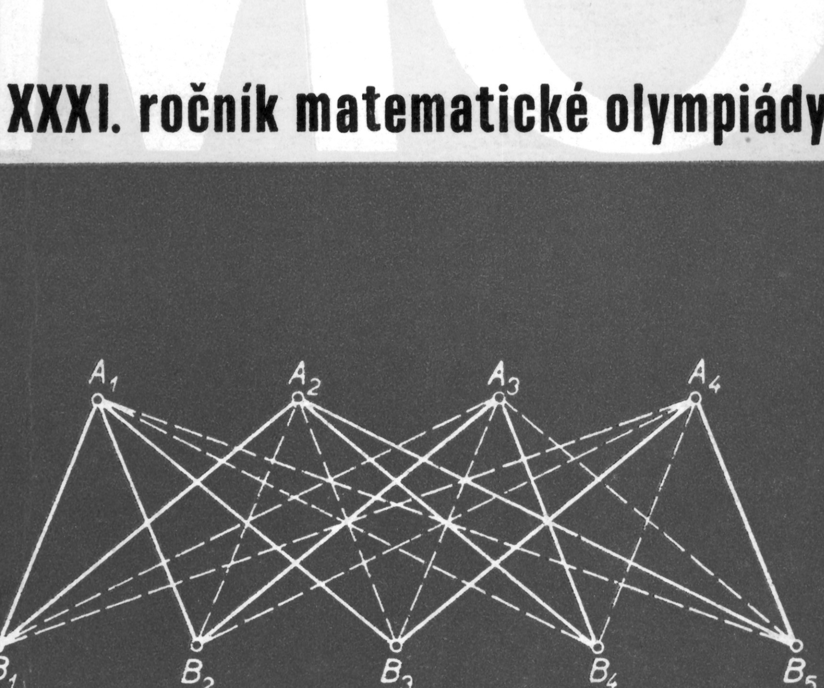
MO

XXXI. ročník matematické olympiády



SPN

TŘICÁTÝ PRVNÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Zpráva o řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1981—1982

XXIII. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
prof. dr. Jozef Moravčík, CSc., dr. Leo Boček, CSc.,
doc. dr. Lev Bukovský, CSc., prof. dr. Miroslav
Fiedler, člen korespondent ČSAV
Recenzovali dr. Jitka Kučerová, dr. Miroslav Šisler, CSc.,
a dr. Václav Šůla

Obsah

PREDHOVOR

Milí mladí priatelia a pracovníci v matematickej olympiáde,

kolekcia ročeniek matematickej olympiády (MO) začína zväzkom, ktorý práve beriete do rúk, už svoju štvrtú desiatku. Nájdete v ňom ako obvykle prehľad o organizácii a výsledkoch 31. ročníka MO, ktorý sa konal v školskom roku 1981/82, všetky súťažné úlohy s riešeniami, výber úloh celoštátneho korešpondenčného seminára a podrobnú informáciu o priebehu a výsledkoch 23. medzinárodnej matematickej olympiády (MMO) v Maďarsku.

Priebeh 31. ročníka MO a jeho výsledky sme sledovali s ešte väčším záujmom než v predchádzajúcich ročníkoch. To preto, že nás zaujímalo, ako sa osvedčí nová organizácia školského kola súťaže. Po pätnástich rokoch odpadli vo všetkých kategóriách nepovinné prípravné úlohy a v stredoškolských kategóriách A - C ich nahradila klauzúrna súťaž na záver školského kola, ktorá sa uskutočnila na jednotlivých stredných školách v kategórii A v polovici decembra 1981 a v kategóriách B a C vo februári 1982. Predovšetkým možno konštatovať, že v porovnaní s predchádzajúcim ročníkom takmer vo všetkých krajoch vzrástol počet gymnázií, ktorých žiaci sa zapojili do riešenia úloh školského kola súťaže. Zvlášť markantne sa to prejavilo v kategóriách B a C. Kým počet účastníkov školského kola kategórie A vzrástol len mierne (o 11,3 %), počty súťažiacich v kategóriách B a C sa zvýšili o 54 %, resp. o 47,2 %. Vyššie nároky na súťažiacich v klauzúrnej časti školského kola mali za následok pokles počtu účastníkov krajského kola v kategóriách A (o 33,1 %) a B (o 14,5 %), ale zato sa zvýšilo percento úspešných riešiteľov krajského kola v oboch týchto kategóriách (v kategórii A zo 14 % na 24,1 % a v kategórii B dokonca z 13,6 % na 33,4 %). V kategórii C sa situácia vyvinula inak, keď v klauzúrnej časti školského kola bolo úspešných až 72,3 % účastníkov, takže v niektorých krajoch z organizačných dôvodov ani nebolo možné pozvať všetkých do krajského kola a zúčastnili sa ho len tí, ktorí v klauzúre školského kola nazbierali najviac bodov, ale v krajskom kole bolo úspešných len 7,9 % jeho účastníkov, čo je približne na úrovni predchádzajúceho ročníka MO (8,2 %). Príčina tohto javu je pravdepodobne predovšetkým v tom, že rozdiel v náročnosti úloh krajského kola a klauzúrnej časti školského kola v tejto kategórii bol relatívne veľký. Úlohy klauzúrnej časti školského kola totiž pomerne úzko súviseli s úlohami domácej časti, zatiaľ čo úlohy krajského kola i pri tematickej nadväznosti vyžadovali od riešiteľov nepomerne viac dôvtipu.

Väčšia vyrovnanosť a vyššia relatívna úspešnosť sa prejavili aj u účastníkov celoštátneho kola kategórie A. Najúspešnejší z nich reprezentovali našu vlasť na 23. MMO v Budapešti. Ich účinkovanie na medzinárodnom fóre možno označiť za úspešné a podrobnejšie ho hodnotíme na inom mieste.

Tieto výsledky ukazujú, že v podstate sa dosiahli ciele, ktoré ministerstvá školstva a ÚV MO organizačnými zmenami sledovali. Bolo by však predčasné robiť zovšeobecňujúce závery z jednoročných poznatkov, a tak si na objektívne zhodnotenie dôsledkov novej organizačnej úpravy budeme musieť ešte počkať.

V kategórii Z sa nová organizácia školského kola okrem zrušenia prípravných úloh prejavila v zvýšení počtu súťažných úloh I. kola zo štyroch na šesť, ktorých riešenia žiaci odovzdávajú po trojiciach v dvoch rôznych termínoch. I tu sa počet účastníkov I. kola mierne zvýšil (o 3,4 %) a počet úspešných riešiteľov poklesol (o 10,5 %), ale počet úspešných riešiteľov okresného kola vzrástol o 5,8 %. Ani pri tejto kategórii by však nebolo na mieste robiť predčasné závery.

Z iniciatívy MŠ ČSR a Jednoty československých matematikov a fyzikov (JČSMF) sa koncom augusta 1982 uskutočnil seminár »Formy starostlivosti o žiakov talentovaných na matematiku a fyziku« v Hradci Králové. Jeho účastníci venovali značnú pozornosť problematike žiackych súťaží vrátane MO. Zo záverov tohto seminára si zvláštnu zmienku zasluhujú odporúčania vytvárať podmienky pre postupné rozšírenie MO do nižších ročníkov základnej školy, poriadať vo všetkých krajoch pre riešiteľov jednotlivých kategórií krajské sústredenia a organizovať krajské korešpondenčné semináre. Pri týchto i ďalších odporúčaniach vychádzali účastníci seminára z pozitívnych skúseností s uvedenými formami práce s talentami v jednotlivých krajoch. Prijalo sa tiež odporúčanie navrhnúť takú organizáciu súťaží alebo hodnotenie žiakov v MO, ktorá by rešpektovala ich rôznu prípravu v matematike. Pokiaľ ide o súťaž v riešení náročnejších úloh pre žiakov základných škôl, uskutočnila sa pokusne v školskom roku 1980/81 vo všetkých krajoch SSR od 5. ročníka a stretla sa až s nečakaným záujmom žiakov i učiteľov. V každom z 5., 6. a 7. ročníka základnej školy sa jej zúčastnilo okolo sedem tisíc žiakov a v okresných kolách bolo okolo 1 800, v 5. ročníku dokonca takmer 2 000 riešiteľov. Pri repríze experimentu v školskom roku 1981/82 počty základných škôl, ktorých žiaci sa súťaže zúčastnili, ešte vzrástli a viac než o tisícku sa zvýšil počet riešiteľov školského kola v jednotlivých kategóriách totožných s ročníkmi základnej školy. Pritom počet účastníkov okresného kola v 5. a 6. ročníku prekročil 2 000 a v 7. ročníku dosiahol takmer 1 900. Úspešné poznatky z organizácie takejto súťaže sa získali tiež v krajoch Západočeskom, Stredočeskom a Severomoravskom, v ktorom v záujme zlepšenia výberu žiakov do tried základnej školy so zameraním na matematiku a prírodovedné predmety organizovali MO už pre žiakov 4. ročníka.

Spomínané skúsenosti ukazujú, že myšlienka skoršieho vyhľadávania matematicky nadaných žiakov postupne zapúšťa korene aj u nás, keď v zahraničí, zvlášť v ZSSR, NDR, Maďarsku a Bulharsku, majú v tomto smere už mnohoročné pozitívne poznatky. Z týchto socialistických krajín by bolo možné uviesť i fakty o aktívnom vzťahu mládežníckych organizácií k propagácii a organizačnému zabezpečeniu súťaží pre vyhľadávanie talentov. Podľa platného organizačného poriadku MO je aj u nás SZM jedným zo spoluporiadateľov. Jeho podiel na organizácii MO by mal spočívať najmä v propagácii súťaže medzi zväzákmi na stredných školách a v oceňovaní dosahovaných výsledkov. Na základných školách by mali podobnú úlohu plniť základné útvary PO SZM. Na seminári v Hradci Králové sa poukazovalo na užitočnosť určitej symbiózy medzi Stredoškolskou odbornou činnosťou a MO, resp. Fyzikálnou olympiádou, čo vyústilo do odporúčania prehĺbiť vzájomnú spoluprácu pri zabezpečovaní predmetových olympiád a SOČ medzi jednotlivými zložkami - školskou správou, JČSMF, SZM a jeho PO - v otázke organizácie, členenia, bezpečnosti a pedagogického dozoru.

Seminár priniesol pre prácu s talentami celý rad cenných podnetov a chceme veriť, že jeho odporúčania sa v relatívne krátkom čase dostanú do každodennej praxe na prospech práce s talentami i pre ďalší rozvoj matematickej olympiády.

Ústredný výbor matematickej olympiády

O průběhu 31. ročníku matematické olympiády

Pořadateli 31. ročníku matematické olympiády byla stejně jako v minulých letech *ministerstva školství ČSR a SSR, Matematický ústav ČSAV v Praze* (MÚ ČSAV), *Jednota československých matematiků a fyziků* (JČSMF), *Jednota slovenských matematiků a fyziků* (JSMF) a *Socialistický svaz mládeže* (SSM). Soutěž je řízena ústředním výborem matematické olympiády (ÚV MO) a dále krajskými a okresními výbory matematické olympiády (KV MO, OV MO).

Žáci soutěží ve čtyřech kategoriích: v kategorii A žáci III. a IV. ročníků středních škol, v kategorii B žáci II. ročníků a pro žáky I. ročníků je určena kategorie C. Žáci 8. a 9. tříd základních škol a základních devítiletých škol soutěží v kategorii Z. Se souhlasem KV MO může žák soutěžit i v kategorii určené pro žáky vyšších ročníků.

Po celý 31. ročník MO pracoval ústřední výbor MO ve složení:

předseda: *prof. dr. Jozef Moravčík, CSc.*, VŠDS Žilina

místopředsedové: *doc. Jan Vyšín, CSc.*, MÚ ČSAV Praha

dr. František Zítek, CSc., MÚ ČSAV Praha

jednatel: *dr. Leo Boček, CSc.*, MFF UK Praha

zástupce MŠ ČSR: *dr. Václav Šůla*
zástupce MŠ SSR: *dr. Júlia Lukátšová*
ostatní členové:
dr. František Běloun, Praha
dr. Ladislav Berger, Žilina
doc. dr. Lev Bukovský, CSc., přírodovědecká fakulta UPJŠ Košice
dr. Milan Cirjak, KPÚ Prešov
prof. dr. Miroslav Fiedler, člen korespondent ČSAV, MÚ ČSAV
doc. dr. Karol Križalkovič, CSc., Pedagogická fakulta Nitra
doc. dr. Alois Kufner, DrSc., MÚ ČSAV Praha
Olga Maříková, gymnázium Praha 10, Voděradská
dr. Milan Maxian, gymnázium A. Markuša, Bratislava
dr. Peter Mederly, CSc., MFF UK Bratislava
dr. Jiří Mída, CSc., pedagogická fakulta UK Praha
dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha
akademik Josef Novák, MÚ ČSAV Praha
doc. dr. Aleš Pultr, CSc., MFF UK Praha
Víťazoslav Repáš, gymnázium J. Hronca, Bratislava
Stanislav Rypáček, gymnázium Praha 9-Prosek
dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV Praha
ing. Oldřich Skopal, gymnázium Brno, tř. kpt. Jaroše
dr. Jiří Šídlo, gymnázium Praha 3, Sladkovského nám.
Miloslav Šmerda, Brno
zástupce ÚV SSM: *Jana Pomazalová*, gymnázium Brno, tř. kpt. Jaroše
Dále jsou členy ÚV MO předsedové krajských výborů MO:
Praha: *prof. dr. Karel Drbohlav, DrSc.*, MFF UK Praha
Středočeský kraj: *Ludmila Tréglová*, gymnázium Říčany

Jihočeský kraj: *doc. dr. ing. Lada Vaňatová*, Pedagogická fakulta České Budějovice

Západočeský kraj: *dr. Josef Polák, CSc.*, VŠSE Plzeň

Severočeský kraj: *Jiří Slavík*, gymnázium Teplice

Východočeský kraj: *dr. Josef Kubát*, gymnázium Pardubice

Jihomoravský kraj: *doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc.*, FE VUT Brno

Severomoravský kraj: *dr. Vladimír Vlček, CSc.*, přírodovědecká fakulta UP Olomouc

Bratislava: *dr. Ľudovít Niepel, CSc.*, MFF UK Bratislava

Západoslovenský kraj: *prof. dr. Ondrej Šedivý, CSc.*, Pedagogická fakulta Nitra

Středoslovenský kraj: *doc. dr. Pavel Kršňák, CSc.*, Pedagogická fakulta Banská Bystrica

Východoslovenský kraj: *dr. Martin Gavalec, CSc.*, přírodovědecká fakulta UPJŠ Košice

Pracovní předsednictvo ÚV MO (PÚV MO) tvořili (v abecedním pořadí): dr. Leo Boček, CSc., doc. dr. Lev Bukovský, CSc., prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., dr. Júlia Lukátšová, prof. dr. Jozef Moravčík, CSc., Jana Pomazalová, Víťazoslav Repáš, dr. Jiří Sedláček, CSc., dr. Václav Šůla, doc. Jan Vyšín, CSc., dr. František Zítek, CSc.

V průběhu 31. ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO, první 14. až 15. prosince 1981 v Praze, druhé ve dnech 7. až 8. května 1982 v Popradě při celostátním kole MO kat. A. Hlavními body programu bylo zhodnocení průběhu 30. ročníku MO, organizační záležitosti 31. ročníku a příprava 32. ročníku, dále ediční činnost a projednání československé účasti na mezinárodních matematických olympiádách. Předsednictvo ÚV MO se scházelo pravidelně jednou měsíčně, hlavní náplní schůzí byl výběr úloh pro 31. až 33. ročník MO.

V 31. ročníku MO byla zavedena nová organizace I. kola soutěže v kategoriích A, B, C. Proti dřívějším letům odpadly tzv. úlohy přípravné a žáci řeší v I. kole nejdříve šest úloh doma a pak tři úlohy ve škole formou klauzurní práce. V kategorii Z se v I. kole řeší pouze šest úloh doma, nejdříve odevzdají žáci řešení první trojice úloh, pak řešení druhé trojice. Organizace II. a III. kola byla stejná jako v předcházejících letech. Na III., tedy celostátní kolo MO kategorie A se sjelo do podtatranského města Poprad všech 80 pozvaných žáků, nejúspěšnějších řešitelů krajských kol. Slavnostního zahájení se 6. května 1982 zúčastnili *dr. Ján Hudec,* vedoucí oddělení gymnázií MŠ SSR, *s. Karol Kecsey,* vedoucí pedagogického oddělení Východoslovenského KNV, *dr. Jozef Lukáč,* tajemník OV KSS v Popradě, a další zástupci stranických a státních orgánů. Za Univerzitu P. J. Šafárika v Košicích byl přítomen děkan přírodovědecké fakulty *prof. dr. Juraj Daniel-Szabó, CSc., prof. dr. Ernest Jucovič, DrSc.,* a další učitelé této fakulty. S kulturním programem vystoupil dětský sbor Okresního domu pionýrů a mládeže a lidové školy umění v Popradě. O velmi dobrý průběh celostátního kola MO v Popradě se zvlášť zasloužili *dr. Martin Lučivjanský,* krajský školní inspektor KNV Košice, ředitel gymnázia v Popradě *s. Augustín Kuchár,* okresní metodik *dr. Tomáš Svoboda* a *s. Anna Pribišová,* pracovnice Ústředního domu pionýrů a mládeže Klementa Gottwalda v Bratislavě, dále pak předseda KV MO v Košicích *dr. Martin Gavalec, CSc.,* a jeho spolupracovníci.

Ve všech krajích se pořádají pro řešitele úloh matematické olympiády pomocné akce. KV MO Praha pořádal pracovní přednášky pro kategorie B, C v měsících říjnu až prosinci, týdně 2 hodiny s průměrnou účastí 12 studentů. Podobné kroužky se konaly i pro kategorii Z. Ve spolupráci s fakultní organizací SSM na matematicko-fyzikální fakultě UK byl organizován korespondenční seminář, šest sérií úloh řešilo asi 45 žáků, 30 z nich bylo pozváno na týdenní soustředění. Další soustředění se konalo pro 40 vybraných žáků, řešitelů v kategoriích B, C. Středočeský kraj konal na osmi střediskových školách asi 50 přednášek s průměrnou účastí 29 žáků. Na tyto přednášky byli zváni i žáci odborných učilišť. Týdenní soustředění pro řešitele kategorií A, B pořádal Středočeský kraj v Janově v Jizerských horách. Jihočeský KV MO zapojil do práce kolem MO posluchače pedagogické fakulty, kteří v rámci společensko-politické praxe vedli zájmové kroužky z matematiky na základních školách a opravovali úlohy krajského korespondenčního semináře, jehož se zúčastnilo 29 žáků. Jako každým rokem pořádal KV MO spolu s KV FO letní školu pro úspěšné řešitele kategorií A, B, v každé kategorii se zúčastnilo 30 žáků. V Západočeském kraji vedli korespondenční seminář pro 98 studentů pracovníci katedry matematiky VŠSE v Plzni. Spolu se svými kolegy z Pedagogické fakulty v Plzni konali přednášky nejen pro žáky, ale i pro učitele. Krajské soustředění úspěšných řešitelů II. kola MO kategorií A, B, C se konalo v červnu v Klatovech. Podobné soustředění pořádal KV MO kraje Severočeského pro 108 žáků první týden v červenci, program zajistila pobočka JČSMF v Ústí n. L. Kromě toho uspořádali 27 oblastních seminářů s průměrnou účastí 16 žáků. Ve Východočeském kraji zorganizovali kromě dvou soustředění pro řešitele také seminář k problematice MO, věnovaný rozboru úloh MO a organizaci klauzurní části I. kola MO. Krajské soustředění MO se neuskutečnilo v Jihomoravském kraji, protože se nepodařilo zajistit ubytování žáků. Byly však uspořádány semináře pro řešitele v Brně, ve Strážnici a v Třebíči. V kraji Středoslovenském se práce pro MO organizuje jednak na VŠDS v Žilině, jednak na Pedagogické fakultě v Banské Bystrici. Krajský korespondenční seminář pro 58 účastníků je rozdělen na 1. a 2. ligu, po třetím kole se uskutečňují postupy a sestupy. Tradičně probíhá korespondenční seminář i v kraji Východoslovenském, jehož KV MO je průkopníkem této formy práce s mladými talenty. ÚV MO pořádal dvě soustředění v učebním středisku MŠ ČSR pro přípravu československého družstva na mezinárodní matematickou olympiádu a spolu s KV MO a KV FO v Praze zajišťoval program celostátního soustředění pro úspěšné řešitele MO a FO, které se konalo pro 90 účastníků v Praze 10-Třebešíně.

Úlohy matematické olympiády a organizační pokyny pro řešitele jsou každým rokem obsaženy v letácích, které vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze a Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislavě. Kromě toho byly úlohy I. kola 31. ročníku MO otištěny v Rozhledech matematicko-fyzikálních a v časopise Matematika a fyzika ve škole, samozřejmě kromě úloh klauzurní části. O každém ročníku MO vychází v SPN Praha ročenka, v níž jsou obsaženy všechny úlohy, většina i s řešením. V edici Škola mladých matematiků vydává ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta matematické brožurky, které jsou prospěšné nejen řešitelům úloh MO, nýbrž všem zájemcům o matematiku.

Více než polovina úloh každého ročníku MO pochází z konkursu, který vyhlásily JČSMF a JSMF již v roce 1966. Návrhy úloh do MO může poslat kdokoli ve dvou exemplářích na adresu ÚV MO, který má právo přijatou úlohu upravit a autor má povinnost úlohu utajit.

