicových oblouků, jak je naznačeno na obr. 31; k_1, k_2, k_3 značí

délky příslušných oblouků. Každému z pěti oblouků odpovídá středový úhel velikosti 120° . Označíme-li a



Obr. 31

délku strany daného šestiúhelníka, budou příslušné
poloměry

$$r_1 = a, \quad r_2 = a\sqrt{3}, \quad r_3 = 2a.$$

Je tedy

$$k_1 = \frac{2\pi r_1}{3} = \frac{2}{3}\pi a,$$

$$k_2 = \frac{2\pi r_2}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \pi a,$$

$$k_3 = \frac{2\pi r_3}{3} = \frac{4}{3}\pi a.$$

Celková délka dráhy bodu K je tedy

$$d = 2k_1 + 2k_2 + k_3 = \frac{4}{3}\pi a(2 + \sqrt{3}).$$

Je-li např. $a = 4$ cm, vychází $d \doteq 62,3$ cm.

IV. Súťažné úlohy II. kola

1. RIEŠENIA ÚLOH KATEGÓRIE A

1a. Nech $n > 1$ je prirodzené číslo, $a \geq 1$ reálne číslo a nech pre reálne čísla x_k , $k = 1, 2, \dots, n$ platí:

$$x_1 = 1, \quad \frac{x_{k+1}}{x_k} = a + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \quad (1)$$

pričom čísla α_k vyhovujú nerovnosti

$$|\alpha_k| \leq \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2)$$

Potom platí: $\sqrt[n-1]{x_n} < a + \frac{1}{n-1}$; dokážte.

(Použite známu nerovnosť: Pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla $b_1, b_2, \dots, b_m$ platí:

$$\sqrt[m]{b_1 b_2 \dots b_m} \leq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_m}{m}.) \quad (5 \text{ bodov})$$

RIEŠENIE. Z (1) jednoduchým výpočtom dostaneme

$$x_n = (a + \alpha_1) \dots (a + \alpha_{n-1}). \quad (3)$$

Keďže z (2) pre každé $k = 1, 2, \dots, n-1$ vyplýva

$$a + \alpha_k \geq 1 - \frac{1}{k(k+1)} > 0,$$

dostaneme z (3) na základe vety o geometrickom a arit-

metickom priemere

$$\begin{aligned} \sqrt[n-1]{x_n} &= \sqrt[n-1]{(a + \alpha_1) \dots (a + \alpha_{n-1})} \leq \\ &\leq \frac{(n-1)a + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k}{n-1} \end{aligned}$$

čiže

$$\sqrt[n-1]{x_n} \leq a + \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}}{n-1}. \quad (4)$$

Zrejme však platí

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

na základe čoho už zo (4) vyplýva nerovnosť, ktorej správnosť sme mali dokázať.

1b. Vyšetrite množinu všetkých bodů v rovině, jejichž pravouhlé souřadnice x, y splňují soustavu nerovnic

$$|x| < 2, \quad |y| < 2, \quad (1)$$

$$\cos \pi xy \leq 0, \quad (2)$$

$$\cos \pi(x^2 - y^2) \leq 0. \quad (3)$$

Načrtněte obrázek. (5 bodů)

ŘEŠENÍ. A) Množinou všech bodů, pro které je splněno (1), je vnitřek čtverce, který omezuje přímky

$$x = 2, \quad x = -2, \quad y = 2, \quad y = -2.$$

B) Z nerovnice (2) plyne

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \pi xy \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi,$$

tj.

$$2k + \frac{1}{2} \leq xy \leq 2k + \frac{3}{2},$$

kde k je celé číslo. Množinou všech bodů, pro které je splněno (2), jsou všechny body ležící mezi rovnoosými hyperbolami

$$xy = 2k + \frac{1}{2}, \quad xy = 2k + \frac{3}{2}, \quad k \text{ celé číslo}, \quad (4)$$

a na těchto hyperbolách.

C) Z nerovnice (3) plyne

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \pi(x^2 - y^2) \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi,$$

tj.

$$2k + \frac{1}{2} \leq x^2 - y^2 \leq 2k + \frac{3}{2},$$

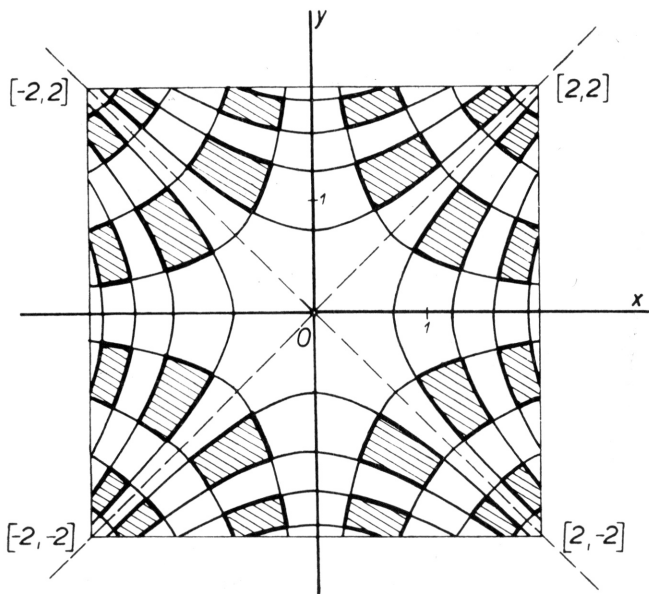
kde k je celé číslo. Množinou všech bodů, pro které je splněno (3), jsou všechny body ležící mezi rovnoosými hyperbolami

$$x^2 - y^2 = 2k + \frac{1}{2}, \quad x^2 - y^2 = 2k + \frac{3}{2}, \quad k \text{ celé číslo}, \quad (5)$$

a na těchto hyperbolách.

D) Hledaná množina je průnikem množin nalezených v A), B), C). Na obr. 32 je vyšrafována. Při určování tohoto průniku stačí v případě B) uvažovat jen body mezi hyperbolami (4) a na nich pro

$k = -2, -1, 0, 1$, neboť pro $k \geq 2$ ($k \leq -3$) platí



Obr. 32

$xy \geq \frac{9}{2} \left(xy \leq -\frac{9}{2} \right)$, takže je $|x| > 2$ nebo $|y| > 2$.

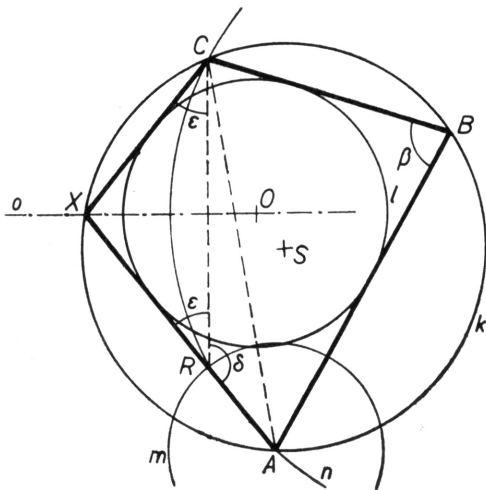
Podobně v případě C) stačí uvažovat jen body mezi hyperbolami (5) a na nich pro $k = -2, -1, 0, 1$, neboť pro $k \geq 2$ ($k \leq -3$) je $x^2 - y^2 \geq \frac{9}{2} \left(x^2 - y^2 \leq -\frac{9}{2} \right)$, takže $|x| > 2$ nebo $|y| > 2$.

2a. Je dán $\triangle ABC$. Sestrojte všechny takové body X , které mají tu vlastnost, že čtyřúhelníku s vrcholy A, B, C ,

X lze opsat i vepsat kružnici. Konstrukci proveďte eukleidovsky (tj. kružítkem a pravítkem).

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Rozbor (obr. 33). Budiž k kružnice opsaná $\triangle ABC$. Hledané body X potom leží na k . Necht' čtyřúhelník $ABCX$, jehož vrchol X leží uvnitř oblouku AC



Obr. 33

neobsahující bod B , splňuje podmínky úlohy. Protože jde o čtyřúhelník tečnový, platí

$$AB + CX = BC + AX$$

čili

$$AB - BC = AX - CX = d, \quad (1)$$

což je konstanta.

a) Jestliže

$$AB = BC,$$

je

$$AX - CX = 0,$$

tj. bod X leží na ose úsečky AC . V případě a) je tedy KONSTRUKCE bodu X jednoduchá: Bod X je průsečíkem osy úsečky AC s vyšetřovaným obloukem AC , a to zřejmě vždy jediným.

b) Necht' např. $AB > BC$, potom body X , pro něž platí (1), leží na té větvi hyperboly s ohnisky A, C a s hlavní osou d , která obsahuje bod B . Určení průsečíku příslušné větve hyperboly s uvažovaným obloukem by byla *jen přibližná* konstrukce.

Bod X je však vrcholem trojúhelníka ACX daného stranou AC , úhlem $\sphericalangle AXC = 180^\circ - \beta$ a rozdílem stran $AX - CX = d$. Tuto *pomocnou úlohu* vyřešíme nejprve:

Předpokládejme, že trojúhelník ACX na obr. 33 je řešením této pomocné úlohy. Rozdíl $AX - CX = d$ sestrojíme jako úsečku $AR = AX - XC$. Potom trojúhelník RCX je rovnoramenný; jeho úhly při základně

RC mají velikost $\varepsilon = \frac{1}{2} [180^\circ - (180^\circ - \beta)] = \frac{1}{2} \beta$.

Potom úhel $\sphericalangle CRA = \delta = 180^\circ - \frac{1}{2} \beta$ je tupý, úsečka

$AR = AX - CX$ je menší než AC (z trojúhelníka ACX). Je tedy bod R sestrojitelný podle S_{su} v pomocném obrázku nebo jako průsečík kružnice $m = (A; d)$ a men-

šího oblouku příslušného úhlu $\delta = 180^\circ - \frac{1}{2} \beta$ nad

tětivou AC , který leží v polorovině opačné k polorovině ACB . Bod X je pak společným bodem uvažovaného oblouku AC a osy o úsečky RC . Z toho vyplývá KONSTRUKCE:

1. Sestrojíme kružnici k opsanou $\triangle ABC$.
2. Sestrojíme kružnici $m = (A; d)$ a oblouk n příslušný úhlu δ (viz rozbor).
3. $R = m \cap n$ v polorovině opačné k polorovině ACB .
4. Sestrojíme osu o úsečky CR .
5. $X = o \cap \widehat{AC}$ (na k v polorovině opačné k ACB).
6. $ABCX$ je hledaný čtyřúhelník.

ZKOUŠKA. Obrácením výpočtu z rozboru vyplývá, že $\sphericalangle AXC = 180^\circ - \beta$ a tedy $ABCX$ je tětíkový čtyřúhelník. Podle konstrukce je $AB - CB = d = AR = AX - CX$, a tedy $AB + CX = AX + CB$, čili $ABCX$ je tečnový čtyřúhelník.

DISKUSE. V uvedené konstrukci má každý krok právě jeden výsledek, takže na uvažovaném oblouku dostaneme jediný bod X . Obdobnou konstrukcí i pro zbývající oblouky AB a BC dostaneme po jednom bodu X . Celkem má tedy úloha tři řešení.

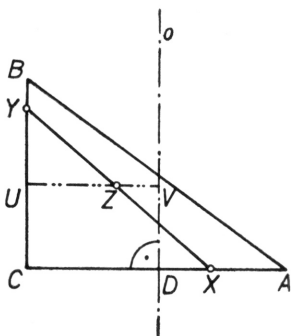
Obdobně tři řešení dostaneme i v případě a).

2b. Je daný pravouhlý trojúhelník ABC s preponou AB . Na odvesne AC zvolme bod X , na odvesne BC zvolme bod Y . V rovine ABC zostrojme kružnicu s priemerom XY .

Určite množinu $\mathbf{P}$ všetkých bodov všetkých takto zostrojených kružníc. (6 bodov)

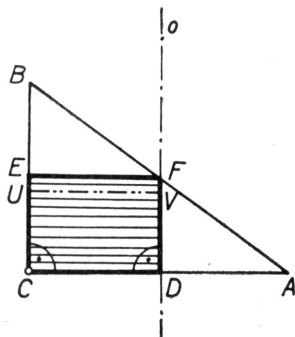
RIEŠENIE. I. Označme $\mathbf{K}$ množinu všetkých kružníc roviny ABC , ktoré boli zostrojené podľa textu úlohy. Dokážeme, že množina stredov všetkých kružníc z $\mathbf{K}$ je pravouholník $CDFE$ bez bodu C , pričom D, E, F sú v uvedenom poradí stredy strán AC, BC, AB (obr. 34a, b).

Skutočne, ak je Y pevný bod odvesny BC a ak prebieha X odvesnu AC , prebieha stred Z úsečky XY úsečku



a)

Obr. 34



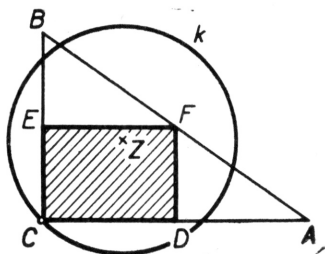
b)

$UV \parallel AC$, kde U je bod odvesny BC , V bod osi o úsečky AC . Ak je $Y = C$, je treba vylúčiť prípad $X = C$. Ku každému bodu Y odvesny BC je teda priradená jediná úsečka UV (obr. 34a) a všetky tieto úsečky UV vyplnia pravouholník $CDFE$ bez bodu C . Túto skutočnosť možno jednoducho dokázať tiež metódou súradníc, ak zvolíme za súradnicové osi kartézskej sústavy súradníc priamky AC , BC .

II. Stredom každej kružnice k z $\mathbf{K}$ je teda nejaký bod Z z pravouholníka $CDFE$ (mimo C) a pre jej polomer CZ platí (obr. 35)

$$CZ \leqslant BZ, \quad CZ \leqslant AZ,$$

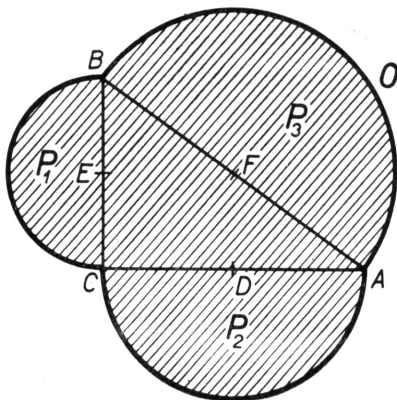
pretože priamky DF , EF sú v uvedenom poradí osi strán AC , BC . Preto kružnica k pretína úsečku AC i BC (pokiaľ sa priamok AC alebo BC v bode C nedotýka) okrem bodu C ešte v jej



Obr. 35

vnútornom bode. Analogické tvrdenie platí pre jej priesečníky s preponou AB , ak ovšem existujú.

Intuitívne zistíme: Hľadanou množinou $\mathbf{P}$ je obrazec $\mathbf{O}$, ktorý sa skladá z trojuholníka ABC a z troch polkruhov zostrojených nad priermi AB , AC , BC (obr. 36). Tieto polkruhy sú ohraňované kružnicami z $\mathbf{K}$, ktoré

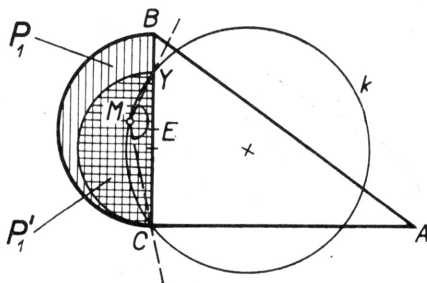


Obr. 36

majú stredy v bodoch D , E , F . Dokážeme teraz, že každý bod každej kružnice k z $\mathbf{K}$ patrí do obrazca $\mathbf{O}$. Ak kružnica k neleží v $\triangle ABC$, potom tá jej časť, ktorá leží napr. v polkruhu $\mathbf{P}_1$ (obr. 37), je polkružnica alebo menší oblúk nad tetivou CY , ktorá je časťou príslušnej strany trojuholníka ABC , t. j. odvesny BC . Ak je M ľubovoľný bod tohto oblúka kružnice k , je $\sphericalangle CMY$ pravý alebo tupý a patrí preto do polkruhu $\mathbf{P}_1'$ zostrojeného nad priemerom CY a teda aj do polkruhu $\mathbf{P}_1$. Analogická úvaha platí pre polkruhy $\mathbf{P}_2$ a $\mathbf{P}_3$.

