

23. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 23. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1976.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404642>

Terms of use:

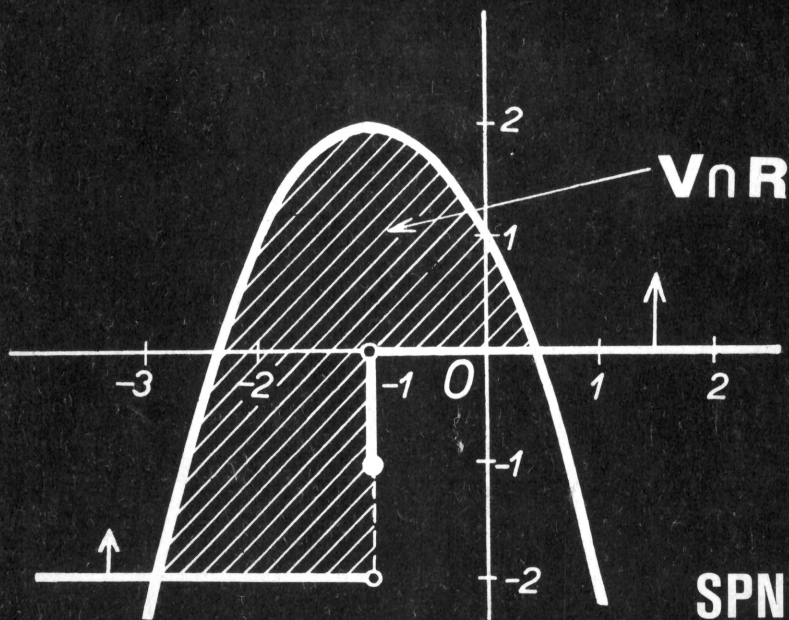
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

XXIII. ročník matematické olympiády



DVACÁTÝ TŘETÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Petr Fabinger, dr. Jiří Mída, doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.
a dr. František Zítek, CSc.

Slovenské části textu přeložil doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.

Recenzovali dr. Jitka Kučerová a dr. Miroslav Šisler, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1975

Předmluva

Milí mladí přátelé,

otvíráte nový svazek o XXIII. ročníku matematické olympiády a jste možná zvědaví, co nového tento ročník přinesl ve srovnání s předcházejícími léty.

Zvláště to bude zajímat vás starší, kteří soutěžíte v nejvyšší kategorii, neboť k určitým změnám došlo právě při přípravě na mezinárodní matematickou olympiádu a v přípravných kursech žáků nejvyšších ročníků gymnázií.

Ústřední výbor MO po dlouhá léta usiluje o to, aby se v souvislosti s matematickou olympiádou rozvíjela a zintenzivňovala i péče o matematické talenty. Ovšem žádná z pomocných akcí nemůže nahradit systematické vedení nadaných žáků, jaké jim může poskytnout jen dobře organizovaná škola. Proto ÚV MO byl jedním z iniciátorů zřízení tzv. matematických gymnázií, škol podobných těm, které již byly zřízeny v řadě socialistických zemí. Idea podchytit pomocí internátních škol i ty studenty, kteří nežijí ve velkých městech, zajistit jim dobrou výuku, studijní literaturu i péči vysokoškolských učitelů v sídle školy, je bezesporu zdravá a mohla by přinést mnoho užitku jak žákům, tak vysokým školám i reprezentaci našeho státu na mezinárodním fóru.

V září 1974 byly otevřeny na čtyřech místech v ČSSR třídy se zaměřením na matematiku, které mají tuto myšlenku uskutečnit. Doufejme, že po překonání počátečních obtíží s vydáváním učebních textů, s ubytováním v internátech apod. se práce plně rozvine a že tyto třídy ovlivní i umístění našich olympioniků na mezinárodních matematických olympiádách. Dosavadní příprava družstva pro mezinárodní matematickou olympiádu je prozatím stále odkázána na semináře ve velkých městech a na školení jednotlivců vedená v obdobném stylu v některých menších střediscích.

Zmíňme se ještě o jedné nové pomocné akci, kterou navrhl doc. dr. Jozef Moravčík už pro školní rok 1974/75. Jde o *korespondenční seminář*, určený zejména nadějným žákům bydlícím mimo hlavní centra. Je to tedy jistá obdoba známé sovětské „zaočné školy“.*)

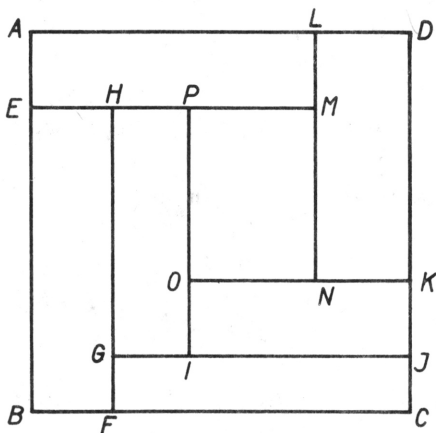
Účastníci se nezískávají nábořem, ale jsou vybíráni jednak z podnětů ÚV MO, jednak KV MO. Registrovaní účastníci dostávají poštou listy s úlohami z určitých témat. V stanoveném termínu se zasláná řešení opraví a opravené úlohy se zodpověděnými dotazy se vrátí řešitelům s příslušnými připomínkami. Pro korektory úloh — což jsou většinou vědečtí pracovníci nebo vysokoškolští učitelé — je tato práce velmi časově i didakticky náročná, ale doufáme, že tato forma bude představovat aspoň malý krůček vpřed v péči o nadané žáky a v přípravě družstva pro mezinárodní olympiády; a to aspoň v období, než se počnou projevovat výrazněji účinky zřízení matematických tříd.

*) Jde o jakési studium řízené na dálku, při němž si dopisují účastníci s vedením akce.

Písemné školení je vždy těžkopádnější a namáhavější než obvyklá forma výuky, hlavně protože schází osobní styk mezi učitelem a žákem; ale právě tato okolnost má také svou dobrou stránku. Obě strany (učitel i žák) si musí více dávat pozor na svůj písemný projev, dbát o to, aby byl úplný, přesný a srozumitelný. Pro korigujícího je to jakási škola didaktiky, pro žáka — eventuálního člena mezinárodního družstva — je to dobrá průprava pro mezinárodní olympiádu. Mimoto korespondenční semináře mají charakter individuální péče, a to je také významný klad.

Myslíme, že bychom mohli a měli využít této nové formy studia i k řešení technicky náročných úloh, které neztratí svůj význam ani při intenzivním nasazení prostředků moderní výpočtové techniky. Jde např. o algebraické výpočty na první pohled namáhavé, nudné a zdlouhavé, které se však nemohou provádět strojem, neboť jde v podstatě o sestavování programů. Pracnost a zdlouhavost výpočtu primitivním způsobem podněcuje řešitele k tomu, aby hledal účinnější metody. Budeme-li takové úlohy zařazovat třeba i do korespondenčního semináře, budeme tím snad aspoň trochu potírat onu „kondicionální matematiku“, která se v poslední době ve školách tolik rozmáhá: dospěje-li se do situace, která vyžaduje dlouhý, nudný výpočet, obětuje se raději výsledek, popřípadě i diskuse o něm, a řekne se prostě, že „by se dále postupovalo tak a tak“ (např. že by se rozřešila soustava lineárních rovnic s pěti parametry) „a úloha by byla rozřešena“.

Uvedeme několik příkladů úloh tohoto druhu z francouzské knížky o problémovém vyučování*), a to z kapitoly o „technických úkolech“.



Obr. 1

První je jedna ze Steinhausových**) úloh. Jednotkový čtverec $ABCD$ je rozdělen podle obr. 1 na sedm pravoúhelníků téhož obsahu ($\frac{1}{7}$). Máme zjistit, zda je úloha řešitelná, kolik má řešení a vypočítat délky stran všech sedmi pravoúhelníků. Označí se např. $BE = x$; z 12 rovnic, které nejsou lineární, dojdeme po eliminaci neznámých k jediné rovnici pro x :

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{32}{49}x - 15 = 0.$$

*) Le Livre du Problème, fasc. 1, vydal IREM Strassbourg v nakladatelství CEDIC, Lyon—Paris 1973.

**) H. Steinhaus je významný polský matematik.

Vzhledem k podmínkám

$$\frac{1}{7} < x < \frac{6}{7}, \quad x \neq \frac{1}{2}$$

dostaneme jediný možný kořen

$$x = \frac{1}{14}(7 + \sqrt{19}),$$

který skutečně vyhovuje, jak zjistíme zkouškou. Výpočet stojí za trochu přemýšlení.

2. Jiný příklad: Máme vypočítat součin všech 16 čísel $1 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{7}$, která dostaneme všemi 16 možnými volbami znamének. Primitivní výpočet by trval mnoho hodin. Jednoduché použití formule $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ho podstatně zkrátí. Úlohu lze zobecnit pro libovolný počet členů.

3. Máme vypočítat desátou (n -tou) derivaci funkce $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, tj. $x \mapsto e^{-1/x^2}$. Víme-li, že n -tá derivace bude mít tvar

$$x \mapsto \frac{1}{x^{3n}} P_n(x) \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

kde $P_n(x)$ je polynomická funkce stupně $n - 1$, je třeba najít rekurentní vzorec pro P_n a počítat příslušné koeficienty. Výsledek je

$$\begin{aligned} P_{10}(x) = & 1\,024 - 69\,120x + 1\,820\,160x^2 - \\ & - 24\,111\,360x^3 + 173\,033\,280x^4 - \\ & - 676\,257\,120x^5 + 1\,377\,129\,600x^6 - \end{aligned}$$

$$- 1\,317\,254\,400x^7 + 479\,001\,600x^8 - \\ - 39\,916\,800x^9.$$

Je jasné, že tento výsledek vybízí k sestavení účinného programu pro výpočet; úloha se ovšem nesmí předkládat řešitelům jako ryze rutinní, cvičná.

Zkuste si rozřešit uvedené tři úlohy „mimo soutěž“.

Doufáme, že průběhem doby se najdou i další typy úloh vhodných pro korespondenční semináře a že se tím zvýší tvořivá práce jejich účastníků.

Ústřední výbor matematické olympiády

I. Průběh XXIII. ročníku matematické olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Pořadatelem soutěže XXIII. ročníku matematické olympiády byla opět *ministerstva školství ČSR s SSR s Matematickým ústavem ČSAV v Praze (MÚ ČSAV)* a s *Jednotou čs. matematiků a fyziků (JČSMF)* za spolupráce s orgány *Socialistického svazu mládeže (SSM)*. Protože připravovaný nový statut MO nebyl dosud schválen, řídila se soutěž XXIII. ročníku MO opět podle statutu, který byl uveřejněn ve *Věstníku MŠK*, roč. XIX, str. 126, 127, směrnice 37, ze dne 30. IV. 1963.

Žáci soutěžili celkem ve čtyřech kategoriích: *kategorie A* je určena pro žáky III. a IV. ročníků škol II. cyklu, *kategorie B* pro žáky II. ročníků a *kategorie C* pro žáky I. ročníků těchto škol. V *kategorii Z* soutěží žáci základních devítiletých škol, především žáci 9. ročníků. Bylo ovšem možné, aby žák soutěžil i ve vyšší kategorii, než do které patřil.

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Funkční období ÚV MO, schváleného MŠ ČSR 18. ledna 1971 a MŠ SSR 3. prosince 1970, skončilo 31. prosin-

ce 1974. Do této doby pracoval ÚV MO v tomto složení:

Předseda: *doc. Jan Vyšín, CSc.*, vědecký pracovník
MÚ ČSAV, Praha

I. místopředseda: *dr. Jozef Moravčík, CSc.*, docent VŠD,
Žilina

II. místopředseda: *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.*,
vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV

I. jednatel: *dr. Vlastimil Macháček*, odborný asistent
pedagogické fakulty KU, Praha

II. jednatel: *dr. Jiří Mída*, odborný asistent pedagogické
fakulty KU, Praha

Členové:

Zástupce MŠ ČSR: *Václav Šůla*, ústřední škol. inspektor
MŠ ČSR, Praha

Zástupce MŠ SSR: *Michal Zöldy*, ústřední škol. inspektor
MŠ SSR, Bratislava

Zástupce ÚV SSM: *Jana Pomazalová*, profesorka gymnázia,
Brno

dr. František Běloun, vedoucí matematického kabinetu
KPÚ, Praha

dr. Miloš Franek, ředitel gymnázia, Prievidza

dr. Jozef Gruska, CSc., vědecký pracovník MÚ SAV, Bratislava

dr. Milan Hejný, CSc., docent PF UK, Bratislava

František Hradecký, odborný asistent MFF KU v. v., Praha

prof. dr. Milan Kolibiar, DrSc., profesor PF UK, Bratislava

dr. Ivan Korec, CSc., odborný asistent PF UK, Bratislava

akademik Josef Novák, ředitel MÚ ČSAV, Praha

Vítazoslav Repáš, ředitel gymnázia, Bratislava
dr. Jiří Sedláček, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV, Praha
Jiří Šídlo, zástupce ředitele gymnázia, Praha
Miroslav Šmerda, učitel ZDŠ, Bílovice n. Svitavou
František Veselý, odborný asistent v.v., Praha
dr. František Zítek, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV,
Praha

Dalšími členy ÚV MO byli předsedové krajských výborů matematické olympiády:

prof. dr. Václav Pleskot, profesor ČVUT, Praha
Ludmila Tréglová, profesorka gymnázia, Říčany
ing. dr. Lada Vaňatová, profesorka gymnázia, Strakonice
Věra Rádlová, profesorka gymnázia, Plzeň
Karel Hnyk, odborný asistent pedagogické fakulty, Ústí n.L.
Jan Lašťovka, vedoucí kabinetu matematiky KPÚ, Hradec
Králové

dr. Petr Benda, odborný asistent VUT, Brno
Josef Andrys, docent pedagogické fakulty, Ostrava
Katarína Hajtášová, odborná asistentka PF UK, Bratislava
dr. Oliver Ralík, odborný asistent pedagogické fakulty,
Nitra

dr. Ladislav Berger, odborný asistent VŠD, Žilina
Kveta Hončarivová, odborná asistentka PF UPJŠ, Košice

Pracovní předsednictvo ÚV MO (PÚV MO) tvořili (v abecedním pořadí): *prof. dr. Miroslav Fiedler*, DrSc.; *dr. Vlastimil Macháček*; *dr. Jiří Mída*; *doc. dr. Jozef Moravčík*, CSc.; *dr. Jiří Sedláček*, CSc.; *doc. Jan Vyšín*, CSc.; *dr. František Zítek*, CSc. a zástupci MŠ ČSR a SSR.

V r. 1974 působili jako předsedové v KV MO Severočeského kraje *Vladimír Blažek*, odborný asistent pedagogické fakulty v Ústí n. L., v KV MO Východočeského kraje *Josef Kubát*, odborný asistent VŠCHT v Pardubicích a v KV MO Severomoravského kraje *prof. dr. Miloslav Zedek* z PF UP v Olomouci.

Od 1. ledna 1974 převzal funkci I. jednatele *Petr Fabinger*, odborný asistent pedagogické fakulty UK, Praha.

Do konce června 1974 nebylo složení nového ÚV MO schváleno ani MŠ ČSR ani MŠ SSR.

3. SCHŮZE ÚV MO

Ve školním roce 1973/74 se konalo jedno *plenární zasedání ÚV MO ve dnech 10. a 11. prosince 1973 v Praze*. Při hodnocení XXII. ročníku poukázala většina přítomných předsedů KV MO na růst počtu účastníků MO v I. kole. Většina KV MO pořádá pro olympioniky pracovní přednášky (zejména v podzimním období), v létě pak soustředění pro účastníky kategorií B a C. Tato soustředění trvají obvykle jeden týden.

Při těchto přednáškách a soustředěních by se mělo více používat svazků edice ŠMM. Pro učitele ZDŠ pořádaly KV MO společně s KPÚ instruktáže věnované úlohám kategorie Z. Bylo konstatováno, že v některých krajích se těžko získávají pracovníci pro MO, neboť některé školské orgány patřičně úlohu soutěže-neoceňují.

Dále bylo zhodnoceno týdenní přípravné soustředění na XV. MMO, které se konalo koncem června v průmyslové

škole v Praze-Malešicích. Soustředění účastníků kategorie B a C se konalo ve Žďáru nad Sázavou v druhé polovině června a začátkem července.

Dále byla projednána zpráva komise pro ŠMM. Doporučuje, aby edice byla rozdělena na dvě řady, základní a výběrovou. Je potěšitelné, že se objevují i rukopisy slovenské, které půjdou r. 1974 do tisku. Trvá však nedostatek autorů pro základní řadu.

Zasedání věnovalo pozornost i blížícímu se 25. výročí MO. Byl schválen návrh vydat v edici ŠMM zvláštní svazek, věnovaný jubileu MO. Dále bylo navrženo zhotovit Zelinkovu medaili, která by byla poprvé udělována k 25. výročí MO zasloužilým pracovníkům této soutěže.

Ve školním roce 1974/75 budou otevřeny třídy se zaměřením na matematiku. Na zasedání byla prodiskutována otázka výběru žáků pro tyto třídy a organizační otázky spojené s otevřením těchto tříd.

Bylo jednáno i o novém statutu MO.

Zasedání ve Strakoncích, které se konalo u příležitosti celostátního kola MO, se zúčastnili jen někteří členové ÚV MO, neboť definitivní složení nového ÚV MO nebylo ještě známo, jak ostatně již bylo podotknuto. Byly projednány opět otázky ŠMM a jejího poslání, soustředění olympioniků, příprava na MMO a jubilea MO. Matematické třídy budou otevřeny na gymnáziu v Praze 2, ul. W. Piecka, na gymnáziu v Bílovci u Ostravy, v Bratislavě na gymnáziu v ul. Červenej armády a v Košicích na gymnáziu ve Šmeralově ulici. Velkou pozornost věnovalo zasedání organizaci práce nového ÚV MO. Byl schválen návrh na

ustavení komisí při ÚV MO, jejichž úkolem by bylo recenzovat úlohy došlé do konkursu JČSMF a JSMF, sestavit z nich soutěžní úlohy pro jednotlivá kola soutěže, dbát o ŠMM a soustředění olympioniků a připravit vydání ročenky MO.

Jarní zasedání ÚV MO se konalo ve zvláště slavnostním ovzduší, neboť okresní i městské orgány státní i stranické věnovaly přípravě celostátního kola značnou pozornost a připravily jak pracovníkům ÚV MO, tak i soutěžícím srdečné přijetí a velmi dobré pracovní podmínky. Kulturní večer, na němž účinkovali mj. *Prácheňský soubor písní a tanců* a žáci LŠU se svými učiteli, dlouholetí pracovníci MO hodnotili jako nejkrásnější večer v historii MO.

4. PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

Organizace jednotlivých kol soutěže nebyla ve XXIII. ročníku MO nijak podstatně změněna; byly pouze upraveny dílčí termíny odevzdání úloh, resp. posunuty termíny II. kola.

I. kolo, tzv. studijní, proběhlo opět ve dvou etapách. Čtyři přípravné úlohy odevzdávali soutěžící všech kategorií svým učitelům (referentům MO) do 15. listopadu 1973. Úlohy byly opraveny, ale neklasifikovány, takže každý žák měl možnost se zúčastnit soutěžní části prvního kola. V této soutěži, končící pro kategorii A 15. ledna 1974 a pro kategorii B a C 15. února 1974, museli žáci podle vlastního výběru vyřešit ze 6 úloh aspoň 3 na známku aspoň „dobrou“,

aby mohli být navrženi do II. kola. V kategorii Z bylo podmínkou pro navržení do II. kola vyřešení aspoň tří úloh ze čtyř na známku aspoň „dobrou“.

II. kolo se konalo v jednotlivých kategoriích v těchto termínech:

kategorie A:	2. března 1974
kategorie B a C:	30. března 1974
kategorie Z:	6. března 1974

Celostátní III. kolo kategorie A se konalo ve Strakonících 3. a 4. května 1974.

Některé KV MO zorganizovaly krajské III. kolo v kategorii Z. Na Slovensku se konalo toto kolo v jednotném termínu pro všechny slovenské kraje s jednotnými příklady.

Podrobné údaje o výsledcích soutěže v jednotlivých kategoriích a kolech podávají tabulky 1 až 4.

Proti poslednímu ročníku se počet žáků, kteří začínají soutěžit, prakticky nemění u kategorií A a B nebo dokonce zvyšuje u kategorií C a Z. Zaráží však skutečnost, že procento úspěšných řešitelů klauzurních kol je proti loňskému ročníku podstatně menší. Vysvětlení tohoto jevu obtížností příkladů II. kola je jistě neúplné a bude nutno hledat i příčiny další.

5. POMOCNÉ AKCE

Těžiště přípravy vybraných úspěšných řešitelů MO jako možných reprezentantů na XVI. MMO spočívalo opět v semináři, který se konal na gymnáziu v Praze 2, ul. W. Piecka.

Na tomto školení přednášel prof. dr. M. Fiedler, DrSc., doc. J. Vyšín, CSc., dr. J. Sedláček, CSc., dr. Fr. Zítek, CSc. a dr. J. Hojdar, všichni z MÚ ČSAV, a doc. dr. Zb. Nádeník, DrSc. z ČVUT. K přednáškám byly vypracovány sylaby s texty úloh, které byly dávány k dispozici KV MO pro školení v jejich střediscích.

Od 17. do 22. června 1973 se konalo přípravné soustředění 12 nejúspěšnějších řešitelů III. kola kategorie A. Z nich vybralo PÚV MO na své schůzi 22. června 1974 osmičlenné reprezentační družstvo pro XVI. mezinárodní matematickou olympiádu v Erfurtu (NDR). Na soustředění byla probírána tato témata:

dr. Vl. Macháček: Vybrané úlohy z geometrie

dr. J. Hojdar: Nerovnosti a nerovnice

dr. A. Vrba, CSc.: Posloupnosti, kombinatorika, matematická indukce

doc. dr. J. Moravčík, CSc.: Teorie čísel

L. Herrmann: Funkce

Soustředění úspěšných řešitelů MO a FO kategorie B a C se konalo od 17. června do 6. července 1974. Byly opět vybrány tři třídy – matematická, fyzikální a matematicko-fyzikální. Matematický obsah školení tvořily přednášky:

a) *Dr. Josef Hojdar:* Analytická geometrie a lineární algebra

b) *Dr. Jiří Jarník, CSc.:* Vyšetřování vlastností reálných funkcí

c) *Doc. dr. Alois Kufner, CSc.:* Elementární nerovnosti

d) *Doc. dr. Zbyněk Nádeník, DrSc.:* Geometrické nerovnosti

- e) *Dr. Ivan Korec, CSc.:* Velká čísla
- f) *Dr. Antonín Vrba, CSc.:* Princip matematické indukce, jeho využití a postavení v matematice

6. STUDIJNÍ LITERATURA

Letáky MO vyšly v ČSR v září, na Slovensku o něco později. Texty úloh MO uveřejnily časopisy *Rozhledy matematicko-fyzikální* a *Matematika a fyzika ve škole*.

V *Mladé frontě* pokračovalo vydávání edice *Škola mladých matematiků*; vyšly tyto další svazky:

č. 34 (na obálce knihy uvedeno mylně 33) *Ladislav Rieger: O grupách*

č. 35 *Alois Kufner: Co asi nevíte o vzdálenosti*

č. 30 *Milan Koman - Jan Vyšín: Malý výlet do moderní matematiky (reedice)*

Další svazky jsou v recenzním řízení nebo v tisku.

KONKURS JČSMF A JSMF NA NÁVRHY ÚLOH PRO MO

Během své existence od roku 1966 se stal tento nepřetržitě probíhající konkurs organickou součástí MO. Bez úloh získaných jeho prostřednictvím by se jen s velkými obtížemi sestavovaly úlohy pro jednotlivá kola.

Podmínky konkursu jsou od XXIII. ročníku uveřejňovány v letácích s úlohami.

V období od 1. září 1973 do 31. srpna 1974 došlo do konkursu celkem 97 úloh od 24 autorů. Ve XXIII. ročníku MO bylo použito 60 úloh získaných konkursem.

Tabulka 1

Výsledky kategorie A

K r a j	Kolo					
	I.		II.		III.	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	104	88	81	43	23	12
Středočeský	78	61	54	7	2	1
Jihočeský	81	47	41	9	2	2
Západočeský	60	53	48	8	2	0
Severočeský	63	51	51	9	3	0
Východočeský	65	64	59	8	7	1
Severomoravský	72	58	58	23	13	3
Jihomoravský	186	123	113	45	13	0
Bratislava	37	36	36	17	7	2
Západoslovenský	133	112	108	12	1	1
Středoslovenský	79	72	72	13	5	1
Východoslovenský	18	10	9	4	1	0
Celkem	976	775	730	198	79	23

Tabulka 2

Výsledky kategorie B

K r a j	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	76	63	60	27
Středočeský	67	61	51	3
Jihočeský	42	30	27	4
Západočeský	48	33	27	2
Severočeský	78	48	41	13
Východočeský	44	37	30	10
Jihomoravský	89	60	56	17
Severomoravský	75	56	51	6
Bratislava	4	32	32	13
Západoslovenský	134	91	90	18
Středoslovenský	95	73	73	4
Východoslovenský	46	17	16	3
Celkem	798	601	554	120

Tabulka 3

Výsledky kategorie C

Kraj	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	126	93	86	24
Středočeský	122	91	65	13
Jihočeský	85	75	58	17
Západočeský	69	53	32	11
Severočeský	113	70	58	17
Východočeský	154	144	122	24
Jihomoravský	204	152	141	27
Severomoravský	128	105	102	31
Bratislava	101	59	56	8
Západoslovenský	176	138	135	47
Středoslovenský	145	120	115	8
Východoslovenský	141	92	51	3
Celkem	1564	1192	1021	230

Tabulka 4**Výsledky kategorie Z**

Kraj	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	1 274	683	577	177
Středočeský	791	446	359	122
Jihočeský	511	310	286	79
Západočeský	444	228	217	41
Severočeský	749	462	367	116
Východočeský	694	467	436	152
Jihomoravský	1 278	745	680	152
Severomoravský	930	540	487	136
Bratislava	685	456	443	47
Západoslovenský	1 553	1 170	1 146	237
Středoslovenský	1 313	774	648	112
Východoslovenský	1 111	768	766	190
Celkem	11 333	7 049	6 412	1 561

PŘÍLOHA A

POŘADÍ ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ II. KOLA VE XXIII. ROČ. MO

V seznamu je uvedeno nejvýše prvních deset úspěšných řešitelů. Pokud není uveden typ školy, jde o gymnázium.

HLAVNÍ MĚSTO PRAHA

Kategorie A

Pavel Ferst, 4.d, Sladkovského n., Praha 3; *Martin Bauman*, S1s, Učňovský závod ČKD Praha 9; *Anna Pudláková*, 4.e, W. Piecka, Praha 2; *Michael Valášek*, 3.d, W. Piecka, Praha 2; *Alena Vencovská*, 4.b, Štěpánská, Praha 1; *Jiří Měska*, 4.d, Sladkovského n., Praha 3; *Václav Salač*, 4.a, Ohradní, Praha 4; *Jan Hugo*, 3.c, Sladkovského n., Praha 3; *Richard Görtler*, 3.d, W. Piecka, Praha 2; *Alexandr Fuchs*, 4.a, Přípotoční, Praha 10.

Kategorie B

Václav Kotěšovec, W. Piecka, Praha 2; *Tomáš Kotrba*, Štěpánská, Praha 1; *Karel Suchomel*, Štěpánská, Praha 1;

Pavel Komárek, W. Piecka, Praha 2; *Lenka Svobodová*, Nad štolou, Praha 7; *Magda Volkeová*, Leninova, Praha 6; *Vladimír Daněk*, W. Piecka, Praha 2; *Marek Špínka*, W. Piecka, Praha 2; *Daniel Vyhňalík*, Sladkovského n., Praha 3; *Mirko Eisler*, W. Piecka, Praha 2.

Kategorie C

Jiří Kolafa, W. Piecka, Praha 2; *Josef Moural*, Štěpánská, Praha 1; *Irena Hegerová*, W. Piecka, Praha 2; *Jan Dvořák*, W. Piecka, Praha 2; *Miloš Mrkvička*, Štěpánská, Praha 1; *Otto Volf*, W. Piecka, Praha 2; *Jiří Peterka*, Nad Turbovou, Praha 5; *Anna Čermáková*, Štěpánská, Praha 1; *Oskar Harousek*, Leninova, Praha 6; *Martin Kalina*, nám. Lidových milicí, Praha 9.

STŘEDOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Vladimír Meier, 4. r., Mladá Boleslav; *Vlastimil Klíma*, 2. r., Benešov; *Jan Procházka*, 3. r., Mladá Boleslav; *Jiří Somer*, 3. r. Nymburk; *Pavel Tvrdík*, 3. r., Kolín; *Tomáš Frajer*, 3. r., SPŠ, Čáslav; *Karel Karlík*, 3. r., Čáslav.

Kategorie B

Vlastimil Klíma, 2. r., Benešov; *Vojtěch Zadražil*, 2. r., Český Brod; *Hana Janoušková*, 2. r., Sedlčany.

Kategorie C

Jan Bázler, 1. r., Mladá Boleslav; *Eduard Feireisl*, 1. r., Nové Strašecí; *Josef Blažek*, 1. r., Mnichovo Hradiště; *Karel Jenčík*, 1. r. SPŠ, Kutná Hora; *Vladimír Červenka*, 1. r., Kutná Hora; *Jiří Sobotka*, 1. r., Nymburk; *Karel Žák*, 1. r., Beroun; *Iva Šolarová*, 1. r., Benešov; *Josef Holda*, 1. r., Mladá Boleslav; *Martin Ťuček*, 1. r., Kladno.

JIHOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Josef Voldřich, 3. r., Vimperk; *Pavel Kindlmann*, 4.a, České Budějovice; *Miroslav Vácha*, 3.b, Tábor; *Jan Teska*, 4.b, Milevsko; *B. Jovanovič*, 3.a, České Budějovice; *Zd. Bervidová*, 3.c, Tábor; *Pavel Novák*, 4.a, České Budějovice; *Zdeněk Petráš*, 4.a, České Budějovice.

Kategorie B

Martin Třeštík, 2. r., Písek; *Jaroslav Tišer*, 2.b, Strakonice; *Josef Metlička*, 2.c, Strakonice; *Jaroslav Ploutar*, 2.a, Račatice.

Kategorie C

Jindřich Trnka, 1.c, Tábor; *Otakar Procházka*, 1. r., Humpolec; *Jan Kábrt*, 1.b, Jindřichův Hradec; *Helena Jílková*, 1.a, České Budějovice; *Jiří Had*, 1.a, SPŠ, Strakonice; *Jaro-*

slava Jarátová, 1.b, Týn nad Vltavou; *Zdeněk Sýkora*, 1.a, České Budějovice; *Vladimír Kočma*, S1a SPŠ stav., České Budějovice; *Petr Divoký*, 1. r., Trhové Sviny.

ZÁPADOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Václav Veselý, 4.a, Klatovy; *Jan Klaschka*, 4.a, Mar. Lázně; *Michal Svrček*, 3.b, Karlovy Vary; *Jiří Zymák*, 4.a, nám. Odborářů, Plzeň; *Emil Pelikán*, 4.a, nám. Odborářů, Plzeň; *Václav Boublerle*, 4.a, Klatovy; *Václav Kohout*, 4.a, Blovice; *Vladimír Krásný*, 3.a, nám. Odborářů, Plzeň.

Kategorie B

Daniela Řezníčková, 2.a, nám. Odborářů, Plzeň; *Milan Studený*, 2.a, Mar. Lázně.

Kategorie C

Jiří Koukol, 1.a, Sušice; *Ivan Novák*, 1.a, nám. Odborářů, Plzeň; *Vladimír Tumpach*, 1.a, nám. Odborářů, Plzeň; *Alena Petříková*, 1.a, Karlovy Vary; *Pavel Ettler*, 1.a, ul. Pionýrů, Plzeň; *Petr Panzner*, 1.a, ul. Pionýrů, Plzeň; *Hana Švarcová*, 1.b, SEŠ K. Gottwalda, Plzeň; *Petr Kopřiva*, 1.a, nám. Odborářů, Plzeň; *Jiřina Hrbková*, 1.a, Ostrov.

SEVEROČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Tomáš Novotný, 4.a, Teplice; *Emil Vlasák*, 3.d, SPŠ stroj., Ústí n. L.; *Martin Pešek*, 4.b, Teplice; *Josef Kaláb*, 3.b, Teplice; *Jaroslav Kotas*, 3.b, Česká Lípa; *Martin Müller*, 3.a, Děčín; *Jaroslava Pejznochová*, 3.b, Ústí n. L.; *Jan Malý*, 3.a, Litoměřice; *Otto Bergner*, 4.a, Teplice.

Kategorie B

P. Vondrák, Ústí n. L.; *I. Žižka*, Ústí n. L.; *M. Dragoun*, Teplice; *M. Vancl*, Ústí n. L.; *I. Benda*, Litoměřice; *J. Červinek*, Teplice; *M. Oktábec*, Teplice; *P. Horák*, Ústí n. L.; *J. Holomek*, Liberec; *M. Kečvara*, Liberec.

Kategorie C

V. Novotná, Teplice; *V. Havlena*, Rumburk; *I. Perschová*, Rumburk; *M. Šopr*, SPŠ stroj., Liberec; *E. Formánková*, Liberec; *J. Ulmanová*, Liberec; *P. Strejc*, Teplice; *L. Peterková*, Liberec; *J. Chaloupek*, Liberec; *D. Málková*, Teplice.

VÝCHODOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Jiří Hůlka, 3.g, Hradec Králové; *Jiří Hostinský*, 4.a, Pardubice; *Tomáš Blažek*, 3.a, Pardubice; *Dobroslav Kindl*, 4.a, Pardubice; *Josef Ježek*, 4.a, Pardubice; *Josef Pavel*, 1.a,

Rychnov n. Kněžnou; *Luděk Němec*, 3.a, Pardubice; *Jaroslav Dobiáš*, 3.a, Polička.

Kategorie B

Petr Novák, 2.a, Pardubice; *Josef Novotný*, 2.c, Česká Třebová; *Zdeněk Rudolf*, 2.a, Trutnov; *Miloš Ferjenčík*, 2.a, Pardubice; *Jan Šugl*, 2.a, Rychnov n. Kněžnou; *Renata Čermáková*, 2.a, Pardubice; *Libor Jelínek*, 2.a, Pardubice.

Kategorie C

Libor Hnyk, 1.g, Hradec Králové; *Richard Liska*, 1.a, Pardubice; *Jiří Dobeš*, 1.a, Pardubice; *Ivo Havlas*, 1.g, Hradec Králové; *Vladimír Hulec*, 1.a, Pardubice; *Milan Novák*, 1.a, Vrchlabí; *Petr Škuta*, 1.e, SPŠ el., Pardubice; *Jiří Kalousek*, 1.a, Pardubice; *Josef Kuňák*, 1.a, Rychnov n. Kněžnou; *Rupert Leitner*, 1.a, Semily.

JIHOMORAVSKÝ KRAJ

Kategorie A

Vladimír Drášil, 4.a, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Jaromír Trubelík*, 3.a, Kroměříž; *Pavel Barták*, 4.a, Koněvova, Brno; *Martin Kolínek*, 4.c, Elgartova, Brno; *Lubomír Vláčil*, 3.a, Prostějov; *Luděk Jančář*, 4.a, Uherský Brod; *Jiří Sýkora*, 3.a, Jihlava; *Libor Obrdlík*, 4.b, Třebíč; *Jaromír Novák*, 4.a, Koněvova, Brno; *Štěpánka Kolářová*, 4.a, Křenová, Brno.

Kategorie B

Jiří Peňáz, 2.b, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Alice Kapunová*, 2.a, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Hana Kovaříková*, 2.a, Jihlava; *Michal Marvan*, 2.a, Koněvova, Brno; *Petr Ježek*, 2.a, Prostějov; *Zdeněk Ondrák*, 2.c, Třebíč; *Miroslav Pavel*, 2.a, Jihlava; *Eva Pivníčková*, 2.b, Znojmo.

Kategorie C

Jiří Svoboda, 1.a, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Luděk Klimeš*, 1.a, Blansko; *Zdeněk Bureš*, 1.b, Třebíč; *Jiří Zlatuška*, 1.c, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Martin Čadek*, 1.a, tř. kpt. Jaroše, Brno; *Petr Bolek*, 1, OUEZ, Zastávka u Brna; *Jaroslav Šustr*, 1.b, Blansko; *Jiří Martišek*, 1.a, Kroměříž; *Renata Holzbachová*, 1.c, Lerchova, Brno.

SEVEROMORAVSKÝ KRAJ

Kategorie A

Jaromír Šimša, Žďár n. Sáz.; *Jiří Navrátil*, Olomouc-Hejčín; *Antonín Otáhal*, Volgogradská, Ostrava; *Lubomír Balanda*, Český Těšín; *Miroslav Šedivý*, Přerov; *Miroslav Lýčka*, Vsetín; *Ivo Semrád*, Opava; *Vladimír Hruška*, Valašské Meziříčí; *Nikos Pupakis*, Ostrava-Poruba; *Jaroslav Dvořák*, Volgogradská, Ostrava.

Kategorie B

Jiří Navrátil, 1.a, Tomkova ul., Olomouc-Hejčín; *Oskar*

Linkesch, 2.a SPŠ Ostrava-Hrabůvka; *Kristian Walach*, 2.b, Volgogradská, Ostrava 4-Zábřeh; *Miroslav Šedivý*, 2.b, Komenského, Přerov; *Jan Mačejovský*, 2.a, Šmeralova ul., Ostrava 1; *Václav Kelar*, 2.b, ul. Pionýrů, Uničov, okr. Olomouc.

Kategorie C

Jan Kozina, 1.b, Al. Hrdličky, Ostrava-Poruba; *Tomáš Cvik*, 1.a, J. G. Tajovského, Havířov II; *Rostislav Urban*, IX. ZDŠ, Škrobálkova, Ostrava-Kunčičky; *Helena Svozilová*, 1.b, Tomkova ul., Olomouc-Hejčín; *Petr Jančar*, 1.c, Komenského, Opava; *Miroslava Karpalová*, 1.a, J. G. Tajovského, Havířov II; *Eva Bartošová*, 1.c, Komenského, Přerov; *Jitka Jelínková*, 1.c, Komenského, Přerov; *Martin Petrák*, 1.a, nám. Rudé armády, Ostrava-Hrabůvka; *Václav Sosna*, 1.b, Nový Bohumín, okr. Karviná.

BRATISLAVA

Kategorie A

Jozef Širáň, 4.b, Novohradská ul.; *Pavol Zlatoš*, 4.b, Novohradská ul.; *Eubor Kollár*, 4.b, Novohradská ul.; *Ján Krajčík*, 3.b, Novohradská ul.; *Pavol Meravý*, 4.b, Novohradská ul.; *Ján Slodička*, 3.b, Novohradská ul.; *Ivan Janetka*, 3.b, Novohradská ul.; *Ivan Tkáč*, 4.a, Metodova; *Štefan Olejník*, 4.a, Novohradská ul.; *Ján Brodnianský*, 4.b, Č. armády.

Kategorie B

Juraj Walner; Viktor Birnsein; Pavol Kossey; Pavol Krchňák; Ondrej Náther; Ondrej Blaho; Igor Brilla; Jozef Kiss; Róbert Šimončíč; Miloš Blanárik. (Všichni z gymnázia v Novohradské ulici.)

Kategorie C

Martin Barto, Novohradská ul.; Ján Banko, Vazova ul.; Augustín Mrázik, Novohradská ul.; Juraj Koza, Novohradská ul.; Terézia Gonová, Novohradská ul.; Igor Remža, Novohradská ul.; Roman Záhorec, Tomášiková ul.; Viera Turčanová, Č. armády.

ZÁPADOSLOVENSKÝ KRAJ

Kategorie A

Ján Nižňanský, 4.b, Trenčín; Miloš Mikula, 3.b, Trenčín; Štefan Knutelský, 4.a, Nitra-Párovce; Branislav Macúch, 4.a, Nové Mesto n. Váhom; Tibor Fülöp, 4.a, Nitra-Párovce; Katarína Valášková, 4.b, Nové Mesto n. Váhom; Vladimír Dzurák, 4.a, Nové Mesto n. Váhom; Pavol Masaryk, 3.a, Topoľčany.

Kategorie B

Vladimír Drienovský, 2.c, Zlaté Moravce; Dušan Uhrín, 2.c, Nitra - E. Gudernu; Ján Kolník, 2.c, Nitra - E. Gudernu;

Svetozár Malinarič, 2.a, Nitra-Párovce; *Jiří Král*, 2.b, Trenčín; *Maroš Martinkovič*, 2.e, Trnava; *Daniela Čunderlíková*, 2.a, Nové Mesto n. Váhom; *Daniel Madleňák*, 2.c, Nitra - E. Gudernu; *Eleonóra Ďurišová*, 2.a, Nitra-Párovce; *Pavol Rieger*, 2.d, Trenčín.

Kategorie C

Jozef Legény, 1.a, Partizánske; *Ludovít Šelc*, 1.b, Malacky; *Anna Mircová*, 1.a, Nové Mesto n. Váhom; *Ján Suchánek*, 1.d, Trenčín; *Juraj Bojnanský*, 1.d, Hlohovec; *Eva Javorková*, 1.g, Trnava; *Erich Hulman*, 1.e, Trnava; *Tibor Gérecz*, 1.a, Bratislava; *Olga Kopová*, 1.a, Pezinok; *Ivan Fiala*, 1.a, Senec.

STŘEDOSLOVENSKÝ KRAJ

Kategorie A

Vlastimil Vrto, 4. r., Rim. Sobota; *Valter Petrů*, 4. r., Žilina - H. Val; *Emil Borák*, 3. r., Prievidza; *Pavol Makovický*, 2. r., Žilina - H. Val; *Ján Borsík*, 3. r., Liptovský Hrádok; *Peter Takáč*, 1. r., Rim. Sobota; *Peter Maličský*, 3. r., Prievidza; *Jozef Kordík*, 3. r., Prievidza.

Kategorie B

Pavol Makovický, 2. r., Žilina - H. Val; *František Chovánek*, 2. r., SPŠ el., Tvrdošín; *Karol Pekár*, 2. r., Ružomberok; *Štefan Bračok*, 2. r., Ružomberok.

Kategorie C

Igor Bešše, 1. r., Prievidza; *Pavol Quittner*, 1. r., Prievidza; *Peter Takáč*, 1. r., Rim. Sobota; *Anna Bernátová*, 1. r., Martin; *Ivan Pavlíček*, 1. r., Žilina, Hliny; *Peter Mečiarik*, 1. r., Prievidza; *Igor Böhm*, 1. r., SPŠS, Zvolen; *Pavla Olbřímková*, 1. r., Martin.

VÝCHODOSLOVENSKÝ KRAJ

Kategorie A

Imrich Harbula, Sečovce; *Jaroslav Jaroš*, Poprad; *Ján Smerrek*, Humenné; *Mária Ševcová*, Šmeralova ul., Košice.

Kategorie B

Ondrej Cako, Šmeralova ul., Košice; *Dušan Malenčík*, Šmeralova ul., Košice; *Juraj Kavečanský*, Šrobárova ul., Košice.

Kategorie C

Stanislav Filip, Šrobárova ul., Košice; *Peter Jaroš*, SPŠ hutnícka, Garbanova, Košice; *Václav Ocelík*, Šrobárova ul., Košice.

PŘÍLOHA B

SEZNAM VÍTĚZŮ A ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ III. KOLA KATEGORIE A VE XXIII. ROČNÍKU MO V ROCE 1973/74

Vítězové

1. *Navrátil Jiří*, 1.a, gymn., Olomouc-Hejčín
2. *Ferst Pavel*, 4.d, gymn., Praha 3, Sladkovského nám.
3. *Valášek Michael*, 3.d, gymn., Praha 2, W. Piecka 2
4. *Baumann Martin*, S1s, Uč. závod ČKD, Praha 9, Poděbradská 12
5. *Trlifaj Jan*, 4.d, gymn., Praha 3, Sladkovského nám.
6. *Pavel Josef*, 1.a, gymn., Rychnov n. Kněžnou
7. *Šimša Jaromír*, 4. r., gymn., Žďár n. Sázavou
- 8.—9. *Širáň Jozef*, 4.b, gymn., Bratislava, Novohradská
- 8.—9. *Kindlmann Pavel*, 4.a, gymn., České Budějovice, Šrámkova 29
10. *Balanda Lubomír*, 3.b, gymn., Český Těšín, Frýdecká 30
11. *Vencovská Alena*, 4.b, gymn., Praha 1, Štěpánská 22

Další úspěšní řešitelé

12. *Salač Václav*, 4.a, gymn., Praha 4, Ohradní
13. *Štěrbá Jiří*, 3.d, gymn., Praha 2, W. Piecka 2

14. – 16. *Měska Jiří*, 4.d, gymn., Praha 3, Sladkovského nám.
14. – 16. *Nižňanský Ján*, 4.b, gymn., Trenčín, 1. máje 2
14. – 16. *Pudlákova Anna*, 4.e, gymn., Praha 2, W. Piecka 2
17. – 18. *Voldřich Josef*, 3. r., gymn., Vimperk
17. – 18. *Makovický Pavol*, 2.a, gymn., Žilina - Horný Val
19. – 20. *Fiala Jaroslav*, 3.d, gymn., Praha 2, W. Piecka 2
19. – 20. *Roubíček Tomáš*, 3.d, gymn., Praha 8, U libeňského
zámku
21. – 23. *Hrnčír Evžen*, 3.a, gymn., Praha 7, Nad štolou 1
21. – 23. *Klíma Vlastimil*, 2.b, gymn., Benešov u Prahy
21. – 23. *Krajčík Ján*, 3.b, gymn., Bratislava, Novohradská

II. Přípravné úlohy I. kola

KOMENTÁŘE

K ŘEŠENÍ PŘÍPRAVNÝCH ÚLOH KATEGORIE A I. KOLA

A-P-1

Nechť $\mathcal{A}$ je konečná množina s k prvky, ($k > 1$), nechť $\mathcal{P}$ je množina všech konečných posloupností prvků z $\mathcal{A}$. Jsou-li α, β dvě posloupnosti z $\mathcal{P}$, $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, řekneme, že α je úsekem β , jestliže $n \leq m$ a $a_i = b_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Nechť $\mathcal{R}$ je konečná část množiny $\mathcal{P}$ s touto vlastností: ke každé posloupnosti $\alpha \in \mathcal{P}$, která není úsekem žádné posloupnosti z $\mathcal{R}$, lze v $\mathcal{R}$ nalézt právě jednu posloupnost, která je úsekem posloupnosti α .

Jestliže v $\mathcal{R}$ je r posloupností, kolik existuje v $\mathcal{P}$ posloupností, jež jsou úsekem a) právě jedné, b) alespoň jedné posloupnosti z $\mathcal{R}$?

KOMENTÁŘ

Formulace úlohy je značně složitá a budete s ní mít asi potíže. Je třeba jí věnovat dost času a absolvovat tak užiteč-

né cvičení v pochopení komplikovanějšího matematického textu.

