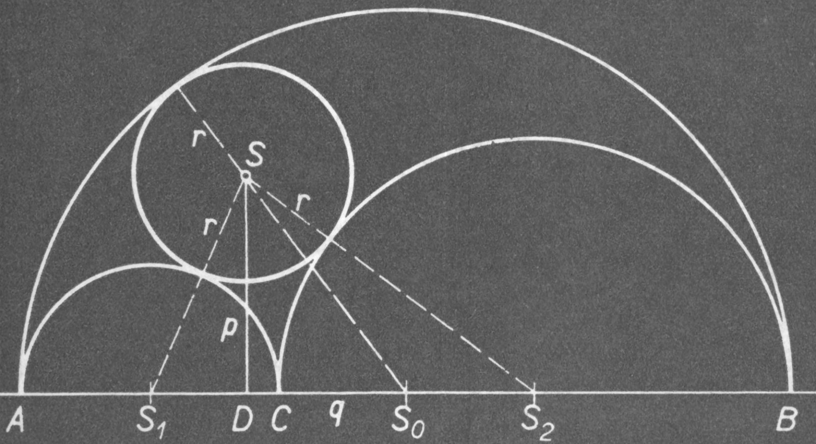
29. ročník matematické olympiády

MO

XXIX. ročník matematické olympiády



SPN

DVACÁTÝ DEVÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1979—80

MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
prof. dr. Jozef Moravčík, CSc., dr. Leo Boček, CSc.,
doc. dr. Lev Bukovský, CSc., dr. Antonín Vrba, CSc.,
doc. Jan Vyšín, CSc. a dr. František Zítek, CSc.
Recenzovali dr. Jitka Kučerová,
dr. Miroslav Šisler, CSc. a dr. Václav Šůla

Obsah

PREDHOVOR

Milí mladí priatelia a pracovníci v matematickej olympiáde,

už po 29. raz sa vám touto cestou prihovárame, aby sme vám poskytli základné informácie o priebehu a výsledkoch práve skončeného ročníka matematickej olympiády, ktorý sa konal v školskom roku 1979/80. Ako zvyčajne, prináša táto ročenka okrem prehľadu o organizácii a hodnotiacich tabuliek všetky súťažné úlohy s riešeniami, výber úloh riešených v celoštátnom korešpondenčnom seminári a stručnú informáciu o jeho výsledkoch. Chýba však, žiaľ, obvyklá správa o medzinárodnej matematickej olympiáde, pretože roku 1980 sa po prvý raz po 21 rokoch toto medzinárodné meranie síl matematických nádejí neuskutočnilo. Dúfajme, že to bude len ojedinelá neradostná epizóda v histórii medzinárodných matematických olympiád, na ktorú dá čoskoro zabudnúť ďalší úspešný rozvoj tohto nesporne veľmi užitočného podujatia. Nasvedčuje tomu nielen pozvanie na MMO 1981, ktorá sa má konať 8.—20. júla 1981 v USA, ale aj medzinárodné matematické súťaže, ktoré sa uskutočnili na niekoľkých miestach v júli 1980 ako náhrada za neuskutočnenú MMO. Podrobnejšie o nich píšeme na inom mieste

V predhovore k ročenke 28. ročníka MO sme sa zmieňovali o gymnáziách s triedami so zameraním na matematiku. Jedno z nich - Gymnázium Mikuláša Kopernika v Bílovci - sa zhodou okolností stalo dejiskom celoštátneho kola kategórie A 29. ročníka súťaže. Bílovec je tak najmenším z miest, v ktorých sa uskutočnilo celoštátne kolo MO počas jej takmer tridsaťročnej histórie, a bez nadsádzky možno povedať, že bíloveckým organizátorom sa podarilo vytvoriť pre súťaž vynikajúce podmienky a nezabudnuteľnú spoločenskú atmosféru. Možno aj vďaka tomu má naša súťaž v tomto ročníku po prvý raz päť absolútnych víťazov s rovnakým bodovým ziskom.

Aj ústredný výbor matematickej olympiády našiel v Bílovci veľmi dobré podmienky pre svoje náročné rokovanie, v ktorom sa zaoberal dôležitými otázkami týkajúcimi sa zmeny koncepcie v organizovaní súťaže od 31. ročníka. Odporúčal ministerstvám školstva zrušenie doterajšej dobrovoľnosti riešenia prípravných úloh a zmenu v organizácii školského kola súťaže v tom zmysle, aby sa úspešné riešenie väčšiny prípravných úloh v kategóriach A - C stalo podmienkou pre postup do klauzúrnej časti, ktorá by sa mala konať každoročne v mesiaci decembri, resp. februári, na jednotlivých stredných školách. Toto školské vyvrcholenie I. kola súťaže by malo byť v jednotlivých kategóriach na celom území štátu v ten istý deň a úspech v ňom by sa mal stať podmienkou pre postup do krajského kola príslušnej kategórie. Navrhované zmeny vychádzajú zo zistenia, že v posledných rokoch doterajší systém dobrovoľného riešenia prípravných úloh neplnil svoje poslanie a klauzúrny záver I. kola sleduje väčšiu zainteresovanosť školskej verejnosti i žiakov na matematickej olympiáde. Dá sa síce predpokladať, že poklesne počet účastníkov krajských kôl, ale určite by mala vzrásť ich úroveň.

V kategórii Z sa navrhuje len menšia úprava školského kola. Riešitelia budú odovzdávať riešenie úloh I. kola v dvoch etapách a úspešné riešenie väčšiny z nich bude podmienkou pre postup do okresného kola súťaže.

Vo vyšších kolách súťaže sa v žiadnej z jestvujúcich kategórií žiadne zmeny nepredpokladajú.

Zásadnú zmenu by však mala priniesť realizácia doporučenia, aby sa postupne od 5. ročníka základnej školy zaviedla matematická olympiáda pre žiakov základných škôl s cieľom včaššie než doteraz vyhľadávať žiakov matematicky nadaných, aby ich talent bolo možné už na základnej škole podchytiť a cieľavedome rozvíjať.

Realizácia spomínaných odporúčaní predpokladá viac zanietených učiteľov matematiky na stredných a najmä základných školách pre prácu s talentami a podstatne viac pochopenia pre túto ich časove náročnú a spoločensky vysoko užitočnú prácu.

Vedeckotechnický rozvoj, ktorý je neodmysliteľnou podmienkou ďalšieho upevňovania rozvinutej socialistickej spoločnosti, potrebuje stále viac žiakov a študentov s dobrým vzťahom k matematike, s vysokým stupňom vedomostí a schopnosťou tvorivo ich využívať. Tomu chce stále účinnejšie pomáhať aj matematická olympiáda a vyššie spomínané zmeny v jej koncepcii by mali k tomu prispieť. Očakávame, že v tomto svojom úsilí nájdeme medzi vámi dostatok pochopenia a ochoty k spolupráci.

Ústredný výbor matematickej olympiády

O průběhu XXIX. ročníku matematické olympiády

1. *ORGANIZACE SOUTĚŽE*

Pořadateli XXIX. ročníku matematické olympiády byla stejně jako v minulých letech *ministerstva školství ČSR a SSR*, *Matematický ústav ČSAV* (MÚ ČSAV), *Jednota československých matematiků a fyziků* (JČSMF), *Jednota slovenských matematiků a fyziků* (JSMF) a *Socialistický svaz mládeže* (SSM). Soutěž byla řízena ústředním výborem matematické olympiády (ÚV MO) a dále krajskými a okresními výbory matematické olympiády (KV MO, OV MO). Žáci soutěžili ve čtyřech kategoriích: v kategorii A žáci III. a IV. ročníků středních škol, v kategorii B žáci II. ročníků a v kategorii C žáci I. ročníků středních škol. V kategorii Z soutěžili žáci 8. a 9. tříd základních škol. Se souhlasem KV MO může žák soutěžit i v kategorii určené pro žáky vyšších ročníků.

2. *SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY*

Ústřední výbor matematické olympiády pracoval v průběhu jejího XXIX. ročníku ve složení:

předseda: *prof. dr. Jozef Moravčík, CSc.*, VŠDS Žilina

místopředsedové: *doc. Jan Vyšín, CSc.*, MÚ ČSAV Praha
dr. František Zítek, CSc., MÚ ČSAV Praha

jednatelé: *dr. Leo Boček, CSc.*, MFF UK Praha
dr. Antonín Vrba, CSc., MÚ ČSAV Praha

zástupce MŠ ČSR: *dr. Václav Šůla, Praha*

zástupce MŠ SSR: *dr. Júlia Lukátšová*, Bratislava

zástupce ÚV SSM: *Jana Pomazalová*, gymnázium Brno, tř. kpt. Jaroše

ostatní členové:

dr. František Běloun, Praha
dr. Ladislav Berger, Žilina
doc. dr. Lev Bukovský, CSc., přírodovědecká fakulta UPJŠ, Košice
dr. Milan Cirjak, KPÚ Prešov
Petr Fabinger, pedagogická fakulta UK, Praha
prof. dr. Miroslav Fiedler, člen korespondent ČSAV, MÚ ČSAV Praha
dr. Ivan Korec, CSc., přírodovědecká fakulta UK Bratislava
dr. Karol Križalkovič, CSc., pedagogická fakulta Nitra
doc. dr. Alois Kufner, CSc., MÚ ČSAV Praha
Olga Maříková, gymnázium Praha 10, Voděradská ul.
dr. Milan Maxian, gymnázium A. Markuša, Bratislava
dr. Jiří Mída, pedagogická fakulta UK Praha
akademik Josef Novák, MÚ ČSAV Praha

doc. dr. Aleš Pultr, CSc., MFF UK Praha
Víťazoslav Repáš, gymnázium J. Hronca, Bratislava
Stanislav Rypáček, gymnázium Praha 9-Prosek
dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV Praha
ing. Oldřich Skopal, gymnázium Brno, tř. kpt. Jaroše
dr. Jiří Šídlo, gymnázium Praha 3, Sladkovského nám.
Miloslav Šmerda, Brno

Dále jsou členy ÚV MO předsedové krajských výborů MO:

Praha: *prof. dr. Karel Drbohlav, DrSc.*, MFF UK Praha
Středočeský kraj: *Ludmila Tréglová*, gymnázium Říčany
Jihočeský kraj: *doc. dr. ing. Lada Vaňatová*, pedagogická fakulta České Budějovice
Západočeský kraj: *Věra Rádlová*, gymnázium J. Fučíka, Plzeň
Severočeský kraj: *Jiří Slavík*, gymnázium Teplice
Východočeský kraj: *dr. Josef Kubát*, gymnázium Pardubice
Severomoravský kraj: *dr. Vladimír Vlček*, přírodovědecká fakulta UP Olomouc
Jihomoravský kraj: *doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc.*, VUT Brno
Bratislava: *dr. Tomáš Hecht, CSc.*, přírodovědecká fakulta UK Bratislava
Západoslovenský kraj: *prof. dr. Ondrej Šedivý, CSc.*, pedagogická fakulta Nitra
Středoslovenský kraj: *doc. dr. Pavel Kršňák, CSc.*, pedagogická fakulta Banská Bystrica
Východoslovenský kraj: *dr. Martin Gavalec, CSc.*, přírodovědecká fakulta UPJŠ Košice

Pracovní předsednictvo ÚV MO (PÚV MO) tvořili (v abecedním pořadí): dr. Leo Boček, CSc., doc. dr. Lev Bukovský, CSc., prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., dr. Júlia Lukátšová, prof. dr. Jozef Moravčík, CSc., Jana Pomazalová, Víťazoslav

Repáš, dr. Jiří Sedláček, CSc., dr. Václav Šůla, dr. Antonín Vrba, CSc., doc. Jan Vyšín, CSc., dr. František Zítek, CSc.

3. *SCHŮZE ÚV MO*

V průběhu XXIX. ročníku MO se konala dvě zasedání ústředního výboru MO. První se konalo 10. a 11. prosince 1979 v Praze, na programu bylo zhodnocení průběhu XXVIII. ročníku MO, zpráva o XXI. mezinárodní matematické olympiádě v Londýně a spolupráce se Socialistickým svazem mládeže. Účastníci zasedání uctili památku zesnulého profesora Františka Hradeckého, dlouholetého člena ÚV MO a jednoho z nejobětavějších pracovníků matematické olympiády od doby jejího založení.

Jarní zasedání ÚV MO se konalo při příležitosti celostátního kola MO kategorie A na gymnáziu M. Kopernika v Bílovci. Nejzávažnějším bodem programu byly organizační změny a nová koncepce MO od jejího XXXI. ročníku. Předsednictvo ÚV MO se scházelo pravidelně jednou měsíčně a kromě organizačního zajištění MO a ediční činnosti projednávalo hlavně přípravu úloh pro II. a III. kolo soutěže a pro I. kolo XXX. ročníku MO.

4. *PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE*

Organizace jednotlivých kol soutěže byla opět stejná jako v předcházejících letech. Termín odevzdání přípravných úloh byl pro všechny kategorie stanoven na 15. listopad 1979.

O postupu do druhého kola rozhoduje pouze klasifikace soutěžních úloh *I. kola*. Termín jejich odevzdání byl 10. leden 1980 pro kategorie A a Z, pro kategorie B a C to byl 15. únor 1980. *II. kolo* soutěže se konalo v kategorii Z 13. února 1980, v kategorii A 23. února 1980 a v kategoriích B a C 12. dubna 1980. V tentýž den se uskutečnilo z iniciativy krajských výborů MO *krajské (III.) kolo* MO kategorie Z ve všech krajích České socialistické republiky. V Slovenské socialistické republice se toto kolo konalo 24. května 1980. *Třetí, celostátní kolo* MO kategorie A proběhlo ve dnech 3.—5. května 1980 v Bílovci. Vedení gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci připravilo ve spolupráci s KV MO v Olomouci pro samotný průběh soutěže i pro zasedání ÚV MO ty nejlepší podmínky. Slavnostního zahájení se zúčastnili představitelé stranických a státních orgánů Severomoravského kraje, okresu Nový Jičín a města Bílovec soudruzi *Leopold Boháč*, vedoucí odboru SmKV KSČ, *ing. Aleš Menšík, CSc.*, vedoucí odboru školství SmKNV, *ing. J. Cienciala*, tajemník SmKV SSM a další. Byli přítomni též zástupci vysokých škol Severomoravského kraje, za Univerzitu Palackého v Olomouci její prorektor *prof. dr. M. Laitoch, CSc.* a děkan přírodovědecké fakulty *prof. dr. L. Sedláček, CSc.* Po prvním dnu soutěže připravili pořadatelé pro soutěžící žáky i členy ÚV MO zájezd do muzea n. p. Tatra Kopřivnice a na Štramberk, večer strávili soutěžící v Závodním klubu n. p. KOH-I-NOOR. Vedení gymnázia M. Koperníka, jeho ředitel *dr. Ota Hon* a zástupce ředitele *s. Bedřich Špaček*, a všichni pracovníci připravili za pomoci orgánů okresu a města a patronátních závodů dobré podmínky pro soutěž a hodnotný společenský program pro volný čas. Patřil jim dík všech 68 účastníků celostátního kola matematické olympiády.

5. *POMOCNÉ AKCE PRO MO*

K úspěšnému umístění našich žáků v domácí i mezinárodní matematické olympiádě napomáhá mnoho akcí, pořádaných jak ústředním výborem MO, tak okresními a krajskými výbory MO. Z akcí ÚV MO to byl především *korespondenční seminář*, o kterém píšeme podrobně v samostatné kapitole této brožurky, a dále to byla tři celostátní soustředění. *Soustředění úspěšných řešitelů matematické a fyzikální olympiády* nižších ročníků středních škol se konalo ve Vysokém Mýtě ve dnech 16. června až 1. července 1980. Zaměstnání z matematiky tam vedli především pracovníci MÚ ČSAV v Praze dr. Jaroslav Fuka, CSc., dr. Jaroslav Morávek, CSc., dr. Antonín Vrba, CSc. a dr. Karel Horák. Kromě nich přednášeli na soustředění dr. Oto Strauch, CSc., z přírodovědecké fakulty v Bratislavě, dr. Josef Kubát z gymnázia v Pardubicích a bývalý úspěšný olympionik, dnes student matematicko-fyzikální fakulty, Jan Kratochvíl. Dále se konala *dvě soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu*, první začátkem dubna ve Štiříně a druhé za organizační pomoci ÚV SSM od 8. do 21. června 1980 v Kokoříně. Zajímavé přednášky, semináře a úlohy připravili na těchto soustředěních dr. Ivan Korec, CSc., dr. Tomáš Hecht, CSc. a doc. dr. Ján Čižmár, CSc., z přírodovědecké fakulty UK v Bratislavě, dr. Stanislav Jakubec z MÚ SAV v Bratislavě, pracovníci MFF UK v Praze dr. Jan Franců, CSc., dr. Josef Daneš, CSc., a dr. Rudolf Švarc, CSc. a opět pracovníci MÚ ČSAV v Praze dr. F. Zítek, CSc., dr. J. Fuka, CSc., dr. J. Morávek, CSc., dr. A. Vrba, CSc., dr. K. Horák a dr. V. Müller, CSc.

6. *STUDIJNÍ LITERATURA*

Základní informační literaturou pro účastníky MO jsou *letáky MO*, které vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze a Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislavě. Mimo to otiskují úlohy MO též *Rozhledy matematicko-fyzikální*. V edici *Škola mladých matematiků* (ŠMM) vydává ÚV MO prostřednictvím nakladatelství Mladá fronta knížky, určené hlavně našim olympionikům. Z posledně vydaných svazků uvádíme:

svazek 41 - *Bohdan Zelinka*: Rovinné grafy
42 - *Ladislav Beran*: Uspořádané množiny
43 - *Jiří Jarník*: Posloupnosti a řady
44 - *Bohdan Zelinka*: Matematika hrou i vážně
45 - *Antonín Vrba*: Kombinatorika
46 - *Jaroslav Šedivý:* Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách
47 - *Arnošt Niederle:* Zajímavé dvojice trojúhelníků

7. *KONKURS ÚLOH MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY*

JČSMF a JSMF vyhlásily roku 1966 konkurs na úlohy MO, který stále probíhá. Je zájem hlavně o původní úlohy vhodné pro nižší kategorie, úlohy modernizované matematiky a jednoduché úlohy aplikované matematiky. Návrhy úloh zasílejte na adresu ÚV MO, 115 67 Praha 1, Žitná 25 ve dvou exemplářích. Přijetím úlohy získává ÚV MO právo úlohu upravit a autor na sebe bere závazek, že úlohu utají.

Počty soutěžících v kategorii Z

KRAJ	Kolo					
	I.		II.		III.	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	1065	675	477	243	34	24
Středočeský	799	433	381	150	35	17
Jihočeský	904	419	342	147	40	22
Západočeský	1150	517	337	133	24	12
Severočeský	1236	446	342	160	33	14
Východočeský	1155	622	448	214	52	16
Jihomoravský	1699	1008	856	319	62	29
Severomoravský	1099	565	448	186	60	15
Bratislava	818	335	334	137	37	19
Západoslovenský	1681	1022	959	282	40	23
Středoslovenský	1449	750	628	215	33	14
Východoslovenský	1901	996	770	323	61	13
Celkem	14956	7788	6322	2509	511	218

S — počet všech soutěžících
Ú — počet úspěšných řešitelů

Počty soutěžících v kategorii C

KRAJ	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	125	91	85	36
Středočeský	156	124	117	14
Jihočeský	127	117	108	35
Západočeský	87	49	47	11
Severočeský	134	98	84	13
Východočeský	138	94	88	23
Jihomoravský	130	120	120	30
Severomoravský	168	142	118	40
Bratislava	62	40	38	14
Západoslovenský	240	190	178	20
Středoslovenský	135	106	103	29
Východoslovenský	301	250	215	23
Celkem	1803	1421	1301	288

S – počet všech soutěžících
Ú – počet úspěšných řešitelů

Počty soutěžících v kategorii B

KRAJ	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	81	69	65	26
Středočeský	97	83	76	6
Jihočeský	81	74	72	4
Západočeský	64	39	39	5
Severočeský	80	66	62	3
Východočeský	94	80	74	19
Jihomoravský	80	72	70	11
Severomoravský	110	100	95	14
Bratislava	69	46	46	9
Západoslovenský	172	161	154	18
Středoslovenský	91	75	72	16
Východoslovenský	186	153	64	23
Celkem	1205	1018	889	154

S — počet všech soutěžících
Ú — počet úspěšných řešitelů

Počty soutěžících v kategorii A

KRAJ	Kolo					
	I.		II.		III.	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	92	76	64	29	17	13
Středočeský	120	101	88	2	1	0
Jihočeský	84	72	71	5	1	1
Západočeský	53	37	34	4	1	1
Severočeský	92	75	66	3	2	1
Východočeský	78	59	53	14	5	1
Jihomoravský	150	132	120	5	2	0
Severomoravský	120	103	99	18	12	5
Bratislava	93	82	76	15	8	7
Západoslovenský	182	133	128	13	5	2
Středoslovenský	75	66	58	8	4	2
Východoslovenský	98	81	59	16	10	7
Celkem	1237	1017	916	132	68	40

S — počet všech soutěžících
Ú — počet úspěšných řešitelů

Počty soutěžících v kategoriích A, B, C dohromady

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	298	236	214	91
Středočeský	373	308	281	22
Jihočeský	292	263	251	44
Západočeský	204	125	120	20
Severočeský	306	239	212	19
Východočeský	310	233	215	56
Jihomoravský	360	324	310	46
Severomoravský	398	345	312	72
Bratislava	224	168	160	38
Západoslovenský	594	484	460	51
Středoslovenský	301	247	233	53
Východoslovenský	585	484	338	62
Celkem	4245	3456	3106	574

S – počet všech soutěžících
Ú – počet úspěšných řešitelů

POŘADÍ VÍTĚZŮ A ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ CELOSTÁTNÍHO KOLA KATEGORIE A

Vítězové

1.—5.	*Jozef Bednárik*, 3. a, G A. Markuša, Bratislava
	Petr Couf, 2. d, G W. Piecka, Praha
	Ctirad Klimčík, 4. c, G Prešov, Konštantinova
	Jiří Mejzlík, 4. c, G M. Kopernika, Bílovec
	Miroslav Ploščica, 4. a, G Stará Ľubovňa
6.—9.	*Pavel Hruška*, 3. c, G M. Kopernika, Bílovec
	Igor Kříž, 1. d, G W. Piecka, Praha
	Jan Nekovář, 3. d, G W. Piecka, Praha
	Jiří Sgall, 1. d, G W. Piecka, Praha
10.—12.	*Jan Brousek*, 4. b, G Klatovy
	Ladislav Kubini, 4. b, G Bardejov
	Aleš Nekvinda, 4. b, G Liberec
13.—14.	*Peter Božek*, 4. a, G A. Markuša, Bratislava
	Miroslav Engliš, 2. d, G W. Piecka, Praha
15.	*Martina Šimůnková*, 3. d, G W. Piecka, Praha
16.	*Libor Forst*, 3. a, G České Budějovice, Jírovcova

Další úspěšní řešitelé

17.—21.	*Michal Fečkan*, 4. c, G Nové Zámky
	Danica Kolibiarová, 4. c, G J. Hronca, Bratislava
	Robin Thomas, 4. d, G W. Piecka, Praha

G - gymnázium

Bořivoj Tydlitát, 3. d, G W. Piecka, Praha
Ondrej Virdzek, 3. a, G Žilina, Veľká okružná
22. *Juraj Beniak*, 4. a, G A. Markuša, Bratislava
23.—24. *Miroslav Straka*, 4. a, G Prievidza
Jan Tomsa, 4. a, G Jaroměř
25.—26. *Vladimír Hudec*, 3. a, G Košice, Šmeralova
Martin Kochol, 4. a, G A. Markuša, Bratislava
27.—28. *Juraj Filin*, 4. e, G Trenčín
Stanislav Vaněček, 4. d, G W. Piecka, Praha
29.—30. *Petr Srp*, 4. d, G W. Piecka, Praha
Pavel Šrein, 4. d, G W. Piecka, Praha
31.—33. *Jan Krajíček*, 4. d, G W. Piecka, Praha
Ladislav Kvasz, 4. a, G A. Markuša, Bratislava
Ľubica Šedová, 4. a, G A. Markuša, Bratislava
34.—40. *Miroslav Brzezina*, 3. c, G M. Kopernika, Bílovec
Jiří Buršík, 4. a, G Ostrava, Šmeralova
Janusz Drózd, 4., polské G Český Těšín
Albín Dzurňák, 3. a, G Košice, Šmeralova
Pavel Kameník, 3. d, G Praha 3, Sladkovského nám.
Jozef Kunca, 3. d, G Bardejov
Ladislav Spišiak, 4. f, G Košice, Šmeralova

NEJÚSPĚŠNĚJŠÍ ŘEŠITELÉ II. KOLA MO v KATEGORIÍCH A, B, C

Praha

Kategorie A

Jan Nekovář, 3. d, *Igor Kříž*, 1. d, *Robin Thomas*, 4. d, *Jan Krajíček*, 4. d, *Miroslav Engliš*, 2. d, všichni G W. Piecka, Praha; *Zdenko Procházka*, 4. a, G Praha 7, Nad štolou; *Pavel Šrein*, 4. d, *Bořivoj Tydlitát*, 3. d, *Petr Couf*, 2. d, všichni G W. Piecka, Praha; *Pavel Kameník*, 3. d, G Praha 3, Sladkovského nám.; *Stanislav Vaněček*, 4. d, G W. Piecka, Praha

Kategorie B

Igor Kříž, 1. d, *Vladimír Lieberzeit*, 2. d, *Miroslav Engliš*, 2. d, *Petr Couf*, 2. d, všichni G W. Piecka, Praha; *Petr Boček*, 2. a, G Praha 7, Nad štolou; *Martin Trusina*, 2. d, *Jiří Sgall*, 1. d, *Ondřej Čepek*, 2. d, *Marcela Müllerová*, 2. d, všichni G W. Piecka, Praha; *Martin Vopěnka*, 2. d, G Praha 3, Sladkovského nám.; *Petr Horák*, 2. e, SPŠE Praha 2, Ječná

Kategorie C

Igor Kříž, *Jiří Sušický*, *Jiří Sgall*, *Jan Bouček*, *Michal Vojtek*, všichni 1. d, G W. Piecka, Praha; *Vít Jůza*, 8. a, ZDŠ Praha 8, Lyčkovo nám.; *Petr Maršík*, 1. a, G Praha 5, Nad Turbovou; *David Zámek*, 1. b, G Praha 7, Nad štolou; *Petr Pazdera*, 1. d, G W. Piecka, Praha; *Vladimír Kejhar*, 1. e, G Praha 7, Nad štolou

Středočeský kraj

Kategorie A

Jiří Hynek, 4. c, G Kolín; *Jiří Novotný*, 4. b, G Poděbrady

Kategorie B

Petr Hovorka, 2. a, G Kolín; *Jiří Podolský*, 2. c, G Mladá Boleslav; *Miroslav Šimek*, 2. c, G Mělník; *Jiří Šimůnek* a *Aleš Kisil*, oba 2. b, G Kutná Hora; *Lenka Kohoutová*, 2. a, G Čáslav

Kategorie C

Martin Dvořák, 1. a, G Čáslav; *Petr Kuboň*, 1. d, G Mladá Boleslav; *Vladimír Ladma*, 1., SPŠ staveb., Mělník; *Jan Gregor*, 1. a, G Vlašim; *Jindra Hyánková*, 1. a, G Kolín; *Jaroslav Satranský*, 1. a, G Nové Strašecí; *Petr Tahal*, 1. b, G Kolín; *Jitka Beranová*, 1. a, G Sedlčany; *Jiří Drábek*, 1. b, G Kralupy; *Pavel Palkoska*, 1. b, SPŠ stroj., Kladno

Jihočeský kraj

Kategorie A

Libor Forst, 3. a, G České Budějovice, Jírovcova; *Lubomír Přech*, 4. a, G K. Šatala, České Budějovice; *Ivo Tomšovic*, 3. c, G Strakonice; *Miroslav Masojídek*, 4. a, G Písek; *Eva Mitasová*, 4. b, G Jindřichův Hradec

Kategorie B

Petr Husar, 2. d, G Strakonice; *Ivo Straka*, 2. c, G Jindřichův Hradec; *Vladimír Höhne*, 2., G Vimperk; *Petr Vinklář*, 2., G Tábor

Kategorie C

Petr Tyllner, 1. c, G Tábor; *F. Cvrčková*, 1. c, G Strakonice; *Hana Turková*, 1. st., SZŠ České Budějovice; *Stanislav Waldauf*, 1. a, G K. Šatala, České Budějovice; *Š. Hořejšová*, 1. d, G Tábor; *Zdeněk Křika*, 1. a, G K. Šatala, České Budějovice; *Petr Demal*, 1., G Týn n. V.