III. Zostáva dokázať, že každý bod M obrazca $\mathbf{O}$ patrí

aspoň jednej kružnici k z $\mathbf{K}$, t. j. kružnici, ktorá prechádza bodom C a jej stredom je niektorý bod Z pravouholníka $CDEF$ (okrem bodu C). K tomu stačí dokázať, že os p úsečky CM (predpokladáme $C \neq M$), má s pra-



Obr. 37

vouholníkom $CDEF$ aspoň jeden spoločný bod Z . Pre hraničné body obrazca $\mathbf{O}$ nie je treba nič dokazovať. Pre každý iný bod M polkruhu $\mathbf{P}_3$ a $\triangle ABC$ (ktorý leží v doplnkovom polkruhu) platí $MF < CF$. Preto medzi bodmi C, F leží aspoň jeden bod osi p .*) Os p obsahuje teda vždy aspoň jeden bod pravouholníka $CDFE$.

ZÁVER. Hľadaná množina $\mathbf{P}$ je množina všetkých bodov obrazca $\mathbf{O}$ (pozri obr. 36).

POZNÁMKA. Nie je výhodné riešiť túto úlohu metódou súradníc, pretože výsledný obrazec nemá v súradniciach jednoduché vyjadrenie.

3a. Mějme posloupnost celých čísel

*) Analogicky pre každý nehraničný bod polkruhu $\mathbf{P}_1$ ($\mathbf{P}_2$) platí $ME < CE$ ($MD < DC$) a preto medzi bodmi C, E (C, D) leží aspoň jeden bod osi p .

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \quad (1)$$

v níž pro všechna $n \geq 1$ platí

$$a_{n+1} + a_{n-1} = a_1 a_n. \quad (2)$$

a) Může být taková posloupnost posloupností aritmetickou?

b) Určete nutné a postačující podmínky pro to, aby v takové posloupnosti platilo

$$a_{n+k} + a_{n-k} = a_k a_n \quad (3)$$

pro všechna $n, k, n \geq k \geq 0$.

c) Jestliže $a_0 = 2$, pak existuje komplexní číslo z takové, že pro všechna $n \geq 0$ je

$$a_n = z^n + z^{-n}; \quad (4)$$

dokažte.

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. a) Ano, může. Např. posloupnost (1), ve které je $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 0$, je aritmetická (s diferencí 0) a vyhovuje (2). Kromě toho také všechny posloupnosti (1) splňující (2), v nichž je $a_1 = 2$, jsou aritmetické, jak je ihned vidět, napíšeme-li (2) ve tvaru

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}.$$

POZNÁMKA. Lze dokázat, že toto jsou také všechny aritmetické posloupnosti vyhovující (2).

b) Vztah (3) platí pro všechna $n \geq k \geq 0$ právě tehdy, jestliže je buď $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 0$, anebo $a_0 = 2$.

DŮKAZ. I. Jestliže je $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 0$, platí (3) triviálně.

II. Nechť $a_0 = 2$. Potom (3) platí pro všechna $n \geq 0$ a $k = 0$. Pro $k = 1$ je však (3) totéž co (2). Obecnou platnost (3) dokážeme nyní indukcí. Předpokládejme, že (3)

platí pro $k = 0, 1, \dots, m$, kde $m \geq 1$, a dokážeme, že platí také pro $k = m + 1$. Jest

$$\begin{aligned} a_{n+m+1} + a_{n-m-1} &= a_{n+m+1} + a_{n+m-1} - a_{n+m-1} + \\ &+ a_{n-m-1} + a_{n-m+1} - a_{n-m+1} = \\ &= (a_{n+m+1} + a_{n+m-1}) + (a_{n-m-1} + a_{n-m+1}) - \\ &- (a_{n+m-1} + a_{n-m+1}). \end{aligned}$$

Na první dvě závorky aplikujeme (2), na třetí závorku pak (3) pro $k = m - 1$.

Dostaneme

$$a_1 a_{n+m} + a_1 a_{n-m} - a_{m-1} a_n = a_1 (a_{n+m} + a_{n-m}) - a_{m-1} a_n.$$

Znovu užijeme (3) pro $k = m$ a máme

$$a_1 a_n a_m - a_{m-1} a_n = a_n (a_1 a_m - a_{m-1}).$$

Avšak podle (2) je

$$a_1 a_m - a_{m-1} = a_{m+1},$$

takže celkem

$$a_{n+m+1} + a_{n-m-1} = a_{m+1} a_n,$$

což jsme měli dokázat. Vztah (3) tedy při $a_0 = 2$ platí pro všechna $n \geq k \geq 0$.

III. Nechť platí (3) pro všechna $n \geq k \geq 0$ a nechť není $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 0$. Budiž m takové, že $a_m \neq 0$. Položíme-li v (3) $n = m$, $k = 0$, dostaneme

$$2a_m = a_m + a_m = a_{m+0} + a_{m-0} = a_0 a_m,$$

a tedy nutně $a_0 = 2$.

c) Vezměme kvadratickou rovnici

$$x^2 - a_1 x + 1 = 0. \quad (5)$$

Součin jejích kořenů je roven 1, jejich součet je a_1 . Označme z jeden z těchto kořenů; druhý kořen bude pak z^{-1} a bude

$$z + z^{-1} = a_1.$$

Poněvadž pak zřejmě $z^0 = 1$, $(z^{-1})^0 = 1$, a tedy

$$z^0 + z^{-0} = 2 = a_0,$$

vidíme, že — při této volbě čísla z — platí (4) pro $n = 0, 1$. Indukcí dokážeme, že pak platí pro všechna $n \geq 0$. Předpokládejme, že (4) platí pro všechna $n = 0, 1, 2, \dots, m$; $m \geq 1$, a dokážeme, že platí i pro $n = m + 1$. Podle (2) máme

$$a_{m+1} = a_1 a_m - a_{m-1}$$

a tedy podle (4) pro $n = m$ a $n = m - 1$ jest

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= (z + z^{-1})(z^m + z^{-m}) - (z^{m-1} + z^{1-m}) = \\ &= z^{m+1} + z^{m-1} + z^{1-m} + z^{-m-1} - z^{m-1} - z^{1-m} = \\ &= z^{m+1} + z^{-m-1}, \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat. Platí tedy (4) pro všechna $n \geq 0$, jestliže za z zvolíme jeden (kterýkoli) kořen rovnice (5).

3b. Je daný štvorsten $ABCD$. Vo vnútri jeho steny ABC zvolte bod M a veďte ním priamky $MC_1 \parallel CD$, $MB_1 \parallel BD$, $MA_1 \parallel AD$, kde C_1 , B_1 , A_1 sú priesečníky s rovinami ABD , ACD , BCD .

a) Dokážte, že pre každý taký bod M platí

$$\frac{MA_1}{AD} + \frac{MB_1}{BD} + \frac{MC_1}{CD} = 1. \quad (1)$$

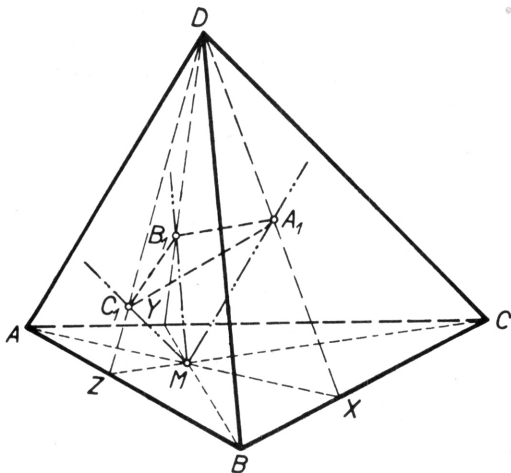
b) Vyjadrite pomer objemov štvorstenov $A_1B_1C_1M$ a $ABCD$ len pomocou veľkostí úsečiek AD , BD , CD , MA_1 , MB_1 , MC_1 .

c) Zistite, ako treba zvoliť bod M , aby objem štvorstena $A_1B_1C_1M$ bol maximálny. (7 bodov)

RIEŠENIE. Body A_1 , B_1 , C_1 ležia na priesečniciach rovín AMD a BCD , BMD a ACD , CMD a ABD .

(Pozri obr. 38.) Označme veľkosti úsečiek $MA_1 = a_1$, $MB_1 = b_1$, $MC_1 = c_1$, $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$.

a) Štvorsteny $MBCD$, $ABCD$ majú spoločnú podstavu



Obr. 38

a preto ich objemy sú v pomere veľkostí ich výšok, t. j.

$$\frac{\text{objem } MBCD}{\text{objem } ABCD} = \frac{a_1 \cdot \sin \varepsilon}{a \cdot \sin \varepsilon} = \frac{a_1}{a} \quad (2a)$$

kde ε je odchýlka AD a BCD . Pre štvorsteny $MACD$ a $MABD$ analogicky dostaneme

$$\frac{\text{objem } MACD}{\text{objem } ABCD} = \frac{b_1}{b}, \quad \frac{\text{objem } MABD}{\text{objem } ABCD} = \frac{c_1}{c}. \quad (2b, c)$$

Sčítaním rovností (2a, b, c) dostaneme

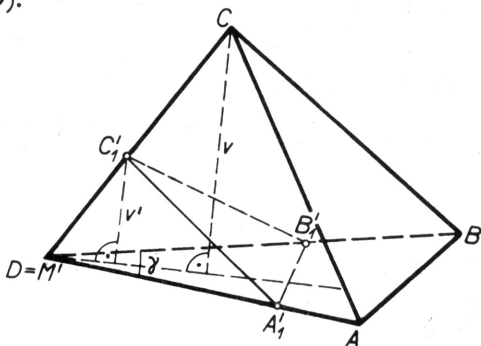
$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 1,$$

čo je už rovnosť (1).

b) Platí

$$\sphericalangle A_1MB_1 = \sphericalangle ADB = \gamma, \quad \sphericalangle A_1MC_1 = \sphericalangle ADC, \\ \sphericalangle C_1MB_1 = \sphericalangle CDB$$

a možno preto zostrojiť štvorsten $M'A'_1B'_1C'_1$ zhodný so štvorstenom $MA_1B_1C_1$, pričom $M' \equiv D$, A'_1 , B'_1 , C'_1 ležia v uvedenom poradí na polpriamkach DA , DB , DC (obr. 39).



Obr. 39

Nech v je výška štvorstena $ABCD$ z vrcholu C na stenu ABD a v' výška štvorstena $A'_1B'_1C'_1M'$ z vrcholu C'_1 na stenu $M'A'_1B'_1$. Potom

$$\frac{v'}{v} = \frac{c_1}{c}, \quad \text{t. j.} \quad v' = \frac{c_1}{c} \cdot v.$$

Objem V štvorstena $ABCD$ je

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} a \cdot b \sin \gamma \right) \cdot v,$$

objem V' štvorstena $A_1'B_1'C_1'M'$ a teda tiež štvorstena $A_1B_1C_1M$ je

$$V' = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} a_1 b_1 \sin \gamma \right) \cdot \frac{c_1}{c} \cdot v,$$

t. j.

$$\frac{V'}{V} = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a \cdot b \cdot c}.$$

c) Objem V' bude maximálny práve vtedy, keď bude maximálny súčin $\frac{a_1}{a} \cdot \frac{b_1}{b} \cdot \frac{c_1}{c}$. Keďže súčet všetkých troch faktorov sa rovná jednej, zo vzťahu medzi aritmetickým a geometrickým priemerom nezáporných čísel $\frac{a_1}{a}, \frac{b_1}{b}, \frac{c_1}{c}$ vyplýva nerovnosť $\frac{a_1}{a} \cdot \frac{b_1}{b} \cdot \frac{c_1}{c} \leq \frac{1}{27}$, takže

$$V' \leq \frac{1}{27} V,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{1}{3}$ čiže pre

$$\frac{MX}{AX} = \frac{MY}{BY} = \frac{MZ}{CZ} = \frac{1}{3}$$

(pozri obr. 38). Z rovnobežnosti úsečiek AB a XY so stredom rovnobežnosti M a koeficientom -2 vyplýva, že X, Y sú stredy strán BC, AC , takže bod M je ťažisko trojuholníka ABC .

ZÁVER. Objem V' štvorstena $A_1B_1C_1M$ je maximálny práve vtedy, keď bod M je ťažiskom trojuholníka ABC .

2. ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE B

1a. Necht p, q jsou prvočísla větší než 3. Potom číslo

$$p^2 + 7q^2 - 23 \quad (1)$$

není prvočíslem; dokažte.

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Dosadíme-li do výrazu (1) několik dvojic prvočísel p, q větších než 3, dostaneme vždy číslo větší než 3 a přitom dělitelné 3. Nabízí se nám domněnka, že pro každou dvojici prvočísel p, q větších než 3 je číslo (1) větší než 3 a dělitelné třemi. Dokážeme-li ji, znamená to, že číslo (1) není prvočíslo.

Pro $p > 3$ a $q > 3$ je číslo

$$p^2 + 7q^2 - 23 > 9 + 63 - 23 > 3. \quad (2)$$

Protože p, q jsou prvočísla větší než 3, není žádné z nich dělitelné 3, a proto je lze psát ve tvaru

$$p = 3k \pm 1, \quad q = 3l \pm 1,$$

kde p, q jsou vhodná přirozená čísla. Platí

$$\begin{aligned} p^2 + 7q^2 - 23 &= (3k \pm 1)^2 + 7(3l \pm 1)^2 - 23 = \\ &= (9k^2 \pm 6k + 1) + 7 \cdot (9l^2 \pm 6l + 1) - 23 = \\ &= 3 \cdot (3k^2 \pm 2k + 21l^2 \pm 14l - 5). \end{aligned} \quad (3)$$

Podle (2) a (3) tedy číslo (1) není prvočíslo.

JINÉ ŘEŠENÍ. Každé prvočíslo větší než 3 je tvaru $6k + 1$ nebo $6k - 1$. Necht tedy $p = 6k \pm 1, q = 6m \pm 1$. Potom číslo

$$\begin{aligned} p^2 + 7q^2 - 23 &= (36k^2 \pm 12k + 1) + \\ &+ 7 \cdot (36m^2 \pm 12m + 1) - 23 = \\ &= 12 \cdot (3k^2 \pm k + 21m^2 \pm 7m) - 15 \end{aligned}$$

je zřejmě dělitelné 3, a tedy vzhledem k (2) není prvočíslem.

1b. Sú dané štyri rôzne body A, B, C, D v priestore. Pre každý bod X priestoru platí

$$AX + BX + CX + DX > \frac{1}{3}(AB + AC + AD + BC + BD + CD).$$

Dokážte.

(5 bodov)

RIEŠENIE. Ak je X ľubovoľný bod priestoru, potom podľa trojuholníkovej nerovnosti platí:

$$AX + BX \geq AB, \quad (a)$$

$$AX + CX \geq AC, \quad (b)$$

$$AX + DX \geq AD, \quad (c)$$

$$BX + CX \geq BC, \quad (d)$$

$$BX + DX \geq BD, \quad (e)$$

$$CX + DX \geq CD. \quad (f)$$

Rovnosť v nerovnosti (a) nastáva práve vtedy, keď je X bodom úsečky AB a analogicky je tomu v ostatných prípadoch. Keďže body A, B, C, D sú podľa predpokladu navzájom rôzne, nemôže v nerovnostiach (a) – (f) nastať rovnosť vo všetkých súčasne. Ich sčítaním preto dostaneme

$$3(AX + BX + CX + DX) > AB + AC + AD + BC + BD + CD,$$

skadiaľ po vynásobení $\frac{1}{3}$ už dostávame nerovnosť, ktorej správnosť sme mali dokázať.

2a. Nech n je dané prirodzené číslo. Nájdite všetky skupiny siedmich za sebou nasledujúcich prirodzených čísel tej vlastnosti, že súčin všetkých čísel skupiny je menší než n^7 . (6 bodov)

RIEŠENIE. Súčin prvých siedmich prirodzených čísel za sebou nasledujúcich je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 =$

$= 5040$. Je zrejmé väčší než $2^7 = 128$ i ako $3^7 = 2187$, ale je menší než $4^7 = 16\,384$. Najmenším prirodzeným číslom n , pre ktoré má daná úloha riešenie, je teda číslo 4. Vzhľadom na to, že najbližší väčší súčin siedmich za sebou nasledujúcich prirodzených čísel je $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320 > 4^7$, je to aj riešenie jediné.