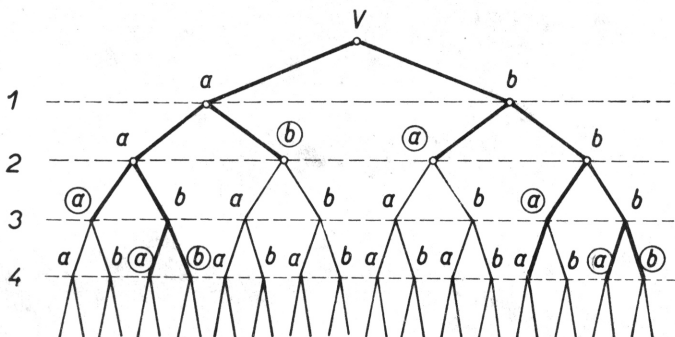
Označme r počet posloupností množiny $\mathcal{R}$. Doporučujeme, abyste si situaci znázornili stromem např. pro $k = 2$, $r = 8$. Je-li $\mathcal{A} = \{a, b\}$, zakreslíme schéma

$$\mathcal{R} = \{aaa, aaba, aabb, ab, ba, bba, bbba, bbbb\}.$$

Posloupnosti z $\mathcal{P}$ jsou zobrazeny ve stromu všemi cestami (jsou konečné i nekonečné, ale množina je nekonečná). Posloupnosti z $\mathcal{R}$ jsou zobrazeny ve stromu r konečnými cestami (na obr. 2 jsou příslušné cesty ukončeny okroužkovanými písmeny). Na každé cestě leží právě jeden „okroužkovaný bod“; to vyplývá z vlastnosti, kterou je v textu charakterizována množina $\mathcal{R}$. Jak patrně, vyjadřovali jsme se v předcházejících větách geometricky; doporučujeme, abyste si stále uvědomovali korespondenci geometrických a aritmetických faktů.

Zavedeme ještě jeden parametr; impuls k jeho zavedení vyplyne dále z rozhodnutí nalézt odpověď na otázku b) pomocí stromu. Označíme s největší počet členů, vyskytující se v posloupnostech z $\mathcal{R}$, v příkladě na obr. 2 je $s = 4$.

Nyní můžeme zodpovědět bezprostředně otázku a). Každá posloupnost z $\mathcal{P}$ je úsekem sama sebe; posloupnost $\alpha \in \mathcal{R}$ je jediným úsekem α , který je úsekem jen jediné posloupnosti z $\mathcal{R}$ (totiž α). Neboť každý „pravý“ úsek posloupnosti α je úsekem ještě jiných posloupností z $\mathcal{R}$, jak ukazuje větvení stromu. Tak např. na obr. 2 je posloupnost bb úsekem posloupností $bba \in \mathcal{R}$, $bbba \in \mathcal{R}$, $bbbb \in \mathcal{R}$; naproti tomu posloupnost bba (která je z $\mathcal{R}$) není úsekem žádné jiné



Obr. 2

posloupnosti z $\mathcal{R}$, jak plyne z charakteristické vlastnosti množiny $\mathcal{R}$.

Jádrem úlohy je otázka b). Probírejte nejprve jednotlivé cesty (posloupnosti) z $\mathcal{R}$ a určujte, kolik cest z $\mathcal{P}$ (posloupnosti z $\mathcal{P}$) každá z nich obsahuje. Při tomto zkoumání rozložíme $\mathcal{R}$ v s skupin: v cesty (posloupnosti) jednoprvkové, atd. až v cesty s -prvkové; jejich počty označíme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Na obr. 2 je tento rozklad dán „úrovněmi“, na kterých cesty z $\mathcal{R}$ končí; je tedy $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 4$. Pro úroveň $1, 2, \dots, s$ vypočítáme, kolika „body“ cesty z otázky b) procházejí, v kolika z těchto bodů končí a v kolika pokračují. Dostaneme tabulku (T):

Úroveň	Počet bodů ležících aspoň na jedné cestě	Z toho kon- cových	Z toho průchozích
1	k	λ_1	$k - \lambda_1$
2	$(k - \lambda_1)k = k^2 - \lambda_1k$	λ_2	$k^2 - \lambda_1k - \lambda_2$
3	$(k^2 - \lambda_1k - \lambda_2)k =$ $= k^3 - \lambda_1k^2 - \lambda_2k$	λ_3	$k^3 - \lambda_1k^2 - \lambda_2k - \lambda_3$
---	-----	---	-----

Vzhledem k s -tému řádku tabulky je

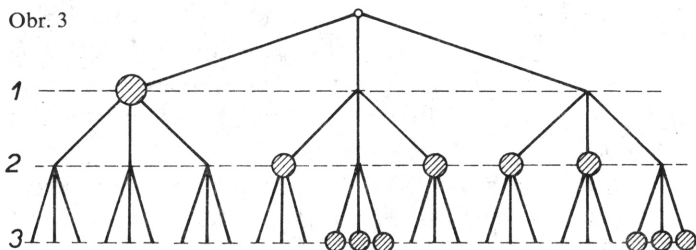
$$k^s - \lambda_1 k^{s-1} - \lambda_2 k^{s-2} - \dots - \lambda_{s-1} k = \lambda_s. \quad (1)$$

Mimoto platí zřejmě

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = r. \quad (2)$$

Ověřte si tabulku na příkladě z obr. 2; možná, že by bylo vhodné **sestavit nejprve tuto tabulku pro situaci z obr. 2**

Obr. 3



($k = 2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 4$, $s = 4$), pak ji **zobecnit** a ještě **ověřit** pro situaci z obr. 3 ($k = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$, $s = 3$).

Na tomto obrázku nejsou označeny prvky množiny $\mathcal{A}$; zřejmě tu je podle (2) $r = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 4 + 6 = 11$.

Tabulka má v tomto případě tvar:

Úroveň	Celkem	Končí	Pokračuje
1	3	1	2
2	6	4	2
3	6	6	0

Výsledný počet posloupností je $3 + 6 + 6 = 15$. Tabulka situace z obr. 2 je:

Úroveň	Celkem	Končí	Pokračuje
1	2	0	2
2	4	2	2
3	4	2	2
4	4	4	0

Výsledný počet posloupností je $2 + 4 + 4 + 4 = 14$.

Po této experimentální přípravě můžete zpracovat ta-

bulku (T); je to práce ryze algebraická. Je zřejmé, že počet σ všech posloupností z otázky b) je dán součtem údajů v prvním sloupci v s řádcích tabulky (T). Je tedy

$$\sigma = (k + k^2 + \dots + k^s) - \lambda_1(k + k^2 + \dots + k^{s-1}) - \dots - \lambda_{s-1}k,$$

tj.

$$\sigma = \left(\frac{k^{s+1} - 1}{k - 1} - 1 \right) - \lambda_1 \left(\frac{k^s - 1}{k - 1} - 1 \right) - \dots - \lambda_{s-1} \left(\frac{k^2 - 1}{k - 1} - 1 \right),$$

$$\sigma = \frac{1}{k - 1} (k^{s+1} - \lambda_1 k^s - \dots - \lambda_{s-1} k^2) + \frac{1}{k - 1} (\lambda_1 + \dots + \lambda_{s-1} - 1) - 1 + (\lambda_1 + \dots + \lambda_{s-1}).$$

Upravíme použitím (1), (2):

$$\sigma = \frac{k\lambda_s}{k - 1} + \frac{r - \lambda_s - 1}{k - 1} - 1 + r - \lambda_s.$$

Po úpravě

$$\sigma = \frac{k(r - 1)}{k - 1}, \quad (3)$$

což je výsledný vzorec. Ze vzorce (3) je patrné, že $k - 1$ dělí $r - 1$. Ze vzorce (3) dostaneme pro $k = 2$, $r = 8$ výsledek $\sigma = 14$ (obr. 2), pro $k = 3$, $r = 11$ výsledek $\sigma = 15$ (obr. 3) jako dříve.

A-P-2

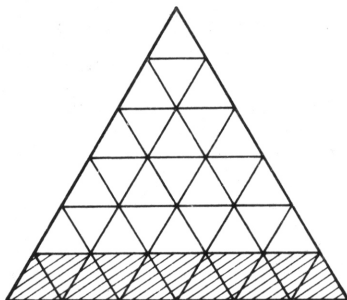
Je dán rovnostranný trojúhelník o straně délky 1. Každou stranu rozdělte na k stejných dílů. Sestrojte všechny úsečky rovnoběžné s příslušnými stranami; jejich krajní body jsou dělicími body na stranách daného trojúhelníka. Vznikne tak síť složená z rovnostranných trojúhelníků. Určete počet všech trojúhelníků, které lze v této síti najít.

KOMENTÁŘ

Začneme experimentováním. Impulsem pro řešitele by mohlo být nalezení rekurentního vzorce pro počet s_k popsaných trojúhelníků. Rekurentní vzorec bude mít tvar

$$s_{k+1} = s_k + \varphi,$$

kde φ je počet trojúhelníků, které vzniknou tím, že přidáme „jeden pás“; na obr. 4 je $k = 5$, $k + 1 = 6$ a přidaný pás je vyšrafován. Nově vzniklé trojúhelníky budou dvojího druhu:



Obr. 4

a) jednak ty, které vzniknou z daného trojúhelníka posunutím nebo stejnolehlostí s *kladnou* konstantou; jejich počet označíme φ_1 ;

b) jednak ty, které vzniknou z daného trojúhelníka stejnolehlostí se *zápornou* konstantou; jejich počet označíme φ_2 .

Snadno odvodíte vzorec

$$\varphi_1 = (k+1) + k + (k-1) + \dots + 1 = \frac{1}{2}(k+1)(k+2). \quad (4)$$

Při pokusech vyjádřit φ_2 se zjistí, že je třeba rozlišit k liché a k sudé; proto je vhodné nakreslit mimo obr. 4 ještě další obrázek, např. pro $k = 6$.

Je-li k *liché*, dostaneme

$$\varphi_2 = 1 + 3 + \dots + k = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{1}{2}(k+1)} (k+2-2\lambda) = \frac{1}{4}(k+1)^2. \quad (5)$$

Je-li k *sudé*, dostaneme

$$\varphi_2 = 2 + 4 + \dots + k = 2 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{1}{2}k} \lambda = \frac{1}{4}k(k+2), \quad (6)$$

Oba vzorce (5), (6) se odvodí pomocí obrázků intuitivně; exaktní důkaz vyžaduje opět matematickou indukci.

Nyní upravíme rekurentní vzorce pro k liché i pro k sudé podle (4), (5), (6).

Pro k *liché* je

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{2}(k+1)(k+2) + \frac{1}{4}(k+1)^2,$$

tj.

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{4}(k+1)(3k+5) = s_k + \frac{1}{4}(3k^2 + 8k + 5). \quad (7)$$

Pro *k* sudé dostaneme

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{2}(k+1)(k+2) + \frac{1}{4}k(k+2),$$

tj.

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{4}(k+2)(3k+2) = s_k + \frac{1}{4}(3k^2 + 8k + 4). \quad (8)$$

Další impuls: rekurentní vzorec je vzhledem k odlišnosti (7) a (8) třeba upravit tak, aby „krok“ byl nikoli 1, ale 2, tj. je třeba odvodit vztah mezi s_k , s_{k+2} pro *k* liché i sudé.

Pro *liché k* dostaneme s použitím (7) a (8) pro *k* + 1

$$\begin{aligned} s_{k+2} &= s_{k+1} + \frac{1}{4}(k+3)(3k+5) = \\ &= s_k + \frac{1}{4}(k+1)(3k+5) + \frac{1}{4}(k+3)(3k+5), \end{aligned}$$

tj.

$$s_{k+2} = s_k + \frac{1}{2}(3k+5)(k+2). \quad (9)$$

Pro *sudé k* dostaneme s použitím (8) a (7) pro *k* + 1 místo *k*:

$$\begin{aligned} s_{k+2} &= s_{k+1} + \frac{1}{4}(k+2)(3k+8) = \\ &= s_k + \frac{1}{4}(k+2)(3k+2) + \frac{1}{4}(k+2)(3k+8), \end{aligned}$$

tj.

$$s_{k+2} = s_k + \frac{1}{2}(k+2)(3k+5). \quad (10)$$

S potěšením konstatujeme, že vzorce (9) a (10) jsou totožné; proto můžeme vypracovat tabulku diferencí:

(T ₁)	k	1	2	3	4	5	6	7	...
	$\frac{1}{2}(k+2)(3k+5)$	12	22	35	51	70	92	117	...

Čísla v druhém řádku tabulky tvoří aritmetickou posloupnost 2. řádu, jak ukazuje schéma diferencí

12	22	35	51	70	92	117	...
	10	13	16	19	22	25	
		3	3	3	3	3	

Protože víme, že je $s_1 = 1$, $s_2 = 5$, můžeme sestavit s použitím tabulky (T₁) tabulku (T₂)

(T ₂)	k	1	2	3	4	5	6	7	...
	s_k	1	5	13	27	48	78	118	...

(Např. $s_3 = s_1 + d_1$, kde $d_1 = \frac{1}{2}(k+2)(3k+5)$ pro $k = 1$, tj. $d_1 = 12$, $s_3 = 1 + 12 = 13$.)

Nepokládáme za nutné odvozovat ze vzorce (9) a z počátečních hodnot $s_1 = 1$, $s_2 = 5$ obecné vzorce pro s_k ; je to v podstatě bezduché počítání s aritmetickými řadami vyšších řádů.

Pro úplnost uvádíme, že pro k liché vyjde

$$s_k = \frac{1}{8}(k+1)(2k^2 + 3k - 1),$$

pro k sudé

$$s_k = \frac{1}{8}k(k+2)(2k+1),$$

což je v souhlase s tabulkou (T₂).

Ak sú x, y, z vnútorné uhly v trojuholníku (tj. ich veľkosti) a ak je $V = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x$, potom nutná a postačujúca podmienka, aby trojuholník bol ostrouhlý, znie: $V > 0$ a aby bol tupouhlý: $V < 0$.

KOMENTÁR

Táto úloha je založená na triviálnej úprave výrazu, ak použijeme vhodný trik. Azda možno riešiteľov nechať, aby „si lámali hlavu“, poprípade aby súťažili o najkratšie riešenie úlohy. Je celý rad riešení, zdá sa, že najkratšia je úprava, ktorá dôsledne využíva cykličnosť. Označme $p = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z$, potom je $2pV = 2 \sin x \cdot \sin y \cdot \cos z + 2 \sin y \cdot \sin z \cdot \cos x + 2 \sin z \cdot \sin x \cdot \cos y$, tj. (využijeme trik násobenie dvomi)

$$\begin{aligned} 2pV &= \sin x(\sin y \cos z + \cos y \sin z) + \\ &+ \sin y(\sin z \cos x + \cos z \sin x) + \\ &+ \sin z(\sin x \cos y + \cos x \sin y) = \\ &= \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z, \end{aligned}$$

pretože napr. $\sin y \cdot \cos z + \cos y \cdot \sin z = \sin(y + z) = \sin(\pi - x) = \sin x$. Pretože $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z > 0$, je $V > 0$, práve vtedy, keď je trojuholník ostrouhlý a $V < 0$, keď je tupouhlý.*)

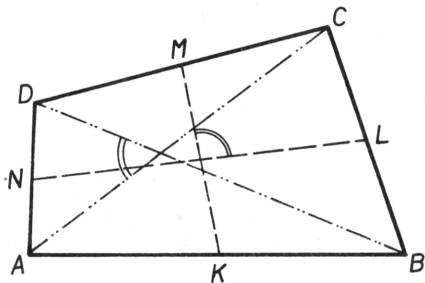
*) Pravoúhlý trojuholník je vylúčený, pretože tangenty x, y, z podľa predpokladu existujú.

Vo vypuklom štvoruholníku $ABCD$ sú stredy úsečiek AB , BC , CD , DA označené za radom K , L , M , N . Dokážte, že odchýlky dvojíc priamok AC , BD a KM , LN sú si rovné práve vtedy, ak

$$2KM \cdot LN = AC \cdot BD.$$

KOMENTÁR

Impulz: pretože ide o vlastnosť odchýliek, bude asi vhodné použiť vektorové určenie smerov. Na obr. 5 je načrtnutá situácia.



Obr. 5

Označme $\mathbf{t} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$, $\mathbf{u} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$, $\mathbf{v} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$. Potom smerové vektory priamok AC , BD sú vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} - \mathbf{t}$ s veľkosťami AC , BD . Ďalej je

$$K = A + \frac{1}{2}\mathbf{t},$$

$$N = A + \frac{1}{2}\mathbf{v},$$

$$\begin{aligned} L &= A + (B - A) + \frac{1}{2}(C - B) = A + \mathbf{t} + \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{t}) = \\ &= A + \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{t}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= A + (D - A) + \frac{1}{2}(C - D) = \\ &= A + \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = A + \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}). \end{aligned}$$

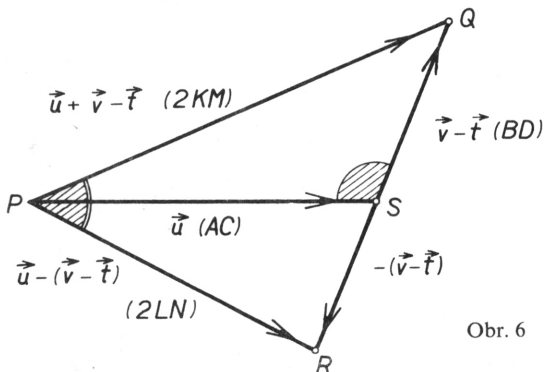
Priamky KM , LN teda majú smerové vektory $\mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{t})$,
 $\mathbf{u} + \mathbf{t} - \mathbf{v} = \mathbf{u} - (\mathbf{v} - \mathbf{t})$ s veľkosťami $2KM$, $2LN$.

Na obr. 6 je znázornená situácia (veľkosti vektorov sú pripísané v zátvorkách). Oba vyznačené uhly sú zhodné práve keď platí $\triangle PQR \sim \triangle SQP$, čiže

$$\frac{2KM}{2BD} = \frac{AC}{2LN},$$

čiže

$$2KM \cdot LN = AC \cdot BD. \quad (11)$$



Obr. 6

Práve tak sa odvodí, že $\star QPR = \star PSR$ práve vtedy, keď platí (11).

Myslíme si, že impulz „vektorové riešenie“, by mal stačiť. Riešenie úlohy je pekná aplikácia vektorovej algebry a zároveň ukáže výhodu vektorového aparátu proti iným metódám, ktoré sú v podstate jeho obchádzaním.

KOMENTÁŘE
K ŘEŠENÍ PŘÍPRAVNÝCH ÚLOH KATEGORIE B
I. KOLA

B-P-1

a) V oboru reálných čísel řešte graficky soustavu nerovnic

$$\begin{aligned}y &< -x^2 - 2x + 1 \\y &> -1 + \operatorname{sign}(x + 1).\end{aligned}\tag{1}$$

b) Nalezněte graficky $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, kde $\mathcal{P}$ je obor pravdivosti soustavy výrokových forem (1) a $\mathcal{Q} = \{[x, y] \in \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_1; y < (x + 1)^2 - 1 + \operatorname{sign}(x + 1)\}$. ($\mathcal{E}_1$ je množina všech reálných čísel.)

c) Je dána soustava nerovnic

$$\begin{aligned}y &\leq x^2 - 2x + 1, \\y &\geq -1 + \operatorname{sign}(x + 1).\end{aligned}\tag{2}$$

Nalezněte $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, kde $\mathcal{R}$ je obor pravdivosti soustavy (2) s reálnými proměnnými x, y a $\mathcal{S} = \{[x, y] \in \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_1; y \leq (x + 1)^2 - 1 + \operatorname{sign}(x + 1)\}$.

Poznámka: Sign x (čti signum x) je funkce reálné proměnné definovaná takto:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x > 0 \\ 0, & \text{je-li } x = 0 \\ -1, & \text{je-li } x < 0 \end{cases}$$

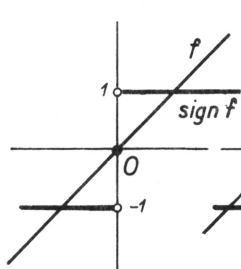
Ve XXII. ročníku MO se v soutěžních úlohách vyskytlo několik úloh s tematikou „celá část“. Ve XXIII. ročníku jsou úlohy, v nichž se vyskytuje jiný případ schodové funkce: funkce sign (signum).

Vhodnou přípravou by bylo probrat několik funkcí typu $\text{sign } f(x)$, kde f je jednoduchá funkce: lineární celistvá nebo kvadratická nebo lineární lomená. V prvním stadiu bude vždy cílem sestrojit graf. Doporučujeme zakreslit vždy do téhož náčrtku graf funkce f i funkce $\text{signum } f$.

Na obr. 7–11 jsou načrtnuty grafy f a $\text{sign } f$ pro tyto funkce f :

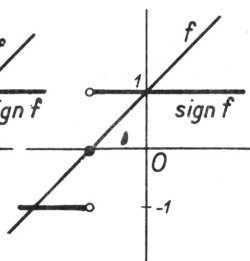
$$x \mapsto x, \quad x \mapsto x + 1, \quad x \mapsto \frac{3}{2}x - 1,$$

$$x \mapsto -x^2 + 2x + 2, \quad x \mapsto \frac{2x}{x-1}.$$



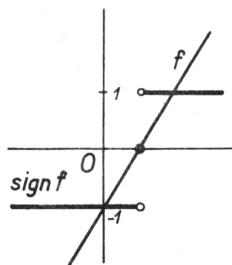
$f: x \mapsto x$

Obr. 7



$f: x \mapsto x + 1$

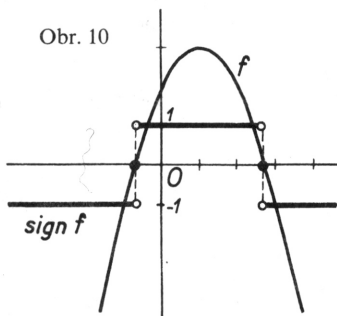
Obr. 8



$f: x \mapsto \frac{3}{2}x - 1$

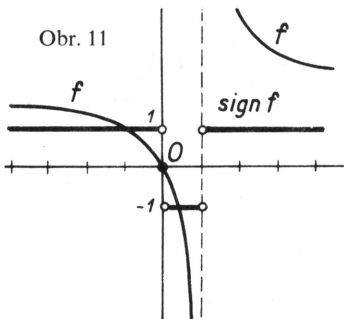
Obr. 9

Obr. 10



$$f: x \mapsto -x^2 + 2x + 2$$

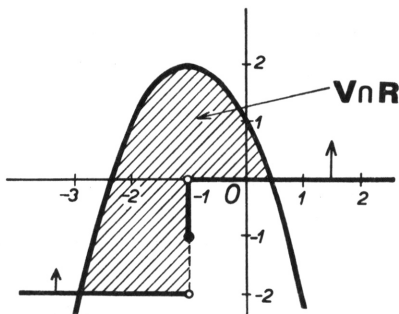
Obr. 11



$$f: x \mapsto \frac{2x}{x-1}$$

Po takovéto průpravě snadno rozřešíte úlohy a), b), c). V úloze a) je grafem první nerovnice vnitřek $\mathcal{V}$ paraboly p , grafem druhé nerovnice část roviny $\mathcal{R}$; jejich průnik je vyšrafovaná plocha na obr. 12. Je třeba upozornit na to, že se má podrobně popsat útvar $\mathcal{V} \cap \mathcal{R}$. Které body hranice k němu náležejí a které nikoli?

Obdobně se řeší úlohy b) a c). V úloze b) sestrojíme nejprve graf funkce $x \mapsto (x+1)^2 - 1 + \text{sign}(x+1)$.



Obr. 12

Můžeme postupovat tak, jako se postupuje při řešení rovnic a nerovnic s absolutními hodnotami: pro sestrojení grafu vyjádříme tuto funkci jako sjednocení tří funkcí v množinách

$$\mathcal{I}_1 = (-\infty; -1), \quad \mathcal{I}_2 = \{-1\}, \quad \mathcal{I}_3 = (-1; \infty).$$

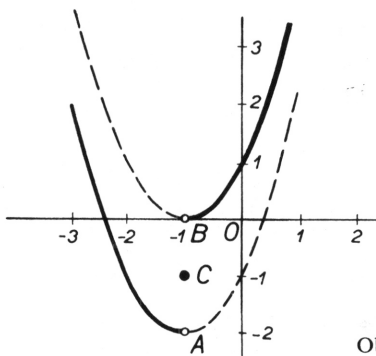
Dostaneme:

$$x \in \mathcal{I}_1: x \mapsto (x+1)^2 - 2$$

$$x \in \mathcal{I}_2: x \mapsto (x+1)^2 - 1, \quad \text{tj. } -1 \mapsto -1$$

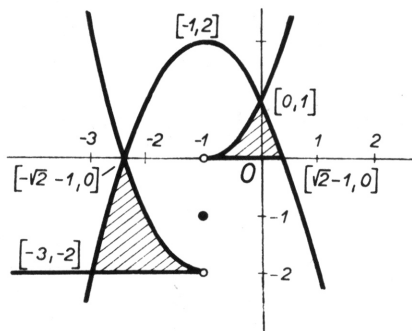
$$x \in \mathcal{I}_3: x \mapsto (x+1)^2$$

Příslušné grafy jsou na obr. 13. Výsledný graf se skládá z obou tlustě vytažených oblouků parabol (bez bodů A, B) a z izolovaného bodu $C = [-1; -1]$. Odtud snadno odvodíme graf nerovnice $y < (x+1)^2 - 1 + \text{sign}(x+1)$. Průnik grafů z obr. 12 a 13 je na obr. 14; je ovšem třeba průnik přesně popsat, zejména pokud jde o hraniční a izolované body. Úloha c) je variantou předchozí úlohy b),



Obr. 13

Obr. 14



v níž se má vyšetřit, jak se změní graf po připsuštění rovnítka; to má vliv na příslušnost hraničních bodů.

B-P-2

V oboru přirozených čísel řešte soustavu rovnic

$$ac - bd = p,$$

$$ad - bc = 0,$$

kde a, b, c, d jsou neznámé a p je dané prvočíslo, $p > 2$.

KOMENTÁŘ

Text úlohy by měl znít raději takto: Je dáno prvočíslo $p > 2$. Určete všechny četveřice přirozených čísel a, b, c, d , pro které platí

$$\begin{aligned} ac - bd &= p, \\ ad - bc &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Autorské řešení používá triku: první rovnice (1) se umocní na druhou a levá strana se upraví pomocí druhé rovnice (1):

$$\begin{aligned}
 (ac - bd)^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd = \\
 &= a^2c^2 - (bc)(ad) + b^2d^2 - (bc)(ad) = \\
 &= a^2c^2 - b^2c^2 + b^2d^2 - a^2d^2 = \\
 &= c^2(a^2 - b^2) - d^2(a^2 - b^2) = \\
 &= (a^2 - b^2)(c^2 - d^2),
 \end{aligned}$$

tj.

$$(a + b)(a - b)(c + d)(c - d) = p^2. \quad (2)$$

V součinu na levé straně (2) jsou všichni čtyři činitelé kladní. Z druhé rovnice (1) plyne totiž

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \quad (3)$$

Kdyby bylo např. $a \leq b$, plynulo by z (3) $c \leq d$ a dále $ac \leq bd$, což je ve sporu s první rovnicí (1). Je tedy $a > b$ a podle (3) i $c > d$, $a - b > 0$, $c - d > 0$.

Z (2) plyne, že právě dva ze čtyř činitelů na levé straně jsou rovni p ; jsou to $a + b$ a $c + d$. Zbývající dva jsou rovni 1. Je tedy

$$a + b = p, \quad a - b = 1,$$

odtud

$$a = \frac{1}{2}(p + 1), \quad b = \frac{1}{2}(p - 1). \quad (4a)$$

Obdobně vyjde

$$c = \frac{1}{2}(p + 1), \quad d = \frac{1}{2}(p - 1). \quad (4b)$$

Zkouška ukáže, že (4a), (4b) je jediné řešení soustavy (1).

Je však možné přirozenější řešení. V soustavě (1) jsou čtyři neznámé a, b, c, d ; přirozený postup je vyjádřit dvě z nich – např. c, d – pomocí a, b, p . Jednoduchým výpočtem dostaneme

$$c = \frac{ap}{a^2 - b^2}, \quad d = \frac{bp}{a^2 - b^2}. \quad (5)$$

Ze vzorců (5) ihned vidíme, že je $a > b$ a zároveň $c > d$. Z rovnic (5) lze dostat novou jednoduchou soustavu pro c, d jejich sečtením a odečtením:

$$c + d = \frac{p}{a - b}, \quad c - d = \frac{p}{a + b}. \quad (6)$$

(Také z těchto rovnic je bezprostředně patrné, že je $a > b$, $c > d$.) Z rovnic (6) vyplývá, že $a - b$ i $a + b$ dělí p ; protože je $a - b < a + b$, je $a - b = 1$, $a + b = p$; odtud pak plyne (4a) a (4b).

K rovnicím (6) však můžeme dospět trikem jednodušším: sečtením a odečtením rovnic (1). Trikovost tohoto postupu můžeme zmenšit tím, že jej vyložíme jako pokus zavést místo c, d nové neznámé $c + d, c - d$. Ostatně rovnice (6), ať se k nim dopracujeme jakkoli, představují nahrazení původní soustavy (1) s neznámými a, b, c, d novou soustavou s neznámými $a + b, a - b, c + d, c - d$.

Tento výklad umožňuje poznat podstatu úlohy; jde v podstatě o dva rozklady prvočísla p v součin $1 \cdot p = p \cdot 1$. Po tomto rozboru by bylo vhodné rozřešit zobecněnou soustavu (1):

Je dáno přirozené číslo $N > 1$. Určete všechny čtveřice přirozených čísel a, b, c, d , pro něž platí

$$\begin{aligned}ac - bd &= N, \\ad - bc &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Při řešení soustavy (7) se budou diskutovat rozklady čísla N v součin dvou činitelů (v každé dvojici $(a - b, a + b)$, $(c - d, c + d)$ musí být čísla téže parity) a z těchto rozkladů dostaneme všechna řešení soustavy (7). Tak např. pro $N = 15$ a $N = 24$ je postup řešení i výsledky v tabulkách. Přitom se vychází z rovnic (8), které byly odvozeny ze soustavy (7).

$$(a - b)(c + d) = N, \quad (a + b)(c - d) = N. \quad (8)$$

$a - b$	1	1	1	3	3	5
$a + b$	3	5	15	5	15	15
$c - d$	5	3	1	3	1	1
$c + d$	15	15	15	5	5	3
a	2	3	8	4	9	10
b	1	2	7	1	6	5
c	10	9	8	4	3	2
d	5	6	7	1	2	1

$N = 15$

$a - b$	1	2	2	2	4	4	6	8
$a + b$	3	4	6	12	6	12	12	24
$c - d$	8	6	4	2	4	2	2	1
$c + d$	24	12	12	12	6	6	4	3
a	2	3	4	7	5	8	9	16
b	1	1	2	5	1	4	3	8
c	16	9	8	7	5	4	3	2
d	8	3	4	5	1	2	1	1

$N = 24$

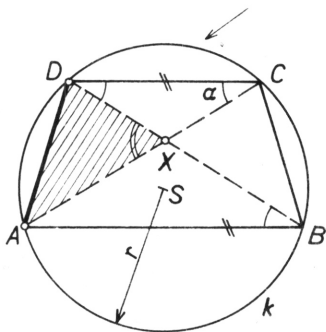
B-P-3

V rovine sú dané dva rôzne body A, D . Ďalej je dané také číslo r , že $r > \frac{1}{2}AD$. Určte geometrické miesto priesečiek uhlopriečok všetkých rovnoramenných lichobežníkov s ramenom AD a s polomerom opísanej kružnice r .

KOMENTÁR

Táto úloha je školská úloha z konštrukčnej geometrie, ktorú by ste mali vedieť rozriešiť samostatne – možno až na diskusiu.

Najprv treba zostrojiť ľubovoľný bod X hľadanej množiny. Zostrojí sa kružnica k so stredom S , s polomerom $r > \frac{1}{2}AD$, prechádzajúca bodmi A, D (takéto kružnice sú dve, súmerne združené podľa priamky AD); AD nemôže byť priemerom kružnice k , pretože je $AD < 2r$ (pozri obr. 15). Lichobežník $ABCD$ je súmerný podľa spoločnej osi základní AB, CD , ktorá prechádza stredom S . Bod C (i B) leží teda na tom oblúku AD kružnice k , ktorý leží v polrovine ADS .

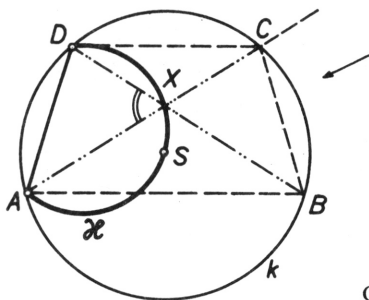


Obr. 15

,

Záver je: každý bod X hľadanej množiny $\mathcal{M}$ patrí teda k oblúku kružnice $\varkappa$ nad tetivou AD s obvodovým uhlom veľkosti 2α , ktorý leží v polrovine ADS ; k oblúku $\varkappa$ nepočítame jeho krajné body A, D .

Úplný dôkaz záleží vo vyšetrení, či platí rovnosť dvoch množín $\kappa = \mathcal{M}$. Pretože inklúzia $\mathcal{M} \subset \kappa$ bola dokázaná, stačí zistiť, či je $\kappa \subset \mathcal{M}$.



Obr. 16

Zvolíme bod $X \in \kappa$, zostrojíme polpriamky AX , DX a ich priesečníky C , B s kružnicou k . Pretože je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD = \frac{1}{2} \sphericalangle ASD = \frac{1}{2} \sphericalangle AXD$, je aj $\sphericalangle CDX = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD$; preto je $AB \parallel CD$ a $ABCD$ je rovnoramenný

lichobežník alebo pravouholník. Tento druhý prípad nastane iba pre $X = S$. Teda neplatí $\kappa \subset \mathcal{M}$. Množina $\mathcal{M}$ je oblúk κ bez bodov A, D, S .

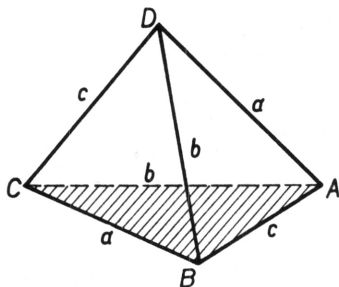
Odporúčame, aby ste si narysovali množinu $\mathcal{M}$ aj pre prípad, keď je síce $AD < 2r$, ale keď sa obe dĺžky málo líšia (napr. $AD = \frac{7}{4}r$).

B-P-4

Určete objem čtyřstěnu, jehož každé dvě protější hrany mají tutéž délku; délky hran v těchto dvojicích jsou a, b, c .

KOMENTÁŘ

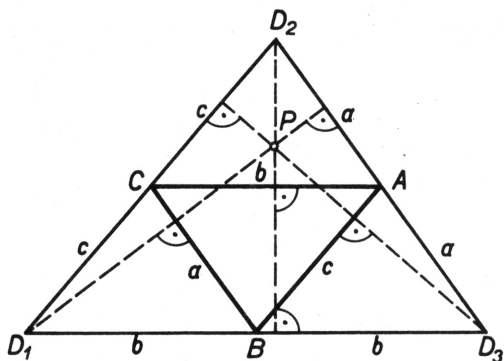
Předně je třeba nakreslit náčrtek, do kterého se zapíše délky hran písmeny a, b, c . Z tohoto náčrtku je patrné, že stěny čtyřstěnu jsou čtyři shodné trojúhelníky (obr. 17).



Obr. 17

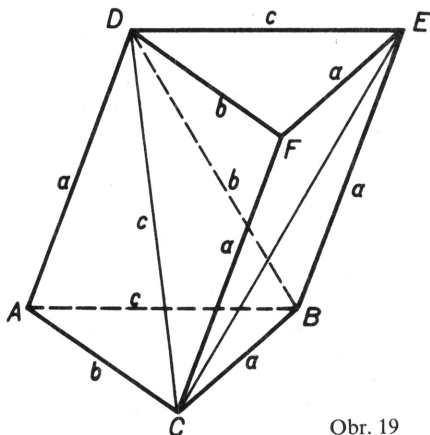
Dále je zcela přirozené sestrojit patu P výšky v spuštěné z vrcholu D na rovinu ABC . Pomocí obsahu trojúhelníka ABC a pomocí výšky v je totiž možné vypočítat hledaný

Obr. 18



objem. Patu P sestrojíme tak, že sklopíme stěny ABD , BCD , CAD kolem příslušných hran AB , BC , CA do roviny ABC (obr. 18). Bod P je průsečíkem výšek trojúhelníka $D_1D_2D_3$; přitom ABD_3 , BCD_1 , CAD_2 jsou sklopené pobočné stěny čtyřstěnu $ABCD$. Z obr. 18 je vidět, že bod P nemusí ležet na žádné výšce $\triangle ABC$; kdo zná aspoň trochu teorii čtyřstěnu, ihned pozná, že čtyřstěn $ABCD$ nemusí být ortocentrický, ale že mohou být každé dvě jeho výšky mimoběžné.

Odbočka: Je-li $a = b = c$, je čtyřstěn $ABCD$ pravidelný, a tudíž ortocentrický. Je otázka, zda i mimo tento případ může být čtyřstěn $ABCD$ ortocentrický. *Analytická úvaha* zní takto: Je-li čtyřstěn $ABCD$ ortocentrický, je bod P ortocentrem trojúhelníka ABC ; proto body P , D_2 leží na výšce v_b trojúhelníka ABC ; protože je $D_1B = D_3B$, je tato výška osou úsečky D_1D_3 , a je tudíž $D_1D_2 = D_3D_2$ neboli $2c = 2a$.



Obr. 19

Výměnou písmen vyjde $a = b = c$. **Jediný ortocentrický čtyřstěn mezi čtyřstěny $ABCD$ je tedy čtyřstěn pravidelný.**

Výpočet objemu čtyřstěnu $ABCD$ pomocí bodu P by byl svízelný a zdlouhavý. Proto použijeme malého triku, který je vlastně znám z odvozování vzorce pro objem jehlanu.

Impuls zní: **Doplňte čtyřstěn $ABCD$ na trojboký hranol!** Doplnění znázorňuje obr. 19; je tu $AD \parallel BE \parallel CF$, $AC \parallel DF$, $BC \parallel EF$, $AB \parallel DE$. Hranol $ABCDEF$ lze rozdělit v jehlany $ABCD$ a $BCFED$. Čtyřboký jehlan $BCFED$ lze rozdělit na dva čtyřstěny

$$BCFED = BCED + FECD.$$

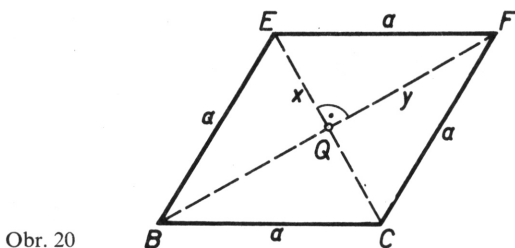
Oba tyto čtyřstěny mají též objem, neboť mají společný vrchol D a jejich protější stěny jsou shodné, totiž

$$\triangle BCE \cong \triangle FEC.$$

Přitom čtyřstěny $ABCD$ a $DEFC$ mají týž objem, neboť mají shodné podstavy ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$) a sobě rovné výšky (vzdálenost rovin ABC , DEF). Hledaný objem V je tedy roven jedné polovině objemu jehlanu $BCFED$.

Podstava jehlanu $BCFED$ je kosočtverec $BCFE$ o straně délky a (obr. 20). Jeho pobočné hrany mají délky $CD = ED = c$, $BD = FD = b$; proto pata výšky spuštěné z vrcholu D je průsečík Q úhlopříček BF , CE . Označme $QE = QC = x$, $QB = QF = y$, $QD = z$. Pythagorova věta pak dává:

$$x^2 + z^2 = c^2, \quad y^2 + z^2 = b^2, \quad x^2 + y^2 = a^2. \quad (9)$$



Z rovnic (9) plyne

$$\begin{aligned} 2x^2 &= a^2 + c^2 - b^2, & 2y^2 &= a^2 + b^2 - c^2, \\ 2z^2 &= b^2 + c^2 - a^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Mimoto je

$$V = \frac{1}{3}xyz.$$

Označme ještě (analogie s postupem při odvození Heronova vzorce) $2\sigma = a^2 + b^2 + c^2$; pak je

$$x^2 = \sigma - b^2, \quad y^2 = \sigma - c^2, \quad z^2 = \sigma - a^2,$$

a odtud

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma - a^2)(\sigma - b^2)(\sigma - c^2)}. \quad (11)$$

Vzorec (11) je ovšem výsledek získaný jen formálním výpočtem.

Prodiskutujte logickou strukturu řešení úlohy B–P–4:

Existuje-li čtyřstěn žadaných vlastností, lze jej doplnit na trojboký hranol a z něho lze oddělit symetrický jehlan čtyřboký, jehož podstavou je kosočtverec. Pro délky jeho úhlopříček $2x$, $2y$ a pro jeho výšku z platí rovnice (9), jejichž řešením jsou vzorce (10). Právě strany těchto vzorců musí být *kladná* čísla. To znamená, že čísla a , b , c nejsou libovolná, ale že pro ně platí

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c^2 > 0, \quad b^2 + c^2 - a^2 > 0, \\ c^2 + a^2 - b^2 > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Nerovnosti (12) vyjadřují *nutnou* podmínku pro existenci čtyřstěnu uvedených vlastností. Obrácením postupu se dá dokázat, že podmínka (12) je také postačující.

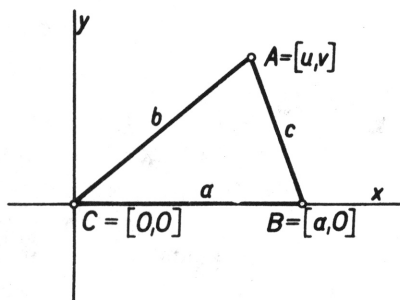
Jaký je geometrický význam nerovností (12)? Nerovnost $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ platí právě tehdy, je-li úhel $\sphericalangle ACB < 90^\circ$. To vyplývá z kosinové věty

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Bez použití kosinové věty se dá tato věta dokázat např. pomocí vzorce pro vzdálenost dvou bodů (Pythagorovy věty). Soustavu souřadnic zvolíme podle obr. 21. Dostaneme $u^2 + v^2 = b^2$, $(u - a)^2 + v^2 = c^2$; spojením těchto dvou rovnic vyjde

$$2au = a^2 + b^2 - c^2 > 0,$$

tj. $u > 0$, tj. $\angle ACB < 90^\circ$. Všechny stěny daného čtyřstěnu jsou tedy ostroúhlé trojúhelníky.



Obr. 21

KOMENTÁŘE
K ŘEŠENÍ PŘÍPRAVNÝCH ÚLOH KATEGORIE C
I. KOLA

C-P-1

Dokážte, že pre všetky kladné čísla a, b, c platí:

$$\frac{b(2a - c)}{a} + \frac{c(2b - a)}{b} + \frac{a(2c - b)}{c} \leq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}.$$

Kedy platí rovnosť?

KOMENTÁR

Dokazovaná nerovnosť patrí do série kvadratických „identít“ – rovností, či nerovností – s tromi alebo viacerými premennými, kde obor pravdivosti je zvyčajne množina $\mathcal{R}^+$, $\mathcal{R}_0^+$ (množina všetkých kladných, resp. nezáporných reálnych čísel), prípadne $\mathcal{R}$ (množina všetkých reálnych čísel). Zdá sa, že by bolo užitočnejšie študovať systematicky tieto identity a ich obmeny, než robiť rôzne úpravy výrazov často dosť bizarných, ktoré sa v matematickej „praxi“ vyskytujú málo.

Východzou úlohou by mohlo byť dokazovanie nerovnosti:

$$\forall x, y, z \in \mathcal{R}; (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \geq 0. \quad (1)$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $x = y = z$.

Ak označíme $V_1 = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$, je $2V_1 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$.

Odtiaľ plynie pravdivosť tvrdenia.

Z vety (1) ľahko odvodíme napr. vetu (2) (pre riešenie našej úlohy však nie je nutná):

$$\forall x, y, z \in \mathcal{R}; 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 \geq 0. \quad (2)$$

Rovnosť nastane práve vtedy, ak $x = y = z$.

Dá sa ľahko ukázať, že odhadovaný výraz je práve $2V_1$.

Nech sú a, b, c tri reálne čísla rôzne od nuly a označme

$$V_2 = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - \frac{b(2a - c)}{a} - \frac{c(2b - a)}{b} - \frac{a(2c - b)}{c}.$$

Po úprave

$$\begin{aligned} V_2 &= 2 \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) - 2(a + b + c) = \\ &= 2abc \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) - \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ak použijeme pre $a > 0, b > 0, c > 0$ vetu (1), je $\frac{V_2}{2abc} \geq 0$ (dosadzujeme $\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z$), a preto aj $V_2 \geq 0$.

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, čiže $a = b = c$.

C-P-2

Ktoré štvorciferné číslo deliteľné 36 sa dá zapísať ako

súčet tretích mocnín dvoch bezprostredne po sebe nasledujúcich nepárnych prirodzených čísel?

KOMENTÁR

Jeden impulz k riešeniu by mohol byť v rozprave, ako matematicky vyjadriť podmienky a), b), c) a v akom poradí ich uplatniť:

Ak uplatníme podmienku c), zapíšeme (každé) hľadané číslo vo tvare

$$(2n - 1)^3 + (2n + 1)^3 = 16n^3 + 12n,$$

kde $n \in \mathcal{N}$ ($\mathcal{N}$ je množina všetkých prirodzených čísel). Podmienku a) uplatníme pomocou nerovností

$$1\,000 \leq 16n^3 + 12n < 10\,000.$$

Číslo $16n^3 + 12n = 4n(4n^2 + 3)$ je deliteľné štyrmi; je deliteľné číslom 36 práve keď je deliteľné deviatimi, čo nastane práve keď je n deliteľné tromi. (Ak je $4n^2 + 3$ násobok troch, je n násobok troch a obrátene.) Podmienka b) sa teda uplatní tým, že sa n zapíše vo tvare $n = 3k$, $k \in \mathcal{N}$.

Matematická formulácia úlohy C–P–2 teda znie: Nájdite všetky čísla $k \in \mathcal{N}$, pre ktoré platí

$$1\,000 \leq 36k(12k^2 + 1) < 10\,000. \quad (3)$$

Nerovnosti (3) upravíme

$$27,7 \dots \leq k(12k^2 + 1) < 277,7 \dots \quad (3')$$

Číslo $k(12k^2 + 1)$ s rastúcim k veľmi rýchlo rastie; zostav-

me tabuľku (to môže byť ďalší pokyn k riešeniu, ak sa chceme vyhnúť manipulácii s nerovnosťami).

k	1	2	3
$k(12k^2 + 1)$	13	98	327

Ďalej nemusíme tabuľku zostavovať; vzhľadom k (3') je jasné, že vyhovujúce je iba $k = 2$. Potom je $n = 6$, $2n - 1 = 11$, $2n + 1 = 13$. Naozaj číslo

$$11^3 + 13^3 = 3\,528 = 36 \cdot 98$$

vyhovuje všetkým trom podmienkam a), b), c).

Úloha C–P–2 sa dá rôznym spôsobom obmeňovať, napr.: Určte všetky štvorciferné čísla deliteľné číslom 48, ktoré sú súčtom tretích mocnín troch po sebe bezprostredne nasledujúcich prirodzených čísel.