Tabulka 1

Počet středních škol zapojených do 31. ročníku MO

Kraj	Gymnázia					Ostatní střední školy			
	Celkový počet	z toho zapojeno				zapojeno			
		v kategorii A	B	C	aspoň v jedné kategorii	v kategorii A	B	C	aspoň v jedné kategorii
Praha	21	11	17	14	18	1	1	2	3
Středočeský	23	19	21	21	23	5	7	6	12
Jihočeský	19	9	15	16	16	4	5	8	9
Západočeský	15	12	13	15	15	2	4	7	7
Severočeský	21	18	16	19	19	4	2	6	9
Východočeský	35	17	17	28	31	1	4	4	6
Jihomoravský	38	22	26	37	38	1	2	2	4
Severomoravský	39	16	15	24	32	0	1	10	10
Bratislava	11	8	9	9	9	0	0	0	0
Západoslovenský	38	26	31	34	35	9	20	31	31
Středoslovenský	37	27	26	33	35	5	8	14	14
Východoslovenský	39	26	30	38	38	2	17	37	38
ČSR celkem	211	124	140	174	192	18	26	45	60
SSR celkem	125	87	96	114	117	16	45	82	83
ČSSR celkem	336	211	236	288	309	34	71	127	143

Tabulka 2

Počet žáků soutěžících v I. kole MO

Kraj	kat. A		kat. B		kat. C		Celkem	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	90	41	85	51	122	97	297	189
Středočeský	121	33	103	37	165	98	389	168
Jihočeský	71	28	85	52	171	112	327	192
Západočeský	43	24	47	37	105	78	195	139
Severočeský	114	25	95	31	240	116	449	172
Východočeský	52	33	74	47	263	180	389	260
Jihomoravský	93	63	228	99	201	177	522	339
Severomoravský	58	37	69	50	139	115	266	202
Bratislava	86	23	92	42	105	72	283	137
Západoslovenský	224	86	342	143	605	384	1171	613
Středoslovenský	141	69	91	72	223	196	455	337
Východoslovenský	145	98	260	168	532	451	937	717
ČSR	642	284	786	404	1406	973	2834	1661
SSR	596	276	785	425	1465	1103	2846	1804
ČSSR	1238	560	1571	829	2871	2076	5680	3465

S . . . celkový počet
Ú . . . počet úspěšných řešitelů

Tabulka 3

Počet žáků soutěžících v II. kole MO

Kraj	kat. A		kat. B		kat. C		Celkem	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	39	20	51	36	95	25	185	81
Středočeský	33	4	36	6	90	2	159	12
Jihočeský	26	6	45	12	101	6	172	24
Západočeský	23	5	31	6	63	9	117	20
Severočeský	25	4	31	15	112	7	168	26
Východočeský	33	6	40	14	163	11	236	31
Jihomoravský	61	9	90	30	153	9	304	48
Severomoravský	37	17	46	21	109	20	192	58
Bratislava	47	19	40	17	69	19	156	55
Západoslovenský	86	18	90	13	209	9	385	40
Středoslovenský	64	6	57	22	175	12	296	40
Východoslovenský	70	17	78	20	451	13	599	50
ČSR	277	71	370	140	886	89	1533	300
SSR	267	60	265	72	904	53	1436	185
ČSSR	544	131	635	212	1790	142	2969	485

S ... celkový počet

Ú ... počet úspěšných řešitelů

Tabulka 4

Počet účastníků III. kola MO kategorie A

Kraj	Počet všech	Počet úspěšných	Z toho vítězů
Praha	15	10	8
Středočeský	2	1	0
Jihočeský	1	0	0
Západočeský	4	0	0
Severočeský	3	1	0
Východočeský	6	1	0
Jihomoravský	5	1	0
Severomoravský	10	8	4
Bratislava	16	9	2
Západoslovenský	6	3	0
Středoslovenský	4	2	1
Východoslovenský	8	6	2
ČSR	46	22	12
SSR	34	20	5
ČSSR	80	42	17

Tabulka 5

Počet základních škol, které se zúčastnily 31. roč. MO - kat. Z

Kraj	Celkový počet	Zúčastnilo se I. kola počet	%	II. kola počet	%	III. kola počet	%
Praha	201	165	82	145	72	29	14
Středočeský	276	185	67	157	57	32	12
Jihočeský	182	146	80	117	64	35	19
Západočeský	216	173	80	149	69	22	10
Severočeský	283	208	73	144	51	26	9
Východočeský	317	233	74	181	57	38	12
Jihomoravský	453	294	65	273	60	48	11
Severomoravský	466	321	69	229	49	51	11
Bratislava	87	76	87	76	87	11	13
Západoslovenský	479	346	72	321	67	36	7
Středoslovenský	401	287	72	235	59	30	7
Východoslovenský	383	318	86	247	71	45	11
ČSR	2394	1725	72	1395	58	281	12
SSR	1350	1027	76	879	65	122	9
ČSSR	3744	2752	74	2274	61	403	11

Tabulka 6

Počet žáků soutěžících v kategorii Z

Kraj	I. kolo		II. kolo		III. kolo	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	1237	787	588	304	39	8
Středočeský	1072	566	467	276	36	0
Jihočeský	1365	537	368	153	41	5
Západočeský	1341	565	375	159	23	2
Severočeský	1330	462	385	177	29	1
Východočeský	1588	736	530	288	43	3
Jihomoravský	2219	1255	938	416	62	25
Severomoravský	2219	834	566	251	54	5
Bratislava	825	487	395	126	40	23
Západoslovenský	2012	1173	935	379	40	26
Středoslovenský	1727	717	624	203	35	16
Východoslovenský	2122	1117	765	368	56	23
ČSR	12371	5742	4217	2024	327	49
SSR	6686	3494	2719	1076	171	88
ČSSR	19057	9236	6936	3100	498	137

S — celkový počet
Ú — počet úspěšných řešitelů

VÝSLEDKY CELOSTÁTNÍHO KOLA MO KATEGORIE A

Vítězové

Pořadí, jméno a příjmení, ročník, zaměření, škola

1.—3.	*Petr Couf,* 4 M, G W. Piecka, Praha 2
	Igor Kříž, 3 M, G W. Piecka, Praha 2
	Jiří Sgall, 3 M, G W. Piecka, Praha 2
4.—5.	*Miroslav Engliš,* 4 M, G W. Piecka, Praha 2
	Vladan Pecha, 3 M, G M. Koperníka, Bílovec
6.	*Vladimír Lieberzeit,* 4 M, G W. Piecka, Praha 2
7.	*Luboš Kouba,* 4 M, G W. Piecka, Praha 2
8.	*Petr Tichavský,* 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
9.	*Pavel Jůza,* 4 M, G W. Piecka, Praha 2
10.—11.	*Milan Kratka,* 3 MF, G V. B. Nedožerského, Prievidza
	Petr Lisoněk, 4 P, Olomouc-Hejčín
12.—14.	*Xaver Gubáš,* 3 M, G A. Markuša, Bratislava
	Milan Kuchta, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
	Martin Zemek, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
15.—17.	*Ján Hric,* 4 MF, Prešov, Konštantínova
	Štěpán Kvapilík, 4 M, G W. Piecka, Praha 2
	Ignác Tereščák, 2 P, Michalovce

18.—21. *Vladimír Dančík,* 3 M, Košice, Šmeralova
Viktor Martišovitš, 3 MF, G J. Hronca, Bratislava
Ondřej Petr, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
Jaroslav Smejkal, 3 P, Velké Meziříčí
22. *Michal Vojtek,* 3 M, G W. Piecka, Praha 2
23.—24. *Hana Riečanová,* 3 MF, G J. Hronca, Bratislava
Martin Štěpánek, 3 P, G V. Lindy, Jaroměř
25.—27. *Richard Hlubina,* 4 P, Bratislava, Vazovova
Peter Spišiak, 4 M, Košice, Šmeralova
Jan Tichý, 4 P, Česká Lípa
28. *Ľudmila Moravčíková,* 3 P, Žilina, Wolkerova
29.—31. *Marcela Foltínová,* 3 M, G A. Markuša, Bratislava
Jiří Fridrich, 4 P, Ostrava-Poruba
Roman Šášik, 3 P, Nitra, Párovská
32.—33. *Jiří Podolský,* 4 P, Mladá Boleslav
Richard Pulmann, 3 MF, G J. Hronca, Bratislava
34.—39. *Galina Kumičáková,* 4 P, Košice, Kováčská
Aleš Martiník, 4 P, Ostrava, Šmeralova
Ladislav Németh, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
Anton Sedlák, 4 MF, Prešov, Konštantínova
Miroslav Šmatera, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
Peter Tarina, 4 P, Topoľčany
40.—42. *Roman Bačík,* 3 M, G A. Markuša, Bratislava
Vladimír Mužík, 4 MF, Nitra, Párovská
Martin Trusina, 4 M, G W. Piecka, Praha 2

Všichni byli žáky gymnázia.

G — gymnázium
M — třídy se zaměřením na matematiku
MF — třídy se zaměřením na matematiku a fyziku
P — třídy s orientací na přírodovědné předměty nebo s vyučováním odborným předmětům

NEJÚSPĚŠNĚJŠÍ ŘEŠITELÉ II. KOLA MO V KATEGORIÍCH A, B, C

Z každého kraje a každé kategorie uvádíme nejvýše prvních deset nejúspěšnějších řešitelů.

Praha

Kategorie A

1. *Igor Kříž,* 3 M, Praha 2, W. Piecka
2.—3. *Petr Couf,* 4 M, Praha 2, W. Piecka
Jiří Sgall, 3 M, Praha 2, W. Piecka
4. *Miroslav Engliš,* 4 M, Praha 2, W. Piecka
5. *Luboš Kouba,* 4 M, Praha 2, W. Piecka
6.—7. *Štěpán Kvapilík,* 4 M, Praha 2, W. Piecka
Michal Vojtek, 3 M, Praha 2, W. Piecka
8. *Pavel Jůza,* 4 M, Praha 2, W. Piecka
9. *Veronika Hrušková,* 4 P, Praha 7, Nad štolou
10. *Vladimír Lieberzeit,* 4 M, Praha 2, W. Piecka

Kategorie B

1.—3. *Michal Brajer,* P, Praha 4, Budějovická
Vít Jůza, M, Praha 2, W. Piecka
Jaroslav Štědronský, M, Praha 2, W. Piecka
4. *Pavel Valtr,* M, Praha 2, W. Piecka
5. *Petr Kos,* MF, Praha 3, Sladkovského nám.

6.—8. *Petra Beránková*, P, Praha 2, Botičská
Martin Černý, M, Praha 2, W. Piecka
Petr Maršálek, P, Praha 4, Ohradní
9. *David Vokrouhlický*, MF, Praha 8, Náhorní

Kategorie C

1. *Igor Puzanov*, M, Praha 2, W. Piecka
2. *Petr Loucký*, M, Praha 2, W. Piecka
3. *Filip Friedlaender*, M, Praha 2, W. Piecka
4. *Tomáš Otta*, M, Praha 2, W. Piecka
5.—9. *Jan Bartoš*, M, Praha 2, W. Piecka
Pavel Hrdina, M, Praha 2, W. Piecka
Jan Hučín, M, Praha 2, W. Piecka
Boris Perušič, M, Praha 2, W. Piecka
Jan Sigl, M, Praha 2, W. Piecka

Středočeský kraj

Kategorie A

1. *Jiří Podolský*, 4 P, Mladá Boleslav
2. *Martin Dvořák*, 3 P, Čáslav
3.—4. *Bohumil Bednář*, 4, SPŠ Mladá Boleslav
Petr Zavadil, 3 P, Říčany

Kategorie B

1.—2. *Petr Kolář*, P, Mladá Boleslav
Tomáš Vaněk, SPŠ Čáslav

3. *Josef Novák*, SPŠ Kutná Hora
4. *Petr Pokrupa*, P, Nové Strašecí
5. *David Vencour*, P, Nymburk
6. *Karel Pryl*, P, Benešov

Kategorie C

1.—2. *Jana Králová*, P, Benešov
Tomáš Lorenc, P, Kolín

Jihočeský kraj

Kategorie A

1.—2. *Fatima Cvrčková*, 3 P, Strakonice
Aleš Kučera, 4 MF, České Budějovice, G K. Šatala
3. *Luděk Kabele*, 4 P, České Budějovice, Jírovcova
4. *Šárka Hořejšová*, 3 P, Tábor
5.—6. *Ivo Moravec*, 4 P, České Budějovice, Jírovcova
Petr Tiller, 3 P, Tábor

Kategorie B

1. *Bohumír Sládek*, SPŠE Písek
2. *Petr Bartáček*, MF, České Budějovice, G K. Šatala
3. *Antonín Masojídek*, P, Písek
4. *Tomáš Drtina*, P, České Budějovice, Jírovcova
5.—6. *Vladimír Bouchal*, P, Písek
Roman Jansa, P, Tábor

Kategorie C

1.—2. *Stanislav Brabec*, P, Jindřichův Hradec
Martin Mišina, P, Týn n. Vltavou
3. *Petr Petrlík*, MF, České Budějovice, G K. Šatala
4.—6. *Zdeněk Hanzálek*, P, Soběslav
Aleš Janů, P, Tábor
Miroslav Suchan, SPŠ, Bechyně

Západočeský kraj

Kategorie A

1. *Marek Vančata*, 4 MF, Karlovy Vary
2. *Marek Hoščálek*, 4 MF, Plzeň, G J. Fučíka
3. *Božena Šmrhová*, 4 P, Plzeň, G J. Fučíka
4. *Jan Jůza*, 4 MF, Plzeň, G J. Fučíka
5. *Bohumil Tříska*, 4 P, Blovice

Kategorie B

1. *Radek Machačka*, MF, Plzeň, G J. Fučíka
2. *Zbyšek Nový*, P, Plzeň, ul. Pionýrů
3. *Tomáš Martínek*, P, Ostrov n. Ohří
4. *Marek Uhlíř*, P, Plzeň, ul. Pionýrů
5. *Pavel Hajn*, MF, Plzeň, G J. Fučíka
6. *Miroslav Plevný*, P, Cheb

Kategorie C

1. *Herbert Urbanec,* MF, Karlovy Vary
2. *Ladislav Hanyk,* MF, Karlovy Vary

3.—4. *Jan Bican,* P, Plzeň, Opavská
Jan Boček, P, Plzeň, ul. Pionýrů

5.—7. *Petr Heřman,* P, Cheb
Milena Tuchanová, MF, Karlovy Vary
Ivan Vrzal, MF, Karlovy Vary

8.—9. *Dominika Janíková,* MF, Karlovy Vary
Jarmila Martínková, P, Ostrov n. Ohří

Severočeský kraj

Kategorie A

1. *Pavel Vítovec,* 3 P, Litvínov
2. *Jan Tichý,* 4 P, Česká Lípa
3. *František Burian,* 4 P, Ústí n. L.
4. *Jaroslav Šindelář,* 4 P, Teplice

Kategorie B

1. *Michal Brhlík,* P, Liberec

2.—3. *Martin Klazar,* P, Louny
Vladimír Smutný, MF, Liberec

4. *Petr Jaklin,* P, Ústí n. L.
5. *Michal Holoubek,* P, Děčín
6. *Jiří Maier,* P, Louny

7.—8. *Dalibor Lošťák,* MF, Teplice

Irena Millerová, P, Liberec
9.—10. *Pavel Kuba*, MF, Teplice
Marek Říčař, P, Frýdlant

Kategorie C

1. *Pavel Krtouš*, MF, Liberec
2. *Herbert Salov*, P, Rumburk
3. *Ivana Dvořáková*, MF, Ústí n. L.

4.—6. *Roman Buřič*, P, Rumburk
Kateřina Denksteinová, P, Děčín
David Vaverka, P, Litoměřice

7. *Pavel Jošt*, P, Frýdlant

Východočeský kraj

Kategorie A

1. *Milan Sourada*, 4 MF, Pardubice
2. *František Vencl*, 3 P, Česká Třebová
3. *Jiří Votínský*, 3 MF, Pardubice
4. *Radek Burda*, 4 MF, Hradec Králové, G J. K. Tyla
5. *Martin Štěpánek*, 3 P, Jaroměř
6. *Jiří Hofman*, 3 P, Hořice

Kategorie B

1. *Zbyněk Linhart*, MF, Pardubice
2. *Pavel Šebek*, MF, Hradec Králové, G J. K. Tyla

3. *Aleš Mokren,* SPŠE Pardubice
4. *Tomáš Pecina,* P, Turnov
5. *Miloslav Koudelka,* P, Přelouč
6. *Stanislav Forejt,* SPŠE Pardubice
7. *Aleš Limpouch,* MF, Hradec Králové, G J. K. Tyla

Kategorie C

1.—2. *Hana Dobešová,* MF, Hradec Králové, Velká
Aleš Hýbner, MF, Hradec Králové, G J. K. Tyla
3. *Jiří Moser,* MF, Pardubice
4. *Ivan Picek,* MF, Hradec Králové, Velká
5.—6. *Jan Andres,* MF, Hradec Králové, Velká
Petra Sekyrová, MF, Hradec Králové, Velká
7. *Jiří Hubeňák,* MF, Hradec Králové, G J. K. Tyla

Jihomoravský kraj

Kategorie A

1. *Jaroslav Smejkal,* 3 P, Velké Meziříčí
2. *Jiří Suk,* 4 P, Žďár n. Sáz.
3.—4. *Ivana Čapounová,* 4 P, Zastávka u Brna
Petr Havelka, 4 P, Znojmo
5. *Pavel Jelínek,* 4 P, Brno, Koněvova
6.—8. *Martin Juráš,* 4 P, Brno, Koněvova
Petr Kuchyňa, 4 P, Boskovice
Petr Slavík, 3 MF, Brno, Koněvova
9. *František Jurka,* 4 P, Třebíč

Kategorie B

1. *Petr Nasarčuk,* MF, Brno, Slovanské nám.
2. *Luděk Niedermayer,* P, Brno, tř. kpt. Jaroše
3. *Rostislav Mach,* P, Tišnov

4.—5. *Jan Tomčík,* P, Brno, Koněvova
Pavel Zemčík, SPŠE Brno, Leninova

6. *Alan Kuběna,* SPŠE Brno, Leninova

7.—8. *Michal Beneš,* P, Jihlava
Zdeněk Štesl, P, Boskovice

9. *Radek Hedbávný,* P, Třebíč

Kategorie C

1. *Martin Kovár,* MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
2. *Josef Pail,* P, Žďár n. Sáz.
3. *Aleš Černík,* P, Uherský Brod

4.—7. *Pavel Gromus,* P, Prostějov
Jan Chmelař, P, Hodonín
Alena Knéslová, MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
Vít Kratochvíl, MF, Třebíč

8.—9. *Pavel Bureš,* MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
Radomír Halaš, P, Prostějov

Severomoravský kraj

Kategorie A

1. *Martin Zemek,* 4 M, Bílovec
2. *Vladan Pecha,* 3 M, Bílovec

3. *Petr Schiller,* 4 M, Bílovec
4. *Petr Tichavský,* 4 M, Bílovec
5. *Aleš Martiník,* 4 MF, Ostrava, Šmeralova
6. *Robert Krajča,* 4 M, Bílovec
7. *Ondřej Petr,* 4 M, Bílovec
8. *Miloslav Grundmann,* 4 P, Ostrava-Poruba
9. *Martina Kynclová,* 4 P, Přerov
10. *Petr Lisoněk,* 4 MF, Olomouc-Hejčín

Kategorie B

1. *Ivo Čermák,* M, Bílovec
2. *Martin Grajcar,* M, Bílovec
3. *Dalibor Damborský,* M, Bílovec
4. *Zita Močkořová,* P, Třinec
5. *Pavel Kráčmar,* M, Bílovec
6. *Angel Vargas,* M, Bílovec
7. *Jiří Bouchala,* P, Nový Jičín
8. *Jaromír Mrkva,* M, Bílovec
9. *Petr Ptáčník,* MF, Ostrava-Poruba
10. *Vlastimil Klapka,* MF, Karviná

Kategorie C

1. *Jarmila Ranošová,* M, Bílovec
2. *Vladimír Jašek,* SPŠE Olomouc, Božetěchova
3. *Přemysl Dědic,* M, Bílovec
4. *Petr Adámek,* M, Bílovec
5. *Marek Skotnica,* P, Rožnov p. Radh.
6. *Daniel Hrivňák,* MF, Ostrava, Šmeralova

7. *Michal Brychta,* M, Bílovec
8. *Ladislav Sládeček,* M, Bílovec
9. *Jiří Šrom,* M, Bílovec
10. *Vladimír Tetur,* M, Bílovec

Bratislava

Kategorie A

1. *Marián Neamcu,* 3 M, Bratislava, Červenej armády
2.—4. *Peter Borovanský,* 3 MF, Bratislava, Novohradská
Jaroslav Kaiser, 4 P, Bratislava, Vazovova
Viktor Martišovitš, 3 MF, Bratislava, Novohradská
5. *Richard Hlubina,* 4 P, Bratislava, Vazovova
6.—7. *Peter Papánek,* 4 P, Bratislava, I. Horvátha
Hana Riečanová, 3 MF, Bratislava, Novohradská
8. *Roman Bačík,* 3 M, Bratislava, Červenej armády
9. *Marcela Foltínová,* 3 M, Bratislava, Červenej armády

Kategorie B

1 *Ján Mareš,* M, Bratislava, Červenej armády
2. *Jana Kátlovská,* MF, Bratislava, Novohradská
3. *Andrej Hoos,* M, Bratislava, Červenej armády
4. *Matej Lexa,* M, Bratislava, Červenej armády
5. *Marián Hanula,* MF, Bratislava, Novohradská
6. *Ivan Ježík,* M, Bratislava, Červenej armády
7. *Vladimír Hajsík,* M, Bratislava, Červenej armády
8.—9. *Tomáš Gedeon,* MF, Bratislava, Novohradská
Michal Hejný, MF, Bratislava, Novohradská

10. *Ondrej Pastva,* M, Bratislava, Červenej armády

Kategorie C

1.—2. *Martin Knor,* M, Bratislava, Červenej armády
Marián Šumšala, M, Bratislava, Červenej armády
3.—4. *Vladimír Kliment,* M, Bratislava, Červenej armády
Katarína Majlingová, M, Bratislava, Červenej armády
5.—7. *Lucia Danišová,* P, Bratislava, Metodova
Eva Kopecká, MF, Bratislava, Novohradská
Ingrid Velická, P, Bratislava, Tomašiková
8. *Ján Šefčík,* M, Bratislava, Červenej armády
9. *Martin Foltin,* M, Bratislava, Červenej armády

Západoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Peter Tarina,* 4 P, Topoľčany
2. *Roman Šášik,* 3 P, Nitra, Párovská
3. *Vladimír Mužík,* 4 P, Nitra, Párovská
4. *Aba Teleki,* 4 P, Nitra, G E. Gudernu
5. *František Horniak,* 4 P, Levice
6. *Anna Jancsóová,* 3 P, Komárno, maďarské G
7. *Juraj Vörös,* 4 P, Nitra, Párovská
8. *Alexander Tomášek,* 4, SPŠS Komárno
9. *Dušan Kešický,* 4 P, Nové Zámky,
10. *Anna Baráková,* 4 P, Nové Zámky

Kategorie B

1. *Michal Valent,* P, Levice
2. *Tibor Lacza,* P, Nové Zámky
3. *Juraj Michalík,* P, Nitra, G E. Gudernu
4. *Marián Vidovenec,* P, Komárno
5. *Robert Bartko,* P, Trenčín
6. *Beáta Kondeová,* P, Komárno, maďarské G
7. *Tibor Hladík,* P, Komárno, maďarské G
8. *Adriana Metzlová,* P, Dunajská Streda, maďarské G
9. *Attila Pasztor,* P, Želiezovce, maďarské G
10. *Aladár Bödök,* P, Dunajská Streda, maďarské G

Kategorie C

1. *Juraj Hupka,* P, Pezinok
2. *Pavel Babica,* SPŠE Piešťany
3. *Csaba Vörös,* SPŠS Komárno
4. *Dušan Kusenda,* SPŠE Piešťany
5. *Peter Pláňovský,* P, Nové Mesto n. Váhom
6. *Ľuboš Bednárik,* P, Nové Zámky
7. *Ladislav Bielik,* P, Levice
8. *Miloš Farkaš,* SPŠE Piešťany
9. *Mária Medzihradská,* P, Levice
10. *Andrea Melcsóková,* SPŠS Komárno

Středoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Ľudmila Moravčíková,* 3 P, Žilina, Wolkerova
2. *Jana Mižúrová,* 3 P, Vrútky
3. *Robert Mendris,* 4 P, Považská Bystrica
4. *Jana Podhorová,* 4 P, Lučenec
5. *Milan Kratka,* 3 P, Prievidza
6. *Gabriel Balogh,* 3 P, Fiľakovo

Kategorie B

1. *Martin Bezák,* P, Prievidza

2.—4. *Mária Bartová,* P, Dubnica
Roman Gajdošech, M, Žilina, V. Okružná
Viktória Glasnáková, M, Žilina, V. Okružná

5. *Stanislav Bednár,* P, Žiar n. Hronom

6.—7. *Štefan Brisuda,* M, Žilina, V. Okružná
Ludmila Naňová, MF, Zvolen

8. *Roman Kučera,* M, Žilina, V. Okružná
9. *Slávka Polónyová,* P, Banská Štiavnica

Kategorie C

1.—2. *Oto Bajana,* M, Žilina, V. Okružná
Igor Odrobina, M, Žilina, V. Okružná

3. *Tatiana Kocáková,* P, Vrútky
4. *Roman Roštár,* P, Prievidza
5. *Erich Bielik,* P, Dolný Kubín

6.—7. *Ingrid Hudecová*, P, Prievidza
Peter Vestenický, P, Vrútky

Východoslovenský kraj

Kategorie A

1.—2. *Ján Hric*, 4 P, Prešov, Konštantínova
Ignác Tereščák, 2 P, Michalovce
3.—4. *Galina Kumičáková*, 4 P, Košice, Kováčská
Peter Spišiak, 4 M, Košice, Šmeralova
5.—6. *Vladimír Dančík*, 3 M, Košice, Šmeralova
Ľubomír Šoltés, 4 P, Michalovce
7. *Stanislav Čabala*, 4 M, Košice, Šmeralova

Kategorie B

1.—2. *Juraj Balázs*, P, Košice, Kuzmányho
Ignác Tereščák, P, Michalovce
3. *Ján Smolárik*, P, Košice, Kováčská
4. *Ľubomír Mačura*, P, Kežmarok
5. *František Bobenič*, M, Košice, Šmeralova
6. *Juraj Smik*, P, Krompachy
7.—8. *Karol Kováč*, M, Košice, Šmeralova
Peter Vargovčík, SPŠE Prešov
9. *Ján Kováč*, P, Poprad, Leninova

Kategorie C

1. *Michal Chromý*, P, Humenné

2. *Tatiana Csizmárová,* M, Košice, Šmeralova

3.—6. *Ján Barger,* M, Košice, Šmeralova

Roman Fabián, P, Poprad, Leninova

Ján Lužný, SPŠE Prešov

Dana Švaňová, M, Košice, Šmeralova

7. *Dagmar Sotáková,* P, Košice, Šrobárová

Poznámky: Není-li uvedena škola, rozumí se gymnázium - G.
Všichni uvedení řešitelé v kategorii B byli žáky 2. ročníku, všichni uvedení řešitelé v kategorii C byli žáky 1. ročníku.