Ukážeme, že pre ľubovoľné prirodzené číslo $n > 4$ má daná úloha práve týchto $n - 3$ riešení:

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]; [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]; \dots [n - 3, n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2, n + 3]. \quad (1)$$

K tomu stačí, aby sme ukázali, že súčin všetkých čísel poslednej skupiny je menší než n^7 , ale súčin všetkých čísel skupiny

$$[n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4],$$

ktorá je nasledujúcou skupinou prichádzajúcou do úvahy, je už väčší než n^7 .

Platí však

$$\begin{aligned} (n - 3)(n + 3) &= n^2 - 9 < n^2, \\ (n - 2)(n + 2) &= n^2 - 4 < n^2, \\ (n - 1)(n + 1) &= n^2 - 1 < n^2, \\ n &= n; \end{aligned}$$

z čoho vynásobením ľavých a pravých strán nerovností, resp. rovností, dostaneme

$$(n - 3)(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3) < n^7.$$

Na druhej strane pre $n > 4$ platí:

$$\begin{aligned} (n - 2)(n + 4) &= n^2 + 2n - 8 > n^2, \\ (n - 1)(n + 3) &= n^2 + 2n - 3 > n^2, \\ (n + 2)(n + 1)n &= n^3 + 3n^2 + 2n > n^3; \end{aligned}$$

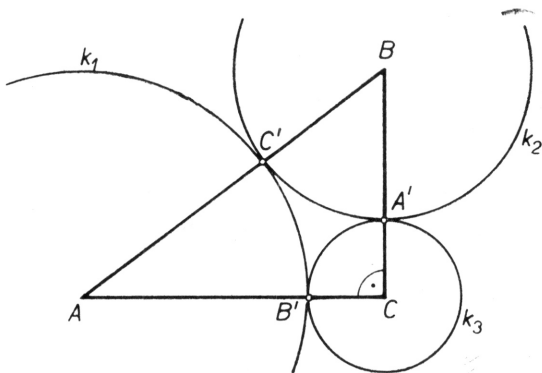
z čoho opäť vynásobením ľavých i pravých strán nerovností máme

$$(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4) > n^7.$$

ZÁVER. Úloha má pre $n \geq 4$ práve $n - 3$ riešení uvedených v (1). Pre $n \leq 3$ úloha riešenie nemá.

2b. Je dán pravoúhlý trojuholník ABC s odvesnami $AC = 4$, $BC = 3$. Kružnice k_1 , k_2 , k_3 majú stredy vo vrcholech A , B , C a každé dve z nich majú vonkajší dotyk.

- Vypočítajte polomery kružnic k_1 , k_2 , k_3 a sestrojte je.
- Vypočítajte polomer kružnice, ktorá má s každou z kružnic k_1 , k_2 , k_3 vonkajší dotyk. (6 bodů)



Obr. 40

ŘEŠENÍ. a) Označme r_1 , r_2 , r_3 poloměry kružnic k_1 , k_2 , k_3 . Pak je (obr. 40)

$$r_1 + r_2 = c, \quad r_2 + r_3 = a, \quad r_3 + r_1 = b. \quad (1)$$

Protože $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, dostaneme z (1)

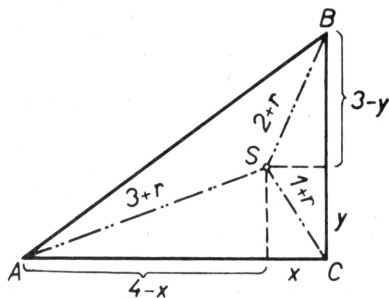
$$r_1 + r_2 = 5, \quad r_1 - r_2 = b - a = 1$$

a dále $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$. Kružnice k , která se dotýká obou odvěsen v bodech A' , B' (viz obr. 40), má poloměr $A'C = B'C = 1$. Poněvadž kružnice vepsaná trojúhelní-

ku ABC má také poloměr $\varrho = 1$ (obsah $\triangle ABC$ je $P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$, poloviční obvod je $s = \frac{1}{2}(3 + 4 + 5) = 6$, $\varrho = \frac{P}{s} = 1$) a dotýká se také obou odvěsen

v bodech A' , B' , je k kružnice vepsaná trojúhelníku ABC . Pomocí vepsané kružnice k sestrojíme tyto body dotyku A' , B' , C' kružnic k_1 , k_2 , k_3 .

b) Označme k_0 kružnici, která má s každou z kružnic k_1 , k_2 , k_3 vnější dotyk, S její střed, r její poloměr. Pak je podle obr. 41



Obr. 41

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (1 + r)^2, & (4 - x)^2 + y^2 &= (3 + r)^2, \\ (3 - y)^2 + x^2 &= (2 + r)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Po úpravě (dosazení za $x^2 + y^2$ z první rovnice (2))

$$x = 1 - \frac{r}{2}, \quad y = 1 - \frac{r}{3}. \quad (3)$$

Dosadíme-li nyní za x, y z (3) do první rovnice (2), vyjde po úpravě kvadratická rovnice pro r

$$23r^2 + 132r - 36 = 0. \quad (4)$$

Jediný kladný kořen rovnice (4) je

$$r = \frac{-132 + \sqrt{132^2 + 4 \cdot 36 \cdot 23}}{46} = \frac{6}{23}.$$

3a. V obore reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + xy = a^2 + ab, \quad (1)$$

$$y^2 + xy = a^2 - ab, \quad (2)$$

kde x, y sú neznáme, a, b reálne parametre. Urobte diskusiu. (7 bodov)

RIEŠENIE. Ak dvojica $[x, y]$ vyhovuje danej sústave, potom pre čísla x, y dostaneme sčítaním oboch rovníc

$$(x + y)^2 = 2a^2 \quad (3)$$

a odčítaním (2) od (1)

$$x^2 - y^2 = 2ab$$

čiže

$$(x - y)(x + y) = 2ab. \quad (4)$$

V prípade, keď $a \neq 0$, vyplýva zo (4) po umocnení na druhú a využití rovnosti (3)

$$(x - y)^2 = 2b^2. \quad (5)$$

Z (3), (4), (5) však po jednoduchej úprave dostaneme

$$(2x)^2 = [(x + y) + (x - y)]^2 = 2(a + b)^2, \text{ resp.}$$

$$(2y)^2 = [(x + y) - (x - y)]^2 = 2(a - b)^2, \text{ z čoho}$$

$$|x| = \frac{\sqrt{2}}{2} |a + b|, \quad (6)$$

$$|y| = \frac{\sqrt{2}}{2} |a - b|. \quad (7)$$

Zistili sme teda, že v prípade, keď $a \neq 0$, môžu danej sústave vyhovovať len tieto štyri dvojice reálnych čísel:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a + b); \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b) \right], \quad (8a)$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(a + b); \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b) \right], \quad (8b)$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a + b); -\frac{\sqrt{2}}{2}(a - b) \right], \quad (8c)$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b); -\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b) \right]. \quad (8d)$$

Dosadením sa presvedčíme, že sústave (1), (2) vyhovujú len dvojice (8a) a (8d), ktoré sú pre $a \neq 0$, navzájom rôzne. (Z rovnosti oboch dvojíc vyplýva totiž $a+b=0$, $a-b=0$ a stadiaľ priamo $a=0$.)

Ak $a=0$, má daná sústava tvar

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= 0, \\ y^2 + xy &= 0 \end{aligned}$$

a má zrejme nekonečne mnoho riešení tvaru

$$[k, -k], \quad (9)$$

kde k je ľubovoľné reálne číslo.

ZÁVER. Pre $a \neq 0$, b ľubov. má daná sústava dve rôzne riešenia dané vzťahmi (8a) a (8d); pre $a=0$, b ľubov. má nekonečne mnoho riešení tvaru (9).

POZNÁMKA. V prípade $a \neq 0$ možno riešenie sústavy (1), (2) dostať tiež riešením sústavy

$$\begin{aligned} |x+y| &= |a|\sqrt{2}, \\ |x-y| &= |b|\sqrt{2}, \end{aligned}$$

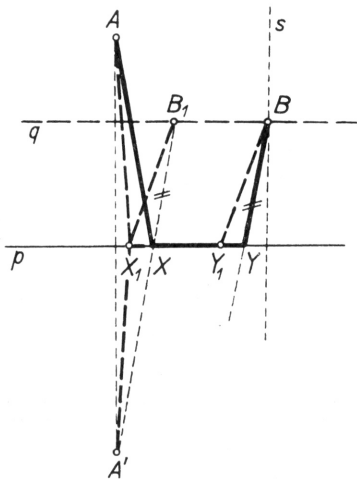
ktorú dostaneme odmocnením rovníc (3) a (5).

3b. V rovine je dána priamka p a uvnitř jednej poloroviny s hranicí p dva různé body A a B . Dále je dáno kladné číslo u . Na přímce p sestrojte body X a Y tak, aby $XY = u$ a aby délka lomené čáry $AXYB$ byla co nejmenší. (7 bodů)

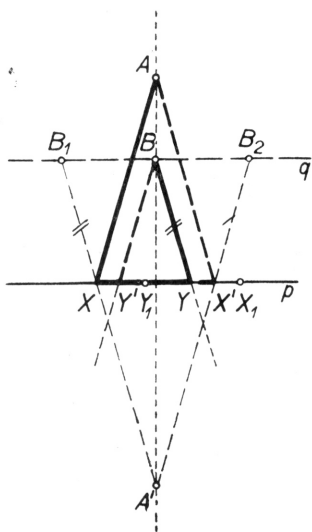
ŘEŠENÍ (obr. 42a). Bodem B sestrojme přímku $q \parallel p$ a přímku $s \perp p$. Na přímce q sestrojme bod B_1 tak, aby $BB_1 = u$ a aby B_1 ležel v téže polorovině vzhledem k přímce s jako bod A ; leží-li bod A na přímce s , sestroj-

jíme na q oba body B_1 a B_2 tak, že $BB_1 = BB_2 = u$ (obr. 42 b).

K bodu A sestrojíme bod A' souměrně sdružený podle přímky p . Hledaný bod X je průsečík přímky $A'B_1$



a)



b)

Obr. 42

s přímkou p , příslušný bod Y je průsečík přímky p s rovnoběžkou s $A'B_1$ bodem B . V případě, že bod A leží na přímce s , vede i průsečík X' přímky $A'B_2$ s přímkou p k řešení.

K důkazu KONSTRUKCE budeme užívat pro délku lomené čáry C symbolu $d(C)$. Nechť tedy X_1 a Y_1 jsou libovolné body na přímce p takové, že $X_1Y_1 = u$. Rozlišujme dva případy (obr. 42a):

a) $X_1Y_1BB_1$ (v tomto pořadí) je rovnoběžník. Pak

$d(AX_1Y_1B) = d(AX_1B_1B) = d(A'X_1B_1B) \geq d(A'B_1B) = d(A'XB_1B) = d(AXYB)$, a přitom rovnost nastane, právě když $X_1 = X$.

b) $X_1Y_1BB_2$ (v tomto pořadí) je rovnoběžník, kde $B_2 \neq B_1$ (obr. 42b) je bod přímky q takový, že $BB_2 = u$. Potom $d(AX_1Y_1B) = d(AX_1B_2B) = d(A'X_1B_2B) \geq d(A'B_2B) \geq d(A'B_1B) = d(AXYB)$. V nerovnosti $d(A'B_2B) \geq d(A'B_1B)$ nastane rovnost, právě když bod A leží na přímce s . Potom je $d(AX_1Y_1B) = d(AXYB)$, právě když X_1 je průsečík přímky $A'B_2$ s přímkou p a body A, B leží na přímce $s \perp p$.

ZÁVĚR. Úloha má jediné řešení, není-li přímka AB kolmá k přímce p ; je-li kolmá, má úloha dvě řešení.

3. ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE Z

1. Závory na železničním přejezdu se spouštějí 2 min. před příjezdem vlaku, spuštěny zůstávají celkem 3 min. Vlak jedoucí průměrnou rychlostí 60 km/h je 12 km před přejezdem. Po silnici jede auto, které je v téže době před přejezdem 14 km. Vypočtete nejmenší a největší průměrnou rychlost auta, při které spuštěné závory auto zadrží.

ŘEŠENÍ. Představme si, že jsme zmáčkli stopky v okamžiku, kdy je vlak 12 km a auto 14 km od přejezdu. Když vlak přijede k přejezdu, bude na stopkách

$$\frac{12}{60}(\text{h}) = 12(\text{min.})$$

Přejezd tedy bude uzavřen od okamžiku, kdy stopky ukazují čas 10 min., do okamžiku, kdy je na stopkách čas 13 min. Přijede-li auto v tomto časovém intervalu,

závory je zadrží. Době 10 min. odpovídá největší průměrná rychlost

$$v_{10} = \frac{14}{\frac{10}{60}} = 84 \text{ (km/h)}$$

a době 13 min. nejmenší průměrná rychlost

$$v_{13} = \frac{14}{\frac{13}{60}} = \frac{14 \cdot 60}{13} = 64 \frac{8}{13} \text{ (km/h)}.$$

Závory zadrží auto, bude-li jeho průměrná rychlost aspoň $64 \frac{8}{13}$ km/h a nejvýše 84 km/h.

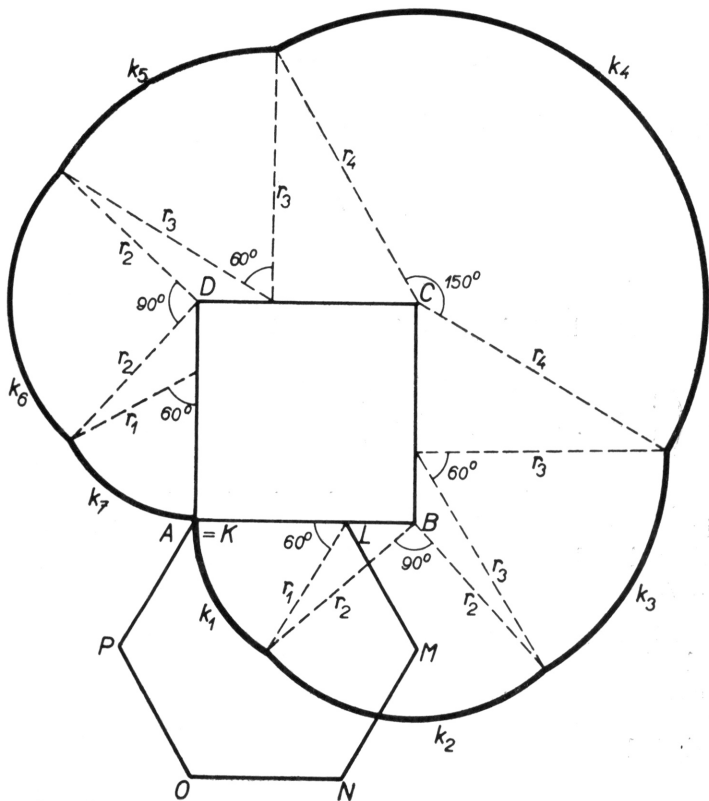
POZNÁMKA. Pro praxi nemá vlastně smyslu otázka, zda auto projede nebo nikoli, bude-li jeho průměrná rychlost „přesně“ $64 \frac{8}{13}$ km/h, neboť závory se nespouštějí okamžitě a též průměrná rychlost je jen pomocný abstraktní pojem. Podobně pro hodnotu 84 km/h.

2. Je daný štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 6 cm. Ďalej je daný pravidelný šesťuholník $KLMNOP$ so stranou dĺžky 4 cm tak, že vrcholy A a K splývajú a vrchol L leží na polpriamke AB . Obidva obrazce ležia v opačných polrovinách s hranicou AB .

a) Zostrojte dráhu, ktorú opíše vrchol K šesťuholníka $KLMNOP$, ktorý sa zvonka odvažuje po obvode štvorca $ABCD$.

b) Vypočítajte dĺžku tejto dráhy.