Lahko sa presvedčíme, že trojica musí obsahovať práve jedno párne číslo a že má teda tvar

$$2n - 1, 2n, 2n + 1.$$

Súčet tretích mocnín je

$$12n(2n^2 + 1). \quad (4)$$

Pretože $2n^2 + 1$ je nepárne číslo, musí byť n násobkom štyroch, tj. $n = 4k = a$ z (4) dostaneme nerovnosti

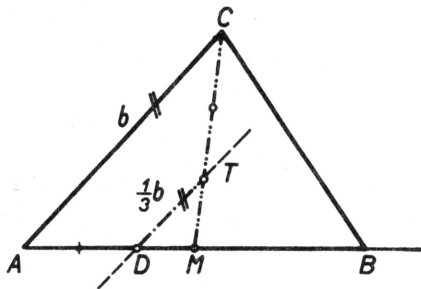
$$1\,000 \leq 48k(32k^2 + 1) < 10\,000$$

a ďalej postupujeme pomocou tabuľky ako v súťažnej úlohe.

Jsou dány dva různé body A, B a kladné číslo b . Určete geometrické místo těžišť všech trojúhelníků ABC takových, že $AC = b$.

KOMENTÁŘ

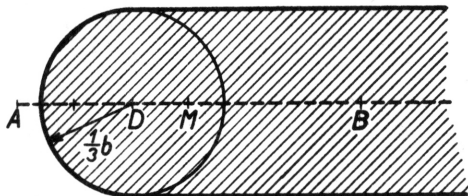
Nejprimitivnější řešení této úlohy se může opírat o obr. 22. Zde je M střed strany AB , T těžiště trojúhelníka ABC ,



Obr. 22

D bod úsečky AM , pro který platí $AD = 2DM$. Protože je (z $\triangle ACM$) $DT \parallel AC$, $DT = \frac{1}{3}AC$, leží bod T na kružnici k se středem D a poloměrem $\frac{1}{3}b$. Označíme $\mathcal{M}$ množinu všech těžišť T ; prozatím jsme dokázali inkluzi $\mathcal{M} \subset k$. Pokus dokázat obrácenou inkluzi $k \subset \mathcal{M}$ ukáže, že neplatí; je totiž třeba vyloučit oba průsečíky přímky AB s kružnicí k . Úvahy o rovnosti dvou množin, která je zajištěna dvěma inkluzemi, jsou nepostradatelné.

Náročnější variantu úlohy C-P-3 dostaneme, budeme-li vyšetřovat množinu těžišť T všech trojúhelníků AXC , kde X probíhá polopřímku p opačnou k BA a zároveň C probíhá kružnici $(A; b)$, s výjimkou jejich průsečíků s přím-



Obr. 23

kou AB . Dostaneme útvar načrtnutý na obr. 23 a vyznačený šrafovaním. Zde získate cennou zkušenost, jak v takovém případě zacházíme s dvěma proměnnými: jednu z nich (bod X) zvolíme pevně a vyšetříme množinu $\mathcal{M}_x$ pro proměnný bod C . Pak zkonstruujeme množinu $\mathcal{M}$, jež je sjednocením všech množin $\mathcal{M}_x$, kde X probíhá polopřímku p .

Přiměřenější je řešit úlohu stejnolehlosti: kružnice $(D; \frac{1}{3}b)$ je obrazem kružnice $(A; b)$ ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $\frac{1}{3}$.

C-P-4

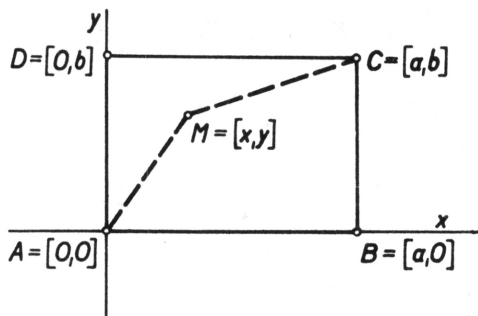
Je dán obdélník $ABCD$ a M je jeho libovolný vnitřní nebo hraniční bod. Dokažte, že platí

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

Platí tato rovnost i pro body M roviny obdélníka, které leží v jeho vnějšku?

KOMENTÁŘ

Také tato úloha je velmi primitivní. Situace volá po za-



Obr. 24

vedení soustavy ortonormálních souřadnic (obr. 24). Pak se vypočte podle známého vzorce

$$\begin{aligned} AM^2 + CM^2 &= x^2 + y^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 = \\ &= BM^2 + DM^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Je zřejmé, že (5) platí pro každý bod M roviny. Lze ovšem obejít soustavu souřadnic a vzorec pro vzdálenost dvou bodů a použít jen Pythagorovy věty; upozorňujeme však na to, že při tomto postupu musíme diskutovat polohu bodu M vzhledem k bodům A, B, C, D , že některý z potřebných pravoúhlých trojúhelníků může přejít v úsečku nebo bod, prostě, že řešení se stává těžkopádné. Naproti tomu použití vzorce pro vzdálenost dvou bodů vyřídí všechny možné případy naráz. V tom je cenné poučení o účinnosti metody souřadnic.

Dokazovaná rovnost platí ovšem také pro čtverec $ABCD$, tj. pro každý pravoúhelník. Zato pro rovnoběžník, který není pravoúhlý, věta neplatí. Umístíme soustavu souřadnic

tak, aby vrcholy rovnoběžníka $ABCD$ měly souřadnice

$$A = [0; 0], \quad B = [a; 0], \quad C = [a + u; c], \\ D = [u; c].$$

Vypočteme

$$\Delta = AM^2 + CM^2 - (BM^2 + DM^2).$$

Po výpočtu vyjde

$$\Delta = 2au. \quad (6)$$

Protože $a \neq 0$, je $\Delta = 0$, právě když $u = 0$, tj. když bod D leží na ose y , tj. když $\sphericalangle DAB = 90^\circ$.

Problém můžeme ještě zobecnit: můžeme formulovat otázku, pro které čtyřúhelníky (konvexní či nekonvexní) platí

$$AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2 \quad (7)$$

pro všechny body M roviny. Metoda vyšetřování je stejná: zvolíme soustavu souřadnic tak, aby pro vrcholy A, B, C, D čtyřúhelníka platilo $A = [0; 0]$, $B = [a; 0]$, $C = [b; c]$, $D = [d; e]$.

Z podmínky (7) dostaneme

$$b^2 + c^2 - 2bx - 2cy = \\ = a^2 + d^2 + e^2 - 2ax - 2dx - 2ey.$$

Porovnáním koeficientů a absolutních členů dostaneme

$$b = a + d, \quad c = e, \quad b^2 + c^2 = a^2 + d^2 + e^2. \quad (8)$$

Středy dvojic AC a BD mají souřadnice

$$\left[\frac{1}{2}(a + d), \frac{1}{2}e\right], \quad \left[\frac{1}{2}b; \frac{1}{2}c\right];$$

podle (8) tedy oba středy splynou a čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník. Z poslední rovnice (8) plyne

$$b^2 = a^2 + d^2;$$

protože $b = a + d$ a $a \neq 0$, je $d = 0$, tj. $\sphericalangle DAB = 90^\circ$.

Shrneme výsledky: Je-li $ABCD$ rovnoběžník, pak pro všechny body M jeho roviny platí $\Delta = \text{konst.}$ Tato konstanta ($2au$) je rovna nule právě tehdy, když je rovnoběžník $ABCD$ pravoúhlý.

Tím však není situace vyčerpána; zcela přirozená je otázka, jakých hodnot pro body M nabývá výraz Δ , je-li $ABCD$ čtyřúhelník, který není rovnoběžník. Po předchozích zkušenostech můžete už postupovat samostatně. Zvolíte soustavu souřadnic jako dříve tak, že $A = [0; 0]$, $B = [a; 0]$, $C = [b; c]$, $D = [d; e]$ a vypočtete Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= 2(a + d - b)x + 2(e - c)y + \\ &+ (b^2 + c^2 - a^2 - d^2 - c^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Protože $ABCD$ není rovnoběžník, nejsou oba koeficienty při x , y , v (9) rovny nule. Z (9) lze vyčíst toto: Výraz Δ nabývá též hodnoty k (libovolně zvolené) pro nekonečně mnoho bodů $[x; y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $\Delta = k$, tj. které vyplňují přímku o rovnici $\Delta = k$. Mohlo by se zjišťovat, jakou polohu má tato přímka (resp. osnova přímek při proměnném k) vzhledem k bodům A , B , C , D apod.

Zkoumání vyžaduje hlavně tři poznatky analytické geometrie. Jsou to: vzorec pro vzdálenost dvou bodů, souřadnice středu úsečky a rovnice přímky. Tím tyto připojené úlohy už značně vybočují z náplně osnovy pro první ročník, ale poskytují pěkný příklad problémové situace pro starší olympioniky.

KOMENTÁŘE
K ŘEŠENÍ PŘÍPRAVNÝCH ÚLOH KATEGORIE Z
I. KOLA

Z-P-1

Šachový kroužek uspořádal turnaj, v němž každý z kamarádů, Jirka, Karel, Tonda, obsadil právě jedno z prvních tří míst. Určete pořadí chlapců v šachovém turnaji, víte-li, že z výroků

- a) Jirka je třetí,
 - b) Tonda není druhý,
 - c) Karel není třetí,
- je právě jeden pravdivý.

KOMENTÁŘ

Úloha dává příležitost k procvičování negací výroků a jejich pravdivostních hodnot, i když není třeba o nich explicitně hovořit. Řešení bude asi v každém případě experimentální. Jedna možnost je vypsát všechny permutace tří prvků J (Jirka), K (Karel), T (Tonda) a vybrat z nich ty, které vyhovují podmínce. Toto je metoda dosti primitivní, ale vede spolehlivě k cíli. Přitom musíme prozkoumat jen $3! = 6$ permutací.

Této metody se dá zcela dobře použít i při čtyřech prvcích; počet permutací je pak $4! = 24$. Časově náročnější je zkoumání všech permutací 5 prvků, kterých je $5! = 120$. Na V. mezinárodní matematické olympiádě v Polsku v r. 1963 byla

dána úloha tohoto druhu; její experimentální řešení trvalo jen asi 35 minut a bylo kratší i jednodušší než řešení, které používalo pomocné věty z kombinatoriky.

Vraťme se k naší úloze. Šest možných permutací (pořadí) tří kamarádů bylo:

1. *JKT*, 2. *JTK*, 3. *KJT*, 4. *KTJ*, 5. *TJK*, 6. *TKJ*.

Pro permutace 1 a 3 jsou pravdivé výroky *b*, *c*, proto nejsou řešením úlohy. Pro permutaci 2 jsou nepravdivé všechny tři výroky *a*, *b*, *c*, pro permutaci 4 jsou pravdivé výroky *a*, *c*, pro permutaci 5 je pravdivý jen výrok *b*, pro permutaci 6 jsou pravdivé všechny tři výroky *a*, *b*, *c*. Řešení je tedy jediné: je to permutace 5.

Jiné experimentální řešení vychází z pravdivosti či nepravdivosti výroků *a*, *b*, *c*; z nich se sestaví žadaná permutace. Při tomto postupu lze použít tabulku:

	I	II	III
<i>a</i>	<i>p</i>	<i>n</i>	<i>n</i>
<i>b</i>	<i>n</i>	<i>p</i>	<i>n</i>
<i>c</i>	<i>n</i>	<i>n</i>	<i>p</i>

(1)

Přitom *p* (*n*) značí pravdivost (nepravdivost) příslušného výroku.

Jsou tedy možné tři případy, charakterizované třemi sloupci tabulky (1). Připomeňme ještě, že je-li výrok nepravdivý, je jeho negace (popření) pravdivá, a že jen jediný z výroků *a*, *b*, *c* je pravdivý. Tři možné případy pak zapíšeme slovně:

I. Jirka je třetí.

Tonda je druhý.

Karel je třetí.

II. Jirka není třetí.

Tonda není druhý.

Karel je třetí.

III. Jirka není třetí.

Tonda je druhý.

Karel není třetí.

Případ I je nemožný (Jirka i Karel nemůže být třetí). Také případ III je nemožný (Jirka i Karel by museli být první). Zbývá jen případ II, který vede k pořadí *TJK* jako při prvním způsobu řešení.

Varianta úlohy pro čtyřprvkovou množinu je tato: Z cifer 1, 2, 3, 4 má být sestaveno čtyřciferné číslo tak, aby

a) právě dvě cifry stály na místě, které udávají (např. 2 na druhém místě zleva);

b) byly právě tři dvojice, kde by větší z čísel 1, 2, 3, 4 stálo před menším (např. 3 před 1).

Prozkoumáním všech 24 permutací v množině $\{1, 2, 3, 4\}$ zjistíme, že podmínce a) vyhovuje jen šest permutací

1243, 1324, 1432, 2134, 3214, 4231.

Počty dvojic, v nichž je větší číslo před menším, jsou po řadě

1, 1, 3, 1, 3, 5.

Řešením jsou tedy čísla 1432 a 3214.

Z-P-2

Ručičky hodin ukazují přesně 12 hodin. Otočíme velkou ručičkou stokrát po sto stupních. Kolik hodin pak budou hodiny ukazovat? Udejte s přesností na minutu.

Tato úloha je jednak školským cvičením na tzv. převody měr úhlových na míry časové, jednak cvičením na rozšíření algoritmu „dělení se zbytkem“ čili měření na rozklad daného čísla vzhledem k několika dělitelům.

Předpokládáme, že otáčení velkou ručičkou neprovádí ničitel hodinových strojů, tj. že se otáčení děje ve smyslu pohybu hodinových ručiček. Otočí se o $100 \cdot 100^\circ$, tj. o 10 000 úhlových stupňů. Jedné časové minutě je na ciferníku hodin přiřazen úhel 6° ; provedenému otočení je tedy přiřazen čas $\frac{1}{6} \cdot 10\,000 \doteq 1\,667$ časových minut, tj. 27 hodin 47 minut, neboť $1667 = 27 \cdot 60 + 47$. Je tedy

$$10\,000^\circ \mapsto 1 \text{ den} + 3 \text{ hodiny} + 47 \text{ minut} . \quad (1)$$

Hodiny budou ukazovat $3^h 47^{\text{min}}$ (s přesností na jednu minutu).

Domníváme se, že by se však měla řešit též úloha obecná (otočení o n stupňů) a měl by se sestavit vzorec

$$n = 8\,640a + 360b + 6c + z , \quad (2)$$

kde a, b, c jsou nezáporná čísla, $b < 24$, $c < 60$, a z je celé takové číslo, že platí

$$|z| < 3 . \quad (3)$$

Přitom a značí počet dní, b počet hodin, c počet minut.

Vzorci (2) užijeme takto: číslo n dělíme číslem 8 640 a vyjde počet dní a . Zbytek tohoto dělení dělíme dále číslem 360 a vyjde počet hodin b . Zbytek druhého dělení dělíme čís-

lem 6, ale tak, aby nový zbytek měl absolutní hodnotu menší než 3; tak vyjde počet minut.

V našem případě:

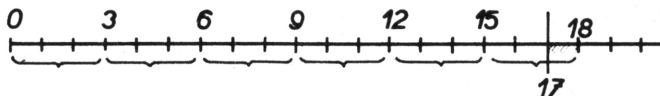
$$10\,000 = 8\,640 \cdot 1 + 1\,360,$$

$$1\,360 = 360 \cdot 3 + 280,$$

$$280 = 6 \cdot 47 - 2.$$

Obdobné vzorce lze konstruovat např. při převádění hodin na hodiny, dny, týdny, měsíce apod. Pozměněné „dělení“, kde absolutní hodnota zbytku je nejvýše rovna polovině dělitele, se dá dobře vysvětlit pomocí číselné osy (obr. 25), např.

$$17 = 6 \cdot 3 - 1, \quad |-1| < \frac{1}{2} \cdot 3. \quad (4)$$



Obr. 25

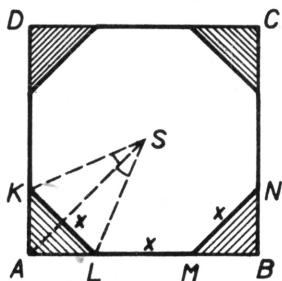
Z-P-3

Pravidelný osemuholník má byť vpísaný do štvorca s jednotkovou stranou.

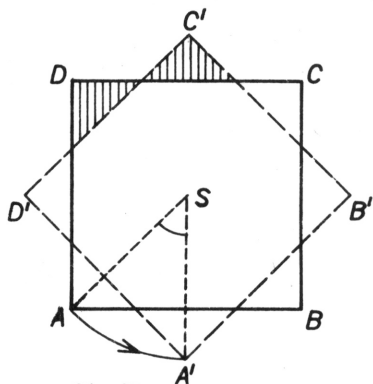
- Popíšte konštrukciu.
- Vypočítajte dĺžku strany osemuholníka.
- Vypočítajte dĺžky všetkých uhlopriečok osemuholníka.

Formulácia „vpísať pravidelný osemuholník do štvorca“ nie je jednoznačná; malo by sa diskutovať o jej interpretácii. Obdobná formulácia „vpísať trojuholník do kružnice“ znamená, že každý vrchol trojuholníka leží na kružnici, obdobne v našej úlohe budeme požadovať, aby všetkých osem vrcholov pravidelného osemuholníka ležalo na hranici štvorca $ABCD$ (obr. 26). Osemuholník vznikne oddelením vyšrafovaných trojuholníkov od štvorca $ABCD$.

Z obr. 26 môžeme ľahko odvodiť konštrukciu, ak si povšimneme, že $\sphericalangle KSA = \sphericalangle ASL = 22^\circ 30'$; pritom je S stred štvorca $ABCD$. Ďalšia konštrukcia podľa obr. 27; tu sú oba vyšrafované trojuholníky zhodné (prečo?). Ak osemuholník doplníme v tieto štyri trojuholníky, ktoré ležia mimo štvorca, vznikne nový štvorec $A'B'C'D'$, zhodný s pôvodným. Aj keď nepoznáte zo školskej geometrie otočenie okolo streda, môžete ľahko „objaviť“, že štvorec $A'B'C'D'$ vznikne zo štvorca



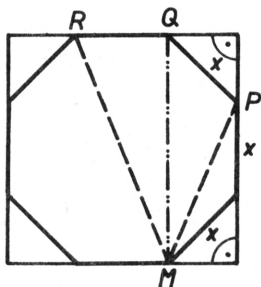
Obr. 26



Obr. 27

$ABCD$ otočením o uhol veľkosti 45° v kladnom zmysle okolo stredu S (S je stred štvorca $ABCD$). Tento štvorec $A'B'C'D'$ sa dá ľahko zostrojiť, pri jeho konštrukcii záleží veľmi na presnosti rysovania, tak ako pri prvom spôsobe. Dá sa povedať, že kontrola zistením zhodnosti všetkých strán a všetkých uhlov výsledného osemuholníka je náročnou skúškou presného rysovania. Za jednotku dĺžky volíme asi 6 cm.

Druhá a tretia časť úlohy je cvičením na použitie Pythagorovej vety a na výpočty s odmocninami. Výpočty sa síce dajú previesť úplne numericky, ale bolo by veľmi cenné porovnať eleganciu a presnosť „algebraického postupu“ s ťažkopádnosťou bezduchého numerického výpočtu.



Obr. 28

Pre výpočet dĺžky strany použijeme obr. 28. Dĺžku strany osemuholníka označíme x ; potom je

$$KL = LM = MN = x, \quad AL = BM = \frac{x}{\sqrt{2}},$$

teda

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + x + \frac{x}{\sqrt{2}} = 1, \quad (5)$$

tj.

$$\frac{2x}{\sqrt{2}} + x = 1, \quad x\sqrt{2} + x = 1, \quad x(\sqrt{2} + 1) = 1,$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}. \quad (6)$$

V predchádzajúcich výpočtoch môžeme pracovať s $\sqrt{2}$ ako s parametrom r ; prevádzať algebraické úpravy a používať

pri nich stále vzťah $r^2 = 2$ (napr. je $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$).

Vzorec (6) je nepohodlný, pretože v jeho menovateli nie je celé číslo. Preto prevedieme známu úpravu (tzv. rozšírenie)

$$x = \frac{1}{r + 1} = \frac{r - 1}{(r + 1)(r - 1)} = \frac{r - 1}{r^2 - 1} =$$
$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1. \quad (7)$$

Až teraz dosadíme napr. $\sqrt{2} \doteq 1,414$ a vyjde

$$x \doteq 0,414.$$

Numerický výpočet by vyšiel od vyčíslenej rovnice

$$\frac{x}{1,414} + x + \frac{x}{1,414} = 1$$

a dospel by k rovnici

$$3,414x = 1,414$$

a odtiaľ by sa po neprijemnom počítaní určilo x numericky.

Dĺžky uhlopriečok MP , MQ , MR (každá iná uhlopriečka pravidelného osemuholníka je zhodná s niektorou z nich) vypočítame pomocou Pythagorovej vety. Vyjde

$$MP^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + x\right)^2 = x^2(2 + \sqrt{2}),$$

$$MQ = 1,$$

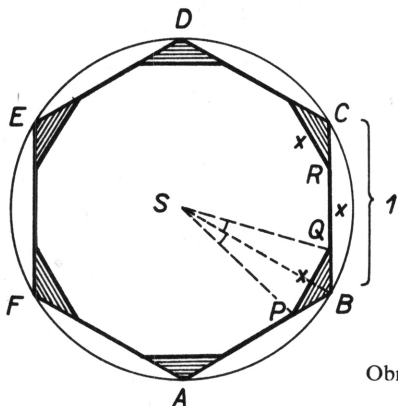
$$MR^2 = 1 + x^2.$$

Po úprave (dosadenie za x zo (7)) dostaneme

$$MP^2 = 2 - \sqrt{2}, \quad MR^2 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Ak sem dosadíme $\sqrt{2} \doteq 1,414$, môžeme pomocou tabuľky druhých mocnín vypočítať MP a MR .

Ako cvičnú úlohu odporúčame „vpísať do jednotkového pravidelného šesťuholníka pravidelný dvanásťuholník“ a vypočítať dĺžku jeho strany (obr. 29). Pri konštrukcii použijeme



Obr. 29

tú skutočnosť, že $\sphericalangle PSB = \sphericalangle BSQ = 15^\circ$ alebo otočíme daný jednotkový pravidelný šesťuholník okolo jeho stredu S o 30° . Pri výpočte postupujeme takto: Označíme $PQ = x$, pretože $\sphericalangle PQB = 30^\circ$, $\sphericalangle SBQ = 60^\circ$, je $BQ = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Zo vzťahu $BQ + QR + RC = 1$ plynie

$$\frac{2x}{\sqrt{3}} + x = 1,$$

čiže

$$x(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}.$$

Odtiaľ vypočítame

$$x = 2\sqrt{3} - 3 \doteq 0,464. \quad (8)$$

Tiež v tejto cvičnej úlohe je vhodné nahradiť $\sqrt{3}$ parametrom r . Výpočet má potom túto podobu:

$$\frac{x}{r} + \frac{x}{r} + x = 1,$$

$$\frac{2x + rx}{r} = 1,$$

$$(2 + r)x = r,$$

$$x = \frac{r(2 - r)}{(2 + r)(2 - r)},$$

$$x = \frac{2r - r^2}{4 - r^2}. \quad (9)$$

Ak sem dosadíme $r = \sqrt{3}$ a $r^2 = 3$, vyjde (8). Stojí azda

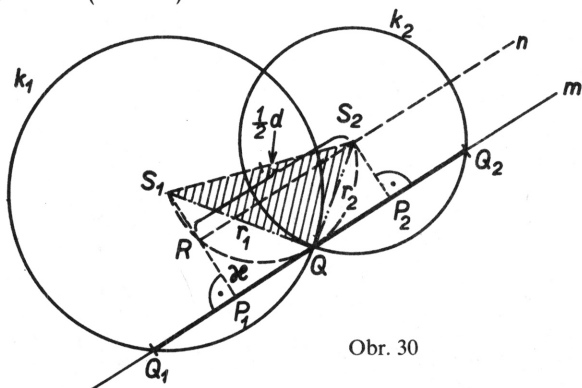
za pozornost, že pri dosadení $r = \sqrt{2}$, $r^2 = 2$ do (9) vyjde (7). To naznačuje, že vzorec (9) má obecnější platnosť. Úlohou zostáva výpočet dĺžok uhlopriečok dvanásťuholníka. Pri zobecňovaní úlohy sa uplatní miesto Pythagorovej vety jej zobecnenie – kosínová veta.

Z–P–4

Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, které se protínají v bodě Q , přičemž je $r_1 \neq r_2$, $\angle S_1QS_2 = 90^\circ$. Dále je dáno kladné číslo d . Bodem Q vedte přímku tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vyřaly dvě nepřekrývající se tětiny, jejichž délky mají součet d . Proveďte diskusi řešení úlohy.

KOMENTÁŘ

Úloha Z–P–4 otvírá tematiku ortogonálních kružnic: přímka QS_1 (QS_2) se v bodě Q dotýká kružnice k_2 (k_1); protože je $QS_1 \perp QS_2$, protínají se kružnice k_1, k_2 v bodě Q ortogonálně (obr. 30).



Obr. 30

Do postupu řešení úlohy vnikneme upozorněním na skutečnost, že $P_1P_2 = \frac{1}{2}d$ (P_1, P_2 jsou paty kolmic spuštěných z bodů S_1, S_2 na přímku m). Přímka n vedená bodem S_2 rovnoběžně s přímkou m (předpokládáme $r_1 > r_2$) protne úsečku S_1P_1 v bodě R . Pravoúhlý trojúhelník S_1S_2R má přeponu délky $c = S_1S_2$ a odvěsnu délky $S_2R = \frac{1}{2}d$; může se ovšem redukovat na úsečku S_1S_2 , je-li $S_1S_2 = \frac{1}{2}d$. Z pravoúhlého trojúhelníka S_1S_2Q plyne

$$c^2 = r_1^2 + r_2^2. \quad (10)$$

Body Q, R leží na polokružnici κ sestrojené nad průměrem S_1S_2 . Trojúhelník S_1S_2R udává směr (S_2R) přímky m . To je druhý pokyn pro řešení úlohy.

Diskuse je poměrně obtížná. Je třeba zajistit sestrojitelnost bodu R ; podmínkou pro to je vztah $\frac{1}{2}d \leq S_1S_2$, neboli podle (10)

$$d^2 \leq 4(r_1^2 + r_2^2). \quad (11)$$

Dále je třeba uplatnit podmínku, že obě tětivy Q_1Q a Q_2Q se nepřekrývají. Zde asi budou řešitelé zkoušet a k výsledku dojdou cestou vždy trochu intuitivní, neboť jde o otázku uspořádání. Pravděpodobně zkoušením objeví (nutnou a postačující) podmínku $\frac{1}{2}d \geq r_2$ neboli

$$d \geq 2r_2. \quad (12)$$

To vyplyne ze sledování polohy bodu R na obloucích S_1Q, S_2Q polokružnice κ . Spojením podmínky $r_1 > r_2$ s podmínkami (11) a (12) dostaneme tzv. podmínku řešitelnosti v současné platnosti nerovností

$$r_1 > r_2, \quad d \geq 2r_2, \quad d^2 \leq 4(r_1^2 + r_2^2).$$

Délka d tedy náleží intervalu

$$2r_2 \leq d \leq 2\sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Zbývá vyšetřit případ $r_1 = r_2$ (i když ho znění textu úlohy vylučuje). Vzhledem k choulostivé diskusi by bylo asi nejvýhodnější řešit úlohu metodou souřadnic.

III. Soutěžní úlohy I. kola

KOMENTÁŘE

K ŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍCH ÚLOH KATEGORIE A I. KOLA

A-I-1

Budte x_1, x_2, x_3 tři kladná čísla. Budte y_1, y_2, y_3 tři kladná čísla, která leží mezi největším a nejmenším z čísel x_1, x_2, x_3 a nechť platí

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq y_1 + y_2 + y_3. \quad (1)$$

Dokažte, že pak je

$$x_1 x_2 x_3 \leq y_1 y_2 y_3, \quad (2)$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \leq y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1. \quad (3)$$

KOMENTÁŘ

Podmínky (1), (2), (3) se týkají tzv. elementárních symetrických funkcí proměnných x_i , resp. y_i . Označme:

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$\sigma_1 = y_1 + y_2 + y_3,$$

$$s_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1,$$

$$\sigma_2 = y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1,$$

$$s_3 = x_1 x_2 x_3,$$

$$\sigma_3 = y_1 y_2 y_3.$$

Symetrie těchto funkcí umožňuje zvolit označení tak, aby platilo

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3, \quad y_1 \leq y_2 \leq y_3, \quad (4)$$

takže z předpokladů úlohy

$$x_1 \leq y_1, \quad y_3 \leq x_3. \quad (5)$$

Volbu označení můžeme považovat za *první impuls* pro řešení úlohy.

Druhým impulsem je zjištění, že stačí dokázat tvrzení pro případ, že v (1) nastane rovnost: snadno se ověří, že vždy existují kladná čísla y'_1, y'_2, y'_3 tak, že $y'_1 \leq y'_2 \leq y'_3$, dále

$$x_1 \leq y'_1, \quad y'_3 \leq x_3,$$

a konečně

$$y'_i \leq y_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

a přitom

$$x_1 + x_2 + x_3 = y'_1 + y'_2 + y'_3.$$

Dokážeme-li nerovnosti (2) a (3) pro y'_1, y'_2, y'_3 , pak (2) a (3) platí tím spíše pro y_1, y_2, y_3 .

Třetím impulsem, který ulehčí řešení, je zavedení polynommických funkcí

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2)(t - x_3)$$

a

$$g(t) = (t - y_1)(t - y_2)(t - y_3).$$

Po vynásobení totiž dostaneme

$$f(t) = t^3 - s_1 t^2 + s_2 t - s_3 ,$$

$$g(t) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 .$$

Dvojiho vyjádření funkcí $f(t)$ a $g(t)$ užijeme při dosazení $t = x_1$ a $t = x_3$. Je totiž

$$f(x_1) = f(x_3) = 0 , \quad (6a)$$

zatímco z (5) vyplývá

$$g(x_3) \geq 0 , \quad (6b)$$

$$g(x_1) \leq 0 . \quad (6c)$$

Nyní je již vše připraveno k důkazu. Předpokládejme, že v (1) nastane rovnost. Odečteme $f(t)$ a $g(t)$: výsledná funkce $r(t)$ je lineární (nebo konstantní):

$$r(t) = (s_2 - \sigma_2) t - (s_3 - \sigma_3) . \quad (6d)$$

Máme dokázat, že

$$s_2 \leq \sigma_2 ,$$

$$s_3 \leq \sigma_3 .$$

Dosadíme-li do $r(t)$ jednak $t = x_1$, jednak $t = x_3$, dostáváme podle (6a) až (6c)

$$r(x_1) \geq 0 , \quad r(x_3) \leq 0$$

neboli

$$(s_2 - \sigma_2) x_1 - (s_3 - \sigma_3) \geq 0 .$$

$$(s_2 - \sigma_2) x_3 - (s_3 - \sigma_3) \leq 0 . \quad (7)$$

Tyto nerovnosti dávají po odečtení

$$(s_2 - \sigma_2)(x_3 - x_1) \leq 0.$$

Je-li $x_3 > x_1$ (vždycky je $x_3 \geq x_1$), dostáváme

$$s_2 \leq \sigma_2$$

a z první z nerovností (7)

$$s_3 \leq \sigma_3,$$

jak jsme měli dokázat. Případ $x_3 = x_1$ v tomto studiu k cíli nevede, ale vrátíme-li se na začátek úvahy, zjistíme, že z (5) a (4) pak vyplývá rovnost všech čísel x_i a y_i , takže $s_2 = \sigma_2$ a $s_3 = \sigma_3$. Řešení je úplné.

A-I-2

Jsou-li dána libovolná čtyři různá reálná čísla, lze označit vždy jedno z nich x a ostatní tři pak y, z, w tak, aby platila nerovnost

$$|x^3 - x^2(y + z + w)| < |x(yz + zw + wy) - yzw|; \quad (8)$$

dokažte.

KOMENTÁŘ

Snad nejpřirozenější je důkaz nepřímý. Jsou-li daná čísla ve vzestupném uspořádání

$$a < b < c < d, \quad (9)$$

pak zvolíme-li kterékoli z nich za x , neplatí nerovnost (8), ale její negace; platí tedy zároveň (9) a nerovnosti

$$a^2|a - b - c - d| \geq |abc + abd + acd - bcd|, \quad (10a)$$

$$b^2|b - a - c - d| \geq |abc + abd + bcd - acd|, \quad (10b)$$

$$c^2|c - a - b - d| \geq |abc + acd + bcd - abd|, \quad (10c)$$

$$d^2|d - a - b - c| \geq |abd + acd + bcd - abc|. \quad (10d)$$

Ze systému nerovností (9) a (10) máme odvodit spor.

Protože podle (9) je $(b - a)(b - c)(b - d) > 0$, je

$$b^2(b - a - c - d) + (abc + abd + bcd - acd) > 0. \quad (11)$$

Spojením (10b) a (11) dostaneme

$$b - a - c - d > 0. \quad (12)$$

Obdobně je podle (9) $(c - a)(c - b)(c - d) < 0$, a tedy

$$c^2(c - a - b - d) + (abc + acd + bcd - abd) < 0. \quad (13)$$

Spojením (10c) a (13) dostaneme

$$c - a - b - d < 0. \quad (14)$$

Z (12) a (14) odvodíme

$$b - c > a + d, \quad b - c > -(a + d),$$

tj.

$$b - c > |a + d| \geq 0.$$

Avšak nerovnost $b - c > 0$ je ve sporu s (9).

Obdobne jako (12) a (14) lze odvodit z nerovností $(a - b)(a - c)(a - d) < 0$ a $(d - a)(d - b)(d - c) > 0$ nerovnosti

$$b + c + d - a > 0 \quad \text{a} \quad d - a - b - c > 0, \quad (15)$$

kterých však nelze využít k odvození sporu.

Odvodí-li řešitel všechny čtyři nerovnosti (12), (14) a (15), záleží na jeho kombinačních schopnostech, aby vyhledal ty dvě z nich, které vedou ke sporu.

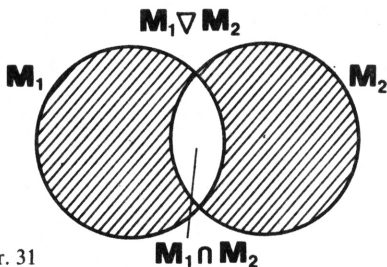
A-I-3

Je daná konečná množina $\mathcal{X}$, označme $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ dve jej ľubovolné neprázdné podmnožiny, s_{12}, d_{12} nech sú počty prvkov množín $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) \setminus (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)$ a prehlásme číslo $\frac{d_{12}}{s_{12}}$ vzdialenosťou množín $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$. Dokážte, že pre túto vzdialenosť platí trojuholníková nerovnosť.

KOMENTÁR

Táto úloha poskytuje niekoľko príležitostí k rozšíreniu znalostí žiakov v množinovej tématike. Číslo d_{12} je zrejme počet prvkov tzv. *symetrického rozdielu* množín $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$: označme ho $\mathcal{M}_1 \nabla \mathcal{M}_2$. Pomocou Vennovho diagramu (obr. 31), kde $\mathcal{M}_1 \nabla \mathcal{M}_2$ je vyšrafovaný, ľahko odvodíme:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 \nabla \mathcal{M}_2 &= (\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{M}_2) \cup (\mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1) = \\ &= \{x \in \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2; (x \in \mathcal{M}_1 \wedge x \notin \mathcal{M}_2) \vee \\ &\quad \vee (x \notin \mathcal{M}_1 \wedge x \in \mathcal{M}_2)\}. \end{aligned}$$



Obr. 31

V potenčnej množine $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$ konečnej množiny $\mathcal{X}$, ktorá je tiež konečná*), zavedieme podľa textu úlohy vzdialenosť

$$\varrho(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \frac{d_{12}}{s_{12}} \quad \text{pre} \quad \mathcal{M}_1 \neq \emptyset \vee \mathcal{M}_2 \neq \emptyset$$

a $\varrho(\emptyset, \emptyset) = 0$.

Zrejme je

$$\forall \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{P}^{\mathcal{X}}; \varrho(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \geq 0;$$

$$\forall \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{P}^{\mathcal{X}}; \varrho(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \varrho(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1);$$

$$\forall \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{P}^{\mathcal{X}}; \varrho(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2.$$

Ak dokážeme, že pre vzdialenosť ϱ platí ešte neostrá trojuholníková nerovnosť, bude dokázané, že štruktúra $(\mathcal{P}^{\mathcal{X}}, \varrho)$ je metrický priestor a zobrazenie $\mathcal{P}^{\mathcal{X}} \times \mathcal{P}^{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{R}$, tj. $[\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2] \rightarrow \varrho(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ je metrika.

Pretože riešiteľom sú najbližšie operácie $\cap$, $\cup$, vyjadríme d_{12} pomocou p_{12} , s_{12} ; z definície operácie ∇ vidno, že

*) Potenčná množina $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$ je množina všetkých podmnožín základnej množiny $\mathcal{X}$ včítane množiny $\emptyset$. Ak má $\mathcal{X}$ n prvkov, má $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$ 2^n prvkov.

$$d_{12} = s_{12} - p_{12},$$

a teda

$$\frac{d_{12}}{s_{12}} = 1 - \frac{p_{12}}{s_{12}}.$$

Teda máme dokázať, že pre všetky trojice $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3 \in \mathcal{P}^{\mathcal{X}}$ platí nerovnosť

$$\Delta = \left(1 - \frac{p_{12}}{s_{12}}\right) + \left(1 - \frac{p_{23}}{s_{23}}\right) - \left(1 - \frac{p_{31}}{s_{31}}\right) \geq 0,$$

čili

$$\Delta = \frac{1}{s_{12}s_{23}s_{31}}.$$

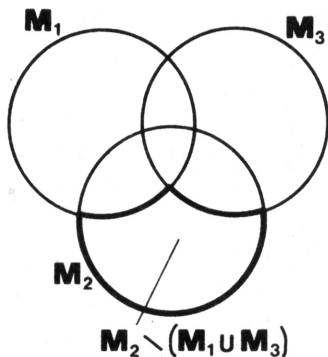
$$\cdot (s_{12}s_{23}s_{31} - p_{12}s_{23}s_{31} - p_{23}s_{12}s_{31} + p_{31}s_{12}s_{23}) =$$

$$= \frac{\delta}{s_{12}s_{23}s_{31}} \geq 0. \quad (16)$$

Z (16) plynie, že $\Delta \geq 0$ práve vtedy ak $\delta \geq 0$. Sústreďme sa na dokázanie nerovnosti $\delta \geq 0$.

Za predpokladu, že riešitelia sú zoznámení zo symetrickým rozdielom dvoch množín a s pojmom metrického priestoru (to však nie je nevyhnutelne nutné), môžu sa dopracovať nerovnosti $\delta \geq 0$ samostatne. Pre zjednodušenie ďalšieho postupu snáď ešte doporučíme, aby použili indukciu, tým sa vyhnú zdĺhavým výpočtom.

Indukcia môže postupovať s rastúcim počtom prvkov



Obr. 32

množiny $\mathcal{M}_2 \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_3)$, ktorá je na obr. 32 hrubo ohraňovaná.

Predpokladajme, že pre množiny $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ platí nerovnosť $\delta \geq 0$ a nahradíme množinu $\mathcal{M}_2$ množinou $\mathcal{M}_2'$ tak, že k množine $\mathcal{M}_2 \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_3)$ pridáme ďalší prvok. Číslo δ' príslušné množinám $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ dostaneme tak, že čísla $s_{12}, s_{23}, \dots$ nahradíme podľa tabuľky:

s_{12}	s_{23}	s_{31}	p_{12}	p_{23}	p_{31}
$s_{12} + 1$	$s_{23} + 1$	s_{31}	p_{12}	p_{23}	p_{31}

Dostane sa tak

$$\delta' = \delta + s_{23}s_{31} + s_{12}s_{31} + (s_{31} + p_{31}s_{23} + p_{31}s_{12} + p_{31}) - p_{12}s_{31} - p_{23}s_{31},$$

tj.

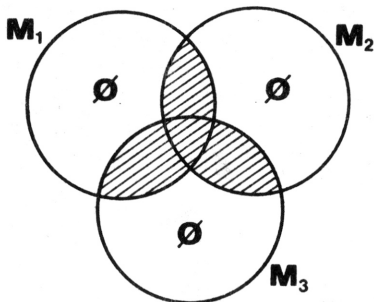
$$\delta' \geq \delta + s_{31}(s_{23} - p_{23}) + s_{31}(s_{12} - p_{12}) \geq \delta,$$

pretože $s_{23} - p_{23} \geq 0$, $s_{12} - p_{12} \geq 0$. Na tieto odhady môžu riešitelia prísť sami, ak budú skúmať vyjadrenie δ' pomocou δ .

Indukcia bude prevedená, ak platí $\delta \geq 0$ pre $\mathcal{M}_2 \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_3) = \emptyset$. Nerovnosť $\delta \geq 0$ dokážeme pre prípad $\mathcal{M}_2 \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_3) = \emptyset$ indukciou pre rastúci počet prvkov množiny $\mathcal{M}_3 \setminus (\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_1)$. Ak sa prevedie indukčný krok, potom záleží iba na tom, či nerovnosť $\delta \geq 0$ platí v prípade $\mathcal{M}_3 \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) = \mathcal{M}_2 \setminus (\mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_1) = \emptyset$. Toto však dokážeme tretiou indukciou, a to pre rastúci počet prvkov množiny $\mathcal{M}_1 \setminus (\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3)$. Nakoniec teda musíme zistiť, či nerovnosť $\delta \geq 0$ platí v prípade

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 \setminus (\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3) &= \mathcal{M}_2 \setminus (\mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_1) = \\ &= \mathcal{M}_3 \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) = \emptyset.\end{aligned}$$

To je ale evidentné (pozri obr. 33), tu je $s_{12} = s_{23} = s_{31} = s$. Označme p počet prvkov množiny $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$. Potom z (16) plynie $\delta = 2s^2(p_{31} - p)$, a teda $\delta \geq 0$. Tým je veta z úlohy A – I – 3 dokázaná.



Obr. 33

A-I-4

Zistite všetky reálne α z intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$, pre ktoré platí

$$\frac{\sin^2 \alpha (6 - \sin^2 \alpha) - 1}{\sin 2\alpha \cos \alpha} \leq \frac{7}{12}.$$

KOMENTÁŘ

Úloha pripomína staré časy, kedy jadróm stredoškolské matematiky bylo řešení rovnic všeho druhu a jejich soustav ve vumělkovaných úlohách, jejichž řešení vyžadovalo naučených triků. I když je úloha A-I-4 formulována jako nerovnost, vznikla z rovnice, v níž koeficienty jsou voleny tak, aby vyšly kořeny racionální a aby se řešitel vyhnul komplikacím — např. rovnici 4. stupně, kterou by neuměl řešit. Ale snad neškodí, když se v olympiádě vyskytne jedna uhlazená úloha z dob verneovek.

Je samozřejmým nápadem použít „substituce“ $\sin \alpha = x$; tím se rovnice, která měla lehký goniometrický nádech, převede na úlohu algebraickou, zvláště když si všimneme výhodné okolnosti, že

$$\sin 2\alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = 2x(1 - x^2).$$

Protože je $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, je $x \in (0, 1)$; to má za následek nerovnost $2x(1 - x^2) > 0$, a tím ulehčení dalšího postupu.

Danou nerovnicí znásobíme *kladným* číslem $2x(1 - x^2)$; po úpravě vyjde

$$6x^4 - 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6 \geq 0. \quad (17)$$

Zabývejme se nejprve rovnicí

$$6x^4 - 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6 = 0; \quad (18)$$

její řešení nám umožní rozložit polynom na levé straně v součin tzv. *kořenových činitelů*.

Koeficienty při x^4 , x^0 a x^3 , x jsou čísla s týmiž absolutními hodnotami; rovnice (18) je tzv. *poloreciproká*; víme, že její kořeny (čtyři) jsou po dvou převrácená čísla až na znamení. Použijeme známé úpravy (triku) a sdružíme členy takto:

$$(6x^4 + 6) + (-7x^3 + 7x) - 36x^2 = 0. \quad (19)$$

Rovnici (19) dělíme x^2 (tím neztrácíme žádný kořen, neboť rovnice (19) nemá kořen $x = 0$); vyjde

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x - \frac{1}{x}\right) - 36 = 0.$$

Provedeme novou substituci

$$y = x - \frac{1}{x}; \quad (20)$$

z (20) dostaneme $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$. Po dosazení a úpravě nabude rovnice (19) podoby:

$$6y^2 - 7y - 24 = 0.$$

Znáмым způsobem rozložíme levou stranu v součin kořenových činitelů; pak přejdeme k nerovnici

$$(3y - 8)(2y + 3) \geq 0. \quad (21)$$

Připomínáme, že tento postup je přípustný, neboť jsme dříve dělili *kladným* číslem x^2 ; pomocí (20) se vrátíme k původní neznámé x ; po vynásobení *kladným* číslem x^2 dostaneme

$$(3x^2 - 8x - 3)(2x^2 + 3x - 2) \geq 0.$$

Rozložíme-li oba kvadratické trojčleny v kořenové činitele, vyjde konečně

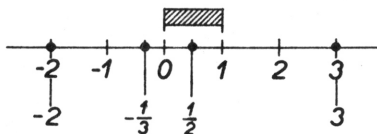
$$(x - 3)(3x + 1)(x + 2)(2x - 1) \geq 0. \quad (22)$$

Dva z činitelů (22) jsou tedy nezáporní, dva nekladní nebo jsou všichni čtyři nezáporní.

Pro zjednodušení práce se obrátíme ke geometrickému znázornění na číselné ose (obr. 34). Grafem nerovnic $x - 3 \geq 0$, $x - 3 \leq 0$ jsou dvě polopřímky s počátkem v bodě 3; obdobně je tomu u ostatních dvojčlenů. Protože řešení má padnout do intervalu $(0, 1)$, jde o polopřímky

$$x + 2 \geq 0, \quad 3x + 1 \geq 0, \quad x - 3 \leq 0.$$

Čtvrtá polopřímka musí být podle předchozího $2x - 1 \leq 0$. Pro řešení tedy dostáváme interval $(0, \frac{1}{2})$, který je průnikem intervalů $(0, 1)$ a $(-\infty, \frac{1}{2})$. Možná řešení jsou dána nerovnicemi



Obr. 34

$$0 < \sin \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad \text{tj.} \quad 0 < \alpha \leq 30^\circ.$$

Obrácením postupu je třeba dokázat, že všechna tato čísla jsou skutečně řešením úlohy.

A-I-5

V rovině je dána přímka p a uvnitř jedné poloroviny určené touto přímkou jsou dány dva různé body A, B . Dále je dán úhel velikosti α , kde $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, a úsečka velikosti d . Uvnitř poloroviny opačné k polorovině pA určete všechny body C takové, že $\sphericalangle ACB = \alpha$ a že průnik tohoto úhlu s přímkou p je úsečka délky d .