Kategorie Z

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

Z - I - 1

Tomáš se Sašou hrají matematickou hru: Tomáš začíná - zvolí si jedno z čísel 1, 2, ..., 10 a napíše je na papír. Pak si libovolné z těchto čísel zvolí Saša a připíše je pod Tomášovo. Na řadě je pak opět Tomáš, a tak střídavě připisují čísla, až je jich na papíru šest. Je-li jejich součet druhou mocninou přirozeného čísla, vyhrává Saša, není-li, vyhrává Tomáš. (Čísla se mohou opakovat.)

a) Poraďte Tomášovi, jak má hrát.

b) Tomáš začal číslem 1. Jak má Saša odpovědět?

Řešení. Předpokládejme, že hra již proběhla. Označme S_6 součet všech šesti zapsaných čísel. Pak je S_6 alespoň 6 (kdyby oba hráči volili stále 1, je $S_6 = 6$, jinak je S_6 větší než 6). Zároveň je $S_6 \leqq 60$, protože každý hráč může zvolit nejvýše číslo 10 a třikrát volí Tomáš, třikrát volí Saša. Saša vyhrává v těch případech, kdy se S_6 rovná některému z čísel 9, 16, 25, 36, 49, zbývající možné součty jsou vítězné pro Tomáše.

a) Je-li součet S_5 prvních pěti zapsaných čísel menší než

25, může ho Saša doplnit posledním číslem na druhou mocninu a vyhrát. Tomáš musí proto hrát tak, aby bylo $S_5 \geqq 25$ a přitom takové, aby je Saša nemohla doplnit na číslo 36 nebo 49. Tomáš se tedy bude snažit, aby se S_5 rovnalo některému z čísel 25, 36, 37, 38, 49, 50. Sám však může připsat nejvýše $3 \times 10 = 30$, a proto nemůže zajistit, aby bylo $S_5 \geqq 36$. Musí proto hrát tak, aby bylo $S_5 = 25$. Toho může dosáhnout jen tehdy, je-li $15 \leqq S_4 \leqq 24$. Bude proto usilovat, aby $S_3 = 14$. K tomu potřebuje, aby $4 \leqq S_2 \leqq 13$. Na začátku tedy zvolí $S_1 = 3$. Pak je $4 \leqq S_2 \leqq 13$ a Tomáš zvolí další číslo tak, aby $S_3 = 14$. Součet S_4 se pak rovná některému z čísel 15, 16, ..., 24, podle toho, zda Saša volila číslo 1, 2, ... nebo 10. Tomáš pak zvolí číslo 10, 9, ... nebo 1, aby nezávisle na tom, jak volila Saša, byl součet prvních pěti čísel roven 25. Pak je $26 \leqq S_6 \leqq 35$, a tedy při žádné Sašině volbě posledního čísla není součet S_6 druhou mocninou přirozeného čísla. Vítězem je Tomáš.

b) Začne-li Tomáš číslem 1, připíše Saša číslo 2, aby byl součet prvních dvou čísel 3, a dál hraje Saša tak, jak hrál Tomáš v předcházejícím případě: po Tomášově volbě je součet prvních tří čísel alespoň 4 a nejvýše 13. Saša volí čtvrté číslo tak, aby se součet prvních čtyř čísel rovnal 14. Tomáš může volit 1, 2, ... nebo 10 a zvýšit celkový součet napsaných čísel na 15, 16, ... nebo 24. Saša volí šesté číslo tak, aby výsledný součet byl 25.

Oba postupy jsou znázorněny v této tabulce:

	Tomáš	Saša	Tomáš
a	$S_1 = 3$	$4 \leqq S_2 \leqq 13$	$S_3 = 14$
b	$S_1 = 1$	$S_2 = 3$	$4 \leqq S_3 \leqq 13$

	Saša	Tomáš	Saša
a	$15 \leqq S_4 \leqq 24$	$S_5 = 25$	$26 \leqq S_6 \leqq 35$
b	$S_4 = 14$	$15 \leqq S_5 \leqq 24$	$S_6 = 25$

Z - I - 2

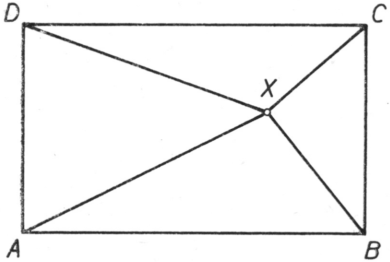
Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí: Součin $(n + 1)(n + 3)(n + 5)$ není dělitelný žádným prvočíslem větším než 3.

Řešení. Vyhovuje-li číslo n podmínce úlohy, pak žádné z čísel $n + 1$, $n + 3$, $n + 5$ není dělitelné žádným prvočíslem větším než 3. Z prvočísel dělí tudíž číslo $n + 1$ nejvýše čísla 2 a 3, totéž platí pro čísla $n + 3$, $n + 5$. Z čísel $n + 1$, $n + 3$, $n + 5$ je však třemi dělitelné právě jedno, zbývající dvě pak musí být mocninou čísla 2. Přitom se tato dvě čísla liší buď o 2, nebo o 4. Mocniny čísla 2 jsou 2, 4, 8, 16, 32, ..., z nich se o 2 liší pouze čísla 2, 4, o 4 se liší pouze čísla 4, 8. V prvním případě se trojice $n + 1$, $n + 3$, $n + 5$ rovná trojici 2, 4, 6, v druhém případě se jedná o trojici 4, 6, 8. Je proto v prvním případě $n = 1$, v druhém $n = 3$, což jsou všechna řešení úlohy.

Z - I - 3

Je dán obdélník $ABCD$ a uvnitř něho bod X. Úsečky, které spojují bod X s vrcholy A, B, C, D, rozdělují obdélník na čtyři trojúhelníky. Obsahy tří z nich jsou 31, 54 a 90. Určete obsah obdélníku $ABCD$.

Řešení. Součet obsahů trojúhelníků ABX a CDX (obr. 1) se rovná polovině obsahu obdélníku $ABCD$, protože oba trojúhelníky mají stejně velké základny AB, CD a součet jejich výšek k těmto základnám se rovná velikosti druhé strany AD obdélníku $ABCD$. Stejně tak se rovná polovině obsahu obdélníku $ABCD$ také součet obsahů trojúhelníků ADX a BCX. Označme P obsah čtvrtého z trojúhelníků, na které



Obr. 1

je obdélník rozdělen, a Q obsah obdélníku $ABCD$. Víme, že platí

$$Q = 2(31 + 54) = 2(90 + P) \text{ nebo } Q = 2(31 + 90) =$$

$$= 2(54 + P) \text{ nebo } Q = 2(54 + 90) = 2(31 + P).$$

V prvním případě by bylo $Q = 170$, ale $P = -5$. Tento případ nemůže nastat, protože obsahem trojúhelníku nemůže být číslo záporné. Obsah obdélníku $ABCD$ se proto rovná buď číslu $2(31 + 90) = 242$ a $P = 67$, nebo je $Q = 2(54 + 90) = 288$, $P = 113$. Oba tyto případy mohou nastat, úloha má tedy dvě řešení: 242 a 288.

Z - I - 4

Rozhodněte, zda přirozené číslo

1101001000100001000000....,

které má tisíc číslic, je dělitelné číslem 72.

Řešení. Dané přirozené číslo označme A. Číslo A je dělitelné číslem 72 právě tehdy, jestliže je dělitelné číslem 8 a zároveň číslem 9. Víme, že libovolné přirozené číslo je dělitelné číslem 9 právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný devíti. Číslo je dělitelné osmi, jestliže je dělitelné osmi jeho poslední trojčíslí.

Všimněme si nyní podrobněji, jak dostaneme zápis čísla A v desítkové soustavě: Nejdříve napíšeme číslici 1, napravo od ní dvojčíslí 10, připíšeme zprava trojčíslí 100, čtyřčíslí

1 000 atd. Pokračujeme tak dlouho, až dostaneme číslo, které má aspoň 1 000 číslic. Řekněme, že jsme naposled připsali jedničku a n nul. Dostali jsme číslo

$$1\,|\,1\,0\,|\,1\,0\,0\,|\,1\,0\,0\,0\,|\,1\;.\;.\;.\,|\,1\,\underbrace{0\,0\ldots\,0}_{n}\,|,$$

které má $1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1)$ číslic a končí n nulami. Vzpomeneme si, jak prý slavný německý matematik K. F. Gauss sečetl rychle již jako žák základní školy všechna přirozená čísla od 1 do 100. Sečetl nejprve první číslo s posledním $(1 + 100)$, pak druhé s předposledním $(2 + 99)$, atd. Celkem dostal 50 součtů, každý z nich byl 101, celkem tedy $50 . 101 = 5\,050$. Tento princip použijeme i my a dostaneme

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

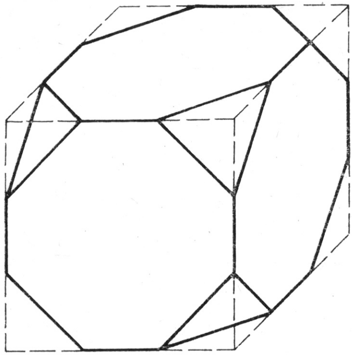
Hledáme nyní nejmenší přirozené číslo n, pro které je předcházející výraz aspoň 1000. Zkusmo zjistíme, že $n = 44$. Obdržené číslo má $\dfrac{45 . 46}{2} = 1\,035$ míst, končí 44 nulami a obsahuje 45 jedniček. Z něho dostaneme číslo A škrtnutím 35 nul na konci. Číslo A tedy končí devíti nulami a v jeho zápisu v desítkové soustavě je kromě nul 45 jedniček a žádné další cifry. Číslo A je proto dělitelné tisícem, a tedy též osmi, a protože jeho ciferný součet je 45, je dělitelné i devíti. Proto je číslo A dělitelné číslem 72.

Číslo $n = 44$ jsme mohli najít i bez užití výše uvedeného vzorce. Je totiž $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$, a proto $11 + 12 + \ldots + 20 = 155$, $21 + 22 + \ldots + 30 = 255$ a $31 + 32 + \ldots + 40 = 355$, tedy $1 + 2 + \ldots + 40 = 820$. K číslu 820 přičítáme postupně čísla 41, 42, ..., až dostaneme číslo větší než 999. To nastane při čísle 45, tudíž $n + 1 = 45$, $n = 44$.

Z - I - 5

Každý vrchol krychle s hranou dlouhou 6 cm odřízneme rovinou, která protne hrany vycházející z tohoto vrcholu 2 cm od vrcholu. Určete počet vrcholů, hran, stěn, povrch a objem mnohostěnu, který tak vznikne.

Řešení. Krychle má 8 vrcholů, po odříznutí dostaneme místo každého vrcholu krychle tři vrcholy nového mnohostěnu (obr. 2), který má tudíž 24 vrcholů. Krychle má 12 hran,



Obr. 2

část každé hrany je i hranou nového mnohostěnu. Kromě nich má tento mnohostěn při každém odříznutém vrcholu krychle další tři hrany, celkem má vzniklý mnohostěn 36 hran. Krychle má 6 stěn, každá rovina řezu určuje jednu další stěnu mnohostěnu, který má celkem 14 stěn. Každá z nich je buď pravidelným osmiúhelníkem - takových stěn je 6 - nebo rovnostranným trojúhelníkem - takových stěn je 8. Osmiúhelník vznikne ze stěny krychle odříznutím čtyř rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků o odvěsnách délky 2 cm. Trojúhelníková stěna má podle Pythagorovy věty strany dlouhé $2\sqrt{2}$ cm. Obsah osmiúhelníku je $6^2 - 4 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 28\ \text{cm}^2$, obsah trojúhelníkové stěny je $\frac{(2\sqrt{2})^2}{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

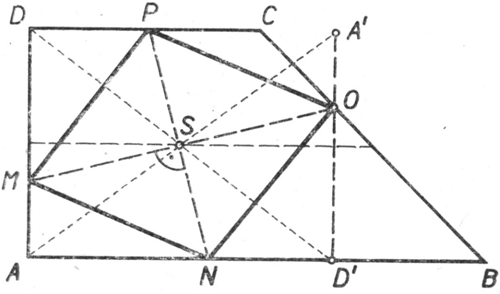
Povrch vzniklého mnohostěnu je $S = 6 \cdot 28 + 8 \cdot 2\sqrt{3} = 168 + 16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Objem tohoto mnohostěnu vypočteme, když od objemu krychle odečteme objem osmi odříznutých jehlanů. Podstavou každého takového jehlanu je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou 2 a výška jehlanu je rovněž 2 (vše v cm). Objem jehlanu je tedy $\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$, objem mnohostěnu je $6^3 - 8 \cdot \frac{4}{3} = 205\frac{1}{3}\ \text{cm}^3$.

Z - I - 6

Je dán lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem při vrcholech A, D a se stranami $|AB| = 6$, $|AD| = |CD| = 3$. Na jeho střední příčce je dán bod S ve vzdálenosti 2 od strany AD.

Sestrojte kosočtverec, který má střed v bodě S a uvnitř každé strany lichoběžníku leží jeden jeho vrchol.

Řešení. Při konstrukci kosočtverce využijeme jeho vlastností, a sice to, že úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé a vzájemně se půlí. Dále využijeme souměrnost kosočtverce podle jeho středu. Označíme-li M vrchol kosočtverce na straně AD lichoběžníku (obr. 3), leží protější vrchol O nejen na straně BC lichoběžníku, nýbrž i na úsečce $A'D'$, kde A', D' jsou body souměrně sdružené k bodům A, D podle středu S. Sestrojíme tedy nejdříve průsečík O úseček BC, $A'D'$ a k němu vrchol M tak, aby byly body O, M souměrně sdružené podle středu S. Zbývající vrcholy N, P kosočtverce leží na úhlopříčce, která prochází bodem S a je kolmá na úhlopříčku MO. Najdeme je jako průsečíky této kolmice se stranami AB a CD lichoběžníku.

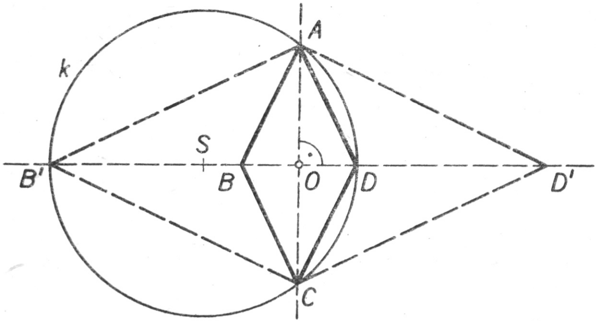


Obr. 3

Z - II - 1

Je dána kružnice *k* a v její vnitřní oblasti bod *O* různý od středu kružnice *k*. Sestrojte kosočtverec se středem v bodě *O* tak, aby tři jeho vrcholy ležely na kružnici *k*. Kolik má úloha řešení?

Řešení. Protože tři vrcholy hledaného kosočtverce mají ležet na kružnici *k*, musí být jedna jeho úhlopříčka tětivou kružnice *k*. Protože bod *O* je středem této tětivy, je tato tětiva kolmá na ten průměr kružnice *k*, který prochází bodem *O*. Bodem *O* vedeme tedy kolmici k spojnici bodu *O* se středem kružnice *k*; průsečíky této kolmice s kružnicí *k* jsou dva vrcholy hledaného kosočtverce, označme je *A*, *C*. Zbývající dva vrcholy kosočtverce leží na druhé úhlopříčce, tedy na spojnici bodu *O* se středem kružnice *k* (obr. 4). Jeden z nich leží kromě toho také na kružnici *k*. Úloha má dvě řešení, jsou to kosočtverce *ABCD* a *AB'CD'*.



Obr. 4

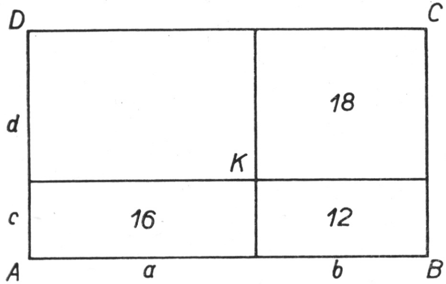
Z - II - 2

Součet podílu a součinu dvou přirozených čísel p, q je 30. Určete všechny dvojice čísel této vlastnosti.

Řešení. Podle znění úlohy má platit $\frac{p}{q} + pq = 30$. Proto je číslo p násobkem čísla q, a tudíž $p \geqq q$. Kdyby bylo $q \geqq 6$, bylo by i $p \geqq 6$, tedy $pq \geqq 36$, což nemůže platit, protože $pq = 30 - \frac{p}{q}$. Je tedy $q \leqq 5$. Zkusíme proto postupně $q = 1, 2, 3, 4, 5$ a z výše uvedené rovnice vypočteme p. V posledních dvou případech není číslo p přirozené, úloha má jen tři řešení: $q = 1$, $p = 15$, dále $q = 2$, $p = 12$ a třetí řešení je $q = 3$, $p = 9$.

Z - II - 3

Vnitřním bodem K obdélníku $ABCD$ vedeme přímky rovnoběžné s jeho stranami. Daný obdélník tím rozdělíme na čtyři obdélníky. Obsahy tří z nich jsou 16, 12 a 18 (obr. 5).



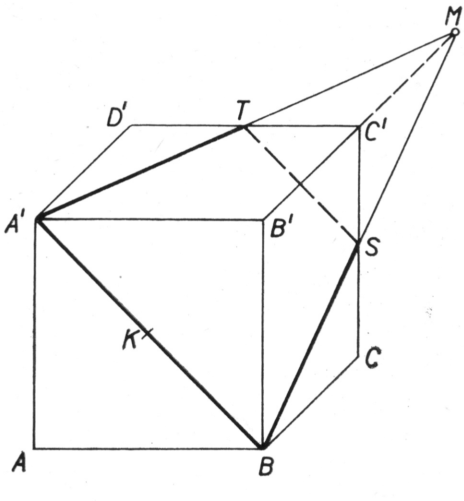
Obr. 5

Určete obsah čtvrtého obdélníku a obsah daného obdélníku $ABCD$.

Řešení. Délky stran obdélníků označíme podle obr. 5. Platí tedy $ac = 16$, $bc = 12$, $bd = 18$ a obsah čtvrtého obdélníku je ad. Protože je $ad : ac = bd : bc = 18 : 12 = 3 : 2$, je $ad = ac \cdot \frac{3}{2} = 24$. Obsah čtvrtého obdélníku je 24, obsah obdélníku $ABCD$ je 70.

Z - II - 4

Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 10. Na přímce $B'C'$ zvolíme bod M tak, aby bod C' byl středem



Obr. 6

úsečky $B'M$. Řezem dané krychle rovinou $A'BM$ je rovnoramenný lichoběžník. Vypočítejte jeho obsah.

Řešení. Přímka BM protíná úsečku CC' v jejím středu S, přímka $A'M$ protíná úsečku $C'D'$ v jejím středu T (obr. 6). Máme vypočítat obsah lichoběžníku $A'BST$. Úsečka ST je střední příčka trojúhelníku $A'BM$, výška lichoběžníku se rovná jedné polovině výšky tohoto trojúhelníku. Je $|A'B| = 10\sqrt{2}$, $|ST| = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Dále je $|KM|^2 = |KB'|^2 + |B'M|^2 = (5\sqrt{2})^2 + 20^2 = 450$, $|KM| = 15\sqrt{2}$. Obsah lichoběžníku je $\frac{10\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2} = \frac{225}{2} = 112{,}5$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY III. KOLA V ČSR

(Úlohy připravil KV MO Severomoravského kraje.)

Z - III - 1

Najděte všechna přirozená čísla m, n, p, jejichž součet je 42, přičemž jedno z nich se rovná druhé mocnině součtu obou zbývajících.

Řešení. Úloha má tři řešení, jsou to trojice (1, 5, 36), (2, 4, 36) a (3, 3, 36).

Z - III - 2

Dokažte, že pro všechna reálná čísla x, y platí nerovnost

$$(x + y + 1)^2 + (x + y)^2 \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení. Nerovnost upravíme na ekvivalentní tvar $(2x + 2y + 1)^2 \geqq 0$. Rovnost platí právě tehdy, když je $x + y = -\frac{1}{2}$.