RIEŠENIE. Dráha bodu sa skladá zo 7 kruhových oblúkov, ako je naznačené na obr. 43. Dĺžky jednotlivých oblúkov sú $k_1, k_2, \dots, k_7$. Platí



Obr. 43

$$k_1 = k_7 = \frac{\pi r_1}{180} \cdot 60 = \frac{4\pi}{180} \cdot 60 = \frac{4}{3}\pi,$$

$$k_2 = k_6 = \frac{\pi r_2}{180} \cdot 90 = \frac{1}{2}\pi \sqrt{4^2 + v^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \pi \sqrt{16 + 4^2 - 2^2} = \pi \sqrt{7},$$

$$k_3 = k_5 = \frac{\pi r_3}{180} \cdot 60 = \frac{1}{3} \pi \cdot KM = \frac{1}{3} \pi \cdot \sqrt{8^2 - 4^2} = \\ = \frac{4}{3} \pi \cdot \sqrt{3},$$

$$k_4 = \frac{\pi r_4}{180} \cdot 150 = \frac{8\pi}{180} \cdot 150 = \frac{20}{3} \pi.$$

Celková délka dráhy bodu K je teda

$$d = 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 = \\ = \left(\frac{8}{3} + 2\sqrt{7} + \frac{8}{3}\sqrt{3} + \frac{20}{3} \right) \pi \doteq 19,2\pi \doteq 60,4 \text{ (cm)}.$$

3. Trojciferné číslo n má v dekadickém zápise aspoň dvě cifry stejné. Jeho šestinásobek je čtyřciferné číslo, jehož dekadický zápis obsahuje a) nulu a b) tři stejné cifry. Určete všechna čísla n těchto vlastností.

ŘEŠENÍ. a) Protože je $n < 1000$, je $6n < 6000$; jediná nenulová cifra čísla $6n$ je tedy 1, 2, 3, 4 nebo 5. *Obsahuje-li číslo $6n$ tři nuly*, platí $6n = 3000$, neboť čísla 1000, 2000, 4000, 5000 nejsou násobky šesti. Máme tedy jedno řešení úlohy:

$$n_1 = 500, \quad 6n_1 = 3000. \quad (1)$$

b) *Obsahuje-li číslo $6n$ jedinou nulu* a je-li jeho nenulová cifra 1, 3, 5, je nula na místě jednotek, neboť $6n$ je sudé. Dělíme-li čísla 1110, 3330, 5550 šesti, dostaneme po řadě 185, 555, 925. Dostáváme tedy další řešení úlohy:

$$n_2 = 555, \quad 6n_2 = 3330. \quad (2)$$

c) *Obsahuje-li číslo $6n$ jedinou nulu* a je-li jeho nenu-

lová cifra 2 nebo 4, je třeba prozkoumat 6 možných případů; výsledky jsou uvedeny v tabulce:

$6n$	2022	2202	2220	4044	4404	4440
n	337	367	370	674	734	740

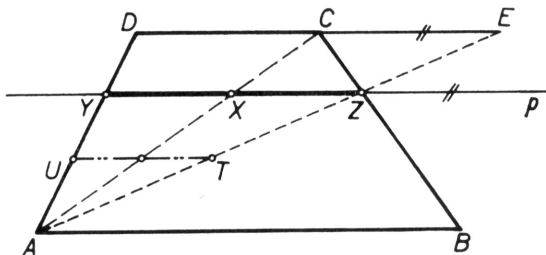
V této tabulce jen první sloupec dává řešení úlohy:

$$n_3 = 337, \quad 6n_3 = 2022. \quad (3)$$

Úloha má tedy celkem 3 řešení (1), (2), (3).

4. Je daný lichobežník $ABCD$ so základnami AB , CD . Určíte také bod X uhlopříčky AC , aby přímka p rovnoběžná s AB vedená bodem X přetřela ramena AD , BC v uvedeném pořadí v bodech Y , Z , pro které platí $XY = XZ$. Vyjadřte délku XY pomocí $a = AB$, $c = CD$.

RIEŠENIE. a) Určíme množinu všech bodů T , pro které platí: Y leží na AD , X leží na AC , X je středem úsečky YT , přímka XY je rovnoběžná s AB . Zostrojme bod E tak, aby vrchol C bol stredom úsečky DE (obr. 44).



Obr. 44

Potom v trojuholníku ADE je vnútro ťažnice AC a bod C množinou stredov všetkých úsečiek rovnobežných so stranou DE , ktorých koncové body U, T ležia v uvedenom poradí na stranách AD, AE . Hľadaný bod X dostaneme jedine v prípade, keď bod T splynie s priesečníkom úsečiek BC, AE .

b) Zo vzťahu $\triangle ZCE \sim \triangle ZBA$ vyplýva

$$\frac{EZ}{AZ} = \frac{c}{a} \quad (1)$$

a ďalej podľa (1)

$$\frac{AE}{AZ} = \frac{AZ + EZ}{AZ} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a + c}{a}. \quad (2)$$

Zo vzťahu $\triangle AXZ \sim \triangle ACE$ vyplýva

$$\frac{XZ}{CE} = \frac{AZ}{AE}.$$

Podľa (2) je

$$XZ = \frac{AZ}{AE} \cdot CE = \frac{ac}{a + c},$$

a teda

$$XY = XZ = \frac{ac}{a + c}.$$

V. Řešení soutěžních úloh III. kola kategorie A

1. Necht' a, b, c jsou reálná čísla. Dokažte, že existují nezáporná čísla x, y, z , ne všechna rovná nule, která splňují nerovnosti

$$cy - bz \geq 0,$$

$$az - cx \geq 0,$$

$$bx - ay \geq 0.$$

ŘEŠENÍ. Je zřejmé, že cyklickou záměnou čísel a, b, c a zároveň x, y, z se soustava nezmění. Lze se tedy v řešení omezit na tyto případy:

1. $a = b = c = 0$ nebo $a = b = 0, c \neq 0$, pak
 $x = y = 0, z = 1$ je řešením;

2. $a = 0, bc \neq 0$, pak

pro $b > 0, c > 0$ je $x = 0, y = 1, z = 0$ řešení,

pro $b > 0, c < 0$ je $x = 1, y = 0, z = 0$ řešení,

pro $b < 0, c > 0$ je $x = 0, y = 1, z = 1$ řešení,

pro $b < 0, c < 0$ je $x = 0, y = 0, z = 1$ řešení.

3. $abc \neq 0$, pak

pro $a > 0, b > 0, c > 0$ nebo $a < 0, b < 0, c < 0$

je

$x = |a|, y = |b|, z = |c|$ řešení,

pro $a > 0, b > 0, c < 0$ je $x = 1, y = 0, z = 0$ řešení,

pro $a > 0, b < 0, c < 0$ je $x = 0, y = 0, z = 1$ řešení.

JINÉ ŘEŠENÍ. Zavedeme označení:

$$\begin{aligned} a &= k_0, & b &= k_1, & c &= k_2, \\ x &= t_0, & y &= t_1, & z &= t_2. \end{aligned}$$

Máme soustavu

$$\begin{aligned} k_2 t_1 - k_1 t_2 &\geq 0, \\ k_0 t_2 - k_2 t_0 &\geq 0, \\ k_1 t_0 - k_0 t_1 &\geq 0, \end{aligned}$$

kteřou lze po zavedení úmluvy, že pro každé celé číslo i položíme

$$k_{i+3} = k_i \quad \text{a} \quad t_{i+3} = t_i,$$

psát v jednotném tvaru

$$k_{i+1} t_i - k_i t_{i+1} \geq 0. \quad (1)$$

1. Předpokládejme, že čísla k_0, k_1, k_2 jsou všechna buď nezáporná, nebo nekladná, přičemž nejsou všechna rovna nule. Pak existuje řešení soustavy (1)

$$t_i = |k_i|,$$

protože pro každé i

$$k_{i+1}|k_i| - k_i|k_{i+1}| = 0.$$

Platí totiž

$$\begin{aligned} k_{i+1} \cdot |k_i| - k_i |k_{i+1}| &= k_i \cdot k_{i+1} \cdot \operatorname{sgn} k_i - k_i k_{i+1} \cdot \operatorname{sgn} k_{i+1} = \\ &= k_i k_{i+1} (\operatorname{sgn} k_i - \operatorname{sgn} k_{i+1}) = 0^*), \end{aligned}$$

neboť a) jsou-li k_i, k_{i+1} čísla různá od nuly, pak podle předpokladu $\operatorname{sgn} k_i = \operatorname{sgn} k_{i+1}$;

*) Funkce (signum, tj. znamení) je definována pro každé reálné číslo takto:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x > 0 \\ 0, & \text{je-li } x = 0 \\ -1, & \text{je-li } x < 0. \end{cases}$$

b) je-li jedno z čísel k_i , k_{i+1} rovno nule, pak $k_i k_{i+1} = 0$.

2. Nechť nenastane případ 1. Pak nutně existuje takový index j , že $k_j \geq 0$ a přitom $k_{j+1} \leq 0$.

Nyní volme

$$t_j = 0, \quad t_{j+1} = 0, \quad t_{j-1} = 1.$$

Pak ze soustavy

$$\begin{aligned} k_j t_{j-1} - k_{j-1} t_j &\geq 0, \\ k_{j+1} t_j - k_j t_{j+1} &\geq 0, \\ k_{j-1} t_{j+1} - k_{j+1} t_{j-1} &\geq 0. \end{aligned}$$

Po dosazení za t_j , t_{j+1} , t_{j-1} dostáváme

$$k_j \geq 0, \quad -k_{j+1} \geq 0,$$

což platí. Tím je důkaz proveden i v případě 2.

Řešil Miroslav Kmošek,

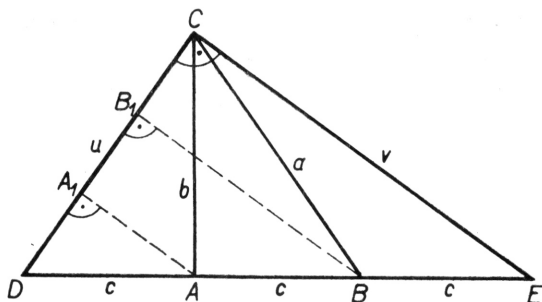
2a. gymnasium, tř. kpt. Jaroše, Brno

2. K trojúhelníku ABC jsou na přímce AB sestrojeny body $D \neq B$ a $E \neq A$ tak, že $DA = BE = AB$.

Určete nutnou a postačující podmínku pro délky úseček $a = BC$, $b = AC$, aby existoval takový trojúhelník ABC , že úhel DCE je pravý.

ŘEŠENÍ (obr. 45). Nechť $\sphericalangle DCE$ je pravý. Označme $CD = u$, $CE = v$, A_1 patu kolmice z bodu A na přímku CD , B_1 patu kolmice z bodu B na přímku CD . Protože $AA_1 = \frac{1}{3}v$, $BB_1 = \frac{2}{3}v$, $A_1C = \frac{2}{3}u$, $B_1C = \frac{1}{3}u$, plyne z Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky BB_1C , AA_1C a DEC , že

$$a^2 = \frac{1}{9}u^2 + \frac{4}{9}v^2, \quad (1)$$



Obr. 45

$$b^2 = \frac{4}{9}u^2 + \frac{1}{9}v^2, \quad (2)$$

$$c^2 = \frac{1}{9}u^2 + \frac{1}{9}v^2. \quad (3)$$

Nyní je

$$4a^2 = \frac{4}{9}u^2 + \frac{16}{9}v^2 > b^2$$

a obdobně

$$4b^2 = \frac{16}{9}u^2 + \frac{4}{9}v^2 > a^2.$$

Celkem

$$\frac{a}{2} < b < 2a. \quad (4)$$

Ukažme, že podmínka (4) je i postačující. Splňují-li totiž kladná čísla a, b podmínku (4), má kladné řešení u, v soustava rovnic (1) a (2):

$$u^2 = \frac{3}{5}(4b^2 - a^2),$$

$$v^2 = \frac{3}{5}(4a^2 - b^2).$$

Je-li c kladné číslo ze vztahu (3), lze sestrojit trojúhelník DEC o stranách délek $DE = 3c$, $CD = u$, $CE = v$, a platí, že $\sphericalangle DCE$ je pravý. Body A a B , které dělí stranu DE na tři stejné části ($DA = AB = BE = c$), tvoří s bodem C trojúhelník, který má strany a , b , jak plyne opakováním úvahy ze začátku řešení.

ZÁVĚR. Podmínka (4) je nutná a postačující. Lze ji také psát ve tvaru

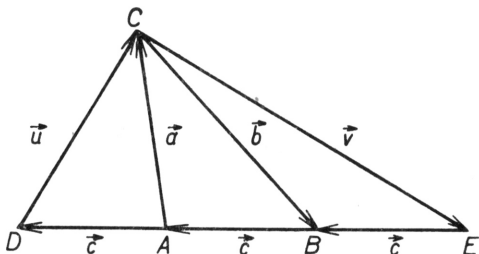
$$\max(a, b) < 2 \min(a, b).$$

INÉ RIEŠENIE. Označme

$$\vec{BA} = \vec{c}, \quad \vec{AC} = \vec{a}, \quad \vec{CB} = \vec{b}, \quad \vec{DC} = \vec{u}, \quad \vec{CE} = \vec{v}.$$

Potom

$$\vec{AD} = \vec{c}, \quad \vec{EB} = \vec{c}.$$



Obr. 46

Predpokladajme, že existujú také dĺžky úsečiek a , b , aby existoval $\triangle ABC$ tej vlastnosti, že $\sphericalangle DCE$ je pravý.

Potom platí (obr. 46)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0. \quad (1)$$

Zrejme platí:

$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{c}, \quad \vec{v} = \vec{b} - \vec{c}, \quad (2a, b)$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}, \quad (2c)$$

kde $\vec{o}$ je nulový vektor. Podľa (1), (2a), (2b) platí

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \cdot \vec{c} = 0. \quad (3)$$

Podľa (2c) je

$$\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \quad (4)$$

čiže

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{c} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}). \quad (5)$$

Po dosadení zo (4) a (5) do (3) dostaneme teda

$$5\vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

čiže

$$5c^2 = a^2 + b^2. \quad (6)$$

Naopak, ak v $\triangle ABC$ platí (6), potom sa obrátením postupu presvedčíme, že $\sphericalangle DCE = 90^\circ$.

Aby sme mohli zostrojiť $\triangle ABC$ požadovaných vlastností, musí platiť

$$|a - b| < c < a + b,$$

t.j.

$$a^2 + b^2 - 2ab < c^2 < a^2 + b^2 + 2ab$$

a vzhľadom na (6) súčasne

$$c^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2).$$

Stadiaľ máme

$$a^2 + b^2 - 2ab < \frac{1}{5}(a^2 + b^2) < a^2 + b^2 + 2ab$$

čiže

$$4a^2 + 4b^2 - 10ab < 0,$$

$$4a^2 + 4b^2 + 10ab > 0.$$

Druhá z týchto nerovností je pre každé kladné a, b splnená. Po úprave prvej nerovnosti na tvar

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + 2 < 0$$

dostaneme

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2. \quad (7)$$

Keďže všetky úpravy, ktorými sme dostali podmienku (7), boli ekvivalentné, stačí splnenie tejto podmienky k tomu, aby existovalo c tak, že

$$|a - b| < c < a + b \quad \text{a} \quad 5c^2 = a^2 + b^2,$$

t.j., že trojuholník ABC možno zostrojiť a uhol DCE je pravý.

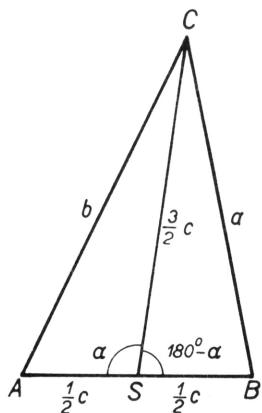
Hľadanou nutnou a postačujúcou podmienkou je teda splnenie nerovností (7).

Riešil Štefan Sakáloš
3. d, SVŠ Prievidza

POZNÁMKA. K rovnosti (6) lze samozrejme dojsť také bez užití vektorového počtu.

Označme S střed úsečky AB . Bod C zřejmě leží na Thaletově půlkružnici nad průměrem DE , a proto (viz obr. 47).

$$CS = t_c = \frac{3}{2}c.$$



Obr. 47

Podle kosinové věty v $\triangle ASC$ platí

$$b^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{9}{4}c^2 - \frac{3}{2}c^2 \cos \alpha,$$

obdobně v $\triangle BCS$

$$a^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{9}{4}c^2 + \frac{3}{2}c^2 \cos \alpha,$$

takže

$$a^2 + b^2 = 5c^2.$$

Tato podmínka je nutná a postačující, aby těžnice t_c v $\triangle ABC$ měla velikost $\frac{3}{2}c$, tj. aby $\sphericalangle DCE$ byl pravý.