KOMENTÁŘ

Snad by se mohla dát na uvážení jiná textace úlohy:

Je dán trojúhelník ABC a přímka p jeho roviny, která odděluje body A, C i body B, C ; dále je dáno kladné číslo d . Sestrojte všechny body X poloroviny pC , pro něž platí zároveň:

$$(I) \quad \sphericalangle AXB = \sphericalangle ACB;$$

$$(II) \quad \text{úsečka } p \cap \triangle AXB \text{ má délku } d.$$

Pokládejme tuto úlohu za podnět k tomu, abychom si zopakovali celkem klasické schéma postupu řešení konstrukční úlohy a matematické úlohy vůbec. *První fáze je rozbor čili analýza*, v kterém se snažíme odvodit nutné podmínky řešení s hlavním záměrem, abychom zachytili všechna řešení; *závěrem rozboru* je vyslovení *hypotézy*, tj. konstruk-

Na tomto místě bychom mohli ukončit rozbor; doporučujeme však řešitelům, aby v rozboru, tj. ve vyhledávání nutných podmínek, ještě pokračovali, neboť tím si usnadní zkoušku a diskusi. Obecnější poučení zní: rozbor můžeme ukončit v podstatě kdekoli, ale tím zkomplikujeme zkoušku. Stručně: čím kratší a snazší je rozbor, tím delší a komplikovanější je zkouška.

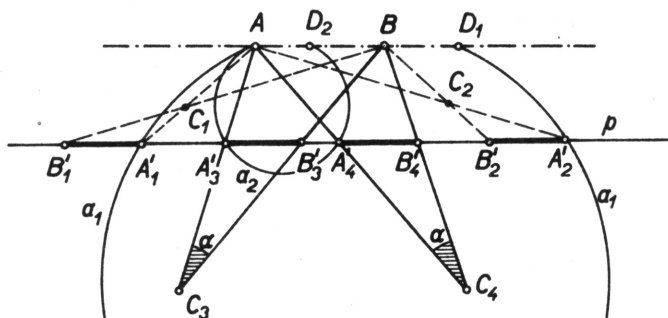
Pokračováním rozboru zjistíme tyto dvě další *nutné* podmínky:

$$\begin{aligned} &\text{přímky } AA', BB' \text{ musí být různoběžné} \\ &\quad (\text{aby vznikl bod } C); \\ &\text{polopřímky } A'A, B'B \text{ se nesmějí protnout} \\ &\quad (\text{aby bod } C \text{ neležel v polorovině } pA). \end{aligned} \tag{23}$$

Je celkem zřejmé, že bod C , který byl sestrojen popsáním způsobem jako průsečík přímek AA', BB' , je řešením úlohy.

Stanovit podmínky řešitelnosti je úkol velmi komplikovaný; úloha má totiž *pět* parametrů: např. velikost úhlu, který svírají přímky p, AB , vzdálenosti QA, QB (kde Q je průsečík p, AB) a konečně čísla α, d . Proto diskusi omezte na určení maximálního počtu řešení a na sestrojení jednoho případu, kdy úloha má maximální počet řešení.

I. Na obr. 36a je znázorněna situace, kdy $AB \parallel p$. Translace $\mathcal{T}$ má dānu jen velikost (d) a směr (p); proto může mít dvojí smysl. A tak dostaneme dva body D_1, D_2 . Nad každou z tětiv AD_1, AD_2 lze sice sestrojit dva oblouky a s obvodovým úhlem velikosti α , ale vždy jen jeden leží v polorovině ABp . Dostaneme tedy nejvýše čtyři body A' , k nim čtyři body B' a nejvýše čtyři body C . (Lze však dokázat, že jsou

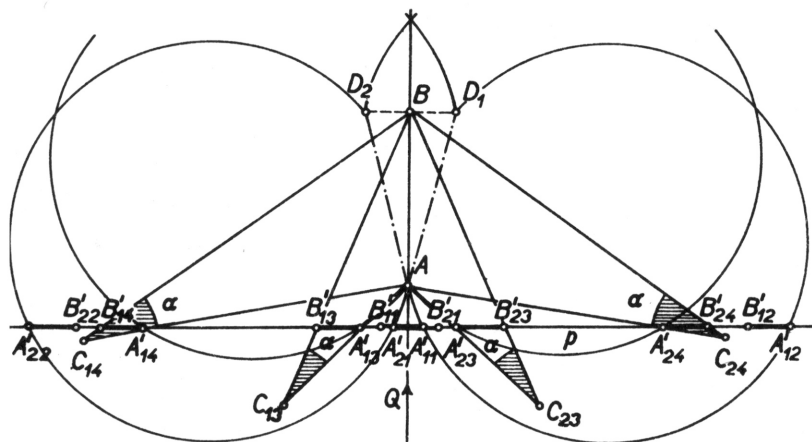


Obr. 36a

nejvýše dvě řešení — viz obr. 36a; jsou to body C_3, C_4 .)

II. Na obr. 36b je znázorněna situace, kdy je $AB \parallel p$; je zvoleno $AB \perp p$ a označení bodů A, B je takové, že platí

$$QA < QB \quad (24)$$



Obr. 36b

(Q je průsečík přímek p , AB). Dostaneme opět dva body D_1, D_2 a čtyři oblouky a_1, a_2, a_3, a_4 nad tětivami AD_1, AD_2 s obvodovým úhlem velikosti α . Každý z oblouků a_1, a_2, a_3, a_4 protne v tomto případě přímku p ; dostaneme tedy osm bodů A' , označených A'_{11} až A'_{24} a k nim osm bodů B'_{11} až B'_{24} , tj. osm dvojic $A'B'$. K řešení nevedou ty dvojice, v nichž každý z bodů A', B' leží na jiné polopřímce s počátkem Q a dále ty dvojice, pro které platí $QB' < QA'$; v obou případech totiž není splněna druhá podmínka (23). Zbývají tedy nejvýše čtyři řešení; na obr. 36b jsou to řešení $C_{14}, C_{13}, C_{23}, C_{24}$.

A—I—6

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Je-li X libovolný bod prostoru, označme $d(X)$ součet druhých mocnin všech čtyř vzdáleností bodu X od stěn daného čtyřstěnu. Dokažte, že minimum funkce $d(X)$ lze vyjádřit jako funkci výšek daného čtyřstěnu. Odvoďte příslušný vzorec.

KOMENTÁŘ

I. Geometrický názor může řešitelům napovědět domněnku, že funkce $d(X)$ může nabýt minima jen pro některý bod X v čtyřstěnu $ABCD$. Při důkazu této domněnky budeme hledat ke každému bodu X vnějšku čtyřstěnu $ABCD$ bod Y čtyřstěnu $ABCD$ tak, aby platilo $d(Y) < d(X)$. Jestliže X nenáleží čtyřstěnu $ABCD$, pak nenáleží aspoň jednomu z poloprostorů $ABCD, BCDA, CDAB, DABC$; nechť je např.

$$\begin{aligned}
& (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - \\
& \quad - (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta)^2 = \\
& = (a\beta - b\alpha)^2 + (a\gamma - c\alpha)^2 + (a\delta - d\alpha)^2 + \\
& \quad + (b\gamma - c\beta)^2 + (b\delta - d\beta)^2 + (c\delta - d\gamma)^2.
\end{aligned}$$

Z těchto tří speciálních případů, které se jednoduše ověří výpočtem, uhodnete jistě obecné znění Lagrangeovy identity (pro $2n$ proměnných):

$$\begin{aligned}
& (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) - \\
& \quad - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n)^2 = \\
& = \sum_{i,j=1,\dots,n, i < j} (a_i\alpha_j - a_j\alpha_i)^2.
\end{aligned}$$

Tato obecná formule se dá dokázat např. matematickou indukcí; pro $n = 2, 3$ má jednoduchý geometrický význam, pokládáme-li $(a_1, a_2, \dots, a_n), (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ za vektory dané souřadnicemi.

III. Označíme p_1, p_2, p_3, p_4 obsahy stěn tetraedru $ABCD$, v_1, v_2, v_3, v_4 k nim příslušné výšky, V objem tetraedru $ABCD$, X libovolný jeho bod a u_1, u_2, u_3, u_4 jeho vzdálenost od stěn tetraedru. Pak je

$$p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3 + p_4u_4 = 3V. \quad (27)$$

Podle Lagrangeovy identity je

$$\begin{aligned}
& (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2)(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) - \\
& \quad - (p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3 + p_4u_4)^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p_1 u_2 - p_2 u_1)^2 + (p_1 u_3 - p_3 u_1)^2 + (p_1 u_4 - p_4 u_1)^2 + \\
&\quad + (p_2 u_3 - p_3 u_2)^2 + (p_2 u_4 - p_4 u_2)^2 + (p_3 u_4 - p_4 u_3)^2 .
\end{aligned}
\tag{28}$$

Vypočteme-li z této rovnice $d(X) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$, vidíme, že $d(X)$ je minimální právě tehdy, jsou-li všechny členy na pravé straně rovnice (28) rovny nule. Pak je podle (27) a (28)

$$d(X_0) = \frac{9V^2}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2} . \tag{29}$$

Použijeme-li formule $p_i = \frac{3V}{v_i}$, dostaneme z (29)

$$d(X_0) = \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \frac{1}{v_4^2} \right)^{-1} ,$$

což je žádaný vzorec, který můžete na základě Lagrangeovy identity odvodit samostatně.

Vhodným úvodem do úlohy A–I–6 je její rovinná varianta.

KOMENTÁŘE

K ŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍCH ÚLOH KATEGORIE B I. KOLA

B–I–1

a) Dokážte, že nasledujúca úloha nie je riešiteľná: Máme zostrojiť dve také neprázdne podmnožiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ množiny $\mathcal{R}$ všetkých reálnych čísel, aby $\mathcal{R} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, aby aspoň jedna z množín $\mathcal{R} \setminus \mathcal{A}$, $\mathcal{R} \setminus \mathcal{B}$ nebola prázdna a aby pre ľubovoľné čísla $a \in \mathcal{A}$, $a' \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, $b' \in \mathcal{B}$ platilo

$$a + a' \in \mathcal{A}, \quad (1)$$

$$a + b \in \mathcal{B}, \quad (2)$$

$$b + b' \in \mathcal{A}. \quad (3)$$

b) Dokážte, že ak vo formulácii úlohy a) nahradíme množinu $\mathcal{R}$ množinou $\mathcal{C}$ všetkých celých čísel, potom existuje práve jedna dvojica množín $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ s požadovanými vlastnosťami. Nájdite ju.

KOMENTÁR

Text tejto úlohy, práve tak ako text úlohy B–I–3, je dosť dlhý a pomerne zložitý, je tu najlepšia príležitosť, aby sa riešitelia naučili pracovať s komplikovanejšími textami.

Odporúčame, aby začali s úlohou b) a aby si ju vyslovili úplne „inými slovami“ asi takto:

Množinu $\mathcal{C}$ všetkých celých čísel máme rozdeliť do dvoch neprázdnych podmnožín $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ tak, že nie je $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Pritom súčet dvoch čísel z tej istej podmnožiny ($\mathcal{A}$ alebo $\mathcal{B}$) má patriť do $\mathcal{A}$; súčet dvoch čísel z rôznych podmnožín ($\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$) má patriť do $\mathcal{B}$.

V texte úlohy sa nežiada, aby boli množiny $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ disjunktné, tj. aby „rozdelenie“ $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ bol rozklad.

Druhé odporúčanie riešiteľom: „Nájdite jednu dvojicu $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ vyhovujúcu daným podmienkam.“ Bez veľkej námahy zistíte, že podmienkam vyhovuje dvojica množín $\mathcal{S}$ (všetkých párnych čísel) a $\mathcal{L}$ (všetkých nepárnych čísel). Naozaj je

$$\mathcal{S} \cup \mathcal{L} = \mathcal{C}, \quad \mathcal{S} \neq \mathcal{C}, \quad \mathcal{L} \neq \mathcal{C}$$

a

súčet dvoch párnych čísel je párne číslo, (1')

súčet párneho a nepárneho čísla je nepárne číslo, (2')

súčet dvoch nepárnych čísel je párne číslo. (3')

Ak je pravdivá veta b), musí byť možné dokázať, že $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, pretože úloha b) má jediné riešenie $\mathcal{A} = \mathcal{S}$, $\mathcal{B} = \mathcal{L}$. Tretí krok teda je: Dokážme nepriamo, že $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, čiže rozdelenie na množiny $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ je rozklad množiny $\mathcal{C}$.

Predpokladajme, že existuje celé číslo $p \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ a zvolme ľubovoľné číslo $x \in \mathcal{C}$. Môžu nastať dva prípady: buď $x - p \in \mathcal{A}$ alebo $x - p \in \mathcal{B}$.

Ak je $x - p \in \mathcal{A}$, je podľa (1) a (2) $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, pretože $x = p + (x - p)$.

Ak je $x - p \in \mathcal{B}$, je podľa (2) a (3) $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, pretože $x = p + (x - p)$.

Dokázali sme, že $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, tj. $\mathcal{C} = \mathcal{A} = \mathcal{B}$,
 $\mathcal{C} \setminus \mathcal{A} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{B} = \emptyset$, a to je spor s predpokladom.

Za štvrté dokážeme, že $\mathcal{A} = \mathcal{S}$. Nech y je ľubovoľné párne číslo; pretože $y = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y$, je $y \in \mathcal{A}$ buď podľa (1) alebo podľa (3) – číslo $\frac{1}{2}y$ je totiž celé. Tým je dokázaná inklúzia $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. Miesto toho, aby sme dokazovali druhú inklúziu $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ a z toho usúdili, že platí rovnosť $\mathcal{A} = \mathcal{S}$, dokážeme nepriamo, že $\mathcal{A}$ neobsahuje žiadne nepárne číslo. Pripusťme, že z_0 je nepárne číslo a že platí $z_0 \in \mathcal{A}$. Pre každé nepárne číslo z platí

$$z = z_0 + y, \quad (4)$$

kde y je vhodné párne číslo. Z (4) plynie podľa (1), že $z \in \mathcal{A}$, tj. $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, tj. $\mathcal{C} = \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, čo nemôže nastať, ako sme dokázali. Tým je úloha b) rozriešená.

Zostáva úloha a). Disjunktnosť množín $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sa dokáže práve tak ako v úlohe b). Neexistencia takého rozkladu sa dokáže tým istým „trikom“, aký sme použili pri riešení úlohy b). Nech r je ľubovoľné reálne číslo. Z rovnosti $r = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r$ plynie $r \in \mathcal{A}$, keď $\frac{1}{2}r \in \mathcal{A}$ podľa (1) aj keď $\frac{1}{2}r \in \mathcal{B}$ podľa (3). Teda je $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$, a teda $\mathcal{R} = \mathcal{A}$. Je ale

$$(\mathcal{B} \neq \emptyset \wedge \mathcal{A} = \mathcal{R}) \Rightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset,$$

čo nie je možné. Tým je rozriešená i úloha a).

Úloha B–I–1 je dosť ťažká. Aj keď tvrdenia a), b) nie sú príliš prekvapujúca, ich dôkaz má svoju hodnotu a určite stojí za to, aby sa úloha vyriešila.

B-I-2

Označme pro přirozené číslo n a pro reálné číslo x

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n \operatorname{sign}(x - i).$$

Nechť je p dané kladné číslo. Najděte všechna přirozená čísla n taková, aby platilo

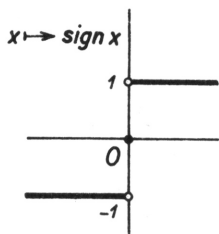
$$f_n(p) = 0.$$

(Poznámka. Funkce $x \mapsto \operatorname{sign} x$ je definována na množině $\mathcal{R}$ všech reálných čísel takto: Je-li $x > 0$, je $\operatorname{sign} x = 1$, je-li $x = 0$, je $\operatorname{sign} x = 0$, je-li $x < 0$, je $\operatorname{sign} x = -1$.)

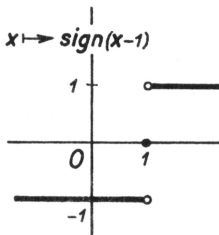
KOMENTÁŘ

Pro řešení této úlohy by se mohl dát jediný pokyn: sestavovat kartézské grafy funkcí. Funkce signum vnáší do soutěže – jak už jsme se zmínili v komentáři k přípravným úlohám – rozšíření tematiky o schodových funkcích.

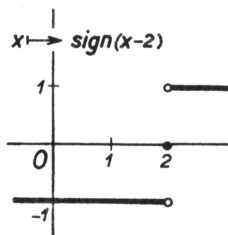
Na obr. 38–40 jsou načrtnuty funkce $x \mapsto \operatorname{sign} x$,



Obr. 38



Obr. 39



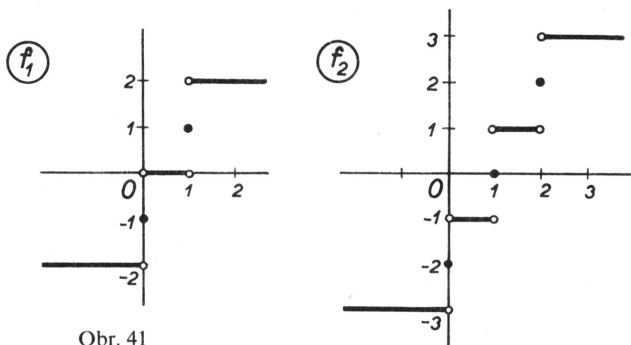
Obr. 40

$x \mapsto \text{sign}(x - 1)$, $x \mapsto \text{sign}(x - 2)$; přitom jsme užili techniky:

- (plný kroužek) — bod náleží grafu;
- (prázdný kroužek) — bod nenáleží grafu.

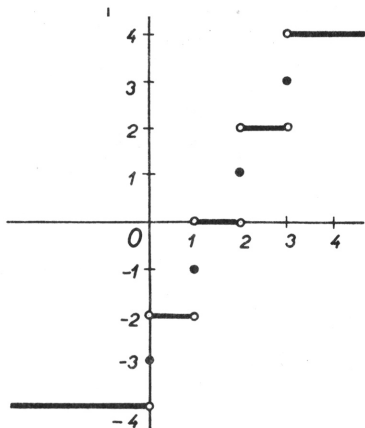
S pomocí těchto obrázků lze snadno popsat graf funkce $x \mapsto \text{sign}(x - i)$, kde i je libovolné přirozené číslo.

Na obr. 41 jsou grafy funkcí f_1, f_2 (f_0 je funkce $\text{sign } x$ —

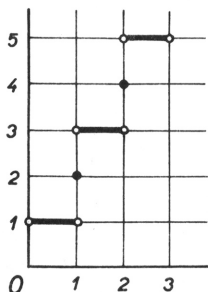


Obr. 41

viz obr. 38), tj. funkcí $x \mapsto \text{sign } x + \text{sign}(x - 1)$ a $x \mapsto \text{sign } x + \text{sign}(x - 1) + \text{sign}(x - 2)$. Tyto dva grafy reprezentují dva druhy funkcí f_n : pro n liché má tato funkce nekonečně mnoho nulových bodů, pro n sudé má jediný nulový bod. Tuto druhou domněnku potvrzuje i funkce f_0 , první domněnku potvrzuje graf funkce f_3 na obr. 42. Matematickou indukcí pro sudá a pro lichá n se snadno dokáže (s pomocí grafů), že pro $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ jsou nulové body funkce f_{2k+1} všechna čísla otevřeného intervalu $(k, k + 1)$, funkce f_{2k} má jediný nulový bod — číslo k .



Obr. 42



Obr. 43

Řešení úlohy je nejlépe znázornit opět grafem. Obr. 38 až 41 a příslušná úvaha nás přesvědčují, že ty části grafů funkcí $f_0, f_1, f_2, \dots$, které náležejí ose x , jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocení je kladná poloosa x . Proto ke každému $p > 0$ existuje *jediné* přirozené číslo n takové, že $f_n(p) = 0$; dostáváme tedy funkci φ :

$$\varphi: (p \mapsto n; f_n(p) = 0).$$

Její graf je na obr. 43. Jeho popisem odpovíme na otázku úlohy.

Je-li p přirozené číslo, je $\varphi(p) = 2p$; není-li p přirozené číslo, je $\varphi(p) = 2[p] + 1$. Přitom $[]$ značí funkci „celá část z “.

Funkce f splňuje tyto podmínky:

1. je definována právě pro všechna reálná čísla $x \geq 0$;
2. $f(nx) = f(x)$ pro všechna přirozená n a $x \geq 0$;
3. $f(x+1) = f(x)$ pro všechna $x \geq 0$;
4. $f(0) \leq 0$;
5. pro každou dvojici čísel $x \geq 0, y \geq 0$ platí $f(x) + f(y) \geq f(x+y)$.

a) Dokažte, že pak pro každou trojici přirozených čísel k, l, m platí

$$f\left(k \frac{l}{m}\right) \geq f(k) + f\left(\frac{l}{m}\right).$$

b) Ukažte na příkladě, že existuje funkce vyhovující podmínkám (1) až (5), která není identicky rovna nule v intervalu $\langle 0, \infty \rangle$.

KOMENTÁŘ

Tato úloha je ukázkou problému, kdy několika funkčními rovnicemi či nerovnicemi je určena jistá množina (rodina) funkcí Σ . V našem případě máme dokázat, že každá funkce $f \in \Sigma$ má jistou vlastnost (úloha a)) a že $\Sigma \setminus (x \mapsto 0) \neq \emptyset$ (úloha b)).

Doporučujeme vypustit nejprve podmínky 3 až 5 a použít jen podmínky 1, 2. Z podmínky 2 dostaneme pro $x = 1$

$$\forall n \in \mathcal{N}: f(n) = f(1).*)$$

*) $\mathcal{N}, \mathcal{Q}^+$ značí množinu všech přirozených, resp. kladných racionálních čísel.

Označíme $f(1) = a$ a dosadíme do podmínky 2 $n = m$,
 $x = \frac{1}{m}$; vyjde

$$\forall m \in \mathcal{N}: f\left(\frac{1}{m}\right) = a.$$

Dále dosadíme do podmínky 2 $n = l$, $x = \frac{1}{m}$; vyjde

$$\forall l, m \in \mathcal{N}: f\left(\frac{l}{m}\right) = f\left(l \cdot \frac{1}{m}\right) = f\left(\frac{1}{m}\right) = a,$$

neboli

$$\forall x \in \mathcal{Q}^+: f(x) = a. \quad (5)$$

Dokazovaná nerovnost z úlohy a) pak zní podle (5)

$$a \geq a + a,$$

neboli

$$a \leq 0. \quad (6)$$

Kdybychom do textu úlohy k podmínkám 1, 2 připojili (6) místo podmínek 3, 4, 5, platilo by tvrzení z úlohy a). Žádaným příkladem funkce $f \in \Sigma$ je funkce Dirichletova δ , definovaná takto:

$$\delta: x \mapsto \begin{cases} 0 & \forall x \geq 0 \text{ racionální;} \\ 1 & \forall x \geq 0 \text{ iracionální.} \end{cases}$$

Funkce δ splňuje i podmínky 3 až 5 z textu úlohy, jak se snadno přesvědčíme; při ověření podmínky 5 se proberou

tři případy: x, y racionální, x, y iracionální, x racionální a y iracionální.

Vyjděme při dokazování vlastnosti a) z podmínek 3 až 5. Podle podmínky 3 je (pro $x = 0$) $f(0) = f(1) = a$. Podle podmínky 5 je (pro $x = 0, y = 1$) $2a \geq a$, tj. $a \geq 0$. Spojíme-li tuto nerovnost s podmínkou 4, dostaneme $a = 0$. Pak ovšem platí evidentně dokazovaný vztah

$$f\left(k \cdot \frac{l}{m}\right) \geq f(k) + f\left(\frac{l}{m}\right),$$

a to dokonce se znakem rovnosti.

B-I-4

Určete množinu všech bodů v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice x, y mají tu vlastnost, že existují celá čísla m, n taková, že platí

$$\begin{aligned} |x - 2m| + |y - 2n| &\leq 1 \leq \\ &\leq |(x - 2m) + (y - 2n)| + |(x - 2m) - (y - 2n)|. \quad (7) \end{aligned}$$

KOMENTÁŘ

Nejprve snad poradíme řešitelům, aby si text úlohy trochu přeformulovali: Zvolme bod se sudými souřadnicemi $[2m, 2n]$ a sestrojme množinu $\mathcal{P}_{m,n}$ všech bodů $[x; y]$, jejichž souřadnice splňují nerovnice (7).

Máme vyšetřit sjednocení všech množin $\mathcal{P}_{m,n}$, když m, n probíhají množinu všech celých čísel. Z této formulace je patrné, že klíčem k řešení úlohy je prozkoumání *jedné*

množiny $\mathcal{P}_{m,n}$; ostatní z ní dostaneme přemístěním (jsou s ní shodné). Za tuto vzorovou množinu zvolíme $\mathcal{P}_{0,0}$. Nerovnice (7) pak znějí

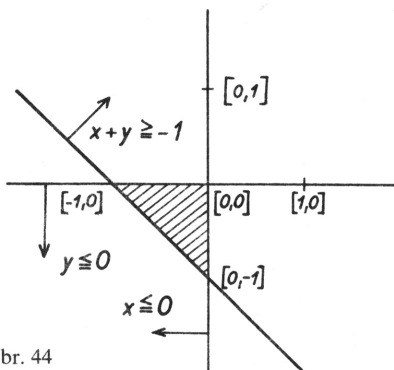
$$\begin{aligned} |x| + |y| &\leq 1, \\ |x + y| + |x - y| &\geq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

První nerovnice (8) má jako graf množinu $\mathcal{M}$ všech bodů v rovině, jejichž „orto-vzdálenost“ neboli „poštácká vzdálenost“ vzhledem k osám x, y od počátku $[0; 0]$ je rovna nejvýše jedné. Tato množina je – jak známo – uzavřený čtverec $\mathcal{Q}$ s vrcholy $[1; 0]$, $[0; 1]$, $[-1; 0]$, $[0; -1]$.

To se dokáže např. vyšetřením průniku hledané množiny se všemi kvadranty. Tak třeba pro třetí kvadrant platí $x \leq 0$, $y \leq 0$ a první nerovnice (8) zní $-x - y \leq 1$. Příslušný průnik je průnikem polorovin

$$x \leq 0, \quad y \leq 0, \quad x + y \geq -1$$

a je to trojúhelník vyšrafovaný na obr. 44.



Obr. 44

Snad by bylo vhodné pohovořit si při této příležitosti o „poštácké“ vzdálenosti, seznámit se s pojmem *metrického prostoru*, ověřit, že „poštácká“ vzdálenost splňuje axiomy metrického prostoru, že jde tedy o model abstraktní struktury. Zvláště je třeba zdůraznit, že „poštácká“ vzdálenost je závislá na určité soustavě *ortonormálních* souřadnic, tj. pravouhlých souřadnic se shodnými jednotkovými úsečkami na obou osách.

Dále pokračujeme ve vyšetřování množiny $\mathcal{P}_{0,0}$, tj. grafu soustavy nerovnic (8). Víme už, že $\mathcal{P}_{0,0} \subset \mathcal{Q}$; nyní budeme zkoumat graf *druhé* nerovnice (8). Jsou různé možnosti. Buď rozlišíme čtyři případy:

$$\text{I. } x + y \geq 0 \wedge x - y \geq 0 ;$$

$$\text{II. } x + y \geq 0 \wedge x - y \leq 0 ;$$

$$\text{III. } x + y \leq 0 \wedge x - y \geq 0 ;$$

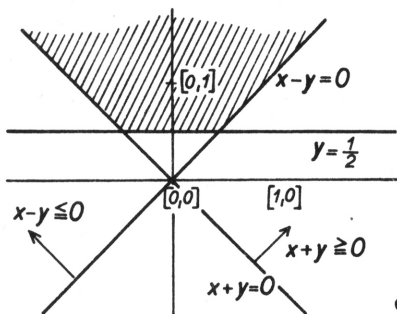
$$\text{IV. } x + y \leq 0 \wedge x - y \leq 0 ;$$

nebo použijeme transformace souřadnic (otočení o 45° v kladném smyslu) a transformačních rovnic

$$x' = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{-x + y}{\sqrt{2}}. \quad (9)$$

Tak např. v případě II. zní druhá nerovnice (8) $y \geq \frac{1}{2}$ a hledaný graf je průnik polorovin $x + y \geq 0$, $x - y \leq 0$, $y \geq \frac{1}{2}$, který je vyznačen na obr. 45.

Při druhém řešení užijeme opět „poštácké“ vzdálenosti, ale vzhledem k osám $x - y = 0$, $x + y = 0$. Dostaneme uzavřený vnějšek čtverce



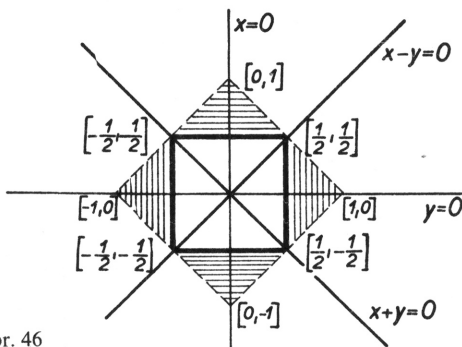
Obr. 45

$$|x + y| + |x - y| \geq 1,$$

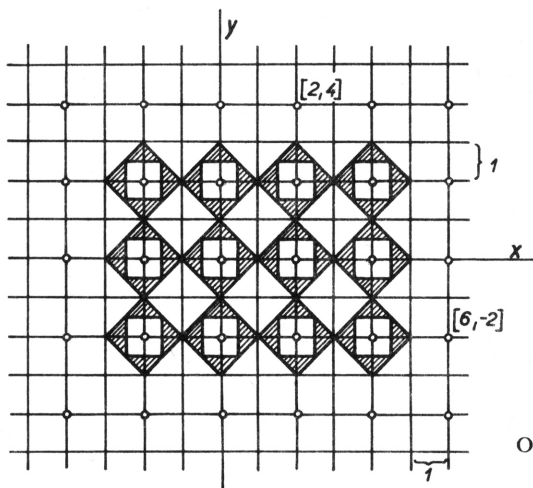
neboli podle (9)

$$|x'| + |y'| \geq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

který je vyznačen na obr. 46 tlustým vytažením hranice. Na obr. 46 je vyznačena množina $\mathcal{P}_{0,0}$ šrafováním; hranice náleží k této množině.



Obr. 46



Obr. 47

Hledané sjednocení $\bigcup_{m,n} \mathcal{P}_{m,n}$ vytvoří jakýsi ornament v rovině, který je zakreslen na obr. 47.

Úloha B–I–4 nevyžaduje vtip, ale poskytuje dobrou příležitost promluvit o „poštácké“ vzdálenosti, o metrických prostorech a o transformaci *ortonormálních* souřadnic.

B–I–5

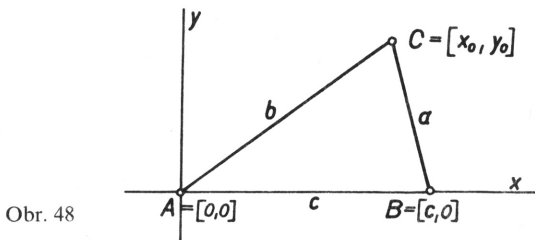
Je daný trojúhelník ABC ; jeho strany mají délky a, b, c . Určete bod trojúhelníka, který má minimální součet druhých mocnín vzdáleností od jeho vrcholů. Vyjádřete tento součet pomocí délek stran trojúhelníka.

KOMENTÁR

Aj cena tejto úlohy je skôr v príležitostiach k poučeniu, ktoré poskytuje než v jej vlastnom riešení; tu to je otázka voľby súradníc a jej výhody a geometrická interpretácia výsledku získaného výpočtom.

Zvolíme sústavu ortonormálnych súradníc tak, aby vrcholy trojuholníka mali súradnice $A = [0; 0]$, $B = [c; 0]$, $C = [x_0; y_0]$. Ortonormálne súradnice volíme preto, že budeme pracovať so vzdialenosťami. Výhoda metódy súradníc je v tom, že si nemusíme všimnúť, či je $\triangle ABC$ ostrouhlý, pravouhlý či tupouhlý, že nemusíme zohľadňovať polohu bodu M trojuholníka ABC vzhľadom k vrcholom, dokonca ani to, či bod M roviny ABC patrí k trojuholníku ABC či nie, všetky tieto situácie sa odbavia jediným výpočtom.

Označíme súradnice premenného bodu $M = [x; y]$; ešte si uvedomíme, že nekolineárnosť bodov A, B, C je ekvivalentná s podmienkou $y_0 \neq 0$. Výpočet budeme samozrejme sprevádzať náčrtkom (obr. 48).



Funkcia premenných x, y , ktorej minimum máme vyšetrovať, je

$$\sigma = (x^2 + y^2) + [(x - c)^2 + y^2] + [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2],$$

po úprave

$$\sigma = 3x^2 + 3y^2 - 2(x_0 + c)x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 + c^2. \quad (10)$$

Kľúčom k ďalšej úprave je požiadavka, aby sa premenné x, y vyskytovali iba v mnohočlenoch, ktoré sú základmi druhých mocnín; toto dosiahneme úpravou (10):

$$\begin{aligned} \sigma = 3 \left(x - \frac{(x_0 + c)}{3} \right)^2 + 3 \left(y - \frac{y_0}{3} \right)^2 - \\ - \frac{(x_0 + c)^2}{3} - \frac{y_0^2}{3} + x_0^2 + y_0^2 + c^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Táto funkcia nadobudne minimum σ_0 práve ak platí

$$x - \frac{x_0 + c}{3} = 0, \quad y - \frac{y_0}{3} = 0. \quad (12)$$

Toto minimum je podľa (11)

$$\sigma_0 = x_0^2 + y_0^2 + c^2 - \frac{(x_0 + c)^2}{3} - \frac{y_0^2}{3}. \quad (13)$$

Geometrická interpretácia výsledkov (12), (13). Čísla $x = \frac{1}{3}(x_0 + c)$, $y = \frac{1}{3}y_0$ sú aritmetické priemery súradníc vrcholov $\triangle ABC$ [$x = \frac{1}{3}(0 + x_0 + c)$, $y = \frac{1}{3}(0 + 0 + y_0)$]; preto je hľadaný bod M s minimálnym σ ťažiskom $\triangle ABC$.

Z rovníc $x_0^2 + y_0^2 = b^2$, $(x_0 - c)^2 + y_0^2 = a^2$ vypočítame

$$2cx_0 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\begin{aligned} \text{a ďalej} \quad (x_0 + c)^2 &= (x_0 - c)^2 + 4cx_0 = \\ &= 2b^2 + 2c^2 - a^2 - y_0^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Po dosadení z (14) do (13) po úprave dostaneme

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

B-I-6

V rovine je daná konečná množina $\mathcal{M}$ bodov, z ktorých každé dva majú vzdialenosť $l \leq 1$. Dokážte, že existuje pravidelný osemuholník $A_1A_2 \dots A_8$ s polomerom vpísanej kružnice $\varrho = \frac{1}{2}$ tak, že šesťuholník, ktorý je prienikom polrovín

$$\begin{aligned} A_8A_1A_2 \cap A_1A_2A_3 \cap A_2A_3A_4 \cap A_3A_4A_5 \cap \\ \cap A_4A_5A_6 \cap A_6A_7A_8, \end{aligned}$$

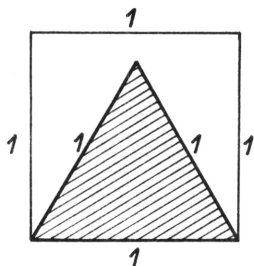
obsahuje všetky body množiny $\mathcal{M}$.

KOMENTÁR

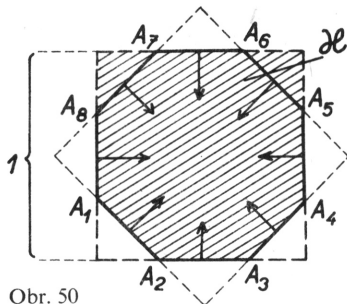
V súvislosti s riešením úlohy B-I-6 by bolo užitočné zoznámiť riešiteľov s elementárnymi geometrickými pojmami a vysloviť obecný problém, ktorého zvláštnym prípadom je úloha B-I-6. Stručný výklad je v článkoch **I.**, **II.**, **III.**

I. Ak je $\mathcal{M}$ konečná množina bodov (na priamke, v rovine alebo v priestore), nazveme najväčšiu zo vzdialeností dvojíc jej bodov priemerom množiny $\mathcal{M}$; teda

$$d := \max_{X, Y \in \mathcal{M}} XY.$$



Obr. 49



Obr. 50

Podľa tejto definície má jednobodová množina priemer 0, priemer dvojbodovej množiny $\{A, B\}$ je vzdialenosť AB , priemer trojbodovej množiny $\{A, B, C\}$ vrcholov trojuholníka je dĺžka jeho najväčšej strany atď.

II. Ak je daná množina $\mathcal{M}$ v rovine a „vzorový“ obrazec $\mathcal{V}$ taký, že sa dá zostrojiť obrazec $\mathcal{V}'$, pre ktorý platí $\mathcal{V} \cong \mathcal{V}'$ a $\mathcal{V}' \supset \mathcal{M}$, povieme, že obrazec $\mathcal{V}'$ pokrýva množinu $\mathcal{M}$ a že obrazcom $\mathcal{V}$ sa dá pokryť množina $\mathcal{M}$.

Pomocou tejto frázy sa niektoré situácie dajú popísať stručnejšie. Tak napríklad obr. 49 sa dá popísať vetou: Jednotkovým štvorcóm sa dá pokryť trojuholník o strane dĺžky 1. Obrazec (šesťuholník) κ , o ktorom sa hovorí v texte úlohy B–I–6, je vyšrafovaný na obr. 50. Úloha B–I–6 sa teda dá formulovať takto: Šesťuholníkom κ sa dá pokryť každá konečná množina $\mathcal{M}$ v rovine o priemere $d \leq 1$.

III. V prvej polovici XX. storočia vyslovil francúzsky matematik *Lebesgue* (čítaj *Lebeg*) tzv. *tabuľkový problém*; tabuľkou nazýval Lebesgue rovinný obrazec, ktorým sa dajú pokryť všetky množiny bodov o priemere 1. Problém znie:

Určiť tabuľku s minimálnym obsahom.

Tento problém zatiaľ nie je rozriešený. Sú známe niektoré tabuľky napr. tzv. *Jungov kruh* o polmere $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (obsah 1,047...), jednotkový štvorec (obsah 1), pravidelný šesťuholník o strane dĺžky $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (obsah 0,866...). V posledných desaťročiach sa získali zmenšovaním pravidelného šesťuholníka ďalšie tabuľky. Minimálna tabuľka doposiaľ zostrojená má obsah 0,844... Pre obsah P minimálnej tabuľky máme i odhad zdola: je $P > 0,825$.

Po tomto výklade môžeme ešte raz znovu formulovať úlohu B–I–6: máme overiť, že šesťuholník z obr. 50 je Lebesgueovou tabuľkou.

IV. Doporučujeme čitateľom, aby najprv dokázali, že jednotkový štvorec je tabuľkou. Zvolia priamku p a všetkými bodmi množiny vedú rovnobežky s priamkou p . Všetky body množiny $\mathcal{M}$ ležia v páse roviny, ktorého hranice sú priamky $p_1 \parallel p$, $p_2 \parallel p$. Vzdialenosť priamok p_1, p_2 sa najvyššie rovná 1 (ináč by body množiny $\mathcal{M}$ ležiace na priamkách p_1, p_2 mali vzdialenosť väčšiu než 1). Ak zopakujú tento postup pre priamku $q \perp p$, najdú pravouholník (priemik dvoch pásov roviny), ktorého strany majú dĺžku najvyššie rovnú 1. Tento pravouholník sa dá ľahko zväčšiť na jednotkový štvorec, ktorý je tabuľkou.

Teraz vpíšeme do jednotkového štvorca pravidelný osemuholník (obr. 51). Ak vo vnútri jedného z vyšrafovaných trojuholníkov leží bod $X \in \mathcal{M}$, nemôže vo vnútri vyšrafovaného trojuholníka naproti ležať žiadny bod $Y \in \mathcal{M}$, pretože by potom bolo $XY > 1$. Preto sa dá aspoň jeden z vyšrafovaných trojuholníkov oddeliť od štvorca $ABCD$ a zbývajúci päťuholník zostane tabuľkou. Ak zopakujeme rovnaký po-

KOMENTÁŘE
K ŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍCH ÚLOH KATEGORIE C
I. KOLA

C-I-1

Určte všetky štvorciferné čísla, z ktorých každé má súčasne nasledujúce vlastnosti:

- a) je súčtom druhých mocnín troch bezprostredne po sebe nasledujúcich párných prirodzených čísel;
- b) je deliteľné číslom 28.

KOMENTÁR

Hľadané číslo označme N , potom existuje prirodzené číslo $n \geq 2$ tak, že

$$N = (2n - 2)^2 + (2n)^2 + (2n + 2)^2, \quad (1)$$

čiže

$$N = 4(3n^2 + 2). \quad (2)$$

Rovnica (1) dáva najvýhodnejší tvar vyjadrenia súčtu druhých mocnín troch bezprostredne po sebe nasledujúcich párných prirodzených čísel.

Podľa predpokladu je $N = 28N'$; z (2) plynie potom

$$3n^2 + 2 = 7N',$$

čiže číslo $3n^2 + 2$ je násobkom siedmich. Otázka teraz znie: určte všetky celé čísla n , pre ktoré je prirodzené číslo $3n^2 + 2$ násobkom siedmich.

Množina čísel n , ktoré sú riešením tejto úlohy, je zrejme nekonečná. Je vidieť, že bude treba zistiť, do ktorých zbytkových tried modulo 7 budú patriť hľadané n ; povedané jazykom školy: aké zbytky pri delení číslom 7 budú dávať príslušné čísla?

Odpoveď na túto otázku sa nájde experimentálne. Zostaví sa tabuľka:

(T ₁)	Zbytková trieda mod 7 čísla	n	0	1	2	3	4	5	6
		n^2	0	1	4	2	2	4	1
		$3n^2$	0	3	5	6	6	5	3
		$3n^2 + 2$	2	5	0	1	1	0	5

Teda je buď $n = 7k + 2$ alebo $n = 7k + 5$, kde k je celé číslo. Ak je $n = 7k + 2$, je $3n^2 + 2 = 3 \cdot 49k^2 + 3 \cdot 28k + 14$, tj. podľa (2)

$$N = 28(21k^2 + 12k + 2). \quad (3)$$

Ak je $n = 7k + 5$, je $3n^2 + 2 = 3 \cdot 49k^2 + 3 \cdot 70k + 77$, tj. podľa (2)

$$N = 28(21k^2 + 30k + 11). \quad (4)$$

Vzorce (3) a (4) dávajú všetky možné riešenia úlohy bez obmedzenia na štvorciferné čísla. Naozaj, keď dosadíme do (3) alebo (4) ľubovoľné celé číslo k , dostaneme násobek čísla 28. Iste nevádi, ak rozriešime najprv túto trochu všeobecnejšiu úlohu.

Teraz uplatníme obmedzenie na štvorciferné čísla, tj. požiadavku $1\,000 \leq N < 10\,000$. Podľa (3), (4) dostaneme jednak sústavu nerovností

$$\frac{1\,000}{28} \leq 21k^2 + 12k + 2 < \frac{10\,000}{28}, \quad (5)$$

jednak sústavu nerovností

$$\frac{1\,000}{28} \leq 21k^2 + 30k + 11 < \frac{10\,000}{28}. \quad (6)$$

Sústavu (5) upravíme na tvar

$$35 < 21k^2 + 12k + 2 < 358. \quad (7)$$

Zostavíme tabuľku:

(T ₂)	k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	$21k^2 + 12k + 2$	467	290	155	62	11	2	35	110	227	386

Stĺpce $-4, -3, -2$ vyhovujú síce nerovnostiam (7), ale vzorec $n = 7k + 2$ dáva záporné n . Ďalej vyhovujú nerovnostiam (7) stĺpce 2, 3*); príslušné hodnoty n sú 16 a 23.

Sústavu (6) upravíme na tvar

$$35 < 21k^2 + 30k + 11 < 358. \quad (8)$$

*) Pre každé $k > 3$ alebo $k < -4$ nie je splnená nerovnosť (7) ani nerovnosť (8); to vyplýva z priebehu kvadratickej funkcie.

Zostavíme opäť tabuľku:

(T ₃)	k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	$21k^2 + 30k + 11$	386	227	110	35	2	11	62	155	290	467

Stĺpce -4, -3 vyhovujú síce nerovnostiam (8), ale vzorec $n = 7k + 5$ dáva záporné n . Ďalej vyhovujú nerovnostiam (8) stĺpce 1, 2, 3; príslušné hodnoty n sú 12, 19, 26.

Dostávame teda 5 riešení; sú to čísla 8 120, 4 340, 1 736, 3 080 a 6 356. Všetky tieto čísla sú deliteľné číslom 28 a platí:

$$8\,120 = 50^2 + 52^2 + 54^2,$$

$$4\,340 = 36^2 + 38^2 + 40^2,$$

$$1\,736 = 22^2 + 24^2 + 26^2,$$

$$3\,080 = 30^2 + 32^2 + 34^2,$$

$$6\,356 = 44^2 + 46^2 + 48^2.$$

Riešenie úlohy je časove dosť náročné; z časti je deduktívne, z časti experimentálne (opiera sa o zostavenie tabuliek (T₁), (T₂), (T₃)). Základnou myšlienkou je nájsť zbytkové triedy modulo 7, do ktorých patria hľadané čísla n .

C-I-2

Jsou dány tři konečné množiny $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$, pro něž platí $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3 \cap \mathcal{M}_1 \neq \emptyset$. Označme po řadě $p, s_{12}, s_{23}, s_{31}$ počty prvků množin $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_1$. Je-li každé z čísel s_{12}, s_{23}, s_{31}

větší než p , pak lze sestrojit trojúhelník, jehož strany mají délky

$$1 - \frac{p}{s_{12}}, \quad 1 - \frac{p}{s_{23}}, \quad 1 - \frac{p}{s_{31}}. \quad (9)$$

Dokažte.

KOMENTÁŘ

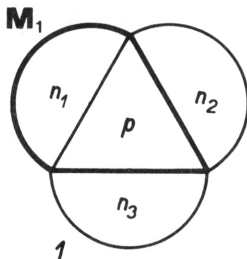
Ačkoli je myšlenka důkazu zcela jednoduchá, vyžaduje výpočet trochu zamyšlení. Je jasné, že je třeba dokázat, že čísla (9) splňují trojúhelníkové nerovnosti; to je nutná i postačující podmínka pro sestrojitelnost trojúhelníka, jehož strany mají délky

$$x = 1 - \frac{p}{s_{23}}, \quad y = 1 - \frac{p}{s_{31}}, \quad z = 1 - \frac{p}{s_{12}}.$$

Důkaz lze provést v podstatě dvojím způsobem:

- I. Dokáže se, že platí $x + y > z$, $y + z > x$, $z + x > y$.
- II. Čísla x, y, z se uspořádají, nechť je např. $z \geq y \geq x$; pak stačí dokázat $z < x + y$.

Tato dvě kritéria (postačující podmínky) pro sestrojitel-



Obr. 53

nost trojúhelníka ze tří stran by si měli řešitelé při této příležitosti připomenout.