Západočeský kraj

Kategorie A

Jan Brousek, 4. b, G Klatovy; *Pavel Pokorný*, 3. a, G J. Fučíka, Plzeň; *Petr Laciga*, 3. a, G J. Fučíka, Plzeň; *Pavel Pešek*, 3. ST, SPŠE Plzeň

Kategorie B

Jan Jůza, 2. a, *Božena Šmrhová*, 2. f, *Josef Niedermeier*, 2. c, všichni G J. Fučíka, Plzeň; *Bohumil Tříska*, 2. b, G Blovice; *Petr Mýtina*, 2. a, G J. Fučíka, Plzeň

Kategorie C

Stanislav Jelen, 1. a, G Karlovy Vary; *Martin Chval*, 1. b, G Mariánské Lázně; *Jaromír Vajgert*, 1. c, G Klatovy; *Tomáš Holeček*, 1. a, G J. Fučíka, Plzeň; *Jan Řezníček*, 1. ST, SPŠE Plzeň; *Petr Novák*, 1. a, G Karlovy Vary; *Jana Marešová*, 1. a, G J. Fučíka, Plzeň; *Vladimír Čech*, 1. b, G Cheb; *Tomáš Aloy*, 1. g, G J. Fučíka, Plzeň; *Štěpán Trojan*, 1. d, G Cheb

Severočeský kraj

Kategorie A

Josef Hladík, *Aleš Nekvinda*, oba 4. b, G Liberec; *Jiří Kubát*, 4. d, G Teplice

Kategorie B

Milan Kolář, M 2, SPŠ stroj. a elektro, Liberec; *Jan Tichý*, 2. c, G Česká Lípa; *Jaroslav Šindelář*, 2. b, G Teplice

Kategorie C

Jaroslav Novák, 1. e, G Liberec; *Pavel Vítovec*, 1. b, G Litvínov; *Jaromír Drábek*, 1. c, G Jablonec; *Petr Pavlů*, 1. d, G Liberec; *Michal Krejčík*, 1. a, G Jablonec; *Ladislav Bušák* a *Luboš Talácko*, oba 1. a, G Louny; *Petr Chadim*, 1. b, G Roudnice; *Günther Kletetschka*, 1. d, G Litoměřice; *Vladimír Koudelka*, 1. d, G Ústí nad Labem

Kategorie A

Iva Dvořáková, 3. a a *Pavel Kalhous*, 3. c, oba G Pardubice; *Ladislav Pecen*, 3. b, G Havlíčkův Brod; *Jan Tomsa*, 4. a a *Martin Štěpánek*, 1. a, oba G Jaroměř; *Milan Hagan*, 4. b, G Semily; *Jan Zindulka*, 4. a, G Polička; *Jaroslav Resler*, 3. a, G Lanškroun; *Luboš Liška*, 3. c, G Pardubice; *Pavel Nosek*, 4. b, G Trutnov; *Petr Sourada*, 4., SPŠCh Pardubice

Kategorie B

Richard Scholle a *Milan Sourada*, oba 2. d, G Pardubice; *Petr Eisler*, 2. c, G Havlíčkův Brod; *Radek Burda*, 2. g, G J. K. Tyla, Hradec Králové; *Mirka Machačová*, 2. a, G Rychnov nad Kněžnou; *Petr Jiříček*, 2. a, G Polička; *Michal Štembera*, 2. d, G Pardubice; *Marie Henzlová*, 2. b, G Havlíčkův Brod; *Václav Šimůnek*, 2. b, G Semily; *Martin Štěpánek*, 1. a, G Jaroměř

Kategorie C

Martin Štěpánek, 1. a, G Jaroměř; *Ivo Koreň*, 1. g, G J. K. Tyla, Hradec Králové; *Michal Musílek*, 1. c, SPŠE Pardubice; *Jiří Votínský* a *Jaroslav Rybka*, oba 1. d, G Pardubice; *Jiří Hofman*, 1., G Hořice; *Jaromír Krys*, 1. a., G Chrudim; *Zdeněk Holý*, 1. a, G Vrchlabí; *Miloš Hort* a *Zdeněk Řezníček*, oba 1. e, SPŠE Pardubice

Jihomoravský kraj

Kategorie A

Zenon Starčuk, 4. d, G Brno, Koněvova; *Petr Mikšík*, 4. d, G Kroměříž; *Petr Sojka*, 3. a, G Brno, Koněvova; *Vladimír Babák*, 4. b, G Tišnov; *Mojmír Kallus*, 4. d, G Uherské Hradiště

Kategorie B

Jiří Černý, 2. b, G Brno, Koněvova; *Eva Plháková*, 2. a, G Třebíč; *Jan Mrázek*, 2. b, G Žďár nad Sázavou; *Pavel Jelínek*, 2. c a *Martin Juráš*, 2. e, oba G Brno, Koněvova; *Miroslav Blažek*, 2. b, G Brno, tř. kpt. Jaroše; *Martin Orel*, 2. c, G Jihlava; *Petr Havelka*, 2. a, G Znojmo; *Petr Kuchyňa*, 2. a, G Boskovice; *Jaromír Marek*, 2. a, G Velké Meziříčí; *Jaroslav Mikšík*, 2. c, G Brno, Koněvova

Kategorie C

Jaroslav Smejkal, 1 a, G Velké Meziříčí; *Petr Slavík*, 1. e, G Brno, Koněvova; *Pavel Urban*, 1. e, G Uherské Hradiště; *Darina Neumannová*, 1. a, G Brno, Slovanské nám.; *Helena Holaňová*, 1. c, G Brno, tř. kpt. Jaroše; *Petr Srna*, 1. c, G Brno, Lerchova; *Radek Řezníček*, 1. e, G Brno, Koněvova; *Martin Kuřil*, 1. b, G Kyjov; *René Matýšek*, 1. e, G Brno, Koněvova; *Martin Kolář*, 1. a, G Brno, Křenová; *Pavel Polák*, 1. a, G Brno, Koněvova

Kategorie A

Jiří Mejzlík, 4. c, G M. Kopernika, Bílovec; *Jiří Buršík*, 4. a, G Ostrava, Šmeralova; *Jiří Číhal*, 4. c., G M. Kopernika, Bílovec; *Mirko Rokyta*, 4. a, G Vsetín; *Pavel Hruška*, 3. c, *Jaroslav Štěpánek*, 4. c, *František Slanina*, 3. c, *Miroslav Brzezina*, 3. c, *Ladislav Šnevajs*, 3. c, všichni G M. Kopernika, Bílovec; *Janusz Drózd*, 4., polské G Český Těšín

Kategorie B

Martin Zemek, 2. c, G M. Kopernika, Bílovec; *Petr Lisoněk*, 2. d, G Olomouc-Hejčín; *Miroslav Havelka*, 2. a, G Nový Jičín; *Miloslav Grundmann*, 2. d, G Ostrava-Poruba; *Robert Krajča*, *Libor Pleva*, *Miroslav Šmatera*, *Petr Tichavský*, všichni 2. c, G M. Kopernika, Bílovec; *Miroslav Mandula*, 2. b, G Ostrava, Šmeralova; *Pavel Trávníček*, 2. b, G Olomouc, Jiřího z Poděbrad; *Ivana Vitoulová*, 2. c, G M. Kopernika, Bílovec

Kategorie C

Vladan Pecha, *Vlastimil Serba*, *Jiří Erhart*, všichni 1. c, G M. Kopernika, Bílovec; *Jiří Losert*, 1. b, G Olomouc, Jiřího z Poděbrad; *Tomáš Novotný*, 1. b, G Hranice na Moravě; *Radek Pecina*, 1. c, SPŠ stroj., Karviná; *Miloslav Vašíček*, 1. b, G Ostrava, Šmeralova; *Bronislav Suchý*, 1. c, G M. Kopernika, Bílovec; *Miroslav Kubíček*, 1. d, SPŠ Lipník nad Bečvou; *Martin Pola*, 1. b, G Frýdek-Místek

Bratislava

Kategorie A

Martin Kochol, 4. a, *Jozef Bednárik*, 3. a, *Juraj Beniak*, 4. a, *Ladislav Kvasz*, 4. a, *Peter Božek*, 4. a, všichni G A. Markuša, Bratislava; *Danica Kolibiarová*, 4. c, G J. Hronca, Bratislava; *Ľubica Šedová* a *Vladimír Hurta*, oba 4. a, G A. Markuša, Bratislava; *Peter Kvasnička*, 3. e, G L. Novomeského, Bratislava

Kategorie B

Richard Hlubina, 2. e, G Bratislava, Vazovova; *Pavol Ralbovský*, 2. a, G Bratislava, Metodova; *Iveta Augustová*, *Iveta Laurincová* a *Oleg Rozenberg*, všichni 2. a, G A. Markuša, Bratislava; *Alexander Galba* a *Dana Kurková*, oba 2. a, G A. Markuša, Bratislava; *Ľubica Galléová*, 2. d, G Bratislava, Vazovova; *Peter Papánek*, 2. e, G Bratislava, I. Horvátha

Kategorie C

Helga Jakešová, 1. b, G J. Hronca, Bratislava; *Xaver Gubáš*, *Roman Bačík* a *Monika Böhmová*, všichni 1. a, G A. Markuša, Bratislava; *Stanislav Kráľ*, 1. c, G A. Markuša, Bratislava; *Daniela Lukáčová*, 1. c, G Bratislava, Vazovova; *Richard Pulmann*, 1. b, *Peter Borovanský*, 1. b, *Pavol Stríženec*, 1. d, všichni G J. Hronca, Bratislava

Kategorie A

Juraj Filin, 4. e, G Trenčín; *František Mráz*, 3. c, G Malacky; *Michal Fečkan*, 4. c, G Nové Zámky; *Yveta Danešová*, 3. c, SPŠE Piešťany; *Ján Tóth*, 4. d, G Nové Zámky; *Hubert Kluka*, 4. b, G Piešťany; *Peter Drahoš*, 4. b, G Skalica; *Igor Križalkovič*, 4. a, G Nitra-Párovce; *Peter Tarina*, 2. a, G Topoľčany; *Ladislav Zsilinszký*, 3. d, G Nové Zámky

Kategorie B

Peter Tarina, G Topoľčany; *Alexander Tomášek*, maď. SPŠE Komárno; *Aba Teleki*, G E. Gudernu, Nitra; *František Horniak*, G Levice; *Vladimír Mužík*, G Nitra, Párovská; *Mila Obuch*, G E. Gudernu, Nitra; *Anna Baráková*, G Nové Zámky; *Klára Ružičková*, maď. G Komárno (třídy neuvedeny)

Kategorie C

Erzsebet Szalay, 1. c, maď. G Komárno; *Roman Šášik*, 1. c, G Nitra, Párovská; *Tomáš Kmeť*, 1. b, G Hlohovec; *Igor Kravár*, 1. a, G Nitra, Párovská; *Jozef Roháč*, 1. d, G E. Gudernu, Nitra; *Jana Trnkusová*, 1. c, G Levice; *Marian Bartek*, 1. b, G Sereď; *Hyacint Mircz*, 1. c, maď. G Galanta; *Eva Bačíková*, 1. d, G Hlohovec; *Roman Kotiers*, 1. b, maď. G Šamorín; *Dušan Mocko*, 1. a, G Nové Mesto n. Váhom

Kategorie A

Marián Moravčík, 4. d, G Žilina, Hliny VI; *Ondrej Virdzek*, 3. a, G Žilina, Veľká okružná; *Miroslav Straka*, 4. a, G Prievidza; *Pavol Hronský*, 3. a, G Žilina, Hliny VI; *Tomáš Chabada*, 4. c, G Banská Bystrica, Tajovského; *Eduard Grešák*, 3. a, G Kysucké Nové Mesto; *Róbert Krejčír*, 3. d, SPŠ Handlová

Kategorie B

Peter Dzurenda, 2. f, G Prievidza; *Nadežda Fóglová*, 2. a, G Liptovský Hrádok; *Ivan Brozman*, *Eduard Grolmus*, oba 2. a, G Martin; *Juraj Lörinc*, 2.; G Kremnica; *Roman Martoňák*, 2. a, G Žilina, Hliny VI; *Róbert Mendris*, 2. b, G Považská Bystrica; *Milan Rusko*, 2. b, G Banská Bystrica, tr. SNP; *Peter Schwartz*, 2. a, G Zvolen

Kategorie C

Milan Kratka, G Prievidza; *Pavel Pavlenda*, G Zvolen; *Martin Gažo*, G Martin; *Jaroslav Kostelanský*, G Žilina, Hliny VI; *Peter Straka*, G Martin; *Radim Kafka*, G Žilina, Veľká okružná; *Jozef Mihál*, G Žilina, Hliny VI; *Janka Mižúrová*, G Vrútky; *Jaroslav Útly*, G Púchov (třídy neuvedeny, všichni jsou žáky I. ročníku)

Východoslovenský kraj

Kategorie A

Vladimír Hudec, 3. a, G Košice, Šmeralova; *Ladislav Kubini* 4. b, G Bardejov; *Jozef Kunca*, 3. d, G Bardejov; *Albín Dzurňák*, 3. a, G Košice, Šmeralova; *Ctirad Klimčík*, 4. c, G Prešov, Konštantinova; *Ladislav Spišiak*, 4. f, G Košice, Šrobárova; *Ivan Brovko*, 4. c, G Spišská Nová Ves; *Alexander Moroz*, 3. c, G Humenné; *Štefan Klembara*, 3. a, G Košice, Šmeralova, *Jana Matúšová* 3. a, G Prešov, Konštantinova; *Miroslav Ploščica*, 4. a, G Stará Ľubovňa; *Marek Smik*, 3. a, G Krompachy

Kategorie B

Peter Spišiak, 2. a, G Košice, Šmeralova; *Ján Hric* a *Anton Sedlák*, oba 2. e, G Prešov, Konštantinova; *Ľubomír Šoltés*, 2. a, G Michalovce; *Milan Polaczyk*, 2. b, G Kežmarok; *Tatiana Martonová*, 2. e, G Poprad; *Katarína Marčáková*, 2. c, G Bardejov; *Jaroslav Hus* a *Peter Kostka*, oba 2. a, G Poprad; *Anton Pisko*, 2. a, G Košice, Šmeralova

Kategorie C

Otto Smolárik, 1. a, G Košice, Kováčova; *Vladimír Dančík*, 1. a, G Košice, Šmeralova; *Juraj Veselý*, 1. b, G Poprad; *Tatiana Rožaiová*, 1. a, G Sečovce; *Marek Hatala*, 1. a, G Košice, Šmeralova; *Marián Ferenc*, 1. f, G Prešov, Konštantinova; *Peter Karailiev*, 1. b, G Michalovce; *Marián Hatrák*, 1. c, G Trebišov; *Igor Hronec*, 1. g, a *Peter Kožuško*, 1. c, oba G Košice, Šrobárova; *Roman Magda*, 1. c, G Košice, Kováčova

Poznámka: Z každého kraje je zpravidla uvedeno nejvýše deset nejúspěšnějších řešitelů v každé kategorii. Větší počet je uveden jen tehdy, získal-li jedenáctý nebo dvanáctý stejný počet bodů jako desátý.

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

Z - P - 1

Jsou dány dva různé body P a Q. Sestrojte čtverec, který obsahuje body P a Q a má nejmenší možný obsah.

Řešení. Hledaný čtverec je čtverec s úhlopříčkou PQ. Obsah čtverce s úhlopříčkou PQ je totiž roven $\frac{1}{2}PQ^2$. Uvažujme čtverec, který obsahuje body P, Q, a přitom PQ není jeho úhlopříčka. Dokážeme-li, že jeho úhlopříčka u je pak větší než PQ, budeme hotovi, neboť jeho obsah $\frac{1}{2}u^2$ bude pak větší než $\frac{1}{2}PQ^2$. Dokážeme to dvěma způsoby.

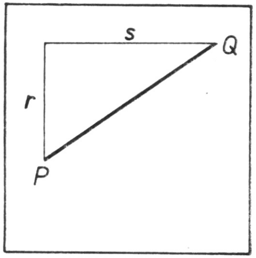
První způsob využívá Pythagorovy věty. Je-li úsečka PQ rovnoběžná se stranou a čtverce, je $PQ \leqq a$, kde a je velikost strany, a tedy

$$u = a\sqrt{2} > a \geqq PQ.$$

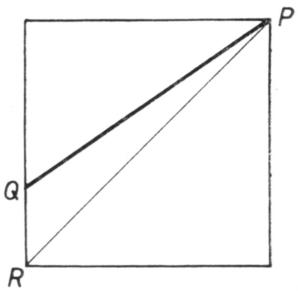
Není-li úsečka PQ rovnoběžná se stranou čtverce, doplníme ji na pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami rovnoběžnými se stranami čtverce (obr. 1). Pro odvěsny r, s platí $r \leqq a, s \leqq a$, přičemž alespoň jedna nerovnost je ostrá. (Pokud by pro obě platila rovnost, byla by úsečka PQ úhlopříčka). Podle Pythagorovy věty je

$$PQ^2 = r^2 + s^2 < a^2 + a^2 = u^2$$

Druhý způsob je založen na známé větě: V trojúhelníku je proti většímu úhlu větší strana. Důkaz provedeme jen pro



Obr. 1

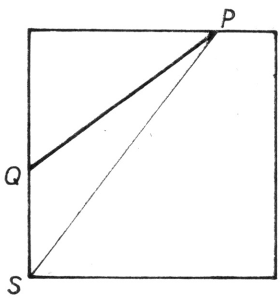


Obr. 2

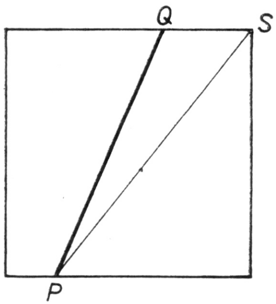
úsečky PQ, které mají oba krajní body na obvodu uvažovaného čtverce. (To stačí, jinak úsečku prodloužíme až k obvodu.)

V případě, kdy jeden krajní bod úsečky PQ leží ve vrcholu čtverce, dostaneme (obr. 2) z trojúhelníku PQR s tupým (pravým) úhlem při vrcholu Q nerovnost $PQ < PR = u$.

V případě, kdy bod P ani bod Q neleží ve vrcholu čtverce, dostaneme (obr. 3 pro P, Q na sousedních stranách, obr. 4 pro



Obr. 3



Obr. 4

P, Q na protějších stranách) z trojúhelníku PQS s tupým (pravým) úhlem při vrcholu Q že $PQ < PS$. Úsečka PS má krajní bod ve vrcholu čtverce a podle předešlého případu je $PS < u$.

Úkolem bylo minimální čtverec sestrojit, což je snadná konstrukce. Existuje jediný hledaný čtverec.

Poznámka. Úloha byla zařazena v XXVIII. ročníku MO jako Z-I-4.

Z - P - 2

Do kružnice je vepsán sedmiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Přímka p prochází středy stran A_3A_4, A_6A_7. Kolik úhlopříček daného sedmiúhelníku přímka p protíná?

Řešení je založeno na následujícím názorném faktu: V rovině je dána přímka p a dva různé body A, B, které na ní neleží. Potom přímka p protíná úsečku AB (tj. prochází jejím vnitřním bodem), právě když body A, B leží v opačných polorovinách určených přímkou p. V úloze leží v jedné polorovině určené přímkou p body A_4, A_5, A_6 a ve druhé body A_7, A_1, A_2, A_3. Z vrcholu A_5 vycházejí čtyři úhlopříčky do čtyř vrcholů opačné poloroviny, z vrcholů A_4 a A_6 po třech úhlopříčkách (a jedné straně). Celkem tedy přímka p protíná $4+3+3 = 10$ úhlopříček daného sedmiúhelníku. (Vyjdeme-li od bodů druhé poloroviny, dostaneme $3+3+2+2$ úhlopříček.)

Obecně, je-li v jedné polorovině určené přímkou p právě k vrcholů n-úhelníku, je počet proťatých úhlopříček roven

$$2(n-k-1)+(k-2)(n-k) = k(n-k)-2.$$

Z - P - 3

Určete dvojici různých trojciferných čísel, která má tyto dvě vlastnosti:

a) v desítkové soustavě mají čísla zápisy xyz a zyx,
b) mají co největšího společného dělitele.

Řešení. Úloha by se dala řešit tak, že bychom sestavili všechny dvojice různých čísel s vlastností a), určili největšího společného dělitele pro každou takovou dvojici čísel, a pak našli dvojici (nebo dvojice), jejíž největší společný dělitel je mezi všemi ostatními největší. Existuje však 360 dvojic různých trojciferných čísel s vlastností a), a to by dalo příliš práce. Pokusíme se tedy zmenšit počet dvojic, ze kterých budeme vybírat. Využijeme k tomu zápisu čísel v desítkové soustavě. Jsou-li N, N' dvě trojciferná čísla s vlastností a), můžeme psát

$$N = 100x + 10y + z, N' = 100z + 10y + x.$$

Jejich rozdíl má tvar

$$N - N' = 99\,(x - z) \tag{1}$$

Můžeme ještě předpokládat, že $N > N'$, tedy $x > z$.
Je-li D společný dělitel dvou čísel, je D též dělitelem jejich rozdílu. Víme tedy, že společný dělitel čísel N, N' je také dělitelem čísla (1). Dělitelé čísla (1) jsou ale pouze čísla 1, 3, 9, 11, 33, 99 a jejich k-násobky, kde k je dělitelem čísla $x - z \leqq \leqq 8$. Protože však hledáme dvojice vlastnosti a) s největším možným společným dělitelem, bude užitečné nejdříve vyzkoušet, jestli existují takové dvojice čísel vlastnosti a), která jsou obě dělitelná některým větším z vyjmenovaných čísel, třeba číslem 99. Všechny trojciferné násobky čísla 99 jsou

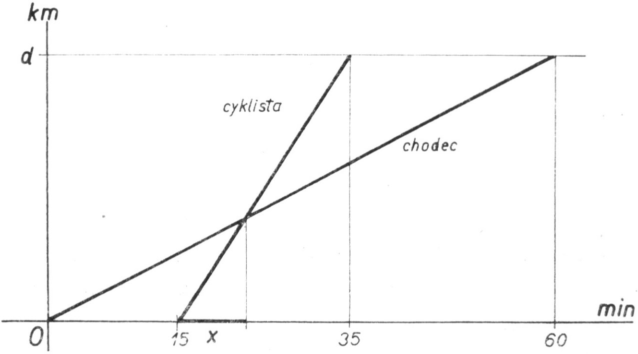
198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990

a mezi nimi jsou tyto dvojice vlastnosti a):
(198, 891) s největším společným dělitelem 99
(297, 792) s největším společným dělitelem 99
(396, 693) s největším společným dělitelem 99
(495, 594) s největším společným dělitelem 99

Teď musíme ještě vyzkoumat, zda neexistují dvojice čísel vlastnosti a), která sice nejsou dělitelná číslem 99, ale jsou obě dělitelná některým číslem větším než 99. Tímto společným dělitelem by muselo být některé z čísel tvaru $33k$, protože pro $k \leqq 8$ je $9k$ i $11k$ menší než 99. Přicházejí v úvahu pouze čísla $4.33 = 132$, $5.33 = 165$ a $7.33 = 231$. (Jsou-li obě čísla dělitelná číslem 8.33, jsou též dělitelná číslem 4.33.) Mezi všemi trojcifernými násobky čísla 132, tedy mezi čísly 132, 264, 396, 528, 660, 792, 924, není žádná dvojice čísel vlastnosti a) a totéž platí pro násobky čísla 165 a čísla 231. Existují tedy právě čtyři dvojice čísel daných vlastností, které jsme uvedli výše. Každá dvojice má za největšího společného dělitele číslo 99.

Z - P - 4

Dva přátelé z téže obce potřebují navštívit blízké město. První jde pěšky a cesta mu trvá hodinu. Druhý jede na kole



Obr. 5

a cesta mu trvá 20 minut. Chodec vyšel čtvrt hodiny před odjezdem cyklisty. Za jakou dobu po svém odjezdu ho cyklista dohoní, je-li pohyb každého z nich rovnoměrný?

Grafické řešení. Na vodorovné ose bude čas v minutách, na svislé vzdálenosti v kilometrech. (Obr. 5.) Pohyb chodce bude začínat v počátku a končit v bodě (60, d), kde d je vzdálenost města od obce (tu neznáme, ani nezjistíme). Pohyb cyklisty pak začíná v bodě (15, 0) a končí v bodě (35, d). Souřadnice průsečíku obou úseček odpovídají času a místu, kdy a kde předjel cyklista chodce.