Z - III - 3

Je dán čtverec $ABCD$ a jeho vnitřní bod K, který není jeho středem. Sestrojte kosočtverec $XYUV$ tak, aby bod K byl jeho středem a aby alespoň tři vrcholy kosočtverce ležely na stranách čtverce $ABCD$. Kolik má úloha řešení?

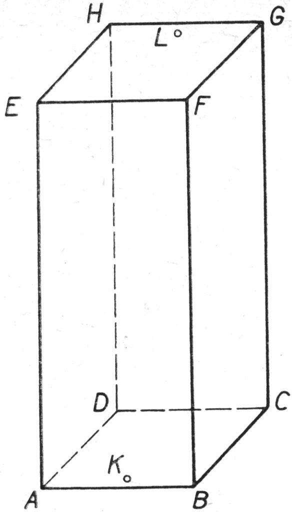
Řešení. Postup je obdobný jako u úlohy Z-II-1. Úloha má vždy aspoň dvě řešení, nekonečně mnoho řešení má tehdy, když bod K leží na střední příčce čtverce $ABCD$.

Z - III - 4

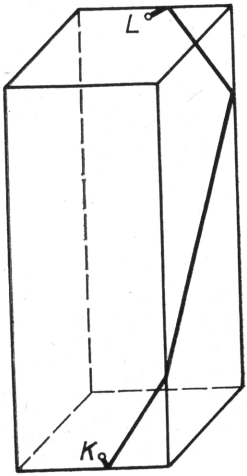
Je dán kvádr $ABCDEFGH$ se čtvercovou podstavou $ABCD$ o délce hrany $|AB| = 9$ cm a výšce $|AE| = 24$ cm.

a) Vypočtěte délku nejkratší spojnice bodů K, L jdoucí po stěnách kvádru. Body K, L jsou body podstav, bod K leží na ose hrany AB ve vzdálenosti 1 cm od hrany AB, bod L leží na ose hrany GH ve vzdálenosti 1 cm od hrany GH.

b) Na obraze kvádru (obr. 7) náčrtněte nejkratší spojnici bodů K, L.



Obr. 7



Obr. 8

Řešení. Úlohu řešíme nejlépe pomocí sítě kvádru, délka nejkratší spojnice bodů K, L je $\sqrt{1000} \doteq 31{,}62$. Nejkratší spojnice je načrtnuta na obr. 8, mohli jsme ovšem vzít i tu, která je s načrtnutou souměrně sdružená podle roviny souměrnosti úsečky AB.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY III. KOLA V SSR

(Úlohy připravil KV MO Západoslovenského kraje.)

Z - III - 1

Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré platí, že počet číslic potrebných na zápis všetkých prirodzených čísel 1 až n je väčší ako trojnásobok čísla n.

Výsledok je $n = 1108$.

Z - III - 2

Je daný rovnoramenný lichobežník so základňami AB, CD. Zostrojíme jeho uhlopriečky a ich priesečník označíme S. Vypočítajte obsah lichobežníka, ak viete, že obsah trojuholníka DSC je 3 a obsah trojuholníka ASD je 6.

Riešenie. Trojuholníky DSC a DAC majú rovnaké základne, teda ich výšky sú v pomere 1 : 3. Výška trojúholníka DAC je výškou lichobežníka. Obsah lichobežníka je 27.

Z - III - 3

Koľkými spôsobmi môžeme celé čísla od 0 až po 20 dosadiť namiesto premenných a, b v nerovnosti $a < b$ tak, aby bola splnená?

Riešenie. Ak $a = 0$, tak b môže nadobúdať hodnoty od 1 až po 20, ak $a = 1$, tak miesto b môžeme dosadiť celé čísla 2 až 20, atď. Spolu je to $20 + 19 + \ldots + 2 + 1 = 210$ prípadov.

Z - III - 4

Na kocke $ABCDA'B'C'D'$ s hranou dĺžky 10 sú umiestnené body M, N, P nasledovne: Bod M je stred úsečky AB, bod N je stred úsečky BC, bod P je stred úsečky CC'. Nájdite veľkosť obsahu rezu kocky rovinou určenou bodmi M, N, P.

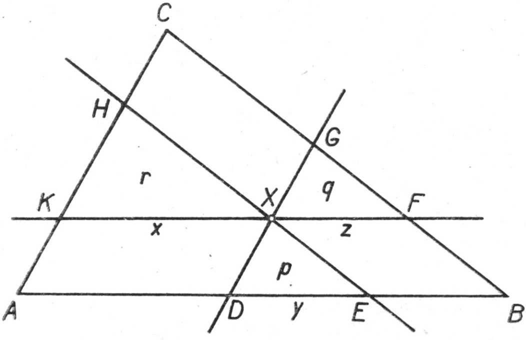
Riešenie. Rovina určená bodmi M, N, P pretne kocku v pravidelnom šesťuholníku, dĺžku strany šesťuholníka určíme pomocou Pytagorovej vety, je $|MN| = 5\sqrt{2}$. Obsah šesťuholníka môžeme vypočítať ako šesťnásobok obsahu rovnostranného trojuholníka so stranou $5\sqrt{2}$. Výsledok: $75\sqrt{3}$.

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY I. KOLA

C - I - 1

Vnútorným bodom X trojuholníka ABC vedieme rovnobežky s jeho stranami a tak rozdelíme trojuholník ABC na tri trojuholníky a tri rovnobežníky. Obsahy nových trojuholníkov sú p, q, r. Vypočítajte obsah P trojuholníka ABC pomocou čísel p, q, r.

Riešenie. Označme (pozri obr. 9) novovytvorené trojuholníky DEX, XFG, KXH. Vzhľadom na rovnobežnosť odpovedajúcich si strán, a teda aj zhodnosť odpovedajúcich



Obr. 9

si uhlov, sú tieto trojuholníky podobné všetky navzájom i s trojuholníkom ABC. Vieme, že ak sú dva trojuholníky podobné v pomere $k : 1$, potom ich plošné obsahy sú v pomere $k^2 : 1$. Preto platí:

$$p : P = \frac{y^2}{(x + y + z)^2}, \quad q : P = \frac{z^2}{(x + y + z)^2},$$

$$r : P = \frac{x^2}{(x + y + z)^2}.$$

Z týchto rovností po odmocnení dostaneme

$$\sqrt{\frac{p}{P}} = \frac{y}{x + y + z}, \quad \sqrt{\frac{q}{P}} = \frac{z}{x + y + z},$$

$$\sqrt{\frac{r}{P}} = \frac{x}{x + y + z}.$$

Sčítaním ľavých a pravých strán týchto rovností dostávame

$$\frac{\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}}{\sqrt{P}} = \frac{x + y + z}{x + y + z} = 1,$$

z čoho vyplýva, že $\sqrt{P} = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$,
čiže $P = (\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})^2$.

C - I - 2

Definujme pre ľubovoľné čísla r, s číslo $\min(r, s)$ takto: $\min(r, s) = r$, ak je $r \leqq s$, $\min(r, s) = s$, ak je $r > s$.

Nech a, b, c sú nezáporné čísla a nech platí

$$(1) \qquad a + b \geqq c.$$

Potom platí tiež

$$(2) \qquad \min(1, a) + \min(1, b) \geqq \min(1, c);$$

dokážte.

Riešenie. Budeme rozlišovať niekoľko prípadov:

a) $0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$. Potom je $\min(1, a) = a$, $\min(1, b) = b$, a pretože vždy platí: $c \geqq \min(1, c)$, bude vzhľadom na (1)

$$\min(1, a) + \min(1, b) = a + b \geqq c \geqq \min(1, c),$$

z čoho vyplýva, že v tomto prípade nerovnosť (2) platí.

b) Nech $a > 1$, $0 \leqq b \leqq 1$. Potom je $\min(1, a) = 1$, $\min(1, b) = b$, čo znamená, že $\min(1, a) + \min(1, b) = 1 + b \geqq 1 \geqq \min(1, c)$, čím sme opäť dokázali správnosť nerovnosti (2) aj v tomto prípade. Rovnako by sme postupovali aj v prípade, keď by bolo $0 \leqq a \leqq 1$, $b > 1$.

c) Nech konečne $a > 1$, $b > 1$. Potom je $\min(1, a) = 1$, $\min(1, b) = 1$, z čoho vyplýva, že $\min(1, a) + \min(1, b) = 2 > 1 \geqq \min(1, c)$, čím je dokázaná nerovnosť (2) aj v tomto prípade.

Pretože iné prípady pre nezáporné čísla a, b už nastať nemôžu, je tým správnosť tvrdenia úlohy dokázaná.

C - I - 3

Nájdite všetky prirodzené čísla m, pre ktoré platí, že $m + 3$ je deliteľné štyrmi, $m + 4$ je deliteľné piatimi a $m + 5$ je deliteľné šiestimi.

Riešenie. Nech m je prirodzené číslo požadovaných vlastností. Zo zadania úlohy vyplýva, že potom musia existovať prirodzené čísla p, q, r tak, že platí

$$(1) \qquad m + 3 = 4p, \quad m + 4 = 5q, \quad m + 5 = 6r.$$

Rovnosti (1) budú zrejme splnené práve pre také m, pre ktoré bude existovať celé nezáporné číslo s deliteľné číslami 4, 5, 6, pre ktoré platí

$$(2) \quad m + 3 = 4 + s, \quad m + 4 = 5 + s, \quad m + 5 = 6 + s.$$

Za číslo s vo vzťahoch (2) možno zvoliť zrejme každé číslo tvaru $s = 4.5.3.k$, kde k je ľubovoľné celé nezáporné číslo, čiže $s = 60\,k$. Z toho vyplýva, že podmienkam úlohy môžu vyhovovať len čísla

$$(3) \qquad m = 1, 61, 121, 181, 241, \ldots$$

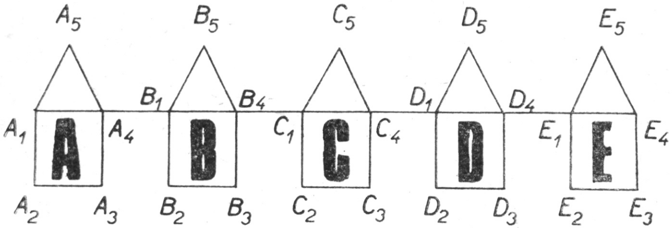
a skúškou sa ľahko presvedčíme, že všetky čísla (3) sú riešeniami úlohy.

Úsečky v obr. 10 je treba zafarbiť červenou a modrou farbou takto:

Začneme v niektorom vyznačenom bode a zafarbíme niektorú z úsečiek, ktorá z neho vychádza, červenou farbou. V ďalších krokoch farbíme striedavo modrou alebo červenou farbou niektorú z dosiaľ nezafarbených úsečiek vychádzajúcich z bodu, do ktorého viedla práve zafarbená úsečka. Takto pokračujeme dovtedy, pokiaľ je to možné.

a) Určte, v ktorých bodoch treba začať, aby sa potom dali zafarbiť všetky úsečky.

b) Koľko rôznych zafarbení všetkých úsečiek môže vzniknúť?



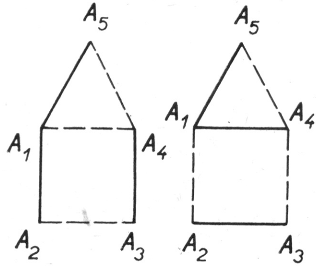
Obr. 10

Riešenie. a) Daný obrazec voláme grafom, jednotlivé úsečky sú hranami grafu, ich koncové body voláme uzlami. Počet hrán vychádzajúcich z daného uzla grafu voláme jeho stupňom. V danom grafe sú s výnimkou uzlov A_1 a E_4 všetky uzly párneho stupňa. Uzly A_1, E_4 sú tretieho, teda nepárneho stupňa. Úloha zafarbiť všetky hrany daného grafu je totožná s úlohou nakresliť daný graf jedným ťahom. K tomu, aby sme daný graf nakreslili jedným ťahom, nemôžeme začať v uzle párneho stupňa. Ak by sme začali napr. z uzlu A_5 farbením hrany A_5A_1, pri predpísanom spôsobe farbenia hrán by sme sa pri farbení »domčeka« A buď zafarbením hrany A_4A_5 vrátili naspäť do uzla A_5 a ďalej k domčeku B by sme už nemohli pokračovať, pričom by aj niektoré z hrán domčeka A (napr. A_4A_1) zostali nezafarbené, alebo by sme nemohli zafarbiť hranu A_4A_5. Musíme preto začínať v uzle nepárneho stupňa. K tomu, aby sa dali zafarbiť všetky úsečky daného obrazca, musíme teda začať v bodoch A_1, resp. E_4.

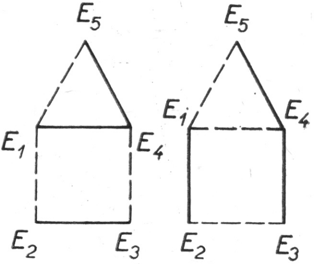
b) Predpokladajme, že začneme daný graf farbiť v bode A_1. Každý domček pozostáva zo 6 hrán. Po zafarbení všetkých hrán domčeka A sa dostaneme k hrane A_4B_1, ktorá je spojnicou prvých dvoch domčekov. Po vyjdení z vrcholu A_1 sa môžeme k hrane A_4B_1, ktorú budeme farbiť ako siedmu, a teda červene, dostať celkom 6 spôsobmi, ale vzniknú pritom len dve navzájom rôzne zafarbenia hrán domčeka A (pozri obr. 11, na ktorom sú červené hrany vyznačené plnou čiarou, modré čiarou prerušovanou). Domček B začneme farbiť z uzlu B_1 modrou hranou a z rovnakých dôvodov ako pri farbení domčeka A dostaneme dve rôzne zafarbenia s tým rozdielom, že farby hrán budú opačné ako na obr. 11. Pri farbení prvých dvoch domčekov máme teda celkom 4 rôzne zafarbenia. Hranu B_4C_1, ktorá je spojnicou domčekov B a C, budeme farbiť ako štrnástu, teda modrou farbou. Domček C zafarbíme podobne ako domček A a domček D podobne ako domček B a domček E opäť podobne ako domček A. Pri každom z nich dostaneme teda celkom dve rôzne zafarbenia. Pri troch domčekoch máme tak 8 rôznych zafarbení, pri štyroch 16 a pri všetkych piatich 32. Pritom sme hranu C_4D_1 farbili ako dvadsiatu prvú, čiže červene, a hranu D_4E_1 ako dvadsiatu ôsmu, tj. modre.

Ak začneme s farbením grafu z bodu E_4 červenou farbou, dostaneme farbenie domčeka E ako na obr. 12, kde opäť plná čiara znamená červenú farbu hrany a prerušovaná čiara farbu modrú. Po zafarbení domčeka E budeme hranu E_1D_4 farbiť ako siedmu, čiže červenou farbou. Pri tomto spôsobe farbenia grafu dostávame teda iné zafarbenia ako pri farbení z bodu A_1, ktorých je zrejme taktiež celkom 32. Z toho vyplýva, že celkový počet rôznych zafarbení je $32 . 2 = 64$.

Poznámka. Odporúčame čitateľovi, aby si uvedomil, že pri farbení grafu pozostávajúceho zo 6 domčekov bude počet zafarbení pri vyjdení z bodu A_1 64, ale pri vyjdení z druhého uzla nepárneho stupňa nedostaneme už ďalšie rôzne zafarbenia grafu. Teda i v tom prípade bude celkový počet rôznych zafarbení len 64.



Obr. 11



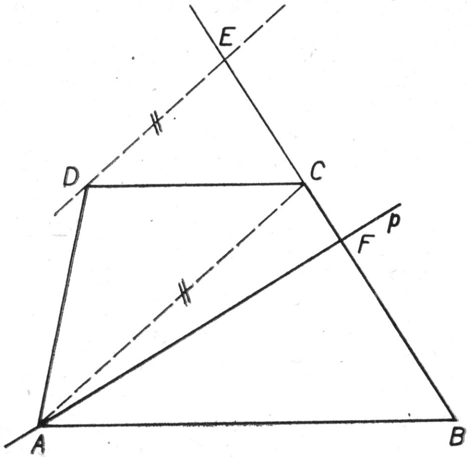
Obr. 12

C - I - 5

Je daný lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD, kde $|AB| > |CD|$. Vrcholom A veďte priamku p tak, aby rozdelila daný lichobežník na dve časti rovnakých obsahov.

Riešenie. Veďme vrcholom D daného lichobežníka rovnobežku s uhlopriečkou AC tohto lichobežníka. Táto pretne polpriamku BC v nejakom bode, ktorý označíme E. Vznikne tak trojuholník ABE (pozri obr. 13), ktorý má zrejme rovnaký obsah ako lichobežník $ABCD$. Trojuholníky ACD a ACE majú totiž spoločnú stranu AC a výšky oboch trojuholníkov na túto stranu sú rovnako veľké.

Označme F stred úsečky BE. Vzhľadom na to, že $|AB| > |CD|$, musí bod F ležať zrejme vo vnútri úsečky BC.



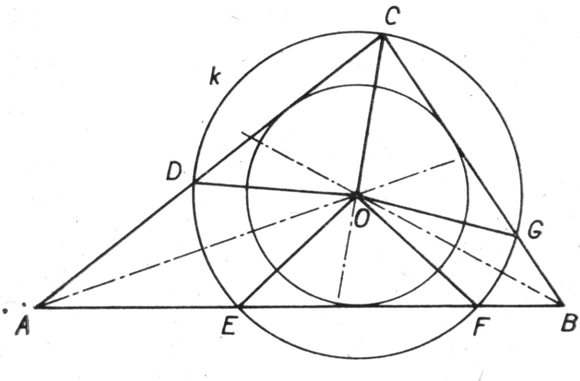
Obr. 13

Priamka AF je potom zrejme hľadanou priamkou p. Obsah trojuholníka ABF je totiž polovicou obsahu trojuholníka ABE a vzhľadom na vyššie uvedené teda polovicou obsahu daného lichobežníka. Z toho vyplýva, že obsahy trojuholníka ABF a štvoruholníka $AFCD$ sú rovnaké.

C - I - 6

Je daný trojuholník ABC. Nech O je stred jemu vpísanej kružnice a nech $|OC| < |OA|$, $|OC| < |OB|$. Vyjadrite veľkosti tetív, ktoré na stranách trojuholníka ABC vytína kružnica $k = (O; |OC|)$, pomocou veľkostí jeho strán.

Riešenie. Označme C, D, E, F, G spoločné body kružnice k a obvodu trojuholníka ABC (pozri obr. 14). Trojuholníky DOC, FOE, COG sú zrejme všetky tri rovnoramenné s rovnako veľkými ramenami, a sú preto zhodné. Ich základňami sú tetivy kružnice k vyťaté na stranách trojúholníka ABC,



Obr. 14

ktoré sú preto tiež zhodné. Označme ich dĺžku t. Platí teda: $|CD| = |CG| = |EF| = t$. Označme ďalej $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$. Body D, E sú súmerné podľa priamky AO, body G, F zasa podľa priamky BO. Preto platí: $|AF| = |AC| = b$, $|BE| = |BC| = a$. Ďalej platí: $|AE| = c - |BE| = c - a$, $|BF| = c - |AF| = c - b$. Keďže $|AB| = |AE| + |EF| + |FB|$, po dosadení dostaneme $c = c - a + t + c - b$, z čoho už vyplýva: $t = a + b - c$.

ÚLOHY KLAUZÚRNEJ ČASTI I. KOLA

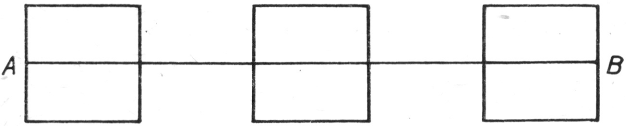
C - S - 1

Nájdite prvé dve z čísel 3, 33, 333, 3333, ..., ktoré sú deliteľné siedmimi.

Riešenie. Priamym výpočtom sa ľahko presvedčíme, že žiadne z čísel 3, 33, 333, 3333, 33 333 nie je siedmimi deliteľné. Číslo 333 333 však už siedmimi deliteľné je, pretože platí 333 333 = 7 . 47 619. Tak sme našli prvé z hľadaných čísel. Druhé by sme mohli rovnako hľadať skúšaním deliteľnosti, ale riešenie si môžeme uľahčiť nasledujúcou úvahou:

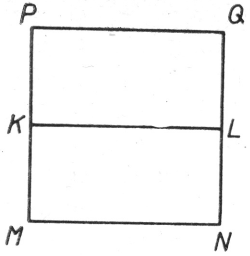
Číslo zapísané $k + 6$ trojkami dáva pri delení siedmimi rovnaký zvyšok ako číslo zapísané k trojkami, pretože ich rozdiel je rovný 333 333 . 10^k, čo je číslo deliteľné siedmimi. Preto ďalším číslom deliteľným siedmimi v danom slede bude číslo zapísané dvanástimi trojkami, teda číslo 333 333 333 333.

Určete, koľkými spôsobmi možno daný obrazec (obr.15) nakresliť jedným ťahom. Pritom za rôzne pokladáme také spôsoby, pri ktorých sa začína na rôznych miestach alebo pri ktorých sa úsečky zakreslujú v rôznom poradí.



Obr. 15

Riešenie. Ako sme zistili pri úlohe C - I - 4, ak chceme daný graf nakresliť jedným ťahom, musíme začať a končiť v uzle nepárneho stupňa. V danom prípade musíme teda začať v bode *A* a končiť v bode *B* alebo obrátene. Daný graf pozostáva z troch »domčekov«, z ktorých každý obsahuje šesť hrán, a z dvoch spojovacích hrán. Akonáhle zakreslíme spojovaciu hranu, nemôžeme sa už vracať späť. Preto pred zakreslením spojovacej hrany už musí byť zakreslený celý predchádzajúci domček. Každý z troch domčekov možno zakresliť šiestimi rôznymi spôsobmi (obr. 16): *KMNLKPQL*, *KMNLQPKL*, *KPQLKMNL*, *KPQLNMKL*, *KLQPKMNL*, *KLNMKPQL*. Ak začneme v bode *A*, môžeme teda daný obrazec zakresliť $6 . 6 . 6 = 216$ spôsobmi. Rovnaký počet spôsobov zakreslenia obrazca dostaneme, ak vyjdeme z bodu *B*. Celkom je teda 432 možností, ako sa dá daný obrazec nakresliť jedným ťahom.

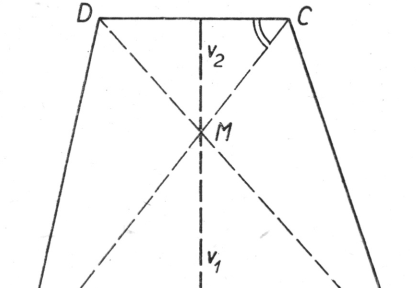


Obr. 16

C - S - 3a

Lichobežník $ABCD$ so základňami $|AB| = 10$, $|CD| = 5$ a výškou $v = 9$ je svojimi uhlopriečkami AC, BD rozdelený na štyri trojuholníky. Vypočítajte ich obsahy.