Zavedme označení počtu prvků podle Vennova diagramu na obr. 53; množina $\mathcal{M}_1$ je tu vyznačena tlustou čarou; obdobně by se mohly vyznačit množiny $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$. Podle obr. 53 platí

$$s_{12} = n_1 + n_2 + p, \quad s_{23} = n_2 + n_3 + p,$$

$$s_{31} = n_3 + n_1 + p.$$

Postup I. Doporučujeme řešitelům, aby si pro formální zjednodušení výpočtu zavedli značení $n_1 + n_2 = c$, $n_2 + n_3 = a$, $n_3 + n_1 = b$. Pak je $a + p = n_2 + n_3 + p = s_{23} > p$, tj. $a > 0$ a obdobně $b > 0$, $c > 0$. Dále je

$$s_{12} = c + p, \quad s_{23} = a + p, \quad s_{31} = b + p,$$

$$x = \frac{a}{a + p}, \quad y = \frac{b}{b + p}, \quad z = \frac{c}{c + p}. \quad (10)$$

Dokažme nyní nepřímou třeba nerovnost $x + y > z$. Předpokládejme, že platí $x + y \leq z$, tj. podle (10)

$$\frac{a}{a + p} + \frac{b}{b + p} \leq \frac{c}{c + p}.$$

Odtud dostaneme po úpravě

$$p^2(a + b - c) + 2pab + abc \leq 0. \quad (11)$$

Protože $a + b - c = 2n_3 \geq 0$, $2pab > 0$, $abc > 0$, dává (11) spor.*)

*) Důkaz lze provést i bez zavedení proměnných a, b, c .

Postup II. Zvolme označení tak, že je $n_1 \geq n_2 \geq n_3$. Pak platí

$$z \geq y \geq x,$$

neboť

$$z = \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + p} \geq \frac{n_1 + n_3}{n_1 + n_3 + p} = y,$$

jak zjistíme z nerovnosti

$$(n_1 + n_2)(n_1 + n_3 + p) \geq (n_1 + n_3)(n_1 + n_2 + p).$$

Obdobně dokážeme $y \geq x$.

Nyní stačí dokázat nerovnost $x + y > z$. Kdyby platilo $x + y \leq z$, bylo by

$$\frac{n_2 + n_3}{n_2 + n_3 + p} + \frac{n_3 + n_1}{n_3 + n_1 + p} \leq \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + p}. \quad (12)$$

Je-li $n_3 \neq 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{n_1 + n_3}{n_1 + n_3 + p} &\geq \frac{n_1 + n_3}{n_1 + n_2 + p} > \frac{n_1}{n_1 + n_2 + p}, \\ \frac{n_2 + n_3}{n_2 + n_3 + p} &\geq \frac{n_2 + n_3}{n_1 + n_2 + p} > \frac{n_2}{n_1 + n_2 + p}. \end{aligned} \quad (13)$$

Spojením (12) a (13) vyjde

$$\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + p} > \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + p},$$

což je spor. Je-li $n_3 = 0$, zní (12)

$$\frac{n_1}{n_1 + p} + \frac{n_2}{n_2 + p} \leq \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + p}. \quad (14)$$

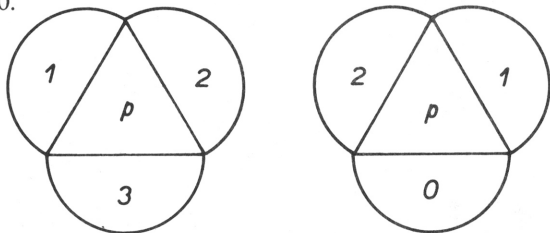
Protože je $s_{13} > p$, $s_{23} > p$, je $n_1 > 0$, $n_2 > 0$; z (14) pak plyne

$$\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + p} > \frac{n_1}{n_1 + n_2 + p} + \frac{n_2}{n_1 + n_2 + p},$$

což je opět spor.

Úloha C–I–2 je poměrně dosti obtížná, neboť řešitelé kategorie C nemají zpravidla zběhlost v práci s nerovnostmi. Rozdíl mezi postupem I. a II. je v tom, že v I. se zabýváme zlomků, v II. s nimi pracujeme. Oba důkazy jsou nepřímé, v obou musíme využít předpokladu $s_{12} > p$, $s_{23} > p$, $s_{31} > p$, z něhož plyne, že nejvýše jedno z čísel n_1, n_2, n_3 může být rovno nule (při postupu II. je to n_3 , které je nejmenší). Při postupu I. nemusíme štěpit nepřímý důkaz na dva případy jako při postupu II., kde rozeznáváme případy $n_3 \neq 0$ a $n_3 = 0$. Postup I. je asi méně „trikový“ než postup II., a proto přístupnější.

V každém případě by si měl každý řešitel úlohu „ohmatat“ tím, že by si volil číselně počty prvků n_1, n_2, n_3 , např. podle obr. 54. Přitom by zároveň hned jistě vyloučil možnost $n_2 = n_3 = 0$.



Obr. 54

C–I–3

Cestovná kancelária organizovala 4 typy týždenných rekreácií, z ktorých sa žiadne dve časove neprekrývali; označme ich A, B, C, D . Pracovníčka cestovnej kancelárie zistila:

Na rekreácie A, B, C, D sa za radom hlási 195, 203, 106, 329 osôb, pritom sa nikto nehlási na práve tri z týchto rekreácií. Na práve dve rekreácie sa hlási 267 ľudí, a to na rekreácie A a B 64 ľudí, na rekreácie A a C 58 ľudí, na rekreácie B a C 32 osôb, na rekreácie C a D 14 osôb a na rekreácie B a D 51 osôb. Na všetky štyri rekreácie sa prihlásili dvaja ľudia.

Môže pracovníčka z týchto údajov zistiť:

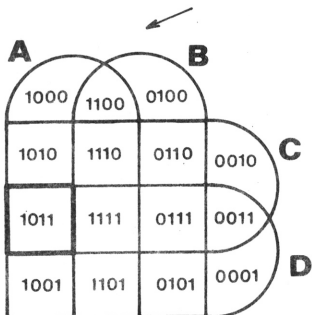
- koľko ľudí sa prihlásilo na práve jednu z týchto rekreácií;
- koľko ľudí sa celkom prihlásilo na organizované rekreácie?

KOMENTÁR

Úloha C–I–3 práve tak ako úloha C–I–2 má tematiku z tzv. modernizovanej školskej matematiky. Keď na jednej strane úloha C–I–2 vedie vlastne na algebraickú úlohu (manipulácia s nerovnosťami), úloha C–I–3 na druhej strane podstatne využíva Vennove diagramy a tým obchádza riešenie sústavou lineárnych rovníc, ktoré by bolo zbytočne zdĺhavé a únavné.

Účastníci prihlásení na jednotlivé rekreácie tvoria štyri množiny $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ (označíme ich súhlasne s rekreáciami) a poradíme riešiteľom, aby si pripravili základnú schému

(Vennov diagram pre ich prieniky a zjednotenia napríklad v tomto tvare (obr. 55). Označenie jednotlivých oblastí číslami v dvojkovej sústave je výhodné a ľahko zrozumiteľné:



Obr. 55

napr. oblasť 1011 vyznačená na obr. 55 hrubou hranicou je prienik $A \cap B' \cap C \cap D$, kde B' je množina doplnková k B . Údaje o počte prvkov jednotlivých oblastí zapíšeme podľa textu do nasledujúcej tabuľky:

(T_4)

1000	0100	0010	0001	1100	1010	1001	0110	0101	0011	0111	1011	1101	1110	1111
				64	58		32	51	14	0	0	0	0	2

267

Podľa textu je súčet čísel v stĺpcoch 1100, 1010, 1001, 0110, 0101 a 0011 rovný 267, súčty všetkých čísel v stĺpcoch, ktoré majú na prvom (druhom, treťom, štvrtom) mieste jednotku, sú za radom 195, 203, 106, 329. Aj tieto záznamy by mali

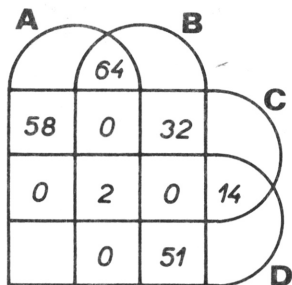
riešitelia previesť, lebo v nich je vlastne matematizácia situácie danej v slovnej úlohe.

Prvým impulzom je pokyn nahradiť v schéme z obr. 55 dyadické označenia polí číslami, ktoré znamenajú počty ich prvkov. Potom výjde ako výsledok obr. 56. Úlohou je doplniť všetky prázdne polia na obr. 56; potom budeme môcť zodpovedať všetky možné otázky, teda i otázky úlohy.

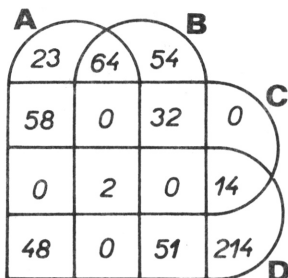
Posledným impulzom môže byť pokyn, v akom poradí sa majú polia vyplňovať. Môže to byť napr. (podľa obr. 55):

- 0100 ($\mathcal{B}$ má 203 prvkov);
- 1001 (viď horení tabuľku (T_4));
- 1000 ($\mathcal{A}$ má 195 prvkov);
- 0010 ($\mathcal{C}$ má 106 prvkov);
- 0001 ($\mathcal{D}$ má 329 prvkov).

Takto vyplnený diagram je na obr. 57. Odpoveď na obe otázky znie: Na práve jednu rekreáciu sa prihlásilo 291 osôb, všetkých prihlásených osôb bolo 560. Je to súčet čísel v poliach 1000, 0100, 0010, 0001 a súčet všetkých čísel všetkých polí.



Obr. 56



Obr. 57

Postup, ktorý v predchádzajúcom odporúčame, sa možno zdá byť zbytočne rozvlekľý, myslíme si ale, že je didakticky veľmi vhodný. To by sa najlepšie ukázalo, keby sme riešili úlohu pre 7–8 množín; potom by bolo ale lepšie nahradiť schémy na obr. 55, 56, 57 tabuľkami obdobnými k (T₄).

C–I–4

Je daný trojuholník, ktorého žiadna strana nemá dĺžku väčšiu než 1. Dokážte, že ho možno umiestniť do kruhu o polomere $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

KOMENTÁR

Táto dôkazová úloha patrí k *úlohám* o tzv. *ukladaniu* (Lagerung), ktorými sa zaoberá diskretná geometria, geometria konvexných útvarov i kombinatorická geometria. Ide tu zrejme o odhad polomeru príslušného kruhu.

Nepatrné experimentovanie dá hypotézu, že dôkaz je veľmi jednoduchý pre tupouhlý a pravouhlý trojuholník. Jeho najdlhšia strana – označme ju AB – má dĺžku $AB \leq 1$ a protiľahlý uhol je $\sphericalangle ACB \geq 90^\circ$. Vnútrajšok kruhu $\mathcal{K}$ zostrojeného nad priemerom AB je množina všetkých bodov X v rovine daného trojuholníka, pre ktoré platí

$$90^\circ < \sphericalangle AXB \leq 180^\circ,$$

teda je $C \in \mathcal{K}$. Teraz stačí zostrojiť kruh $\mathcal{K}'$ o polomere $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ sústredný s $\mathcal{K}$. Pretože je $\frac{1}{3}\sqrt{3} > \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}AB$, je $\triangle ABC \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$.

Zostáva vyšetriť ostrouhlý trojuholník. Najväčší z jeho uhlov má vždy veľkosť $\geq 60^\circ$; ak by bolo $\alpha < 60^\circ \wedge \beta < 60^\circ \wedge \gamma < 60^\circ$, bolo by $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$ a to nie je možné. Zvolme označenie tak, aby bolo $\alpha \geq 60^\circ$ a ovšem zároveň $a \leq 1$. Použijeme známy vzorec

$$a = 2r \sin \alpha, \quad (15)$$

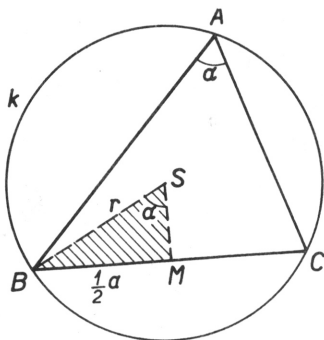
kde r je polomer kružnice opísanej danému trojuholníku ABC . Vzorec (15) vyplýva z pravouhlého trojuholníka BMS , kde M je stred strany BC , S je stred kružnice k opísanej trojuholníku ABC (obr. 58). Zo vzorca (15) vyplýva

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} \leq \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

pretože $90^\circ > \alpha \geq 60^\circ$, tj. $1 > \sin \alpha \geq \frac{1}{2} \sqrt{3}$.

Kruh so stredom S a polomerom $\frac{1}{3} \sqrt{3}$ obsahuje teda trojuholník ABC .

Hranicu $\frac{1}{3} \sqrt{3}$ pre polomer kruhu nemožno ďalej znížiť,



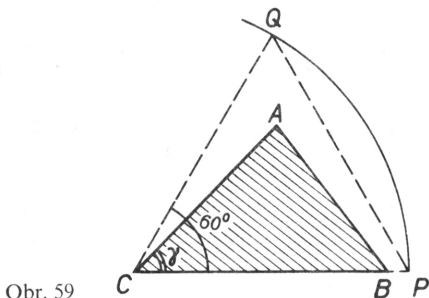
Obr. 58

pretože medzi vyšetrované trojuholníky patrí aj rovnostranný trojuholník o straně dĺžky 1. Najmenší kruh, ktorý tento trojuholník obsahuje, je kruh obmedzený kružnicou opísanou a tá má polomer $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$.

Zamyslime sa ešte nad predchádzajúcim dôkazom. Základnou myšlienkou bolo použitie kružnice opísanej trojuholníku a jeho najväčšieho uhla. Na prvom mieste teda mal byť prípad ostrouhlého trojuholníka ABC . Ak je však trojuholník ABC pravouhlý alebo tupouhlý, nedá sa uvedený postup s opísanou kružnicou použiť a musí sa previesť úvaha, s ktorou sme začali.

Ponúka sa ešte možnosť použiť najmenší uhol trojuholníka ABC , aby sme nemuseli štiepiť dôkaz na dva prípady. Najprv nepriamo ukážeme, že najmenší uhol má veľkosť $\leq 60^\circ$ a potom využijeme obr. 59, kde označenie je zvolené tak, aby γ bol najmenší uhol.

Pretože je $AC \leq 1$, $BC \leq 1$, leží (vyšrafovaný) trojuholník ABC vo výseči CPQ , kde $CP = CQ = 1$, $\sphericalangle PCQ = 60^\circ$. Teraz stačí ukázať, že táto výseč leží v kruhu obmedzenom kružnicou opísanou rovnostrannému trojuholníku CPQ ; táto kružnica má polomer $\frac{1}{3} \sqrt{3}$.

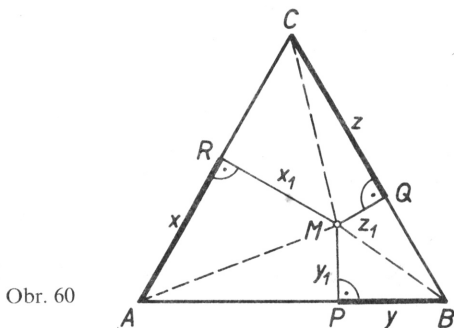


Obr. 59

V týchto zdôvodneniach, kde ide vlastne o konvexitu, bude asi v riešení vždy niečo intuitívne. Myslíme, že sa s tým môžeme uspokojiť, pretože dôležitejšia je myšlienka dôkazu.

C-I-5

Daný je rovnostranný trojuholník ABC a ľubovoľný jeho vnútorný bod M . Päť kolmíc zostrojené bodom M na strany AB, BC, CA označte postupne P, Q, R .



Obr. 60

a) Dokážte, že súčet $PB + QC + RA$ je rovný polovičnému obvodu trojuholníka ABC .

b) Platí vlastnosť uvedená v odseku a) i pre body M ležiace na obvode trojuholníka ABC ?

KOMENTÁŘ

Řešení. Situace je na obr. 60. Pravděpodobně každý řešitel začne počítat s použitím Pythagorovy věty na šest pravoúhlých trojúhelníků, které vidí na obr. 60. Jakýsi vtíp

je snad jedině ve vhodných úpravách. Označíme-li a délku strany trojúhelníka ABC , dále x, y, z a x_1, y_1, z_1 délky úseček podle obr. 60, dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned}x^2 + x_1^2 &= (a - y)^2 + y_1^2, \\y^2 + y_1^2 &= (a - z)^2 + z_1^2, \\z^2 + z_1^2 &= (a - x)^2 + x_1^2.\end{aligned}\tag{16}$$

Rozvedeme-li druhé mocniny dvojčlenů a sečteme-li všechny tři rovnice (16), dostaneme

$$x + y + z = \frac{3}{2}a.$$

Tento postup zůstává v platnosti i tehdy, když některé z pravoúhlých trojúhelníků degenerují v úsečku nebo bod, tj. když bod M leží na hranici $\triangle ABC$. (Např. když je $M = A$, je $x = 0$, $y = a$, $z = \frac{1}{2}a$.)

Tím jsme odpověděli na obě otázky úlohy.

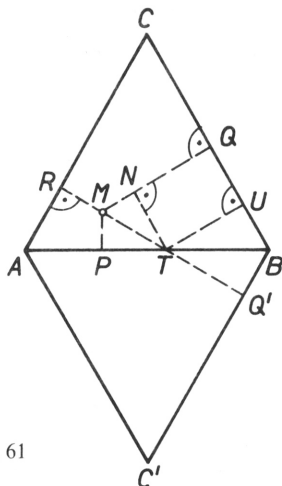
Úloha C–I–5 poskytuje příležitost zabývat se podrobněji situací z obr. 60. Pomocí obsahů $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CAM$ odvodíme pro čísla x_1, y_1, z_1 vztah

$$x_1 + y_1 + z_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{3};\tag{17}$$

$v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ je délka výšky $\triangle ABC$, vzorec (17) se dá odvodit také pomocí obr. 61.

Zde je

$$\begin{aligned}MQ &= MN + NQ, & MN &= MP = \frac{1}{2}MT, \\NQ &= TU = TQ',\end{aligned}$$



Obr. 61

a tedy

$$\begin{aligned} MR + MQ + MP &= MR + \frac{1}{2}MT + TQ' + MP = \\ &= MR + MT + TQ' = RQ' = v. \end{aligned}$$

Každému bodu $\triangle ABC$ je přiřaděna jediná trojice nezáporných čísel $[x_1, y_1, z_1]$, která splňuje (17) – obráceně každé takové trojici je přiřazen jediný bod M trojúhelníku ABC . Tím jsou zavedeny tzv. *trilineární souřadnice* bodu $M = [x_1, y_1, z_1]$, které ovšem nejsou nezávislé a z nichž každá se pohybuje v intervalu $\langle 0, v \rangle$. Tyto souřadnice lze rozšířit na celou rovinu, připustíme-li za ně i čísla záporná a čísla větší než v .

Druhá poznámka: Zkoumejme, zda a jak se dá úloha C–I–5 rozšířit na libovolný ostroúhlý trojúhelník. Rov-

nice (16) se změní tak, že se v nich místo a budou vyskytovat po řadě délky stran a, b, c . Výsledná rovnice pak bude

$$bx + cy + az = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

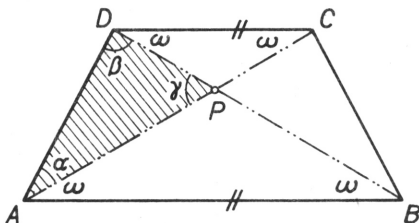
Tato rovnice by mohla být východiskem pro zavedení dalších souřadnic.

C-I-6

V rovině jsou dány dva různé body A, D . Dále je dáno číslo r takové, že $r > \frac{1}{2}AD$. Určete geometrické místo průsečíku úhlopříček všech rovnoramenných lichoběžníků s ramenem AD a s poloměrem opsané kružnice r .

KOMENTÁŘ

Jde o dost fádni konstrukční úlohu s tematikou „obvodový úhel“. Nad tětivou AD sestrojíme kružnici $k = (S, r)$; body A, D ji rozdělí na dva neshodné oblouky, zbývající vrcholy B, C každého z hledaných lichoběžníků leží na větším z těchto oblouků; označme jej σ_1 . Na obr. 62 je načrtnut jeden z rovnoramenných lichoběžníků $ABCD$: Na základě vlast-



Obr. 62

Úloha C—I—6 snad nepotřebuje pokyny k řešení, jediné snad pokyn: „všimni si úhlu $\sphericalangle APD$ “. Ovšem i tento pokyn je zbytečný, sestrojí-li řešitelé — jak se sluší — několik lichoběžníků $ABCD$ a bodů P a z názoru odhadnou, že hledané geometrické místo je oblouk kružnice; pak je celkem jasné, že se tvrzení bude dokazovat pomocí obvodového úhlu.

KOMENTÁŘE
K ŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍCH ÚLOH KATEGORIE Z
I. KOLA

Z-I-1

a) Ak dosadíme za n celé čísla do zlomkov

$$\frac{18n + 13}{11n + 8}, \frac{5n + 7}{12n + 17}, \frac{24n + 13}{39n + 21},$$

dostaneme vždy zlomok v základnom tvare. Dokážte!

b) Platí to isté pre zlomky

$$\frac{12n + 7}{19n + 15}, \frac{29n + 31}{32n + 41}, \frac{79n + 25}{24n + 7}?$$

KOMENTÁŘ

Táto úloha je jednoduchá a originálna aplikácia elementárnej číselnej teórie na aritmetiku racionálnych čísel. Časť a) aj časť b) obsahuje po troch úlohách toho istého druhu, ktorých presná matematická formulácia znie:

A) pre všetky $n \in \mathcal{C}$ platí $D(18n + 13, 11n + 8) = 1$;
resp.

B) pre všetky $n \in \mathcal{C}$ sú čísla $18n + 13, 11n + 8$ nesúdelné.

Pritom $\mathcal{C}$ označuje množinu všetkých celých čísel, $D(x, y)$ je najväčší spoločný deliteľ čísel x, y .

Ak zostavíme formuláciu A), máme už prvý impulz k riešeniu všetkých šiestich dielčích úloh.

Druhý impulz môže byť tento: Ak máme dokázať, že $\forall n \in \mathcal{C}$ je $D(18n + 13, 11n + 8) = 1$, budeme skúmať všetkých spoločných deliteľov čísel $18n + 13, 11n + 8$, a to pre každé číslo n . Uvedené tvrdenie platí práve vtedy, ak sa ukáže, že každý spoločný deliteľ je buď 1 alebo -1 .

Nech teda je δ spoločný deliteľ čísel $18n + 13, 11n + 8$; potom platí

$$18n + 13 = \delta a, \quad 11n + 8 = \delta b, \quad (1)$$

kde a, b sú čísla z $\mathcal{C}$. Z rovníc (1) vylúčime n

$$11(18n + 13) - 18(11n + 8) = \delta(11a - 18b),$$

t. j.

$$143 - 144 = \delta(11a - 18b),$$

t. j.

$$\delta(11a - 18b) = -1. \quad (2)$$

Predchádzajúci výpočet je analýza úlohy.

Teraz je treba využiť rovnicu (2), pretože $11a - 18b \in \mathcal{C}$, plynie z (2), že $\delta = \pm 1$, $11a - 18b = \pm 1$. Dokázali sme teda: $\forall n \in \mathcal{C}$ platí: Ak je δ spoločný deliteľ čísel $18n + 13, 11n + 8$, je $\delta = \pm 1$, tzn. obe čísla sú nesúdelné a zlomok

$\frac{18n + 13}{11n + 8}$ je v základnom tvare.

Podobne sa riešia ďalšie dve úlohy v oddelení a).

Analýza pri riešení úloh oddelenia b) bude rovnaká. Napr. prvý zlomok dá sústavu

$$\begin{aligned} 12n + 7 &= \delta a, \\ 19n + 15 &= \delta b. \end{aligned} \quad a, b \in \mathcal{C}. \quad (3)$$

Po vylúčení n dostaneme

$$7 \cdot 19 - 12 \cdot 15 = \delta(19a - 12b),$$

t. zn.

$$-47 = \delta(19a - 12b).$$

Pretože 47 je prvočíslo, môže byť $\delta = \pm 1$, $\delta = \pm 47$ a odtiaľ plynie $19a - 12b = \mp 47$, $19a - 12b = \mp 1$. Skúmame teda, pre ktoré $a, b \in \mathbb{C}$ platí

$$19a - 12b = \pm 1. \quad (4a)$$

Výpočet urobme skusmo: Napíšeme postupnosti násobkov čísel 12, 19 a vykladáme násobky, ktoré sa líšia o 1.

Dostaneme:

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, \mathbf{96}, 108, 120, \dots$$

$$19, 38, 57, 76, \mathbf{95}, 114, 133, \dots$$

Teda je

$$19 \cdot 5 - 12 \cdot 8 = -1. \quad (4b)$$

Po porovnaní (4a), (4b) zvolíme $a = 5$, $b = 8$ a z ktorejkoľvek rovnice (3) vypočítame $n = 19$. Pre $n = 19$ naozaj je

$$\frac{12 \cdot 19 + 7}{19 \cdot 11 + 15} = \frac{235}{376} = \frac{47 \cdot 5}{47 \cdot 8} = \frac{5}{8},$$

t. j. zlomok $\frac{12n + 7}{19n + 15}$ nie je pre $n = 19$ v základnom tvare.

Tým sme našli protipríklad: našli sme aspoň jedno n

($n = 19$), pre ktoré nie je zlomok $\frac{12n + 7}{19n + 15}$ v základnom tvare. Pre iné n ovšem môže byť tento zlomok v základnom tvare; napríklad pre $n = 1$ dostaneme $\frac{12 \cdot 1 + 7}{19 \cdot 1 + 15} = \frac{19}{34}$ a to je zlomok v základnom tvare. Upozorníme na rozdiel štruktúry riešenia úloh skupín a) a b):

skupina a)

Musíme dokázať, že pre všetky $n \in \mathcal{C}$ sú čitateľ a menovateľ zlomku nesúdelné čísla

skupina b)

Musíme nájsť aspoň jedno $n \in \mathcal{C}$, pre ktoré je čitateľ zlomku súdelný s menovateľom.

Obdobne sa riešia druhé dve úlohy skupiny b).

Predchádzajúce riešenia sú „príliš algebraické“ pre riešiteľov kategórie Z. Ukážeme iné primitívnejšie riešenia, ktoré majú v podstate tú istú logickú štruktúru. Rozriešime tretie úlohy z oboch skupín.

Predpokladajme, že čísla $24n + 13$, $39n + 21$ majú pre niektoré n istého spoločného deliteľa. Potom tento deliteľ majú dvojice

$$\begin{aligned} 39n + 21, & \quad 24n + 13 \\ 24n + 13, & \quad 15n + 8 = (39n + 21) - (24n + 13), \\ 15n + 8, & \quad 9n + 5 = (24n + 13) - (15n + 8), \\ 9n + 5, & \quad 6n + 3 = (15n + 8) - (9n + 5), \\ 6n + 3, & \quad 3n + 2 = (9n + 5) - (6n + 3), \\ 3n + 2, & \quad -1 = (6n + 3) - 2(3n + 2). \end{aligned}$$

Posledné dve čísla ale majú pre každé n len spoločných deliteľov ± 1 . Preto sú čísla $39n + 21$, $23n + 13$ pre každé n nesúdelné.

Predpokladajme, že čísla $79n + 25$, $24n + 7$ majú pre niektoré n istého spoločného deliteľa. Potom tohto deliteľa majú dvojice:

$$\begin{aligned} 79n + 25, & \quad 24n + 7, \\ 24n + 7, & \quad 7n + 4 = (79n + 25) - 3(24n + 7), \\ 7n + 4, & \quad 3n - 5 = (24n + 7) - 3(7n + 4), \\ 3n - 5, & \quad n + 14 = (7n + 4) - 2(3n - 5), \\ n + 14, & \quad -47 = (3n - 5) - 3(n + 14). \end{aligned}$$

Posledná dve čísla ale majú tiež spoločného deliteľa 47, napr. pre $n = 33$. Skutočne platí:

$$\frac{79 \cdot 33 + 25}{24 \cdot 33 + 7} = \frac{2632}{799} = \frac{56 \cdot 47}{17 \cdot 47} = \frac{56}{17}$$

Našli sme teda aspoň jedno n , pre ktoré nie je zlomok

$$\frac{79n + 25}{24n + 7} \text{ v základnom tvare.}$$

Z-I-2

Jsou dána kladná čísla a, b, c, d , pro která platí

$$a + b + c + d = 1.$$

Dokažte, že pak platí

$$abc + abd + acd + bcd < \frac{1}{6},$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 < 1.$$

KOMENTÁŘ

Základní myšlenka pro tyto jednoduché odhady je vyhledat příslušný výraz v rozvedení $(a + b + c + d)^3$ a odtud odvodit příslušnou nerovnost. K tomu nepotřebujeme znát vzorce pro umocňování polynomu; mocnina se nahradí prostě součinem:

$$(a + b + c + d)(a + b + c + d)(a + b + c + d). \quad (5)$$

Známe algoritmus pro násobení dvou mnohočlenů; v tomto případě však roznásobení nebudeme provádět. Ukážeme, že bychom tak dostali nepřehledný sled 64 (4^3) členů, což samo o sobě je kombinatorická úvaha.

Nyní použijeme „triku“; pro účastníky MO je nesporně ziskem, když se s tímto „trikem“ seznámí. Budeme určovat, kolikrát se ve výsledných 64 členech vyskytne např. součin abc . Neváhejme sestavit tabulku, v níž bude zachyceno, z kterého z činitelů $(a + b + c + d)$ součinu (5) je vybráno a , z kterého b , z kterého c . Tabulka bude vypadat asi takto:

činitelé součin	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>abc</i>	1	2	3
<i>acb</i>	1	3	2
<i>bac</i>	2	1	3
<i>bca</i>	3	1	2
<i>cab</i>	2	3	1
<i>cba</i>	3	2	1

(6)

Protože násobení je komutativní a asociativní, dostaneme součin abc s koeficientem 6. Sestavení tabulky (6) byla jednoduchá kombinatorická úvaha o permutacích šesti prvků.

Stejnou úvahu jako pro součin abc můžeme provést i pro součiny abd, acd, bcd ; vlastně jde jen o záměnu písmen. V součinu (5) dostaneme po roznásobení mimo členy $6abc + 6abd + 6acd + 6bcd$ další kladné členy (a, b, c jsou čísla kladná); jejich součet označíme k . Je tedy

$$(a + b + c + d)^3 = 6(abc + abd + acd + bcd) + k,$$

tj. vzhledem k podmínce $a + b + c + d = 1$

$$6(abc + abd + acd + bcd) = 1 - k < 1$$

a odtud

$$abc + abd + acd + bcd < \frac{1}{6}.$$

Obdobně, ale jednodušeji se získá odhad $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 < 1$.

Pro uvedení do úlohy Z–I–2 můžeme použít obdobných odhadů, např.

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R}_0^+; \quad a + b + c = 2 \Rightarrow ab + bc + ca < 2,$$

$$\forall a, b \in \mathcal{R}^+; \quad a + b = 1 \Rightarrow ab(a^2 + ab + b^2) < \frac{1}{4}$$

apod. Přitom $\mathcal{R}^+, \mathcal{R}_0^+$ značí množinu všech kladných, nezáporných reálných čísel. Tyto úlohy lze pochopitelně formulovat ve stylu tradiční matematiky, např.: pro všechna nezáporná čísla a, b, c platí: je-li $a + b + c = 2$, pak je $ab + bc + ca < 2$.

Z–I–3

Pravoúhlý trojúhelník ABC má odvěsny $AB = 4, BC = 3$. Opište mu čtverec $APQR$ tak, aby vrcholy B, C ležely po řadě na stranách PQ, QR .

- a) Popište konstrukci.
- b) Vypočtete délku AP .

KOMENTÁŘ

Je to úloha opsat útvar $\mathcal{U}_1$ (čtverec $APQR$) danému útvaru $\mathcal{U}_2$ (pravoúhlému trojúhelníku ABC), která navazuje na přípravnou úlohu „vepsat pravidelný osmiúhelník danému čtverci“. Úlohy „vepsat“ a „opsat“ jsou v *euklidovské geometrii ekvivalentní*: aplikujeme-li totiž vhodné podobné zobrazení, převedeme útvar $\mathcal{U}'_2$, vepsaný danému útvaru $\mathcal{U}'_1$, v daný útvar $\mathcal{U}_2$ a zároveň daný útvar $\mathcal{U}'_1$ v útvar $\mathcal{U}_1$ opsaný danému útvaru $\mathcal{U}_2$. Vysvětlíme tuto myšlenku při řešení úlohy Z–I–3.

Budeme se zabývat úlohou: Vepište do čtverce $APQR$ (ponecháváme označení z úlohy Z–I–3) pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AC tak, aby poměr jeho odvěsen $BC : AB$ bylo dané číslo $k < 1$ a aby vrcholy B, C ležely po řadě na stranách PQ, QR .

První impuls: Pro sestrojení trojúhelníku i pro výpočet délky jeho stran postačí, budeme-li znát např. poměr $AP : BP$.

Druhý impuls: Pro určení tohoto poměru použijeme dvou podobných trojúhelníků (obr. 66)

$$\triangle APB \sim \triangle BQC. \quad (7)$$

Jejich podobnost je zaručena shodností jejich vnitřních úhlů. Protože je

$$BC = k \cdot AB,$$

je vzhledem k (7)

$$BQ = k \cdot AP. \quad (8)$$

Dále je podle (8)

$$\frac{BP}{AP} = \frac{PQ - BQ}{PQ} = 1 - \frac{BQ}{PQ} = 1 - \frac{k \cdot AP}{AP} = 1 - k,$$

tj.

$$\frac{BP}{AP} = 1 - k. \quad (9)$$

Je-li např. $k = \frac{3}{4}$, je $BP = \frac{1}{4}AP$, odtud snadno sestrojíme bod B , pak i C a zkouškou – obrácením postupu – se přesvědčíme o tom, že sestrojený $\triangle ABC$ splňuje podmínky

úlohy. Výpočet délek jeho stran z délky AP a z čísla k se provede použitím Pythagorovy věty.

Máme-li naopak opsat pravoúhlému trojúhelníku ABC čtverec $APQR$, jak žádá úloha Z—I–3, vepíšeme *libovolnému čtverci* $A'P'Q'R'$ pravoúhlý trojúhelník $A'B'C'$ tak, aby platilo $B'C' = A'B' = \frac{3}{4}$ a výsledný obrazec zvětšíme (zmenšíme) a přemístíme tak, abychom dostali řešení dané úlohy.

Výpočet délky strany $AP = x$ je jednoduchý; pomocí Pythagorovy věty pro $\triangle APB$ dostaneme

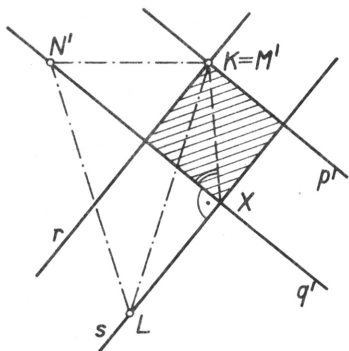
$$x^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 = AB^2.$$

Protože je $AB = 4$, vyjde $\frac{17}{16}x^2 = 16$, tj. $x = \frac{16}{\sqrt{17}} = \frac{16\sqrt{17}}{17}$, číselně $x \doteq 3,89$.

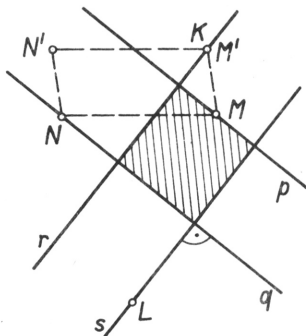
Kdybychom nechtěli použít podobného zobrazení, vyšli bychom z daného $\triangle ABC$; vypočetli bychom $BP = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17} \doteq \frac{4 \cdot 4,13}{17} = \frac{16,52}{17} \doteq 0,97$ a bod P bychom sestrojili na Thaletově polokružnici nad průměrem AB tak, aby bylo $BP \doteq 0,97$.

Oddělení a) úlohy Z—I–3 je speciálním případem známé úlohy, kterou lze řešit pomocí věty Thaletovy. Úloha zní:

V rovině jsou dány čtyři různé body K, L, M, N . Máme jimi vést dvě dvojice rovnoběžek tak, aby tyto čtyři přímky omezily čtverec (obr. 64).

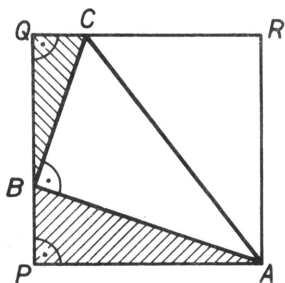


Obr. 64



Obr. 65

Nástin řešení: Rovnoběžné posunutí ($M \rightarrow K$) převede body M, N po řadě v body $M' = K, N'$, přímky p, q v přímky p', q' , které spolu s přímkami r, s omezí čtverec s jedním vrcholem K . Z jeho protějšího vrcholu X (obr. 65) je vidět úsečku LN' pod úhlem 90° , úsečku KN' pod úhlem 45° . Odtud vychází konstrukce. Obdobného postupu lze použít i při řešení oddělení a) úlohy Z–I–3. Neznámý vrchol Q obr. 66) sestrojíme pomocí podmínek $\sphericalangle BQC = 90^\circ$,



Obr. 66

✱ $BQA = 45^\circ$. Obtížnější a méně přehledná je tu zkouška i konstrukce než při dříve uvedeném řešení.

Z-I-4

Je daný obdélník $ABCD$, pre ktorý platí $AB = 2BC$. Určte geometrické miesto takých bodov X obdĺžnika $ABCD$, že pre obsahy trojuholníkov platí

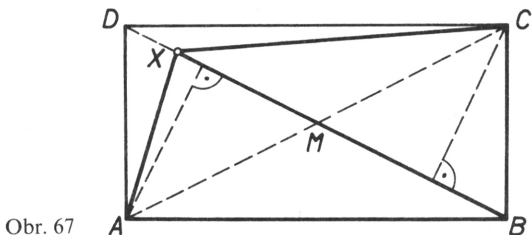
$$\triangle ABX = \triangle BCX < \triangle ADX.$$

KOMENTÁR

Predpoklad $AB = 2BC$ nedáva podstatné zjednodušenie a preto ho pri riešení vynecháme.

Situáciu chápeme množinove: ak označíme $\mathcal{M}_1$ množinu všetkých bodov X obdĺžnika (pravouholníka) $ABCD$, pre ktoré je $\triangle ABX = \triangle BCX$ a $\mathcal{M}_2$ množinu všetkých bodov X obdĺžnika $ABCD$, pre ktoré je $\triangle BCX < \triangle ADX$, potom hľadané „geometrické miesto bodov“ je prienik $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$.

Pri skúmaní obsahov trojuholníkov samozrejme vychádzame zo známej formule o polovičnom súčine strany a k nej príslušnej výšky. Tak zistíme, že nielen priesečík M uhlopriečok obdĺžnika $ABCD$, ale aj každý bod X uhlopriečky BD s výnimkou bodu B patria k množine $\mathcal{M}_1$. Pretože trojuholníky ABX , BCX majú spoločnú stranu BX a vzdialenosti vrcholov A, C od priamky BD sú rovnaké (obr. 67). Zostáva dokázať, že žiadny bod Y obdĺžnika $ABCD$ ležiaci mimo priamky BD k množine $\mathcal{M}_1$ nepatrí. Tu pripomínáme



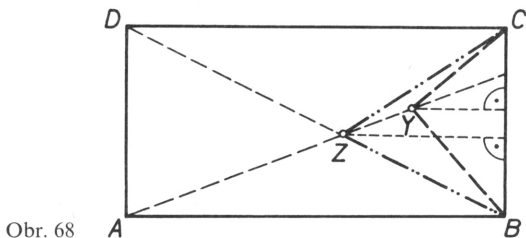
Obr. 67

dve možnosti ako sa dá dokázať rovnosť množín $\mathcal{M}_1$ a u (u je uhlopriečka BD bez bodu B). Nech už to urobíme s množinovým aparátom alebo bez neho, dokazujeme vlastne dve inklúzie

$$u \subset \mathcal{M}_1 \quad \text{a} \quad \mathcal{M}_1 \subset u.$$

Prvú inklúziu sme už dokázali, miesto druhej dokazujeme tvrdenie s ňou ekvivalentné: $(ABCD \setminus u) \cap \mathcal{M}_1 = \emptyset$. Žiadny bod obdĺžnika $ABCD$ ležiaci mimo u nepatrí k množine $\mathcal{M}_1$.

Nech je $Y \in (ABCD \setminus u)$. Ak leží bod Y napríklad vo vnútrajšku polroviny BDC (obr. 68), zostrojíme priesečník Z úsečky BD a úsečky AY a uvažíme, že priamky AX , BC



Obr. 68

sa pretínajú v polrovine ABC , preto má bod Y menšiu vzdialenosť od priamky BC než bod Z . Teda je

$$\triangle BCZ > \triangle BCY$$

a ďalej z tejto nerovnosti

$$\triangle ABY = \triangle ABZ + \triangle BYZ > \triangle ABZ = \triangle BCZ > \triangle BCY.$$

Teda je $Y \notin \mathcal{M}_1$.

Ináč je možno určiť množinu $\mathcal{M}_1$ takto: ak označíme v_a, v_c vzdialenosti bodu $X \in \mathcal{M}_1$ od priamok AB, BC , potom platí $\frac{1}{2}AB \cdot v_a = \frac{1}{2}BC \cdot v_c$, t. j.

$$\frac{v_a}{v_c} = \frac{BC}{AB}.$$

Množina všetkých bodov roviny ABC , ktorých vzdialenosti od priamok AB, BC sú v pomere $BC : AB$, je priamka BD bez bodu B . Teda je $\mathcal{M}_1 = ABCD \cap (\text{priamka } BD \setminus \{B\})$.

Množinu $\mathcal{M}_2$ môže určiť čitateľ samostatne; je vidieť, že to je množina všetkých bodov obdĺžnika $ABCD$, ktoré ležia vo vnútrajšku polroviny oB , kde o označuje spoločnú os úsečiek AB, CD .

Prienik $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ je tedy vnútrajšok úsečky BM (M je priesečík uhlopriečok AC, BD).

IV. Soutěžní úlohy II. kola

ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE A II. KOLA

A – II – 1a

Je dán libovolný trojúhelník ABC . Pro libovolný bod X roviny ABC označme $d(X)$ největší ze vzdáleností AX, BX, CX . Najděte takový bod X_0 , pro nějž je $d(X_0)$ minimální.

ŘEŠENÍ

PRVNÍ ZPŮSOB. Dokážeme nejprve tuto pomocnou větu:

Je-li $A_1A_2A_3$ ostroúhlý trojúhelník a S jeho vnitřní bod, pak S je jediný bod průniku kruhů $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 \cap \mathcal{K}_3$, kde kruh $\mathcal{K}_i$ má střed A_i a poloměr A_iS , $i = 1, 2, 3$.

Důkaz. Vnitřní bod X trojúhelníku lze charakterizovat např. tím, že každá otevřená polopřímka z X vycházející protne hranici trojúhelníku.

Předpokládejme, že bod $X \neq S$ je bodem průniku $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 \cap \mathcal{K}_3$. Protože S je hraničním bodem kruhu $\mathcal{K}_1$ a X dalším bodem kruhu $\mathcal{K}_1$, je úhel A_1SX ostrý. Svírá

tedy polopřímka SX ostrý úhel s polopřímkou SA_1 a obdobně s polopřímkou SA_2 i SA_3 .

Označme σ^+ uzavřenou polorovinu obsahující bod X takovou, že její hranice prochází bodem S a je kolmá k SX . Podle předchozího leží všechny tři vrcholy A_i v σ^+ , tedy celý trojúhelník $A_1A_2A_3$ leží v σ^+ . Proto nemůže mít otevřená polopřímka opačná k polopřímce SX společný bod s hranicí trojúhelníka $A_1A_2A_3$, což odporuje charakterizaci vnitřního bodu uvedené na začátku důkazu.

Nyní přejdeme k vlastnímu řešení úlohy. Budeme rozlišovat dva případy:

A. Trojúhelník ABC je ostroúhlý.

Ukážeme, že pak o středu X_0 kružnice opsané trojúhelníku ABC platí, že $d(X_0) < d(X)$ pro každý bod $X \neq X_0$:

Jak známo, v případě ostroúhlého trojúhelníka je X_0 vnitřní bod tohoto trojúhelníka. Je-li nyní bod X různý od X_0 , pak X není podle uvedené pomocné věty obsažen v alespoň jednom z tří kruhů o středech A, B a C a stejných poloměrech $d(X_0)$. Tedy $d(X)$ je větší než $d(X_0)$.

V tomto případě je tedy jediný bod X_0 s minimálním $d(X_0)$, a to střed kružnice danému trojúhelníku opsané.

B. Trojúhelník ABC není ostroúhlý. Ukážeme, že střed X_0 nejdelší strany trojúhelníka má vlastnost, že $d(X_0) < d(X)$ pro každý bod $X \neq X_0$. Můžeme předpokládat, že označení je zvoleno tak, že AB je nejdelší strana, takže X_0 je střed úsečky AB a $d(X_0) = \frac{1}{2}AB$. Je-li $X \neq X_0$, je zřejmé

$$d(X) \geq XA, \quad d(X) \geq XB,$$

tedy také

$$d(X) \geq \frac{1}{2}(XA + XB) \geq \frac{1}{2}AB = d(X_0).$$

Přitom $d(X)$ se nemůže rovnat $d(X_0)$, neboť pak by $d(X) = XA$, $d(X) = XB$, a také

$$XA + XB = AB,$$

tj. bod X by splynul s X_0 .

V tomto případě je tedy střed nejdelší strany trojúhelníka jediným bodem X_0 , pro který je $d(X_0)$ minimální.

Úloha je rozřešena.

DRUHÝ ZPŮSOB. Číslo $d(X)$ je zřejmě poloměr nejmenšího kruhu se středem X , který obsahuje celý trojúhelník ABC . Nejmenší kruh vůbec obsahující celý trojúhelník ABC má proto střed X_0 , pro který je $d(X_0)$ minimální.

Z názoru je patrné, že takový nejmenší kruh existuje (dokázat to přesahuje možnosti tohoto řešení). Označme $\mathcal{K}$ tento kruh, X_0 jeho střed a K hraniční kružnici kruhu $\mathcal{K}$. Kružnice K zřejmě prochází alespoň jedním z vrcholů A, B, C , např. bodem A . Kdyby neprocházela ani B , ani C , pak malou změnou bodu X_0 do nového bodu X_1 na úsečce X_0A bychom dosáhli toho, že $d(X_1) = AX_1 < AX_0 = d(X_0)$, což odporuje minimálnosti $d(X_0)$. Tedy K prochází alespoň dvěma z vrcholů A, B, C , např. A a B . Pak X_0 leží na ose strany AB . Označme S střed úsečky AB . Je-li $X_0 \neq S$ a neprochází-li K bodem C , lze $d(X_0)$ opět změnit malým posunutím X_0 na úsečce X_0S .

Jsou tedy dvě možnosti:

Buď je $X_0 = S$, takže K je Thaletova kružnice s průměrem

AB , a pak $\angle ACB \geq 90^\circ$, anebo je $X_0 \neq S$, a kružnice K je opsaná kružnice trojúhelníku ABC . V tomto případě je ABC ostroúhlý trojúhelník, neboť jinak lze opět $d(X_0)$ zmenšit.