Řešení porovnáním vzdáleností. Chodec má rychlost d km/hod. a cyklista $3d$ km/hod. Označme x hledanou dobu (v hodinách). V okamžiku setkání tedy cyklista i chodec urazili tutéž vzdálenost, a to cyklista $3dx$ km a chodec $d\left(x+\frac{1}{4}\right)$ km $\left(\text{měl } \frac{1}{4} \text{ h náskok}\right)$. Je tedy

$$3dx = d\left(x+\frac{1}{4}\right),$$

a odtud

$$x = \frac{1}{8}\,\mathrm{h} \quad \left(= 7\frac{1}{2}\,\mathrm{min}\right).$$

Poznámka. V VII. ročníku MO byla úloha zařazena jako D-II-3. Ve sbírce *Vyšín-Macháček*: Vybrané úlohy MO kategorie Z je uvedena pod č. 56.

Z - I - 1

Je dán čtverec $ABCD$ s délkou strany 2. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA jsou postupně zvoleny body K, L, M, N tak, že $AK = BL = CM = DN = x$. Vyjádřete obsah čtverce $KLMN$ pomocí x. Pro které x je obsah čtverce $KLMN$ nejmenší?

Řešení. Podle Pythagorovy věty snadno zjistíme, že čtverec $KLMN$ má obsah $x^2 + (2 - x)^2$.

V naší úloze zbývá zjistit, pro které x nabývá výraz

$$x^2 + (2 - x)^2 = 2\,[(x - 1)^2 + 1]$$

nejmenší hodnoty, probíhá-li x množinu $\langle 0, 2 \rangle$. Zřejmě je to pro $x = 1$. Minimální čtverec má tedy vrcholy ve středech stran daného čtverce a jeho obsah je polovina obsahu daného čtverce.

Z - I - 2

Je dán trojboký jehlan $ABCV$. Rovina protíná jeho hrany AB, BC, CV a neprochází žádným z bodů A, B, C, V. Které hrany jehlanu rovina ještě protíná?

Řešení. Daná rovina dělí prostor na dva poloprostory. Hrana daného čtyřstěnu je jí proťata, právě když koncové body leží v opačných poloprostorech. Protože hrany AB, BC, CV

jsou proťaty, leží v jednom poloprostoru vrcholy A, C a ve druhém B, V. Ze zbývajících hran tedy rovina protíná hranu AV; hrany AC, BV neprotíná.

Z - I - 3

Je-li N dvojciferné číslo, označme N' číslo, které z něho dostaneme změnou pořadí číslic. Najděte všechny dvojice dvojciferných čísel X, Y, pro které jsou čísla $XY - 1$, $X'Y' - 1$ obě dělitelná deseti.

Řešení. Úlohu bychom mohli řešit velmi pracně probráním všech dvojic dvojciferných čísel. Podobně jako v Z-P-3 raději využijeme rozvoje čísel v desítkové soustavě.

Je-li

$$X = 10r + s$$
$$Y = 10u + v,$$

bude

$$X' = 10s + r$$
$$Y' = 10v + u,$$

a tedy

$$XY - 1 = (10r + s)(10u + v) - 1 = 10(\ldots) + sv - 1$$
$$X'Y' - 1 = (10s + r)(10v + u) - 1 = 10(\ldots) + ru - 1$$

Obě tato čísla budou dělitelná deseti, právě když budou deseti dělitelná obě čísla $sv - 1$, $ru - 1$. Vzhledem k tomu, že

$$1 \leqq r \leqq 9,\ 1 \leqq u \leqq 9,\ 0 \leqq s \leqq 9,\ 0 \leqq v \leqq 9,$$

bude

$$0 \leqq sv \leqq 81,\ 1 \leqq ru \leqq 81.$$

Z čísel 1, 11, 21, ..., 81 jsou součinem dvou číslic jen

$$1 = 1.1,\ 21 = 3.7 \text{ a } 81 = 9.9.$$

Zkombinujeme-li všechny možnosti, dostaneme

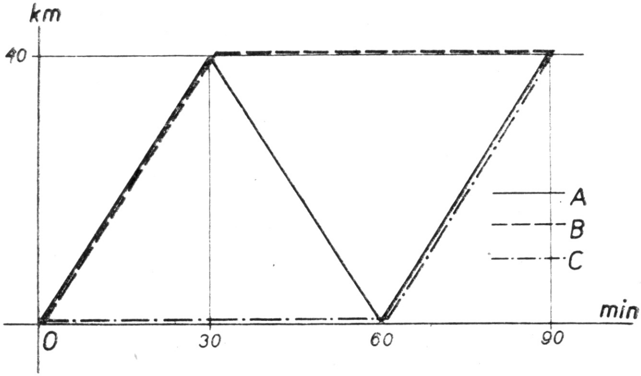
$X = 11$, $Y = 11$
$X = 13$, $Y = 17$
$X = 19$, $Y = 19$
$X = 31$, $Y = 71$
$X = 33$, $Y = 77$
$X = 37$, $Y = 73$
$X = 39$, $Y = 79$
$X = 91$, $Y = 91$
$X = 93$, $Y = 97$
$X = 99$, $Y = 99$

Všechna tato řešení vyhovují.

Z - I - 4

Zjistěte, jestli mohou tři cestující stihnout vlak, který odjíždí za 75 minut ze stanice vzdálené 40 km, dokáže-li každý z nich běžet průměrnou rychlostí 10 km/hod. a mají-li k dispozici dvoumístný motocykl, který může jet průměrnou rychlostí 80 km/hod.

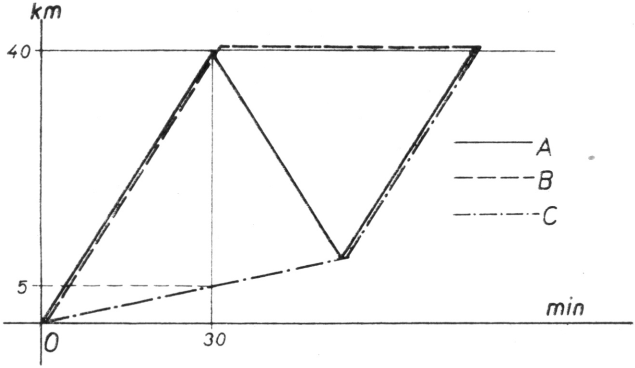
Řešení. Nejpohodlnější by bylo, kdyby *A* odvezl *B* na nádraží a *C* zatím počkal, než se pro něj *A* vrátí a také ho odveze na nádraží. Grafické znázornění přepravy je na obr. 6.



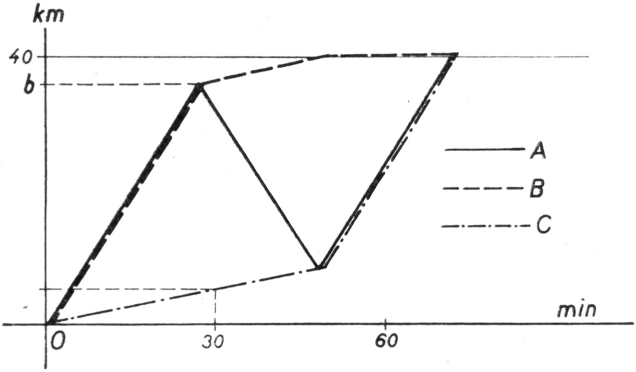
Obr. 6

To by ale motocykl urazil třikrát vzdálenost 40 km, což dokáže nejdříve za 90 minut, takže by cestujícím *A* a *C* vlak ujel.

Přepravu bychom zrychlili, kdyby *A* odvezl *B* na nádraží a *C* by mezitím běžel. *A* by mu pak jel naproti, a až by ho potkal, odvezl by ho na nádraží (obr. 7). Vypočteme, jak dlouho by přeprava trvala. Po 30 minutách vyjíždí motocykl z nádraží zpět a běžec uběhl 5 km. Součet jejich drah od tohoto okamžiku až do setkání na silnici bude tedy 35 km, běžec z něho urazí $\frac{1}{9}$ a motocyklista $\frac{8}{9}$ (úměrně rychlostem). Tutéž vzdálenost urazí pak motocykl s oběma cestujícími od místa setkání k nádraží. Motocykl tedy celkem ujede



Obr. 7



Obr. 8

$$40 + 2 \cdot \frac{8}{9} \cdot 35 = 102\frac{2}{9} \text{ km},$$

což mu bude trvat déle než 75 minut. Ani tento způsob přepravy není dostatečně rychlý.

Zdokonalíme ho tak, že A neodveze B až na nádraží, ale vysadí ho b km od startu, ještě před nádražím. B na nádraží doběhne a A se mezitím vrátí naproti C, kterého doveze na nádraží (obr. 8). V tomto případě závisí celková doba transportu na b. Určíme ji podobně jako v minulém případě. V okamžiku první obrátky motocykl ujel b km a C uběhl $\frac{b}{8}$ km, a je tedy mezi nimi vzdálenost $\frac{7}{8}b$. Z té urazí motocyklista $\frac{8}{9}$, tj. $\frac{7b}{9}$, a běžec $\frac{1}{9}$, tj. $\frac{7b}{8.9}$, než se potkají. Pak zbývá k nádraží

$$40 - \frac{7b}{8.9} - \frac{b}{8} = 40 - \frac{2b}{9}\,.$$

Celkem ujede motocykl

$$b + \frac{7b}{9} + 40 - \frac{2b}{9} = 40 + \frac{14b}{9}$$

kilometrů, což mu trvá

$$\frac{40 + \frac{14}{9}b}{80} = \frac{1}{2} + \frac{7b}{9.40}$$

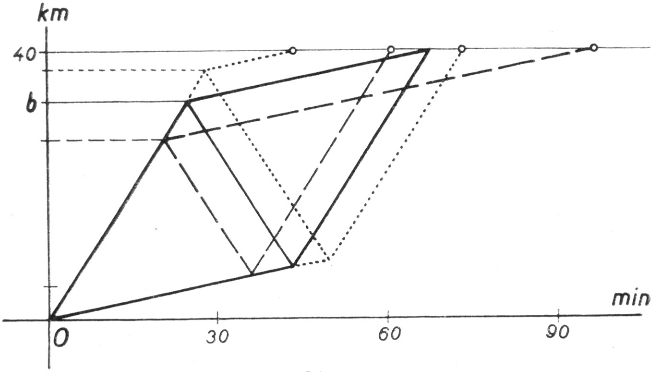
hodin.

Cestující B jede na motocyklu $\frac{b}{80}$ hod. a běží $\frac{40 - b}{10}$ hod., celkem $4 - \frac{7b}{80}$ hod. Existuje-li b tak, aby zároveň

$$0 \leqq b \leqq 40, \qquad \frac{1}{2} + \frac{7b}{9.40} \leqq \frac{5}{4}, \qquad 4 - \frac{7b}{80} \leqq \frac{5}{4},$$

umožní uvažovaný systém přepravy všem třem cestujícím stihnout vlak. Taková b skutečně existují, jsou to právě všechna

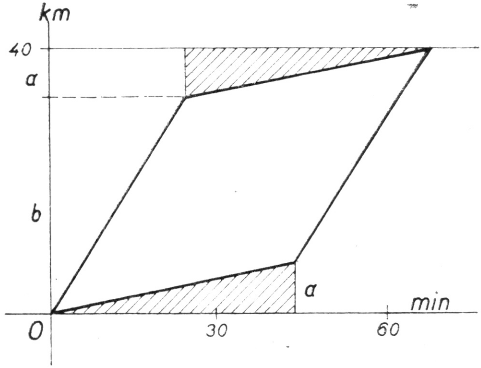
$$b \in \left\langle \frac{220}{7}, \frac{270}{7} \right\rangle \text{(km)}.$$



Obr. 9

Místo obecného rozboru jsme mohli úlohu řešit také tak, že bychom pro třetí systém přepravy odhadli některé vhodné b (např. 35 km), a pro ně pak vyřešili příslušnou pohybovou úlohu.

Všimněme si ještě jedné skutečnosti, zřejmé z grafického znázornění (obr. 9). Vyjdeme ze situace, kdy všichni tři cestující dorazí k nádraží současně (plná čára). Zvětšíme-li b, zpozdí se příjezd A a C na nádraží (tečkovaně). Zmenšíme-li b, zpozdí se příchod B na nádraží (čárkovaně). Případ, kdy všichni tři dorazí současně, je tedy nejrychlejší způsob dopravy uvažovaného typu. Stačí tedy vyřešit úlohu pro tuto speciální situaci. To lze provést tímto způsobem: Označme d vzdálenost k nádraží, v rychlost běžce a w rychlost motocyklu (tyto údaje jsou dány). Dále označme b vzdálenost první obrátky od startu. Vzdálenost druhé obrátky od nádraží je také b — to je patrno například z grafu (obr. 10) ze shodnosti vyšrafovaných



Obr. 10

trojúhelníků. Označme ještě $a = d - b$ vzdálenost první otáčky motocyklu od nádraží, což je také vzdálenost startu od druhé otáčky. Vzdálenost obou otáček je pak $d - 2a = 2b - d$. Motocykl urazí celkem $b + (2b - d) + b = 4b - d$, doba jízdy je $\frac{4b - d}{w}$. Zbývá určit b. Motocykl potřebuje k ujetí dráhy od startu k první otáčce a zpět k druhé otáčce čas $\dfrac{b + 2b - d}{w}$,

běžec potřebuje k proběhnutí od startu k druhé otáčce čas $\dfrac{a}{v} = \dfrac{d - b}{v}$. Je tedy $\dfrac{3b - d}{w} = \dfrac{d - b}{v}$, a proto $b = \dfrac{v + w}{3v + w}\, d.$

Dosazením tohoto výsledku do zlomku $\dfrac{4b - d}{w}$ dostaneme celkovou dobu přepravy $\dfrac{v + 3w}{w(3v + w)}\, d$ (hod.).

Dosadíme-li $v = 10$ km/hod., $w = 80$ km/hod., $d = 40$ km, vyjde čas $\dfrac{25}{22}$ hod., což je méně než $\dfrac{5}{4}$ hod., tj. 75 minut — cestující mohou vlak stihnout.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

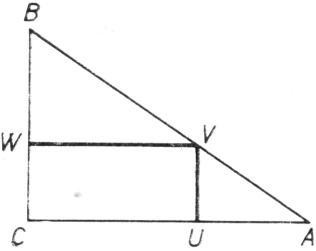
Z - II - 1

Do pravoúhlého trojúhelníku ABC vepište obdélník $CUVW$ (obr. 11) tak, aby součet druhých mocnin délek jeho stran byl nejmenší možný. Výsledek zdůvodněte.

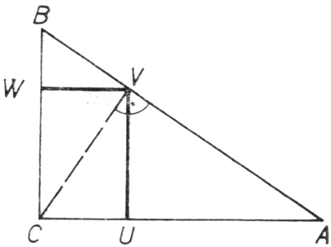
Řešení. Podle Pythagorovy věty je

$$S = CU^2 + UV^2 + VW^2 + CW^2 = 2\, CV^2$$

Součet S je tedy nejmenší možný, právě když je CV^2 nejmenší možné, tj. právě když je CV nejmenší možné. Ze všech bodů přepony AB má od vrcholu C nejmenší vzdálenost pata kolmice spuštěné na ni z bodu C. Úloha má vždy jediné řešení, které snadno sestrojíme (obr. 12).



Obr. 11



Obr. 12

Z - II - 2

Je-li N přirozené číslo, označme N' číslo, které z něho dostaneme obrácením pořadí číslic. Najděte všechna trojciferná čísla N, pro která je číslo $NN' - 3$ násobkem čísla 10 a zároveň číslo $N + N' + 4$ je násobkem čísla 100.

Řešení. Aby byl součin $NN' - 3$ dělitelný deseti, musí součin první a poslední číslice čísla N končit číslicí 3. To nastane jen v případech 1.3, 3.1, 7.9, 9.7. Kdyby první číslice čísla N byla 3 a poslední 1 (nebo obráceně), nebyl by součet $N + N' + 4$ dělitelný deseti. Hledané číslo N musí tedy mít první číslici 7 a poslední 9, nebo obráceně.

Druhou číslici čísla N označme x. Poslední číslice jednoho z čísel N, N' je 7 a druhého 9. Představíme-li si, jak bychom sčítali $N + N' + 4$ »odzadu«, vidíme, že druhá číslice tohoto součtu musí být poslední číslicí čísla $2x + 2$. Má-li být číslo $N + N' + 4$ dělitelné stem, musí jeho druhá číslice být 0. Poslední číslice čísla $2x$ musí být tedy 8, takže číslice x musí být buď 4, nebo 9.

Všechna hledaná čísla N jsou tedy mezi čísly 749, 799, 947, 977. Snadno se přesvědčíme, že všechna tato čísla vyhovují podmínkám úlohy.

Z - II - 3

Je dán pravidelný 33-úhelník $A_1A_2 \ldots A_{33}$. Určete počet úseček spojujících jeho vrcholy, které mají alespoň jeden společný bod s trojúhelníkem $A_{11}A_{22}A_{33}$.

Řešení. Z každého bodu A_1 až A_{10} vychází po 23 úsečkách protínajících daný trojúhelník $A_{11}A_{22}A_{33}$, jsou to spojnice zvoleného bodu s body $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{33}$. Podobně z bodů A_{12} až A_{21} a A_{23} až A_{32} vychází po 23 úsečkách protínajících trojúhelník. Z bodu A_{11} vychází 32 úseček s druhým koncovým bodem ve vrcholu 33-úhelníka a všechny mají s uvažovaným trojúhelníkem společný bod. Dvojnásobný počet hledaných úseček je tedy $30 \,.\, 23 + 3 \,.\, 32 = 786$, protože jsme každou takovou úsečku počítali dvakrát. Hledaný počet je 393.

Jiné řešení. Celkový počet úseček A_iA_j $(i \neq j)$ je $\dfrac{33 \,.\, 32}{2} = 528$.

Od tohoto počtu odečteme ty úsečky, které nemají s uvažovaným trojúhelníkem žádný společný bod. Z každého vrcholu

33-úhelníku, až na vrcholy A_{11}, A_{22}, A_{33}, jich vychází 9, celkem jich je $\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 9 = 135$. Hledaný počet je $528 - 135 = 393$.

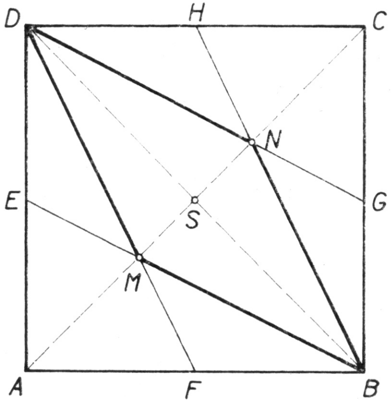
Z - II - 4

Z Prahy do Bratislavy vyjíždí přesně v 10 hod. auto značky Volha, které jede průměrnou rychlostí 100 km/hod. Zásilku veze z Bratislavy naproti přijíždějící volze auto zn. Škoda, které vyjíždí z Bratislavy také v 10 hod. Jakou nejmenší průměrnou rychlostí musí jet toto auto až do místa setkání s volhou, aby se volha po převzetí zásilky vrátila do Prahy nejpozději ve 14 hod.? (Vzdálenost z Prahy do Bratislavy je 350 km).

Řešení. Aby se volha vrátila do 14 hod., musí se otočit nejpozději za 2 hodiny po výjezdu, tedy ve vzdálenosti nejvýše 200 km od Prahy. Škodovka musí za tuto dobu ujet zbývající vzdálenost, tj. aspoň 150 km. Musí tedy jet rychlostí aspoň 75 km/hod. Při této rychlosti se auta setkají přesně ve 12 hod.

ÚLOHY III. KOLA V ČSR

1. Je dán čtverec *ABCD* o straně *s*. Označme *F*, *G*, *H*, *E* středy stran *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. Bod *M* je průsečíkem úseček *BE*, *DF*; bod *N* je průsečíkem úseček *GD*, *BH*. Body *M*, *N* leží na úhlopříčce *AC* (obr. 13).
   a) Vypočtěte obsah čtyřúhelníku *BNDM*.
   b) Určete, o jaký čtyřúhelník se jedná.



Obr. 13

2. Pro která dvojciferná čísla xy, yx $(x \neq y)$ je největší společný dělitel jejich součtu a rozdílu největší?

3. Je dán pravidelný osmiúhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_8$ o straně velikosti a, S je střed kružnice opsané osmiúhelníku. Sestrojte kružnici k se středem S a poloměrem $\frac{a}{2}$.

   Určete počet úseček spojujících vrcholy daného osmiúhelníku, které nemají s kružnicí k žádný společný bod.

4. Na přímém úseku dvoukolejné trati z A do B (vzdálenost AB je 6 km) jezdí oběma směry tramvaje rychlostí 20 km/hod v šestiminutových intervalech. Chodec jde podél trati z A do B rychlostí 5 km/hod.

   a) V jakých intervalech bude chodec tramvaje potkávat a v jakých intervalech jej budou tramvaje předjíždět?

b) Jaký největší možný počet tramvají může chodec potkat a jaký největší možný počet tramvají jej může předjet v úseku z A do B?

ÚLOHY III. KOLA V SSR

1. Je daný obdĺžnik $ABCD$. Ak X je bod uhlopriečky BD, tak označme po rade E, F, G, H päty kolmíc vedených z bodu X na strany AB, BC, CD, DA. Určte bod X uhlopriečky BD tak, aby súčet obsahov obdĺžnikov $AEXH$ a $XFCG$ bol najväčší.
2. Automobil sa má dostať z miesta A do miesta B vzdialeného 1300 km. Benzín možno kupovať len v mieste A. V tomto mieste môže automobil tankovať do nádrže, ktorej obsah je 40 l a môže tiež kupovať benzín do 20 l kanistrov, z ktorých si po ceste môže nádrž doplniť. Automobil môže však viezť so sebou najviac tri plné kanistre a môže si tiež zriaďovať zásoby benzínu v kanistroch popri ceste. Zistite, či za predpokladu, že automobil má spotrebu 10 l na 100 km, stačí na cestu 195 l benzínu.
3. Určte najmenšie prirodzené číslo, ktorým treba násobiť číslo 1980, aby sme dostali druhú mocninu prirodzeného čísla.
4. V kruhu je 12 tetív. Určte maximálny počet neprekrývajúcich sa častí kruhu, na ktoré je kruh rozdelený danými tetivami.

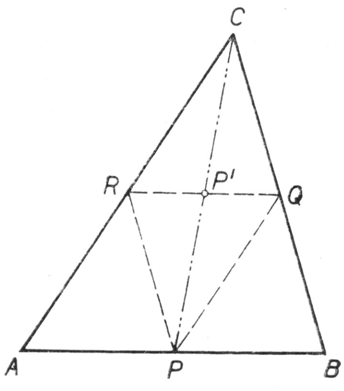
Kategorie C

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

C - P - 1

Je dán trojúhelník ABC. Označme P, Q, R středy jeho stran. Dokažte, že trojúhelníky ABC a PQR mají těžiště v tomtéž bodě.

Řešení. Dokážeme, že těžnice (přímky) trojúhelníku ABC splynou s těžnicemi trojúhelníku PQR; z toho plyne, že těžiště



Obr. 14

obou trojúhelníků splynou. Důkaz provedeme pro těžnici CP (obr. 14). Úsečka QR je střední příčka trojúhelníku ABC, a je tedy $QR \parallel AB$ a $QR = \frac{1}{2} AB$. Označme P' průsečík úseček CP, QR. Pak je úsečka RP' střední příčka trojúhelníku APC, neboť prochází středem R strany AC a je $RQ \parallel AP$. Z obdobného důvodu je úsečka QP' střední příčka trojúhelníku BPC. Pro bod P' tedy platí

$$RP' = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} BP = QP',$$

tj. bod P' je střed úsečky QR, tj. přímka CP je těžnice trojúhelníku PQR.

Jiné řešení. Úsečka PQ je střední příčka trojúhelníku ABC, je proto $PQ = CR$ a $PQ \parallel CR$. Body P, Q, C, R tvoří tedy rovnoběžník. Úhlopříčky rovnoběžníku se půlí, přímka CP tedy prochází středem úsečky QR a je to těžnice trojúhelníku PQR.

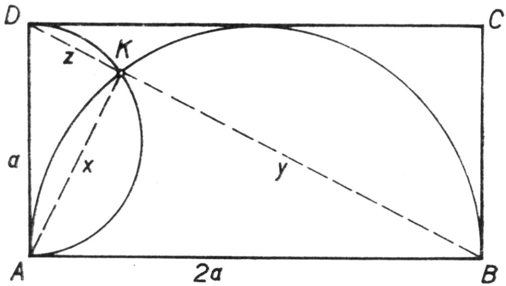
C - P - 2

Je dán obdélník $ABCD$, v němž $AB = 2a$, $BC = a$. Nad stranami AB, AD jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice, které kromě bodu A mají společný ještě bod K.

a) Dokažte, že bod K leží na úhlopříčce BD.

b) Vypočtěte vzdálenosti bodu K od vrcholů A, B, D.

Řešení. a) Poněvadž podle Thaletovy věty jsou úhly AKD, AKB pravé, leží body B, K, D v přímce (obr. 15).



Obr. 15

b) Podle Pythagorovy věty je $BD = a\sqrt{5}$. Označme hledané vzdálenosti $AK = x$, $BK = y$, $DK = z$. Snadno vypočteme x — je to výška na základnu BD v trojúhelníku ABD, jehož obsah je a^2, je $x = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. Z pravoúhlých trojúhelníků ABK, ADK dostáváme podle Pythagorovy věty

$$y = \sqrt{4a^2 - x^2} = \frac{4a}{\sqrt{5}}, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Mohli jsme využít také podobnosti trojúhelníků,

$$\triangle DAB \sim \triangle AKB \sim \triangle DKA,$$

které mají shodné odpovídající si úhly. Poměry velikostí odvěsen jsou

$$\frac{DA}{AB} = \frac{AK}{BK} = \frac{DK}{AK},$$

takže

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{y} = \frac{z}{x}.$$

Odtud vidíme, že $x = 2z$, $y = 4z$. Teď už stačí určit některou z veličin (například x z pravoúhlého trojúhelníku AKB o odvěsnách x, $2x$ a přeponě $2a$), abychom dostali ostatní.

Poznámka. Úloha byla uvedena v XIX. roč. MO jako Z-I-3. V brožuře *Vyšín-Macháček*: Vybrané úlohy MO – kategorie Z je zařazena pod č. 33.

C-P-3

Najděte všechna trojciferná čísla s touto vlastností: Napíšeme-li před hledané číslo stejnou cifru, jako je ta, která stojí na místě jeho jednotek, dostaneme čtyřciferné číslo, které je o 18 menší než sedminásobek hledaného čísla.