Riešenie. Označme M priesečník uhlopriečok AC, BD (obr. 17). Trojuholníky DCM a BAM majú odpovedajúce



Obr. 17

uhly zhodné, sú teda podobné. Pretože podľa predpokladu je $|AB| = 2|CD|$, sú aj ich výšky v pomere 2 : 1. Platí preto: $v_1 = 6$, $v_2 = 3$. Z toho vyplýva, že obsah trojuholníka ABM je $\frac{1}{2} . 10 . 6 = 30$, obsah trojuholníka CDM je $\frac{1}{2} . 5 . 3 = 7{,}5$. Ďalej je obsah trojuholníka ABC rovný $\frac{1}{2} . 10 . 9 = 45$, z čoho vyplýva, že obsah trojuholníka BCM je $45 - 30 = 15$ a rovnako veľký je tiež obsah trojuholníka ADM.

C - S - 3b

Pre nezáporné čísla a, b, c platí $a + b \geqq c$. Zistite, či potom musí platiť $a^2 + 3b^2 \geqq c^2$.

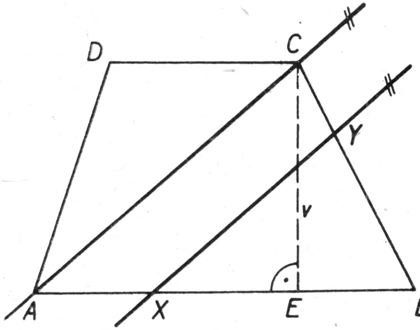
Riešenie. Ukážeme, že nerovnosť $a^2 + 3b^2 \geqq c^2$ nemusí platiť pre všetky také a, b, c, pre ktoré je $a + b \geqq c$. Stačí totiž, aby sme zvolili čísla a, b tak, aby platilo $a^2 + 3b^2 < < (a + b)^2$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou $b(b - a) < 0$, a číslo c tak, aby bolo $a^2 + 3b^2 < c^2 \leqq (a + b)^2$. Ľahko sa vidí, že príkladom takej trojice sú čísla: $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$. Je totiž $a + b = 3 = c$, ale $a^2 + 3b^2 = 7 < 9 = c^2$.

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY II. KOLA

C - II - 1

Je daný lichobežník $ABCD$ so základňami $|AB| = 2a$, $|DC| = a$. Veďte dve priamky rovnobežné s úsečkou AC tak, aby rozdelili lichobežník na tri časti rovnakého obsahu. Určte priesečníky týchto priamok s priamkou AB.

Riešenie. Označme $v = |CE|$ výšku lichobežníka $ABCD$ (pozri obr. 18). Potom pre jeho obsah P platí



Obr. 18

$$P = \frac{1}{2}(2a + a)\,v = \frac{3}{2}\,av.$$

Hľadané rovnobežky s úsečkou AC majú preto rozdeliť daný lichobežník na tri časti s obsahom $\frac{1}{2}\,av$. Takýto obsah má však zrejme trojuholník ACD. Preto jednou z hľadaných rovnobežiek je priamka AC. Druhú rovnobežku s úsečkou AC nájdeme tak, že trojuholník ABC rozdelíme na dve časti rovnakého obsahu. Označme X priesečník hľadanej rovnobežky s priamkou AB, Y jej priesečník s priamkou BC. Obsahy podobných trojuholníkov BXY a BAC sú v pomere 1 : 2. Podľa vety o obsahoch podobných trojuholníkov, ktorú sme použili v riešení úlohy C-I-1, musí preto platiť $|BX|$: $|BA| = 1 : \sqrt{2}$, z čoho vyplýva, že $|BX| = \dfrac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

C - II - 2

Pre každé prirodzené číslo n je číslo $N = 10^{2n} - 2^{2n}$ násobkom čísla 96. Dokážte.

Riešenie. Číslo N môžeme postupne upraviť takto:

$$N = 2^{2n}(5^{2n} - 1) = 2^{2n}(5^n - 1)(5^n + 1)\,.$$

Číslo $2^{2n} \geqq 2^2$ pre každé $n \geqq 1$ je zrejme násobkom 4. Čísla $5^n - 1$, 5^n, $5^n + 1$ sú tri za sebou nasledujúce prirodzené čísla. Práve jedno z nich je preto násobkom troch. Nie je to číslo 5^n. Násobkom troch bude teda niektoré z čísel $5^n - 1$, $5^n + 1$, ktoré sú párne a jedno z nich musí byť násobkom štyroch. Súčin $(5^n - 1)(5^n + 1)$ bude teda pre každé $n \geqq 1$ násobkom čísla $3.2.4 = 24$. Preto číslo N je pre každé prirodzené n násobkom čísla $4.24 = 96$, ako bolo treba dokázať.

Iné riešenie. Pri dôkaze tvrdenia úlohy môžeme použiť tiež metódu matematickej indukcie. Za tým účelom označme hodnotu čísla N v závislosti na n ako a_n.

Pre $n = 1$ je $a_1 = 10^2 - 2^2 = 100 - 4 = 96$, čo je zrejme číslo deliteľné číslom 96.

Nech pre nejaké prirodzené číslo $n \geqq 1$ je $a_n = 96k$, kde k je prirodzené číslo. Potom

$$a_{n+1} = 10^{2n+2} - 2^{2n+2} = 100 \,.\, 10^{2n} - 4 \,.\, 2^{2n} =$$

$$= 96 \,.\, 10^{2n} + 4\,a_n = 96\,(10^{2n} + 4k)\,,$$

čo znamená, že číslo a_{n+1} je tiež násobkom čísla 96. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Ďalšie riešenie. Metódou matematickej indukcie sa dá dokázať, že pre ľubovoľnú dvojicu prirodzených čísel p, q a každé prirodzené číslo $n \geqq 1$ je

$$p^n - q^n = (p - q)(p^{n-1} + p^{n-2} q + \dots + q^{n-1}),$$

čo znamená, že rozdiel $p^n - q^n$ je deliteľný číslom $p - q$. V našom prípade stačí teda položiť $p = 10^2$, $q = 2^2$.

C - II - 3a

Nech a, b, c sú nezáporné reálne čísla také, že platí: $a + b \geqq c$. Potom platí

$$(1) \qquad \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geqq \frac{c}{1+c}.$$

Dokážte.

Vyšetrite ďalej, kedy platí vo vzťahu (1) rovnosť a rozhodnite, či tvrdenie platí aj v prípade, keď nepredpokladáme nezápornosť čísel a, b, c, ale iba to, že sú rôzne od čísla -1.

Riešenie. Vzhľadom na to, že čísla $a + 1$, $b + 1$, $c + 1$ sú kladné, platí (1) práve vtedy, keď platí nerovnosť, ktorú z nej dostaneme, ak obe strany vynásobíme súčinom $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$, čiže

$$a + abc + ab + ac + b + abc + ab + bc \geqq$$

$$\geqq c + abc + ac + bc,$$

tj.

$$(2) \qquad a + b + 2ab + abc \geqq c.$$

Nerovnosť (2) však zrejme platí, pretože podľa predpokladu je $a + b \geqq c$ a $2ab + abc \geqq 0$. Platí preto aj nerovnosť (1), ktorej správnosť sme mali dokázať.

Rovnosť vo vzťahu (1) nastane zrejme práve vtedy, keď nastane rovnosť vo vzťahu (2). To však nastáva práve vtedy, keď súčasne platí

$$(3) \qquad a + b = c,$$

$$(4) \qquad 2ab + abc = 0.$$

Vzhľadom na to, že $c \geqq 0$, platí (4) práve vtedy, keď buď $a = 0$, alebo $b = 0$. Pre $a = 0$ však z (3) máme $b = c$ a pre $b = 0$ je z (3) zasa $a = c$. Rovnosť vo vzťahu (1) nastáva teda práve vtedy, keď buď $a = 0$, $b = c$, alebo $b = 0$, $a = c$.

Ak o číslach a, b, c nepredpokladáme nezápornosť, tak jednak vo všeobecnosti z (1) nevyplýva (2), ale ani pre $a > -1$, $b > -1$, $c > -1$, keď (2) z (1) dostaneme vyššie uvedeným postupom, neplatí (1) a zrejme ani (2), ako ukazuje tento príklad: Ak $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 0$, je $a + b \geqq c$, ale

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \frac{0,5}{1+0,5} + \frac{-0,5}{1-0,5} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} <$$

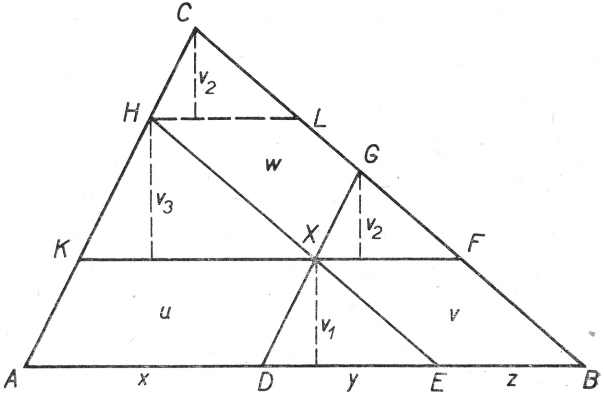
$$< 0 = \frac{c}{1+c}.$$

C - II - 3b

Ak vedieme vnútorným bodom X trojuholníka ABC rovnobežky s jeho stranami, rozdelíme tým trojuholník na tri trojuholníky a tri rovnobežníky. Obsahy týchto rovnobežníkov označíme u, v, w. Vyjadrite obsah P trojuholníka ABC pomocou čísel u, v, w.

Riešenie. Označenie priesečníkov priamok prechádzajúcich bodom X so stranami trojuholníka ABC zvolíme tak ako na obr. 19. Obsahy rovnobežníkov $ADXK$, $BEXF$, $CHXG$ v uvedenom poradí označíme u, v, w. Nech ďalej $|AD| = x$, $|DE| = y$, $|EB| = z$. Výšky trojuholníkov DEX, XFG, KXH na strany DE, XF, KX v uvedenom poradí označíme v_1, v_2, v_3. Pretože tieto trojuholníky majú všetky uhly zhodné, sú navzájom podobné, a tak platí:

$$v_1 : y = v_2 : z = v_3 : x \quad \text{čiže } v_1 = ky,\ v_2 = kz,\ v_3 = kx,$$



Obr. 19

kde $k > 0$ je reálna konštanta. Veďme bodom H rovnobežku so stranou AB daného trojuholníka a jej priesečník so stranou BC označme L. Trojuholník CHL je zrejme zhodný s trojuholníkom GXF. Preto jeho výška na stranu HL je rovná v_2. Z uvedeného je zrejmé, že výšku trojuholníka ABC na stranu AB dostaneme ako súčet $v_1 + v_2 + v_3$ a pre obsah P tohto trojuholníka platí:

$$P = \frac{1}{2}(x + y + z)(v_1 + v_2 + v_3) = \frac{k}{2}(x + y + z)^2 ,$$

z čoho vyplýva, že

(1) $$P = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz).$$

Keďže obsah rovnobežníka $HXFL$ je zrejme zhodný s obsahom rovnobežníka $CHXG$, pre čísla u, v, w platí:

(2) $$u = xv_1 = kxy, v = zv_1 = kyz, w = zv_3 = kxz,$$

z čoho vyplýva

(3) $$uv = k^2y^2xz = ky^2w, uw = k^2x^2yz = kx^2v,$$

$$vw = k^2z^2xy = kz^2u.$$

Z (2) dostaneme

(4) $$xy = \frac{u}{k}, \quad yz = \frac{v}{k}, \quad xz = \frac{w}{k}$$

a z (3) zasa

$$(5) \qquad x^2 = \frac{uw}{kv}, \quad y^2 = \frac{uv}{kw}, \quad z^2 = \frac{vw}{ku}.$$

Dosadením zo (4) a (5) do (1) dostaneme konečne

$$P = \frac{k}{2}\left(\frac{uw}{kv} + \frac{uv}{kw} + \frac{vw}{ku} + \frac{2u}{k} + \frac{2v}{k} + \frac{2w}{k}\right) =$$

$$= \frac{u^2w^2 + u^2v^2 + v^2w^2 + 2u^2vw + 2uv^2w + 2uvw^2}{2uvw} =$$

$$= \frac{(uv + uw + vw)^2}{2uvw}.$$

Kategorie B

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

B - I - 1

Na přímce leží čtyři různé body A_1, A_2, A_3, A_4 a na přímce s ní rovnoběžné pět různých bodů B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Každou úsečku A_iB_k obarvěte jednou z barev červená, modrá tak, aby nevznikl žádný jednobarevný čtyřúhelník (tj. uzavřená lomená čára složená ze čtyř úseček stejné barvy).

Řešení. Každému obarvení úseček A_iB_k můžeme přiřadit tabulku:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	C	C	.	.	.
A_2	M	C	.	.	.
A_3	.	.	.	.	.
A_4	.	.	.	.	.

V tabulce uvedeme písmeno C nebo M podle toho, je-li obarvení odpovídající úsečky červené nebo modré. Podmínka o čtyřúhelníku znamená, že v tabulce se nesmějí vyskytovat stejná písmena v rohových polích obdélníku.

Řešení lze najít zkoušením. To si však usnadníme ověřením tvrzení: V žádném sloupci tabulky řešení nesmějí být tři stejná písmena:

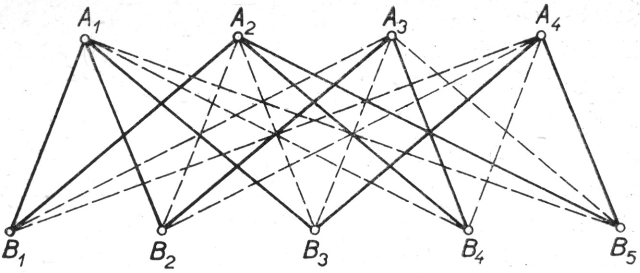
	C		C	M	
např.	C	lze doplňovat v řádcích buď na	C	M	a dále
	C		C	M	

	C	C	M	M	
nelze, nebo	C	M	C	M	a dále nelze.
	C	M	M	C	

V každém sloupci tabulky řešení jsou tedy dvě písmena C a dvě písmena M, a to pokaždé jinak. Takových různých sloupců je šest:

C	C	C	M	M	M
C	M	M	C	C	M
M	C	M	C	M	C
M	M	C	M	C	C

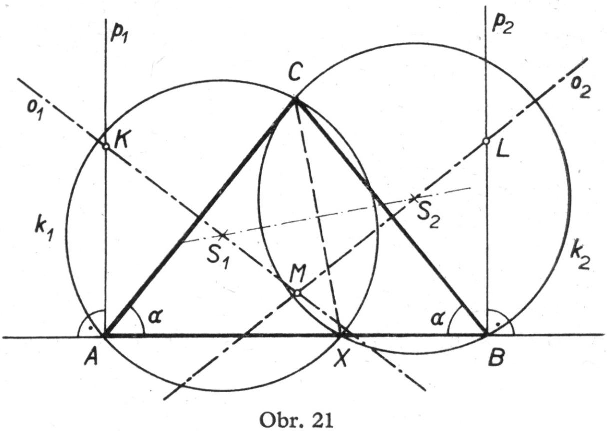
a (každé!) řešení dostaneme výběrem pěti z nich v některém pořadí. Např. prvním pěti sloupcům odpovídá obr. 20 (plná čára značí modrou, čárkovaná červenou barvu).



Obr. 20

B - I - 2

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Zvolíme libovolný bod X přímky AB různý od bodů A, B. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AXC a BXC mají stejně velké poloměry, a zjistěte, co je množinou středů všech těchto kružnic, probíhá-li bod X přímku AB.



Obr. 21

Řešení (obr. 21). Nechť $k_1(S_1, r_1)$ je kružnice opsaná trojúhelníku AXC, $k_2(S_2, r_2)$ kružnice opsaná trojúhelníku BXC. Obě kružnice mají společnou tětivu CX. Rozlišme tyto případy:

a) X leží uvnitř úsečky AB. Pak obvodový úhel CAX kružnice k_1 nad tětivou CX je shodný s obvodovým úhlem CBX kružnice k_2, takže obě kružnice mají nad společnou tětivou CX shodné oblouky, a jsou tedy shodné.

b) X neleží uvnitř úsečky AB; nechť např. leží uvnitř polopřímky opačné k polopřímce BA (druhý případ je obdobný). Pak obvodové úhly nad menším z oblouků CX kružnice k_1 mají velikost $\alpha = |\sphericalangle XAC|$, obvodové úhly nad menším z oblouků CX kružnice k_2 velikost $\pi - |\sphericalangle XBC| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$. Kružnice k_1 a k_2 jsou proto opět shodné.

Tím jsme dokázali rovnost poloměrů, $r_1 = r_2$, obou kružnic. Abychom našli množinu $\mathbf{U}$ všech středů těchto kružnic, označme (obr. 21) o_1 osu úsečky AC, o_2 osu úsečky BC, p_1, p_2 kolmice v bodech A, B na přímku AB. Dále nechť $o_1 \cap p_1 = \{K\}$, $o_2 \cap p_2 = \{L\}$, $o_1 \cap o_2 = \{M\}$.

Dokážeme, že množina $\mathbf{U}$ je rovna množině $\mathbf{V} = (o_1 \cup o_2) - \{K, L, M\}$.

Každý z bodů S_1 je průsečíkem přímky o_1 s osou úsečky AX; ta nemůže procházet bodem A, a tedy ani bodem K, neboť $X \neq A$, a rovněž nemůže procházet středem M kružnice opsané $\triangle ABC$, neboť $X \neq B$. Platí tedy $S_1 \in o_1 - \{K, M\}$. Obdobně $S_2 \in o_2 - \{L, M\}$, takže $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$.

Je-li obráceně S libovolný bod množiny $\mathbf{V}$, pak nastane právě jedna z možností:

$$\text{(I)} \qquad S \in o_1 - \{K, M\},$$

(II) $$S \in o_2 - \{L, M\}.$$

V případě (I) kružnice $k(S, r)$ pro $r = |SA| = |SC|$ protne přímku AB v bodě $X \neq A$, neboť $S \neq K$. Podmínka $S \neq M$ zaručuje, že $X \neq B$, takže S je střed kružnice opsané některému z trojúhelníků AXC. Obdobně v případě (II) zjistíme, že S je středem kružnice opsané některému z trojúhelníků BXC. Proto $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

B - I - 3

Nechť α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, d velikost jeho nejdelší strany a P jeho obsah. Pak platí

$$d^2 < 2P\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right);$$

dokažte.

Řešení. Nechť a, b, c jsou velikosti stran proti úhlům α, β, γ. Bez omezení obecnosti můžeme předpokládat, že $a \leqq b \leqq c$, takže $d = c$.

Podle známého vzorce je

$$P = \tfrac{1}{2} bc \sin\alpha,$$

tj.

$$\frac{2P}{\sin\alpha} = bc;$$

obdobně

$$\frac{2P}{\sin\beta} = ac.$$

Proto

$$2P\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right) > 2P\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right) =$$

$$= c(b+a) > c^2 = d^2.$$

Poznámka. Dokázali jsme při tom silnější tvrzení: Je-li c nejdelší strana $\triangle\ ABC$ a P jeho obsah, pak

$$c^2 < 2P\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right).$$

B - I - 4

Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc

$$(1)\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 6yz + 6x + 6y + 14z +$$
$$+ 5 = 0,$$

$$(2)\quad z^2 + 4xy - 2xz - 2yz + x + 7y - 4z + 1 = 0,$$

$$(3)\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + 8x + 2y + 5z + 6 = 0.$$

Řešení. (I) Sečteme (1), (2) a (3) a dělíme třemi; dostaneme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 5x + 5y + 5z + 4 = 0$$

neboli

$$(x + y + z)^2 + 5(x + y + z) + 4 = 0,$$

tj.

$$(x + y + z + 1)(x + y + z + 4) = 0.$$

Jsou tedy dvě možnosti:

a) $x + y + z = -1$,
b) $x + y + z = -4$.

(II) Odečteme (2) a (3) od dvojnásobku (1). Dostaneme

$$12xz + 12yz + 3x + 3y + 27z + 3 = 0,$$

tj.

$$4z(x + y) + x + y + 9z + 1 = 0.$$

V případě a) je $x + y = -(z + 1)$, takže máme

$$-4z(z + 1) - (z + 1) + 9z + 1 = 0$$

neboli

$$-4z^2 + 4z = 0,$$

tedy

$$z(z - 1) = 0.$$

Proto

α) $z = 0$, $\quad x + y = -1$,

β) $z = 1$, $\quad x + y = -2$.

V případě b) je $x + y = -(z + 4)$, tj.

$$-4z(z + 4) - (z + 4) + 9z + 1 = 0,$$

po úpravě

$$4z^2 + 8z + 3 = 0$$

neboli

$$(2z + 3)(2z + 1) = 0.$$

Proto

$$\gamma) \quad z = -\frac{3}{2}, \quad x + y = -\frac{5}{2},$$

$$\delta) \quad z = -\frac{1}{2}, \quad x + y = -\frac{7}{2}.$$

(III) Dosazením za z a x z α), β), γ), δ) do rovnice (2) dostaneme:

α) $$-4(1 + y)y - (1 + y) + 7y + 1 = 0,$$

odkud

$$-4y^2 + 2y = 0,$$

tj.

$y = 0$, a pak $x = -1$, $z = 0$ ... $(-1, 0, 0)$, anebo

$$y = \frac{1}{2}, \text{ a pak } x = -\frac{3}{2}, z = 0 \ldots \qquad \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right);$$

$$\beta) \quad 1 + 4(-y-2)y - 2(-y-2) - 2y - y - z +$$

$$+ 7y - 4 + 1 = 0,$$

odkud

$$-4y^2 - 2y = 0,$$

tj.

$$y = 0, \text{ a pak } x = -2, z = 1 \ldots \qquad (-2, 0, 1),$$

anebo

$$y = -\frac{1}{2}, \text{ a pak } x = -\frac{3}{2}, z = 1 \ldots \quad \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

$$\gamma) \frac{9}{4} + 4\left(-\frac{5}{2} - y\right)y + 3\left(-\frac{5}{2} - y\right) + 3y - \frac{5}{2} - y +$$

$$+ 7y + 6 + 1 = 0,$$

odkud

$$4y^2 + 4y + \frac{3}{4} = 0,$$

tj.

$$y = -\frac{1}{4}, \text{ a pak } x = -\frac{9}{4}, z = -\frac{3}{2} \ldots$$

$$\left(-\frac{9}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\right),$$

anebo

$$y = -\frac{3}{4}, \text{ a pak } x = -\frac{7}{4}, z = -\frac{3}{2} \ldots$$

$$\left(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right).$$

δ) $\frac{1}{4} + 4\left(-\frac{7}{2} - y\right) y - \frac{7}{2} - y + y - \frac{7}{2} - y + 7y +$

$$+ 2 + 1 = 0,$$

odkud

$$4y^2 + 8y + \frac{15}{4} = 0,$$

tj.

$$y = -\frac{3}{4}, \text{ a pak } x = -\frac{11}{4}, z = -\frac{1}{2} \ldots$$

$$\left(-\frac{11}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right),$$

anebo

$$y = -\frac{5}{4}, \text{ a pak } x = -\frac{9}{4}, z = -\frac{1}{2} \dots$$

$$\left(-\frac{9}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right).$$

Zkouškou se přesvědčíme, že všech osm trojic skutečně vyhovuje soustavě.