Závěr. Je-li ABC ostroúhlý trojúhelník, je bod X_0 střed kružnice opsané trojúhelníku ABC . Je-li ABC pravoúhlý nebo tupoúhlý, pak X_0 je střed nejdelší strany trojúhelníka ABC .

A – II – 1b

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, x, y platí

$$|a \sin x + b \sin y| \leq \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(x + y)}.$$

Kdy nastane rovnost?

ŘEŠENÍ

Položme $A = a \sin x + b \sin y$, $B = a \cos x - b \cos y$; bude potom

$$A^2 + B^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(x + y).$$

Poněvadž zřejmě $B^2 \geq 0$, je $A^2 \leq A^2 + B^2$, a tedy také

$$|A| \leq \sqrt{A^2 + B^2},$$

což je právě dokazovaná nerovnost.

Rovnost zde nastane, právě když je $B = 0$, tzn. když

$$a \cos x = b \cos y.$$

Dokážte, že pro všechny prirodzené n platí

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}.$$

ŘEŠENÍ

Zřejmě platí pro každé přirozené číslo k :

$$\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4k^2 + 4k + 1} < \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4k} - \frac{1}{4k+4},$$

a tedy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} < \\ & < \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{4n-4} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+4}. \end{aligned}$$

Snadnou úpravou dostaneme

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{4n+4} < \frac{1}{4},$$

což jsme měli dokázat.

A – II – 2b

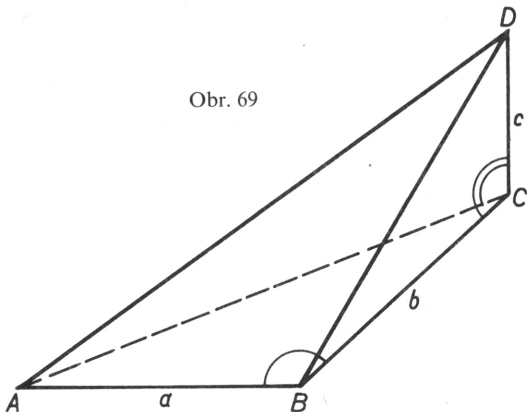
Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany AB, BC, CD jsou po dvou navzájem kolmé. Vyjádřete pomocí délek a, b, c hran AB, BC, CD poloměr r kulové plochy vepsané čtyřstěnu $ABCD$.

ŘEŠENÍ

Střed S kulové plochy čtyřstěnu vepsané je vnitřní bod čtyřstěnu. Proto je objem čtyřstěnu $ABCD$ roven součtu objemů čtyř čtyřstěnů $SABC, SABD, SACD$ a $SBCD$, které mají stejnou výšku z vrcholu S , rovnou poloměru r vepsané kulové plochy. O objemech platí (obr. 69):

$V_{ABCD} = \frac{1}{6}abc$, neboť CD je výška čtyřstěnu ke stěně ABC , která je pravoúhlý trojúhelník, dále

Obr. 69



$$V_{SABC} = \frac{1}{6}rab,$$

$$V_{SACD} = \frac{1}{6}rc \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$V_{SBCD} = \frac{1}{6}rbc,$$

a konečně

$$V_{SABD} = \frac{1}{6}ra \sqrt{b^2 + c^2},$$

neboť hrana AB je kolmá ke dvěma přímkám BC, CD roviny BCD , tedy i k přímce BD , a trojúhelník ABD je proto pravoúhlý.

Celkem dostáváme

$$\frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}rab + \frac{1}{6}rc \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{1}{6}rbc + \frac{1}{6}ra \sqrt{b^2 + c^2},$$

odkud

$$r = \frac{abc}{a(b + \sqrt{b^2 + c^2}) + c(b + \sqrt{a^2 + b^2})}.$$

A – II – 3a

V téže rovině leží kružnice $k_1, k_2, \dots, k_n$ ($n \geq 1$).

a) Najděte vzorec pro největší možný počet a_n oblastí, na které tyto kružnice rozdělí rovinu. Popište konstrukci n kružnic, které rozdělí rovinu na tento počet a_n oblastí. Jaký má odvozený výsledek význam pro Vennovy diagramy?

b) Budiž $n = 4$; popíšeme symbolem (1010) každou z oblastí, která leží uvnitř k_1, k_3 a vně k_2, k_4 , symbolem (0100) každou z oblastí, která leží uvnitř k_2 a vně k_1, k_3, k_4 a obdobně dále. Ukažte, že je možné zvolit kružnice tak, že dělí rovinu na a_4 oblastí a každá z nich má jiný popis. Narýsujte obrázek.

ŘEŠENÍ

a) Pro a_n platí rekurentní vzorec

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1). \quad (1)$$

Neboť zvolíme-li n -tou kružnici tak, aby protínala každou z předchozích $n-1$ kružnic ve dvou bodech, dostaneme na ní maximální počet, tj. $2(n-1)$ průsečíků. Tím vznikne na k_n $2(n-1)$ oblouků, z nichž každý rozdělí některou z předchozích a_{n-1} oblastí na dvě. Vzhledem k tomu, že je $a_1 = 2$, je podle (1)

$$a_n = 2 + 2(1 + 2 + \dots + n-1),$$

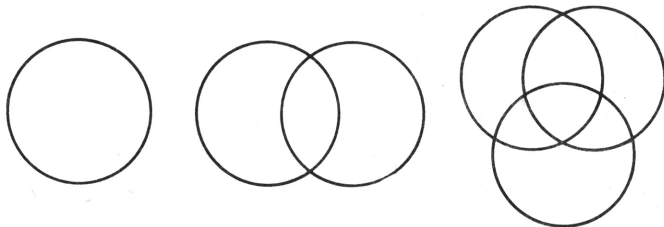
po úpravě

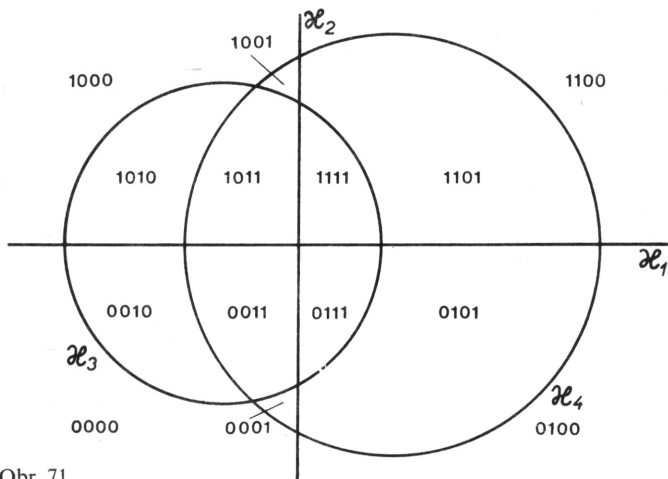
$$a_n = n^2 - n + 2. \quad (2)$$

Pro $n \geq 4$ je $a_n < 2^n$, proto pro znázornění všech průniků n množin a jejich doplňků nemůžeme kreslit kruhové Vennovy diagramy. Pro $n = 1, 2, 3$ jsou kruhové Vennovy diagramy známé obrazce; viz obr. 70.

Zbývá dokázat, že pro každé $n > 3$ je maximální počet oblastí a_n dosažitelný při vhodné volbě kružnic $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Obr. 70





Obr. 71

Dokážeme indukci **lemma**: V rovině lze sestavit pro každé $n \geq 2$ n kružnic tak, že průnik všech jejich vnitřků je neprázdný a že každé dvě se protínají ve dvou bodech.

Předpokládejme, že věta platí pro $n - 1$. V průniku $\mathcal{P}$ všech vnitřků kružnic $k_1, \dots, k_{n-1}$, zvolme bod A , vně všech kružnic zvolme bod B . Body A, B vedme takovou kružnici k_n , aby neprocházela žádným z průsečíků kružnic $k_1, \dots, k_{n-1}$. Kružnice k_n zřejmě protne každou z kružnic $k_1, \dots, k_{n-1}$ ve dvou bodech a průnik jejího vnitřku s množinou $\mathcal{P}$ je neprázdný. Protože lemma platí pro $n = 2$, je dokázáno.

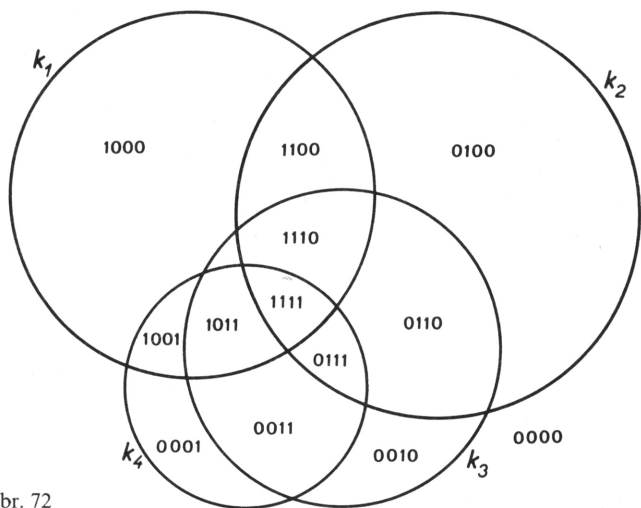
b) V rovině sestrojme situaci podle obr. 71; každou z oblastí, na něž rozdělí přímky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ a kružnice $\mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4$ rovinu, popišme podle obdobné úmluvy, jaká je v textu b) – závorky jsou vynechány.

Na obr. 71 je 14 různých popisů ze 16 možných; chybějí jen 0110 a 1110.

Promítneme situaci z obr. 71 na kulovou plochu Γ z některého jejího bodu (stereograficky), dostaneme na kulové ploše Γ 4 kružnice $\kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3, \kappa'_4$, které tam omezí 14 oblastí s vesměs různými popisy. Promítneme-li do roviny kružnice $\kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3, \kappa'_4$ z bodu kulové plochy Γ , který neleží na žádné z těchto kružnic, dostaneme kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 žádané vlastnosti. Situace je na obr. 72.

A – II – 3b

V rovině je dáno $3n$ bodů $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{3n}$ ($n \geq 1$), z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Potom je možno



Obr. 72

sestrojit n trojúhelníků, z nichž žádné dva nemají společný bod a takových, že všechny vrcholy těchto trojúhelníků leží v bodech A_i . Dokažte.

ŘEŠENÍ

Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že tvrzení je už dokázáno pro některé přirozené číslo n a uvažujme $3n + 3$ body $A_1, A_2, \dots, A_{3n+3}$, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Sestrojme nejmenší vypuklý mnohoúhelník, který obsahuje všechny body A_i ($i = 1, 2, \dots, 3n + 3$). Dejme tomu, že tento vypuklý mnohoúhelník, jemuž se též říká *konvexní obal* uvedené množiny bodů, má k vrcholů, jež bez újmy obecnosti lze po řadě označit $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$. Úsečka A_1A_3 je pro $k > 3$ úhlopříčkou mnohoúhelníka, pro $k = 3$ je to jeho strana. Všimněme si trojúhelníka $A_1A_2A_3$ a rozlišujme dva případy.

První případ je ten, že uvnitř trojúhelníka $A_1A_2A_3$ neleží žádný bod A_i (pro $i = k + 1, k + 2, \dots, 3n + 3$). Pak přímka A_1A_3 rozdělí rovinu na dvě poloroviny tak, že uvnitř jedné leží bod A_2 , uvnitř druhé je $3n$ bodů $A_4, A_5, \dots, A_{3n+3}$. Podle indukčního předpokladu lze ve druhé polorovině sestavit n trojúhelníků, jež splňují požadavky úlohy. Připojíme-li k nim ještě trojúhelník $A_1A_2A_3$, je tím sestaven $n + 1$ trojúhelník a druhý indukční krok je hotov.

Ve *druhém případě* připustíme, že uvnitř trojúhelníka $A_1A_2A_3$ leží některé body A_i (pro $i = k + 1, k + 2, \dots, 3n + 3$). Sestrojme úhly $A_iA_1A_2$ a vyberme z nich ten, který má nejmenší velikost. Označme tento bod bez újmy obecnosti A_{k+1} .

Bod A_{k+1} je určen jednoznačně, neboť žádné tři body A_i neleží v jedné přímce. Nyní přímka A_1A_{k+1} oddělí bod A_2 od zbývajících $3n$ bodů A_i . Podle indukčního předpokladu sestrojíme tedy v jedné polorovině n trojúhelníků požadovaných vlastností a připojíme k nim ještě trojúhelník $A_1A_2A_{k+1}$. Tím je důkaz podán.

B – II – 1a

V rovine je daná úsečka AB a bod M , který na nej neleží. Nech p, q sú ľubovoľné dve priamky týchto vlastností:

1. $A \in p, B \in q$;
2. žiadna z nich neobsahuje úsečku AB ani bod M ;
3. $p \perp q$.

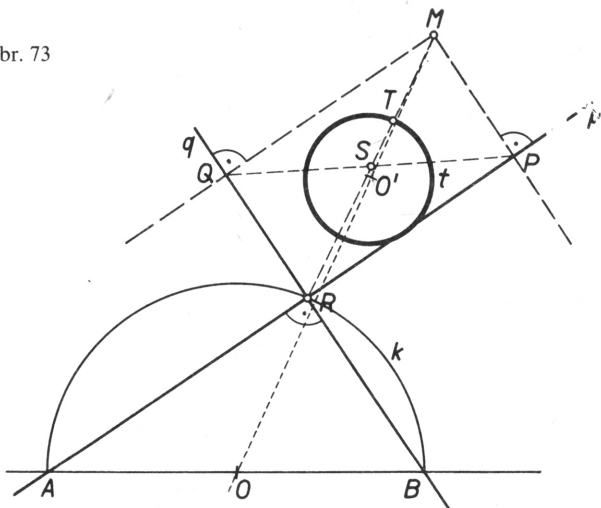
Nech P, Q sú v uvedenom poradí päty kolmíc z bodu M na priamky p, q . Určite množinu ťažísk všetkých trojuholníkov MPQ .

ŘEŠENÍ

Průsečík přímek p a q označme R . Poněvadž $p \perp q$, leží body R na Thaletově kružnici k s průměrem AB (obr. 73).

Trojúhelník PMQ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu M , obrazec $MPRQ$ je obdélník. Středy všech takto vzniklých obdélníků leží na kružnici h , stejnohlé s k podle středu M a koeficientu $\frac{1}{2}$. Poněvadž těžiště T trojúhelníků MPQ leží na úsečce SM a platí $MT = \frac{2}{3}MS = \frac{1}{3}RM$, plyne odtud, že množinou těžišť všech trojúhelníků PMQ je kružnice t , která je stejnohlá s kružnicí k podle středu stejnohllosti M a koeficientu stejnohllosti $k = \frac{1}{3}$.

Je-li T' libovolný bod kružnice t , je tento bod těžištěm trojúhelníka, který sestojíme takto:



K bodu T' sestrojíme bod R' na přímce MT' , aby $MR' = 3MT'$; bod R' leží zřejmě na kružnici k . Na přímkách AR' a BR' sestrojíme paty P', Q' kolmic z bodu M na tyto přímky. Trojúhelník $MP'Q'$ má své těžiště bod T' .

Je tudíž kružnice t hledanou množinou bodů, těžišť všech trojúhelníků, které splňují podmínky úlohy.

B – II – 1b

Zistíte, pre ktoré dvojice reálných čísel x, y z intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ je splnená nerovnosť:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + y) + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x + y) \geq 2.$$

Výsledok znázorníte graficky v pravouhlom súradnicovom

sysťeme. Pre ktoré dvojice reálnych čísel x, y z daného intervalu platí rovnosť?

RIEŠENIE

Daná nerovnosť nie je definovaná pre tie dvojice x, y , pre ktoré je $y = -x + k\pi$, kde k je celé číslo, pretože funkcia tangens nie je definovaná pre uhly, ktoré sú nepárnym násobkom $\frac{1}{2}\pi$, teda v našom prípade pre $y = -x + (2k + 1)\pi$, kde k je celé číslo, a funkcia kotangens nie je definovaná pre uhly, ktoré sú párnym násobkom čísla $\frac{1}{2}\pi$, teda pre $y = -x + 2k\pi$. Spojením definičných oborov jednotlivých funkcií dostávame definičný obor celej nerovnosti. Danému intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ čísel x, y zodpovedajú tie k , pre ktoré je $|k| \leq 4$. Danú nerovnosť môžeme písať aj v tvare:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(x + y)}{\cos \frac{1}{2}(x + y)} + \frac{\cos \frac{1}{2}(x + y)}{\sin \frac{1}{2}(x + y)} \geq 2.$$

Po jednoduchej úprave dostaneme

$$\frac{[\sin \frac{1}{2}(x + y) - \cos \frac{1}{2}(x + y)]^2}{\sin \frac{1}{2}(x + y) \cdot \cos \frac{1}{2}(x + y)} \geq 0.$$

Daná nerovnosť je teda splnená pre všetky dvojice x, y , pre ktoré je:

$$\sin \frac{1}{2}(x + y) \cdot \cos \frac{1}{2}(x + y) > 0.$$

Kedže je $\sin \frac{1}{2}(x + y) \cdot \cos \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2} \sin (x + y)$, stačí zistiť, kedy je $\sin (x + y) > 0$. Tak tomu je pre všetky dvojice reálnych čísel, pre ktoré platí:

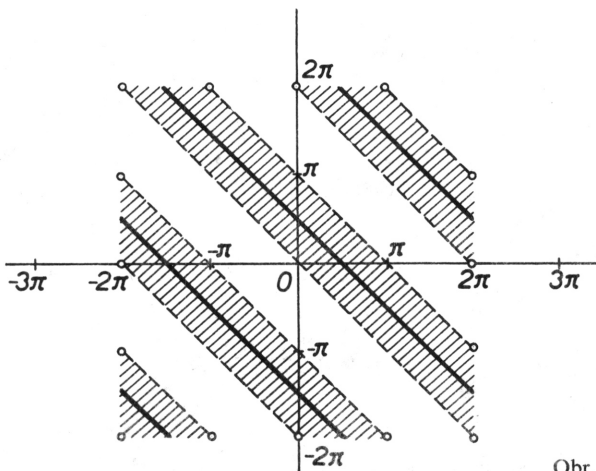
$$2k\pi < x + y < 2k\pi + \pi.$$

Odtiaľ je:

$$-x + 2k\pi < y < -x + (2k + 1)\pi.$$

Ľahko sa presvedčíme, že danému intervalu vyhovujú tieto čísla k : $-2, -1, 0, 1$. Grafickým znázornením nerovností dostávame 4 pásy štvorca (vyšrafované), do ktorých spadajú dvojice čísel x, y , pre ktoré je daná nerovnosť splnená (obr. 74).

Je zrejmé, že rovnosť nastane vtedy, ak $\sin \frac{1}{2}(x + y) = \cos \frac{1}{2}(x + y)$. Použitím vety o doplnkových uhloch



Obr. 74

a vlastnosti periodicity funkcie sinus je: $\sin \frac{1}{2}(x + y) = \sin [2k\pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(x + y)]$. To znamená, že $\frac{1}{2}(x + y) = 2k\pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(x + y)$. Odtiaľ je $y = -x + 2k\pi + \frac{1}{2}\pi$. Pre daný štvorec je k : 1, 0, -1, -2. Sú to stredy pásov (na grafe zvýraznené čiary). Ak dosadíme do pôvodnej rovnice za $y = -x + 2k\pi + \frac{1}{2}\pi$, dostaneme:

$$\operatorname{tg} (k\pi + \frac{1}{4}\pi) + \operatorname{cotg} (k\pi + \frac{1}{4}\pi) = 2,$$

čo skutočne platí.

B – II – 2a

Je dán čtyřboký jehlan $V(ABCD)$ se čtvercovou podstavou $ABCD$ a na jeho hraně VC bod E ; poměr délek $VE : VC$ nechť je q , $0 < q < 1$. Rovina ABE protne hranu VD v bodě F . Určete poměr objemů těles $VABEF$ a $AFDBEC$, na něž rovina ABE daný jehlan rozdělí.

ŘEŠENÍ

PRVNÍ ZPŮSOB. Označme a délku strany čtverce $ABCD$ a v výšku jehlanu $V(ABCD)$. Objem celého jehlanu je tedy $\frac{1}{3}a^2v$.

Poněvadž $AB \parallel CD$, je také $EF \parallel AB$, takže také $VF : VD = q$. Vzdálenost přímky EF od (rovnoběžné) roviny $ABCD$ je právě $(1 - q)v$. Kromě toho je také $EF : CD = q$, a tedy $EF = aq$.

Nyní vypočteme objem tělesa $AFDBEC$. Bodem F vedeme rovinu rovnoběžnou s rovinou BEC ; ta protne úsečku

AB v bodě G a úsečku CD v bodě H , přičemž $BG = CH = EF = aq$. Těleso $BECGFH$ je tedy trojboký hranol; jeho objem je $\frac{1}{2}aaq(1-q)v = \frac{1}{2}a^2vq(1-q)$. Těleso $FAGHD$ je čtyřboký jehlan s objemem $\frac{1}{3}a(1-q)a(1-q)v = \frac{1}{3}a^2v(1-q)^2$. Objem celého tělesa $AFDBEC$ dostaneme sečtením

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a^2vq(1-q) + \frac{1}{3}a^2v(1-q)^2 &= \frac{1}{6}a^2v(1-q)[3q + 2(1-q)] = \\ &= \frac{1}{6}a^2v(1-q)(q+2).\end{aligned}$$

Odečtením od objemu $\frac{1}{3}a^2v$ celého daného jehlanu $V(ABCD)$ získáme objem jehlanu $V(ABEF)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}a^2v - \frac{1}{6}a^2v(1-q)(q+2) &= \\ = \frac{1}{6}a^2v[2 - (1-q)(q+2)] &= \frac{1}{6}a^2vq(1+q).\end{aligned}$$

Hledaný poměr objemů těles $VABEF$ a $AFDBEC$ je tedy

$$\frac{\frac{1}{6}a^2vq(1+q)}{\frac{1}{6}a^2v(1-q)(q+2)} = \frac{q(1+q)}{(1-q)(2+q)}.$$

DRUHÝ ZPŮSOB. Uveďme ještě stručně jiné řešení založené na využití *Cavalieriho principu*, resp. na výpočtu objemu tělesa „rozřezáním na tenké hranolky“.

Označme opět v výšku daného jehlanu a a délku strany čtverce $ABCD$. Jehlan protneme rovinou q rovnoběžnou s podstavou; vzdálenost q od V nechť je hv , $0 < h < 1$. Rovina q protne jehlan ve čtverci o straně ah . Je-li $h < q$, rovina q neprotne těleso $AFDBEC$. Je-li $h > q$, protne q

těleso $AFDBEC$ v obdélníku o stranách ah , $a \frac{h-q}{1-q}$.

Nyní následuje ono „rozřezání tělesa $AFDBEC$ na tenké hranolky“, což není nic jiného nežli vyjádření objemu tělesa $AFDBEC$ integrálem

$$\int_q^1 ah a \frac{h-q}{1-q} v dh.$$

Snadným výpočtem zjistíme výsledek

$$\frac{1}{6} a^2 v (1-q)(2+q).$$

Další postup je stejný jako v původním řešení.

B-II-2b

Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$x^2 + (a+1)x + a = \text{sign} [x^2 + (a+1)x] \quad (1)$$

o neznámé x , přičemž a je reálný parametr. Provedte diskusi.

ŘEŠENÍ

V dané rovnici se vyskytuje funkce signum, a proto je třeba rozlišit tři případy.

1. Jestliže

$$x^2 + (a+1)x = 0, \quad (2)$$

pak rovnice (1) nabývá tvaru

$$x^2 + (a+1)x + a = 0. \quad (3)$$

Soustava rovnic (2) a (3) může mít zřejmě řešení jen tehdy, je-li

$$a = 0.$$

V tomto případě řešení existuje. Kořeny jsou 0 a -1 .

2. Jestliže

$$x^2 + (a + 1)x > 0, \quad (4)$$

pak rovnice (1) nabývá tvaru

$$x^2 + (a + 1)x + (a - 1) = 0. \quad (5)$$

Soustava tvořená nerovnicí (4) a rovnicí (5) je zřejmě ekvivalentní s rovnicí (5) doplněnou podmínkou

$$a - 1 < 0. \quad (6)$$

Rovnice (5) má řešení v oboru reálných čísel, právě když

$$D = (a + 1)^2 - 4(a - 1) \geq 0,$$

což pro každé a splňující podmínku (6) platí. (Dokonce pro každé číslo a platí $D \geq 0$, neboť $D = (a - 1)^2 + 4$.) Tedy pro $a < 1$ má rovnice (1) kořeny

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}[-(a + 1) \pm \sqrt{(a - 1)^2 + 4}].$$

3. Jestliže

$$x^2 + (a + 1)x < 0, \quad (7)$$

pak rovnice (1) nabývá tvaru

$$x^2 + (a + 1)x + (a + 1) = 0. \quad (8)$$

Soustava tvořená nerovnicí (7) a rovnicí (8) je ekvivalentní s rovnicí (8) doplněnou podmínkou

$$a + 1 > 0. \quad (9)$$

Rovnice (8) má řešení v oboru reálných čísel, právě když

$$D' = (a + 1)^2 - 4(a + 1) \geq 0,$$

tj.

$$(a + 1)(a - 3) \geq 0,$$

což vzhledem k tomu, že platí (9), nastane, právě když

$$a - 3 \geq 0. \quad (10)$$

Podmínky (9) a (10) jsou splněny, právě když platí nerovnost (10). Pro $a \geq 3$ má rovnice (1) kořeny

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}[-(a + 1) \pm \sqrt{(a + 1)(a - 3)}].$$

Všechny možnosti pro řešení rovnice (1) v oboru reálných čísel jsou zachyceny v následující tabulce:

Parametr a	Kořeny
$(-\infty, 1)$	$x_{1,2} = \frac{1}{2}[-(a + 1) \pm \sqrt{(a - 1)^2 + 4}]$
$\langle 1, 0)$	neexistují
0	$x_1 = 0, x_2 = -1$
$(0, 3)$	neexistují
3	$x_{1,2} = -2$
$(3, \infty)$	$x_{1,2} = \frac{1}{2}[-(a + 1) \pm \sqrt{(a + 1)(a - 3)}].$

Je dána kružnice k a přirozené číslo n . Zjistěte největší a nejmenší počet částí, na které lze vnitřek kružnice k rozdělit n tětivami.

ŘEŠENÍ

Největší počet dílů vznikne, když se každé dvě tětivy budou protínat uvnitř kruhu, nejmenší počet částí pak vznikne, když tětivy nemají uvnitř kruhu žádný společný bod.

1. Označme a_n nejmenší počet částí vnitřku kružnice k , které lze určit n tětivami $t_1, t_2, \dots, t_n$. Zřejmě $a_1 = 2, a_2 = 3$ atd. $(n + 1)$ -ní tětivu musíme vést tak, aby neprotla žádnou z tětiv $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$. Ta pak rozdělí jedinou z existujících částí na dvě, takže platí:

$$a_{n+1} = a_n + 1 \quad (1)$$

pro každé přirozené n . Podle (1) určíme snadno a_n jako funkci n :

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 1 = a_{n-2} + 1 + 1 = a_{n-2} + 2 = \\ &= a_{n-(n-1)} + n - 1 = a_1 + n - 1. \end{aligned}$$

Avšak $a_1 = 2$, takže

$$a_n = n + 1. \quad (2)$$

2. Označme b_n největší počet částí vnitřku kružnice k , kterého lze dosáhnout n tětivami $t_1, t_2, \dots, t_n$. Zřejmě $b_1 = 2, b_2 = 4$ atd. $(n + 1)$ -ní tětivu t_{n+1} musíme vést tak, aby

protla každou z třetiv $t_1, t_2, \dots, t_n$. Je pak jimi rozdělena na $n + 1$ úseček. Každá z nich rozděluje některou z existujících částí na dvě, takže přibýlo $n + 1$ částí. Platí tedy

$$b_{n+1} = b_n + n + 1, \quad (3)$$

pro každé $n \geq 1$.

Stejným postupem jako v odst. 1 vypočteme b_n :

$$b_n = b_{n-1} + n$$

$$b_n = b_{n-2} + 2n - 1$$

$$b_n = b_{n-n+1} + (n-1)n - (1 + 2 + 3 + \dots + (n-2))$$

$$b_n = b_1 + (n-1)n - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$b_n = 2 + \frac{1}{2}(n-1)(n+2) \quad (4)$$

Tento vztah můžeme ještě dále upravit na konečný tvar:

$$b_n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1. \quad (4')$$

B-II-3b

Nechť $\mathcal{M} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ je množina bodů v prostoru taková, že $X_i X_k \leq 1$ pro všechna $i, k = 1, 2, \dots, n$, přičemž $X_1 X_2 = 1$.

Dokažte:

a) Existuje kvádr, jehož všechny hrany mají délku nejvýše rovnou 1 a který obsahuje množinu $\mathcal{M}$.

b) Každý kvádr, který obsahuje množinu $\mathcal{M}$, má aspoň jednu hranu délky větší než 0,57.

ŘEŠENÍ

a) Množina $\mathcal{M}$ má následující vlastnost: Zvolíme-li libovolnou rovinu ϱ , pak existuje rovinová vrstva s hraničními rovinami rovnoběžnými s rovinou ϱ a o výšce nejvýše 1, která obsahuje množinu $\mathcal{M}$.

Důkaz. Nechť ϱ je libovolná rovina. V množině $\mathcal{M}$ zvolme libovolný bod, např. X_1 . Veďme bodem X_1 rovinu ϱ_1 rovnoběžnou s rovinou ϱ . Rovina ϱ_1 pak určuje dva poloprostory. Body ležící v rovině ϱ_1 považujeme za body patřící do každého z těchto poloprostorů. Nechť $\mathcal{M}'$ a $\mathcal{M}''$ jsou po řadě množiny všech bodů z množiny $\mathcal{M}$, které leží v jednom a ve druhém z uvažovaných poloprostorů. Množiny $\mathcal{M}'$ a $\mathcal{M}''$ jsou neprázdné, neboť $X_1 \in \mathcal{M}'$ a $X_1 \in \mathcal{M}''$. V každé z množin $\mathcal{M}'$ a $\mathcal{M}''$ nalezneme bod, který má od roviny ϱ_1 maximální vzdálenost. Nechť v množině $\mathcal{M}'$ je takovým bodem bod X_j a v množině $\mathcal{M}''$ bod X_k . Nyní rozlišme dvě možnosti.

$\alpha)$ Nechť $X_j \in \varrho_1$ a $X_k \in \varrho_1$. Pak zřejmě $\mathcal{M} \subset \varrho_1$. Tudíž $\mathcal{M}$ leží v rovinové vrstvě s hraničními rovinami ϱ_1 a ϱ' , kde $\varrho' \parallel \varrho$ a vzdálenost rovin ϱ' a ϱ_1 je 1.

$\beta)$ Nechť $X_j \notin \varrho_1$ nebo $X_k \notin \varrho_1$. Pak roviny ϱ_j a ϱ_k , které jsou rovnoběžné s rovinou ϱ a procházejí po řadě body X_j a X_k , určují rovinovou vrstvu obsahující všechny body množiny $\mathcal{M}$. Protože $X_j X_k \leq 1$, je výška rovinové vrstvy určené rovinami ϱ_j a ϱ_k menší nebo rovna 1.

Výše uvedená vlastnost množiny $\mathcal{M}$ je zcela dokázána.

Zvolme v prostoru tři roviny π, ν, μ , které jsou po dvou k sobě kolmé. Pak existují rovinové vrstvy obsahující mno-

žinu $\mathcal{M}$, jež mají hraniční roviny po řadě rovnoběžné s rovinami π , ν , μ a jejichž výšky jsou menší nebo rovné 1. Průnikem těchto tří rovinových vrstev je kvádr, jehož existenci jsme měli dokázat.

b) Toto tvrzení dokážeme nepřímou. Nechť existuje kvádr $\mathcal{K}$, který obsahuje množinu $\mathcal{M}$ a přitom žádná jeho hrana není větší než 0,57. Zvolme dva libovolné body U, V kváдру $\mathcal{K}$. Zvolme ortonormální soustavu souřadnic s počátkem v jednom z vrcholů kváдру $\mathcal{K}$. Každá z os souřadnic nechť obsahuje jednu hranu kváдру $\mathcal{K}$. Nechť

$$U \equiv [u_1, u_2, u_3], \quad V \equiv [v_1, v_2, v_3].$$

Pak pro každé $i = 1, 2, 3$ je

$$|u_i - v_i| \leq 0,57.$$

Tudíž

$$UV = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (u_i - v_i)^2} \leq \sqrt{3 \cdot 0,57^2},$$

tj.

$$UV \leq \sqrt{3 \cdot 0,3249} < 1.$$

Tedy v kváдру $\mathcal{K}$ neleží body X_1 a X_2 , neboť $X_1 X_2 = 1$.

Dospěli jsme tedy ke sporu s předpokladem, že $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$.

Tím je tvrzení b) dokázáno.

ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE C

II. KOLA

C – II – 1a

V rovině je dána konečná množina bodů, z nichž každé dva mají vzdálenost nejvýše 1. Dokažte, že existuje jednotkový čtverec, který danou množinu obsahuje.

ŘEŠENÍ

1. Je-li daná množina bodů prázdná, pak zřejmě dokazované tvrzení platí.

2. Nechť je daná množina bodů neprázdná. Každým bodem dané množiny vedeme přímky libovolného směru p a směru q k němu kolmému. Krajiní přímky obou osnov označme p_1, p_2 a q_1, q_2 . Vzdálenost přímek p_1, p_2 i přímek q_1, q_2 je nejvýš 1. Tyto čtyři přímky určují pravoúhelník (ve zvláštním případě úsečku nebo bod) o stranách délky $d \leq 1$, takže zřejmě existuje jednotkový čtverec, který jej obsahuje.

C – II – 1b

Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c takových, že zároveň platí:

(1) $a^2 + b^2 = c^2$;

(2) číslo c je dělitelné číslem a i číslem b .

ŘEŠENÍ

Podle (2) existují taková dvě přirozená čísla m, n , že $c = ma$ a $c = nb$.

Dosadíme-li do (1) dostaneme

$$\frac{c^2}{m^2} + \frac{c^2}{n^2} = c^2,$$

z čehož vyplývá

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = 1,$$

a tedy

$$m^2(n^2 - 1) = n^2.$$

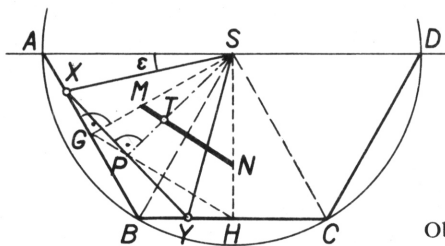
Tato rovnice však nemůže platit, neboť by muselo $(n^2 - 1)$ být dělitelem n^2 , což je možné jen pro $n^2 = 2$ a tedy pro $n = \sqrt{2}$, což není přirozené číslo. Úloha tedy nemá řešení.

C – II – 2a

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S . Určete množinu těžišť všech rovnostranných trojúhelníků $XS Y$, když bod X probíhá obvod daného šestiúhelníku.

ŘEŠENÍ

Těžiště $\triangle ASB$ je bod M , těžiště $\triangle BSC$ je bod N . Jestliže bod X proběhne úsečku AB a Y úsečku BC , pak těžiště uvažovaných trojúhelníků $XS Y$ vyplní úsečku MN . Úhly $\sphericalangle XGS$ a $\sphericalangle XPS$ jsou pravé a čtyřúhelník $XGPS$ je tětivový

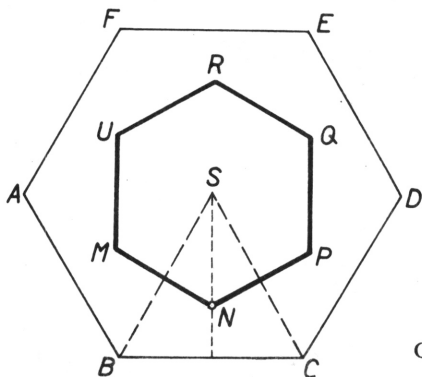


Obr. 75

a poněvadž $\angle XSP = 30^\circ$, je $\angle XGP = 150^\circ$ (označení viz obr. 75, 76). Odtud plyne, že středy stran XY leží na úsečce GH , která s úsečkou AB svírá úhel 30° .

Těžiště T trojúhelníku $XY S$ pak odpovídá bodu P ve stejnolehlosti podle středu S a s koef. $\frac{2}{3}$. Poněvadž body P vyplňují úsečku GH , vyplňují body T úsečku MN , která je stejnohlá k úsečce GH v uvedené stejnolehlosti.

Je-li obráceně T libovolný bod úsečky MN , snadno sestrojíme trojúhelník, mající v bodě T své těžiště. Nejprve určíme průsečík P přímky ST s úsečkou GH a v tomto



Obr. 76

bodě sestrojíme úsečku $XY \perp SP$ s krajními body na obvodě šestiúhelníku. Dokážeme, že $XY = XS = SY$.

Z tětiového čtyřúhelníku $XGPS$ plyne, že $\sphericalangle XSP = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, z tětiového čtyřúhelníku $PSHY$ plyne, že $\sphericalangle PHY = 30^\circ = \sphericalangle PSY$ (obvodové úhly nad týmž obloukem kružnice čtyřúhelníku opsané). Z vlastnosti úhlu $\sphericalangle XSP$, jehož velikost je 30° pak plyne: $SX = 2 \cdot XP = 2 \cdot PY$ a dále je $XP = PY$. Je tudíž trojúhelník takto sestrojený rovnostranný a jeho těžiště je bod T . Je-li velikost úsečky $AB = a$, je velikost úsečky $MN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Hledanou množinou všech těžišť trojúhelníků splňujících podmínky úlohy je pravidelný šestiúhelník $MNPQRU$, jehož vrcholy jsou těžiště rovnostranných trojúhelníků $SAB, SBC, SCD, SDE, SEF, SFA$.

C – II – 2b

Určete všechny dvojice přirozených čísel A, B s těmito vlastnostmi:

1. Obě jsou dvouciferná (v desítkové soustavě), přičemž B vznikne z A vzájemnou záměnou cifer.
2. Číslo $\sqrt{A^2 - B^2}$ je přirozené.

ŘEŠENÍ

Danou úlohu lze převést na tuto úlohu: Určete taková

čísla $x, y \in \{1, 2, \dots, 9\}$, že existuje přirozené číslo a , pro které platí

$$a^2 = (10x + y)^2 - (10y + x)^2.$$

Po úpravě dostáváme

$$a^2 = 99(x^2 - y^2) = 3^2 \cdot 11(x + y)(x - y). \quad (1)$$

Odtud vyplývá, že

$$x > y. \quad (2)$$

Z rovnosti (1) dále plyne, že aspoň jedno z čísel $x + y, x - y$ je násobkem čísla 11. Protože je

$$x - y \leq 9 - 1 = 8,$$

může být násobkem 11 jedině číslo $x + y$. Vzhledem k tomu, že

$$x + y \leq 9 + 9 = 18,$$

dostáváme pro hledaná čísla x, y rovnici

$$x + y = 11. \quad (3)$$

Pro naši úlohu mohou mít ovšem smysl jen ta řešení (x, y) rovnice (3), pro něž platí nerovnost (2) a $x, y \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Takovými řešeními rovnice (3) jsou pouze dvojice

$$(9, 2), \quad (8, 3), \quad (7, 4), \quad (6, 5). \quad (4)$$

Z rovnice (3) a rovnosti (1) plyne pro čísla x a y další podmínka: Číslo $x - y$ musí být druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Tuto podmínku splňuje z dvojic (4) jediné dvojice (6, 5). Řešením úlohy mohou tedy být jediné čísla $A = 65$ a $B = 56$. Skutečně

$$65^2 - 56^2 = 9 \cdot 121 = 33^2.$$

Závěr: Úloha má jediné řešení $A = 65$, $B = 56$.

C – II – 3a

Je dán rovnoramenný $\triangle ABC$ se základnou AB . Sestrojte body P, Q ležící po řadě na stranách AC, BC , pro které platí

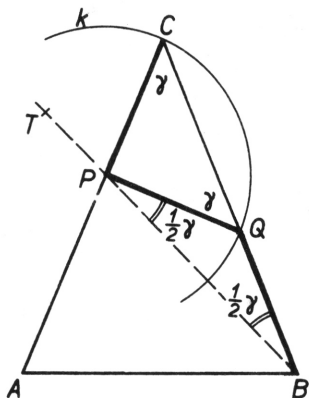
$$CP = PQ = QB. \quad (1)$$

Proveďte diskusi vzhledem k velikosti úhlu $\sphericalangle ACB$.

ŘEŠENÍ

Nejprve zjistíme, zda může platit $P = C$. V tomto případě by bylo $CP = 0$, takže z (1) by plynulo $Q = B$. Pak by však bylo $PQ = CB \neq 0$, tj. všechny rovnosti (1) by neplatily. Tedy $P \neq C$. Dále je třeba zjistit, zda je možné, aby bylo $P = A$. Pak z (1) a z toho, že $AC = BC$ plyne, že musí být $Q = C$. Pak $PQ = AC$, takže jedno řešení je nalezeno:

$$P = A \quad \text{a} \quad Q = C. \quad (2)$$



Obr. 77

Toto řešení vždy existuje. Hledejme řešení, kdy bod P leží uvnitř strany AC .

ROZBOR (viz obr. 77). Označme γ úhel $\sphericalangle ACB$. Podle podmínek úlohy je $CP = PQ$ a tedy také

$$\sphericalangle PCQ = \sphericalangle PQC = \gamma.$$

Dále je $PQ = QB$, a tedy

$$\sphericalangle QPB = \sphericalangle QBP = \frac{1}{2}\gamma,$$

protože $\sphericalangle PQC = \gamma$ je vnějším úhlem rovnoramenného $\triangle PQB$ se základnou PB .

Z rozboru vyplývá **konstrukce**. V polorovině BCA sestrojíme polopřímku BT takovou, že $\sphericalangle CBT = \frac{1}{2}\gamma$. Průsečíkem polopřímky BT a vnitřku úsečky AC je pak bod P . Sestrojíme kružnici $k = (P; r = PC)$. Její společný bod s úsečkou CB , jenž je různý od bodu C , je bod Q .

ZKOUŠKA. Z konstrukce plyne, že body P, Q leží po řadě na stranách AC, BC . Body C, Q leží na kružnici k se středem P , a proto $CP = PQ$. Dále v trojúhelníku CPB platí

$$\sphericalangle CPB = 180^\circ - \gamma - \frac{1}{2}\gamma = 180^\circ - \frac{3}{2}\gamma, \quad (3)$$

v trojúhelníku CPQ je

$$\sphericalangle CPQ = 180^\circ - 2\gamma. \quad (4)$$

Dosadíme-li (3) a (4) do rovnosti

$$\sphericalangle QPB = \sphericalangle CPB - \sphericalangle CPQ,$$

dostaneme

$$\sphericalangle QPB = \frac{1}{2}\gamma = \sphericalangle QBP.$$

Odtud plyne $PQ = QB$.

Sestrojené body P a Q mají všechny vlastnosti požadované textem úlohy.

DISKUSE. Úloha má vždy řešení (2). Další řešení může existovat, existuje-li společný bod vnitřku úsečky AC a polopřímky BT . K tomu je nutné a stačí, aby platilo

$$\frac{1}{2}\gamma < \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma).$$

tj.

$$\gamma < 90^\circ.$$

V tomto případě též existuje i průsečík $Q \neq C$ kružnice k a polopřímky CB . Zbývá ještě zjistit, zda tento bod Q je bodem úsečky CB . Bod Q je dokonce vnitřním bodem úsečky CB , neboť $\sphericalangle PQC > \sphericalangle PBC$.

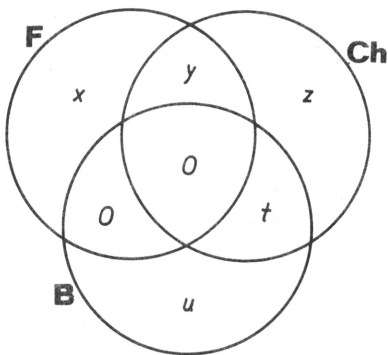
ZÁVĚR DISKUSE. V případě, že $\angle ACB = \gamma \geq 90^\circ$, má úloha jediné řešení – řešení (2). V případě, že $\angle ACB = \gamma < 90^\circ$, má úloha dvě řešení – mimo řešení (2) ještě další řešení, které lze sestavit výše uvedenou konstrukcí.

C – II – 3b

Žáci jedné školy se zúčastnili biologické, fyzikální a chemické olympiády. Účastníků FO bylo dvakrát tolik jako účastníků ChO a účastníků ChO třikrát tolik co účastníků BO. Jen jedné z těchto olympiád se zúčastnilo 12 žáků, dvou olympiád 4 žáci, ale FO a zároveň BO žádný; těch, kteří řešili jen BO, bylo právě tolik jako těch, kteří řešili zároveň ChO a BO. Určete, kolik žáků se zúčastnilo každé z uvedených soutěží a kolik bylo všech účastníků olympiád dohromady.

ŘEŠENÍ

Při sestavování podmínek úlohy uijeme množinového diagramu, označení viz na obr. 78. Platí tedy:



Obr. 78

$$x + z + u = 12 \quad (1)$$

$$y + t = 4 \quad (2)$$

$$x + y = 2(y + z + t) \quad (3)$$

$$y + z + t = 3(u + t) \quad (4)$$

$$u = t. \quad (5)$$

Dosazením za u podle (5) do zbývajících rovnic a úpravou dostaneme:

$$x + z + t = 12$$

$$y + t = 4, \quad \text{z čehož} \quad y = 4 - t$$

$$x - y - 2z - 2t = 0$$

$$y + z - 5t = 0.$$

Dosadíme za y :

$$x + z + t = 12, \quad \text{z čehož} \quad x = 12 - t - z$$

$$x - 2z - t = 4$$

$$z - 6t = -4.$$

Dosadíme za x :

$$3z + 2t = 8$$

$$z - 6t = -4, \quad \text{z čehož} \quad z = 6t - 4,$$

takže

$$20t = 20,$$

tj.

$$t = 1.$$

Zpětným dosazením dostaneme:

$$z = 2, \quad x = 9, \quad y = 3, \quad u = 1.$$

Zkouškou ověříme výpočet.

ODPOVĚĎ. FO se zúčastnilo 12 žáků, ChO 6 žáků a BO 2 žáci; všech účastníků bylo 16.

ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE Z

II. KOLA

Z-II-1

Petr a Milan jeli tramvají do kina, které je v ulici na trati tramvaje mezi stanicemi A a B . Poměr vzdáleností vchodu do kina od stanic A a B je $3 : 2$. Petr vystoupil na stanici A , Milan na stanici B . Šli stejnou průměrnou rychlostí a ke vchodu kina přišli oba v témže okamžiku.

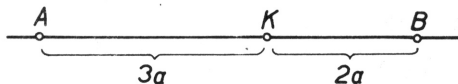
Vypočítejte, kolikrát byla průměrná rychlost jejich chůze menší než průměrná rychlost tramvaje mezi stanicemi A a B .