Řešení. Má-li hledané číslo v desítkové soustavě zápis *abc*, má pozměněné číslo zápis *cabc*. Pro číslice a, b, c přitom platí $a \neq 0$ (trojcifernost původního čísla), a $c \neq 0$ (čtyřcifernost pozměněného čísla). Podle podmínky úlohy je

$$1000c + 100a + 10b + c = 7\,(100a + 10b + c) - 18,$$

odkud dostaneme

$$c = \frac{3(100a + 10b - 3)}{497}.$$

Vzhledem k tomu, že c je celé číslo a 497 není dělitelno třemi, je nutně $100a + 10b - 3$ dělitelno 497. Mohou nastat jen dvě možnosti:

(I) $100a + 10b - 3 = 497$

(II) $100a + 10b - 3 = 994$

Případ (I) vede ke vztahu

$$10a + b = 50,$$

kterému vyhovují jen číslice $a = 5$, $b = 0$. Hledané číslo je pak 503 - snadno ověříme, že splňuje podmínky úlohy. Případ (II) vede ke vztahu

$$100a + 10b = 997,$$

ale ten pro žádné číslice a, b neplatí — pravá strana není totiž dělitelná deseti.
Úloha má jediné řešení - číslo 503.

Poznámka. V XII. ročníku byla úloha zařazena jako D-I-2. V brožuře *Vyšín-Macháček*: Vybrané úlohy MO - kategorie Z je uvedena pod č. 6.

C - P - 4

Určete všechna čísla a, b, pro která platí

$$(a^2 + b^2)^3 - (a^3 + b^3)^2 \geqq 0.$$

Zjistěte všechna a, b, pro která nastane rovnost.

Řešení. Jednoduchými ekvivalentními úpravami převedeme danou nerovnost na nerovnost

$$a^2b^2 (3a^2 - 2ab + 3b^2) \geqq 0.$$

Výraz a^2b^2 je pro všechna reálná čísla nezáporný, a protože

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 = (a - b)^2 + 2(a^2 + b^2),$$

je také výraz $3a^2 - 2ab + 3b^2$ nezáporný pro každou dvojici reálných čísel a, b. Platí tedy vždy

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 \geqq 0, \; a^2b^2 \geqq 0,$$

a tedy také

$$a^2b^2 (3a^2 - 2ab + 3b^2) \geqq 0.$$

Pro každou dvojici reálných čísel a, b tedy platí také daná nerovnost. Rovnost nastává v dané nerovnosti právě tehdy, platí-li

$$a^2b^2 [(a - b)^2 + 2(a^2 + b^2)] = 0.$$

V dané nerovnosti platí proto znaménko rovnosti tehdy a jen tehdy, je-li $a = 0$ nebo $b = 0$.

Poznámka. Úloha byla zařazena v XV. ročníku MO jako D-II-1. V brožuře *Vyšín-Macháček*: Vybrané úlohy MO — kategorie Z je uvedena pod č. 23.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

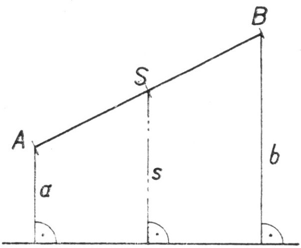
C - I - 1

V rovině je dán trojúhelník ABC a přímka p, která neprochází žádným jeho vnitřním bodem. Dokažte, že součet vzdáleností bodů A, B, C od přímky p se rovná součtu vzdáleností středů stran AB, BC, AC od přímky p.

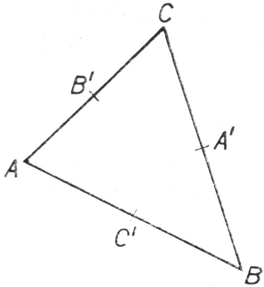
Řešení. Nejprve dokážeme pomocnou větu, jejímž přímým důsledkem bude věta, kterou máme dokázat v úloze.

Leží-li body A, B v téže polorovině s hranicí p, je vzdálenost středu S úsečky AB od přímky p aritmetickým průměrem vzdáleností obou bodů A, B od přímky p (obr. 16).

Pomocná věta zřejmě platí v případech $AB \parallel p$ nebo $AB \perp p$. Má-li úsečka AB jinou polohu, označme a, b, s vzdálenosti bodů A, B, S od přímky p. Přitom je s délka střední příčky



Obr. 16



Obr. 17

lichoběžníka se základnami a, b (nebo pravoúhlého trojúhelníku, je-li $a = 0$ nebo $b = 0$). Platí tedy

$$s = \frac{a + b}{2}.$$

Při řešení úlohy C-I-1 označíme vrcholy trojúhelníku A, B, C, středy stran A', B', C' a jejich vzdálenosti od přímky p označme a', b', c' (obr. 17). Podle pomocné věty platí

$$a' = \frac{1}{2}(b + c), \quad b' = \frac{1}{2}(c + a), \quad c' = \frac{1}{2}(a + b).$$

Je tedy

$$a' + b' + c' = a + b + c$$

C - I - 2

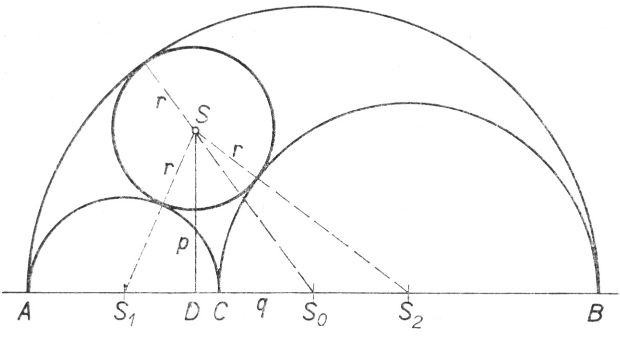
Úsečka AB délky 12 cm je rozdělena bodem C v poměru 1 : 2. V jedné polorovině určené přímkou AB jsou sestrojeny polokružnice s průměry AB, AC, CB. Vypočítejte poloměr kružnice, která se dotýká všech tří polokružnic.

Řešení. Poloměr uvažované kružnice označme r a její střed S (obr. 18). Spustíme-li z bodu S kolmici na úsečku AB a její patu označíme D, vidíme tři pravoúhlé trojúhelníky, které mají společnou odvěsnu SD a jejichž přepony úzce souvisí s poloměry daných polokružnic a s hledaným poloměrem r. Budeme se snažit tyto souvislosti vyjádřit rovnicemi a z nich určit r. Podle Pythagorovy věty dostáváme, označíme-li ještě $SD = p$, $S_0D = q$,

z $\triangle S_0SD$: $\quad p^2 + q^2 = (6 - r)^2,$

z $\triangle S_1SD$: $\quad p^2 + (4 - q)^2 = (2 + r)^2,$

z $\triangle S_2SD$: $\quad p^2 + (2 + q)^2 = (4 + r)^2.$



Obr. 18

To je soustava tří rovnic o třech neznámých p, q, r, které sice nejsou lineární, ale snadno je vyřešíme, všimneme-li, že se v každé vyskytuje $p^2 + q^2$ vlevo a r^2 vpravo. Po úpravě je dostaneme ve tvaru

$$p^2 + q^2 - r^2 = -12r + 36$$

$$p^2 + q^2 - r^2 = 4r + 8q - 12$$

$$p^2 + q^2 - r^2 = 8r - 4q + 12.$$

Odtud plyne, porovnáme-li pravé strany 1. a 2., resp. 1. a 3. rovnice

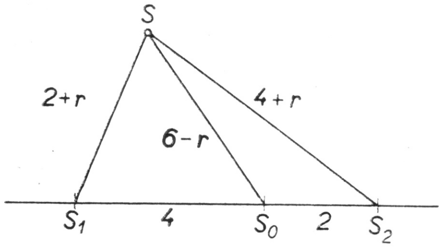
$$2r + q = 6$$

$$5r - q = 6.$$

To už je soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kterou snadno vyřešíme: sečtením obou rovnic hned dostaneme $r = \frac{12}{7}$. Existuje-li popsaná kružnice, má poloměr $\frac{12}{7}$.

Jiné řešení. Vyhneme se zavádění dvou pomocných neznámých. Vyjdeme opět z trojúhelníku S_1S_2S rozděleného příčkou ve dva trojúhelníky $T_1 = S_1S_0S$ a $T_2 = S_2S_0S$ (obr. 19). Pro jejich obsahy platí

$$T_1 = 2\,T_2, \qquad (\star)$$



Obr. 19

neboť mají společnou výšku z vrcholu S na strany $S_1S_0 = 4$, $S_2S_0 = 2$. Podle známého Heronova vzorce pro obsah trojúhelníka

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde s je poloviční obvod a a, b, c jsou délky stran, dostaneme

$$T_1^2 = 12\,r\,(4-r)$$

$$T_2^2 = 24\,r\,(2-r).$$

Dosadíme-li odtud do vztahu (*), dostaneme

$$12\,r\,(4-r) = 4.24\,r\,(2-r)$$

neboli

$$4 - r = 8\,(2-r),$$

a odtud pro hledaný poloměr $r = \frac{12}{7}$.

Poznámka. Kružnici, jejíž poloměr jsme vypočítali, snadno sestrojíme. Vzdálenost jejího středu S od bodu S_1 bude $2 + \frac{12}{7}$, od bodu S_2 bude $4 + \frac{12}{7}$.

C - I - 3

Kružnice $k_1 = (S_1, r_1)$, $k_2 = (S_2, r_2)$ se dotýkají vně v bodě C. Kromě společné tečny v bodě C mají ještě další dvě společné tečny. Vezměme jednu z nich a body dotyku těchto kružnic na ní označme A, B.

a) Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.

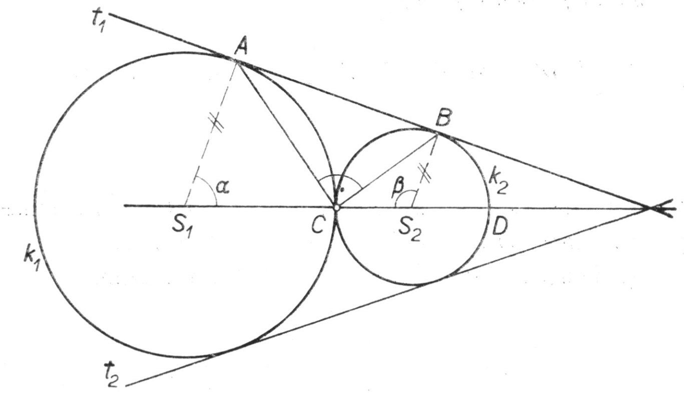
b) Vyjádřete obsah trojúhelníku ABC pomocí r_1 a r_2.

Řešení části a). Přímky S_1A a S_2B jsou rovnoběžné, neboť obě jsou kolmé ke společné tečně. Označme D druhý průsečík přímky S_1S_2 s kružnicí k_2 (obr. 20). Trojúhelníky S_1AC, S_2BD jsou podobné, neboť jsou oba rovnoramenné a mají stejné úhly při vrcholech S_1, S_2. Proto přímky AC a BD jsou rovnoběžné a úhly ACB, CBD jsou stejně velké. Podle Thaletovy věty je úhel CBD pravý.

Jiné řešení části a). Přímky S_1A a S_2B jsou rovnoběžné. Je-li tedy α velikost úhlu AS_1C a β velikost úhlu BS_2C, je $\alpha + \beta = 180°$. Dále, protože trojúhelníky ACS_1 a CBS_2 jsou rovnoramenné, je $\sphericalangle S_1CA = 90° - \frac{\alpha}{2}$ a $\sphericalangle S_2CB = 90° - \frac{\beta}{2}$.

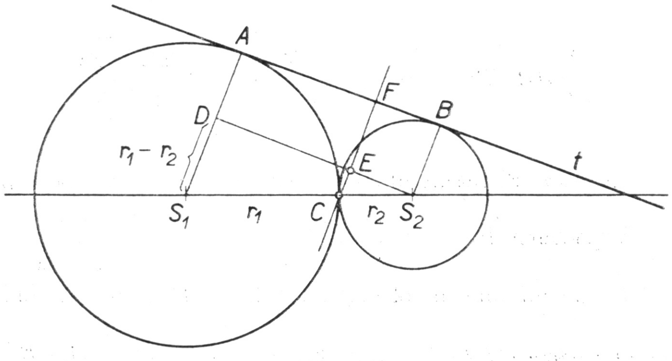
Odtud dostaneme

$$\sphericalangle ACB = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°.$$



Obr. 20

Řešení části b). Zvolme označení tak, aby $r_1 \geqq r_2$. Na přímce S_1A najdeme bod D tak, aby přímka DS_2 byla rovnoběžná s AB. Dostaneme pravoúhlý trojúhelník S_1S_2D a obdélník DS_2BA (obr. 21).



Obr. 21

Podle Pythagorovy věty

$$AB^2 = DS_2^2 = S_1S_2^2 - DS_1^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 =$$

$$= 4r_1r_2.$$

Dále veďme bodem C kolmici na přímku AB. Tato kolmice protne přímku DS_2 v bodě E a přímku AB v bodě F.

Z podobných trojúhelníků S_1S_2D, CS_2E dostaneme

$$CE = \frac{CS_2 . DS_1}{S_1S_2} = \frac{r_2 (r_1 - r_2)}{r_1 + r_2},$$

a tedy

$$CF = CE + EF = \frac{r_2 (r_1 - r_2)}{r_1 + r_2} + r_2 = \frac{2r_2 r_1}{r_1 + r_2}.$$

Obsah trojúhelníku ABC je pak

$$\frac{1}{2} AB . CF = \frac{1}{2}\sqrt{4r_1r_2} . \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} = 2\frac{r_1r_2 \sqrt{r_1r_2}}{r_1 + r_2}$$

Poznámka. K řešení úlohy se nabízí i následující postup: Vypočteme $AC = 2r_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1 + r_2}}$, $BC = 2r_2 \sqrt{\frac{r_1}{r_1 + r_2}}$ a AB. To nám umožní dokázat pravoúhlost ABC pomocí obrácené Pythagorovy věty a vypočíst jeho obsah jako $\frac{1}{2} AC . BC$.

Tento způsob je však daleko pracnější než postupy uvedené výše.

C - I - 4

Uvažujme všechny výrazy, které dostaneme z výrazu

$$u - v - x - y - z$$

doplněním alespoň jedné dvojice závorek tak, aby se tím ve výrazu neobjevilo násobení. [Jeden z těchto výrazů je například $u - ((v - x) - y - z)$. Avšak například výraz $(u - v)(- x - - y - z)$ mezi uvažované výrazy nepatří, neboť je v něm násobení.] Kolika různých hodnot mohou nejvýše tyto výrazy nabývat pro jednu pětici čísel u, v, x, y, z?

Řešení. Ať si vezmeme kterýkoli z uvažovaných výrazů, můžeme vždy postupně provést úpravy, naznačené závorkami, a dospět k výrazu tvaru

$$u - v \alpha x \beta y \gamma z,$$

kde každý ze symbolů α, β, γ znamená buď $+$, nebo $-$. Výrazů tohoto tvaru existuje 8. Ukážeme, že každý z nich může vzniknout uvažovaným způsobem:

$$u - v + x + y + z = u - (v - x - y - z)$$

$$u - v + x + y - z = u - (v - x - y) - z$$

$$u - v + x - y + z = u - (v - x) - (y - z)$$

$$u - v + x - y - z = u - (v - x) - y - z$$

$$u - v - x + y + z = u - v - (x - y - z)$$

$$u - v - x + y - z = u - v - (x - y) - z$$

$$u - v - x - y + z = u - v - x - (y - z)$$

$$u - v - x - y - z = (u - v) - x - y - z$$

Pro jakoukoliv pětici čísel x, y, z, u, v nabývají tedy všechny výrazy popsané v úloze nejvýše osmi různých hodnot. Existují však pětice, pro něž nabývá osm naposled uvedených výrazů osmi navzájem různých hodnot (např. $u = v = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$). Hledaný počet je tedy 8.

C - I - 5

Při oslavě svých narozenin Josef zjistil, že sečte-li číslice momentálního letopočtu, dostane svůj věk, a odečte-li momentální letopočet od jeho zrcadlového obrazu, dostane čtyřnásobek svého roku narození. V kterém roce našeho tisíciletí Josef provedl výpočet?

Řešení. Provedl-li Josef výpočet v roce $1000 + 100a + 10b + c$, bylo mu právě $1 + a + b + c$ let a narodil se v roce $999 + 99a + 9b$. Rozdíl momentálního letopočtu a zrcadlového obrazu je

$$(1000c + 100b + 10a + 1) - (1000 + 100a + 10b + c) =$$

$$= 4(1000 + 100a + 10b + c - 1 - a - b - c)$$

a po úpravě

$$(\star)\ 37c + 2b - 18a - 185 = 0.$$

Odtud vidíme, že číslice c je nutně lichá, a dostáváme odhad

$$c = \frac{1}{37}(185 + 18a - 2b) \geqq \frac{1}{37}(185 + 18.0 - 2.9) > 4.$$

Číslice c může tedy být jen 5, 7 nebo 9.

Pro $c = 5$ se rovnice ($\star$) redukuje na $b = 9a$, a té vyhovují dvě dvojice: $(a = 0, b = 0)$, $(a = 1, b = 9)$.

Pro $c = 7$ dostáváme rovnici $b = 9(a - 4) - 1$, a té vyhovuje jediná dvojice: $a = 5, b = 8$.

Pro $c = 9$ dostáváme rovnici $b = 9(a - 8) - 2$, a té vyhovuje jediná dvojice: $a = 9, b = 7$.

Příslušné letopočty jsou 1005, 1195, 1587 a 1979. Snadno se přesvědčíme, že všechny vyhovují podmínkám úlohy. (Šestiletý Josef v r. 1005 měl však neuvěřitelné matematické schopnosti).

C - I - 6

Platí-li pro povrchy P_1, P_2, P_3 tří krychlí $P_3 = P_1 + P_2$, pak pro jejich objemy V_1, V_2, V_3 je

$$V_1 + V_2 < V_3 \leqq \sqrt{2}\,(V_1 + V_2).$$

Dokažte.

Řešení. Úloha je formulována geometricky, okamžitě se však převede na čistě algebraický problém.

Text úlohy sugeruje označit velikosti hran krychlí symboly a_1, a_2, a_3. Označíme je však raději a, b, c, abychom se vyhnuli indexům a výrazy byly přehlednější.

Z podmínky pro povrchy plyne $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ a dosazením nabude dokazovaná nerovnost tvar

$$(1) \qquad a^3 + b^3 < (\sqrt{a^2 + b^2})^3 \leqq \sqrt{2}\,(a^3 + b^3).$$

Vzhledem k tomu, že pracujeme v oboru kladných čísel a, b, je soustava nerovností (1) ekvivalentní se soustavou nerovností

$$(a^3 + b^3)^2 < (a^2 + b^2)^3 \leqq 2\,(a^3 + b^3)^2.$$

Máme vlastně dokázat, že pro všechna kladná čísla a, b platí tyto dvě nerovnosti:

$$(2) \qquad (a^3 + b^3)^2 < (a^2 + b^2)^3$$

$$(3) \qquad (a^2 + b^2)^3 \leqq 2(a^3 + b^3)^2$$

První nerovnost už jsme dokázali v úloze C-P-4 (protože $a > 0$, $b > 0$, platí ostrá nerovnost). Druhá nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$a^6 - 3a^4b^2 + 4a^3b^3 - 3a^2b^4 + b^6 \geqq 0.$$

Výraz na levé straně je však roven

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4)$$

a pro kladná a, b je vskutku nezáporný.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

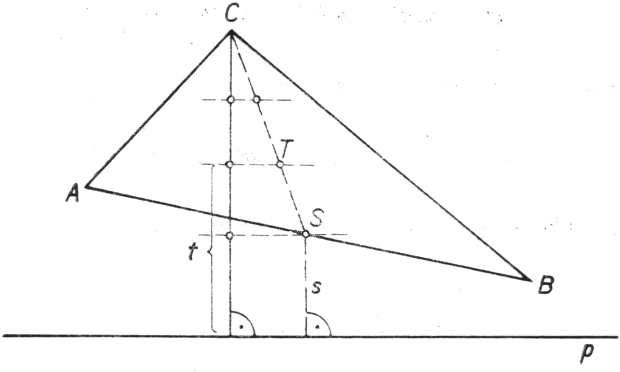
C - II - 1

V rovině je dán trojúhelník ABC a přímka p, která neprochází žádným vnitřním bodem trojúhelníku. Vyjádřete vzdálenost těžiště T trojúhelníku od přímky p pomocí vzdáleností bodů A, B, C od přímky p.

Řešení. Označme vzdálenosti bodů A, B, C od přímky p po řadě a, b, c. Můžeme předpokládat, že bod C má z vrcholů A, B, C od přímky p největší vzdálenost, tj. $c \geqq a$, $c \geqq b$. Označme ještě s a t vzdálenosti středu S úsečky AB a těžiště T od přímky p (obr. 22). Pak je

$s = \dfrac{a+b}{2}$, $t = s + \dfrac{c-s}{3}$. Po dosazení za s dostaneme

$$t = \frac{1}{3}(a + b + c).$$



Obr. 22

C - II - 2

Určete, kolik různých součtů můžeme dostat z výrazu

$$\underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1}_{1980 \text{ jedniček}}$$

doplněním alespoň jednoho páru závorek tak, aby vznikl správně uzávorkovaný výraz a nedostali jsme přitom zápis součinu.

Řešení. Nejprve dokážeme, že můžeme dostat součty

$$-1978, -1976, \ldots, -2, 0, 2, \ldots, 1974, 1976.$$

Součet tvaru $-2k$ pro $k = 989, 988, \ldots, 1$ dostaneme např. uzávorkováním

$$1 - \underbrace{(1+1)-(1+1)-\ldots-(1+1)}_{k \text{ párů závorek}} - 1 + 1 - \ldots + 1 - 1$$

Součet tvaru $2k$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, 988$ dostaneme např. uzávorkováním

$$1-(1+1-\underbrace{(1+1)-(1+1)-\ldots-(1+1))}_{k+1 \text{ párů závorek}}-1+\ldots+1-1.$$

Dále dokážeme, že jiné hodnoty dostat nemůžeme. Po doplnění závorek dostaneme výraz, který lze upravit na výraz bez závorek s 1980 členy, který se od původního bude lišit jen znaménky členů. Je-li v něm a znamének $+$ a b znamének $-$, je jeho součet $a - b$, a je tedy sudý, protože $a + b = 1980$. První člen má vždy kladné a druhý záporné znaménko, takže součty -1980 ani 1980 nemohou vzniknout. Součet zřejmě nemůže v absolutní hodnotě přesáhnout 1980. Zbývá dokázat, že nemůže vzniknout součet 1978.

a) Má-li po odstranění závorek čtvrtý člen znaménko $-$, pak alespoň dva členy (druhý a čtvrtý) mají znaménko $-$ a součet nemůže přesáhnout 1976.

b) Má-li čtvrtý člen znaménko $+$, znamená to, že leží uvnitř závorky, před kterou je znaménko $-$. V této závorce leží i třetí člen, a ten pak má v upraveném výraze znaménko $-$. Opět tedy alespoň dva členy mají znaménko $-$.

C - II - 3a

Nechť P_1, P_2, P_3, P_4 jsou obsahy čtyř čtverců a o_1, o_2, o_3, o_4 jejich obvody (v tomtéž pořadí).
Platí-li

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_4,$$

pak

$$o_1 + o_2 + o_3 \leqq o_4 \sqrt{3}.$$

Dokažte.

Řešení. Označíme-li velikosti stran čtverců a, b, c, d, platí

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2. \tag{1}$$

Máme dokázat nerovnost

$$a + b + c \leqq d \sqrt{3}. \tag{2}$$

Kdyby

$$a + b + c > d \sqrt{3},$$

bylo by

$$(a + b + c)^2 > 3\, d^2 = 3\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

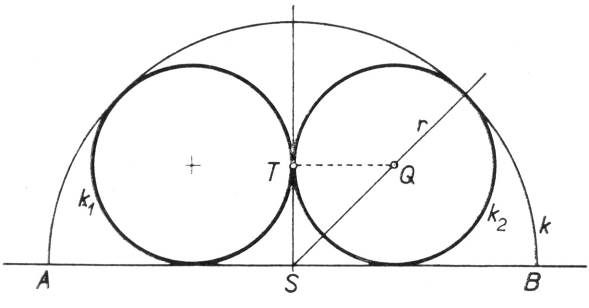
neboli

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + \\ + (a - c)^2 < 0,$$

a to je spor.

Nad průměrem AB délky 10 cm je sestrojena polokružnice k. Kružnice k_1, k_2 mají stejně velké poloměry, dotýkají se vzájemně a obě se dotýkají polokružnice k a průměru AB. Určete velikost jejich poloměru.

Řešení. Zvolme označení podle obr. 23, r je hledaný poloměr. Je $SQ = 5 - r$, $ST = TQ = r$ a trojúhelník STQ je pravoúhlý. Podle Pythagorovy věty je $(5 - r)^2 = 2r^2$, tedy $r = 5(\sqrt{2} - 1) \doteq 2{,}07$.



Obr. 23

Kategória B

PRÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

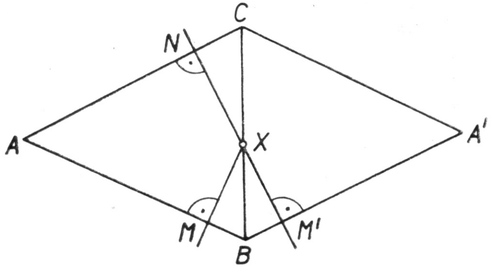
B - P - 1

Je dané kladné číslo c, rovina a v nej dve rôznobežky p, q.

a) Určte množinu všetkých bodov X danej roviny, pre ktoré je súčet vzdialeností od priamok p, q rovný c.

b) Určte množinu všetkých bodov X danej roviny, pre ktoré sa absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od priamok p, q rovná číslu c.

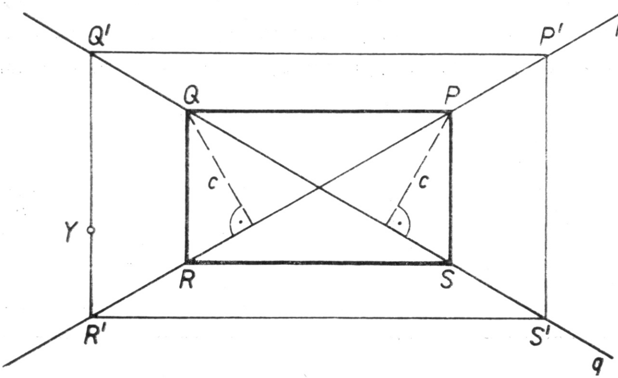
Riešenie. a) Pri riešení úlohy využijeme túto vlastnosť rovnoramenného trojuholníka (obr. 24): Nech ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou BC a body A, A' sú súmerne



Obr. 24

združené podľa priamky BC. Ak je X ľubovoľný bod úsečky BC a M päta kolmice vedenej z bodu X na priamku BA, prejde pri osovej súmernosti kolmica XM do kolmice XM' k priamke BA'. Pretože $BA' \parallel CA$, je $XM' \parallel XN$, kde N je päta kolmice z bodu X na priamku AC a platí $|XM| + |XN| = |XM'| + |XN| = |NM'|$, čo je dĺžka výšky trojuholníka ABC na stranu AC.