B - I - 5

Označme $M(n)$ počet všech uspořádaných n-tic nul a jedniček, v kterých se nevyskytují tři nuly vedle sebe. a) Určete $M(13)$. b) Rozhodněte, zda je $M(1000)$ sudé číslo.

Řešení. a) Výpisem všech možností zjistíme

(1) $M(1) = 2, \quad M(2) = 4, \quad M(3) = 7, \quad M(4) = 13.$

Je-li $n \geqq 5$, pak všechny n-tice můžeme získat z $(n-1)$-tic, připisujeme-li za jejich poslední prvek nulu nebo jedničku. Jedničku lze připsat ke každé z $(n-1)$-tic, kdežto v případě nuly musíme vyloučit situace, kdy je $(n-1)$-tice zakončena trojčíslím 1, 0, 0. Těch je $M(n-4)$, takže celkem platí

(2) $$M(n) = 2.M(n-1) - M(n-4).$$

Postupným dosazováním do tohoto rekurentního vzorce dostaneme

$$M(13) = 3\,136.$$

b) Z rekurentního vztahu (2) je zřejmé, že $M(n)$ je pro $n > 4$ liché, právě když $M(n - 4)$ je liché. Vzhledem k (1) je tedy $M(n)$ liché, právě když $n = 3 + 4r$ nebo $n = 4(r + 1)$, kde r je celé nezáporné číslo. $M(1000)$ proto nemůže být sudé číslo, neboť $1000 = 4 . 250$.

Jiný způsob řešení:

a) Jak již bylo uvedeno, platí $M(1) = 2$, $M(2) = 4$, $M(3) = 7$, $M(4) = 13$. Nechť $n \geqq 4$. Množinu $\mathbf{A}_n$ všech uspořádaných n-tic splňujících danou podmínku rozdělíme na tři podmnožiny

$$\mathbf{A}_{n1} = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}_n; x_1 = 1\},$$

$$\mathbf{A}_{n2} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}_n; x_1 = 0 \wedge x_2 = 1\},$$

$$\mathbf{A}_{n3} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}_n; x_1 = x_2 = 0 \wedge x_3 = 1\}.$$

Tyto množiny jsou zřejmě disjunktní a jejich sjednocení je $\mathbf{A}_n$.

Přitom $\mathbf{A}_{n1}$ má $M(n - 1)$ prvků, $\mathbf{A}_{n2}$ má $M(n - 2)$ prvků a $\mathbf{A}_{n3}$ má $M(n - 3)$ prvků. Je tedy pro každé $n \geqq 4$

$$M(n) = M(n - 1) + M(n - 2) + M(n - 3).$$

Odtud již výpočtem určíme $M(13) = 3136$.

b) Matematickou indukcí dokážeme tvrzení:

$M(4k + 1)$, $M(4k + 2)$ jsou sudá čísla, $M(4k + 3)$, $M(4k + 4)$ jsou lichá, přičemž $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Pro $n = 1, 2, 3, 4$ tvrzení platí podle (1). Předpokládejme, že tvrzení platí i pro každé $m = 1, 2, \ldots, n - 1$. Pak

$$M(n) = M(n-1) + M(n-2) + M(n-3) =$$
$$= 2M(n-2) + 2M(n-3) + M(n-4),$$

a tedy $M(n)$ má při dělení dvěma stejný zbytek jako $M(n-4)$. Pro $n-4$ tvrzení platí, platí tedy i pro n. Číslo $M(1000)$ je proto liché.

B - I - 6

Pro reálná čísla x, y platí $x \geqq y > 0$. Dokažte, že pak platí

$$\frac{(x-y)^2}{8x} \leqq \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leqq \frac{(x-y)^2}{8y}.$$

Řešení. Nejprve upravíme prostřední člen nerovností tak, aby měl v čitateli výraz $(x-y)^2$:

$$(1) \qquad \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} = \frac{(x-y)^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}.$$

Protože $x \geqq y > 0$, je též $\sqrt{x} \geqq \sqrt{y} > 0$. Nahradíme-li ve jmenovateli zlomku (1) $\sqrt{x}$ číslem $\sqrt{y}$, zlomek (1) se zvětší nebo nanejvýš zůstane stejný. Proto

$$\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} \leqq \frac{(x-y)^2}{2(2\sqrt{y})^2} = \frac{(x-y)^2}{8y}.$$

Nahradíme-li ve jmenovateli zlomku (1) $\sqrt{y}$ číslem $\sqrt{x}$, zlomek (1) se zmenší nebo nanejvýš zůstane stejný a platí

$$\frac{x + y - 2\sqrt{xy}}{2} \geqq \frac{(x - y)^2}{2(2\sqrt{x})^2} = \frac{(x - y)^2}{8x}.$$

ÚLOHY KLAUZURNÍ ČÁSTI I. KOLA

B - S - 1

Zjistěte, pro jaké trojúhelníky leží střed kružnice trojúhelníku opsané

a) uvnitř trojúhelníku,
b) na obvodě trojúhelníku,
c) mimo trojúhelník.

Řešení. Bez omezení obecnosti můžeme předpokládat, že o velikostech α, β, γ úhlů trojúhelníku ABC platí $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$. Označme S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Leží-li S uvnitř $\triangle ABC$, je velikost středového úhlu BSC menší než $180°$, takže $\alpha < 90°$ a $\triangle ABC$ je ostroúhlý. Je-li obráceně $\triangle ABC$ ostroúhlý, je $\gamma \leqq \beta \leqq \alpha < 90°$ a každý z bodů A, B, C leží v téže polorovině určené přímkami BC, AC, AB jako bod S (odpovídající středový úhel je totiž menší než $180°$).

Bod S dále zřejmě je na obvodě $\triangle ABC$, právě když trojúhelník je pravoúhlý. Z předchozích dvou případů už plyne, že bod S leží mimo trojúhelník, právě když trojúhelník je tupoúhlý.

B - S - 2

Dokažte, že pro reálná čísla a, b, c platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 .$$

Kdy platí znaménko rovnosti?

Řešení. Pro libovolná reálná a, b, c platí

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geqq 0, \text{ tedy}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + c^2 - 2bc \geqq 0,$$

neboli

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geqq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Proto

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$$

a rovnost nastane, právě když $a = b = c$.

B - S - 3a

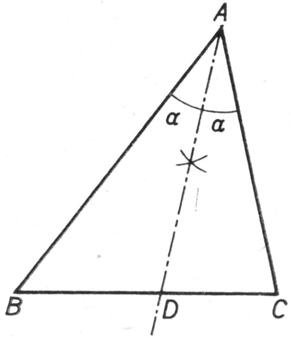
V trojúhelníku ABC protíná osa úhlu BAC protější stranu BC v bodě D. Dokažte, že

$$\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|} = \frac{2}{|AD|} \cos \alpha, \text{ kde } 2\alpha = |\sphericalangle BAC|.$$

Řešení. Pro obsahy P, P_1, P_2 trojúhelníků ABC, ABD, ADC z obr. 22 platí $P = P_1 + P_2$, tedy

$$\tfrac{1}{2}\,|AB|\,.\,|AC|\sin 2\alpha =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,|AB|\,.\,|AD|\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\,|AD|\,.\,|AC|\sin\alpha.$$



Obr. 22

Vynásobíme-li tuto rovnost číslem $\dfrac{2}{|AB|\,.\,|AC|\,.\,|AD|\sin\alpha}$, dostaneme dokazovaný vztah.

B - S - 3b

Koľko je prirodzených čísiel n s týmito dvomi vlastnosťami:

a) $10^3 \leqq n < 10^4$, tj. n je štvorciferné,

b) v desiatkovom zápise čísla n nie sú vedľa sebe dve párne číslice.

Řešení. Pro $k \geqq 1$ označme $M(k)$ počet k-ciferných čísel, která splňují i podmínku b). Každé $(k+1)$-ciferné číslo splňující b) dostaneme právě jedním z těchto způsobů:

1. připojením liché cifry k některému k-cifernému číslu splňujícímu vlastnost b);
2. připojením dvojčíslí, jehož první cifra je lichá a druhá sudá, k některému $(k-1)$-cifernému číslu splňujícímu vlastnost b).

Proto je

$$M(k+1) = 5M(k) + 25M(k-1).$$

Protože $M(1) = 9$, $M(2) = 5M(1) + 25 = 70$, $M(3) = 5M(2) + 25M(1) = 5.70 + 25.9 = 575$, je $M(4) = 5M(3) + 25M(2) = 5.575 + 25.70 = 4\,625$.

Jiné řešení. Vyznačme si schematicky, jak mohou vypadat čtyřciferná čísla splňující podmínku b). L bude značit lichou cifru, S sudou cifru. U každého tvaru hned pišme počet čísel toho tvaru; vždy lze užít pět lichých a pět sudých cifer, s výjimkou sudé cifry na prvním místě, kdy lze užít jen čtyři cifry (nikoli nulu).

Tvar čísla	počet čísel
S L S L	4.5^3
S L L S	4.5^3
S L L L	4.5^3
L S L S	5^4
L L L L	5^4
L L S L	5^4
L L L S	5^4
L L L L	5^4

Čtyřciferných čísel vyhovujících podmínce b) je tedy $3.4.5^3 + 5.5^4 = 125.37 = 4\,625$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

B - II - 1

Dané sú kladné čísla a, b, c také, že $a^3 + b^3 = c^3$. Dokážte, že $a^2 + b^2 > c^2$.

Řešení. Dokazovaná nerovnost zřejmě platí, právě když platí nerovnost $(a^2 + b^2)^3 > c^6$ neboli když platí

$$(a^2 + b^2)^3 > (a^3 + b^3)^2.$$

S touto nerovností je však ekvivalentní nerovnost

$$a^2b^2\,(3a^2 + 3b^2 - 2ab) > 0.$$

Ta je však skutečně splněna, protože $a^2b^2 > 0$ a

$$3a^2 + 3b^2 - 2ab = (a - b)^2 + 2a^2 + 2b^2 > 0.$$

Jiné řešení. Podle předpokladu je $\left(\frac{a}{c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 = 1$.

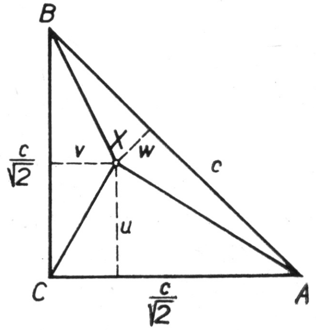
Proto jsou obě čísla $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ kladná a menší než jedna. To však znamená, že $\left(\frac{a}{c}\right)^2 > \left(\frac{a}{c}\right)^3$, $\left(\frac{b}{c}\right)^2 > \left(\frac{b}{c}\right)^3$, a tedy

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 > \left(\frac{a}{c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 = 1,$$

odkud $a^2 + b^2 > c^2$.

B - II - 2

Určete množinu všech bodů uvnitř nebo na hranici pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC o velikosti přepony c, jejichž součet vzdáleností od jednotlivých stran trojúhelníku je roven danému kladnému číslu p. Proveďte diskusi vzhledem k parametru p.



Obr. 23

Řešení (obr. 23). Označme u, v, w vzdálenosti bodu X trojúhelníku ABC od jeho stran AC, BC, AB. Protože se obsah trojúhelníku ABC rovná součtu obsahů trojúhelníků ACX, BCX a ABX (a není-li X vnitřní bod trojúhelníku, je situace obdobná), platí

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} (u + v) + \frac{1}{2} cw = \frac{c^2}{4},$$

tj.

$$u + v + w \sqrt{2} = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Platí tedy $u + v + w = p$, právě když

$$w (\sqrt{2} - 1) = \frac{c}{\sqrt{2}} - p.$$

Protože pro body trojúhelníku je $0 \leqq w \leqq \frac{c}{2}$, má úloha neprázdné řešení pro ta p, pro která

$$0 \leqq \frac{\frac{c}{\sqrt{2}} - p}{\sqrt{2} - 1} \leqq \frac{c}{2},$$

tj.

$$\frac{c}{2} \leqq p \leqq \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Řešením je průnik trojúhelníku s přímkou rovnoběžnou s přeponou, jejíž vzdálenost od přepony se rovná $\frac{c - p\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$.

B - II - 3a

Je dán pravidelný $2n$-boký jehlan s hlavním vrcholem V. Nechť nějaká rovina protíná boční hrany jehlanu v bodech $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ a výšku jehlanu v bodě B. Vyjádřete součet

$$\frac{1}{|VA_1|} + \frac{1}{|VA_2|} + \ldots + \frac{1}{|VA_{2n}|}$$

pomocí $|VB|$ a úhlu φ, který svírá výška jehlanu s každou boční hranou.

Řešení. Pro $i = 1, \ldots, n$ je VB osa úhlu v trojúhelníku $A_i V A_{i+n}$ a přitom $|\sphericalangle BVA_i| = |\sphericalangle BVA_{i+n}| = \varphi$. Podle výsledku úlohy B-S-3a je

$$\frac{1}{|VA_i|} + \frac{1}{|VA_{i+n}|} = \frac{2}{|VB|} \cos \varphi .$$

Proto je hledaný součet roven $\dfrac{2n \cos \varphi}{|VB|}$.

B - II - 3b

Fibonacciove čísla F_n (n prirodzené číslo) sú definované takto:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Ukážte, že práve jedno z čísel $F_{1981}, F_{1982}, \ldots, F_{1992}$ je deliteľné číslom 6.

Řešení. V posloupnosti Fibonacciových čísel se střídají vždy dvě lichá čísla a jedno sudé, je tedy právě každé třetí číslo sudé. Vyšetřujeme-li obdobně zbytky při dělení čísel F_n třemi, dostaneme tyto zbytky: 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0 atd. Proto je právě každé čtvrté Fibonacciovo číslo dělitelné třemi, a tedy právě každé dvanácté šesti. Z dvanácti daných za sebou jdoucích čísel je proto právě jedno dělitelné šesti.

Kategorie A

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

A - I - 1

Najděte všechny uspořádané dvojice x, y kladných reálných čísel, pro které platí

$$\text{(1)} \qquad \frac{\sqrt{x^n y^n} - 1}{\sqrt{xy} - 1} = \sqrt{\frac{x^n - 1}{x - 1} \cdot \frac{y^n - 1}{y - 1}},$$

kde n je přirozené číslo.

Riešenie. Zo zadania úlohy vyplýva, že $x \neq 1$, $y \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, $xy \neq 1$.

Prípad $n = 1$ je jednoduchý. Vtedy každá dvojica kladných reálnych čísel x, y, pre ktorú je $x \neq 1$, $y \neq 1$, $xy \neq 1$, je riešením rovnice (1).

Pre $n > 1$ rovnicu upravíme. V rovnici vystupujú súčty geometrických radov:

$$\frac{\sqrt{x^n y^n} - 1}{\sqrt{xy} - 1} = 1 + \sqrt{xy} + (\sqrt{xy})^2 + \ldots + (\sqrt{xy})^{n-1},$$

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + \ldots + x^{n-1},$$

$$\frac{y^n - 1}{y - 1} = 1 + y + \ldots + y^{n-1}.$$

Teda rovnicu (1) môžeme ekvivalentne upraviť takto:

$$1 + \sqrt{xy} + \ldots + (\sqrt{xy})^{n-1} =$$

$$= \sqrt{(1 + x + \ldots + x^{n-1}) \cdot (1 + y + \ldots + y^{n-1})}.$$

Rovnicu môžeme umocniť na druhú a zapísať pomocou sumačných znamienok:

$$(2) \qquad (\sum_{i=0}^{n-1} (\sqrt{xy})^i)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} x^i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y^i.$$

Známa Cauchyho nerovnosť (pozri napr. 39. zväzok ŠMM, A. Kufner: *Nerovnosti a odhady*)

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{m} a_i^2 \cdot \sum_{i=0}^{m} b_i^2 \geqq (\sum_{i=0}^{m} a_i b_i)^2$$

platí pre ľubovoľné reálne čísla $a_0, \ldots, a_m$, $b_0, \ldots, b_m$. Naviac, rovnosť platí vtedy a len vtedy, ak existuje reálne číslo t také, že $a_0 = tb_0$, $a_1 = tb_1, \ldots, a_m = tb_m$, alebo ak $b_0 = \ldots = b_m = 0$.

Rovnosť (2) je rovnosť v Cauchyho nerovnosti (3) s $m = n - 1$, $a_i = (\sqrt{x})^i$, $b_i = (\sqrt{y})^i$, $i = 0, \ldots, n - 1$. Teda (2) platí vtedy a len vtedy, ak existuje také reálne číslo t, že $(\sqrt{x})^i = t(\sqrt{y})^i$, $i = 0, \ldots, n - 1$. Pre $i = 0$ z tejto podmienky vyplýva $t = 1$. Teda, ak x, y sú riešením rovnice (1), tak $x = y$.

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že každá dvojica x, y kladných reálnych čísel, pre ktorú je $x = y$, $x \neq 1$, je riešením rovnice (1).

A - I - 2

Pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo m takové, že na kružnici se středem [0, 0] a poloměrem m leží alespoň n mřížových bodů. Dokažte. (Mřížový bod je bod s oběma souřadnicemi celočíselnými.)

Riešenie. Ak mrežový bod $[k, l]$ leží na kružnici so stredom [0, 0] a polomerom m, tak trojica celých čísel k, l, m je riešením rovnice

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = z^2.$$

Naopak ak trojica celých čísel k, l, m je riešením rovnice (1), tak mrežový bod $[k, l]$ leží na uvažovanej kružnici.

Teda pôvodná úloha je ekvivalentá takejto úlohe: Máme nájsť prirodzené číslo m také, že rovnica (1) má aspoň n rôznych riešení tvaru

$$(2) \qquad k_1, l_1, m; \quad k_2, l_2, m; \ldots; k_n, l_n, m.$$

Zdá sa, že je ľahšie nájsť n rôznych nenulových celočíselných riešení

$$p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2; \ldots; p_n, q_n, r_n$$

rovnice (1) (bez podmienky $r_1 = r_2 = \ldots = r_n$), ako hľadať riešenia tvaru (2). Všimnime si však toto:

Ak p_1, q_1, r_1 a p_2, q_2, r_2 sú nenulové celočíselné riešenia rovnice (1), potom trojice p_1r_2, q_1r_2, r_1r_2 a p_2r_1, q_2r_1, r_1r_2 sú riešenia rovnice (1) tvaru (2) s $m = r_1r_2$. Tieto trojice však nemusia byť rôzne. V tejto súvislosti zavedieme nový pojem. Dve nenulové celočíselné riešenia p_1, q_1, r_1 a p_2, q_2, r_2 rovnice (1) nazveme súdeliteľné, ak existuje také reálne číslo t, že platí $p_1 = tp_2$, $q_1 = tq_2$, $r_1 = tr_2$.

Ak p_1, q_1, r_1 a p_2, q_2, r_2 sú nenulové nesúdeliteľné celočíselné riešenia rovnice (1), potom trojice p_1r_2, q_1r_2, r_1r_2 a p_2r_1, q_2r_1, r_1r_2 sú dve rôzne riešenia rovnice (1).

Vo všeobecnosti, ak máme n po dvojiciach nesúdeliteľných nenulových celočíselných riešení p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2; ...; p_n, q_n, r_n rovnice (1), tak stačí označiť

$$m = r_1 \ldots r_n,$$

$$k_i = \frac{p_i \cdot m}{r_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$l_i = \frac{q_i \cdot m}{r_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

a dostaneme n rôznych riešení rovnice (1) tvaru (2).

Teda zostáva nájsť n navzájom nesúdeliteľných nenulových celočíselných riešení rovnice (1).

Z jednoduchej identity

$$(u^2 + v^2)^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2$$

vyplýva, že pre ľubovoľné celé čísla u, v trojica $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$ je celočíselné riešenie rovnice (1). Ak zvolíme postupne $u = 2 + 1, 2 + 2, \ldots, 2 + n$, $v = 1$, tak trojice $p_i = (i + 2)^2 - 1$, $q_i = 2(i + 2)$, $r_i = (i + 2)^2 + 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú nenulové celočíselné riešenia rovnice (1).

Ukážeme, že uvedené riešenia sú navzájom nesúdeliteľné. Ukážeme to sporom. Predpokladajme, že existujú také $i < j \leqq n$ a reálne číslo t, že platí

$$p_i = tp_j,\ q_i = tq_j,\ r_i = tr_j. \tag{3}$$

Z druhej rovnosti (3) vyplýva $t = \dfrac{i + 2}{j + 2}$. Dosadením do prvej rovnosti v (3) dostávame

$$((i + 2)^2 - 1)(j + 2) = (i + 2)((j + 2)^2 - 1).$$

Po jednoduchej úprave máme

$$(j + 2)((i + 2)^2 - 1 - (i + 2)(j + 2)) = -(i + 2).$$

Teda číslo $i + 2$ je deliteľné číslom $j + 2$. To však nie je možné, lebo $i + 2 < j + 2$.

Výsledok môžeme zhrnúť takto: Na kružnici so stredom $[0, 0]$ a polomerom m, kde

$$m = ((1 + 2)^2 + 1) \,.\, ((2 + 2)^2 + 1) \,.\, \ldots \,.\, ((n + 2)^2 + 1)$$

leží aspoň n mrežových bodov o súradniciach

$$\frac{((i+2)^2-1) \cdot m}{(i+2)^2+1}, \quad \frac{2(i+2) \cdot m}{(i+2)^2+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Poznámky. 1. Všetky uvedené body ležia v prvom kvadrante. Aj body otočené o 90°, 180° a 270° sú mrežové body ležiace na uvažovanej kružnici. Podobne body $[0, m]$, $[m, 0]$, $[0, -m]$, $[-m, 0]$ ležia na uvažovanej kružnici. Teda je tam aspoň $4n + 4$ mrežových bodov.

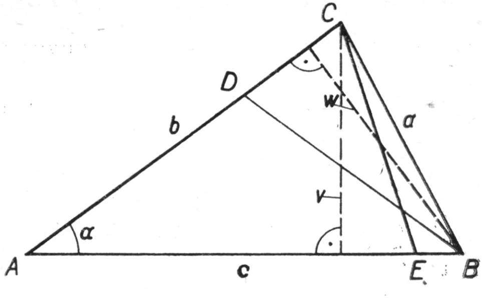
2. Dá sa ukázať, že trojice $u^2 - v^2$, $2uv$, $\pm (u^2 + v^2)$ a $2uv$, $u^2 - v^2$, $\pm (u^2 + v^2)$, kde u, v sú celé čísla, sú všetky celočíselné riešenia rovnice (1) - pozri napr. úlohu A-P-1 26. ročníka MO.

A - I - 3

Do každého trojúhelníku lze umístit rovnoramenný trojúhelník, jehož obsah je větší než $\frac{\sqrt{2}}{2}$-násobek obsahu původního trojúhelníku. Dokažte.