ŘEŠENÍ

Tramvaj zřejmě nejdříve přijela do stanice A . Jen tak je možné, aby chlapci přišli v též okamžik ke vchodu kina.

Vzdálenost zastávek A a B v kilometrech nechť je $5a$ (obr. 79). Průměrnou rychlost chůze chlapců v km/h označme v . Je-li průměrná rychlost tramvaje x -krát větší než průměrná rychlost chůze chlapců, pak je její rychlost xv km/h.

Doby cest chlapců ke vchodu kina měřme od okamžiku, kdy tramvaj zastavila ve stanici A . Pak platí



Obr. 79

$$t_A = \frac{3a}{v},$$

$$t_B = \frac{5a}{xv} + \frac{2a}{v}.$$

Odtud plyne

$$\frac{3a}{v} = \frac{5a}{xv} + \frac{2a}{v},$$

tj.

$$3 = \frac{5}{x} + 2, \quad \text{takže} \quad x = 5.$$

Snadno ověříme, že chlapci přijdou ke vchodu kina v též okamžik, má-li tramvaj pětkrát větší průměrnou rychlost než chlapci.

Závěr. Chlapci šli pětkrát menší průměrnou rychlostí, než byla průměrná rychlost tramvaje mezi stanicemi A a B .

Z-II-2

Je dán pravý úhel s vrcholem V a jeho vnitřní bod M . Bodem M je proložena libovolná přímka p tak, že obě ramena pravého úhlu protíná v různých bodech A a B . Označíme-li S_1 , resp. S_2 , obsah trojúhelníka VAM , resp. VBM , potom číslo

$$k = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$$

je stejné při každé poloze přímky p uvedených vlastností;
dokažte.

ŘEŠENÍ

Zavedeme toto označení: $a = BV$, $b = AV$, x a y jsou výšky trojúhelníka BMV (AMV) příslušné straně BV (AV) (viz obr. 80). Pak je

$$S_1 = \frac{1}{2}by, \quad S_2 = \frac{1}{2}ax$$

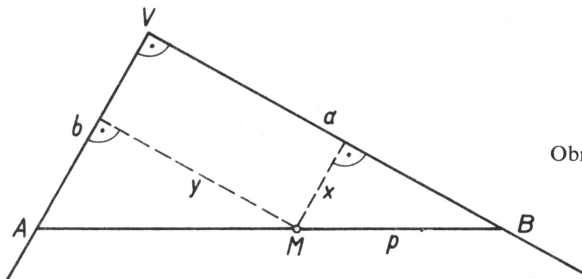
a

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}ab.$$

Dále platí:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{2}{by} + \frac{2}{ax} = \frac{2(ax + by)}{abxy} = \frac{2 \cdot 2S}{2S \cdot xy} = \frac{2}{xy}.$$

Ale součin xy nezávisí na volbě přímky p .



Obr. 80

Z-II-3

Sú dané celé čísla a, b , ktorých aritmetický priemer je celé číslo deliteľné tromi. Dokážte, že potom číslo

$$a(3a^2 + b^2)(a^3 - 2b^3)^3$$

je násobkom čísla 108.

RIEŠENIE

Podľa textu úlohy je $\frac{a+b}{2} = 3k$, kde k je celé číslo. Potom však $b = 6k - a$, a teda

$$\begin{aligned} 3a^2 + b^2 &= 3a^2 + 36k^2 - 12ka + a^2 = \\ &= 4a^2 - 12ak + 36k^2 = 4(a^2 - 3ak + 9k^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 - 2b^3 &= a^3 - 2(216k^3 - 108k^2a + 18ka^2 - a^3) = \\ &= 3(a^3 - 12ka^2 + 72k^2a - 144k^3), \end{aligned}$$

z čoho

$$\begin{aligned} &a(3a^2 + b^2)(a^3 - 2b^3)^3 = \\ &= 4 \cdot 3^3 a(a^2 - 3ak + 9k^2)(a^3 - 12ka^2 + 72k^2a - 144k^3)^3, \end{aligned}$$

čo je násobkom 108, ako bolo treba dokázať.

Z-II-4

Je dán trojuholník ABC , v němž má strana AB dĺžku a . Na polopřímce opačné k polopřímce AB leží bod D tak, že

$DA = na$, kde n je dané přirozené číslo. Nechť E je střed strany BC a F průsečík přímky DE se stranou AC . Určete obsah trojúhelníka CEF , jestliže obsah trojúhelníka ABC se rovná číslu P . (Proveďte výpočet nejdříve pro $n = 1$ a $n = 2$, potom pro libovolné n .)

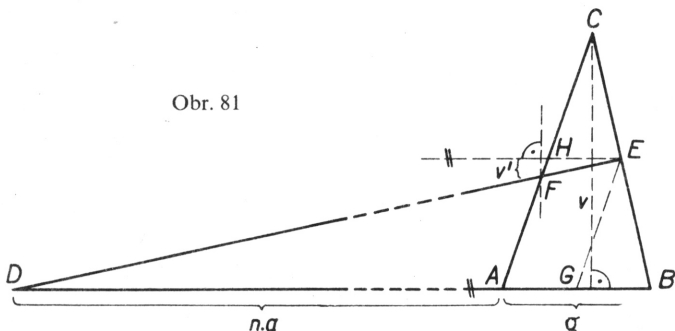
ŘEŠENÍ

Označme H střed strany AC (obr. 81). Úsečka HE je pak střední příčkou $\triangle ABC$, jež je rovnoběžná se stranou AB . Bod H je tedy vnitřní bod úsečky CF . Obsah $\triangle ECH$ je zřejmě $\frac{1}{4}P$. Pro obsah P' trojúhelníka CEF tedy platí

$$P' = \frac{1}{4}P + Q, \quad (1)$$

kde Q je obsah $\triangle EFH$. Úloha je tak převedena na úlohu určit obsah Q trojúhelníka EFH pomocí obsahu $\triangle ABC$. Protože víme, že $EH = \frac{1}{2}a$, je třeba určit výšku v' trojúhelníka EFH na stranu EH . Označme v výšku $\triangle ABC$ na stranu AB .

Obr. 81



a) Nechť $DA = a$. Podle věty uu je

$$\triangle EFH \sim \triangle DFA.$$

Bod F je těžištěm $\triangle DBC$, a proto pro výšku v_1 trojúhelníka DFA na stranu DA platí

$$v_1 = \frac{1}{3}v.$$

Tedy

$$v' = \frac{1}{3}v \frac{HE}{AD} = \frac{1}{3}v \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}v.$$

Pak

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{6}v = \frac{1}{12}P.$$

Podle (1) je

$$P' = \frac{1}{4}P + \frac{1}{12}P = \frac{1}{3}P.$$

b) Nechť $DA = 2a$. V tomto případě užijeme podobnosti trojúhelníků EFH a DEG (věta uu), kde G je střed strany AB . Trojúhelník DEG má zřejmě na stranu DG výšku $\frac{1}{2}v$. Platí tedy

$$v' = \frac{1}{2}v \frac{HE}{GD} = \frac{1}{2}v \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}v.$$

Tudíž

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{10}v = \frac{1}{20}P,$$

takže podle (1)

$$P' = \frac{1}{4}P + \frac{1}{20}P = \frac{3}{10}P.$$

c) Nechť $DA = na$, kde n je přirozené číslo. Podobně jako v části b) z podobnosti trojúhelníků EFH a DEG plyne

$$v' = \frac{1}{2}v \frac{HE}{GD} = \frac{1}{2}v \frac{1}{2n+1}.$$

Tedy

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}v \frac{1}{2n+1},$$

takže podle (1)

$$P' = \frac{1}{4}P + \frac{1}{4(2n+1)}P = \frac{n+1}{2(2n+1)}P.$$

V. Řešení soutěžních úloh III. kola kategorie A

A – III – 1

Je daná postupnost kladných čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ s touto vlastností: Pro každé $n \geq 2$ platí

$$a_{n+1} \cdot a_{n-1} \geq a_n^2. \quad (1)$$

Označme

$$b_n = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}. \quad (2)$$

Potom platí pro každé $n \geq 2$:

$$b_{n+1} \cdot b_{n-1} \geq b_n^2; \quad (3)$$

dokažte.

RIEŠENIE

Tvrdenie dokážeme metódou matematickej indukcie.

1. Pre $n = 2$ z (1) dostaneme

$$a_3 \cdot a_1 \geq a_2^2. \quad (4)$$

Keďže čísla a_i , $i = 1, 2, 3$ sú všetky kladné, dostaneme vynásobením nerovnosti (4) číslom a_2 : $a_1 a_2 a_3 \geq a_2^3$, z čoho po odmocnení máme

$$(a_1 a_2 a_3)^{1/3} \geq a_2. \quad (5)$$

Ak nerovnosť (5) vynásobíme číslom a_1 a použijeme (2) pre $n = 1, 2, 3$, dostaneme

$$b_1 \cdot b_3 \geq b_2^2,$$

čím sme dokázali platnosť (3) pre $n = 2$.

2. Nech teraz (3) platí pre nejaké prirodzené číslo $k \geq 2$, t.j.

$$\left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i \right)^{1/(k+1)} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i \right)^{1/(k-1)} \geq \left(\prod_{i=1}^k a_i^2 \right)^{1/k}. \quad (6)$$

Z nerovnosti (6) po umocnení na $k(k-1)(k+1)$ vzhľadom na to, že na oboch stranách sú kladné čísla, dostaneme

$$\left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i \right)^{k(k-1)} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i \right)^{k(k+1)} \geq \left(\prod_{i=1}^k a_i^2 \right)^{k^2-1} \quad (7)$$

Z nerovnosti (7) jednoduchou úpravou dostaneme

$$\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i \right)^{2k^2} \cdot (a_k \cdot a_{k+1})^{k^2-k} \geq \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i \right)^{2k^2-2} \cdot a_k^{2k^2-2},$$

z čoho po vydelení číslom $\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i \right)^{2k^2-2}$ a vynásobení $a_k^{2-k^2+k}$ vyplýva

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i \right)^2 \cdot a_{k+1}^{k^2-k} \geq a_k^{k^2+k}. \quad (8)$$

Ak nerovnosť (8) vynásobíme číslom $a_{k+2}^{k^2+k}$, dostaneme

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^2 \cdot a_{k+1}^{k^2-k} \cdot a_{k+2}^{k^2+k} \geq (a_k \cdot a_{k+2})^{k^2+k},$$

z čoho vyplýva, ak použijeme (1) pre $n = k + 1$:

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^2 \cdot a_{k+1}^{k^2-k} \cdot a_{k+2}^{k^2+k} \geq (a_{k+1})^{2k^2+2k}. \quad (9)$$

Nerovnosť (9) možno upraviť na tvar

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^2 \cdot (a_{k+2})^{(k+1)^2-(k+1)} \geq (a_{k+1})^{(k+1)^2+(k+1)-2},$$

z čoho po vynásobení číslom $\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{2(k+1)^2-2}$ a jednoduchšej úprave máme

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{2(k+1)^2} \cdot (a_{k+1} \cdot a_{k+2})^{(k+1)^2-(k+1)} \geq \\ &\geq \left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{2(k+1)^2-2} \cdot (a_{k+1})^{2(k+1)^2-2}. \end{aligned}$$

Z toho po vydelení číslom $\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{k^2+3k}$ a jednoduchšej úprave dostaneme

$$\left(\prod_{i=1}^{k+2} a_i\right)^{k(k+1)} \cdot \left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{(k+1)(k+2)} \geq \left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i\right)^{2k(k+2)}.$$

Z poslednej nerovnosti po umocnení na $1/k(k+1)(k+2)$ vzhľadom na (2) dostávame

$$b_{k+2} \cdot b_k \geq b_{k+1}^2.$$

Tým sme dokázali, že (3) platí pre $n = k + 1$.

Vzhľadom na 1. a 2. platí nerovnosť (3) pre každé prirodzené číslo n ako sme mali dokázať.

Riešil Jozef Širáň,
4.b tr. gymnázia Jura Hronca, Bratislava

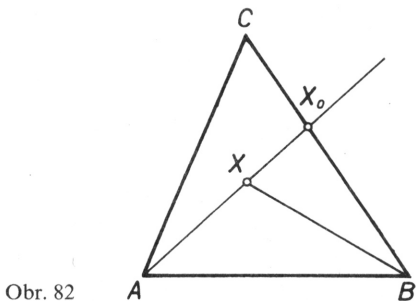
A – III – 2

Je daný trojuholník ABC . Pre každý bod X trojuholníka ABC označme $m(X)$ najmenšiu zo vzdialeností XA , XB , XC . Zostrojte všetky body X trojuholníka ABC , pre ktoré je $m(X)$ maximálna.

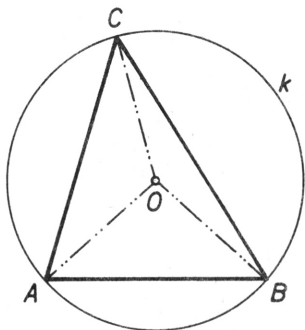
RIEŠENIE

Najskôr dokážeme pomocnú vetu: Pre každý bod $X \notin C$ trojuholníka ABC platí: $AX + BX < AC + BC$.

Označme X_0 priesečník polpriamky AX s úsečkou BC v prípade, keď X je vnútorný bod trojuholníka ABC (pozri obr. 82). Zrejme platí: $AX_0 < AC + CX_0$. Z toho priamo



Obr. 82



Obr. 83

vyplýva: $AX_0 + BX_0 < AC + CX_0 + BX_0 = AC + BC$. Keďže $BX < XX_0 + BX_0$, je $AX + BX < AX + XX_0 + BX_0 = AX_0 + BX_0$. Z nerovností $AX + BX < AX_0 + BX_0$ a $AX_0 + BX_0 < AC + BC$ priamo vyplýva správnosť dokazovanej nerovnosti v prípade, keď X je vnútorným bodom trojuholníka ABC . Pre body X ležiace na obvodě trojuholníka ABC je uvedená nerovnosť zrejme splnená.

1. Nech trojuholník ABC je ostrouhlý. Označme O stred jeho opísanej kružnice (pozri obr. 83). Nech pre bod $X \neq O$ ležiaci napr. v trojuholníku AOC platí $AX \geq r$ a súčasne $CX \geq r$. Potom aj $AX + CX \geq 2r = AO + CO$, čo je v spore s tvrdením pomocnej vety. Musí preto platiť buď $AX < r$ alebo $CX < r$. Pre bod O však platí $AO = BO = CO = r$. Je teda $m(O)$ maximálne.

2. Nech trojuholník ABC je tupouhlý s tupým uhlom pri vrchole C (pozri obr. 84). Označme b_0 väčšiu zo strán a, b trojuholníka ABC . Označme M priesečník osi strany b_0 so stranou c . Pre tupouhlý trojuholník zrejme platí $AM = MC < MB$. Je teda $m(M) = AM = MC = d$. Na

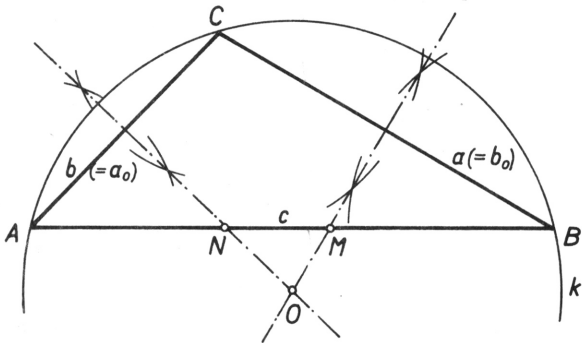
základe pomocnej vety dokážeme nepriamo, že pre ľubovoľný bod X ($X \notin M$) trojuholníka AMC platí $CX < d$ alebo $AX < d$.

Nech a_0 je menšia zo strán a, b trojuholníka ABC . Označme N priesečník osi strany a_0 so stranou c . Zrejme platí $a_0 \leq b_0$.

a) Ak je $a_0 < b_0$, je zrejmé tiež $CN < CM = d$ a bod N leží preto vo vnútri kružnice opísanej okolo bodu C s polomerom $CM = d$. Pre body X trojuholníka MNC rôzne od bodu C je teda $CX < d$. Na základe pomocnej vety vyššie použitým postupom ľahko dokážeme, že pre body X trojuholníka BNC platí buď $BX < d$ alebo $CX < d$. Maximálna je teda vzdialenosť $m(M)$.

b) Ak platí $a_0 = b_0 = a = b$, je trojuholník ABC rovno-
ramenný. V tomto prípade je $CM = CN$. Analogicky ako
v predchádzajúcom prípade ľahko dokážeme, že funkcia
 $m(X)$ nadobúda maximum v dvoch bodoch: M a N .

3. Ak trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom



Obr. 84

pri vrchole C , bude $m(X)$ maximálne zrejme pre stred strany AB , ktorý bude stredom opísanej kružnice trojuholníka ABC .

Záver: Ak ABC je ostrouhlý alebo pravouhlý trojuholník, je hľadaný bod práve jeden – stred opísanej kružnice.

Ak trojuholník ABC je tupouhlý nerovnoramenný, je hľadaným bodom bod M , ktorého konštrukcia je popísaná v časti **2a**.

V prípade rovnoramenného tupouhlého trojuholníka sú hľadané body dva, M a N – ich konštrukcia je popísaná v časti **2b**.

Riešil Ján Krajčík,

3.b gymnázia Jura Hronca, Bratislava

A – III – 3

Nech pre každé prirodzené číslo m , ktoré je v dekadickom zápise aspoň dvojciferné a má číslice navzájom rôzne, znamená $f(m)$ súčet všetkých prirodzených čísel rôznych od m , ktoré z čísla m dostaneme zmenou poradia jeho číslic (napríklad $f(302) = 320 + 023 + 032 + 230 + 203 = 808$).

Nájdite všetky prirodzené čísla x , pre ktoré platí

$$f(x) = 138\,012. \quad (1)$$

ŘEŠENÍ

Nejprve ukážeme, že číslo x splňujúci rovnici (1) musí byť štyřciferné. Pro dvojciferné číslo $x = 10x_1 + x_2$, $x_1 \neq x_2$, máme $f(x) = 10x_2 + x_1$, což nevyhovuje vztahu (1). Pro

trojčiferné číslo x s různými číslicemi lze $f(x)$ vyjádřit jako součet pěti přirozených čísel menších než 999. Je tedy $f(x) < 999 \cdot 5 = 4\,995 < 138\,012$. Kdyby číslo x bylo pětičiferné nebo mělo ještě větší počet (navzájem různých) číslic, mohli bychom je vyjádřit jako součet aspoň 119 sčítanců ($5! - 1 = 119$), z nichž každý by byl aspoň 01 234. Měli bychom $f(x) \geq 01\,234 \cdot 119 = 146\,846 > 138\,012$.

Zbývá probrat čtyřciferná čísla x s navzájem různými číslicemi, jež vyhovují vztahu (1). Tuto část řešení provedeme způsobem, který použil Ivo Semrád, žák 4.b třídy gymnázia v Opavě.

Položme $x = 1\,000x_1 + 100x_2 + 10x_3 + x_4$. Je vidět, že

$$f(x) + x = 6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \cdot 1\,111, \quad (2)$$

neboť mezi všemi permutacemi různých čísel x_1, x_2, x_3, x_4 je právě $(4 - 1)! = 6$ takových, které mají na téměř místě totéž číslo.

Po dosazení do (2) dostáváme

$$138\,012 + x = 6\,666(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

tj.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 + \frac{4\,692 + x}{6\,666}. \quad (3)$$

Číslo x je čtyřciferné, a proto čitatel na pravé straně rovnice (3) je menší než 15 000, takže tento zlomek je roven buď 1 nebo 2. V prvním případě

$$x' = 6\,666 - 4\,692 = 1\,974,$$

v druhém případě

$$x'' = 2 \cdot 6\,666 - 4\,692 = 8\,640.$$

Rovnici (3) vyhovuje pouze číslo 1 974. Číslo 8 640 rovnici (3) nevyhovuje, a proto není řešením dané úlohy.

Pro číslo 1 974 podle rovnosti (2) dostáváme, že

$$f(1\,974) = 6 \cdot 21 \cdot 1\,111 - 1\,974 = 138\,012.$$

Číslo 1 974 je tedy jediným řešením dané úlohy.

A – III – 4

Nech $\mathcal{M}$ je množina všech polynomických funkcí f stupňa najviac 3

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (1)$$

pre ktoré platí

$$\forall x \in \langle -1, 1 \rangle; \quad |f(x)| \leq 1.$$

Dokážte, že existuje kladné číslo k tak, že

$$\forall f \in \mathcal{M}; \quad |a| \leq k. \quad (2)$$

Určte najmenšie kladné číslo k tejto vlastnosti.

ŘEŠENÍ

Pro každou funkci $f \in \mathcal{M}$ platí:

$$|f(1)| = |a + b + c + d| \leq 1, \quad (3)$$

$$|f(-1)| = |-a + b - c + d| \leq 1, \quad (4)$$

$$|f(\frac{1}{2})| = |\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c + d| \leq 1, \quad (5)$$

$$|f(-\frac{1}{2})| = |-\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}c + d| \leq 1. \quad (6)$$

Dále budeme používat věty: Nechť x, y, z, v jsou libovolná reálná čísla. Jestliže $|x| \leq z$ a zároveň $|y| \leq v$, pak $|x + y| \leq z + v$.

Z nerovností (3) a (4) plyne podle zmíněné věty:

$$2. |a + c| \leq 2,$$

tj.

$$|a + c| \leq 1. \quad (7)$$

Z nerovností (5) a (6) plyne:

$$2. |\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}c| \leq 2,$$

$$|\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}c| \leq 1,$$

neboli

$$|-\frac{1}{4}a - c| \leq 2. \quad (8)$$

Z nerovností (7) a (8) opět podle zmíněné věty dostáváme

$$|a - \frac{1}{4}a| \leq 3,$$

tj.

$$|a| \leq 4.$$

Tím je dokázána *existence* čísla k , které má vlastnost (2).

Tuto vlastnost má každé číslo

$$k \geq 4.$$

Nyní ukážeme, že nejmenší kladné číslo k požadované vlastnosti je $k = 4$. Je třeba dokázat, že množina $\mathcal{M}$ obsahuje aspoň jednu polynomickou funkci (1), jejíž koeficient $a = 4$.

Uvažujme mnohočlen

$$g(x) = 4x^3 - 3x.$$

Potom

$$g'(x) = 12x^2 - 3.$$

Mnohočlen $g(x)$ tedy může mít lokální extrém v bodech $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Platí

$$g''(x) = 24x,$$

takže $g''(\frac{1}{2}) = 12 > 0$ a $g''(-\frac{1}{2}) = -12 < 0$. V bodě $x_1 = \frac{1}{2}$ má mnohočlen $g(x)$ lokální minimum, v bodě $x_2 = -\frac{1}{2}$ lokální maximum.

Dále platí

$$g(\frac{1}{2}) = -1, \quad g(-\frac{1}{2}) = 1,$$

$$g(1) = 1, \quad g(-1) = -1.$$

Mnohočlen $g(x)$ nabývá v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ nejmenší hodnoty -1 v bodech $\frac{1}{2}$ a -1 , největší hodnoty 1 v bodech $-\frac{1}{2}$ a 1 . Tedy pro každé $x \in \langle -1, 1 \rangle$ je $|g(x)| \leq 1$, tj.

$$g \in \mathcal{M}.$$

Tím je dokázáno, že $k = 4$ je nejmenší číslo k , jež má vlastnost (2).

Řešil Jiří Navrátil,
žák 1.a gymnázia v Olomouci-Hejčíně

A-III-5

Je dána kružnice a do ní je vepsán šestiúhelník $ABCDEF$ takový, že

$$AB = BC, \quad CD = DE, \quad EF = FA. \quad (1)$$

Dokažte, že obsah trojúhelníka ACE není větší než obsah trojúhelníka BDF . Kdy platí rovnost?

ŘEŠENÍ

PRVNÍ ZPŮSOB. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$AB \leq CD \leq EF. \quad (2)$$

Trojúhelník ACE otočme kolem středu S kružnice k tak, aby $A \rightarrow B$ (viz obr. 85); otočený trojúhelník označme $A'C'E'$. Pak $CE \parallel A'E'$, neboť vzdálenost otočených vrcholů

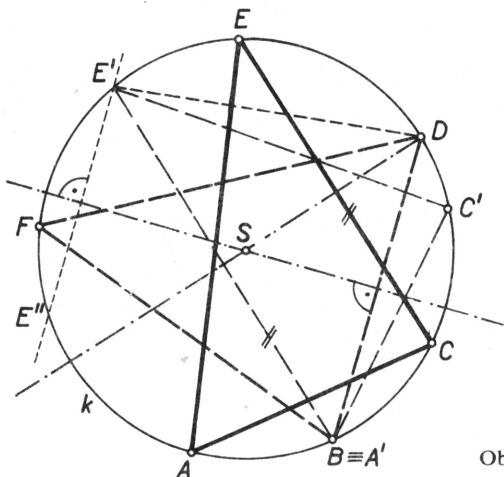
$$EE' = AA' = AB;$$

podle zadání

$$AB = BC = A'C,$$

takže

$$A'C = EE'.$$



Obr. 85

Protože tyto shodné úsečky jsou v jedné polorovině vyřáté přímkou CE , je $A'CEE'$ rovnoramenný lichoběžník.

Přímka SD je tedy osou tětv CE i $A'E'$. Je patrné, že pro obsahy trojúhelníků ACE , $A'C'E'$, $A'DE'$ platí

$$P_{ACE} = P_{A'C'E'} \leq P_{A'DE'}. \quad (3)$$

Trojúhelníky $A'C'E'$ a $A'DE'$ mají totiž společnou stranu $A'E'$ a výška příslušná k této straně je v $\triangle A'C'E'$ menší nebo rovna výšce na tuto stranu v $\triangle A'DE'$.

Nyní sestrojme bod E'' souměrně sdružený s bodem E' dle osy úsečky $A'D$. Nad tětvou DE' jsou dvě tětivy $E'E$ a ED . Nyní jsou opět nad tětvou $A'E''$ dvě tětivy, přičemž $AA' = EE'$. Ze shodnosti vyplývá, že i $AE'' = DE$. Podle (1) a (2) dostáváme $AE'' \leq AF$. Protože však z předpokladu (2)

vyplývá, že $EE' = AB \leq EF$, lze vzhledem k tomu, že body E' , E'' a F leží v téže polorovině určené přímkou AE , vyslovit závěr, že v případě $E' = E''$ je $F = E' = E''$, v případě $E' \neq E''$ leží bod F na oblouku kružnice k určeném body E'' , E' a neobsahujícím bod A . V tomto případě je $E'E' \parallel A'D$.

Výška $\triangle A'DE'$ na stranu $A'D$ je tedy menší nebo rovna výšce $\triangle A'DF$ na stranu $A'D$. Tedy pro obsahy trojúhelníků $A'DE'$, $A'DF$ a BDF platí

$$P_{A'DE'} \leq P_{A'DF} = P_{BDF}. \quad (4)$$

Z nerovností (3) a (4) vyplývá, že

$$P_{ACE} \leq P_{BDF}. \quad (5)$$

Z postupu je patrné, že rovnost v (5) nastane, právě když bude

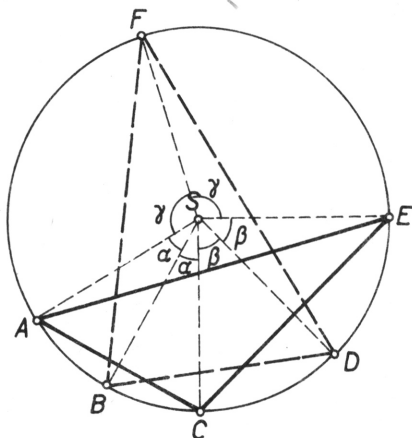
$$C' = D \quad \text{a} \quad E' = F,$$

tedy půjde-li o pravidelný šestiúhelník.

Řešil *Josef Pavel*,
žák 1.a třídy gymnázia v Rychnově nad Kněžnou

DRUHÝ ZPŮSOB. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že daná kružnice má poloměr 1. Střed dané kružnice (obr. 86) označíme S . Dále zavedeme označení úhlů:

$$\begin{aligned} \sphericalangle ASB &= \sphericalangle BSC = \alpha, & \sphericalangle CSD &= \sphericalangle DSE = \beta, \\ \sphericalangle ESF &= \sphericalangle FSA = \gamma. \end{aligned}$$



Obr. 86

Zřejmě platí

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi,$$

neboli

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Z toho plyne, že úhly α, β, γ leží v intervalu $(0, \pi)$.

Nyní vyjádříme obsahy trojúhelníků ACE a BDF pomocí α, β, γ :

$$\begin{aligned} P_{ACE} &= \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = \\ &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) + \\ &\quad + \sin(\gamma + \alpha) \cos(\gamma - \alpha)], \end{aligned}$$

$$P_{BDF} = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha)].$$

Tyto rovnosti platí pro každou polohu bodu S vzhledem k trojúhelníkům ACE a BDF .

Máme dokázat nerovnost:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) + \\ & \quad + \sin(\gamma + \alpha) \cos(\gamma - \alpha)] \leq \\ & \leq \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Tuto nerovnost přepíšeme do tvaru:

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha + \beta) \cdot [1 - \cos(\alpha - \beta)] + \\ & + \sin(\beta + \gamma) \cdot [1 - \cos(\beta - \gamma)] + \\ & + \sin(\gamma + \alpha) \cdot [1 - \cos(\gamma - \alpha)] \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Protože $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, platí

$$\sin(\alpha + \beta) > 0, \quad \sin(\beta + \gamma) > 0, \quad \sin(\gamma + \alpha) > 0.$$

Výrazy v lomených závorkách na levé straně nerovnosti (2) jsou zřejmě nezáporné; to znamená, že nerovnost (2) a tedy také (1) je vždy splněna.

Rovnost v (2) a v (1) může nastat tehdy a jen tehdy, když platí

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \gamma) = \cos(\gamma - \alpha) = 1.$$

Protože však $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, nastane rovnost právě když

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}\pi,$$

tj. když šestiúhelník $ABCDEF$ je pravidelný.

Řešil Jiří Navrátil,
žák 1.a třídy gymnázia v Olomouci-Hejčíně

V rovině ϱ je dán jednotkový čtverec $\mathcal{Q}$. Označme $\mathcal{Q}_X$ čtverec, který vznikne otočením čtverce $\mathcal{Q}$ kolem bodu X roviny ϱ o pravý úhel v kladném smyslu. Určete množinu všech takových bodů X roviny ϱ , pro které je obsah sjednocení $\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}_X$ roven nejvýše 1,5.

ŘEŠENÍ

Podmínka vyslovená v textu úlohy je ekvivalentní s podmínkou, že obsah $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_X$ je aspoň 0,5; pro obsahy platí totiž — jak známo — vztah

$$\bar{\mathcal{Q}} + \bar{\mathcal{Q}}_X = \overline{\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_X} + \overline{\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}_X}.$$

Klíčem k řešení je věta: Nechť v rovině ϱ leží čtverce $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{Q}'$, které nejsou totožné. Pak v rovině ϱ existuje takový bod X , že čtverec $\mathcal{Q}'$ je obrazem čtverce $\mathcal{Q}$ v otočení kolem bodu X o pravý úhel v kladném smyslu, právě když existuje rovnoběžné posunutí, které převádí čtverec $\mathcal{Q}$ ve čtverec $\mathcal{Q}'$. Tuto větu si jistě čtenář sám snadno dokáže.

Zvolme soustavu souřadnic tak, aby počátek byl střed čtverce $\mathcal{Q}$, strany obou čtverců $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{Q}_X$ rovnoběžné s osami souřadnic. Vyšetřujme středy $[\xi, \eta]$ čtverců $\mathcal{Q}_X$ nejprve v prvním kvadrantu. Střed $[\xi, \eta]$ určitě náleží čtverci $\mathcal{Q}$, neboť jinak by bylo $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_X < 0,5$ proti předpokladu. Je tedy

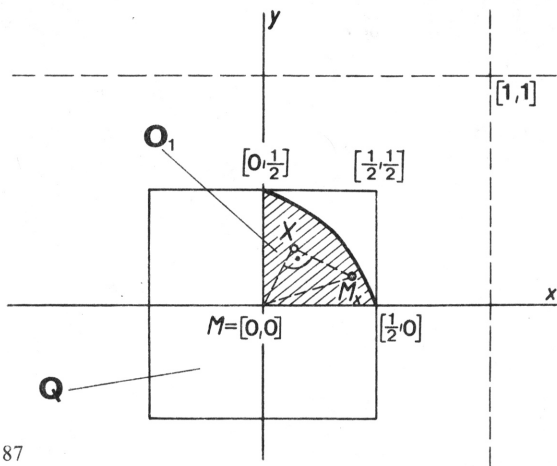
$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Průnik $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_x$ je pravoúhelník o stranách $1 - \xi$, $1 - \eta$; je-li p jeho obsah, platí

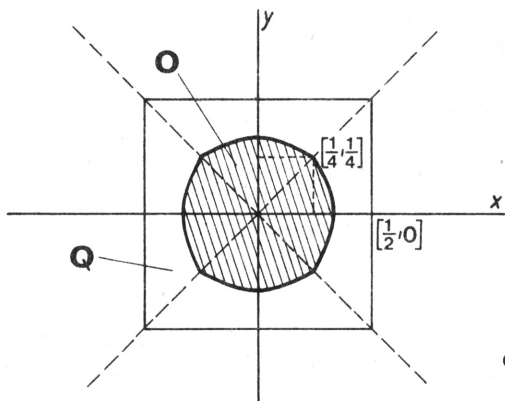
$$(1 - \xi)(1 - \eta) = p \quad \left(\frac{1}{2} \leq p \leq 1\right). \quad (2)$$

Vztahy (1), (2) jsou analytickým vyjádřením oblouku rovnosé hyperboly, která má střed v bodě $[1, 1]$, za asymptoty má přímky $\xi = 1$, $\eta = 1$, vrchol $[1 - \sqrt{p}, 1 - \sqrt{p}]$ a osy souřadnic protíná v bodech $[0, 1 - p]$, $[1 - p, 0]$. Protože je $p \geq \frac{1}{2}$, je $\sqrt{p} \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $1 - \sqrt{p} \leq 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Probíhá-li číslo p interval $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$, pak oblouky hyperbol o analytickém vyjádření (1), (2) vyplní obrazec $\mathcal{O}_1$ vyšrafovaný na obr. 87. Z podmíněk (1), (2) a výše uvedené věty vyplývá, že obrazec $\mathcal{O}_1$ je množinou středů všech čtverců $\mathcal{Q}_x$, jejichž středy leží v 1. kvadrantu.

Střed M_x čtverce $\mathcal{Q}_x$ vznikne ze středu M čtverce $\mathcal{Q}$ oto-



Obr. 87



Obr. 88

čením kolem bodu X o 90° v kladném smyslu. Proto vznikne bod X z bodu M_X otočením kolem středu M o 45° v kladném smyslu a zmenšením vzdáleností MM_X v poměru $\sqrt{2}:1$. Otočený a zmenšený sektor k sektoru $\mathcal{O}_1$ je naznačen na obr. šrafováním.

Ostatní kvadranty se doplní pomocí symetrií. Množinou všech bodů X , které mají vlastnost uvedenou v textu úlohy, je obrazec $\mathcal{O}$, jehož obvod je na obr. 88 vytažen tlustě.

VI. Správa o XVI. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. ORGANIZÁCIA A PRIEBEH SÚŤAŽE

O starostlivej organizačnej príprave XVI. MMO najlepšie svedčí skutočnosť, že už počas XV. MMO v júli 1973 v Moskve dostali vedúci zúčastnených delegácií od vedenia delegácie NDR jej rámcový program a organizačný poriadok súťaže. Samotný priebeh XVI. MMO len potvrdil neobyčajnú pozornosť, ktorú súdruhovia z NDR jej organizácii venovali. Poriadateľmi súťaže, ktorá sa konala od 4. do 17. júla 1974 boli Ministerstvo školstva NDR, Matematická spoločnosť NDR (Mathematische Gesellschaft der DDR) a Ústredný výbor FDJ (mládežnícka organizácia NDR). Vlastná súťaž sa konala v krajskom meste Erfurte na juhozápade NDR a záver so slávnostným vyhlásením výsledkov bol v hlavnom meste NDR – Berlíne.

Nielen veľmi dobrou organizáciou, ale aj počtom zúčastnených krajín patrila XVI. MMO medzi najvydarenejšie z doterajších medzinárodných stretnutí mladých matematických nádejí. K družstvám 16 krajín, ktoré sa zúčastnili XV. MMO v Moskve pribudli ako noví účastníci MMO družstvá USA a Vietnamskej demokratickej republiky. Na XVI. MMO do NDR vyslalo teda svoje družstvá týchto 18 krajín: Rakúsko (A), Bulharsko (BG), Kuba (C), ČSSR

(CS), NDR (DDR), Francúzsko (F), Veľká Británia (GB), Maďarsko (H), Mongolsko (M), Holandsko (NL), Poľsko (PL), Rumunsko (R), Švédsko (S), Fínsko (SF), ZSSR (SU), USA (USA), Vietnamská demokratická republika (VN), a Juhoslávia (YU). S výnimkou Kuby (7 žiakov) a VDR (5 žiakov) boli všetky družstvá osemčlenné, ako to stanovoval organizačný poriadok súťaže. Celkovo na XVI. MMO súťažilo teda 140 žiakov.

Predsedom organizačného výboru olympiády bol pracovník Ministerstva školstva NDR, tajomník ústredného výboru olympiád mladých matematikov NDR a člen predsedníctva Matematickej spoločnosti NDR s. *Herbert Titze* a jeho zástupcom s. *Gerhard Kleinfeld*, pracovník odboru školstva rady kraja v Lipsku.

Prezidentom medzinárodnej jury súťaže, ktorú tvorili vedúci jednotlivých delegácií zúčastnených krajín, bol *prof. dr. Wolfgang Engel*, predseda Matematickej spoločnosti NDR a riaditeľ sekcie matematiky na univerzite v Rostocku. Jeho zástupcom bol *prof. dr. Helmut Bausch*, vedúci oddelenia matematiky a prírodných vied na Ingenieurhochschule Berlín-Wartenberg a predseda ústredného výboru olympiád mladých matematikov NDR.

Vedúci delegácií sa schádzali do Erfurtu vo štvrtok 4. 7. 1974. Hneď po príchode na železničnú stanicu či letisko ich organizátori odviezli do neďalekého Weimaru (23 km), strediska nemeckej klasiky a humanistických tradícií, kde boli ubytovaní v hoteli Elephant. Na zoznamovacej večeri v reštaurácii hotela sa stretávali väčšinou starí známi z predchádzajúcich MMO.

Jury pracovala v priestoroch Hochschule für Architektur und Bauwesen vo Weimare. Na prvom zasadnutí v piatok 5. 7. prezident jury *prof. dr. Engel* privítal vedúcich delegácií zúčastnených krajín, najmä tých, ktoré sa MO zúčastňovali po prvý raz (VDR a USA), zaželel im úspešnú prácu a príjemný pobyt v NDR a informoval, že na XVI. MMO bolo pozvané tiež Taliansko, ktoré aj prisľúbilo účasť, ale v poslednej chvíli sa ospravednilo. Členov jury v krátkom prejave pozdravil tiež prorektor Hochschule für Architektur und Bauwesen *prof. dr. Fritsch*. V pracovnej časti 1. zasadnutia podal *prof. dr. Engel* krátke vysvetlenie k programu XVI. MMO, predstavil svojich spolupracovníkov z NDR – členov komisie pre úlohy, prekladateľov a ďalších a prečítal text telegramu, ktorý účastníkom XVI. MMO poslal *I. S. Petrakov* (ZSSR) – účastník všetkých MMO od IV. po XV. a spoluautor úspešnej publikácie o MMO, známej aj u nás.

Členovia komisie pre úlohy (*prof. dr. G. Geise, prof. dr. U. Pirl* a *doc. dr. L. Stammer*) vybrali z cca 50 navrhnutých úloh došlých do organizátormi stanoveného termínu (15. 4.) dva varianty po 6 úloh, ktorých texty s riešeniami dostali vedúci delegácií vo štvrtok (4. 7.) popoludní. Pri výbere vychádzali z toho, aby každý variant obsahoval úlohy z rôznych oblastí matematiky, ktoré by boli pôvodné a pokiaľ možno rôznej obťažnosti. Do prvého variantu zaradili pomerne jednoduchý hlavolam (USA), zaujímavú úlohu na odhad nekonečného súčtu (PL), netradičnú úlohu o mnohochlenoch s celočíselnými koeficientami (S), veľmi peknú dôkazovú úlohu na odhad minima istej konečnej množiny

reálnych čísel (SU), obťažne formulovateľnú úlohu na dôkaz existencie zhodných trojuholníkov v istom nekonečnom systéme trojuholníkov se spoločnou opísanou kružnicou (GB) a úlohu zo školskej teórie čísel využívajúcu určité prvky kombinatoriky (R). Druhý variant obsahoval dôkazovú úlohu zo školskej teórie čísel tradičného charakteru (PL), úlohu na najdenie množiny hodnôt istej homogénnej funkcie štyroch reálnych premenných (NL), dôkaz identity založený na použití trigonometrických funkcií (C), pomerne jednoduchú úlohu z klasickej planimetrie (SF), zaujímavú a nie veľmi náročnú úlohu na pokrytie (BG) a konečne veľmi peknú, ale značne náročnú úlohu kombinatorického charakteru (SU).

Základom pre diskusiu mal byť prvý navrhnutý variant. Už v úvode diskusie upozornil však vedúci poľskej delegácie *prof. Małkowski* na to, že do neho zaradená poľská úloha bola medzičasom publikovaná v Gardnerovej knihe, ktorej preklad vyšiel v ZSSR. Na sobotňajšom zasadnutí jury (6. 7.) prečítal vedúci maďarskej delegácie *prof. Hódi* text úlohy z maďarskej olympiády, ktorá bola v podstate zovšeobecnením sovietskej úlohy z prvého variantu. Vzhľadom na požiadavku pôvodnosti bolo preto nutné poľskú a sovietskú úlohu z prvého variantu vynechať. Keďže viacerí vedúci delegácií namietali proti zaradeniu britskej úlohy, ktorá sa im zdala príliš obťažná a náročná na hodnotenie riešení a väčšina členov jury sa napokon vyslovila za jej nahradenie fínskou úlohou z druhého variantu, bol po doplnení tohto výberu bulharskou a holandskou úlohou z druhého variantu na záver sobotného predpoludňajšieho zasadnutia jury jednomyseľne prijatý nižšie uvedený komplex súťažných úloh.

Formulácii textov úloh v rokových jazykoch (nemčina, ruština, angličtina, francúzština), ktorá patrí už tradične k najnáročnejším povinnostiam jury, boli venované dve zasadnutia jury: v sobotu 6. 7. popoludní a v nedeľu 7. 7. predpoludním. Pri nej bol podstatne zmenený najmä pôvodný text americkej úlohy. Na záver nedeľného predpoludňajšieho zasadnutia schválila jury jednomyseľne návrh vedúceho československej delegácie na rozdelenie úloh pre oba súťažné dni ako aj maximálne počty bodov za úplné riešenie jednotlivých úloh. Na riešenie každej trojice úloh boli stanovené 4 hodiny čistého času.

S históriou a pamätihodnosťami Weimaru sa členovia jury zoznámili v piatok 5. 7. popoludní počas prednášky doplnenej premietaním diapozitívov v Goetheho múzeu a počas prechádzok po meste vo voľnom čase. V piatok 5. 7. večer podávala pre členov jury a organizátorov XVI. MMO večeru Mathematische Gesellschaft der DDR. Prehovoril na nej predseda spoločnosti *prof. dr. Engel* a za zahraničných hostí vedúci sov. delegácie *doc. Skvorcov*.

Nedeľňajšieho zasadnutia jury sa zúčastnili už aj zástupcovia vedúcich delegácií, ktorí mali svoje družstvá priviesť do Erfurtu najneskoršie v sobotu 6. 7. Žiaci boli ubytovaní v modernom internáte Pädagogische Hochschule Dr. Theodor Neubauer v Erfurte, zatiaľ čo zástupcovia vedúcich delegácií sa ubytovali spoločne se svojimi vedúcimi vo Weimare. O žiakov jednotlivých družstev sa po celý čas pobytu v NDR starali okrem tlmočníkov aj nemeckí sprievodcovia – členovia FDJ.

Na vedúcich delegácií a ich zástupcov čakala v nedeľu popoludní náročná úloha prekladu textov úloh do materčiny

žiakov a ich príprava na rozmnoženie. Po prvý raz na MMO bola pri rozmnožení textov úloh použitá moderná technika (xerox).

Slávnostné otvorenie XVI. MMO sa uskutočnilo v pondelok 8. 7. ráno v aule Pädagogische Hochschule Dr. Theodor Neubauer v Erfurte. Prezident jury *prof. Engel* na ňom v krátkom prejave privítal nám. min. školstva NDR *Wernera Engsta* a ďalších čestných hostí, vedúcich delegácií zúčastnených krajín a najmä účastníkov súťaže, ktorým zaželel veľa úspechov pri riešení súťažných úloh.

V dvoch štvorhodinových klauzúrach čakali na nich nasledujúce úlohy:

PRVÝ DEŇ SÚŤAŽE — 8. JÚLA 1974

1. Traja hráči A , B a C hrajú hru, pri ktorej používajú tri hracie karty. Na každej z týchto kariet je napísané celé číslo: na prvej p , na druhej q , na tretej r , pričom platí $0 < p < q < r$. Pri každom kole hry sa karty zamiešajú a každý hráč dostane jednu z nich. Potom kartu vráti a dostane za ňu toľko guľčiek, koľko udáva na nej napísané číslo.

Hra trvala N kol, $N \geq 2$. Na konci hry mal hráč A celkom 20 guľčiek, hráč B 10 a hráč C 9 guľčiek.

Ak viete, že v poslednom kole hráč B dostal r guľčiek, určite, ktorý z hráčov dostal v prvom kole q guľčiek. (USA, 5 bodov)

2. Označme veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC pri vrcholoch A, B, C v uvedenom poradí α, β, γ .

Dokážte, že nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby na úsečke AB existoval bod D tak, že dĺžka úsečky CD

je geometrickým priemerom dĺžek AD a BD je splnenie nerovnosti

$$\sin \alpha \sin \beta \leq \sin^2 \frac{1}{2}\gamma.$$

(Fínsko, 6 bodov)

3. Dokážte, že pre žiadne prirodzené číslo n nie je číslo

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$$

deliteľné číslom 5. (Rumunsko, 8 bodov)

DRUHÝ DEŇ SÚŤAŽE — 9. JÚLA 1974

4. Rozdeľme šachovnicu pozostávajúcu z 8×8 polí na p neprekrývajúcich sa pravouhlých rovnobežníkov. Uvažujme o všetkých takýchto rozdeleniach šachovnice, pre ktoré platia nasledujúce podmienky:

a) Každý z pravouhlých rovnobežníkov pozostáva z celých polí a obsahuje bielych polí práve toľko ako čiernych.

b) Ak a_i znamená počet bielych polí na i -tom rovnobežníku, potom platí: $a_1 < a_2 < \dots < a_p$.