3. Jsou dána přirozená čísla $2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n$, kde $n \geq 96$. Rozdělíme-li je libovolně do dvou skupin, pak vždycky aspoň v jedné z nich je možno najít dvě (různá) čísla a současně jejich součin. Dokažte.

Nalezněte příklad, který ukazuje, že věta neplatí pro $n = 95$.

ŘEŠENÍ. Nejprve se budeme zabývat případem $n \geq 96$. Abychom odvodili spor, budeme předpokládat, že čísla je možno rozdělit do dvou skupin A a B tak, že žádná z nich neobsahuje současně dvě čísla i jejich součin. Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že číslo 2 patří do A . Nyní rozlišíme čtyři případy.

I. Číslo 3 a 4 patří též do A . Pak součiny $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 4 = 8$ a $3 \cdot 4 = 12$ jsou ve skupině B . Součiny $6 \cdot 8 = 48$ a $8 \cdot 12 = 96$ náleží tedy do A . Avšak 2, 48 a 96 nemohou současně být v A a to je spor.

II. Dále probereme případ, že 3 je ve skupině A a 4 v B . Potom součin $2 \cdot 3 = 6$ je v B , součin $4 \cdot 6 = 24$ je v A . Kam patří číslo 8? Rozhodně ne do A , neboť je $3 \cdot 8 = 24$; leží tedy v B . Součin $6 \cdot 8 = 48$ ukazuje, že by 48 mělo být v A , avšak $2 \cdot 24 = 48$ — to je spor.

III. Příklad, že 3 je v B a 4 je v A , se řeší podobně. Součin $2 \cdot 4 = 8$ patří do B , součin $3 \cdot 8 = 24$ do A . O číse 6 nyní snadno rozhodneme, že musí patřit do B , neboť $4 \cdot 6 = 24$. Zase je tu spor, neboť $6 \cdot 8 = 48$, $2 \cdot 24 = 48$.

IV. Konečně nechť čísla 3 a 4 obě patří do B . Pak $3 \cdot 4 = 12$ je v A a číslo 6 musí být v B . Rovnosti $2 \cdot 12 = 24$ a $4 \cdot 6 = 24$ ukazují znova spor. Důkaz pro $n \geq 96$ je tedy podán.

Pro $n = 95$ tvrzení neplatí. Rozdělme čísla např. tak, že do první skupiny dáme

2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 32, 37, 43, 47, 48, 49, 53, 54, 56, 59, 60, 61, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 88, 89, 90,

a do druhé

6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 50, 51, 52, 55, 57, 58, 62, 63, 64, 65, 68, 69, 74, 75, 76, 77, 85, 86, 87, 91, 92, 93, 94, 95;

žádná skupina neobsahuje dvě čísla a současně jejich součin.

4. Dokažte, že existují reálné čísla A, B tak, že rovnost

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1) = A \cdot \operatorname{tg} n + B \cdot n$$

platí pro každé přirozené číslo n .

RIEŠENIE. Zo známeho vzorca $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$, ktorý platí pre všetky také dvojice uhlov α, β , pre ktoré je definovaná funkcia tangens, pričom $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, kde m je celé číslo, vyplýva $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$, z čoho

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}(\alpha - \beta). \quad (1)$$

Pre každé prirodzené číslo k zrejme platí: $k \neq (2m + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, kde m je celé číslo, pretože číslo na pravej strane je iracionálne. Pre každé prirodzené číslo k je teda $\operatorname{tg} k$ definované a ak v (1) zvolíme špeciálne $\alpha = k, \beta = k - 1$, dostaneme:

$$\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k - 1) = \operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k - 1) - \operatorname{tg} 1. \quad (2)$$

Ak teraz v (2) volíme postupne $k = 1, 2, 3, \dots, n$ a všetky takto získané rovnosti sčítame, dostaneme:

$$\operatorname{tg} 1 \cdot s_n = (\operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 1) + (\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1) + \dots + (\operatorname{tg} n - \operatorname{tg}(n - 1) - \operatorname{tg} 1), \quad \text{kde}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k - 1),$$

čiže $\operatorname{tg} 1 \cdot s_n = \operatorname{tg} n - \operatorname{tg} 1 - (n - 1) \operatorname{tg} 1$, z čoho (vzhľadom na to, že zrejme $\operatorname{tg} 1 \neq 0$) máme

$$s_n = \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \cdot \operatorname{tg} n - n. \quad (3)$$

Správnosť (3) pre každé prirodzené číslo n ľahko dokážeme matematickou indukciou:

a) Pre $n = 1$ je $s_1 = \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} 0 = 0$ a z (3) máme

$$s_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \cdot \operatorname{tg} 1 - 1 = 0.$$

b) Nech (3) platí pre nejaké prirodzené číslo m . Potom

$$\begin{aligned} s_{m+1} &= \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \cdot \operatorname{tg} m - m + \operatorname{tg}(m+1) \cdot \operatorname{tg} m = \\ &= \frac{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg}(m+1) \cdot \operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} 1} - m \end{aligned}$$

a s použitím (2) pre $k = m+1$ ďalej platí

$$\begin{aligned} s_{m+1} &= \frac{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg}(m+1) - \operatorname{tg} m - \operatorname{tg} 1}{\operatorname{tg} 1} - m = \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \cdot \operatorname{tg}(m+1) - (m+1), \end{aligned}$$

čo dostaneme taktiež z (3) pre $n = m+1$. Tým je dôkaz skončený.

POZNÁMKA. Úspešní řešitelé této úlohy postupovali většinou tak, že předpokládali, že požadovaná reálná čísla A, B existují, a za tohoto předpokladu je určili ze soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^1 \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg} (k-1) &= A \cdot \operatorname{tg} 1 + B, \\ \sum_{k=1}^2 \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg} (k-1) &= A \cdot \operatorname{tg} 2 + 2B. \end{aligned}$$

Pomocí vypočtených čísel A, B , pak z rovnosti uvedené v textu úlohy získali vzorec

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg} (k-1) = \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \cdot \operatorname{tg} n - n,$$

který pak dokázali pro každé přirozené číslo n stejně jako v autorském řešení matematickou indukcí.

JINÉ ŘEŠENÍ. Předpokládejme nejprve, že existují taková reálná čísla A, B , že rovnost

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg} (k-1) = A \cdot \operatorname{tg} n + B \cdot n \quad (1)$$

platí pro jisté přirozené číslo n . Má-li (1) platit pro táž čísla A, B , též pro $n+1$ musí být správná rovnost

$$\begin{aligned} A \cdot \operatorname{tg} (n+1) + B(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg} (k-1) = \\ &= \sum_{k=1}^n \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg} (k-1) + \operatorname{tg} n \cdot \operatorname{tg} (n+1), \end{aligned}$$

čili musí platit

$$\begin{aligned} A \cdot \operatorname{tg} (n+1) + Bn + B &= \\ &= A \cdot \operatorname{tg} n + Bn + \operatorname{tg} n \cdot \operatorname{tg} (n+1). \end{aligned} \quad (2)$$

Čísla n a $n+1$ jsou přirozená, a proto jsou jejich tangenty vždy definovány. Úpravou rovnosti (2) dosazením ze známého vzorce

$$\operatorname{tg} (n+1) = \frac{\operatorname{tg} n + \operatorname{tg} 1}{1 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} &\frac{A(\operatorname{tg} n + \operatorname{tg} 1) + B(1 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n)}{1 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n} = \\ &= \frac{(A - A \cdot \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n + \operatorname{tg} n + \operatorname{tg} 1) \cdot \operatorname{tg} n}{1 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n} \end{aligned}$$

a protože $\operatorname{tg} (n+1)$ je definován, je $1 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n \neq 0$,

a tedy lze poslední rovnost upravit na tvar

$$(1 - A \cdot \operatorname{tg} 1) \cdot \operatorname{tg}^2 n + (\operatorname{tg} 1 + B \cdot \operatorname{tg} 1) \cdot \operatorname{tg} n - (A \cdot \operatorname{tg} 1 + B) = 0. \quad (3)$$

Má-li vztah (3) platit pro všechna n , tj. pro všechny příslušné $\operatorname{tg} n$, stačí, aby všechny koeficienty v mnohočle-
nu proměnné $\operatorname{tg} n$ na levé straně rovnosti (3) byly nulové,
tedy

$$A \cdot \operatorname{tg} 1 = 1 \quad \text{a} \quad B = -1.$$

Takové A existuje, neboť $\operatorname{tg} 1 \neq 0$.

Nyní si ověříme, zda s těmito koeficienty A a B platí rovnost (1) i pro $n = 1$. Pak skutečně platí, neboť

$$\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} 0 = 0$$

a

$$A \cdot \operatorname{tg} 1 + B \cdot 1 = 1 - 1 = 0.$$

ZÁVĚR. Pro reálné koeficienty $A = \frac{1}{\operatorname{tg} 1}$ a $B = -1$ platí vztah (1) podle principu matematické indukce pro všechna n , neboť platí pro $n = 1$ a z platnosti pro přiroze-
né číslo n , jak bylo výše dokázáno, plyne platnost (1) pro číslo $n + 1$.

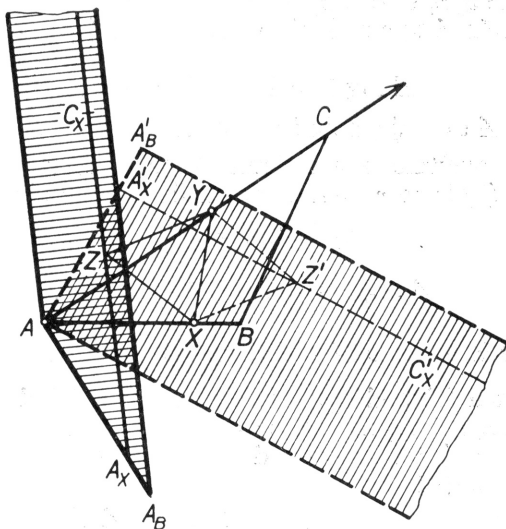
Řešil Andrej Kugler

3. g, SVVŠ, ul. W. Piecka, Praha

5. Je daný trojuholník ABC . Zvolíme bod X úsečky AB a bod $Y \neq X$ polpriamky AC a zostrojíme v rovině ABC rovnostranný trojuholník XYZ . Vyšetrite množinu $\mathbf{M}$ vrcholov Z všetkých takto zostrojených trojuholníkov XYZ , keď bod X prebieha úsečku AB a bod Y polpriamku AC . Vyšetrite tiež prípad, keď $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

RIEŠENIE. Každý bod Z vznikne otočením bodu Y okolo bodu X o 60° v kladnom alebo zápornom zmysle

(obr. 48). Pretože všetky body Y vyplňujú polpriamku AC , vyplnila body Z množinu všetkých bodov všetkých polpriamok $A_X C_X$ a $A'_X C'_X$, ktoré vzniknú otočením polpriamky AC o 60° v kladnom alebo zápornom zmysle okolo všetkých bodov X úsečky AB .

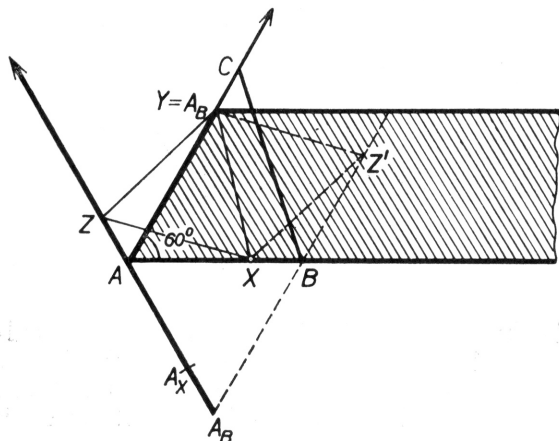


Obr. 48

Otočíme najskôr bod A okolo bodu X do polôh A_X, A'_X . Body A_X, A'_X sú zrejme vrcholy rovnostranných trojuholníkov AXA_X, AXA'_X . Pretože bod A_X vznikol otočením bodu A okolo X o 60° v kladnom zmysle, vznikol bod A'_X otočením bodu A okolo X o 60° v zápornom zmysle. Množinu všetkých bodov A_X dostaneme ako obraz AA_B úsečky AB v otočení okolo stredu A o 60° v zápornom zmysle. Teraz už ľahko doplníme polpriamky

$A_X C_X$. Ich množina vyplní akýsi „polpás“ roviny (je to prienik pásu roviny s istou polrovinou; na obr. 48 je vyznačený tučne a vyšrafovaný).

Analogicky dostaneme druhý „polpás“. Je to množina všetkých bodov všetkých polpriamok $A'_X C'_X$, ktoré vznikli otočením polpriamky AC okolo X o 60° , ale

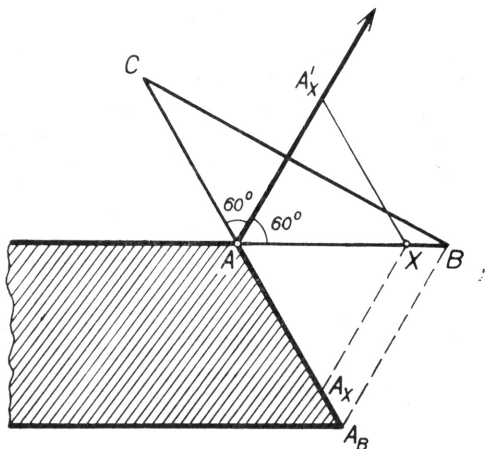


Obr. 49

v zápornom zmysle. Koncové body A'_X polpriamok $A'_X C'_X$ vyplnila úsečku AA'_B . Vyšetrovaná množina **M** je v prípade, keď $\sphericalangle BAC \neq 60^\circ$ zjednotenie oboch „polpásov“, ale bez bodu A .

Ak je $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, je nahradený jeden z „polpásov“ polpriamkou so začiatkom v A_B (na obr. 49 je to $A_B C_B$) a bod A potom patrí do množiny **M**.

Ak je $\sphericalangle BAC = 120^\circ$, je tiež jeden z „polpásov“ nahradený polpriamkou, ale bez jej začiatočného bodu A (obr. 50).

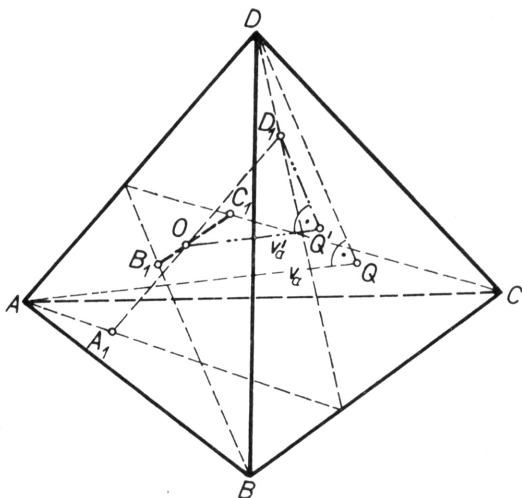


Obr. 50

6. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a libovolný jeho vnitřní bod O . Bodem O vedeme příčky rovnoběžné s jeho hranami (jejich krajní body leží ve stěnách čtyřstěnu). Pak platí, že součet poměrů délek těchto příček a délek s nimi rovnoběžných hran čtyřstěnu je roven 3. Dokažte.