Riešenie. Uvažujme trojuholník ABC. Označíme písmenami a, b, c dĺžky strán oproti vrcholom A, B, C a α veľkosť uhla pri vrchole A. Nech P je obsah trojuholníka ABC. Máme nájsť rovnoramenný trojuholník s obsahom P' umiestnený v trojuholníku ABC a taký, že $\frac{P'}{P} > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ak niektoré dve strany trojuholníka ABC sú rovnako veľké, tak ABC je hľadaný rovnoramenný trojuholník a $P' = P$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme teda predpokladať, že platí $a < b < c$.



Obr. 24

Nech D je bod na strane AC taký, že ABD je rovnoramenný. Nech E je bod na strane AB taký, že $AE = b$ (pozri obr. 24). Nech P_1, P_2 sú obsahy trojuholníkov ABD, AEC, v je výška trojuholníka ABC na stranu AB a w je výška trojuholníka ABC na stranu AC. Potom platí

$$P = \tfrac{1}{2}\, cv = \tfrac{1}{2}\, bw,$$

$$P_1 = \tfrac{1}{2}\, |AD| \, . \, w,$$

$$P_2 = \tfrac{1}{2}\, |AE| \, . \, v = \tfrac{1}{2}\, bv.$$

Ak $\dfrac{b}{c} > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, tak

$$\frac{P_2}{P} = \frac{b}{c} > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a teda AEC je hľadaný trojuholník.

Ukážeme, že v prípade $\frac{b}{c} \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ je hľadaným trojuholníkom trojuholník ABD. Z obrázku 24 vidieť, že platí

$$\cos\alpha = \frac{\frac{c}{2}}{|AD|},$$

a teda

$$P_1 = \frac{cw}{4\cos\alpha}.$$

Predpokladajme, že BC je najkratšia strana, a teda α je najmenší uhol. Určite je $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, a teda $0 < \cos\alpha < 1$. Takže postupne dostaneme

$$\frac{P_1}{P} = \frac{cw}{4\cos\alpha} \cdot \frac{2}{bw} = \frac{c}{2b\cos\alpha} > \frac{c}{2b} \geqq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A - I - 4

Sú dané reálne čísla a, b, r také, že $0 < a \leqq 2r$, $0 < b \leqq 2r$. Na kružnici k s polomerom r sú pevne zvolené body A, B tak, že $|AB| = a$. Určte množinu všetkých priesečníkov uhlopriečok konvexných štvoruholníkov $ABXY$ vpísaných do kružnice k, pre ktoré $|XY| = b$.

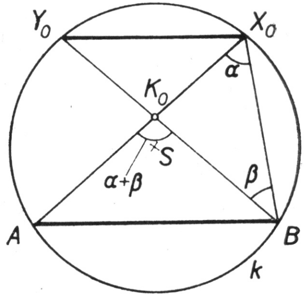
Riešenie. Označíme **M** hľadanú množinu všetkých priesečníkov K uhlopriečok konvexných štvoruholníkov $ABXY$ s vlastnosťou uvedenou v zadaní úlohy.

Ak $a = b = 2r$, tak bezprostredne vidieť, že **M** je prázdna množina. Ďalej budeme predpokladať, že $a \neq 2r$ alebo $b \neq 2r$.

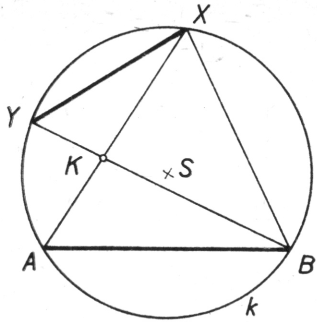
Budeme hovoriť, že úsečku UV vidieť z bodu W pod uhlom α, ak α je veľkosť uhla UWV. Vieme, že množina bodov, z ktorých vidieť úsečku UV pod uhlom α, je zjednotenie dvoch oblúkov kružnice.

Máme pevne zvolené body A, B na kružnici k so stredom S a polomerom $r$také, že $|AB| = a$. Nech X_0, Y_0 sú body na kružnici k (pozri obr. 25) také, že $|X_0Y_0| = b$, priamka X_0Y_0 je rovnobežná s priamkou AB a bod S leží v lichobežníku ABX_0Y_0. (Ak $a = r$, tak existujú dve dvojice takých bodov. V opačnom prípade sú body X_0, Y_0 určené jednoznačne.) Priamka AB určuje dve polroviny ϱ a σ. Nech ϱ je polrovina obsahujúca body X_0, Y_0. Označíme α, β veľkosti uhlov AX_0B, Y_0BX_0. Nech K_0 je priesečník uhlopriečok AX_0, BY_0. Úsečku AB z bodu K_0 vidieť pod uhlom $\alpha + \beta$.

Nech X, Y sú body na kružnici k také, že $|XY| = b$



Obr. 25



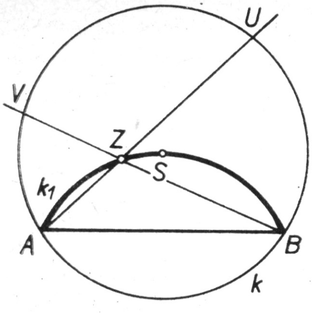
Obr. 26

(pozri obr. 26). Označíme K priesečník uhlopriečok konvexného štvoruholníka $ABXY$.

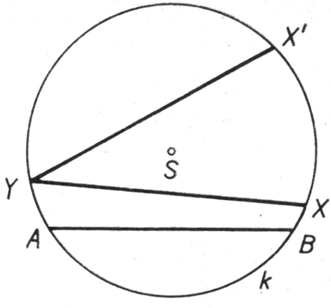
Ďalej budeme rozlišovať tri prípady.

1. $a = b$. Potom ABX_0Y_0 je obdĺžnik a $\alpha = \beta$. Bod X leží v polrovine ϱ. Uhol AXB je obvodový uhol nad tetivou AB, a teda jeho veľkosť je α. Podobne uhol XBY je obvodový uhol nad tetivou XY, $|XY| = b$, a teda jeho veľkosť je β. Takže úsečku AB vidieť z bodu K pod uhlom $\alpha + \beta$. Bod K leží na oblúku kružnice k_1 v polrovine ϱ, z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\alpha + \beta$. Tým sme ukázali, že $\mathbf{M} \subseteq k_1$. Ukážeme aj opačnú inklúziu.

Nech $Z \in k_1$. Označíme U, V priesečníky polpriamok AZ, BZ s kružnicou k (pozri obr. 27). Vieme, že uhol AZB je $\alpha + \beta$. Bod U leží v polrovine ϱ na kružnici k s tetivou AB, a teda uhol AUB je α. Potom uhol UBV je β a odtiaľ vyplýva, že $|VU| = b$. Štvoruholník $ABUV$ je konvexný, a teda $Z \in \mathbf{M}$.



Obr. 27



Obr. 28

Čiže v prípade $a = b$ množina **M** je oblúk kružnice v polrovine ϱ, z ktorého úsečku AB vidieť pod uhlom $\alpha + \beta$.

2. $a < b$. Body X, Y musia ležať v polrovine ϱ (lebo tetiva XY je dlhšia ako tetiva AB). Uhol AXB je α. Uhol YBX môže byť β alebo $\pi - \beta$ (obr. 28). Teda uhol AKB je $\alpha + \beta$ alebo $\pi + \alpha - \beta$. Z uvedeného vyplýva, že $\mathbf{M} \subseteq k_1 \cup k_2$, kde k_1, k_2 sú oblúky kružnice v polrovine ϱ, z ktorých vidieť úsečku AB pod uhlom $\alpha + \beta$, resp. $\pi + \alpha - \beta$.

Rovnakými argumentami ako vyššie možno ukázať, že $\mathbf{M} = k_1 \cup k_2$.

3. $a > b$. Body X, Y môžu ležať buď obidva v polrovine ϱ, alebo obidva v polrovine σ. Uhol YBX je v obidvoch prípadoch β. Uhol AXB je v prvom prípade α a v druhom $\pi - \alpha$. Teda uhol AKB je $\alpha + \beta$ alebo $\pi + \beta - \alpha$. Z uvedeného vyplýva, že $\mathbf{M} \subseteq k_1 \cup k_3$, kde k_1 je oblúk kružnice v polrovine ϱ, z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\alpha + \beta$, a k_3 je oblúk kružnice v polrovine σ, z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\pi + \beta - \alpha$.

Ak $Z \in k_1 \cup k_3$, tak zostrojíme body X, Y ako priesečníky polpriamok AZ, BZ s kružnicou k. Jednoduchou úvahou (ako v prípade 1.) zistíme, že $|XY| = b$ a $ABXY$ je konvexný štvoruholník. Teda $\mathbf{M} = k_1 \cup k_3$.

A - I - 5

Sú dané dve nerastúce postupnosti reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a dve prosté zobrazenia P, R množiny všetkých prirodzených čísel na seba. Utvorme súčty $a_{P(1)} + b_{R(1)}$, $a_{P(2)} + b_{R(2)}, \ldots$ a usporiadajme ich podľa veľkosti do nerastúcej postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom pre každé dve prirodzené čísla m, n platí

$$c_{m+n-1} \leqq a_m + b_n.$$

Dokážte.

Riešenie. Z definície postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva, že existuje postupnosť $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ taká, že

$$c_1 = a_{P(k_1)} + b_{R(k_1)}, \ldots, c_n = a_{P(k_n)} + b_{R(k_n)}, \ldots.$$

Naviac, pre $i \neq j$ je $k_i \neq k_j$.

Z toho, že postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú nerastúce, vyplýva, že $a_j \leqq a_m$ pre $j \geqq m$ a $b_i \leqq b_n$ pre $i \geqq n$. To znamená, že nerovnosť $a_j + b_i > a_m + b_n$ môže platiť jedine pre $j < m$ alebo $i < n$.

Označíme $\mathbf{A} = \{l;\ P(k_l) < m\}$ a $\mathbf{B} = \{l;\ R(k_l) < n\}$. Ak $c_l > a_m + b_n$, tak podľa predchádzajúceho platí $l \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Kedže množina $\mathbf{A}$ má $m - 1$ prvkov, množina $\mathbf{B}$ má $n - 1$ prvkov, tak $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ má menej ako $n + m - 1$ prvkov. To znamená, že nerovnosť $c_l > a_m + b_n$ platí pre menej ako $n + m - 1$ hodnôt indexu l. Teda $(n + m - 1)$-tý člen nerastúcej postupnosti $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nie väčší ako $a_m + b_n$, tj.

$$c_{n+m-1} \leqq a_m + b_n.$$

A - I - 6

Je daný štvorsten $ABCD$ a ľubovoľný bod K v jeho vnútri. Nech G_1, G_2, G_3, G_4 sú ťažiská štvorstenov $KBCD$, $AKCD$, $ABKD$, $ABCK$. Dokážte, že objem štvorstena $G_1G_2G_3G_4$ nezávisí od voľby bodu K.

Riešenie. Vieme, že ťažisko štvorstena delí ťažnicu v pomere $1 : 3$. Ťažnica je spojnica vrcholu s ťažiskom steny štvorstena. Ďalej vieme, že štvorsten je až na posunutie, otočenie, prípadne zrkadlový obraz, jednoznačne určený dĺžkami svojich hrán. Špeciálne, objem štvorstena je určený dĺžkami jeho hrán.

Nech T_1, T_2, T_3, T_4 sú ťažiská stien BCD, ACD, ABD, ABC. Bod G_i, $i = 1, 2, 3, 4$, delí úsečku KT_i v pomere $1 : 3$, lebo G_i je ťažisko príslušného štvorstena a KT_i je jeho ťažnica. Teda štvorsten $G_1G_2G_3G_4$ je rovnoľahlý so štvorstenom $T_1T_2T_3T_4$ s koeficientom rovnoľahlosti $\frac{3}{4}$ a stredom rovnoľahlosti K. Keďže koeficient rovnoľahlosti je nezávislý od voľby bodu K, tak dĺžky hrán štvorstena $G_1G_2G_3G_4$ tiež nezávisia od voľby bodu K, a teda ani jeho objem.

Naviac ak si uvedomíme, že rovnoľahlosť s koeficientom k mení objem telies $|k|^3$-krát, tak ľahko určíme objem štvorstena $G_1G_2G_3G_4$ pomocou objemu $ABCD$. Štvorsten $T_1T_2T_3T_4$

je rovnoľahlý so štvorstenom $ABCD$ s koeficientom rovnoľahlosti $-\frac{1}{3}$ a stredom v ťažisku štvorstena $ABCD$. Teda objem štvorstena $G_1G_2G_3G_4$ je $\left|-\frac{1}{3}\right|^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ násobok objemu štvorstena $ABCD$.

Iné riešenie. Umiestnime štvorsten $ABCD$ do súradnicovej sústavy s počiatkom O. Označíme g_i vektor $G_i - O$. Podobne $a = A - O$, $b = B - O$, $c = C - O$, $d = D - O$, $k = K - O$. Keďže G_1 je ťažisko štvorstena $KBCD$, tak platí

$$g_1 = \frac{k + b + c + d}{4}.$$

Podobne platí

$$g_2 = \frac{a + k + c + d}{4},$$

$$g_3 = \frac{a + b + k + d}{4},$$

$$g_4 = \frac{a + b + c + k}{4}.$$

Dĺžka hrany G_1G_2 je rovná veľkosti vektora

$$G_2 - G_1 = g_2 - g_1 = \frac{a - b}{4}.$$

Podobne pre ostatné hrany. Z uvedeného vyjadrenia vyplýva, že dĺžka hrán štvorstena $G_1G_2G_3G_4$ nezávisí od voľby bodu K, je rovná $\frac{1}{4}$ dĺžok odpovedajúcich hrán štvorstena $ABCD$. Teda objem štvorstena $G_1G_2G_3G_4$ nezávisí od voľby bodu K a je $\frac{1}{4^3}$ násobok objemu štvorstena $ABCD$.

ÚLOHY KLAUZÚRNEJ ČASTI I. KOLA

A - S - 1

Určte všetky usporiadané n-tice čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pre ktoré má kvadratická rovnica

$$(1) \qquad x^2 \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i - x \sum_{i=1}^{n} \sin 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i = 0$$

aspoň jeden reálny koreň.

Riešenie. Kvadratická rovnica (1) má aspoň jeden reálny koreň práve vtedy, keď jej diskriminant

$$D = (\sum_{i=1}^{n} \sin 2\alpha_i)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i \,.\, \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i$$

je nezáporný.

Jednoduchou úpravou použitím vzorca pre sínus dvojnásobného uhla dostaneme

$$(2)\quad D = 4\,[(\sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i \cos \alpha_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i \,.\, \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i] \geqq 0.$$

Podľa Cauchyho nerovnosti (pozri riešenie úlohy A-I-1) však platí

$$(3)\qquad (\sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i \cos \alpha_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i \,.\, \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i.$$

Teda nerovnosť (2) platí vtedy a len vtedy, keď $D = 0$. To je ekvivalentné tomu, že platí rovnosť v nerovnosti (3). Zo zadania úlohy vyplýva, že $\cos \alpha_i \neq 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Teda rovnosť v (3) nastáva práve vtedy, keď existuje reálne číslo k také, že

$$\sin \alpha_i = k \,.\, \cos \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ekvivalentne

$$k = \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \ldots = \operatorname{tg} \alpha_n.$$

Keďže čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sú z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tak posledná podmienka je ekvivalentná podmienke $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

Iné riešenie. Rovnicu (1) upravíme na tento tvar

$$\sum_{i=1}^{n} x^2 \cos^2 \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} 2x \cos \alpha_i \sin \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i = 0,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{n} (x \cos \alpha_i - \sin \alpha_i)^2 = 0.$$

Suma štvorcov reálnych čísel je rovná nule práve vtedy, keď každý sčítanec je nulový. Teda rovnica (1) je ekvivalentná sústave rovníc

$$\begin{aligned} x \cos \alpha_1 &= \sin \alpha_1, \\ x \cos \alpha_2 &= \sin \alpha_2, \\ &\vdots \\ x \cos \alpha_n &= \sin \alpha_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Zo zadania vyplýva, že $\cos \alpha_1 \neq 0, \cos \alpha_2 \neq 0, \ldots, \cos \alpha_n \neq 0$. Rovnica (1) má reálne riešenie práve vtedy, ak má reálne riešenie sústava rovníc (4). Táto má reálne riešenie práve vtedy, keď

$$\frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \ldots = \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha_n},$$

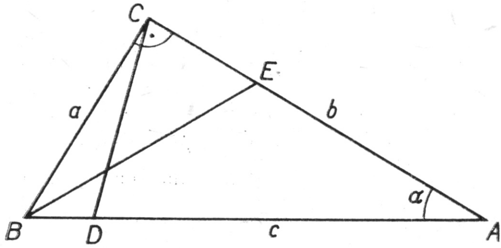
tj. keď $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

Do každého pravoúhlého trojúhelníka lze umístit rovnoramenný trojúhelník, jehož obsah je větší nebo roven $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$-násobku obsahu původního pravoúhlého trojúhelníka. Dokažte.

Riešenie. Uvažujme pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C a dĺžkou strán a, b, c, $a \leqq b \leqq c$. Nech α je veľkosť uhla BAC. Obsah P je potom

$$P = \tfrac{1}{2}\, bc \sin \alpha.$$

Nech D je bod na strane AB taký, že $|DA| = b$, a nech E je bod na strane AC taký, že $|BE| = |EA|$ (pozri obr. 29). Také body zrejme existujú.



Obr. 29

Obsah P_1 trojuholníka ADC je

$$P_1 = \frac{1}{2}\, b^2 \sin \alpha = \frac{b}{c}\, P. \tag{1}$$

Podobne obsah P_2 trojuholníka ABE je

$$(2)\quad P_2 = \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{2} c \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} c^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{4} \frac{c^3}{b} \cdot \sin \alpha .$$

Ak $\frac{b}{c} \geqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, tak podľa (1) trojuholník ADC vyhovuje podmienkam úlohy. Ak $\frac{b}{c} < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, tak podľa (2) platí

$$P_2 = \frac{1}{4} \frac{c^2}{b^2} bc \sin \alpha > \frac{1}{2} (\sqrt[3]{2})^2 \cdot P = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} P .$$

Teda v tomto prípade trojuholník ABE vyhovuje podmienkám úlohy.

A - S - 3a

V rovině je dána kružnice k s poloměrem r a na ní body A, B ve vzdálenosti d. Nechť číslo v splňuje nerovnosti $0 < d < v \leqq 2r$.

Najděte množinu všech bodů X z vnější oblasti kružnice k, pro něž druhé prusečníky $A' \neq A$, $B' \neq B$ přímek XA, XB s kružnicí k mají vlastnost, že $|A'B'| = v$.

Riešenie. Body A, B rozdelia kružnicu na dva oblúky k_1, k_2. Nech k_1 je väčší z nich, tj. ten, ktorý leží v tej istej polrovine ako stred S kružnice k určenej priamkou AB. Nech X je bod z vonkajšej oblasti kružnice k, A', B' sú body na kružnici k rôzne od A, B, $|A'B'| = v$, a X leží na priamkach AA', BB'.

Nech 2α je veľkosť vypuklého uhla ASB a 2β je veľkosť vypuklého uhla $A'SB'$. Teda $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ a $\beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$. Naviac, číslo β nezávisí od polohy bodov A', B', je určené dĺžkou v.

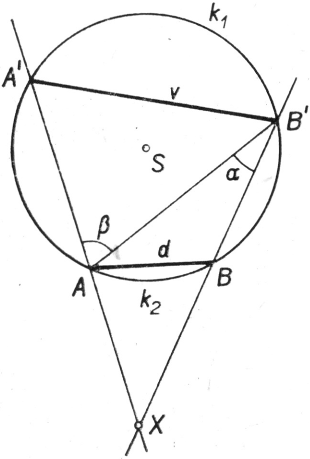
Môžu nastať tri prípady:

1. $A', B' \in k_1$;
2. $A' \in k_1$, $B' \in k_2$;
3. $A' \in k_2$, $B' \in k_1$.

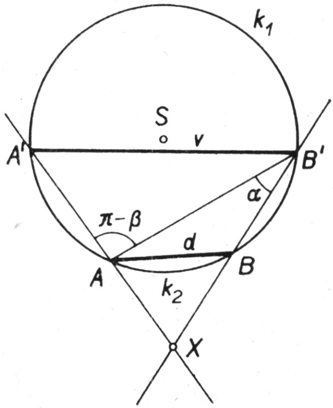
V prípade 1 máme ďalšie dve možnosti:

a) stred S leží v štvoruholníku $ABB'A'$ (obr. 30);

b) stred S leží mimo štvoruholníka $ABB'A'$ (obr. 31).



Obr. 30



Obr. 31

V prípade 1a) sa ľahko vypočíta

$$\sphericalangle AXB = \pi - (\sphericalangle XA'B' + \sphericalangle XB'A') =$$

$$= \pi - (\sphericalangle XA'B' + \sphericalangle AB'A' + \alpha) =$$

$$= \pi - (\pi - \beta + \alpha) = \beta - \alpha.$$

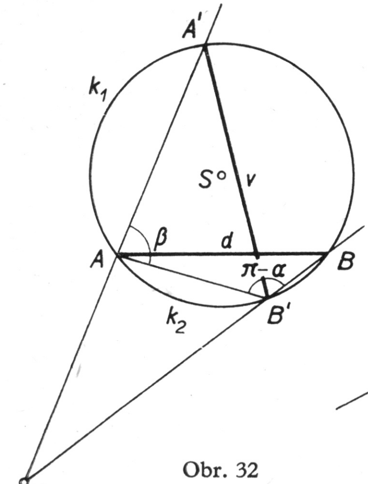
Podobne v prípade 1b) zistíme, že

$$\sphericalangle AXB = \pi - \alpha - \beta.$$

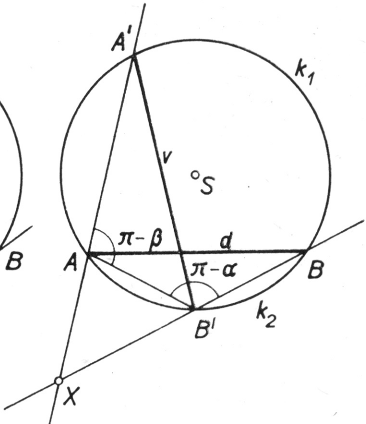
V prípade 2 máme tiež dve možnosti:

a) bod S leží v trojuholníku $AB'A'$ (obr. 32);

b) bod S leží mimo trojuholníka $AB'A'$ (obr. 33).



Obr. 32



Obr. 33

V prípade 2a) dostávame

$$\sphericalangle AXB = \pi - (\pi - \beta) - (\pi - (\pi - \alpha)) = \beta - \alpha,$$

a v prípade 2b) máme

$$\sphericalangle AXB = \pi - \alpha - \beta.$$

Rovnako v prípade 3 máme dve možnosti a uhol $\sphericalangle AXB$ je $\beta - \alpha$ alebo $\pi - \alpha - \beta$.