Nech teraz P, R sú také body priamky p, ktoré majú od priamky q s ňou rôznobežnej vzdialenosť c (pozri obr. 25),



Obr. 25

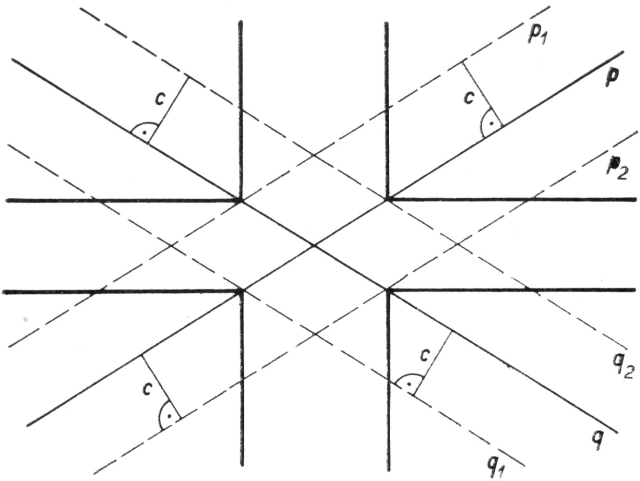
a Q, S zasa také body priamky q, ktorých vzdialenosť od priamky p sa rovná c. Na základe vyššie uvedenej úvahy má každý bod hranice pravouholníka $PQRS$ od priamok p, q súčet vzdialeností rovný c.

Ak je Y ľubovoľný bod roviny rôznobežiek p, q, ktorý neleží na hranici pravouholníka $PQRS$, potom možno zostrojiť pravouholník $P'Q'R'S'$, na hranici ktorého bude ležať bod Y tak, že bude rôzny od pravouholníka $PQRS$, a preto súčet vzdialeností bodu Y od priamok p, q bude rôzny od c.

Množinou bodov X požadovaných vlastností je teda hranica pravouholníka $PQRS$.

b) Nech X je ľubovoľný bod hľadanej množiny. Označme d_p jeho vzdialenosť od priamky p a d_q vzdialenosť od priamky q. Podľa podmienok úlohy musí platiť: $|d_p - d_q| = c$, čo znamená, že buď $d_p = d_q + c$, alebo $d_q = d_p + c$.

Ak je $d_p = d_q + c$, je vzdialenosť bodu X od priamky p väčšia alebo rovná c. Bod X musí preto ležať v niektorej z polrovín ohraničených priamkami p_1, resp. p_2, neobsahujúcej priamku p (obr. 26), pričom p_1, p_2 sú rovnobežky s priam-



Obr. 26

kou p, ktoré majú od nej vzdialenosť c. Ak hľadaný bod X leží v príslušnej polrovine ohraničenej priamkou p_1 vrátane tejto priamky, je $d_p = d_{p_1} + c$ čiže $d_{p_1} = d_q$. Bod X leží teda na niektorej z osí uhla priamok p_1 a q v príslušnej polrovine.

Obrátene, každý bod X, ktorý leží na niektorej z týchto dvoch polpriamok, vyhovuje podmienke $d_p = d_q + c$.

Analogickou úvahou sa dokáže, že hľadanej množine patria všetky body osí uhlov priamok p_2 a q v príslušnej polrovine.

Ak vyjdeme z rovnosti $d_q = d_p + c$, dostaneme podobným spôsobom ďalšie dve časti hľadanej množiny. Ak totiž q_1, q_2 sú rovnobežky s priamkou q vo vzdialenosti c, potom hľadanej množine patria osi uhlov priamok p, q_1, resp. p, q_2, v polrovine ohraničenej priamkou q_1, resp. q_2, a neobsahujúcej priamku q.

B - P - 2

Na šachovnici tvaru 20×20 polí je vyznačených 31 navzájom rôznych šachovníc tvaru 8×8. Dokážte, že existuje pole, ktoré patrí aspoň šiestim z vyznačených šachovníc.

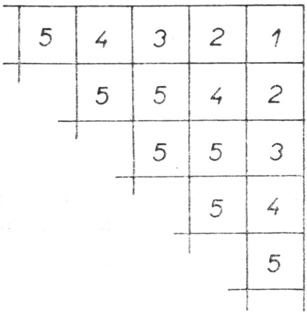
Riešenie. Použijeme metódu nepriameho dôkazu. Budeme predpokladať, že tvrdenie úlohy neplatí, tj. že každé pole šachovnice 20×20 patrí najviac piatim vyznačeným šachovniciam tvaru 8×8.

Označme S súčet všetkých polí 31 vyznačených šachovníc, v ktorom je každé pole zahrnuté toľkokrát, koľkým vyznačeným šachovniciam patrí. Zrejme platí: $S = 31 . 8 . 8 = 1984$.

Pokúsme sa súčet S odhadnúť za predpokladu, že každé pole môže patriť najviac piatim vyznačeným šachovniciam. Pre polia v rohoch veľkej šachovnice bude však tento počet ešte menší, ako ukazuje schéma na obr. 27. Podľa toho by malo platiť:

$$S \leqq 4.(1 + 2.2 + 2.3 + 3.4) + (400 - 4.8).5 = 1932,$$

čo však je spor s vyššie určenou hodnotou súčtu S. To znamená, že náš predpoklad bol nesprávny a musí existovať aspoň jedno pole patriace šiestim šachovniciam, ako sme mali dokázať.



Obr. 27

Iné riešenie. Zaveďme na šachovnici 20×20 súradnice r, s polí tak, že r bude číslo radu počítané oddola nahor a s číslo stĺpca počítané zľava napravo. Významnú úlohu hrajú polia (8, 8), (8, 16), (16, 8), (16, 16). Ľahko sa vidí, že každá šachovnica tvaru 8×8, ktorú možno vyznačiť na šachovnici 20×20, obsahuje práve jedno z nich. Keďže $31 : 4 \geqq 7$, vyplýva z toho, že niektoré z týchto štyroch polí leží dokonca na 8 z 31 vyznačených šachovníc.

B - P - 3

Nájdite všetky reálne čísla a, b, c také, že rovnica

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0 \tag{1}$$

má korene a, b, c.

Riešenie. Nech reálne čísla a, b, c sú koreňmi rovnice (1). Potom ľavú stranu rovnice (1) možno rozložiť na súčin koreňových činiteľov:

$$x^3 - ax^2 + bx - c = (x - a)(x - b)(x - c). \tag{2}$$

Vynásobením pravej strany (2) a porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách x na oboch stranách takto získanej identicky platnej rovnosti dostaneme:

(3) $a + b + c = a$ čiže $b + c = 0$,

(4) $ab + ac + bc = b$ čiže, vzhľadom na (3), $bc = b$,

(5) $abc = c$.

Ak je $c = 0$, je podľa (3) tiež $b = 0$. Pre ľubovoľné reálne a má potom rovnica (1) tvar

$$x^3 - ax^2 = 0$$

s koreňmi a, 0, 0.

Ak je $c \neq 0$, potom je podľa (3) tiež $b \neq 0$, z čoho vzhľadom na (4) vyplýva $c = 1$. Potom však podľa (3) je $b = -1$ a podľa (5) tiež $a = -1$.

Po dosadení týchto koeficientov do (1) dostaneme rovnicu

$$-x^3 - x^2 + x + 1 = 0,$$

ktorej čísla 1 a -1 vyhovujú, pričom číslo -1 je dokonca dvojnásobným koreňom.

Úloha má teda dve riešenia: 1) a ľubovoľné, $b = 0$, $c = 0$; 2) $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$.

B - P - 4

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$(1) \qquad \begin{aligned} x + y &= s, \\ ax + 2y &= 0 \end{aligned}$$

s neznámymi x, y, pričom a, s sú reálne čísla. Urobte diskusiu riešiteľnosti sústavy vzhľadom na čísla a, s.

Riešenie. Ak od dvojnásobku prvej rovnice odčítame druhú, dostaneme

$$(2) \qquad (2 - a)\, x = 2s.$$

Ak je $a = 2$, $s \neq 0$, rovnica (2) zrejme riešenie nemá. Pre $a = 2$, $s = 0$ má nekonečne mnoho riešení tvaru $x = c$, $y = -c$, kde c je reálne číslo.

Ak je $a \neq 2$, môže rovnici (2) vyhovovať len číslo $x = \dfrac{2s}{2-a}$, ku ktorému z prvej rovnice sústavy (1) ľahko určíme

$$y = \frac{as}{2-a}.$$

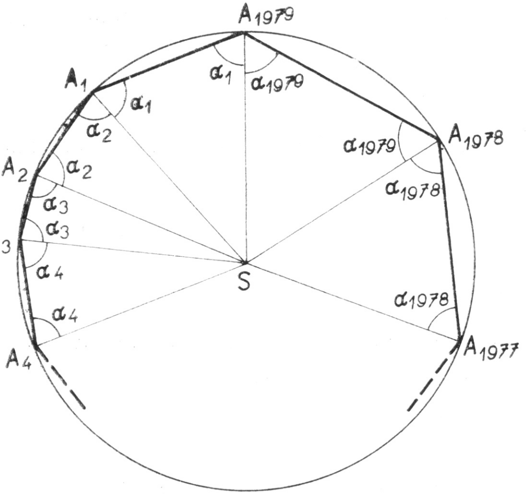
Dosadením sa ľahko presvedčíme, že táto dvojica čísel x, y sústave (1) skutočne vyhovuje.

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY I. KOLA

B - I - 1

Do kružnice je vpísaný 1979-uholník $A_1A_2A_3\ldots A_{1979}$. Ak leží stred kružnice vo vnútri 1979-uholníka, potom súčet uhlov pri vrcholoch A_1, A_3, A_5, ..., A_{1977} je menší než $\dfrac{1977}{2}\pi$. Dokážte.

Riešenie. Označme (obr. 28) S stred kružnice, do ktorej je vpísaný 1979-uholník, $\alpha_1 = \sphericalangle A_{1979}A_1S$, $\alpha_2 = \sphericalangle A_1A_2S$, $\alpha_3 = \sphericalangle A_2A_3S$, ..., $\alpha_{1979} = \sphericalangle A_{1978}A_{1979}S$. Úsečky A_1S,



Obr. 28

$A_2S, \ldots, A_{1979}S$ rozdelia daný mnohouholník na 1979 rovnoramenných trojuholníkov. Z toho vyplýva, že vnútorné uhly pri vrcholoch $A_1, A_2, \ldots, A_{1979}$ 1979-uholníka sú v uvedenom poradí $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \ldots, \alpha_{1979} + \alpha_1$. Preto pre súčet s všetkých vnútorných uhlov 1979-uholníka platí

$$s = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{1979}) = 1977\pi.$$

Súčet vnútorných uhlov pri vrcholoch $A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{1977}$ však bude

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{1977} + \alpha_{1978} =$$

$$= \frac{s}{2} - \alpha_{1979} < \frac{1977}{2}\pi,$$

čo sme mali dokázať.

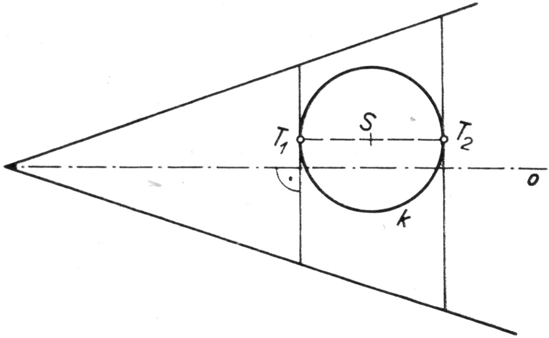
Poznámka. Z postupu dôkazu je zrejmé, že platí nasledujúca všeobecná veta: Nech n je nepárne prirodzené číslo. Ak n-uholník je vpísaný do kružnice, ktorej stred leží v jeho vnútri, potom súčet uhlov pri vrcholoch n-uholníka s nepárnymi indexami je menší než $\frac{n-2}{2}\pi$. Pre $n = 3$ dostaneme ako dôsledok známu vetu: Ak stred opísanej kružnice leží vo vnútri trojuholníka, potom je trojuholník ostrouhlý.

B - I - 2

V rovine je daný konvexný uhol a v ňom kružnica. Zostrojte na kružnici body, pre ktoré je súčet vzdialeností od ramien daného uhla minimálny.

Riešenie. Využijeme výsledok časti a) riešenia úlohy B - P - 1, podľa ktorého je množinou bodov v dutom uhle, pre ktoré je súčet vzdialeností od ramien tohto uhla dané číslo, úsečka kolmá k osi uhla. Je zrejmé, že tento súčet je tým väčší, čím väčšia je vzdialenosť úsečky od vrcholu uhla. Z tejto úvahy vyplýva, že minimum pre všetky body danej kružnice sa dosiahne v prípade dotykového bodu, v ktorom sa dotýka kružnice priamka kolmá na os uhla, a to bližšia k vrcholu uhla z oboch priamok tejto vlastnosti (pozri obr. 29).

Poznamenajme, že dotykový bod T_2 druhej z oboch priamok je tým bodom kružnice, pre ktorý je súčet vzdialeností od ramien daného uhla maximálny.



Obr. 29

B - I - 3

Je daný trojuholník ABC, ktorého výšky označíme v_a, v_b, v_c. Zistite, či existuje trojuholník UVW tak, aby $|UV| = v_a$, $|VW| = v_b$, $|WU| = v_c$ a aby strany UV, VW, WU boli v uvedenom poradí kolmé na strany BC, CA a AB trojuholníka ABC.

Riešenie. Predpokladajme, že trojuholník UVW žiadaných vlastností existuje. Vzhľadom na vzájomnú kolmosť odpovedajúcich si strán oboch trojuholníkov majú oba trojuholníky rovnako veľké odpovedajúce si uhly. Z toho vyplýva, že trojuholník UVW je podobný trojuholníku ABC. Existuje preto číslo $k > 0$ tak, že pre dĺžky strán trojuholníka ABC (pri obvyklom označení) platí

$$a = kv_a, b = kv_b, c = kv_c.$$

Z toho vyplýva, že taktiež platí

$$av_a = kv_a^2, bv_b = kv_b^2, cv_c = kv_c^2.$$

Ľavé strany týchto rovností majú všetky rovnakú hodnotu - dvojnásobok plošného obsahu trojuholníka ABC, čo znamená, že sa musia rovnať aj ich pravé strany. Z toho však vyplýva, že platí

$$v_a = v_b = v_c \text{ a taktiež } a = b = c.$$

Tieto vlastnosti však môže mať len rovnostranný trojuholník.

Na druhej strane je zrejmé, že rovnostranný trojuholník podmienkam úlohy vyhovuje.

B - I - 4

Na šachovnici tvaru 1000×1000 stojí 800 000 figuriek. Potom na obvode niektorej jej časti tvaru 8×8 stojí aspoň 22 figuriek. Dokážte.

Riešenie. Podobne ako pri riešení úlohy B - P - 2 použijeme metódu nepriameho dôkazu. Najskôr zistíme, koľko rôznych šachovníc tvaru 8×8 sa dá vyznačiť na danej veľkej šachovnici. Je zrejmé, že prvý rad malej šachovnice možno umiestniť len na ľubovoľnom z prvých 993 radov veľkej šachovnice a rovnako tomu je s umiestnením prvého stĺpca malej šachovnice. Z toho vyplýva, že na veľkej šachovnici možno vyznačiť celkom 993^2 šachovníc tvaru 8×8.

Každá šachovnica tvaru 8×8 má celkom 28 obvodových polí. Z toho vyplýva, že nejaké pole veľkej šachovnice môže byť obvodovým poľom najviac 28 rôznych malých šachovníc. Túto vlastnosť však majú len tie polia, ktoré ležia aspoň na ôsmom rade alebo stĺpci od okraja veľkej šachovnice. Týchto polí je teda práve 986^2. Nazvime ich strednými poliami a ostatné polia veľkej šachovnice budeme volať okrajovými poliami. Označme S počet figuriek stojacich na obvodových poliach šachovníc tvaru 8×8, v ktorom je každá figúrka započítaná toľko ráz, na obvode koľkých rôznych malých šachovníc stojí. Predpokladajme teraz, že na obvode každej malej šachovnice stojí najviac 21 figuriek. Potom musí byť

$$(1) \qquad S \leqq 993^2 . 21 = 20\,707\,029.$$

Nech S_1 je tá časť súčtu S prislúchajúca stredným 986^2 poliam. Zrejme

$$(2) \qquad S \geqq S_1.$$

Všetkých figuriek stojacich na veľkej šachovnici je 800 000, okrajových polí je $1000^2 - 986^2$. Na stredných poliach musí preto stáť aspoň $800\,000 - (1000^2 - 986^2)$ figuriek. Do súčtu S_1 počítame každú z nich s násobnosťou 28, čiže platí

$$S_1 \geqq 28.[800\,000 - (1000^2 - 986^2)] = 21\,621\,488,$$

čo je spor s (2) vzhľadom na (1).

Poznámka. Pracnejším odhadom so započítaním aj figuriek na okrajových poliach veľkej šachovnice do S_1 možno dokonca dokázať, že existuje šachovnica tvaru 8×8, na obvodových poliach ktorej stojí aspoň 23 figuriek.

B - I - 5

Koľko riešení má v obore reálnych čísel sústava rovníc

$$ax + \frac{b}{y} = 1,$$

$$by + \frac{a}{x} = 1$$

s neznámymi x, y? Urobte diskusiu vzhľadom na dané reálne čísla a, b.

Riešenie. Uvažujme najskôr o prípade $a = 0$. Vtedy sa sústava redukuje na $\frac{b}{y} = 1$, $by = 1$. Ak je $b = 1$ alebo $b = -1$, má táto sústava nekonečne mnoho riešení: $y = b$, x ľubovoľné. Pre ostatné hodnoty b sústava riešenie nemá.

Nech $a \neq 0$. Je zrejmé, že počet riešení sústavy sa nezmení, ak navzájom vymeníme čísla a, b. Preto pri $b = 0$ má sústava nekonečne mnoho riešení, ak $a = 1$ alebo $a = -1$, a pri ostatných hodnotách a riešenie nemá.

Zostáva teda vyšetriť prípad $ab \neq 0$. Nech x, y je riešenie danej sústavy. Potom musí byť $x \neq 0$, $y \neq 0$. Z druhej rovnice vyjadrime y:

$$y = \frac{x - a}{bx} \tag{1}$$

a dosaďme do prvej rovnice sústavy. Dostaneme po jednoduchej úprave, že x je koreňom kvadratickej rovnice

$$ax^2 - (a^2 - b^2 + 1)\, x + a = 0. \tag{2}$$

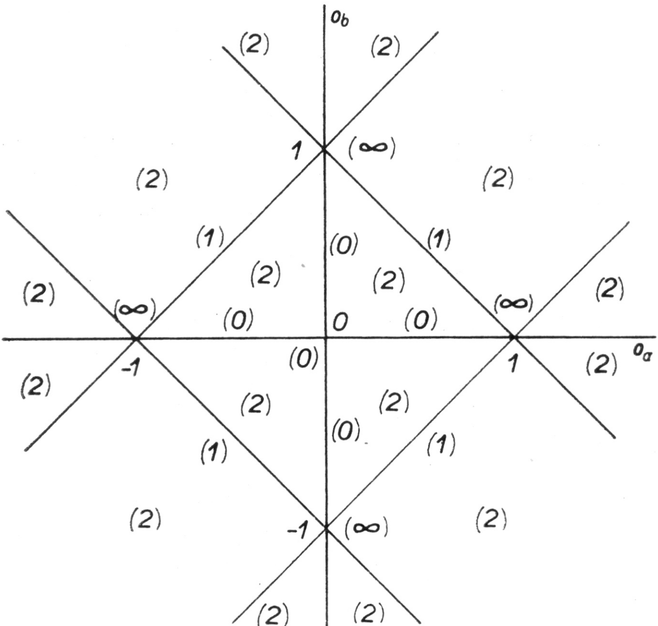
Obrátene, ak x je koreňom kvadratickej rovnice (2), potom — ako sa ľahko presvedčíme — musí platiť: $x \neq 0$, $x \neq a$. Po vydelení rovnice (2) číslom $x - a$ a jednoduchej úprave dostaneme

$$ax + \frac{b}{\dfrac{x - a}{bx}} = 1.$$

Z toho je zrejmé, že ak pre každé riešenie x kvadratickej rovnice (2) položíme y podľa (1), dostaneme dvojicu x, y, ktorá je riešením danej sústavy. Znamená to teda, že daná sústava je ekvivalentná so sústavou (1), (2), z čoho je zrejmé, že počet riešení danej sústavy je zhodný s počtom riešení kvadratickej rovnice (2). Diskriminant D tejto rovnice upravíme:

$$D = (a^2 - b^2 + 1)^2 - 4a^2 = (a^2 - b^2 + 1 - 2a) .$$
$$.(a^2 - b^2 + 1 + 2a) = (a - 1 - b)(a - 1 + b)(a + 1 - b) .$$
$$.(a + 1 + b).$$

Z toho vyplýva, že v prípade $ab \neq 0$ má daná sústava jedno riešenie, ak čísla a, b vyhovujú niektorej z rovností $a \pm b = \pm 1$ a vo všetkých ostatných prípadoch má dve riešenia. Výsledok diskusie znázorníme prehľadne v súradnicovej



Obr. 30

rovine a, b (pozri obr. 30), v ktorej vyššie uvedené rovnosti určujú dve dvojice rovnobežných priamok. Pri jednotlivých priamkach, ich priesečníkoch a v častiach roviny, na ktoré je týmito priamkami rozdelená, sú vyznačené počty riešení danej sústavy.

B - I - 6

Nájdite všetky trojice prirodzených čísel x, y, z také, že

$$x^3 + y^3 + z^5 = 1979,$$
$$y^2 z = x.$$

Riešenie. Nech x, y, z sú prirodzené čísla, ktoré vyhovujú obom daným rovniciam. Pretože $13^3 = 2\,197 > 1979$ a $5^5 = 3\,125 > 1979$, vyplýva z prvej rovnice, že musí platiť

$$x \leqq 12, y \leqq 12, z \leqq 4.$$

Podobne dostaneme z druhej rovnice odhad pre y^2:

$$y^2 \leqq y^2 z = x \leqq 12,$$

z ktorého vyplýva, že $y \leqq 3$.

Pomocou vykonaných odhadov sa nám podarilo počet usporiadaných trojíc prirodzených čísel, ktoré môžu vyhovovať daným rovniciam, obmedziť na 144. Ich preskúšanie by však aj tak zabralo príliš mnoho času. Efektívnejšie bude, ak postupne preskúmame prípady, ktoré môžu nastať pri pevnej voľbe tej neznámej, ktorá má najmenší rozsah, tj. y.

Nech $y = 1$. Potom z druhej rovnice máme $x = z$ a z prvej rovnice po dosadení a jednoduchej úprave dostaneme

$$z^3 (1 + z^2) = 1978.$$

Ľahko sa presvedčíme, že tejto rovnici nevyhovuje žiadne z prirodzených čísel $z \leqq 4$.

Pre $y = 2$ z druhej rovnice dostaneme $x = 4z$ a z prvej rovnice analogicky ako v predchádzajúcom prípade

$$z^3 (64 + z^2) = 1971.$$

Tejto rovnici vyhovuje $z = 3$, čomu odpovedá $x = 12$. Dosadením sa ľahko presvedčíme, že trojica 12, 2, 3 skutočne vyhovuje obom daným rovniciam.

Pre $y = 3$ je $x = 9z$ a z prvej rovnice máme

$$z^3 (729 + z^2) = 1952,$$

čomu však žiadne z prirodzených čísel $z \leqq 4$ nevyhovuje.

Podmienkam úlohy vyhovuje teda jediná trojica prirodzených čísel:

$$x = 12, y = 2, z = 3.$$

B - II - 1

Koreňmi rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ sú reálne čísla x_1, x_2, x_3, koreňmi rovnice $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ sú čísla x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3.

Vyjadrite koeficienty A, B, C pomocou koeficientov a, b, c.

Riešenie. Mnohočlen na ľavej strane rovnice možno podľa predpokladu rozložiť na súčin koreňových činiteľov takto:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Z toho po vynásobení činiteľov v súčine na pravej strane identickej rovnosti a porovnaní koeficientov pri rovnakých mocninách s koeficientami mnohočlena na ľavej strane dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} &-a = x_1 + x_2 + x_3, \quad b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3, \\ (1) \qquad &-c = x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Analogickým postupom pre koeficienty druhej rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} -A &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3, \\ (2) \qquad B &= x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3 + x_1x_2x_3^2, \\ -C &= x_1^2x_2^2x_3^2. \end{aligned}$$

Ak dosadíme z (1) do pravých strán (2), dostaneme

$$A = -b, \; B = ac, \; C = -c^2.$$

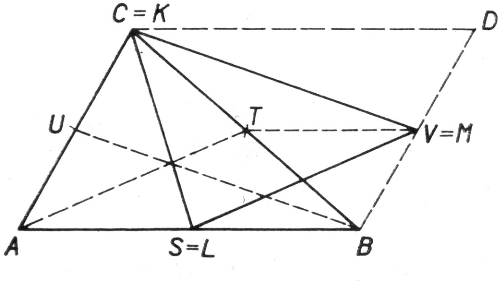
B - II - 2

Je daný trojuholník ABC s obsahom P. Nech S, T, U sú stredy úsečiek AB, BC, CA.

Ukážte, že existuje trojuholník KLM tak, že $KL \parallel CS$, $LM \parallel AT$, $MK \parallel BU$, $|KL| = |CS|$, $|LM| = |AT|$, $|MK| = |BU|$, tj. strany trojuholníka KLM sú rovnobežné s ťažnicami trojuholníka ABC a sú taktiež rovnako veľké ako ťažnice tohto trojuholníka.

b) Vyjadrite obsah trojuholníka KLM pomocou P.