ŘEŠENÍ. Vedme bodem O příčku $A_1D_1 \parallel AD$, A_1 leží ve stěně ABC , D_1 ve stěně DBC ; C_1 , D_1 jsou krajní body příčky vedené bodem O a rovnoběžné s CB ; C_1 leží ve stěně ACD a B_1 ve stěně ABD . Čtyřstěny $O(BCD)$, $A(BCD)$ mají společnou podstavu BCD , a tudíž poměr jejich objemů se rovná poměru délek jejich výšek $v'_a : v_a$. Ale z podobných trojúhelníků $\triangle ADQ \sim \triangle OD_1Q'$ plyne (viz obr. 51) $v'_a : v_a = OD_1 : AD$. Je tedy

$$\frac{\text{objem } O(BCD)}{\text{objem } A(BCD)} = \frac{OD_1}{AD}; \quad (1)$$



Obr. 51

čtyřstěny $O(ABC)$ a $D(ABC)$ mají společnou podstavu ABC a jejich objemy jsou v poměru

$$\frac{\text{objem } O(ABC)}{\text{objem } D(ABC)} = \frac{OA_1}{AD}. \quad (1')$$

Sečtením (1) a (1') dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\text{objem } O(BCD) + \text{objem } O(ABC)}{\text{objem } A(BCD)} &= \\ &= \frac{OD_1 + OA_1}{AD} = \frac{A_1D_1}{AD}. \end{aligned} \quad (2)$$

Výměnou vrcholů $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$ dostaneme z (2)

$$\frac{\text{objem } O(ABD) + \text{objem } O(ACD)}{\text{objem } A(BCD)} = \frac{B_1C_1}{BC}. \quad (2')$$

Sečtením (2) a (2') máme

$$\frac{\text{součet objemů čtyřstěnů } [O(ABC) + O(BCD) + O(CDA) + O(ABD)]}{\text{objem čtyřstěnu } A(BCD)} = \\ = \frac{A_1 D_1}{AD} + \frac{B_1 C_1}{BC} = 1. \quad (3)$$

Podobné vztahy platí pro další dvojice protějších hran čtyřstěnu

$$\frac{A_2 B_2}{AB} + \frac{C_2 D_2}{CD} = 1, \quad (3')$$

$$\frac{B_3 D_3}{BD} + \frac{A_3 C_3}{AC} = 1. \quad (3'')$$

Sečtením (3), (3'), (3'') dostaneme

$$\frac{A_1 D_1}{AD} + \frac{B_1 C_1}{BC} + \frac{A_2 B_2}{AB} + \frac{C_2 D_2}{CD} + \frac{B_3 D_3}{BD} + \frac{A_3 C_3}{AC} = 3.$$

JINÉ ŘEŠENÍ (obr. 52). Veďme bodem O příčku $A_1 A_2 \parallel AD$. Potom rovina určená body A, D, A_1, O, A_2 protne hranu BC v bodě X . Z podobnosti trojúhelníků $\triangle X A_1 A_2$, $\triangle XAD$ vyplývá

$$\frac{A_1 A_2}{AD} = \frac{XA_1}{XA}. \quad (1)$$

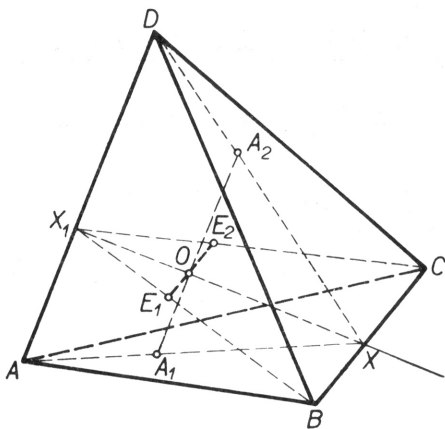
Veďme nyní přímku OX a její průsečík s hranou AD označme X_1 . Z podobnosti trojúhelníků vyplývá

$$\frac{XA_1}{XA} = \frac{XO}{XX_1}$$

a ze vztahu (1) dostáváme

$$\frac{A_1 A_2}{AD} = \frac{XO}{XX_1}. \quad (2)$$

Jediná hrana čtyřstěnu, která je mimoběžná s hranou AD , je hrana BC . Vedme bodem O příčku $E_1E_2 \parallel BC$. Rovina určená rovnoběžkami E_1E_2 a BC obsahuje zřejmě také



Obr. 52

body O , X , a proto i bod X_1 . Z podobnosti trojúhelníků $\triangle X_1E_1E_2$, $\triangle X_1BC$ plyne

$$\frac{E_1E_2}{BC} = \frac{X_1E_1}{X_1B},$$

protože

$$\frac{X_1E_1}{X_1B} = \frac{X_1O}{X_1X};$$

dostáváme

$$\frac{E_1E_2}{BC} = \frac{X_1O}{X_1X}. \quad (3)$$

Sečtením rovností (2), (3) dostaneme

$$\frac{A_1A_2}{AD} + \frac{E_1E_2}{BC} = \frac{XO + X_1O}{X_1X} = 1. \quad (4)$$

Dokázali jsme, že součet poměrů $\frac{A_1A_2}{AD}$ a $\frac{E_1E_2}{BC}$ je roven 1. Podobně dokážeme tento vztah pro další dvě dvojice příček a hran, tj. že

$$\frac{\text{příčka rovnob. s } BD}{BD} + \frac{\text{příčka rovnob. s } AC}{AC} = 1, \quad (5)$$

$$\frac{\text{příčka rovnob. s } CD}{CD} + \frac{\text{příčka rovnob. s } AB}{AB} = 1. \quad (6)$$

Sečtením rovností (4), (5), (6) dostáváme tvrzení, které jsme měli dokázat.

Řešil Miloš Paleček
3.S. gymnasium, Křenová ul., Brno

VI. Správa o XIII. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. ORGANIZÁCIA A PRIEBEH SÚŤAŽE

XIII. medzinárodná matematická olympiáda (MMO) sa konala v ČSSR pri príležitosti XX. ročníka domácej matematickej olympiády. Jej usporiadateľom bolo *Ministerstvo školstva SSSR*, a to predovšetkým preto, že IV. MMO, ktorá bola r. 1962 v Československu, sa konala celá na území dnešnej ČSR. *Prípravný výbor XIII. MMO*, ktorý začal svoju činnosť v júni 1970, pracoval v zložení: akad. *Štefan Schwarz*, predseda; akad. *Josef Novák*, podpredseda; ústr. škol. inšpektor *Michal Zöldy*, zástupca MŠ SSSR; ústr. škol. inšpektor *Jaroslav Láník*, zástupca MŠ ČSR; *Valéria Baračková* (ÚV SZM), prof. dr. *Miroslav Fiedler*, DrSc., dr. *Ján Gatial*, CSc., prof. dr. *Michal Greguš*, DrSc., doc. dr. *Milan Hejný*, CSc., prof. dr. *Milan Kolibiar*, DrSc., dr. *Jozef Moravčík*, CSc., doc. *Jan Vyšín*, CSc., dr. *František Zítek*, CSc. a dr. *Ladislav Berger*, ktorý bol tajomníkom prípravného výboru.

MŠ SSR pozvalo na XIII. MMO celkom 16 štátov, z ktorých sa Belgicko a Taliansko ospravedlnili, takže sa súťaže zúčastnil spolu s ČSSR rekordný počet 15 krajín.

Za miesto konania súťaže bola prípravným výborom po zrelej úvahe vybraná *Žilina* s tým, že miestom príchodu i odchodu zahraničných hostí bude hlavné mesto Slovenska — *Bratislava*. Vedúci delegácií, ktorí spolu s predsedom a podpredsedom prípravného výboru tvorili

medzinárodnú jury súťaže, sa schádzali do Bratislavy v priebehu stredy 7. 7. Vedúci delegácií *Bulharska*, *NDR* a *Rumunska* sa o jeden deň oneskorili a vedúci delegácie *Francúzska* pricestoval vlastným autom až 10. 7. a na prvej časti práce jury sa nezúčastnil.

Prvým oficiálnym podujatím XIII. MMO bola slávnostná večera, ktorú poriadal 7. 7. minister školstva SSR s. prof. Ing. *Štefan Chochol*, CSc., na privítanie vedúcich delegácií v hoteli Carlton. Okrem s. ministra na večeri prehovorili *akad. Schwarz* a zo zahraničných hostí vedúci sovietskej delegácie *doc. Skvorcov*. Vo štvrtok 8. 7. popoludní odcestovali členovia jury a členovia komisie pre výber úloh: prof. dr. *Fiedler*, DrSc., doc. dr. *Hejný*, CSc., doc. *Vyšín*, CSc., dr. *Zítek*, CSc. do hotela *Partizán* na Táloch, ktorý bol určený za miesto pobytu jury počas prvej etapy jej práce. Cestou se zastavili v *Banskej Bystrici*, kde si so záujmom prezreli expozíciu pamätníka SNP.

Na prvom zasadnutí jury, ktoré sa konalo hneď po príchode na Tále, oboznámil predseda jury vedúcich delegácií s programom XIII. MMO a členovia komisie pre úlohy im rozдали pripravené a rozmnožené materiály. Komisia spracovala celkom 55 úloh z 11 krajín (*Mongolsko* a *Francúzsko* úlohy neposlali, zástupca *Rumunska* ich priniesol so sebou a *ČSSR* ako usporiadateľ úlohy nenavrhovala). Z nich vybrala 17, ktorých texty dostali delegáti s upravenými autorskými riešeniami v niektorej z rokových rečí (angličtina, francúzština, nemčina, ruština), do ktorých boli preložené. Okrem toho dostali vedúci delegácií tiež texty všetkých 55 navrhovaných úloh v tom jazyku, v ktorom ich príslušná krajina poslala.

Na štúdium materiálov bolo vyhradené celé predpoludnie v piatok 9. 7. Ukázalo sa však, že to v krásnom letnom počasí, ktoré panovalo po celý čas pobytu na Táloch, bolo málo a väčšina členov jury se nechala ovplyvniť

výberom komisie a hlavne zdanlivou jednoduchosťou ňou predložených riešení. Po zdĺhavom rokovaní vybrala jury z predloženého návrhu týchto 6 úloh:

ÚLOHY PRE PRVÝ DEŇ SÚŤAŽE — 13. 7. 1971

1. Dokážte, že tvrdenie:

„Pre ľubovoľné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ je splnená nerovnosť $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1) \dots (a_2 - a_{n-1}) + \dots + (a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1}) \geq 0$ “
je pravdivé pre $n = 3$ a $n = 5$ a nie je pravdivé pre žiadne iné prirodzené $n > 2$.
(Maďarsko, 5 bodov)

2. Nech je daný konvexný mnohosten P_1 , ktorý má práve deväť vrcholov: $A_1, A_2, \dots, A_9$. Označme P_i ($i = 2, 3, \dots, 9$) mnohosten, ktorý sa dostane z P_1 rovnobežným posunutím, pri ktorom sa bod A_1 premiestni do bodu A_i , $i = 2, 3, \dots, 9$.

Dokážte, že aspoň dva z mnohostenov $P_1, P_2, \dots, P_9$ majú aspoň jeden spoločný vnútorný bod.
(ZSSR, 7 bodov)

3. Dokážte, že postupnosť $\{2^n - 3\}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) obsahuje nekonečne mnoho čísel, z ktorých každé dve sú nesúdeliteľné.
(Poľsko, 9 bodov)

ÚLOHY PRE DRUHÝ DEŇ SÚŤAŽE — 14. 7. 1971

4. Všetky steny štvorstena $ABCD$ sú ostrouhlé trojuholníky. Uvažujme o všetkých uzavretých lomených čiarach $XYZTX$, ktoré sú definované nasledujúcim spôsobom:

všetchny uzavřené (4.p.)

X je bod hrany AB rôzny od A aj od B . Analogicky Y, Z, T sú vnútorné body hrán BC, CD, DA v uvedenom poradí.

Dokážte, že

a) ak $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CDA \neq 0$, potom medzi týmito lomenými čiarami nejestvuje najkratšia;

b) ak $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CDA = 0$, potom existuje nekonečne mnoho lomených čiar minimálnej dĺžky a táto dĺžka je rovná $2 \times AC \times \sin \frac{\alpha}{2}$, kde $\alpha = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB$.

(Holandsko, 6 bodov)

5. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m existuje neprázdna konečná množina S bodov v rovine s touto vlastnosťou, že ku každému bodu $A \in S$ existuje v S práve m bodov, ktorých vzdialenosť od A sa rovná jednej.

(Bulharsko, 7 bodov.)

6. Uvažujme o štvorcovej tabuľke

$$a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}$$

$$a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n}$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{nn}$$

ktorá je zostavená z nezáporných celých čísel a vyhovuje nasledujúcej podmienke: ak $a_{ij} = 0$, potom platí nerovnosť

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + a_{1j} + \dots + a_{nj} \geq n.$$

Dokážte, že pre súčet s všetkých čísel tabuľky platí:

$$s \geq \frac{1}{2} n^2.$$

(Švédsko, 8 bodov)

V zátvorke za textom úlohy je uvedená krajina, ktorá úlohu navrhla a maximálny počet bodov, ktorý bolo možno získať za jej úplné riešenie.

Neúmerne dlhá časť rokovania jury bola venovaná formulácii vybraných úloh v rokovacích jazykoch. Na riešenie každej trojice úloh boli určené — ako obvykle — 4 hodiny čistého času.

V piatok 9. 7. usporiadal večeru pre členov jury podpredseda KNV v *Banskej Bystrici* s. Jozef Baláž. Predstavitelia Stredoslovenského KNV obdarovali každého účastníka večere vkusnou vázou z krištáľového skla s vyrytým emblémom XIII. MMO z dielne sklárov v Katarínskej Hute.

Na ceste z *Tálov* do *Žiliny* v nedeľu 11. 7. 1971 popoludní sa všetci členovia výpravy zúčastnili prehliadky *Demänovskej jaskyne Slobody*. V nedeľu 11. 7. večer sa vedúci delegácií stretli v žilinskom hoteli *Metropol*, kde sa na celý týždeň ubytovali, so svojimi zástupcami. Zástupcovia vedúcich priviedli v priebehu soboty 10. 7. výpravy žiakov do *Bratislavy*, skadial v nedeľu predpoľudním spoločne odcestovali do *Žiliny*. Cestou sa zastavili v *Piešťanoch* (prehliadka kúpeľov) a v *Trenčíne* (prehliadka mesta).

V priebehu 12. 7. preložili vedúci delegácií a ich zástupcovia (ďalej krátko delegáti) texty úloh do národných jazykov žiakov a rozmnožili ich v príslušnom počte.

Miestom konania súťaže i pracoviskom členov jury po celý čas žilinského pobytu bola nová, moderne zariadená budova *Strednej priemyselnej školy stavebnej v Žiline*, v ktorej mala každá delegácia vyhradenú miestnosť. O to, aby v nej našla všetko potrebné pre svoju prácu sa postaral technický štáb olympiády, ktorý pracoval pod vedením dr. Bergera a pozostával prevažne z pracovníkov Katedry matematiky a deskriptívnej geometrie fakulty SET

VŠD v Žiline. V jeho práci výdatne pomáhal tiež riadite SPŠS s. ing. *Ľozef Král*.

V pondelok 12. 7. popoludní podnikli delegáti výlet do *Vrátnej doliny*, kde si pri vrcholovej stanici výťahu na Chleb uctili pamiatku bývalého dlhoročného tajomníka ÚV MO *Rudolfa Zelinku*. Jeho ušľachtilý charakter a nezabudnuteľné zásluhy o rozvoj matematiky u nás pripomenul v krátkom preslove doc. *Vyšín*, CSc. Bolo to na mieste, kde s. Zelinka v máji 1965 náhle zomrel.

Žiaci v ten deň absolvovali výlet do *Bojníc*, kde si prehliadli zámok, zoologickú záhradu a osviežili sa kúpaním v rieke Nitre.

Slávnostné zahájenie súťaže sa uskutočnilo v utorok 13. 7. v aule SPŠS v Žiline za účasti nám. ministra školstva SSR s. prof. dr. *Greguša*, Dr. Sc., ktorý mal krátky prejav. Prítomní boli aj zástupcovia politických a štátnych orgánov mesta i okresu Žilina a Stredoslovenského kraja. Po zahájení sa žiaci odobrali do miestností určených pre súťaž. Do 10 min. od otvorenia obálok s textami úloh, ktoré našli na svojich stoloch, mali možnosť vyjsť na chodbu a spýtať sa vedúcich delegácií na prípadné nejasnosti v texte. Predseda jury prísne dozeral, aby sa ich odpovede obmedzili len na stručné vysvetlenie. Rovnaká procedúra sa opakovala i na druhý deň, keď žiaci zasadli k riešeniu druhej trojice úloh.

13. 7. delegáti absolvovali výlet autobusom do *Bojníc* s rovnakým programom ako deň predtým žiaci. Popoludní po súťaži mali žiaci po oba dni voľno, ktoré využívali na športové hry v areáli internátu, kúpanie na žilinskej krytej plavárni, resp. na prehliadku mesta. V stredu 14. 7. večer pre nich usporiadal OV SZM v Žiline stretnutie so žilinskou mládežou.