Nájdite najväčšie číslo p , pre ktoré je také rozdelenie šachovnice možné. Pre toto p určite všetky postupnosti $a_1, a_2, \dots, a_p$, pre ktoré možno také rozdelenie šachovnice realizovať. (Bulharsko, 6 bodov)

5. Určite množinu hodnôt, ktoré môže nadobúdať súčet

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d},$$

keď a, b, c, d sú ľubovoľné kladné reálne čísla. (Holandsko, 7 bodov)

6. Nech P je mnohočlen s celočíselnými koeficientami, ktorý nie je identicky rovný konštante, a nech $n(P)$ je počet všetkých navzájom rôznych celých čísel k , pre ktoré platí: $[P(k)]^2 = 1$.

Dokážte, že

$$n(P) - \deg(P) \leq 2,$$

kde $\deg(P)$ znamená stupeň mnohočlena P . (Švédsko, 8 bodov)

V zátvorke za textom úlohy je uvedené, ktorá krajina úlohu navrhla a maximálny počet bodov, ktorý bolo možné získať za úplné riešenie úlohy. Tieto údaje však žiakom pri súťaži oznámené neboli. Počas súťaže boli žiaci rozdelení do 8 učební, v každej z nich bol najviac jeden príslušník každého družstva. Po oba súťažné dni najneskoršie pol hodiny po obdržaní textov mohli žiaci predkladať písomné otázky na prípadné nejasnosti v textoch. Na tieto otázky po predchádzajúcom prerokovaní v jury písomne odpovedali vedúci delegácií.

Vedúci delegácií a ich zástupcovia sa mohli po otvorení súťaže 8. 7. počas krátkej autokarovej exkurzie aspoň čiastočne zoznámiť s dejiskom XVI. MMO, dvestotisícovým krajským mestom Erfurtom, miestom tradičných medzinárodných výstav kvetov. Po nej sa v hoteli Erfurter Hof zúčastnili na obede, ktorý pri príležitosti XVI. MMO podával predseda rady kraja Erfurt s. *Gothe*. Po návratu do Weimaru už na nich v Hochschule für Architektur und

Bauwesen, kde mala každá delegácia k dispozícii jednu učebnu, čakali riešenia prvých troch úloh, aby začali s ich korektúrami a hodnotením. Tejto práci, ku ktorej sa v utorok 9. 7. pridružili korektúry a hodnotenie riešení ďalšej trojice úloh ako aj koordinácia hodnotení, sa venovali až do štvrtku 11. 7. večer. Počas korektúr a koordinácie sa jury zišla na jednom spoločnom zasadnutí s koordinátormi (9. 7. večer), na ktorom sa ujasnili niektoré kritériá hodnotenia riešení.

Už pri svojom príchode do Weimaru dostali vedúci delegácií presný časový plán koordinácie jednotlivých úloh, ktorý sa dôsledne dodržiaval. Riešenia každej úlohy koordinovala trojica matematikov NDR (1 — *dr. Bartschová, dr. Rehm, Schiemann*; 2 — *doc. dr. Schröder, dr. Sommerfeld, dr. Noacková*; 3 — *dr. Lüders, dr. Harnau, dr. Riedewald*; 4 — *dr. Drews, Germer, dr. Kummer*; 5 — *dr. Seifert, prof. dr. Wintgen, dr. Küchler*; 6 — *dr. Zacharias, doc. dr. Rosenbaum, dr. Schwarz*), medzi ktorými boli aj dvaja úspešní účastníci predchádzajúcich MMO. Riešenia žiakov družstva NDR — ako je to už v prípade družstva poriadajúcej krajiny tradičné — koordinovali vedúci delegácií tých krajín, ktoré navrhli úlohy.

Pri koordinácii hodnotení sa nevyskytli žiadné vážnejšie nedorozumenia, takže jury mala pri svojom záverečnom zasadnutí, ktoré sa konalo v piatok 12. 7. predpoludním, uľahčenú úlohu. Najskôr jednomyseľne súhlasila, aby sa v prípade jedného rumunského žiaka, ktorý mal v čase súťaže už viac než 20 rokov, urobila výnimka a aby bol ponechaný v súťaži, keď vedenie rumunskej delegácie ubez-

pečilo, že je žiakom strednej školy. Potom hlavní koordinátori jednotlivých úloh stručne zhodnotili dosiahnuté výsledky. Stanovenie hraníc dosiahnutých bodov pre udelenie cien uľahčilo tentoraz ustanovenie organizačného poriadku, podľa ktorého nemal počet odmenených v zásade prekročiť polovicu všetkých účastníkov a počty prvých, druhých a tretích cien mali byť, pokiaľ možno, v pomere 1:2:3. Vychádzajúc z tohto ustanovenia rozhodla jury o hraniciach cien takto: I. cena od 40 do 38 bodov, II. cena od 37 do 30 bodov a III. cena od 29 do 23 bodov. Znamenalo to, že 10 žiakov dostane I., 24 II. a 37 III. cenu, čo je spolu 71 odmenených zo 140 účastníkov XVI. MMO.

Napokon jury prerokovala 4 návrhy na udelenie diplomov za originálne a zvlášť elegantné riešenia. Jeden z nich (jednému z maďarských žiakov za riešenie 2. úlohy) zamietla a ostatné tri (jednému žiakovi z družstva Švédska za riešenie 5. úlohy a po jednom žiakovi z družstiev USA a Maďarska za riešenie 6. úlohy) schválila.

V záverečnom slove poďakoval prezident jury *prof. dr. Engel* za konštruktívnu spoluprácu všetkým členom jury a informoval, že zatiaľ nie je doriešená otázka usporiadateľa XVII. MMO. Podľa vyjadrenia vedúcich bulharskej a mongolskej delegácie sa môže konať v ich krajinách, v Mongolsku však až od 15. 7. 1975, pretože Mongolská ľudová republika slávi 11. 7. svoj štátny sviatok.

V závere zasadnutia sa prihlásil o slovo vedúci rakúskej delegácie *prof. Mühlgassner*. V mene zahraničných delegácií poďakoval usporiadateľom za výbornú organizáciu olympiády a za veľmi dobré podmienky, ktoré NDR vytvorila

jej účastníkom. Potom z poverenia ministerstva školstva svojej krajiny oznámil, že Rakúsko je ochotné usporiadať XVIII. MMO v roku 1976. Pozval všetky krajiny zúčastnené na XVI. MMO, aby sa na nej zúčastnili a požiadal vedúcich delegácií, aby ho informovali o stanovisku svojich krajín k tomuto pozvaniu.

Žiaci od svojho príchodu do Erfurtu (6. 7.) do otvorenia súťaže sa mali možnosť zoznámiť s pamätihodnosťami mesta. Navštívili o. i. aj svetoznámu medzinárodnú výstavu kvetov, ktorá sa v tomto starobyľom centre Durínska každoročne koná. Popoludnie prvého dňa súťaže strávili na športoviskách študentského domova, v ktorom boli ubytovaní a po druhej klauzúre pre nich usporiadatelia zorganizovali mládežnícku zábavu, na ktorú okrem výbornej hudby zabezpečili aj dostatočný počet dievčat z erfurtských stredných škôl. Medzi účastníkmi XVI. MMO boli totiž len 2 dievčatá: *Sarah Maria Duyos* z Kuby a naša *Alena Vencovská*.

Kým sa vedúci delegácií a ich zástupcovia vo Weimare plne zamestnávali korektúrami, hodnotením a koordináciou riešení, absolvovali žiaci dve celodenné autokarové exkurzie do okolia Erfurtu. V stredu 10. 7. navštívili známe stredisko zimných športov Oberhof v Durínskom lese a dejisko nedávnych majstrovstiev sveta v športovej streľbe v Suhle. Vo štvrtok 11. 7. si mali možnosť pozrieť Eisenach a hrad Wartburg. Vo štvrtok večer sa v internáte po prvý raz od súťaže stretli so svojimi vedúcimi, aby sa dozvedeli niektoré podrobnosti o programe ďalšieho pobytu v NDR a hlavne uspokojili svoju zvedavosť na výsledky, ktoré pri riešení úloh dosiahli. Veľa sa hovorilo tiež o smutne známej histórii

Buchenwaldu, ktorý sa chystali účastníci XVI. MMO navštíviť nasledujúceho dňa popoludní.

Počas záverečného zasadnutia jury si žiaci prehliadli Weimar, kde navštívili múzea v domoch Goetheho a Schillera i ďalšie pamätihodnosti. Popoludní 12. 7. sa uskutočnila spoločná exkurzia všetkých účastníkov XVI. MMO na neďaleký Ettersberg a do múzea na mieste niekdajšieho koncentračného tábora Buchenwald, v ktorom fašistické jednotky SS počas 2. svetovej vojny povraždili 56 000 ľudí, príslušníkov takmer všetkých európskych národov. Po prehliadke múzea položili jednotlivé delegácie kytice kvetov k pylónu svojho národa na Ceste národov v Národnom pamätníku v Buchenwalde a poklonili sa pamiatke tých, ktorí zahynuli v boji proti fašizmu pre lepšiu budúcnosť dnešnej mladej generácie a celého ľudstva.

V sobotu 13. 7. ráno sa účastníci XVI. MMO rozlúčili s Durínskym a rýchlikom odcestovali do Berlína, kde sa žiaci ubytovali vo vysokoškolskom internáte Humboldtovej univerzity a vedúci delegácií so svojimi zástupcami v hoteli Berolina v strede mesta. Krátko po príchode do Berlína čakala v prístave v Treptovskom parku na účastníkov XVI. MMO loď Fridrich Wolf zo známej „Weisse Flotte“, na ktorej podnikli vyhliadkovú plavbu po Spréve a priľahlých jazerách. Požitok z plavby trvajúcej celé popoludnie kazilo dáždivé počasie, tak typické v júli 1974 nielen pre Berlín a NDR.

V nedeľu 14. 7. 1974 navštívili účastníci MMO neďaleké viac než stotisícové krajské mesto Potsdam, kde si prezreli niekdajší kráľovský letohrádok Sanssouci s rozľahlým par-

kom a historické miesto konania Postupimskej konferencie Cecilienhof.

Po pondelňajšom voľnom predpoludní (15. 7.) nasledovalo popoludní záverečné slávnostné zhromaždenie v Kongresovej hale na Alexandrovom námestí. V jeho úvode zaznelo Largo a Allegro z Händlovho Concerto grosso, op. 6. Po otváracom preslove predsedu organizačného výboru XVI. MMO s. *Titzeho* prehovorili prezident jury *prof. dr. Engel* a sekretár min. školstva NDR s. *Werner Lorenz*, ktorí po doznení 1. vety Beethovenovej Jenskej symfónie odovzdali diplomy odmeneným účastníkom XVI. MMO. V zastúpení súťažiacich žiakov poďakovala potom organizátorom olympiády za vytvorenie veľmi dobrých podmienok pre súťaž i bohatý spoločenský program členka čs. družstva *Alena Vencovská*. V mene zahraničných členov jury prehovoril vedúci bulharskej delegácie *dr. Čukanov*, ktorý taktiež vyzdvihol veľmi dobrú organizáciu olympiády a v závere pozval delegácie všetkých zúčastnených krajín na XVII. MMO, o mieste konania ktorej sa rozhodne medzi Bulharskom a Mongolskom pri vzájomnom rokovaní na úrovni ministrov školstva. Kuriozitou záverečné slávnosti bolo to, že na nej účinkoval ako klavírista *Wolfgang Burmeister*, úspešný účastník niekoľkých predchádzajúcich MMO, ktorý vysokoškolské štúdium matematiky absolvoval za tri roky a teraz pracuje ako učiteľ matematiky na Technische Universität v Drážďanoch.

V pondelok (15. 7.) večer sa opäť v Kongresovej hale konala záverečná spoločná večera, na ktorej prehovoril prezident jury *prof. dr. Engel*. Pred ňou, resp. počas nej, dostali všetci účastníci olympiády spomienkové darčeky od jej or-

ganizátorov. Celý večer sa niesol v radostnom a priateľskom ovzduší. Mladé matematické nádeje si vymieňali adresy a prisľuby ďalších vzájomných kontaktov.

Na rozdiel od predchádzajúcich MMO sa slávnostnou spoločnou večerou oficiálny program XVI. MMO neskončil. Na utorok 16. 7. dopoludnia naplánovali nemeckí hostitelia ešte návštevu berlínskej televíznej veže, aby účastníkom olympiády umožnili pohľad na hlavné mesto NDR z výšky 203 m a po nej autokarovú prehliadku Berlína. Počas nej navštívili o. i. pamätník padlých červenoarmejcov v Treptovskom parku a zoznámili sa s ďalšími pamätihodnosťami hlavného mesta hostiteľskej krajiny.

Posledným oficiálnym podujatím v rámci olympiády bol koktail, ktorý v utorok popoludní usporiadal v reštaurácii hotela Johannishof námestník ministra školstva NDR s. *Werner Engst*. Spolu s prezidentom jury *prof. dr. Engelom* zotrval počas neho v krátkom srdečnom rozhovore s vedením každej delegácie.

V utorok 16. 7. popoludní začali postupne odchádzať jednotlivé zahraničné delegácie do svojich domovov. Delegáciu ČSSR odvážala Vindobona z berlínskej stanice Ostbahnhof v stredu predpoludním. Jej členovia odchádzali zo susedného socialistického nemeckého štátu bohatší o mnohé dojmy a pekné zážitky a tí, ktorí majú ešte možnosť, plní predsavzatí urobiť všetko pre to, aby ich budúca cesta na MMO bola úspešnejšia.

XVI. MMO sa zapíše do histórie ako jedna z najlepšie organizačne pripravených po odbornej i spoločenskej stránke. Značnú pozornosť jej venovala i domáca tlač a ostatné

masovokomunikačné prostriedky. Všetci organizátori na čele s prezidentom jury *prof. dr. Engelom* a predsedom org. výboru *s. Titzem* sa vyznačovali bezpríkladnou pozornosťou a starostlivosťou o to, aby všetko klapalo presne podľa vopred pripraveného plánu. Všetci účastníci olympiády sa na každom kroku presvedčovali o veľkej pozornosti, ktorú venuje NDR rozvoju školstva, vedy a techniky.

2. VÝSLEDKY SÚŤAŽE

Najdôležitejšou a zároveň najťažšou úlohou medzinárodnej jury MMO je každoročne výber súťažných úloh. S rastom počtu zúčastnených krajín narastá jej náročnosť hlavne preto, že sa zmenšuje prienik množín tých partii matematiky, ktoré sa vyučujú na stredných školách v zúčastnených krajinách. V návrhoch úloh, ktoré zaslali jednotlivé krajiny pre XVI. MMO bolo naviac málo vhodných úloh z geometrie. Po vynechaní pekných a zaujímavých úloh, ktoré sa však v pripravenom návrhu ukázali ako neoriginálne, sa napokon zrodil nie celkom vyvážený výber, ktorý pozostával z 2 doslovne ľahkých úloh, z 1 pomerne nenáročnej úlohy klasického typu a z 3 úloh, ktoré sa všeobecne považovali za náročné. Chýbali úlohy stredne náročné, ako to ukázali aj účastníkmi dosiahnuté výsledky. Nasledujúca tabuľka ukazuje, koľko zo 140 účastníkov olympiády získalo ten-ktorý počet bodov za riešenie jednotlivých úloh:

Počet bodov	Úloha 1	Úloha 2	Úloha 3	Úloha 4	Úloha 5	Úloha 6
8	—	—	35	—	—	35
7	—	—	5	—	27	8
6	—	64	1	90	8	3
5	113	7	1	15	15	5
4	9	18	2	11	13	1
3	6	4	9	10	9	2
2	6	5	7	10	12	7
1	1	14	18	—	22	28
0	5	28	62	4	34	51

Ak vyjadríme pomer udelených bodov za riešenie jednotlivých úloh k celkovému počtu možných bodov, dostaneme nasledujúce čísla vyjadrujúce relatívnu úspešnosť účastníkov XVI. MMO pri riešení úloh: 1. 90,3 %, 2. 62,7 %, 3. 35,1 %, 4. 84,4 %, 5. 44,6 %, 6. 38,4 %. S jednotlivými úlohami si najlepšie poradili tieto družstvá: 1. bez straty bodu riešili CS, DDR, H, PL, SU, USA, VN a YU; 2. VN stratilo 1 bod, SU 2 body; 3. Rumunsko získalo 50 bodov zo 64 možných; 4. Švédsko a Juhoslávia získali po 47 bodov zo 48 možných; 5. ZSSR získalo 44 bodov z 56 možných a 6. USA získalo 58 bodov zo 64 možných.

Celkové výsledky jednotlivých družstiev ukazuje nasledujúca tabuľka:

Krajina	Počet získaných cien				Diplomy	Súčet bodov	Neofic. poradie	Body a neofic. por. na XV. MMO	Pozn.
	I.	II.	III.	Spolu					
A	1	1	4	6	—	212	6.	144—8.	
BG	—	1	4	5	—	171	11.	96—12.—13.	
C	—	—	—	—	—	65	17.	42—16.	7 ž.
CS	—	—	2	2	—	158	12.	149—7.	
DDR	—	5	2	7	—	236	4.	188—3.	
F	1	1	3	5	—	194	8.	153—6.	
GB	—	1	3	4	—	188	9.	164—5.	
H	1	3	3	7	1	237	3.	215—2.	
M	—	—	—	—	—	60	18.	65—15.	
NL	—	—	1	1	—	112	15.	96—12.—13.	
PL	—	—	2	2	—	138	14.	174—4.	
R	1	1	3	5	—	199	7.	141—9.	
S	1	1	—	2	1	187	10.	99—11.	
SF	—	—	1	1	—	111	16.	86—14.	
SU	2	3	2	7	—	256	1.	254—1.	

USA	—	5	3	8	1	243	2.	na MMO po 1. raz	
VN	1	1	2	4	—	146	13.	len 5 žiakov na MMO po 1. raz	
YU	2	1	2	5	—	216	5.	137—10.	

Veľkým prínosom sa ukázali byť družstvá krajín, ktoré sa MMO zúčastnili po prvý raz. Družstvo USA sa vklínilo medzi už tradične najlepšie družstvá ZSSR, Maďarska a NDR a bolo jediným družstvom, ktorého všetci členovia získali cenu. Výsledky, ktoré dosiahlo nekompletné družstvo VDR, boli pre všetkých nečakaným prekvapením. V porovnaní s minulým rokom sa značne zlepšili najmä družstvá Juhoslávie, Rakúska, Švédska, Bulharska a čiastočne i družstvo Rumunska. Francúzske družstvo potvrdilo, že jeho vlaňajší výsledok nebol náhodný. Nečakane slabé výsledky dosiahlo družstvo Poľska a, žiaľ, aj ČSSR. Výsledky ostatných družstiev sú v zhode s doterajšími zvyklosťami s výnimkou snáď len Veľkej Británie, ktorej družstvo nekleslo pri svojich doterajších štartoch na MMO v neoficiálnom poradí pod šiestu priečku. Celkove možno povedať, že dosiahnuté výsledky sú vyrovnanejšie než na niekoľkých predchádzajúcich MMO a aj napriek trom pomerne náročným úlohám sa našlo až 6 žiakov, ktorí získali plný počet 40 bodov, a to po jednom z družstiev Rakúska, Francúzska, Maďarska, Rumunska, Švédska a ZSSR.

Pri rokovaní jury sa podarilo vytvoriť vďaka veľmi dobrému vedeniu zo strany jej prezidenta *prof. dr. Engela* i jeho zástupcu *prof. dr. Bauscha* konštruktívnu pracovnú atmosféru, na ktorú mala zrejme vplyv aj tá skutočnosť, že členo-

via jury boli väčšinou starí známi z predchádzajúcich MMO, ak to ukazuje nasledujúci prehľad:

Krajina	Vedúci delegácie — člen jury	Jeho zástupca
A	<i>Thomas Mühlgassner</i> Gymnázium Eisenstadt	<i>Wolfgang Ratzinger</i> Pädagogische Akademie Linz
BG	<i>Dr. Vladimír Čukanov</i> Akadémia vied Sofia	<i>Dimo Serafimov Angelov</i> Min. školstva Sofia
C	<i>Dr. Luis j. Davidson</i> Min. školstva Havana	<i>Felix Recio</i> Univerzita Havana
CS	<i>Doc. Dr. Jozef Moravčík, Csc.</i> VŠD Žilina	<i>Dr. Vlastimil Macháček</i> Ped. fakulta UK Praha
DDR	<i>Prof. Dr. Gustav Burosch</i> Univerzita Rostock	<i>Dr. Hans-Jürgen Sprengel</i> Pädag. Hochschule Potsdam
F	<i>Prof. Georges Glaeser</i> IREM Strasbourg	<i>Denis Gerll</i> Lycée Louis-le-Grand Paris
GB	<i>Robert Cranston Lyness</i> Min. školstva Londýn	<i>Dr. David Monk</i> Univerzita Edinburgh
H	<i>Endre Hódi</i> Ped. inštitút Budapešť	<i>Doc. Dr. István Reiman, CSc.</i> Techn. univerzita Budapešť
M	<i>Prof. Uršincerengin Sanžmjatav</i> Univerzita Ulánbátor	<i>Sagdarača Gombyn</i> Min. školstva Ulánbátor

NL	<i>Doc. Ary van Tooren</i> Univerzita Leiden	<i>Dr. Jan van de Craats</i> Univerzita Leiden
PL	<i>mgr. Andrzej Mąkowski</i> Univerzita Varšava	<i>Dr. Maciej Brynski</i> Univerzita Varšava
R	<i>Dr. Ion Cuculescu</i> Univerzita Bukurešť	<i>Constantin Ottescu</i> Liceul 21 Bukurešť
S	<i>Doc. Dr. Ake H. Samuelson</i> Univerzita Göteborg	<i>Stig Westlund</i> Stredná škola Halmstad
SF	<i>Matti Lehtinen</i> Univerzita Helsinki	<i>Jarmo Nyström</i> Stredná škola Pohjois-Tapiolan
SU	<i>Doc. Valentin A. Skvorcov</i> MGU Moskva	<i>Soňa I. Mojsejeva</i> Min. školstva Moskva
USA	<i>Prof. Dr. Samuel L. Greitzer</i> Rutgers University New Brunswick	<i>Cecil C. Rousseau</i> Memphis State University
VN	<i>Le Hai Chan</i> Min. školstva Hanoi	<i>Prof. Phan Duc Chinh</i> Univerzita Hanoi
YU	<i>Dr. Vladimír Mičić</i> Univerzita Belehrad	<i>Zoran Kadelburg</i> Matem. gymnázium Belehrad

3. K ČESKOSLOVENSKEJ ÚČASTI NA XVI. MMO

Družstvo ČSSR pre XVI. MMO vybralo predsedníctvo ÚV MO na záver týždenného sústreďenia 10 žiakov, ktoré sa konalo v Prahe od 17. do 22. 6. 1974. Účastníci sústreďenia boli vybraní na základe výsledkov III. a II. kola XXIII. ročníka MO a prípadnej predchádzajúcej účasti na MMO. Z účasti na sústreďení sa ospravedlnili dvaja, do ktorých sa vkladali najväčšie nádeje: *Jaromír Šimša*, ktorý získal už na XIV. i XV. MMO tretiu cenu (pre účasť na sústreďení maturantov odchádzajúcich na jeseň študovať do zahraničia) a *Pavel Ferst*, ktorý na XV. MMO získal dokonca II. cenu. Za nich bolo nutné povolať nahradníkov, medzi nimi i *Alenu Vencovskú*, ktorá sa napokon v Erfurte ukázala byť najlepšou členkou nášho družstva. Na základe poznatkov zo sústreďenia ochudobneného o skúsených reprezentantov bolo do NDR vyslaných týchto 8 žiakov (v tabuľke sú zároveň uvedené výsledky, ktoré dosiahli na XVI. MMO):

Por. číslo	Priezvisko a meno	Trieda a škola	Počet bodov získaných za úlohu						
			1	2	3	4	5	6	Spolu
1.	<i>Balanda Lubomír</i>	3.b gymn. Český Těšín	5	4	0	6	1	0	16
2.	<i>Kindlmann Pavel</i>	4.a gymn. České Budějovice	5	6	3	6	2	1	23
3.	<i>Navrátil Jiří</i>	1.a gymn. Olomouc-Hejčín	5	6	0	2	5	0	18
4.	<i>Širáň Jozef</i>	4.b gymn. Bratislava, Novoh.	5	6	1	6	4	0	22
5.	<i>Trlifaj Jan</i>	4.d gymn. Pha 3, Sladkovsk.	5	6	0	6	0	1	18
6.	<i>Valášek Michael</i>	3.d gymn. Pha 2, W. Piecka	5	1	1	6	0	1	14
7.	<i>Vencovská Alena</i>	4. tr. gymn. Pha 1, Štěpánská	5	4	1	6	5	8	29
8.	<i>Voldřich Josef</i>	3. tr. gymn. Vimperk	5	6	0	6	0	1	18
Spolu			40	39	6	44	17	12	158

Ako vidno, naši žiaci si veľmi dobre poradili s 1. úlohou a s výnimkou víťaza XXIII. ročníka MO a najmladšieho člena čs. družstva J. Navrátila aj so 4. úlohou. Za veľmi

dobrý možno považovať aj výsledok v 2. úlohe, ktorú ne-
riešil s úspechom len *M. Valášek*. Katastrofálne sú však
výsledky dosiahnuté vo všetkých troch tzv. ťažkých úlohách.
Výnimku tvorí len jediná žena v čs. družstve *A. Vencovská*,
ktorá veľmi vtipne riešila 6. úlohu (i keď s niektorými drob-
nými nepresnosťami) a pomerne úspešne aj 5. úlohu. Len to,
že v 2. úlohe nedokázala postačujúcu podmienku, spôsobilo,
že jej o vlások ušla II. cena. Ku jej cti slúži fakt, že maturovala
v triede s humanitným zameraním a pokiaľ ide o matematiku,
možno ju považovať do značnej miery za samouka. Ukázala,
čo dokáže vytrvalosť a pevná vôľa, v čom môže opravdu
slúžiť príkladom. Uspokojivý výsledok v 5. úlohe dosiahli
ešte *J. Navrátil* a *J. Širáň*, ktorému ušla III. cena len o jediný
bod. *P. Kindelmannovi*, jedinému z našich žiakov, ktorý sa
zúčastňoval MMO po druhý raz, umožnili zopakovať vla-
ňajší úspech a získať opäť III. cenu pokusy o využitie bino-
mickej vety pri riešení 3. úlohy.

Po spoločenskej stránke reprezentovali naši žiaci veľmi
dobre. Tvorili stmelený kolektív s veľmi slušným vystupo-
vaním. Neúspechy v súťaži ich viditeľne mrzeli a treba po
pravde povedať, že i počas exkurzií sa zaoberali matematikou
a riešením úloh. Po prvej klauzúre nešli na večeru dovtedy,
kým sa im nepodarilo nájsť riešenie 3. úlohy (je uvedené
nižšie), čo medzi drobníčkami zo XVI. MMO zaznamenal
aj *Junge Welt*. Úlohy, s ktorými si pri klauzúrach väčšina
z nich neporadila, boli netradičné a pre našich stredoškola-
kov nezvyklé.

Ak chceme v budúcnosti dosahovať na MMO lepšie vý-
sledky, bude treba po celý rok sa venovať príprave družstva.

Širší výber by mal byť známy už v septembri a s ním by bolo treba pracovať pravidelne, sústavne a cieľavedome po celý školský rok. Takto to robia dnes už prakticky vo všetkých krajinách, ktoré skončili na XVI. MMO v neoficiálnom poradí pred námi. Semináre poriadané v Prahe pre vybraných žiakov pražských škôl a týždenné sústredenie krátko pred odchodom na MMO k dobrej príprave rozhodne nepostačujú. Čas, prostriedky a energia venované systematickej príprave talentov by určite neboli samoučelné.

Určitým prisľubom do budúcnosti sú 4 gymnázia so špeciálnymi matematickými triedami (po 2 v ČSR a SSR), ktoré sa od 1. 9. 1974 otvárajú z iniciatívy ÚV MO a predovšetkým jeho predsedu *doc. Vyšína, CSc.* Ani od nich však nemožno očakávať zázraky. Už aj preto nie, že pri najlepšej vôli nebudú môcť samotné podchytiť všetky matematické talenty.

4. RIEŠENIA SÚŤAŽNÝCH ÚLOH

RIEŠENIE 1. ÚLOHY

Keďže z čísel p, q, r sa v každom kole každé vyskytuje práve raz, pre celkový počet rozdanych guľičiek zrejme platí:

$$N(p + q + r) = 20 + 10 + 9 = 39 = 3 \cdot 13. \quad (1)$$

Vzhľadom na to, že $N \geq 2$ a pre navzájom rôzne prirodzené čísla p, q, r určite platí: $p + q + r \geq 6$, vyplýva z (1):

$$N = 3, \quad p + q + r = 13.$$

Keďže hráč B v treťom kole získal r guľičiek a za celú hru

len 10 guľičiek (menej než 13), musel v prvom i druhom kole získať po p guľičiek. Hráč A mohol v treťom kole získať najviac q guľičiek a keďže jeho celkový zisk bol 20 guľičiek (viac než 13), musel v prvom i druhom kole získať po r guľičiek. Z toho vyplýva, že q guľičiek v prvom kole získal hráč C .

Na základe vyššie vykonanej úvahy môžeme navyše určiť i číselné hodnoty p, q, r , pretože platí: $2p + r = 10$ (zisk hráča B) a buď $2r + p = 20$, $3q = 9$, alebo $2r + q = 20$, $2q + p = 9$. V prvom prípade dostávame $q = 3$, $p + r = 10$, $r - p = 10$ čiže $q = 3$, $r = 10$, $p = 0$, čo podmienkám úlohy nevyhovuje. V druhom prípade $r = 10 - 2p \leq 8$, $q = 2 \cdot (10 - r) \geq 4$, $p = 9 - 2q \leq 1$, z čoho hneď máme $p = 1$, $r = 8$, $q = 4$. Zisk guľičiek jednotlivými hráčmi vo všetkých 3 kolách udáva teda nasledujúca tabuľka:

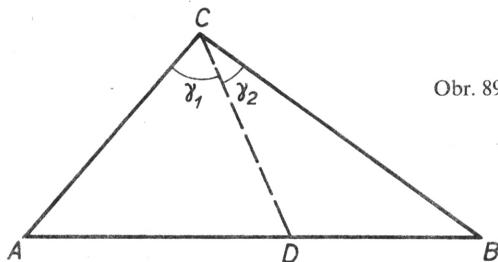
Hráč \ Kolo				
	1.	2.	3.	Σ
A	8	8	4	20
B	1	1	8	10
C	4	4	1	9

Záver. V prvom kole získal q guľičiek hráč C .

RIEŠENIE 2. ÚLOHY

Obr. 89. Nech vo vnútri úsečky AB existuje bod D tak, že platí:

$$CD^2 = DA \cdot DB. \quad (1)$$



Obr. 89

Označme $\sphericalangle ACD = \gamma_1$, $\sphericalangle BCD = \gamma_2$. Platí zrejme $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$.
Pre trojuholníky ADC , BDC zo sínusovej vety vyplýva:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{CD}{AD} \sin \gamma_1, \\ \sin \beta &= \frac{CD}{BD} \sin \gamma_2.\end{aligned}\tag{2}$$

Priamo z (1) a (2) dostaneme

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{CD^2}{AD \cdot BD} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 = \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 = \\ &= \frac{1}{2}[\cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \cos(\gamma_1 + \gamma_2)]\end{aligned}$$

čiže

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos \delta - \cos \gamma),\tag{3}$$

kde $0 \leq |\gamma_1 - \gamma_2| = \delta < \gamma$. Zrejme vždy $\cos \delta \leq 1$ a z (3) máme

$$\sin \alpha \sin \beta \leq \frac{1}{2}(1 - \cos \gamma) = \sin^2 \frac{1}{2}\gamma,\tag{4}$$

čo sme mali dokázať.

Nech obrátene platí (4), t. j.

$$\cos \gamma < 2 \sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma \leq 1,$$

pretože $\sin \alpha \sin \beta > 0$. Vzhľadom na to, že funkcia $\cos x$ je v intervale $\langle 0; \pi \rangle$ spojitá, existuje aspoň jedna hodnota $\delta \in \langle 0; \gamma \rangle$ tak, že platí:

$$2 \sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma = \cos \delta. \quad (5)$$

Rozdelme uhol γ na uhly γ_1, γ_2 tak, aby platilo $|\gamma_1 - \gamma_2| = \delta$, t. j. buď $\gamma_1 - \gamma_2 = \delta$ alebo $\gamma_2 - \gamma_1 = \delta$. V prvom prípade

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\gamma + \delta), \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}(\gamma - \delta),$$

pričom $\frac{1}{2}\gamma \leq \gamma_1 < \gamma$, $0 < \gamma_2 \leq \frac{1}{2}\gamma$. V druhom prípade

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\gamma - \delta), \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}(\gamma + \delta),$$

pričom $0 < \gamma_1 \leq \frac{1}{2}\gamma$, $\frac{1}{2}\gamma \leq \gamma_2 < \gamma$.

Ak označíme D priesečník úsečky AB so spoločným ramenom uhlov γ_1, γ_2 , potom z (2) a (5) dostávame

$$\frac{CD^2}{AD \cdot BD} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2} = 1.$$

čím sme dokázali, že vo vnútri úsečky AB existuje bod D s požadovanou vlastnosťou.

RIEŠENIE 3. ÚLOHY

Označme pri danom prirodzenom n daný súčet A_n . Zrejme platí:

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k} = 2^{-3/2} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (2^{3/2})^{2k+1}.$$

Podľa binomickej vety platí

$$\begin{aligned} (2^{3/2} + 1)^{2n+1} &= \sum_{m=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{m} (2^{3/2})^m = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (2^{3/2})^{2k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (2^{3/2})^{2k} = \\ &= 2^{3/2} A_n + B_n, \end{aligned}$$

kde

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (2^{3/2})^{2k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} 2^{3k}$$

je pri každom prirodzenom n zrejmé celé číslo.

Analogicky použitím binomickej vety dostaneme

$$(2^{3/2} - 1)^{2n+1} = 2^{3/2} A_n - B_n. \quad (1)$$

Vynásobením rovnosti (1) a rovnosti

$$(2^{3/2} + 1)^{2n+1} = 2^{3/2} A_n + B_n$$

dostaneme

$$2^3 A_n^2 - B_n^2 = (2^3 - 1)^{2n+1}. \quad (2)$$

Použitím kongruencií mod 5 sa rovnosť (2) redukuje na rovnosť

$$3A_n^2 - B_n^2 \equiv 2(-1)^n \pmod{5}.$$

Keďže $0^2 \equiv 0 \pmod{5}$, $1^2 \equiv 4^2 \equiv 1 \pmod{5}$, $2^2 \equiv 3^2 \equiv -1 \pmod{5}$, nebude pre žiadne n $B_n^2 \equiv \pm 2 \pmod{5}$, čo znamená, že $3A_n^2 \not\equiv 0 \pmod{5}$ a teda $A_n \not\equiv 0 \pmod{5}$ platí pri každom prirodzenom n , čo sme mali dokázať.

Iné riešenie: Zrejme platí:

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (5+3)^k \equiv \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 3^k \pmod{5}.$$

Označme

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 3^k = \frac{(\sqrt{3}+1)^{2n+1} + (\sqrt{3}-1)^{2n+1}}{2\sqrt{3}} = \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)(4+2\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}-1)(4-2\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Keďže čísla $4+2\sqrt{3}$, $4-2\sqrt{3}$ vyhovujú rovnici

$$x^2 - 8x + 4 = 0,$$

platí zrejme rekurentný vzťah

$$S_{n+2} = 8S_{n+1} - 4S_n \quad (3)$$

pre každé celé číslo $n \geq 0$. Z (3) hneď dostaneme

$$S_{n+2} \equiv S_n - 2S_{n+1} \pmod{5}. \quad (4)$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že platí:

$$S_0 \equiv 1 \pmod{5}, \quad S_1 \equiv 1 \pmod{5}. \quad (5)$$

Z (5) a (4) postupne dostaneme

$$\begin{aligned}
S_2 &\equiv 1 - 2.1 \equiv 4 \pmod{5}, & S_3 &\equiv 1 - 2.4 \equiv 3 \pmod{5}, \\
S_4 &\equiv 4 - 2.3 \equiv 3 \pmod{5}, & S_5 &\equiv 3 - 2.3 \equiv 2 \pmod{5}, \\
S_6 &\equiv 3 - 2.2 \equiv 4 \pmod{5}, & S_7 &\equiv 2 - 2.4 \equiv 4 \pmod{5}, \\
S_8 &\equiv 4 - 2.4 \equiv 1 \pmod{5}, & S_9 &\equiv 4 - 2.1 \equiv 2 \pmod{5}, \\
S_{10} &\equiv 1 - 2.2 \equiv 2 \pmod{5}, & S_{11} &\equiv 2 - 2.2 \equiv 3 \pmod{5}, \\
S_{12} &\equiv 2 - 2.3 \equiv 1 \pmod{5}, & S_{13} &\equiv 3 - 2.1 \equiv 1 \pmod{5},
\end{aligned}
\tag{6}$$

Zo (6) a (5) vzhľadom na (4) vyplýva, že pre všetky $k \geq 0$ platí

$$S_{12+k} \equiv S_k \pmod{5}.$$

Keďže $S_k \not\equiv 0 \pmod{5}$ pre $k = 0, 1, \dots, 11$, znamená to zároveň, že $S_k \equiv 0 \pmod{5}$ pre všetky $k \geq 0$ čiže $A_n \not\equiv 0 \pmod{5}$ pre každé prirodzené číslo n , čo sme mali dokázať.

Pozn.: Týmto spôsobom riešil 3. úlohu najmladší člen čs. družstva *J. Navrátil*, žiaľ, až po súťaži.

RIEŠENIE 4. ÚLOHY

Predovšetkým si treba uvedomiť, že

$$\sum_{i=1}^p a_i = 32. \tag{1}$$

Z ostrej monotónnosti čísel a_i vyplýva ďalej, že musí byť $a_i \geq i$, $i = 1, 2, \dots, p$, z čoho priamo máme

$$\sum_{i=1}^p a_i \geq \sum_{i=1}^p i = \frac{p(p+1)}{2}. \quad (2)$$

Z (1) a (2) dostávame nerovnosť

$$\frac{p(p+1)}{2} \leq 32 \quad \text{čiže} \quad p(p+1) \leq 64,$$

ktorej vyhovujú len tie prirodzené čísla p , pre ktoré platí:

$$p \leq 7.$$

Pokúsime sa overiť existenciu rozkladu požadovaných vlastností pre najväčšie z nich, t. j. $p = 7$. Keďže $\sum_{i=1}^7 i = 28$, je rozklad čísla 32 na 7 rôznych sčítancov s najväčším možným sčítancom

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 11. \quad (3)$$

Z neho postupným zmenšovaním najväčších sčítancov a zväčšovaním vhodných menších dostaneme všetky také rozklady čísla 32 na 7 sčítancov, ktoré vyhovujú požadovaným podmienkam:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 10, \quad (4)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9, \quad (5)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9, \quad (6)$$

$$1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8. \quad (7)$$

Rozklad šachovnice na 7 rovnobežníkov s počtom bielych

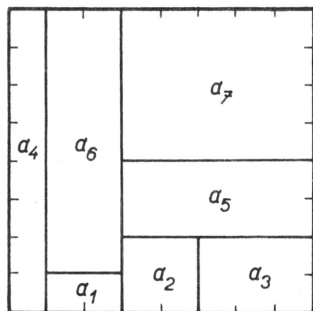
polí podľa (3) neexistuje, pretože rovnobežník s 22 poliami by musel mať rozmery 1×22 , resp. 2×11 , čo na šachovnici s 8×8 poliami nie je možné. Rozklady šachovnice na rovnobežníky s počtom bielych polí podľa (4)–(7) sú na obr. 90–94.

Záver. Najväčším číslom p , pre ktoré je možné rozdelenie šachovnice požadovaných vlastností, je teda číslo 7 a daným podmienkám vyhovujú nasledujúce 7-členné postupnosti: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8. V obrázkoch 90–93 sú jednotlivé rovnobežníky označené tým členom príslušnej postupnosti, ktorý sa rovná počtu bielych polí v nich obsiahnutých.

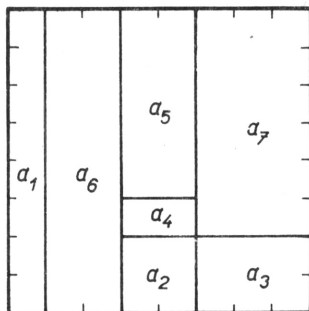
RIEŠENIE 5. ÚLOHY

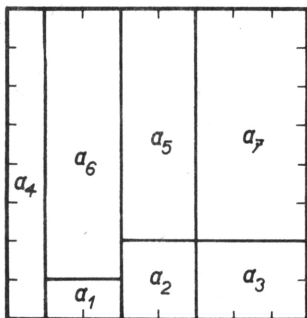
Pre každú štvoricu kladných reálnych čísel a, b, c, d zrejme platí

Obr. 90

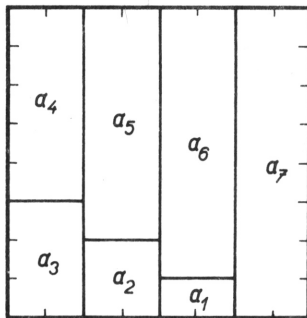


Obr. 91





Obr. 92



Obr. 93

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \\
 &+ \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} < \\
 &< \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \\
 &+ \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d} = S < \\
 &< \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2.
 \end{aligned}$$

Tým sme ukázali, že všetky hodnoty súčtu S pre ľubovoľné štvorice a, b, c, d kladných reálnych čísel musia ležať v intervale $(1; 2)$.

Pokúsme sa ešte ukázať, že súčet S každé číslo $x \in (1; 2)$ skutočne pre nejakú štvoricu a, b, c, d nadobúda. Označme

$S(a, b, c, d)$ hodnotu daného súčtu pre štvoricu a, b, c, d . Ľahko sa vidí, že $S(ka, kb, kc, kd) = S(a, b, c, d)$ pre každé kladné reálne číslo k . Stačí preto uvažovať len o takých štvoricách a, b, c, d , pre ktoré platí $a + b + c + d = 1$. Označme $a + c = u$, $b + d = v$, kde u, v sú také kladné reálne konštanty, pre ktoré platí $u + v = 1$. Pre také štvorice a, b, c, d kladných reálnych čísel je

$$\begin{aligned} S(a, b, c, d) &= \frac{a}{a+v} + \frac{c}{c+v} + \frac{b}{b+u} + \frac{d}{d+u} = \\ &= \frac{2ac + uv}{ac + uv + v^2} + \frac{2bd + uv}{bd + uv + u^2} = \\ &= \frac{2ac + u - u^2}{ac + 1 - u} + \frac{2bd + v - v^2}{bd + 1 - v}. \end{aligned}$$

Ak a, c sú ľubovoľné kladné reálne čísla, pre ktoré $a + c = u$, kde u je pevné, potom $0 < ac < \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{u^2}{4}$. Analogicky

pre b, d , pre ktoré $b + d = v$ je $0 < bd < \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 = \frac{v^2}{4}$.

Zlomok $\frac{2ac + u - u^2}{ac + 1 - u} = S'_1(ac)$ je pri pevnom $u \in (0, 1)$ rastúcou funkciou ac , pretože $S'_1(ac) = \frac{(2-u)(1-u)}{(ac + 1 - u)^2} > 0$

a analogicky $S_2(bd) = \frac{2bd + v - v^2}{bd + 1 - v}$ pri pevnom v je rastúcou funkciou bd . Z toho vyplýva, že

$$u < S_1 \leq \frac{2u}{2-u}, \quad v < S_2 \leq \frac{2v}{2-v}$$

a teda

$$1 = u + v < S \leq \frac{2u}{2-u} + \frac{2v}{2-v} = \frac{4-4uv}{2+uv}.$$

Keďže zlomok $S_3(uv) = \frac{4-4uv}{2+uv}$ je spojitou klesajúcou funkciou uv :

$$S'_3(uv) = -\frac{12}{(2+uv)^2} < 0 \quad \text{a} \quad \lim_{uv \rightarrow 0} \frac{4-4uv}{2+uv} = 2,$$

nadobúda súčet S všetky hodnoty z intervalu $(1, 2)$.

RIEŠENIE 6. ÚLOHY

Ak má celočíselné korene len jedna z rovníc

$$P(x) = 1, \quad (1)$$

$$P(x) = -1, \quad (2)$$

potom zrejme je $n(P) \leq \deg(P)$ a daná nerovnosť je splnená. Nech pre mnohočlen P súčasne existujú celočíselné korene rovnice (1) i rovnice (2). Nech k, m sú ľubovoľné celé čísla, pre ktoré platí $P(k) = 1, P(m) = -1$. Potom $P(k) - P(m) = 2$. Keďže $k - m$ delí celé číslo $P(k) - P(m)$, musí byť buď $|k - m| = 1$, alebo $|k - m| = 2$. To však znamená, že pre ľubovoľný nekonštantný mnohočlen P , pre ktorý majú obe rovnice (1), (2) celočíselné riešenie, je $n(P) \leq 5$. Z toho vyplýva, že daná nerovnosť je splnená pre každý mnohočlen P , pre ktorý $\deg(P) \geq 3$. Keďže pre mnohočlen 2. stupňa je $n(P) \leq 4$ a pre mnohočlen 1. stupňa je $n(P) \leq 2$, je daná

nerovnosť splnená pre každý nekonštantný mnohočlen P ,
čo sme mali dokázať.

Pozn.: Uvedené riešenie vzniklo úpravou riešenia naj-
úspešnejšej čs. účastníčky XVI. MMO A. Vencovskej.

Předmluva	3
I. Průběh XXIII. ročníku matematické olympiády	9
II. Přípravné úlohy I. kola	35
Komentáře k řešení přípravných úloh kategorie A	35
Komentáře k řešení přípravných úloh kategorie B	49
Komentáře k řešení přípravných úloh kategorie C	66
Komentáře k řešení přípravných úloh kategorie Z	76
III. Soutěžní úlohy I. kola	89
Komentáře k řešení soutěžních úloh kategorie A	89
Komentáře k řešení soutěžních úloh kategorie B	110
Komentáře k řešení soutěžních úloh kategorie C	129
Komentáře k řešení soutěžních úloh kategorie Z	149
IV. Soutěžní úlohy II. kola	163
Řešení soutěžních úloh kategorie A	163
Řešení soutěžních úloh kategorie B	175
Řešení soutěžních úloh kategorie C	188
Řešení soutěžních úloh kategorie Z	199
V. Řešení soutěžních úloh III. kola kategorie A	206
VI. Správa o XVI. mezinárodní matematické olympiádě	225

Edice Pomocné knihy pro žáky

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Petr Fabinger, dr. Jiří Mída, doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.
a dr. František Zítek, CSc.

DVACÁTÝ TŘETÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1976 — Počet stran 264
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarná redaktorka: Milada Slaninová
Technický redaktor: Václav Hanuš

Vytiskla Polygrafia, n. p., Praha 2, Svobodova 1
AA 8,38 (7,13 AA textu, 1,25 AA grafiky) – 8,87 VA

Náklad 3 550 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/2

Cena brožovaného výtisku Kčs 10,50

505/21, 825

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 55-0-06

14 – 236 – 76

Kčs 10,50

**matematická
olympiáda**

MO

SPN 55 – 0 – 06

**14 – 236 – 76
03/2 Kčs 10,50**