Riešenie. a) Doplňme trojuholník ABC na rovnobežník $ABCD$ (obr. 31) a označme V stred úsečky BD. Potom sú $ASVT$ a $BVCU$ rovnobežníky, a preto platí: $SV \parallel AT$, $|SV| = |AT|$, $VC \parallel BU$, $|VC| = |BU|$. To znamená, že požado-



Obr. 31

vané vlastnosti má trojuholník CSV. Stačí preto položi $K \equiv C, L \equiv S, M \equiv V$.

b) Obsah rovnobežníka $ABDK$ je zrejme $2P$. Obsah trojuholníkov ALK a KMD sa rovná $P/2$. Označme W strec úsečky LM, tj. priesečník priamky LM s uhlopriečkou BK rovnobežníka $ABDK$. Potom obsah trojuholníka LBW je štvrtinou obsahu trojuholníka ABT, teda $P/8$. Obsah trojuholníka BMT je rovný zrejme $P/4$ a obsah trojuholníka BMW je jeho polovicou, teda tiež $P/8$. Preto je obsah trojuholníka LBM rovný $P/4$. Z toho už vyplýva, že pre obsah P trojuholníka KLM platí:

$$P' = 2P - 2(P/2) - P/4 = 3P/4.$$

B - II - 3a

Na poliach šachovnice tvaru 8×8 je rozostavených 4 figuriek. Potom na diagonálnych poliach niektorej jej čast tvaru 4×4 stoja aspoň štyri figurky. Dokážte. (Diagonálnym poliami šachovnice tvaru 4×4 rozumieme 8 polí na jej uhlopriečkach.)

Riešenie. Použijeme metódu nepriameho dôkazu, ktorá sa nám osvedčila pri riešení úloh B - P - 2 a B - I - 4.

Najskôr si uvedomíme, že na šachovnici 8×8 možno vyznačiť celkom $5^2 = 25$ rôznych šachovníc tvaru 4×4. Označme S súčet, ktorý dostaneme, ak každú figurku započítame toľkokrát, na uhlopriečkach koľkých šachovníc tvaru 4×4 stojí.

Ak budeme predpokladať, že na diagonálach každej šachovnice tvaru 4×4 stoja najviac 3 figurky, musí platiť

$$S \leqq 3.25 = 75.$$

Zostavme si teraz tabuľku, v ktorej pre každé pole šachovnice 8×8 vyznačíme, na uhlopriečkach koľkých rôznych šachovníc tvaru 4×4 leží:

1	1	1	2	2	1	1	1
1	2	3	4	4	3	2	1
1	3	5	6	6	5	3	1
2	4	6	8	8	6	4	2
2	4	6	8	8	6	4	2
1	3	5	6	6	5	3	1
1	2	3	4	4	3	2	1
1	1	1	2	2	1	1	1

Je zrejmé, že S bude minimálne, ak figurky budú umiestnené na poliach s najmenšími hodnotami 1, 2, 3, ktorých je celkom

40 a na 2 poliach s hodnotou 4. To však znamená, že v každom prípade musí byť

$$S \geqq 20.1 + 12.2 + 8.3 + 2.4 = 76,$$

čo je spor s (1).

B - II - 3b

Nech a, b sú dané reálne čísla. Nájdite všetky štvorice x_1, x_2, x_3, x_4 nezáporných reálnych čísel, ktoré vyhovujú rovniciam

$$x_1 - x_2 = a, \tag{1}$$

$$x_3 - x_4 = b, \tag{2}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3}$$

Riešenie. Predpokladajme, že nezáporné čísla x_1, x_2, x_3, x_4 vyhovujú sústave (1), (2), (3). Ak do (3) dosadíme z (1) za a a z (2) za b, dostaneme

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2}\,,$$

z čoho umocnením oboch strán na druhú a jednoduchej úprave dostávame

$$4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4 = 0. \tag{4}$$

Všetky sčítance na ľavej strane (4) sú nezáporné, a teda nulové. Z toho vyplýva, že z čísel x_i, $i = 1, 2, 3, 4$ môže byť nenulové najviac jedno. Ak by totiž boli nenulové napríklad čísla x_1, x_2, potom $4x_1x_2 > 0$ a rovnosť (4) nemôže byť splnená. Analogicky vylúčime ostatné prípady. Z toho vzhľadom na (1) a (2) vyplýva, že z čísel a, b aspoň jedno musí byť rovné nule.

1) Nech $a = 0$. Potom z (1) máme $x_1 = x_2$. Uvažujme najskôr o prípade $b \geqq 0$. Potom z (2) a (3) dostaneme

$$x_3 - x_4 = b, \; 2x_1 + x_3 + x_4 = b. \tag{5}$$

Z (5) odčítaním prvej rovnice od druhej dostávame rovnicu

$$2x_1 + 2x_4 = 0,$$

ktorej jediným nezáporným riešením je dvojica $x_1 = x_4 = 0$. Sústave (1)—(3) vyhovuje preto len štvorica

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \; x_3 = b.$$

V prípade $b < 0$ z (2) máme $x_3 = x_4 + b$ a po dosadení do (3) dostaneme

$$2x_1 + 2x_4 + b = \sqrt{b^2},$$

čiže

$$2x_1 + 2x_4 = -2b,$$

$$x_1 + x_4 = -b. \tag{6}$$

Ak má byť $x_3 = x_4 + b \geqq 0$, musí byť $x_4 \geqq -b$, z čoho vzhľadom na (6) vyplýva $x_1 = 0$ a sústava (1)—(3) má opäť jediné nezáporné riešenie:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \; x_4 = -b.$$

2) Nech $b = 0$. Potom z (2) máme $x_3 = x_4$ a analogickým postupom dostaneme v prípade $a \geqq 0$ jediné riešenie

$$x_1 = a, \; x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

a v prípade $a < 0$ taktiež jediné riešenie

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \; x_2 = -a.$$

Kategorie A

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

A - P - 1

Obsah P konvexního čtyřúhelníku se stranami a, b, c, d a úhly α (mezi stranami a, b), γ (mezi stranami c, d) je dán vzorcem

$$(1) \qquad 16P^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}$$

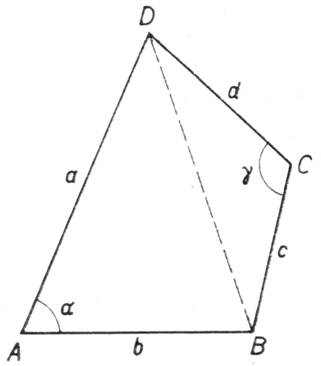
neboli

$$(1') \qquad P^2 = \frac{1}{16}(-a + b + c + d)(a - b + c + d) \,.\, (a + b - c + d)(a + b + c - d) - abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Dokažte tento vzorec a odvoďte z něho větu: Při pevných velikostech stran a, b, c, d (a proměnných úhlech α, γ) má konvexní čtyřúhelník největší obsah, je-li tětivový, tj. leží-li všechny jeho vrcholy na kružnici.

Poznámka. Uvedená formulácia úlohy pripúšťa dve možné interpretácie. Autor úlohy zrejme požaduje dokázať implikáciu $\mathbf{V}_1$: ak štvoruholník má najväčší obsah, tak je tetivový. Uvedená formulácia skôr požaduje dôkaz implikácie $\mathbf{V}_2$: ak je štvoruholník tetivový, tak má najväčší obsah. Kvôli úplnosti dokážeme obidve implikácie.

Riešenie. Uvažujme konvexný štvoruholník $ABCD$ so stranami a, b, c, d a uhlami $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ podľa obr. 32. Úsečka BD



Obr. 32

rozdelí štvoruholník $ABCD$ na dva trojuholníky BCD a ABD s obsahmi P_1 a P_2. Pre obsah P štvoruholníka $ABCD$ platí

$$P = P_1 + P_2$$

Obsahy P_1 a P_2 ľahko vypočítame:

$$P_1 = \frac{1}{2} cd \sin \gamma,$$

$$P_2 = \frac{1}{2} ab \sin \alpha.$$

Teda

$$2P = ab \sin \alpha + cd \sin \gamma. \tag{2}$$

Podľa kosínusovej vety pre obidva uvažované trojuholníky dostávame

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

$$BD^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \gamma.$$

Takže

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos \gamma.$$

Odtiaľ po jednoduchej úprave máme

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 \cos^2\alpha + \\ + 4c^2d^2 \cos^2\gamma - 8abcd \cos \alpha \cos \gamma.\end{aligned} \tag{3}$$

Vzťah (2) umocníme na druhú, násobíme 4

$$\begin{aligned}16P^2 = 4a^2b^2 \sin^2\alpha + 4c^2d^2 \sin^2\gamma + \\ + 8abcd \sin \alpha \sin \gamma\end{aligned}$$

a pripočítame k (3):

$$(4) \quad 16P^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd \,.$$
$$. \, (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma).$$

Z trigonometrie vieme, že platí

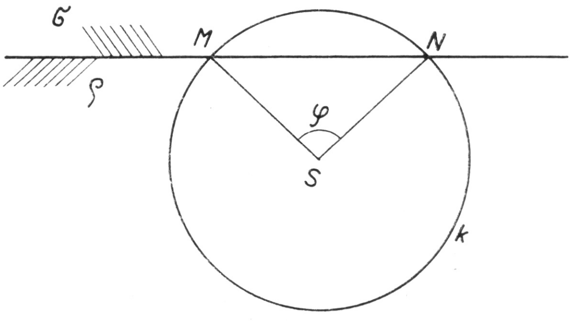
$$\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma = -\cos (\alpha + \gamma) = 1 - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} \,.$$

Po dosadení do (4) dostávame

$$16P^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd -$$
$$- 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

a odtiaľ už bezprostredne vyplýva (1) a (1′).

Skôr ako prejdeme k dôkazom implikácií $\mathbf{V}_1$ a $\mathbf{V}_2$, pripomeňme si známe fakty. Uvažujme kružnicu k so stredom S



Obr. 33

a dva rôzne body M, N na kružnici k. Nech ϱ, σ sú polroviny určené priamkou MN a bod S leží v polrovine ϱ (ak S leží na priamke MN, tak leží v obidvoch polrovinách ϱ, σ) — pozri obr. 33. Nech φ je veľkosť uhla MSN. Vieme, že bod X polroviny ϱ leží na kružnici k vtedy a len vtedy, ak uhol MXN je $\frac{1}{2}\varphi$, alebo X je niektorý z bodov M, N. Podobne bod Y polroviny σ leží na kružnici k vtedy a len vtedy, ak uhol MYN je $\pi - \frac{1}{2}\varphi$, alebo Y je niektorý z bodov M, N.

Z uvedeného vyplýva, že ak vrcholy štvoruholníka $ABCD$ ležia na jednej kružnici, tak $\alpha + \gamma = \pi$. Naopak, ak $\alpha + \gamma = \pi$, tak podľa vyššie uvedeného bod C leží na kružnici opísanej trojuholníku ABD. Teda štvoruholník $ABCD$ je tetivový vtedy a len vtedy, ak $\alpha + \gamma = \pi$.

Pri pevných veľkostiach strán a, b, c, d obsah P je najväčší práve vtedy, keď je najväčšie číslo $16P^2$. Podľa vzťahu (1) najväčšia možná hodnota čísla $16P^2$ je

$$4\,(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2.$$

Ak štvoruholník $ABCD$ je tetivový, tak $\alpha + \gamma = \pi$. Potom $\cos\dfrac{\alpha + \gamma}{2} = 0$, a teda P nadobúda najväčšiu možnú hodnotu. Tým sme ukázali pravdivosť implikácie $\mathbf{V}_2$.

Ukážeme teraz pravdivosť implikácie $\mathbf{V}_1$. K dôkazu pravdivosti implikácie $\mathbf{V}_1$ na základe uvedeného je potrebné dokázať toto: ak a, b, c, d sú strany (nejakého) konvexného štvoruholníka, tak existuje tetivový štvoruholník so stranami a, b, c, d.

Predpokladajme, že existuje konvexný štvoruholník so stranami a, b, c, d. Potom podľa (1) platí

$$4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 =$$
$$= 16P^2 + 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Odtiaľ vyplýva

$$4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 > 0,$$

a teda

$$\frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2} < 1.$$

Teda existuje číslo φ, $0 < \varphi < \pi$ také, že

$$\cos \varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Označíme

(5) $$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}.$$

Potom platí

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd} =$$
$$= c^2 + d^2 + 2cd \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd},$$

a teda

$$(5') \qquad x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\pi - \varphi).$$

Ľahko vidieť, že možno zostrojiť trojuholníky o stranách a, b, x a c, d, x. Ak ich zostrojíme tak, že budú mať spoločnú stranu dĺžky x a ležať v opačných polrovinách určených touto stranou, tak ich vrcholy určujú konvexný štvoruholník so stranami a, b, c, d, ktorý je podľa (5) a (5') tetivový.

A - P - 2

Jsou-li A_1, A_2, A_3 vrcholy ostroúhlého trojúhelníku, pak nejmenší kruh, který je obsahuje, je kruh omezený kružnicí opsanou trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Nejsou-li body A_1, A_2, A_3 vrcholy ostroúhlého trojúhelníku a jsou-li aspoň dva z nich navzájem různé, pak nejmenší kruh, který obsahuje body A_1, A_2, A_3, je kruh omezený Thaletovou kružnicí nad nejdelší z úseček A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3. Dokažte.

Riešenie. Najprv upresníme, čo znamenajú slová »najmenší kruh«. Najmenší kruh $(S; r)$ obsahujúci body A_1, A_2, A_3 je kruh s týmito dvomi vlastnosťami: i) kruh (S, r) obsahuje body A_1, A_2, A_3; ii) ak kruh $(S'; r')$ obsahuje body A_1, A_2, A_3, tak buď $r < r'$, alebo $r = r'$ a $S = S'$.

Ľahko vidieť, že to nie je najmenší kruh v zmysle množinovej inklúzie.

Najprv predpokladáme, že body A_1, A_2, A_3 nie sú vrcholy ostrouhlého trojuholníka a aspoň dva sú navzájom rôzne. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že A_1A_2 je najdlhšia z úsečiek A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3.

Ak body A_1, A_2, A_3 ležia na jednej priamke, tak bod A_3

leží na úsečke A_1A_2. Potom kruh ohraničený Thalesovou kružnicou nad úsečkou A_1A_2 obsahuje aj bod A_3.

Ak body A_1, A_2, A_3 neležia na priamke, tak tvoria vrcholy pravouhlého alebo tupouhlého trojuholníka. Pravý alebo tupý uhol je proti najdlhšej strane A_1A_2. Potom zase body A_1, A_2, A_3 ležia vnútri kruhu ohraničeného Thalesovou kružnicou nad úsečkou A_1A_2. Tento kruh má polomer $\frac{1}{2} A_1A_2$.

Naopak, každý kruh obsahujúci body A_1, A_2, A_3 obsahuje úsečku A_1A_2, a teda buď má polomer väčší ako $\frac{1}{2} A_1A_2$, alebo je ohraničený Thalesovou kružnicou nad touto úsečkou.

Teraz budeme predpokladať, že body A_1, A_2, A_3 sú vrcholy ostrouhlého trojuholníka. Nech S je stred opísanej kružnice tomuto trojuholníku a r jej polomer. Zrejme kruh $(S; r)$ má vlastnosť i). Nech kruh $(S'; r')$ obsahuje body A_1, A_2, A_3 a je rôzny od kruhu $(S; r)$. Kružnice $(S; r)$ a $(S'; r')$ sa musia pretínať v dvoch bodoch X, Y. Tetiva XY nemôže byť priemerom kružnice $(S; r)$. Teda delí kružnicu na dva nerovnaké oblúky. Keby bolo $r' \leqq r$, tak kratší oblúk XY kružnice $(S; r)$ leží v kruhu $(S'; r')$. Keďže body A_1, A_2, A_3 ležia na kružnici $(S; r)$ a v kruhu $(S'; r')$, tak ležia na tomto kratšom oblúku. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že bod A_2 leží medzi bodmi A_1, A_3. Potom však uhol $A_1A_2A_3$ je tupý, čo je spor s predpokladom. Teda $r' > r$. Ukázali sme, že kruh má aj vlastnosť ii).

Poznámka. Úloha bola tiež úlohou B - I - 4 28. ročníka Matematickej olympiády. Čitateľ môže nájsť iné riešenie úlohy v príslušnej brožúrke.

Pre každé kladné reálné čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$(6) \qquad (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqq n^2.$$

Kedy platí rovnosť?

Riešenie. Nerovnosť (6) dokážeme matematickou indukciou a súčasne ukážeme, že rovnosť platí vtedy a len vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Pre $n = 1$ nerovnosť (6) vždy platí:

$$x_1 \cdot \frac{1}{x_1} = 1 \geqq 1^2.$$

Pre $n = 2$ jednoduchými úpravami dostávame

$$(x_1 + x_2)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 - x_2)^2 + 4x_1 x_2}{x_1 x_2} =$$

$$= 4 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2} \geqq 4.$$

Zrejme rovnosť platí práve vtedy, keď $x_1 = x_2$.

Predpokladajme, že platí (6). Označíme $a = x_1 + \ldots + x_n$, $b = \dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}$.

Potom

$$(x_1 + \ldots + x_{n+1}) \left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n+1}} \right) =$$

(7)

$$= (a + x_{n+1}) \left(b + \frac{1}{x_{n+1}} \right) = ab + bx_{n+1} + a . \frac{1}{x_{n+1}} + 1.$$

Podľa indukčného predpokladu platí

$$ab \geqq n^2,$$

a teda

$$b \geqq \frac{n^2}{a} .$$

Zo (7) dostávame

$$(x_1 + \ldots + x_{n+1}) \left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n+1}} \right) \geqq \tag{8}$$

$$\geqq n^2 + a \frac{1}{x_{n+1}} + bx_{n+1} + 1.$$

Pritom rovnosť platí vtedy a len vtedy, ak $ab = n^2$, tj.

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{a}{n} . \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{n}{a} . x_{n+1} = \frac{a^2 + n^2 x^2_{n+1}}{nax_{n+1}} =$$

$$= \frac{(a - nx_{n+1})^2 + 2anx_{n+1}}{nax_{n+1}} \geqq 2.$$

Rovnosť platí práve vtedy, keď $a = nx_{n+1}$, tj. $x_{n+1} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$. Dosadením do (8) dostaneme

$$(x_1 + \ldots + x_{n+1}) \left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \geqq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Pritom rovnosť platí vtedy a len vtedy, keď $ab = n^2$ a $a = nx_{n+1}$, tj. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$.

Iné riešenie. Ľavá strana nerovnosti (6) sa dá napísať ako súčet $n + \frac{1}{2} n(n-1)$ sčítancov:

$$\frac{x_1}{x_1} + \ldots + \frac{x_n}{x_n} + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \ldots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right).$$

Zrejme $\frac{x_1}{x_1} = \ldots = \frac{x_n}{x_n} = 1$.

Pre $i \neq j$ dostávame

$$\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} = \frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i x_j} = \frac{(x_i - x_j)^2 + 2x_i x_j}{x_i x_j} \geqq 2.$$

Rovnosť platí práve vtedy, keď $x_i = x_j$.

Teda

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqq$$

$$\geqq n.1 + \frac{1}{2}\,n\,(n-1).2 = n^2.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

A - P - 4

Jsou dány konečné množiny M_1, M_2, M_3, M_4. Symbolem $|M|$ označme počet prvků množiny M. Dokažte, že platí

(9) $|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| = |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| -$
$- |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_1 \cap M_4| - |M_2 \cap M_3| -$
$- |M_2 \cap M_4| - |M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| +$
$+ |M_1 \cap M_2 \cap M_4| + |M_1 \cap M_3 \cap M_4| +$
$+ |M_2 \cap M_3 \cap M_4| - |M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|$.

Riešenie. Nech m je počet prvkov množiny $M_1 \cup M_2 \cup \cup M_3 \cup M_4$. Rovnosť (9) dokážeme matematickou indukciou podľa m.

Označíme
$a = |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4|$,
$b = |M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_1 \cap M_4| +$
$\quad + |M_2 \cap M_3| + |M_2 \cap M_4| + |M_3 \cap M_4|$,

$$c = |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_4| +$$
$$+ |M_1 \cap M_3 \cap M_4| + |M_2 \cap M_3 \cap M_4|,$$
$$d = |M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|.$$

Rovnosť (9) je potom ekvivalentná rovnosti

$$m = a - b + c - d. \tag{10}$$

Nech $m = 1$. Potom množina $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ má jediný prvok x, a ten patrí do i množín, $i = 1, 2, 3, 4$. Ľahko vidieť, že platí toto:

Ak $i = 1$ (teda x patrí len do jednej z množín M_1, M_2, M_3, M_4), tak $a = 1$, $b = c = d = 0$ a teda (10) platí.

Ak $i = 2$, tak $a = 2$, $b = 1$, $c = d = 0$ a zase (10) platí.

Ak $i = 3$, tak $a = 3$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 0$. Potom $1 = 3 - 3 + 1 + 0$ a (10) platí.

Ak $i = 4$, tak $a = 4$, $b = 6$, $c = 4$, $d = 1$ a zase platí (10).

Predpokladajme, že $m = k + 1$ a (9) platí pre množiny, ktorých zjednotenie má k prvkov. Nech x je ľubovoľný prvok množiny $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$. Označíme

$$M_1' = M_1 - \{x\},$$
$$M_2' = M_2 - \{x\},$$
$$M_3' = M_3 - \{x\},$$
$$M_4' = M_4 - \{x\}.$$

Ďalej označíme

$$a' = |M'_1| + |M'_2| + |M'_3| + |M'_4|,$$

a podobne b', c', d'.

Podľa indukčného predpokladu platí

$$k = a' - b' + c' - d'. \tag{11}$$

Prvok x patrí do i množín, $i = 1, 2, 3, 4$.

Ak $i = 1$, tak $a = a' + 1$, $b = b'$, $c = c'$, $d = d'$ a podľa (11)

$$m = k + 1 = a - b + c - d,$$

tj. platí (10).

Ak $i = 2$, tak $a = a' + 2$, $b = b' + 1$, $c = c'$, $d = d'$ a podľa (11) máme

$$m = k + 1 = k + 2 - 1 = a - b + c - d.$$

Podobne pre $i = 3$ máme $a = a' + 3$, $b = b' + 3$, $c = c' + 1$, $d = d'$. Pre $i = 4$ je $a = a' + 4$, $b = b' + 6$, $c = c' + 4$, $d = d' + 1$. V obidvoch prípadoch pomocou (11) dostávame rovnosť (10).

Poznámka. Tvrdenie úlohy je špeciálnym prípadom všeobecného tvrdenia, ktoré sa nazýva princíp zapojenia a vypojenia alebo princíp inklúzie a exklúzie. Jeho presná formulácia je táto: nech $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sú konečné množiny. Pre ľubovoľnú neprázdnu množinu $T \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ označíme M_T prienik všetkých tých množín M_i, pre ktoré $i \in T$. Potom platí

$$|M_1 \cup \ldots \cup M_n| = \sum_T (-1)^{|T| + 1} . |M_T|, \tag{12}$$

sčitujeme cez všetky neprázdne podmnožiny T množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Špeciálnym prípadom rovnosti (12) je rovnosť (9) alebo jednoduchá rovnosť

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Dôkaz rovnosti (12) je rovnaký, ako uvedené riešenie úlohy (jediný rozdiel: $i = 1, 2, \ldots, n$).

Iný dôkaz rovnosti (12) možno urobiť matematickou indukciou podľa n. Stačí si uvedomiť, že každá neprázdna podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ má jeden z tvarov T, $T \cup \{n+1\}$, $\{n+1\}$, kde T je neprázdna podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

A - I - 1

Označme P_A obsah trojúhelníku $A_1A_2A_3$ a P_B obsah trojúhelníku $B_1B_2B_3$. Jestliže $|A_iA_k| \geqq |B_iB_k|$ pro všechny dvojice indexu 1, 2, 3 a v trojúhelníku $A_1A_2A_3$ není žádný úhel tupý, pak $P_A \geqq P_B$. Dokažte.

Riešenie. Označíme

$$p_{ik} = \frac{|B_iB_k|}{|A_iA_k|}$$

pre každú dvojicu i, k, $i \neq k$ čísiel 1, 2, 3. Podľa zadania úlohy platí

$$0 < p_{ik} \leqq 1.$$

Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $p_{12} \geqq p_{23}$, $p_{12} \geqq p_{13}$.

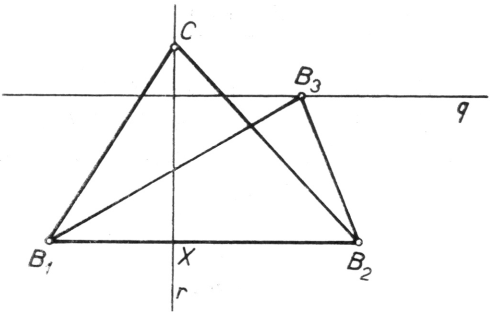
Ľahko zostrojíme bod C ležiaci v tej istej polrovine určenej priamkou B_1B_2 ako bod B_3 a taký, že trojuholníky $A_1A_2A_3$ a B_1B_2C sú podobné. Pre dĺžky ich strán platí

$$|B_1C| = p_{12}\,|A_1A_3|,\ |B_2C| = p_{12}\,|A_2A_3|,\ |B_1B_2| = p_{12}\,|A_1A_2|.$$

Obsah P trojuholníka B_1B_2C je potom

$$P = p_{12}{}^2 . P_A \leqq P_A.$$

Nech priamka q prechádza bodom B_3 a je rovnobežná s priamkou B_1B_2 a r prechádza bodom C a je kolmá na B_1B_2.



Obr. 34

Priesečník priamok B_1B_2 a r označíme X (obr. 34). Nijaký uhol v trojuholníku $A_1A_2A_3$ nie je tupý, teda ani uhly B_2B_1C a B_1B_2C nie sú tupé. Z toho vyplýva, že bod X leží na úsečke B_1B_2. Nech B'_3 je priesečník priamok q a r.

Uvažujme dve polroviny ϱ a σ určené priamkou r. Nech σ obsahuje bod B_1 a ϱ obsahuje bod B_2. Ak bod B_3 leží v polrovine ϱ, tak $|B_1B_3| \geqq |B_1B_3'|$. Keďže $|B_1B_3| = p_{13}\,|A_1A_3| \leqq \leqq p_{12}\,|A_1A_3|$, tak máme $|B_1B_3'| \leqq |B_1C|$.

Podobne, ak bod B_3 leží v polrovine σ, tak $|B_2B_3| \geqq |B_2B_3'|$. Keďže $|B_2B_3| = p_{23}\,|A_2A_3| \leqq p_{12}\,|A_2A_3|$, tak dostávame $|B_2B_3'| \leqq |B_2C|$.