Delegáti sa v stredu 14. 7. už plne venovali opravám a hodnoteniu žiackych riešení. Najskôr vedúci delegácií

a ich zástupcovia posúdili riešenia členov svojho družstva a navrhli počty bodov za jednotlivé riešenia. *Koordináciu hodnotení* u všetkých družstiev okrem ČSSR robila skupina koordinátorov pod vedením *dr. Zítka*, CSc.: *doc. dr. Bukovský*, CSc. (2), *doc. dr. Černý*, CSc. (4), *dr. Franek* (5), *dr. Gruska*, CSc. (6), *doc. dr. Hejný*, CSc. (4), *dr. Jarník*, CSc. (1), *doc. dr. Kufner*, CSc. (1), *dr. Liebl* (6), *doc. dr. Riečan*, CSc. (5), *dr. Rohn* (2), *dr. Vrba* (3), *dr. Zítek*, CSc. (3) — v zátvorke za menom je uvedené číslo úlohy, ktorej hodnotenie menovaný koordinoval. Hodnotenia riešení československých žiakov koordinovali vedúci delegácií tých krajín, ktoré navrhli jednotlivé úlohy. Hodnoteniu riešení a koordinácii bol venovaný aj celý *štvrtok* 15. 7. a takmer celý *piatok* 16. 7.

Vo *štvrtok* 15. 7. podával večeru na počesť zahraničných hostí predseda ONV v Žiline *s. Ing. Perkovič*. Okrem neho na večeri prehovorili rektor VŠD *prof. Ing. Ponec*, predseda MsNV v Žiline *dr. Kováčik*, *akademik Schwarz* a za zahraničných delegátov vedúci sov. delegácie *doc. Skvorcov* a vedúci holandskej delegácie *prof. van Tooren*. Posledne menovaný vo svojom vystúpení zvlášť ocenil *formu patronátov* jednotlivých závodov z okresov Žilina, Považská Bystrica a Martin nad jednotlivými družstvami, ktorá sa v histórii MMO realizovala po prvý raz. Jej iniciátorom bol *dr. Berger* a je chvályhodné, že jeho neúnavné úsilie našlo porozumenie vo vedení závodov, ktoré sa po celý *štvrtok* 15. 7. všestranne starali o zverené družstvá.

V dňoch 16. a 17. 7. podnikli *žiaci* autokarový zájazd po Slovensku, počas ktorého navštívili *Strečno*, *Martin*, *Dolný Kubín*, *Oravský zámok*, *Ružomberok*, *Lipt. Mikuláš*, *Demänovskú jaskyňu Slobody*, *Svit*, *Poprad* (nocľah), *Tatranskú Lomnicu*, *Starý Smokovec* s výstupom na *Hrebienok* a k vodopádom, *Štrbské Pleso* s prehliadkou *Areálu snov* a *Podbanské*.

Delegáti sa v piatok 16. 7. po skončení koordinácie zišli na záverečnom zasadnutí jury, ktorého plánovaný začiatok (14,00) bol posunutý o 4 hodiny pre nesúhlas niektorých delegácií s koordináciou. Riešenie nezrovnalostí sa stalo viac než trojhodinovým prológom zasadnutia. To nepriaznivo ovplyvnilo ďalší priebeh porady, ktorá sa skončila až okolo 02,30 hod. ráno. Jury sa snažila zmierniť čiastočnú vlastnú vinu, ktorej sa pri výbere úloh nechtiac dopustila tým, že pripustila pomerne náročný celok a — ako ukázali výsledky žiackych riešení — nie práve najvhodnejší pre takúto súťaž. Ako ukazuje tab. č. 3, bodový zisk prevažnej väčšiny riešiteľov bol veľmi nízky a tak sa napokon stalo, že po zamietnutí návrhu na udelenie 4. ceny, resp. pochvalného uznania sa väčšina unavených členov jury zhodla pred záverom zdĺhavého rokovania na tom, aby hranice pre udelenie cien boli: I. 42—35, II. 34—23, III. 22—11 bodov. K tomu treba poznamenať, že v minulosti sa dolná hranica pre udelenie cien pohybovala veľmi blízko polovičnej hodnoty celkového dosažiteľného počtu bodov.

Jury udelila celkom 48 cien, z toho 7 prvých, 12 druhých a 29 tretích, čo je pri 115 účastníkoch aj napriek veľmi nízkej dolnej bodovej hranici pomerne málo.

*O udelení zvláštnych cien za eleganciu riešení jednotlivých úloh, resp. za ich zovšeobecnenie sa tentoraz dlho nerokovalo. Boli udelené tri zvláštne ceny za 2. úlohu a po jednej za 3. a 4. úlohu. Za 1., 5. a 6. úlohu nebola zvláštna cena udelená vôbec. Za zmienku stojí skutočnosť, že dve zvláštne ceny (za 2. a 3. úlohu) dostal maďarský žiak *Ruzsa Imre*, ktorého možno nazvať absolútnym víťazom XIII. MMO, pretože jediný získal plný počet 42 bodov.*

*V sobotu 17. 7. sa uskutočnil pre delegátov autokarový výlet do *Vysokých Tatier*, ktorého účastníci sa vyviezli lanovkou na *Lomnický štít* a prezreli si tamojšie praco-*

visko *Astronomického ústavu SAV*. Niektorí zahraniční účastníci (delegáti *ZSSR, Poľska, Bulharska a Mongolska*) dali prednosť odpočinku po prediskutovanej noci pred lákavou exkurziou do slovenských veľhôr. Na spätočnej ceste sa výprava zastavila na *Štrbskom Plese* a prezrela si *Areál snov*.

V *nedelu* 18. 7. popoludní sa všetci účastníci *XIII. MMO* rozlúčili so *Žilinou* a odcestovali do *hlavného mesta Slovenska*, kde delegátov ubytovali v hoteli *Carlton* a žiakov vo vysokoškolskom internáte *Mladá garda*. (Počas pobytu v *Žiline* bývali žiaci vo vysokoškolskom internáte *VŠD*.)

V *pondelok* 19. 7. predpoludním usporiadal nám. ministra školstva *SSR prof. dr. Greguš*, *DrSc.* koktail pre delegátov, kým žiaci sa v tom čase pod patronátom *SÚV SZM* zoznamovali s pamätihodnosťami *Bratislavy*. Ešte pred slávnostným zakončením súťaže v aule *UK* prijal delegátov rektor *UK prof. MUDr. Emil Huraj, CSc.*

Na záverečnej slávnosti sa okrem účastníkov olympiády zúčastnili tiež pozvaní predstavitelia politického a verejného života z *Bratislavy, Žiliny* i *Stredoslovenského kraja*, členovia konzulárneho zboru, zástupcovia tlače a ďalší hostia. V jej úvode informoval stručne *akad. Schwarz* o priebehu a výsledkoch *XIII. MMO*. Potom podpredseda jury *akad. Novák* odovzdal diplomy odmeneným žiakom. Víťazi dostali zároveň hodnotné ceny venované väčšinou podnikmi zo *žilinskej oblasti*. *Prof. dr. Greguš, DrSc.*, vo svojom slávnostnom prejave vyzdvihol význam matematiky a *MMO* a poďakoval všetkým, ktorí prispeli ku zdaru *XIII. MMO*. Za zúčastnených žiakov organizátorom poďakoval maďarský žiak *Ruzsa Imre*. V mene zahraničných hostí sa s poriadateľmi *XIII. MMO* rozlúčil vedúci poľskej delegácie *doc. Mąkowski*, ktorý na záver pozval všetky zúčastnené krajiny na *XIV. MMO do Poľska*.

Večer o 19,00 hod. sa v miestnostiach hotela Carlton konala *slávnostná záverečná večera*, ktorú pre všetkých účastníkov XIII. MMO podával na rozlúčku ÚV SZM. Zúčastnili sa jej aj zástupcovia konzulárnych zborov.

So spoločenskou a kultúrno-politickou stránkou olympiády možno vysloviť spokojnosť i napriek niektorým drobným nedopatreniam v organizácii, ktorým sa pri takomto podujatí sotva možno vyhnúť. Organizačný výbor vyslovil poďakovanie všetkým pracovníkom, najmä zo Stredoslovenského kraja, členom komisií, za obetavosť, s akou sa venovali práci pri príprave a organizačnom zabezpečení celého priebehu XIII. MMO.

Pri rozbere matematickej stránky podujatia nám veľa slov ušetrí zvyčajný štatistický prehľad.

Tabuľka č. I

Členovia medzinárodnej jury a zástupcovia vedúcich delegácií

Predseda jury: Akademik Štefan Schwarz

Podpredseda jury: Akademik Josef Novák

Krajina	Vedúci delegácie — člen jury	Zástupca vedúceho
Rakúsko (A)	Thomas Mühlgassner, prof. reál. gymn. Eisenstadt	Wolfgang Ratzinger
Bulharsko (BG)	Kiril Dočev, docent mat. fakulty univerzity v Sofii	Dimo Serafimov Angelov, hlavný špecialista matema- tiky min. školstva
Kuba (C)	Luis Davidson, ústredný inšpektor min. školstva, Havana	—
ČSSR (CS)	RNDr. Jozef Moravčík, CSc., odb. asistent KMDg Fakulty SET Vysokej ško- ly dopravnej v Žiline	Jiří Mída

Krajina	Vedúci delegácie — člen jury	Zástupce vedúceho
NDR (D)	Dr. hab. Helmut Bausch, prof. vysokej školy v Berlíne	Dr. hab. Gustav Buroschi, (Manfred Mäthner, ped. ved.)
Francúzsko (F)	André Warusfel, prof. lycea Louis le Grand, Paríž	Denis Gerll, prof. lycea
Veľká Británia (GB)	Prof. Frank Budden, Royal Grammar School Newcastle	Prof. Peter Reynolds
Maďarsko (H)	Hódi Endre, techn. poradca Maď. opt. závodov v Budapešti	Dr. Reiman István
Mongolsko (M)	Uržincerendijn Sanžimja- tov, docent Mongolskej štátnej univerzity v Ulan- bátore	Dambyn Sadgar, kand. mat. — fyz. vied
Holandsko (NL)	Ary van Tooren, inšpektor stredných škôl, Haag	Artur Hoogendoorn
Poľsko (PL)	Andrzej Mąkowski, docent Matematického ústavu univerzity vo Varšave	Dr. Maciej Bryński
Rumunsko (R)	Nicolae Mihaileanu, prof. Matematického ústavu univerzity v Bukurešti	Prof. Constantin Ottescu
Švédsko (S)	Kjell-Ove Widman, Mate- matický ústav univerzity v Uppsale	Lars Wahlbin
ZSSR (SU)	Valentin Anatoljevič Skvorcov, docent MGU v Moskve	Ivan Semjonovič Petrakov, metodik min. školstva
Juhoslávia (YU)	Vladimír Mičić, docent univerzity v Belehrade	Jovan Vukmirovič

Tabuľka č. 2

Počty získaných cien

Štát Cena	A	BG	C	CS	D	F	GB	H	M	NL	PL	R	S	SU	YU
I.	—	—	—	—	1	—	—	4	—	—	1	—	—	1	—
II.	—	—	—	—	1	—	1	4	—	—	—	1	—	5	—
III.	4	—	—	1	4	—	4	—	—	2	4	4	2	2	2

Tabuľka č. 3

Počty získaných bodov

Krajina	Počet získaných bodov žiaka čís.								Súčet bodov	Súčet bodov družstva na XII. MMO
	1	2	3	4	5	6	7	8		
A	4	11	19	5	14	13	6	10	82	104
BG	3	10	3	6	8	1	4	4	39	145
C	4	1	3	1	—	—	—	—	9	na MMO po prvý raz
CS	11	8	9	6	4	7	8	2	55	145
D	7	38	23	8	18	21	11	16	142	221
F	7	1	9	5	1	6	6	3	38	141
GB	17	6	6	20	25	7	17	12	110	180
H	27	37	24	39	38	25	23	42	255	233
M	3	9	1	2	5	3	0	3	26	58
NL	4	1	2	1	20	13	2	5	48	87
PL	6	9	4	17	18	38	11	15	118	105
R	2	27	13	21	7	9	15	16	110	208
S	0	12	12	3	8	3	5	—	43	110
SU	26	24	18	35	27	32	31	12	205	221
YU	3	2	9	21	10	4	10	12	71	209

POZNÁMKA: Keďže MMO je súťažou jednotlivcov, treba považovať posledné dva stĺpce za neoficiálne a čisto informatívne. Ich vzájomným porovnaním získame aspoň relatívne merítko na potvrdenie zvýšenej obťažnosti tohtoročného výberu úloh. Z tabuľky taktiež vidno, že družstvá *Kuby* a *Švédska* prišli na XIII. MMO nekompletné.

Tabuľka č. 4

Prehľad o úspešnosti podaných riešení

Úloha č.	Počet bodov za úpl. rieš.	Počet podaných úplných riešení	Celkový počet bodov za riešenie úlohy		% úspeš- nosti
			dosiahnutý	možný	
1	5	18	284	575	49,4
2	7	14	222	805	27,6
3	9	17	194	1035	18,7
4	6	9	269	690	38,9
5	7	25	225	805	27,9
6	8	12	157	920	17,1

2. RIEŠENIA SÚŤAŽNÝCH ÚLOH

RIEŠENIE 1. ÚLOHY

Pre $n = 3$ má ľavá strana danej nerovnosti tvar

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1) \cdot (a_3 - a_2),$$

z ktorého po vynásobení a jednoduchšej úprave dostaneme pre každú trojicu a_1, a_2, a_3 reálnych čísel:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3 = \\ = \frac{1}{2}[(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2],$$

čo je zrejme číslo nezáporné.

Pre $n = 5$ dostávame na ľavej strane uvažovanej nerovnosti výraz

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + (a_2 - a_1) \cdot \\ \cdot (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \cdot \\ \cdot (a_3 - a_4) \cdot (a_3 - a_5) + (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) \cdot \\ \cdot (a_4 - a_5) + (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4),$$

ktorý je zrejme symetrický vzhľadom na čísla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , tj. nezmení sa, ak v ňom ľubovoľné dve z nich navzájom zameníme. Môžeme preto predpokladať, že platí napr.:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$$

V tomto prípade však je

$$a_1 - a_2 = -(a_2 - a_1) \geq 0, \quad a_1 - a_3 \geq a_2 - a_3 \geq 0, \\ a_1 - a_4 \geq a_2 - a_4 \geq 0, \quad a_1 - a_5 \geq a_2 - a_5 \geq 0,$$

takže platí

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + (a_2 - a_1) \cdot \\ \cdot (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) \geq 0.$$

Analogickým spôsobom dostaneme, že tiež

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) + (a_5 - a_1) \cdot \\ \cdot (a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4) \geq 0.$$

Pretože súčin

$$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)$$

je súčinom dvoch nekladných a dvoch nezáporných činiteľov, je tiež nezáporný, z čoho už vyplýva správnosť dokazovaného tvrdenia aj v tomto prípade.

K tomu, aby sme ukázali nesprávnosť daného tvrdenia

pre všetky ostatné prirodzené $n > 2$, stačí nájsť n -tícu reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak, že uvažovaná nerovnosť nebude pre ne splnená.

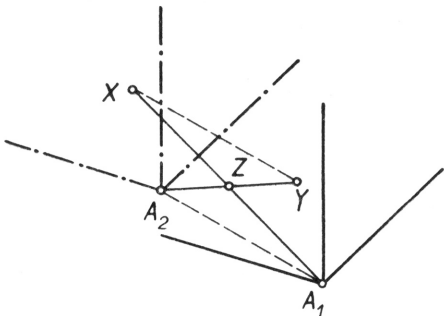
Pre $n = 4$ má túto vlastnosť každá štvorica čísel, pre ktorú platí: $a_1 = a_2 = a_3 > a_4$, pretože pre ňu má ľavá strana nerovnosti hodnotu $(a_4 - a_1)^3$, čo je zrejme číslo záporné.

Pre $n \geq 6$ stačí zvoliť napr. $a_1 = a_2 = a_3 > a_4 > a_5 = \dots = a_n$ v prípade párneho n a $a_1 = a_2 = a_3 < a_4 < \dots = a_n$ v prípade nepárneho n , pretože vtedy má ľavá strana nerovnosti hodnotu $(a_4 - a_1)^3(a_4 - a_5)^{n-4}$, čo je zrejme v oboch prípadoch záporné číslo.

RIEŠENIE 2. ÚLOHY

Označme P mnohosten, ktorý dostaneme z mnohostenu P_1 pri rovnolahlosti H so stredom A_1 a s koeficientom 2. Dokážeme, že pre každé P_i , $i = 1, 2, \dots, 9$, platí $P_i \subset P'$.