V obidvoch prípadoch bod B_3' leží na úsečke XC, teda

$$|XB_3'| \leqq |XC|.$$

Obsah P_B je rovnaký ako obsah trojuholníka $B_1B_2B_3'$, a pre ten platí

$$P_B = \frac{1}{2}\,|B_1B_2|\,.\,|XB_3'| \leqq \frac{1}{2}\,|B_1B_2|\,.\,|XC| = P \leqq P_A.$$

A - I - 2

Najděte délky stran konvexního čtyřúhelníku, jehož nejdelší strana má délku 13 cm a nejkratší 3 cm, víte-li, že jeho obsah je 96 cm^2.

Riešenie. Využijeme vzťah (1) dokázaný v úlohe A - P - 1. Máme dve možnosti: buď najkratšia a najdlhšia strana sú priľahlé, alebo protiľahlé. Použijeme označenia z riešenia úlohy A - P - 1.

Uvažujme najprv prípad, že najkratšia a najdlhšia strana sú priľahlé. Označíme ich a, b. Potom platí

$$13 = b \geqq c \geqq a = 3,$$

$$13 = b \geqq d \geqq a = 3.$$

Keby bolo $c < 13$ alebo $d < 13$ alebo $\cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \neq 0$, tak podľa (1′) by platilo

$$P^2 = \frac{1}{16}(-3 + 13 + c + d)(3 - 13 + c + d).$$

$$. (3 + 13 - c + d)(3 + 13 + c - d) - 39cd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} =$$

$$= \frac{1}{16}(10 + c + d)(-10 + c + d)(16 - c + d) .$$

$$\cdot (16 + c - d) - 39cd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{1}{16}((c + d)^2 - 10^2) .$$

$$\cdot (16^2 - (c - d)^2) - 39cd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} < \frac{1}{16}(26^2 - 10^2) . 16^2 =$$

$$= 96^2.$$

Podľa podmienky úlohy má byť $P = 96$, a teda nutne $c = d =$ $= 13$ a $\alpha + \gamma = \pi$.

Podobne postupujeme v prípade, ak najdlhšia a najkratšia strana sú protiľahlé. Označíme najkratšiu stranu $a = 3$ a najdlhšiu $c = 13$. Potom platí

$$a = 3 \leqq b \leqq c = 13,$$

$$a = 3 \leqq d \leqq c = 13.$$

Podľa (1′) dostaneme podobne ako vyššie

$$P^2 = \frac{1}{16}((b + d)^2 - 10^2)(16^2 - (b - d)^2) -$$

$$- 39bd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Keby bolo $b < 13$ alebo $d < 13$ alebo $\cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \neq 0$, tak platí

$$P^2 < \frac{1}{16}(26^2 - 10^2) . 16^2 = 96^2.$$

Keďže $P = 96$, tak z uvedeného vyplýva, že $b = 13$, $d = 13$ a $\cos \frac{\alpha + \gamma}{2} = 0$, tj. $\alpha + \gamma = \pi$.

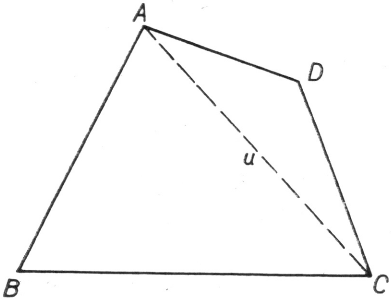
Zistili sme, že podmienke úlohy vyhovuje jedine tetivový štvoruholník o stranách 3, 13, 13, 13.

Iné riešenie. Tetivový konvexný štvoruholník o stranách a, b, c, d má podľa vzťahu (1) dokázanom v úlohe A - P - 1 obsah 96.

Ukážeme, že je to jediný štvoruholník, ktorý vyhovuje podmienke úlohy. Kvôli zjednodušeniu našich úvah je užitočné dohodnúť sa na jednom pojme. Budeme hovoriť, že štvoruholník má vlastnosť **Q**, ak je konvexný, jeho najkratšia strana má dĺžku 3 a najdlhšia strana má dĺžku 13. Najprv dokážeme pomocné tvrdenie: ak štvoruholník s vlastnosťou **Q** nemá tri strany dĺžky 13, tak existuje štvoruholník s vlastnosťou **Q**, ktorý má od neho väčší obsah.

Dokážeme pomocné tvrdenie. Uvažujme štvoruholník $ABCD$ s vlastnosťou **Q**, ktorý nemá tri strany dĺžky 13. Nech a, b, c, d sú dĺžky strán DA, AB, BC, CD. Môžeme predpokladať, že DA je najkratšia strana, tj. $a = 3$. Keďže štvoruholník $ABCD$ nemá tri strany dĺžky 13, tak jedna zo strán AB, BC, CD je kratšia ako 13 (a jedna je 13). Zrejme stačí uvažovať prípady i) $b < 13$, $c = 13$ a ii) $b = 13$, $c < 13$.

Označíme u dĺžku úsečky AC (pozri obr. 35). Ľahko vidieť, že $u < 13 + 13$ (lebo $u < 3 + d \leqq 3 + 13$). Teda môžeme zostrojiť trojuholník ACB' o stranách u, 13, 13 a taký, že



Obr. 35

bod B' leží v tej istej polrovine určenej priamkou AC ako bod B. Ľahko vidieť, že štvoruholník $AB'CD$ má vlastnosť **Q** a obsah väčší ako štvoruholník $ABCD$ (lebo má väčšiu stranu AB v prípade i) a väčšiu stranu BC v prípade ii)). Tým je pomocné tvrdenie dokázané.

Predpokladajme, že štvoruholník $ABCD$ má vlastnosť **Q**. Ak dĺžky jeho strán sú 3, 13, 13, 13, tak pre jeho obsah podľa úlohy A - P - 1 platí

$$P^2 = \frac{1}{16}.36.16.16.16 - 3.13^3 \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} =$$

$$= 96^2 - 3.13^3 \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} .$$

Ak $P = 96$, tak nutne $\cos \dfrac{\alpha + \gamma}{2} = 0$, teda $\alpha + \gamma = \pi$. To ale znamená, že $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Naviac, ak je netetivový, tak jeho obsah je menší ako 96.

Podľa pomocného tvrdenia, ak štvoruholník má vlastnosť **Q** a nemá tri strany dĺžky 13, tak existuje štvoruholník s vlastnosťou **Q** o stranách 3, 13, 13, 13 a s väčším obsahom.

Z uvedeného vyplýva, že jediný štvoruholník vyhovujúci podmienke úlohy je tetivový o stranách 3, 13, 13, 13.

A - I - 3

V rovině je dána konečná množina bodů. Každý z nich je označen právě jednou ze tří barev, a přitom je každá barva použita alespoň pro jeden bod. Dokažte, že existuje kruh, který obsahuje po jednom bodu dvou barev a alespoň jeden bod třetí barvy.

Riešenie. Označíme L danú konečnú množinu bodov. Zrejme existuje kruh, ktorý obsahuje všetky body množiny L. Ľahko vidieť, že existuje kruh K_0 s týmito dvomi vlastnosťami:

i) kruh K_0 obsahuje aspoň jeden bod každej farby;

ii) ak kruh K je taký, že $K \cap L$ má menej prvkov ako $K_0 \cap L$, tak K neobsahuje body všetkých troch farieb.

Ukážeme, že kruh K_0 je hľadaný kruh, tj. obsahuje len po jednom bode dvoch farieb.

K dôkazu potrebujeme pomocné konštrukcie. Ak kruh K má stred S a polomer r, tak jeho hranica $h(K)$ je kružnica so stredom S a polomerom r.

Uvažujme kruh $K = (S;\ r)$. Nech r' je najväčšie z čísiel $|SX|$, $X \in K \cap L$. Potom $r' \leqq r$. Ak $K' = (S;\ r')$, tak zrejme platí $K' \cap L = K \cap L$ a existuje bod množiny L na hranici $h(K')$. Teda v ďalšom bez újmy na všeobecnosti môžeme vždy predpokladať, že $h(K) \cap L \neq \emptyset$.

Dokážeme teraz *prvé pomocné tvrdenie*:
Ak $K \cap L$ má aspoň dva prvky, tak existuje kruh K' taký, že $K \cap L = K' \cap L$ a $h(K') \cap L$ má aspoň dva prvky.

Podľa vyššie uvedeného môžeme predpokladať, že $h(K) \cap \cap L \neq \emptyset$. Nech $A \in h(K) \cap L$, tj. A je bod množiny L ležiaci na hranici kruhu K.

Ak bod X patrí do kruhu K, $X \neq A$, tak označíme S_X priesečník osi súmernosti úsečky AX s priamkou AS. Ľahko vidieť, že bod S_X leží na úsečke AS. Nech $X_0 \in K \cap L$, $X_0 \neq A$ je taký, že pre každé $X \in K \cap L$, $X \neq A$ platí

$|S_{X_0}S| \leqq |S_XS|$. Existencia takého bodu X_0 vyplýva z toho, že množina $K \cap L - \{A\}$ je konečná a neprázdna (lebo $K \cap L$ má aspoň dva body). Nech $S' = S_{X_0}$ a $r' = |S_{X_0}A|$. Ukážeme, že $K' = (S', r')$ má požadovanú vlastnosť.

Zrejme $K' \subseteq K$ a teda $K' \cap L \subseteq K \cap L$. Ak $X \in K \cap L$, tak buď $X = A$ alebo $X \neq A$. Zrejme $A \in K'$. Ak $X \neq A$, tak $|S_{X_0}X| \leqq |S_{X_0}S_X| + |S_XX|$. Ale $|XS_X| = |S_XA|$ a $|S_{X_0}S_X| + |S_XA| = r'$. Teda $X \in K'$. Zrejme $|S_{X_0}X_0| = r'$ a teda X_0 leží na hranici kruhu K'.

Dokážeme *druhé pomocné tvrdenie*:
Ak $A \in h(K) \cap L$, tak existuje kruh K' taký, že $K' \cap L = K \cap L - \{A\}$.

Nech d je najmenšie z čísiel $|XS|$, kde $X \in L - K$. Potom $d > r$. Na priamke AS zvolíme bod S' taký, aby platilo $|AS| < |AS'| < \frac{d + r}{2}$. Nech r' je najväčšie z čísiel $|XS'|$, $X \neq A$, $X \in L \cap K$ (ak také X neexistuje, tak stačí položiť $r' = r$). Ukážeme, že $K' = (S'; r')$ je hľadaný kruh.

Ak $X \in L \cap K$, $X \neq A$, tak $|S'X| < |SX| + |SS'| \leqq |SA| + |SS'| = |S'A|$. Z toho vyplýva, že $|S'A| > r'$, a teda A nepatrí do K'.

Nech $X \in L \cap K'$. Potom $|XS| \leqq |XS'| + |S'S| \leqq r' + |S'S| < |S'A| + |S'S| \leqq d$. Z definície čísla d vyplýva, že $X \in K$. Ukázali sme, že $L \cap K' \subseteq L \cap K - \{A\}$.

Naopak, nech $X \in L \cap K$, $X \neq A$. Potom podľa definície čísla r' je $|XS'| \leqq r'$ a teda $X \in L \cap K'$.

Tým je druhé pomocné tvrdenie dokázané.

Dokážeme teraz, že kruh K_0 je hľadaný kruh. Budeme dokazovať sporom. Predpokladáme, že kruh K_0 obsahuje aspoň po dva body dvoch farieb, napr. aspoň dva body prvej farby a aspoň dva body druhej farby. Podľa prvého pomocného tvrdenia môžeme predpokladať, že na hranici $h(K_0)$ ležia aspoň dva body množiny L. Označíme ich A, B. Buď sú obidva tretej farby, alebo aspoň jeden z nich, povedzme A, je jednej z prvých dvoch farieb. V obidvoch prípadoch existuje v $L \cap K_0$ bod $X \neq A$, ktorý je rovnakej farby ako bod A. Podľa druhého pomocného tvrdenia existuje kruh K taký, že $K \cap L = K_0 \cap L - \{A\}$. Kruh K obsahuje body všetkých troch farieb, a to je spor s vlastnosťou ii) kruhu K_0.

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj mnohými inými postupmi. Napríklad vhodnou kruhovou inverziou možno úlohu previesť na hľadanie polroviny ϱ, ktorá obsahuje po jednom bode dvoch farieb a aspoň jeden bod tretej farby. Nájsť takú polrovinu ϱ je jednoduchšie.

A - I - 4

Pre každé kladné reálne čísla $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \geq \frac{4n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \tag{13}$$

Dokážte. Kedy platí rovnosť?

Riešenie. Nerovnosť (13) je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \geq 4n^2. \tag{14}$$

Zrejme platí

$$0 \leqq \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Teda

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + \\ + 2 \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geq 4 \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Rovnosť platí vtedy a len vtedy, ak $\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 = 0$, tj. ak $x_k = y_k$ pre $k = 1, 2, \ldots, n$.

Z uvedenej nerovnosti dostávame

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \geq 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k}. \tag{15}$$

Podľa nerovnosti (6) z úlohy A - P - 3 platí

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \geq n^2. \tag{16}$$

Odtiaľ pomocou (15) už vyplýva nerovnosť (14), a teda aj (13).

Rovnosť v nerovnosti (13) nastáva práve vtedy, keď platí rovnosť v nerovnosti (15) a (16), a to je jedine v prípade $x_1 = y_1 = \ldots = x_n = y_n$.

A - I - 5

Na škole pracuje 64 žiakov v piatich záujmových krúžkoch. Každý krúžok má aspoň 19 členov. Žiaden žiak nepracuje vo viac ako troch krúžkoch, ale každé tri krúžky majú aspoň jedného spoločného člena. Dokážte, že existujú dva krúžky, ktoré majú spoločných aspoň päť členov.

Riešenie. Označíme $K_1, \ldots, K_5$ množiny členov prvého až piateho krúžku. Podľa zadania úlohy žiadne štyri z množín $K_1, \ldots, K_5$ nemajú spoločný prvok.
Označíme $(i, j, l = 1, 2, \ldots, 5)$:

$$k_i = |K_i|,\ k_{ij} = |K_i \cap K_j|,\ k_{ijl} = |K_i \cap K_j \cap K_l|.$$

Podľa zovšeobecnenia (12) úlohy A - P - 4 platí

$$64 = |K_1 \cup \ldots \cup K_5| = \sum_{i=1}^{5} k_i - \sum_{i<j} k_{ij} + \sum_{i<j<l} k_{ijl}.$$

Zo zadania úlohy vyplýva, že $k_{ijl} \geq 1$, $k_i \geq 19$.

Teda

$$\sum_{i=1}^{5} k_i \geq 5.19 = 95,$$

$$\sum_{i<j<l} k_{ijl} \geq \binom{5}{3} \,.\, 1 = 10.$$

Teda

$$\sum_{i<j} k_{ij} = \sum_{i=1}^{5} k_i + \sum_{i<j<l} k_{ijl} - 64 \geq 95 + 10 - 64 = 41.$$

Keby bolo každé k_{ij} menšie ako 5, tak

$$\sum_{i<j} k_{ij} \leq \binom{5}{2} \,.\, 4 = 10 \,.\, 4 = 40.$$

To však nie je, teda existujú také dva indexy i, j, že $k_{ij} \geq 5$. To ale znamená, že krúžky K_i, K_j majú aspoň päť spoločných členov.

A - I - 6

Riešte sústavu rovníc s neznámymi $x_1, \ldots, x_n$ (c, d sú reálne čísla):

$$\begin{aligned}
-2x_1 \quad\quad &+ x_2 = c, \\
x_1 - 2x_2 \quad\quad &+ x_3 = c, \\
&\vdots \\
x_{n-2} - 2x_{n-1} &+ x_n = c, \\
x_{n-1} - 2x_n \quad\quad &+ d \;\; = c.
\end{aligned} \tag{17}$$

Riešenie. Zo zadania úlohy vyplýva, že $n \geq 2$. Označíme $x_{n+1} = d$. Ak sčítame prvých l rovníc sústavy (17), tak dostaneme rovnice

$$
\begin{gathered}
-x_1 - x_1 + x_2 = c, \\
-x_1 - x_2 + x_3 = 2c, \\
\vdots \\
-x_1 - x_l + x_{l+1} = lc, \\
\vdots \\
-x_1 - x_n + x_{n+1} = nc.
\end{gathered} \tag{18}
$$

Spočítaním prvých k rovníc (18) dostaneme pre $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$:

$$-(k+1)\, x_1 + x_{k+1} = \frac{1}{2} k\, (k+1)\, c. \tag{19}$$

Pre $k = n$ odtiaľ vyplýva

$$x_1 = \frac{d}{n+1} - \frac{1}{2} nc.$$

Pomocou (19) dostaneme

$$x_k = \frac{1}{2} k\, (k-1)\, c + \frac{k}{n+1} d - \frac{k}{2} nc = \frac{1}{2} k\, (k - 1 - n)\, c + \\ + \frac{k}{n+1} d$$

pre $k = 1, 2, \ldots, n$.

Skúškou ľahko zistíme, že čísla

$$x_k = \frac{1}{2} k (k - 1 - n) c + \frac{k}{n + 1} d, \; k = 1, 2, \ldots, n$$

sú riešenia sústavy rovníc (17).

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

A - II - 1

Určete všechny n-tice reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která vyhovují rovnicím

$$\begin{aligned} x_1^2 - 3x_1 + 4 &= x_2 \\ x_2^2 - 3x_2 + 4 &= x_3 \\ &\vdots \\ x^2_{n-1} - 3x_{n-1} + 4 &= x_n \\ x_n^2 - 3x_n + 4 &= x_1. \end{aligned} \tag{20}$$

Riešenie. Ľahko vidieť, že n-tica 2, 2, ..., 2 je riešením sústavy (20). Ukážeme, že je to jediné riešenie tejto sústavy.

Nech $y = x^2 - 3x + 4$. Z jednoduchej identity

$$y - x = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

vyplýva, že pre $x \neq 2$ platí $y > x$.

Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je riešenie sústavy (20). Ak niektoré x_i je rovné 2, potom z i-tej rovnice sústavy (20) vyplýva, že $x_{i+1} = 2$, a z poslednej rovnice vyplýva $x_1 = 2$. Podľa prvej rovnice je potom aj $x_2 = 2$ atď. Úhrnom: ak niektoré $x_i = 2$, tak $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 2$.

Predpokladajme teraz, že $x_1 \neq 2$. Potom aj $x_2 \neq 2, \ldots,$ $\ldots x_n \neq 2$. Podľa vyššie uvedeného však platí

$$\begin{gathered} x_1 < x_2, \\ x_2 < x_3, \\ \vdots \\ x_{n-1} < x_n, \\ x_n < x_1, \end{gathered}$$

čo je spor.

Teda n-tica $2, 2, \ldots, 2$ je jediné riešenie sústavy (20).

Iné riešenie. Sústavu (20) upravíme na ekvivalentnú sústavu

$$\begin{aligned} x_1^2 - 4x_1 + 4 &= x_2 - x_1 \\ x_2^2 - 4x_2 + 4 &= x_3 - x_2 \\ &\vdots \\ x_{n-1}^2 - 4x_{n-1} + 4 &= x_n - x_{n-1} \\ x_n^2 - 4x_n + 4 &= x_1 - x_n. \end{aligned} \tag{20'}$$

Ak spočítame tieto rovnice, po jednoduchej úprave dostaneme

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + \ldots + (x_n - 2)^2 = 0.$$

Riešením tejto rovnice je jediná n-tica čísiel $2, 2, \ldots, 2$.

Skúškou zistíme, že táto n-tica je aj riešením sústavy (20).

A - II - 2

Najděte všechny konvexní čtyřúhelníky, pro které je součet délek dvou stran roven 6, součet délek zbývajících dvou stran je 8 a obsah je 12.

Riešenie. Musíme uvažovať dve možnosti:
a) súčet dĺžiek dvoch priľahlých strán je rovný 6;
b) súčet dĺžiek dvoch protiľahlých strán je rovný 6.

Uvažujme prípad a). Použijeme vzorec (1′) z úlohy A - P - 1. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že

$$a + b = 6,$$
$$c + d = 8.$$

Potom podľa vzorca (1′) platí

$$12^2 = \frac{1}{16}(-a + b + 8)(a - b + 8)(6 - c + d)$$

$$(6 + c - d) - abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2},$$

a teda

$$12^2 = \frac{1}{16}(8^2 - (a - b)^2)(6^2 - (c - d)^2) - abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Číslo na pravej strane tejto rovnosti je vždy menšie alebo rovné číslu

$$\frac{1}{16}.8^2.6^2 = \frac{1}{4^2}.8^2.6^2 = 2^2.6^2 = 12^2.$$

Teda musí platiť rovnosť, a tá zrejme nastáva jedine v prípade

$$a - b = 0, \; c - d = 0 \text{ a } \cos\frac{\alpha + \gamma}{2} = 0.$$

Z toho vyplýva, že $a = b = 3$, $c = d = 4$ a $\alpha + \gamma = \pi$. Tento štvoruholník (deltoid) je riešením úlohy.

V prípade b) dostaneme podobnou úpravou (teraz $a + c = 6$, $b + d = 8$):

$$12^2 = \frac{1}{16}(8^2 - (a - c)^2)(6^2 - (b - d)^2) - abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2},$$

a teda $a = c = 3$, $b = d = 4$ a $\alpha + \gamma = \pi$. Tento štvoruholník (obdĺžnik) je tiež riešením úlohy.

Úhrnom, riešením úlohy sú dva konvexné štvoruholníky: deltoid o stranách 3,4 a obdĺžnik o stranách 3,4.

A - II - 3a

Trojúhelník o stranách a, b, c má obsah P a trojúhelník o stranách u, v, w má obsah Q. Dokažte, že pak platí

$$\begin{aligned} (21) \qquad & a^2(-u^2 + v^2 + w^2) + b^2(u^2 - v^2 + w^2) + \\ & + c^2(u^2 + v^2 - w^2) \geq 16\,PQ. \end{aligned}$$

Pro které trojúhelníky platí rovnost?

Riešenie. Označíme γ uhol v prvom trojuhelníku ležiaci proti strane c a φ bude uhol v druhom trojuholníku proti strane w. Potom platí

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

$$Q = \frac{1}{2} uv \sin \varphi.$$

Podľa kosínusovej vety platí

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$
$$u^2 + v^2 - w^2 = 2uv \cos \varphi.$$

Pomocou týchto štyroch identít nerovnosť (21) prepíšeme na ekvivalentný tvar

$$a^2 (2v^2 - 2uv \cos \varphi) + b^2 (2u^2 - 2uv \cos \varphi) +$$
$$+ (a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma) 2uv \cos \varphi \geq 4abuv \sin \gamma \sin \varphi.$$

Úpravou dostaneme nerovnosť

$$2 (a^2v^2 + b^2u^2) - 4abuv (\cos \gamma \cos \varphi + \sin \gamma \sin \varphi) \geq 0.$$

Použitím vzorca pre kosínus rozdielu a jednoduchou úpravou získame nerovnosť

(22) $$(av - bu)^2 + 2abuv (1 - \cos (\gamma - \varphi)) \geq 0,$$

ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou (21).

Pretože $\cos (\gamma - \varphi) \leqq 1$, tak nerovnosť (22) vždy platí. Tým sme dokázali nerovnosť (21).

V nerovnosti (22) platí rovnosť vtedy a len vtedy, keď obidva sčítance sú rovné nule, tj.

$$av = bu$$

a

$$\cos(\gamma - \varphi) = 1.$$

To nastáva v prípade $\gamma = \varphi$ a $a : b = u : v$, tj. v prípade, keď trojuholníky sú podobné a a, b, c a u, v, w sú odpovedajúce si strany.

A - II - 3b

Nech k, m, n sú prirodzené čísla. Potom číslo

$$1^m + 2^m + \ldots + (n^k - 1)^m + (n^k)^m$$

je deliteľné číslom n^{k-1}. Dokážte.

Riešenie. Označíme

$$L_k = 1^m + 2^m + \ldots + (n^k - 1)^m + (n^k)^m.$$

Matematickou indukciou dokážeme, že pre každé k je číslo L_k deliteľné číslom n^{k-1}.

Pretože $n^{1-1} = n^0 = 1$, tak pre $k = 1$ tvrdenie zrejme platí.

Predpokladáme, že L_k je deliteľné číslom n^{k-1}. Upravíme výraz pre L_{k+1} takto:

$$
\begin{aligned}
L_{k+1} = {} & 1^m + 2^m + \ldots + (n^k)^m + \\
& + (n^k + 1)^m + \ldots + (n^k + n^k)^m + \\
(23) \qquad & + \qquad \vdots \\
& + ((n-1)\, n^k + 1)^m + \ldots + ((n-1)\, n^k + n^k)^m
\end{aligned}
$$

Podľa binomickej vety platí

$$(jn^k + i)^m = i^m + i^{m-1} . jn^k \binom{m}{1} + \ldots + i^0 . (jn^k)^m \binom{m}{m} .$$

Označíme

$$A_{ij} = i^{m-1} . j \binom{m}{1} + i^{m-2} . j^2 (n^k)^1 . \binom{m}{2} + \ldots + i^0 . j^m (n^k)^{m-1} \binom{m}{m} .$$

Teda

$$(jn^k + i)^m = i^m + A_{ij} . n^k.$$

Súčet v $(j+1)$-om riadku výrazu (23) potom bude

$$
\begin{aligned}
(jn^k + 1)^m + \ldots + (jn^k + n^k)^m = {} & 1^m + \ldots + (n^k)^m + \\
& + n^k (A_{1j} + \ldots + A_{n^k j}) = L_k + n^k . B_j,
\end{aligned}
$$

kde

$$B_j = A_{1j} + \ldots + A_{n^k j}.$$

Úhrnom z (23) dostaneme

$$
\begin{aligned}
L_{k+1} = L_k + (L_k + n^k B_1) + \ldots + \\
+ (L_k + n^k B_{n-1})
\end{aligned}
$$

a teda

$$L_{k+1} = nL_k + n^k (B_1 + \ldots + B_{n-1}). \tag{24}$$

Ľahko vidieť, že $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ sú prirodzené čísla. Podľa indukčného predpokladu, číslo L_k je deliteľné číslom n^{k-1}. Z vyjadrenia (24) vyplýva, že číslo L_{k+1} je deliteľné číslom n^k.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

Dokažte, že pro každé celé nezáporné číslo k je součin $(k + 1)(k + 2) \ldots (k + 1980)$ dělitelný číslem 1980^{197}.

Riešenie. Rozložíme číslo 1980 na súčin mocnín prvočísiel:

$$1980 = 2^2 . 3^2 . 5 . 11.$$

Stačí ukázať, že súčin

$$S_k = (k + 1)(k + 2) \ldots (k + 1980)$$

je deliteľný číslami $2^{2 \cdot 197}$, $3^{2 \cdot 197}$, 5^{197} a 11^{197}.

Ľahko vidieť, že S_k je deliteľný číslom 2^{990} (lebo každé druhé číslo je párne), a teda aj číslom $2^{2 \cdot 197}$. Podobne S_k je deliteľné $3^{1980:3} = 3^{660}$, a teda aj číslom $3^{2 \cdot 197}$. Keďže $5 . 197 < 1980$, každé piate číslo je deliteľné číslom 5, tak S_k je deliteľné číslom 5^{197}.

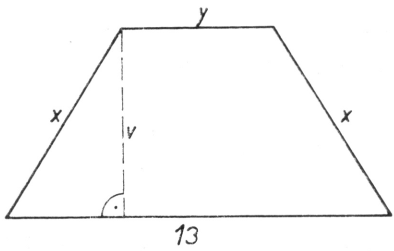
Z čísiel $k + 1, k + 2, \ldots, k + 1980$ je práve $1980 : 11 = 180$ deliteľné číslom 11. Niektoré však môžu byť deliteľné aj číslom 11^2. Keďže $16 . 11^2 = 1936 < 1980$, tak aspoň 16 z týchto čísiel je deliteľné číslom 11^2. Ale aj $11^3 = 1331$ je menšie ako 1980. Teda aspoň jedno z čísiel $k + 1, \ldots, k + 1980$ je deliteľné treťou mocninou čísla 11. Z uvedeného vyplýva, že S_k je deliteľné číslom

$$11^{180 + 16 + 1} = 11^{197}.$$

To sme chceli dokázať.

A - III - 2

Najděte velikosti stran rovnoramenného lichoběžníku, který má nejdelší stranu 13 cm, obvod 28 cm a obsah 27 cm^2. Existuje takový lichoběžník, předepíšeme-li obsah 27,001 cm^2?



Obr. 36

Riešenie. Zo zadania úlohy jednoducho vyplýva, že najdlhšou stranou musí byť väčšia základňa.

Označíme dĺžku ramena x a dĺžku kratšej základne y. Zo zadania úlohy potom vyplývajú rovnice (pozri obr. 36):

$$(25)\qquad \begin{aligned} 2x + y + 13 &= 28 \\ \frac{13+y}{2} \cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{13-y}{2}\right)^2} &= 27. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice vyjadríme y:

$$y = 15 - 2x$$

a dosadíme do druhej rovnice. Po úprave dostaneme

$$(14 - x) . \sqrt{2x - 1} = 27,$$

a teda

$$(26)\qquad (14 - x)^2 (2x - 1) = 27^2.$$

Keďže y je kratšia základňa, tak $y \leqq 13$, a teda $x \geqq 1$. Z prvej rovnice (25) vyplýva, že $2x < 15$. Úhrnom

$$(27)\qquad 1 \leqq x < \frac{15}{2}.$$

Potrebujeme nájsť všetky riešenia rovnice (26) vyhovujúce podmienke (27).

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom kladných čísiel

$$u.v.w \leqq \left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3$$

máme (podľa (27) čísla $14 - x$, $2x - 1$ sú kladné):

$$(14 - x)^2 (2x - 1) \leqq \left(\frac{14 - x + 14 - x + 2x - 1}{3}\right)^3 =$$

$$= 9^3 = 27^2. \tag{28}$$

Rovnosť nastáva jedine v prípade $14 - x = 2x - 1$, tj. pre $x = 5$. Teda jediné riešenie rovnice (26) je $x = 5$.

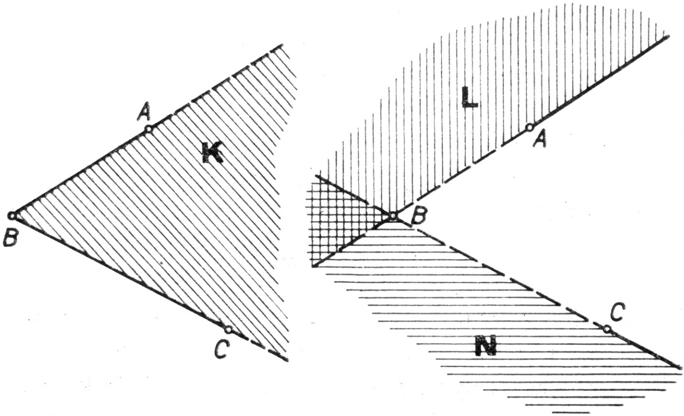
Z uvedeného vyplýva, že existuje jediný lichobežník vyhovujúci podmienkam úlohy a to je lichobežník o stranách 13, 5, 5, 5.

Z nerovnosti (28) vyplýva, že obsah lichobežníka s najdlhšou stranou 13 a obvodom 28 je menší alebo rovný 27. Teda neexistuje lichobežník s uvedenými vlastnosťami a obsahom 27,001.

Poznámka. Rovnicu (26) možno riešiť aj tak, že pomocou diferenciálneho počtu vyšetríme priebeh funkcie $y = (14 - x)^2 \cdot (2x - 1)$ a zistíme, že v intervale $\langle 1, 15/2)$ má jediné maximum v bode $x = 5$.

A - III - 3

Množina **M** vznikla z roviny vyjmutím tří bodů A, B, C, které jsou vrcholy trojúhelníka. Jaký je nejmenší počet konvexních množin, jejichž sjednocením je **M**?



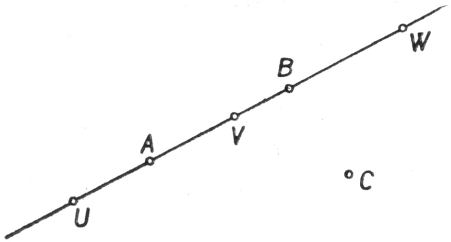
Obr. 37

Riešenie. Ukážeme, že najmenší počet konvexných množín, ktorých zjednotenie je množina **M**, je tri. K tomu je potrebné dokázať dve tvrdenia: i) množina **M** sa dá vyjadriť ako zjednotenie troch konvexných množín a ii) množina **M** sa nedá vyjadriť ako zjednotenie dvoch konvexných množín.

Dokážeme najprv tvrdenie i), a to tak, že zostrojíme tri konvexné množiny **K**, **L**, **N** také, že $\mathbf{M} = \mathbf{K} \cup \mathbf{L} \cup \mathbf{N}$.

Nech **K** je množina všetkých bodov, ktoré ležia vnútri uhla ABC alebo vnútri úsečiek AB, BC (pozri obr. 37). Nech **L** je množina všetkých bodov, ktoré ležia mimo polroviny ABC alebo na polpriamke opačnej k polpriamke AB (okrem bodu A). Podobne nech **N** je množina všetkých bodov, ktoré ležia mimo polroviny BCA alebo na polpriamke opačnej k polpriamke CB (okrem bodu C). Ľahko vidieť, že **K**, **L**, **N** sú konvexné množiny a že ich zjednotenie je množina **M**.

Dokážeme teraz tvrdenie ii) sporom. Predpokladajme, že množina **M** sa dá vyjadriť ako zjednotenie dvoch konvexných množín **P**, **Q**. Na priamke AB zvolíme tri rôzne body U, V, W také, že bod A leží vnútri úsečky UV a bod B leží vnútri úsečky VW (pozri obr. 38). Body U, V, W patria do množiny



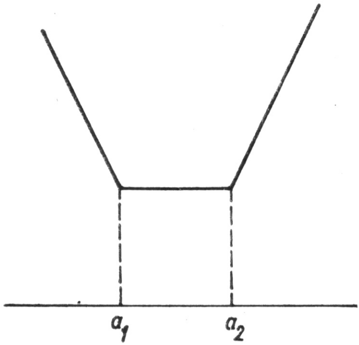
Obr. 38

M a teda aj do zjednotenia $\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$. Potom niektorá z množín **P**, **Q** musí obsahovať dva z týchto troch bodov. Nech je to množina **P**. Môžu nastať tri prípady: a) $U, V \in \mathbf{P}$, b) $U, W \in \mathbf{P}$ a c) $V, W \in \mathbf{P}$. Keďže množina **P** je konvexná, tak v prípade a) a b) máme $A \in \mathbf{P}$ a v prípade c) máme $B \in \mathbf{P}$. To je však spor s tým, že $A, B \notin \mathbf{M}$.

A - III - 4

Nech $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ sú reálne čísla, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$, n párne. Nájdite minimum tejto funkcie.

Riešenie. Pre $n = 2$ ľahko zistíme priebeh funkcie f a zostrojíme jej graf (pozri obr. 39):



Obr. 39

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 + a_2 - 2x && \text{pre } x < a_1 \\ f(x) &= a_2 - a_1 && \text{pre } a_1 \leqq x \leqq a_2, \\ f(x) &= 2x - (a_1 + a_2) && \text{pre } x > a_2. \end{aligned}$$

Ak $x < a_1$, tak $a_1 + a_2 - 2x > a_1 + a_2 - 2a_1 = a_2 - a_1$. Podobne ak $x > a_2$, tak $2x - (a_1 + a_2) > 2a_2 - (a_1 + a_2) = a_2 - a_1$. Z toho vyplýva, že funkcia f nadobúda svojho minima $a_2 - a_1$ v každom bode intervalu $\langle a_1, a_2 \rangle$.

Ak n je ľubovoľné párne prirodzené číslo, $n = 2k$, tak hodnotu funkcie f v bode x vieme vyjadriť ako súčet hodnôt k funkcií:

$$f(x) = (|x - a_1| + |x - a_n|) + (|x - a_2| + |x - a_{n-1}|) + \dots$$
$$\dots + (|x - a_k| + |x - a_{k+1}|).$$

Každá z funkcií $|x - a_i| + |x - a_{n+1-i}|$ nadobúda svoje minimum $a_{n+1-i} - a_i$ na intervale $\langle a_i, a_{n+1-i} \rangle$. Pre tieto intervaly platí

$$\langle a_1, a_{n-1} \rangle \supseteq \langle a_2, a_{n-2} \rangle \supseteq \ldots \supseteq \langle a_k, a_{k+1} \rangle.$$

Teda funkcia f nadobúda svoje minimum na najmenšom z týchto intervalov $\langle a_k, a_{k+1} \rangle$ a hodnota tohoto minima je číslo

$$\sum_{i=1}^{k} (a_{k+i} - a_i).$$

A - III - 5

Riešte v obore celých čísiel sústavu nerovníc

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2yz &\leqq 1 + y^2 \\ 3y^2 + 2zx &\leqq 1 + z^2 \\ 3z^2 + 2xy &\leqq 1 + x^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Riešenie. Ak spočítame všetky tri nerovnice, po jednoduchej úprave dostaneme nerovnicu

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x + y + z)^2 \leqq 3. \tag{30}$$

Každé riešenie sústavy nerovníc (29) je aj riešením nerovnice (30). Ak x, y, z je celočíselné riešenie nerovnice (30), tak nutne $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$, $|z| \leqq 1$, tj. $x, y, z = -1, 0, 1$. Ak

$|x| = 1$, tak podľa prvej nerovnice (29) je $2yz \leqq 1 - 3 + y^2 \leqq -2 + 1 = -1$. Teda $yz = -1$. Potom však $|y| = |z| = 1$ a z druhej a tretej nerovnice (29) podobným spôsobom dostaneme $xz = -1$ a $xy = -1$. To však nie je možné, lebo potom by bolo

$$x^2y^2z^2 = xy \, . \, xz \, . \, yz = (-1)^3 = -1.$$

Teda $x = 0$. Podobne sa zistí, že musí byť $y = z = 0$. Skúškou ľahko overíme, že 0, 0, 0 je jediným celočíselným riešením sústavy nerovníc (29).

A - III - 6

Nech $\mathbf{M}$ je množina piatich bodov v priestore, z ktorých žiadne štyri neležia v rovine. Nech je ďalej $\mathbf{R}$ množina siedmich rovín s vlastnosťami:

a) Každá rovina z množiny $\mathbf{R}$ obsahuje aspoň jeden bod množiny $\mathbf{M}$.

b) Žiadny z bodov množiny $\mathbf{M}$ neleží v piatich rovinách množiny $\mathbf{R}$.

Dokážte, že existujú také dva rôzne body P, Q, $P \in \mathbf{M}$, $Q \in \mathbf{M}$, že priamka PQ nie je priesečnicou žiadnych dvoch rovín z množiny $\mathbf{R}$.

Riešenie. Nech $\mathbf{M} = \{A_1, \ldots, A_5\}$. Nech $\mathbf{R}_i$ je množina tých rovín z množiny $\mathbf{R}$, ktoré obsahujú bod A_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Nech $\mathbf{R}_{ij}$ je množina tých rovín z množiny $\mathbf{R}$, ktoré obsahujú body A_i, A_j. Teda $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_i \cap \mathbf{R}_j$. Podobne označíme $\mathbf{R}_{ijk} = \mathbf{R}_i \cap \mathbf{R}_j \cap \mathbf{R}_k$, $\mathbf{R}_{ijkl} = \mathbf{R}_i \cap \mathbf{R}_j \cap \mathbf{R}_k \cap \mathbf{R}_l$, $i, j, k, l = 1, 2, \ldots, 5$, $i \neq j, k, l$, $j \neq k, l$, $k \neq l$.

Keďže žiadne štyri body množiny $\mathbf{M}$ neležia v jednej rovine, tak $\mathbf{R}_{ijkl} = \varnothing$ pre $i < j < k < l$. Podľa podmienky b) máme $|\mathbf{R}_i| \leqq 4$ pre $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Číslo $\sum\limits_{i<j<k} |\mathbf{R}_{ijk}|$ udáva počet rovín, ktoré obsahujú práve tri body množiny $\mathbf{M}$. Keďže každý bod leží najviac v štyroch rovinách množiny $\mathbf{R}$, tak máme

$$3 \,.\, \sum_{i<j<k} |\mathbf{R}_{ijk}| \leqq 4.5.$$

Teda

$$\sum_{i<j<k} |\mathbf{R}_{ijk}| \leqq 6.$$

Podľa podmienky a) je $\sum\limits_{i=1}^{5} |\mathbf{R}_i| = |\mathbf{R}|$.
Podľa princípu inklúzie a exklúzie (úloha A - P - 4) máme

$$7 = \sum_{i=1}^{5} |\mathbf{R}_i| - \sum_{i<j} |\mathbf{R}_{ij}| + \sum_{i<j<k} |\mathbf{R}_{ijk}|.$$

Z tejto rovnosti vyplýva

$$\sum_{i<j} |\mathbf{R}_{ij}| = \sum_{i=1}^{5} |\mathbf{R}_i| + \sum_{i<j<k} |\mathbf{R}_{ijk}| - 7 \leq 5.4 + 6 - 7 = 19.$$

Keďže $\binom{5}{2} = 10$, tak sčítancov na ľavej strane je 10 a aspoň jeden musí byť menší ako 2. Teda existuje dvojica $i < j$ taká, že $|\mathbf{R}_{ij}| \leq 1$. Body A_i, A_j ležia teda najviac v jednej rovine z množiny $\mathbf{R}$, t.j. priamka A_iA_j nie je priesečníkom dvoch rovín z množiny $\mathbf{R}$.

Korespondenční seminář MO

Cílem korespondenčního semináře bylo dále zvyšovat úroveň špičkových řešitelů MO, kteří nejsou z Prahy ani z Bratislavy a neměli tak možnost pracovat v tamních seminářích pro přípravu na MO. K účasti bylo předsednictvem ÚV MO na základě výsledků v MO, návrhů KV MO a individuálního zájmu pozváno asi 50 žáků, z nichž se přihlásilo a zúčastnilo asi 30. Pravidelně jim byla rozesílána série sedmi poměrně náročných úloh, které měli během 4—5 týdnů vyřešit. Došlá řešení byla pak opravena, ohodnocena a spolu s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům. Uvádíme znění všech úloh v korespondenčním semináři zadaných.

1. Velká čísla

1.1 Najděte největší přirozené číslo x takové, že

$$(x!)\,! < 10^{10^{10}},$$

a nejmenší přirozené číslo y takové, že $y!$ je násobkem čísla $10^{10^{10}}$.

1.2 Dokažte, že kvadratická rovnice

$$8^{8^8} . x^2 + 10^{10^{10}} . x + 9^{9^9} = 0$$

má dva různé reálné iracionální kořeny.

1.3 Napíšeme-li za sebou všechna čísla od 100 do 999, vznikne dekadický zápis jistého čísla N. Dokažte, že N není prvočíslem ani mocninou (s přirozeným exponentem větším než 1) žádného přirozeného čísla.

1.4 Dokažte, že existuje mocnina dvou (s přirozeným exponentem), jejíž dekadický zápis začíná číslicemi

197919801981

1.5 Najděte dvě poslední nenulové číslice čísla 1000!.

1.6 Dokažte, že při žádné volbě znamének není číslo

$$\pm 1^{1^1} \pm 2^{2^2} \pm \ldots \pm 59^{59^{59}} \pm 60^{60^{60}}$$

druhou, třetí, čtvrtou, pátou ani šestou mocninou žádného celého čísla.

1.7 Dokažte, že mezi přirozenými čísly menšími než $10^{10^{10}}$ existuje 10^{10} po sobě následujících složených čísel.

2. Goniometrie

2.1 Najděte všechna reálná x, pro která platí

$$26 \sin^2 x^2 + 12 \cos 2x + 5 \sin 2x = 13.$$

2.2 Najděte všechny trojúhelníky, pro jejichž vnitřní úhly A, B, C platí

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}\,.$$

2.3 Najděte všechna reálná a, pro něž je funkce

$$f(x) = \cos ax + \cos x$$

periodická.

2.4 Jsou dána lichá přirozená čísla m, n. Najděte všechna reálná x, pro která platí

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}\,.$$

2.5 Bez pomoci tabulek, počítačky a logaritmického pravítka vypočtěte

$$\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ - \sin 83^\circ.$$

2.6 Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right)$$

v intervalu $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2.7 Najděte všechna reálná x, pro něž platí

$$\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2.$$

3. Obsahy

3.1 V rovině je dáno několik pásů, žádné dva nejsou rovnoběžné. Posuňte pásy tak, aby zachovaly své směry a obsah jejich průniku byl co největší. (Pásem rozumíme část roviny mezi dvěma rovnoběžkami. Dané pásy nemusí mít stejnou šířku).

3.2 Dva shodné obdélníky jsou v rovině umístěny tak, že jejich obvody mají 8 společných bodů. Dokažte, že obsah jejich průniku je větší než polovina obsahu každého z nich.

3.3 Dokažte, že každý trojúhelníkový řez čtyřstěnu má obsah menší než některá stěna.

3.4 Jakou polohu má krychle, vrhá-li na rovinu kolmou ke směru světla stín s největším možným obsahem?

3.5 Je dán trojúhelník.

a) Umístěte do něho středově souměrný mnohoúhelník s co největším obsahem.
b) Umístěte ho do konvexního středově souměrného mnohoúhelníku s co nejmenším obsahem.

V obou případech extrémní obsahy vyjádřete pomocí obsahu daného trojúhelníka.

3.6 V jednotkovém čtverci je obsažen útvar U (ne nutně souvislý). Pokud v U neexistují dva body vzdálené 0,001, je obsah U menší než 0,3. Dokažte.

3.7 V jednotkovém čtverci je 102 bodů, žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že jisté tři z nich jsou vrcholy trojúhelníku s obsahem nejvýše 0,005.

4. Obdélníková schémata

4.1 Čísla 1, 2, ..., n^2 jsou zapsána ve čtvercové tabulce, jejíž řádky jsou očíslovány indexy 1, 2, ..., n a sloupce také. Číslo 1 je na libovolném místě; číslo 2 je v řádku, který má stejný index jako sloupec obsahující číslo 1; číslo 3 je v řádku, který má stejný index jako sloupec obsahující číslo 2 atd. Určete rozdíl součtu čísel v řádku obsahujícím číslo 1 a součtu čísel ve sloupci obsahujícím číslo n^2.

4.2 V obdélníkové tabulce jsou zapsána reálná čísla. Je dovoleno současně změnit znaménka všech čísel v řádku nebo ve sloupci. Je možno každou tabulku převést postupným prováděním těchto změn na tabulku obsahující samá nezáporná čísla?

4.3 Do čtvercové tabulky 8×8 je zapsáno 64 nezáporných čísel, jejichž součet je 1956. Součet všech 16 čísel ležících na úhlopříčkách je 112. Čísla umístěná souměrně podle některé úhlopříčky jsou si rovna. Dokažte, že součet čísel je v každém řádku i v každém sloupci menší než 518.

4.4 Ve čtvercové tabulce $n \times n$ je zapsáno n^2 čísel x_{pq} (tak značíme číslo v p-tém řádku a q-tém sloupci). Dokažte, že je-li $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$ pro libovolné tři indexy $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existují čísla $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tak, že $x_{ij} = t_i - t_j$ pro všechny $i, j, \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

4.5 Ve čtvercové tabulce $n \times n$ je zapsáno n^2 čísel. Vynecháme-li jakoukoliv podmnožinu řádků, která neobsahuje všechny řádky (včetně prázdné), bude ve zbylé tabulce vždy nějaký sloupec obsahovat jedinou nulu. Dokažte, že ať pak vynecháme jakoukoliv podmnožinu sloupců, která neobsahuje všechny sloupce, bude ve zbylé tabulce vždy nějaký řádek obsahovat jedinou nulu.

4.6 Ve čtvercové tabulce 8×8 je zapsáno 64 nenulových čísel. Jediné z nich je záporné a není umístěno v rohu. Je dovoleno změnit znaménka všech čísel nějakého řádku nebo sloupce nebo řady rovnoběžné s úhlopříčkou (sem patří i změna znaménka rohového čísla). Dokažte, že postupným prováděním těchto změn nemůžeme nikdy dostat tabulku obsahující samá kladná čísla.

4.7 Ve čtvercové tabulce 8×8 je zapsáno 64 čísel. Je dovoleno změnit znaménka všech čísel v libovolné její souvislé části 3×3 nebo 4×4. Je možno každou takovou tabulku převést postupným prováděním těchto změn na tabulku obsahující samá nezáporná čísla?

5. Posloupnosti

5.1 Dokažte, že pro každou posloupnost $\{a_n\}$, jejíž členy jsou navzájem různá přirozená čísla, která nemají ve svém dekadickém zápise číslici 0, platí:
Pro každé přirozené číslo k je

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} < 29.$$

5.2 Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu m existuje přirozené číslo k tak, že

$$\left| \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=k+1}^{m} a_i \right| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|$$

5.3 Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$, která má tuto vlastnost: Existuje přirozené číslo m takové, že

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 0$$

a pro každé přirozené číslo k je

$$a_{m+k} = a_k.$$

Dokažte, že existuje přirozené číslo p tak, že pro každé celé nezáporné číslo k platí

$$a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{p+k} \geqq 0.$$

5.4 Uvažujme čtyři posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ takové, že pro každé přirozené číslo n je

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n \qquad & c_{n+1} &= c_n + d_n \\ b_{n+1} &= b_n + c_n \qquad & d_{n+1} &= d_n + a_n \end{aligned}$$

Dokažte, že pokud existují přirozená čísla k, m tak, že

$$a_{k+m} = a_m, \; b_{k+m} = b_m, \; c_{k+m} = c_m, \; d_{k+m} = d_m,$$

pak je

$$a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0.$$

5.5 Pro posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ platí, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_n + a_{n+2} \geqq 2a_{n+1}.$$

Dokažte, že pak pro každé přirozené číslo n je

$$\frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}}{n+1} \geqq \frac{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}}{n}.$$

5.6 Jsou dána přirozená čísla a_1, a_2. Pro přirozená čísla $n > 2$ položme $a_n = |a_{n-2} - a_{n-1}|$. Tak jsme definovali posloupnost nezáporných celých čísel $\{a_n\}$. Je-li největší člen této posloupnosti 1980, jaký je největší možný index prvního nulového členu?

5.7 Je dána posloupnost číslic $\{a_n\}$ neobsahující číslici 9. Ta určuje posloupnost $\{b_n\}$, jejíž členy mají dekadické zápisy

$$b_1 = (a_1)$$
$$b_2 = (a_1a_2)$$
$$b_3 = (a_1a_2a_3)$$
atd.

Dokažte, že posloupnost $\{b_n\}$ obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.

MMO?

Na tomto místě bývá zpravidla otištěna zpráva o průběhu mezinárodní matematické olympiády (MMO). V roce 1980 se však MMO nekonala, neboť se nenašla země ochotná ji v tomto roce uspořádat. Zbývá jen doufat, že tím nebude narušena tradice, která se za uplynulých jedenadvacet let vytvořila.

Ve snaze poskytnout úspěšným žákům alespoň náhradní možnost mezinárodního soutěžení zorganizovaly některé země v červenci 1980 mezinárodní matematické soutěže obdobné MMO.

Jedna z nich se konala ve finském Mariehamnu. Podobně jako na MMO tam přijela osmičlenná družstva z Finska, Maďarska, Švédska a Velké Británie — celkem zde tedy soutěžilo 32 žáků. Prvních deset z nich dostalo ceny. Nejlepšího výkonu dosáhl Géza Bohus z Maďarska, také v součtu bodů celého družstva bylo Maďarsko na prvním místě.

Druhá mezinárodní soutěž se konala v Lucembursku ve městě Mersch. Zde soutěžilo 34 žáků z Belgie (8), Holandska (8), Jugoslávie (7), Lucemburska (3) a Velké Británie (8), vedle toho byli přítomni »pozorovatelé«, a to čtyři z Alsaska a dva z Lucemburska.

Jedinou první cenu, která zde byla udělena, získal K. Schoutens z Holandska. Dále bylo uděleno sedm druhých cen a jedenáct třetích cen. V součtu bodů byly na prvních místech Velká Británie a Jugoslávie.

Konečně třetí mezinárodní soutěž se konala v Krakově za účasti polských a rakouských žáků; nepodařilo se nám však získat podrobnější informace.

Jozef Moravčík
Leo Boček
Lev Bukovský
Antonín Vrba
Jan Vyšín
František Zítek

DVACÁTÝ DEVÁTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Ilustroval Vlastimil Macháček
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
Praha roku 1982
jako svou publikaci č. 5-42-14/29
Edice pomocné knihy pro žáky
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarný redaktor: Václav Hanuš
Technická redaktorka: Marcela Jirsová
Z nové sazby písmem Plantin vytiskly
Moravské tiskařské závody, n. p., Olomouc
Formát papíru 70 × 100 cm
Počet stran 160
AA 5,46 (4,85 AA textu, 0,61 AA grafiky) - VA 5,84
Náklad 3550
Tematická skupina a podskupina 03/2
1. vydání
Cena brožovaného výtisku Kčs 7,50

505/21,825

14-481-82 Kčs 7,50

matematická
olympiáda

SPN 5-42-14/29
14-481-82
03/2 Kčs 7,50