Pre $i = 1$ je toto tvrdenie zrejmé. Ak je X ľubovoľný bod mnohostena P_i , $i = 2, 3, \dots, 9$, zvolme $Y \in P_1$ tak, že X je obrazom Y pri rovnobežnom posunutí, pri



Obr. 53

ktorom sa bod A_1 premiestni do bodu A_i . Potom však úsečky A_1X , A_iY majú zrejme spoločný stred Z (pozri obr. 53). Z konvexnosti mnohostena P_1 však vyplýva, že úsečka A_iY leží celá v P_1 , teda $Z \in P_1$ a preto $X \in P'$ ako obraz bodu Z pri rovnoľahlosti H .

Označme $V(P)$ obsah mnohostena P . Zrejme platí $V(P_1) = V(P_2) = \dots = V(P_9)$, $V(P') = 2^3 V(P_1) = 8V(P_1)$. Ak by žiadne dva z mnohostenov P_i , $i = 1, 2, \dots, 9$, nemali spoločný vnútorný bod, muselo by na základe vyššie dokázaného platiť

$$9V(P_1) = V(P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_9) \leq V(P') = 8V(P_1),$$

čo je spor.

RIEŠENIE 3. ÚLOHY

Tvrdenie dokážeme zostrojením vybranej postupnosti s uvedenou vlastnosťou použitím matematickej indukcie. Predpokladajme, že každé dve z prirodzených čísel

$$a_1 = 2^{n_1} - 3, a_2 = 2^{n_2} - 3, \dots, a_k = 2^{n_k} - 3, \quad (1)$$

kde $2 = n_1 < n_2 < \dots < n_k$ sú nesúdeliteľné a zostrojme číslo $a_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3$ nesúdeliteľné s každým z čísel (1) nasledujúcim spôsobom:

Označme $s = a_1 a_2 \dots a_k$. Spomedzi $s + 1$ čísel $2^0, 2^1, \dots, 2^s$ možno vždy vybrať aspoň dve také, ktoré pri delení číslom s majú rovnaký zvyšok. Nech sú to $2^\alpha, 2^\beta$ ($\alpha > \beta$). Potom však platí

$$2^\alpha - 2^\beta = p \cdot s \quad (p - \text{prir. číslo}). \quad (2)$$

Z (2) dostaneme $(2^{\alpha-\beta} - 1)2^\beta = p \cdot s$, z čoho, vzhľadom na to, že s je číslo nepárne, vyplýva, že $2^{\alpha-\beta} - 1$ je ním deliteľné čiže

$$2^{\alpha-\beta} - 1 = q \cdot s \quad (q - \text{prir. číslo}). \quad (3)$$

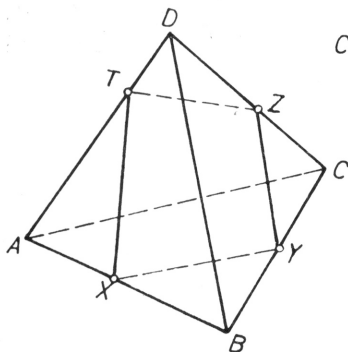
Na základe (3) dostaneme

$$2^{\alpha-\beta+2} - 3 = 4 \cdot 2^{\alpha-\beta} - 3 = 4(qs + 1) - 3 = 4qs + 1.$$

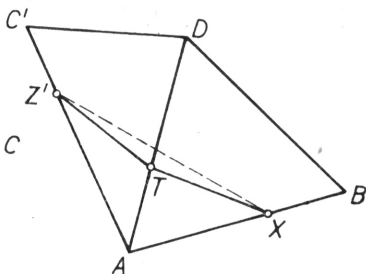
Stačí teda vziať $n_{k+1} = \alpha - \beta + 2$, $a_{k+1} = 4qs + 1$. Keďže zrejme platí $a_{k+1} > a_k$, je tiež $n_{k+1} > n_k$ a celú konštrukciu môžeme neohraničene opakovať.

RIEŠENIE 4. ÚLOHY

a) Predpokladajme, že napr. body X, Y, Z sú pevne zvolené na úsečkách AB, BC, CD (pozri obr. 54). Ak trojuholník ACD sklopíme do roviny ABD (obr. 55),



Obr. 54



Obr. 55

hneď vidíme, že súčet dĺžok $ZT + TX$ možno zmenšiť zmenou polohy bodu T , ak platí $\sphericalangle ATX \neq \sphericalangle ZTD$.

Z tejto úvahy vyplýva, že ak existuje lomená čiara minimálnej dĺžky, potom musia byť splnené nasledujúce nutné podmienky:

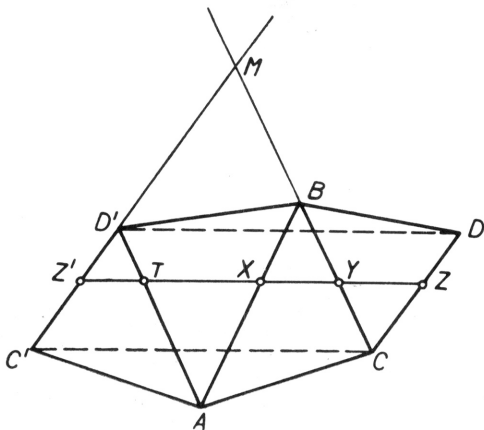
$$\begin{aligned} \sphericalangle DAB &= \pi - \sphericalangle ATX - \sphericalangle AXT, \\ \sphericalangle ABC &= \pi - \sphericalangle BXY - \sphericalangle BYX = \pi - \\ &\quad - \sphericalangle AXT - \sphericalangle CYZ, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sphericalangle BCD &= \pi - \sphericalangle CYZ - \sphericalangle CZY, \\ \sphericalangle CDA &= \pi - \sphericalangle DTZ - \sphericalangle DZT = \pi - \\ &\quad - \sphericalangle ATX - \sphericalangle CZY,\end{aligned}$$

z čoho hneď dostaneme

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CDA = 0. \quad (1)$$

b) Nech teraz platí (1). Rozrežeme povrch štvorstena $ABCD$ pozdĺž hrán AC , CD a DB a rozviňme ho do roviny. Dostaneme rovinný útvar $P = AC'D'BDC$ zložený z trojuholníkov $AC'D'$, ABD' , ABC , BCD , ktoré sú všetky podľa predpokladu ostrouhlé. Pri vhodnom označení vrcholov štvorstena (ak treba zameníme A za C , B za D a obrátene) dosiahneme, že P je konvexný (4-, 5- alebo 6-uholník). Priamky CB , $C'D'$ sú rôznobežné



Obr. 56

a pretínajú sa v nejakom bode M (obr. 56). Zo štvoruholníka $ABMD'$ však vzhľadom na (1) dostaneme hneď, že $\sphericalangle BMD' = \sphericalangle BCD$, čo znamená, že úsečky CD a $C'D'$

sú rovnobežné a súhlasne orientované. Rovnobežník $CDD'C'$ leží zrejme celý vo vnútri konvexného obrazca $\mathbf{P}$.

Každéj úsečke ZZ' rovnobežnej s CC' (a teda aj s DD') odpovedá lomená čiara $XYZTX$ minimálnej dĺžky. Z rovnoramenného trojuholníka ACC' vyplýva, že jej dĺžka je $2 \cdot AC \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha$.

RIEŠENIE 5. ÚLOHY

Pre $m = 1$ je takou množinou $\mathbf{S}$ dvojbodová množina s bodmi, ktorých vzdialenosť je 1. Nech $m \geq 2$ je dané prirodzené číslo. Matematickou indukciou podľa m sa ľahko ukáže, že v rovine existuje systém $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ vektorov týchto vlastností ($|\vec{v}|$ znamená dĺžku vektora $\vec{v}$):

$$|\vec{v}_i| = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (1)$$

$$0 \neq |c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_m \vec{v}_m| \neq \frac{1}{2} \quad (2)$$

pre ľubovoľné čísla $c_1, c_2, \dots, c_m$, ktoré nadobúdajú len niektorú z hodnôt $-1, 0, 1$, ale aspoň dve z nich rôzne od nuly.

Ukážeme, že požadované vlastnosti má množina $\mathbf{S}$ pozostávajúca z 2^m bodov, ktorú možno popísať takto:

Ak B_0 je ľubovoľný bod danej roviny, potom do množiny $\mathbf{S}$ patria všetky body B určené predpisom

$$B = B_0 + \varepsilon_1 \vec{v}_1 + \varepsilon_2 \vec{v}_2 + \dots + \varepsilon_m \vec{v}_m,$$

kde $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2, \dots, m$.

Z (1) a (2) vyplýva, že ak nejaký bod $A \in \mathbf{S}$ (prislúcha mu určitá kombinácia znamienok $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$), potom v $\mathbf{S}$

existuje práve m bodov, ktorých vzdialenosť od A sa rovná jednej. Sú to práve tie body, pre ktoré príslušná kombinácia znamienok sa líši od $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ práve na jednom mieste.

RIEŠENIE 6. ÚLOHY

Utvorme súčty všetkých čísel v jednotlivých riadkoch a v jednotlivých stĺpcoch a označme p najmenší z týchto súčtov. Ak $p \geq \frac{1}{2}n$, potom pre súčet s všetkých čísel tabuľky zrejme platí

$$s \geq np \geq \frac{1}{2}n^2$$

a tvrdenie je pravdivé.

Nech teraz $p < \frac{1}{2}n$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že práve prvý riadok má súčet p a práve čísla na prvých q miestach v ňom sú rôzne od nuly. Potom však súčet čísel v posledných $n-q$ stĺpcoch sa rovná aspoň $(n-p)(n-q)$, zatiaľ čo súčet všetkých čísel v prvých q stĺpcoch bude najmenej pq . Platí teda

$$\begin{aligned} s &\geq (n-p)(n-q) + pq = n^2 - n(p+q) + 2pq = \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}(n-2p)(n-2q) > \frac{1}{2}n^2, \end{aligned}$$

pretože $n > 2p \geq 2q$.

3. ÚČASŤ ČESKOSLOVENSKEHO DRUŽSTVA

Vedúcim československého družstva bol RNDr. Jozef Moravčík, CSc., odb. asistent Vysokej školy dopravnej v Žiline, podpredseda ÚV MO a jeho zástupcom bol

s. Jiří Mída, odb. asistent Pedagogickej fakulty Karlovej university v Prahe, tajomník ÚV MO. Členovia družstva boli vybraní na záver sústreďenia 12 žiakov v *Brandýse n. L.* na základe výsledkov v II. a III. kole XX. ročníka MO a na základe hodnotenia pracovníkov, ktorí viedli jednotlivé semináre na sústreďení. Podrobné výsledky československých účastníkov XIII. MMO podáva tabuľka na str. 164.

Ako z tabuľky vidno, poradili si naši žiaci ako—tak len s 1. a 4. úlohou, ktoré boli všeobecne označované za najľahšie. Rozhodne viac sa od nich čakalo v 2. a 5. úlohe, ktoré čo do náročnosti nemuseli byť nad ich sily. Výsledok v 3. a 6. úlohe je úplne zdrvivý, ale dá sa čiastočne vysvetliť tým, že tieto úlohy boli opravdu náročné a nie celkom vhodné pre takúto súťaž, pretože ich riešenia sa zakladali na obratoch nie celkom bežných pre stredoškolákov.

Kvôli úplnosti treba poznamenať, že výber družstva bol sťažený tým, že traja z úspešných riešiteľov III. kola XX. ročníka MO dali prednosť atraktívnejšej ceste do Sofie na V. medzinárodnú fyzikálnu olympiádu. Išlo o žiakov, ktorí sa v III. kole XX. ročníka MO umiestnili na 3., 6.—7. a 9.—12. mieste. Je však otáznosť, či by v prípade svojej účasti na XIII. MMO boli dosiahli lepšie výsledky než ich náhradníci. Skutočnosť, že družstvo ČSSR skončilo v dolnej polovici neoficiálneho poradia nie je totiž náhodná a treba s ňou počítať za súčasného stavu i pre najbližšiu budúcnosť. V tejto súvislosti stojí za zmienku, že v *Maďarskej ľudovej republike* slúži pre výchovu matematických talentov o. i. 7 škôl so špeciálnymi matematickými triedami, v ktorých je až 12 hodín matematiky týždenne, pričom osnovy matematiky v týchto triedach sú iné než v ostatných triedach. (U nás v špeciálnych triedach, ktoré máme v celej ČSSR tri, je maximálne 6 hodín matematiky týždenne a osnovy

Číslo žiaka	Meno a priezvisko žiaka	Trieda, škola, miesto	Počet bodov dosiahnutých za riešenie úlohy číslo						Súčet bodov	Cena
			1	2	3	4	5	6		
1	Jan Brychta	3., gymn. Praha	4	3	0	3	0	1	11	III.
2	Anton Černý	3., SVŠ Bratislava	3	0	0	4	1	0	8	—
3	Jan Franců	3., SVŠ Bratislava	3	1	0	5	0	0	9	—
4	Karel Horák	2., gymn. Strakonice	4	0	0	2	0	0	6	—
5	Helena Husová	3., SVŠ Praha	2	1	0	0	1	0	4	—
6	Miroslav Kmošek	3., gymn. Brno	2	0	0	5	0	0	7	—
7	Štefan Sakáloš	3., SVŠ Prievidza	2	0	0	6	0	0	8	—
8	Imrich Vrto	2., gymn. Rim. Sobota	1	0	0	0	1	0	2	—
Súčet počtu bodov			21	5	0	25	3	1	55	

matematiky sú v nich prakticky rovnaké ako v ostatných triedach.) Podobne ako v *MLR* sa o matematické talenty starajú aj v *ZSSR* a v *NDR*. Tak napr. v *Kyjeve*, *Moskve*, *Novosibirsku* a iných sovietskych univerzitných mestách sú veľmi kvalitné stredné školy, nad ktorými majú po odbornej stránke patronát príslušné univerzity. Učia na nich čiastočne vysokoškolskí učitelia. Podobne sa o výchovu talentov stará napr. *Humboldtova univerzita v Berlíne*. Uvedená činnosť plne podporovaná ministerstvami školstva neslúži samozrejme len príprave reprezentantov pre *MMO*, ale má značný význam pre prípravu stredoškolákov pre vysokoškolské štúdium.

Ako ukázali diskusie so zahraničnými delegátmi, podobná cieľavedomá a centrálna riadená činnosť pri výchove matematických talentov sa rozbieha tiež napr. v *Bulharsku*, *Rakúsku*, *Juhoslávii*, a vo *Veľkej Británii*. Preto, ak nechceme trvale zaostať nielen na *MMO*, ale hlavne v úrovni výchovy matematicky nadaných žiakov, bude treba, aby naše ministerstvá školstva prijali čím skôr účinné opatrenia v tomto smere. Niektoré doporučenia im predložil jednak organizačný výbor *XIII. MMO* a jednak *ÚV MO* pri hodnotení celkových výsledkov *XIII. MMO*. Treba dúfať, že tieto hlasy budú čoskoro vypočuté a po postupnom cieľavedomom realizovaní predložených návrhov sa dosiahne želateľná náprava.

OBSAH

Předmluva	3
I. O průběhu XX. ročníku matematické olympiády	7
II. Přípravné úlohy I. kola	24
1. Kategorie A	24
2. Kategorie B	29
3. Kategorie Z	38
III. Soutěžní úlohy I. kola	47
1. Kategorie A	47
2. Kategorie B	60
3. Kategorie Z	81
IV. Soutěžní úlohy II. kola	93
1. Kategorie A	93
2. Kategorie B	109
3. Kategorie Z	117
V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A	123
VI. Zpráva o XIII. mezinárodní matematické olympiádě	143

Edice Pomocné knihy pro žáky

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Vlastimil Macháček, Jiří Mída a dr. Jozef Moravčík, CSc.

DVACÁTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1972 — Počet stran 168
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk
Technická redaktorka: Marcela Kašparová

Vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 2, Ostrovní 30, Praha 1
AA 6,39 (5,49 AA textu, 0,90 AA grafiky) — VA 6,75
Náklad 3550 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/2
Cena brožovaného výtisku Kčs 8,50
505/21, 852

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 25-0-06

14-545-72	Kčs 8,50
-----------	----------

matematická
olympiáda



SPN 25-0-06

14-545-72
03/2 Kčs 8,50