Nech l_1 je oblúk kružnice, z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\beta - \alpha$. Podobne nech l_2 je oblúk kružnice, z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\pi - \alpha - \beta$. Obidva oblúky ležia v opačnej polrovine určenej priamkou AB ako bod S.

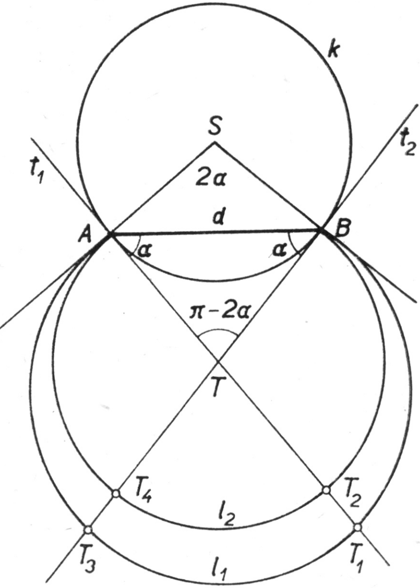
Z uvedeného rozboru vyplýva, že hľadaná množina M bodov X s vlastnosťou uvedenou v texte úlohy je podmnožina zjednotenia $l_1 \cup l_2$.

Nech T_1, T_2, T_3, T_4 sú priesečníky dotyčníc t_1, t_2 kružnice k v bodoch A, B s oblúkmi l_1, l_2. Ukážeme, že

$$\mathsf{M} = l_1 \cup l_2 - \{T_1, T_2, T_3, T_4\} \tag{1}$$

(pozri obr. 34).

Označíme T priesečník dotyčníc t_1 a t_2. Uhol ATB je $\pi - 2\alpha$. Keďže platí $0 < \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}$, tak $\pi - 2\alpha > \beta - \alpha$ a $\pi - 2\alpha > \pi - \alpha - \beta$. Teda bod T leží vnútri kružníc oblúkov l_1, l_2. Nech bod X leží na $l_1 \cup l_2$ a je rôzny od bodov T_1, T_2, T_3, T_4. Môže nastať zrejmých šesť prípadov (oblúky

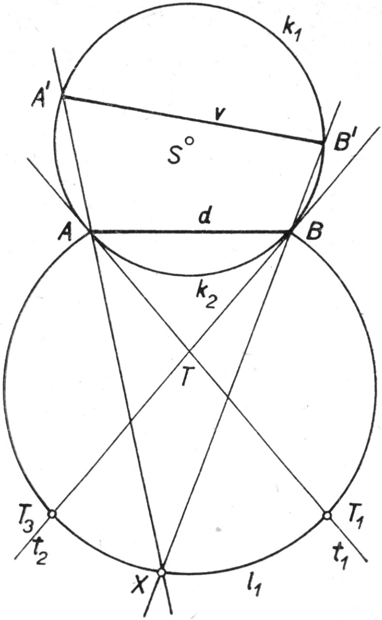


Obr. 34

l_1, l_2 sú bodmi T_1, T_2, T_3, T_4 rozdelené na šesť častí). Nech napríklad bod X leží na oblúku l_1 medzi bodmi T_1 a T_3 (pozri obr. 35). Potom druhý priesečník A' priamky AX s kružnicou k leží na oblúku k_1 (vzhľadom na polohu bodu X k dotyčnici t_1). Podobne bod B' leží na oblúku k_1. Keďže uhol AXB je $\beta - \alpha$, uhol $AB'B$ je α, tak ľahko sa vypočíta, že uhol $A'AB'$ je β. Odtiaľ už vyplýva, že $|A'B'| = v$. Teda $X \in \mathbf{M}$.

Podobne by sme postupovali v ostatných prípadoch.

Teda hľadaná množina je popísaná vzťahom (1).



Obr. 35

A - S - 3b

V rovině se souřadnicemi x, y je dána přímka p. Pak jsou právě tři možnosti:

a) p obsahuje nekonečně mnoho mřížových bodů roviny (tj. bodů s celočíselnými souřadnicemi);

b) p neobsahuje žádný mřížový bod;

c) p obsahuje přesně jeden mřížový bod.

Dokažte. Pro každou z možností a), b), c) udejte příklad přímky p.

Riešenie. Ukážeme, že nastane aspoň jedna z uvedených troch možností. Predpokladáme, že nenastane možnosť b) ani c). Ukážeme, že vtedy nastane možnosť a).

Ak nenastane možnosť b) ani c), tak existujú aspoň dva rôzne mrežové body A, B, ktoré ležia na priamke p. Nech A má súradnice $[x_0, y_0]$ a B má súradnice $[x_1, y_1]$. Ak rovnica priamky p je $y = kx + q$, tak musí platiť

$$y_0 = kx_0 + q,$$

$$y_1 = kx_1 + q,$$

teda

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

$$q = y_0 - x_0 \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Teda rovnica priamky p má tvar

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0. \tag{1}$$

Ak n je prirodzené číslo, tak čísla

$$x_n = x_0 + n(x_1 - x_0),$$

$$y_n = y_0 + n(y_1 - y_0)$$

sú celé. Naviac zrejme dvojica x_n, y_n vyhovuje rovnici (1). Teda na priamke p ležia všetky mrežové body so súradnicami $[x_n, y_n]$, tj. nastáva možnosť a). Ak priamka p nemá rovnicu uvedeného tvaru, tak je rovnobežná s osou y. Potom jej rovnica je $x = x_0$ a obsahuje všetky mrežové body so súradnicami $[x_0, y]$, kde y je celé číslo.

Príkladom priamky pre možnosť a) je ľubovoľná priamka s rovnicou $y = k$, k je celé číslo. Príkladom priamky pre prípad b) je priamka $y = \frac{1}{2}$, tá neobsahuje ani jeden mrežový bod. Na priamke s rovnicou $y = \sqrt{2}\,x$ leží mrežový bod so súradnicami $[0, 0]$. Ukážeme, že iný mrežový bod tam neleží. Keby totiž mrežový bod $[x_1, y_1]$, kde $y_1 \neq 0$ alebo $y_1 \neq 0$, ležal na priamke $y = \sqrt{2}\,x$, tak $y_1 = \sqrt{2}\,x_1$. Potom $x_1 \neq 0$ aj $y_1 \neq 0$, a tedy $\sqrt{2} = \dfrac{y_1}{x_1}$. To by znamenalo, že $\sqrt{2}$ je racionálne číslo, a to nie je.

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY II. KOLA

A - II - 1

Nech A, B, C, D sú mrežové body také, že body C, D neležia na priamke AB. Nech v_1 je výška trojuholníka ABC na stranu AB a v_2 je výška trojuholníka ABD na stranu AB. Potom $v_1 : v_2$ je racionálne číslo. Dokážte.

Riešenie. Ak body A, B ležia na priamke rovnobežnej s osou y, tak $|AB|$ je prirodzené číslo a aj v_1, v_2 sú prirodzené čísla.

Ak body A, B neležia na priamke rovnobežnej s osou y, tak priamka AB má rovnicu $y = kx + q$, kde k, q sú racionálne čísla (pozri riešenie úlohy A-S-3b). Označme $[c_1, c_2]$ a $[d_1, d_2]$ súradnice bodov C, D. Podľa vzorca pre vzdialenosť bodu od priamky platí

$$v_1 = |kc_1 - c_2 + q| : \sqrt{1 + k^2},$$

$$v_2 = |kd_1 - d_2 + q| : \sqrt{1 + k^2}.$$

Potom

$$v_1 : v_2 = |kc_1 - c_2 + q| : |kd_1 - d_2 + q|$$

a to je racionálne číslo.

Iné riešenie. Ukážeme najprv pomocné tvrdenie: Ak mrežové body X_1, X_2, X_3 neležia na priamke, potom dvojnásobok obsahu trojuholníka $X_1X_2X_3$ je prirodzené číslo.

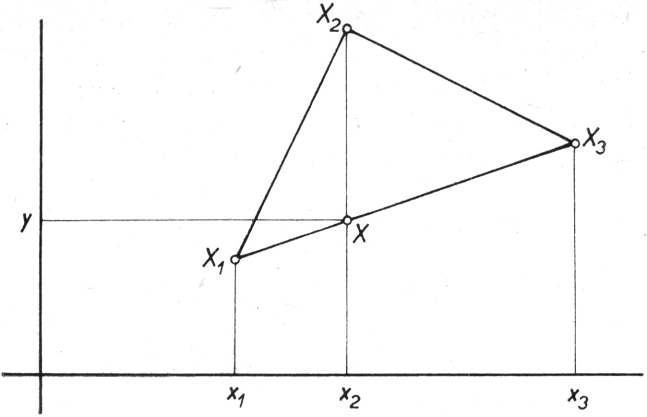
Nech $[x_i, y_i]$ sú súradnice bodu X_i, $i = 1, 2, 3$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x_1 \leqq x_2 < x_3$ (keby $x_1 = x_2 = x_3$, tak body X_1, X_2, X_3 ležia na priamke). Ak $x_1 = x_2$, tak $|X_1X_2| = |y_2 - y_1|$ a výška trojuholníka $X_1X_2X_3$ na stranu X_1X_2 je $x_3 - x_2$. Teda pre obsah P platí

$$P = \tfrac{1}{2}\,|y_2 - y_1| \,.\, (x_3 - x_2).$$

Odtiaľ už vyplýva tvrdenie.

Nech teraz $x_1 < x_2 < x_3$. Nech X je bod s x-ovou súradnicou x_2 na úsečke X_1X_3 (pozri obr. 36). Pre druhú súradnicu y bodu X platí

$$(y - y_1) : (y_3 - y_1) = (x_2 - x_1) : (x_3 - x_1)$$



Obr. 36

a teda

$$y = y_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot (y_3 - y_1).$$

Pre dĺžku úsečky X_2X platí

$$|X_2X| = y_2 - y = y_2 - y_1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}(y_3 - y_1).$$

Obsah P trojuholníka $X_1X_2X_3$ je súčet obsahov trojuholníkov X_1X_2X a XX_2X_3. Teda platí

$$P = \frac{1}{2}\,|X_2X|\,.\,(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}\,|X_2X|\,.\,(x_3 - x_2).$$

Odtiaľ postupne dostaneme

$$P = \frac{1}{2}(|X_2X| \, . \, (x_3 - x_1) = \frac{1}{2}((y_2 - y_1) \, . \, (x_3 - x_1) -$$

$$- (x_2 - x_1) \, . \, (y_3 - y_1)).$$

Z poslednej rovnosti vyplýva, že $2P$ je prirodzené číslo.

Teraz už ľahko dokážeme tvrdenie úlohy. Označíme P_1 a P_2 obsahy trojuholníkov ABC a ABD. Keďže $P_1 = \frac{1}{2} \, . \, |AB| \, . \, v_1$, $P_2 = \frac{1}{2}|AB| \, . \, v_2$, tak $v_1 : v_2 = 2P_1 : 2P_2$. Ale čísla $2P_1$, $2P_2$ sú prirodzené, teda $v_1 : v_2$ je racionálne číslo.

A - II - 2

Určete všechny uspořádané n-tice ($n \geqq 1$) kladných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, které vyhovují soustavě rovnic

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{4},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \ldots + \frac{n^2}{x_n} = n^2 (n + 1)^2.$$

Riešenie. Predpokladajme, že n-tica kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovuje rovniciam (1) a (2). Označíme $a_i = \sqrt{x_i}$, $b_i = \frac{i}{\sqrt{x_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Podľa Cauchyho nerovnosti platí

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \,.\, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqq (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Z druhej strany podľa (1) a (2) platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \,.\, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{x_i} = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Teda v Cauchyho nerovnosti (3) platí rovnosť. Vieme, že pre kladné číslo platí v Cauchyho nerovnosti rovnosť práve vtedy, keď existuje kladné číslo t také, že $a_i = tb_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Teda $\sqrt{x_i} = t \,.\, \dfrac{i}{\sqrt{x_i}}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Teda $x_i = t \,.\, i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dosadením do rovnice (1) dostaneme

$$t = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Zistili sme, že ak n-tica kladných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovuje rovniciam (1) a (2), tak

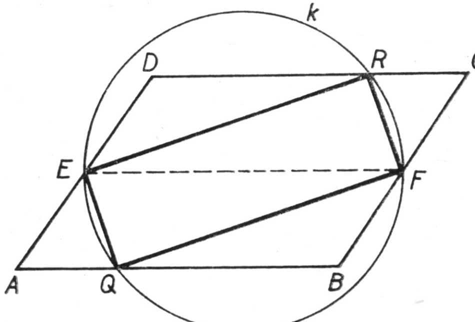
$$(4) \qquad x_i = \frac{i}{2n(n+1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že n-tica (4) je riešením rovníc (1) a (2).

Dokažte: Ke každému rovnoběžníku existuje pravoúhelník v něm obsažený, jehož obsah je větší nebo roven jedné polovině obsahu původního rovnoběžníku.

Riešenie. Nech $ABCD$ je rovnobežník. Môžeme predpokladať $|AB| \geqq |BC|$. Nech E, F sú stredy strán AD, BC (pozri obr. 37). Nech k je kružnica nad priemerom EF. Polomer kružnice k je rovný $\frac{1}{2}|AB|$. Vzdialenosť priamok AB, DC od priemeru EF je nie väčšia ako $\frac{1}{2}|BC|$, teda nie väčšia ako polomer kružnice k. Kružnica k teda pretína priamky AB, DC aspoň v jednom bode. Naviac aspoň po jednom z týchto priesečníkov je na úsečkách AB, DC. Nech Q je priesečník kružnice k s úsečkou AB a R je priesečník kružnice k s úsečkou DC, a to taký, že QR je priemer kružnice k.

Štvoruholník $EQFR$ je pravouholník (uhly ERF, EQF sú obvodové uhly nad priemerom EF) a jeho obsah je rovný polovici obsahu rovnobežníka $ABCD$.



Obr. 37

A - II - 3b

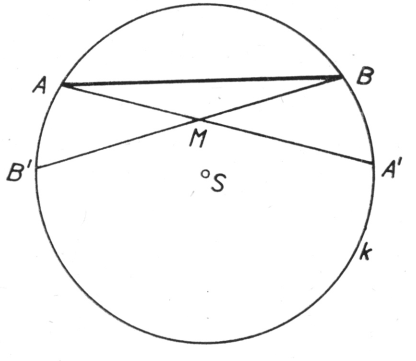
V rovine je daná kružnica k s polomerom 1, do ktorej je vpísaný pravidelný 1982-uholník. Nech M je pevný bod, ktorý leží v jeho vnútri. Potom existujú dva vrcholy A, B tohto 1982-uholníka také, že platí

$$\left(1 - \frac{2}{1982}\right)\pi \leqq \sphericalangle AMB < \pi.$$

Dokážte.

Riešenie. Ak A, B sú vrcholy mnohouholníka, ktoré nie sú susedné, tak úsečku AB nazveme uhlopriečkou. Uhlopriečok je konečný počet. Špeciálne teda, v našom 1 982-uholníku existuje uhlopriečka AB taká, že bod M na nej neleží, ale je k uhlopriečke AB najbližšie, tj. ak XY je iná uhlopriečka neobsahujúca bod M, tak vzdialenosť bodu M od XY nie je menšia ako vzdialenosť bodu M od AB.

Označíme A', B' druhé priesečníky priamok AM, BM



Obr. 38

s kružnicou k (pozri obr. 38). Vnútri (kratšieho) oblúku BA' neleží žiadny vrchol 1982-uholníka. Ak by tam ležal vrchol X, tak uhlopriečka AX by bola bližšie k bodu M ako uhlopriečka AB. Z rovnakých dôvodov neleží žiadny vrchol 1982-uholníka vnútri kratšieho oblúku AB'. Keďže pre dva susedné vrcholy X, Y nášho mnohouholníka platí $\sphericalangle XSY = \frac{2\pi}{1982}$ (S je stred kružnice k), tak nutne $\sphericalangle ASB' \leqq \frac{2\pi}{1982}$, $\sphericalangle BSA' \leqq \frac{2\pi}{1982}$. Bod M neleží na priamke AB, takže $\sphericalangle AMB < \pi$. Z druhej strany

$$\sphericalangle ABB' = \tfrac{1}{2} \sphericalangle ASB'$$

a

$$\sphericalangle A'AB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle BSA'.$$

Teda

$$\sphericalangle AMB = \pi - (\sphericalangle A'AB + \sphericalangle ABB') = \pi - \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot (\sphericalangle ASB' + \sphericalangle BSA') \geqq \pi - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{1982} = \pi \left(1 - \frac{2}{1982}\right).$$

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

Je dán čtyřstěn $ABCD$ a uvnitř čtyřstěnu body K, L, M, N, které neleží v rovině. Předpokládejme, že také těžiště P, Q,

R, S čtyřstěnů $KBCD$, $ALCD$, $ABMD$, $ABCN$ neleží v rovině, a označme T těžiště čtyřstěnu $ABCD$, T_0 těžiště čtyřstěnu $PQRS$ a T_1 těžiště čtyřstěnu $KLMN$.

a) Dokažte, že body T, T_0, T_1 leží v jedné přímce.

b) Určete poměr $|T_0T| : |T_0T_1|$.

Riešenie. Zvolíme si sústavu súradníc. Nech a, b, c, d sú x-ové súradnice bodov A, B, C, D, k, l, m, n, p, q, r, s, t, t_0, t_1 sú x-ové súradnice bodov K, L, M, N, P, Q, R, S, T, T_0, T_1. Súradnica ťažiska je aritmetický priemer súradníc vrcholov štvorstena, teda

$$t = \frac{a + b + c + d}{4},$$

$$p = \frac{k + b + c + d}{4},$$

$$q = \frac{a + l + c + d}{4},$$

$$r = \frac{a + b + m + d}{4},$$

$$s = \frac{a + b + c + n}{4},$$

$$t_0 = \frac{p + q + r + s}{4},$$

$$t_1 = \frac{k + l + m + n}{4}.$$

Z uvedených rovníc ľahko dostaneme

$$t_0 = \frac{t_1 + 3t}{4}.$$

Rovnaké vzťahy dostaneme aj pre y-ové a z-ové súradnice. Teda bod T_0 leží na úsečke T_1T a delí ju v pomere $1:3$, T_0 je bližšie k bodu T. Ak T_1 splýva s bodom T, tak pomer $|T_0T| : |T_0T_1|$ nie je definovaný. Ak $T_1 \neq T$, tak z uvedeného vyplýva

$$|T_0T| : |T_0T_1| = 1 : 3.$$

A - III - 2

Dané sú reálne čísla $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Označíme M maximum ich absolútnych hodnôt. Dokážte, že platí

$$(1) \quad |x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 - x_3x_4| \leqq 4M^2.$$

Riešenie. Jednoduchými úpravami postupne dostaneme

$$|x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 - x_3x_4| =$$

$$= |x_1(x_4 - x_5) + x_2(x_5 - x_6) + x_3 \,.\, (x_6 - x_4)| \leqq$$

$$\leqq |x_1| \,.\, |x_4 - x_5| + |x_2| \,.\, |x_5 - x_6| + |x_3| \,.\, |x_6 - x_4| \leqq$$

$$\leqq M(|x_4 - x_5| + |x_5 - x_6| + |x_6 - x_4|).$$

Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že platí $x_4 \leqq x_5 \leqq x_6$. Potom

$$|x_4 - x_5| + |x_5 - x_6| + |x_6 - x_4| = x_5 - x_4 +$$

$$+ x_6 - x_5 + x_6 - x_4 = 2(x_6 - x_4) \leqq 4M.$$

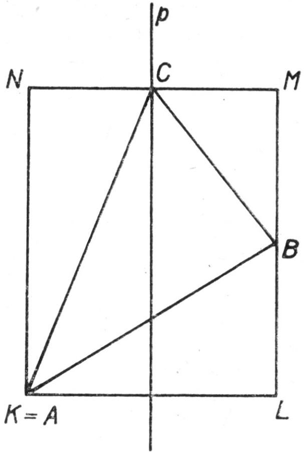
Z uvedených výpočtov už vyplýva nerovnosť (1).

Iné riešenie. Výraz na ľavej strane nerovnosti (1) je rovný dvojnásobku obsahu trojuholníka ABC, kde $A = [x_1, x_6]$, $B = [x_2, x_4]$, $C = [x_3, x_5]$. Zostrojíme pravouholník $KLMN$ taký, že jeho strany budú rovnobežné s osami súradnicovej sústavy a trojuholník ABC je vpísaný do pravouholníka $KLMN$, tj. body A, B, C ležia na stranách pravouholníka a $KLMN$ je najmenší možný. Dokážeme pomocné tvrdenie: Obsah P trojuholníka ABC je menší alebo rovný polovici obsahu Q pravouholníka $KLMN$.

Skutočne, ak dva z bodov A, B, C ležia na jednej strane pravouholníka $KLMN$, napr. body A, B na strane KL, tak $P = \frac{1}{2}\, |AB| . v$. Pritom výška v je menšia alebo rovná $|LM|$. Teda

$$P \leqq \tfrac{1}{2}\, |KL| . |LM| = \tfrac{1}{2}\, Q.$$

Ak na žiadnej strane neležia dva vrcholy trojuholníka ABC, tak až na označenie, musí byť napr. vrchol $A = K$, vrchol B leží na strane LM a vrchol C leží na strane MN. Vedieme priamku p rovnobežnú so stranou KN cez bod C (pozri obr. 39). Priamka p rozdelí trojuholník ABC na dva trojuholníky a pravouholník $KLMN$ na dva pravouholníky. Podľa predchádzajúceho novoutvorené trojuholníky majú obsah menší ako polovica obsahu odpovedajúcich pravouholníkov, a teda aj pre ich súčet platí $P \leqq \frac{1}{2}\, Q$.



Obr. 39

K dôkazu nerovnosti (1) si stačí uvedomiť, že dĺžka strán pravouholníka $KLMN$ nie je väčšia ako $2M$.

Podľa riešení *Petra Coufa,* žiaka IV. D triedy
Gymnázia W. Piecka v Prahe,
a *Vladana Pecha,* žiaka III. C triedy
Gymnázia M. Koperníka v Bílovci.

A - III - 3

V rovině se souřadnicemi x, y najděte příklad konvexní množiny **M**, která obsahuje nekonečně mnoho mřížových bodů (tj. bodů s celočíselnými souřadnicemi), ale přitom na každé přímce v té rovině leží jen konečně mnoho mřížových bodů z **M**.

Riešenie. Nech k je kladné iracionálne číslo, napr. $k = \sqrt{2}$. Ukážeme, že množina **M** všetkých bodov medzi priamkami $y = kx$ a $y = kx + 1$ má uvedenú vlastnosť.

Množina **M** je zrejme konvexná. Každá priamka, ktorej smernica nie je k, pretína množinu **M** v úsečke, a teda obsahuje len konečne mnoho mrežových bodov množiny **M**. Na priamke so smernicou k leží najviac jeden mrežový bod. Skutočne, keby na priamke $y = kx + q$ ležali dva rôzne mrežové body o súradniciach $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$, tak sa ľahko vypočíta, že

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

čo nie je možné, lebo k je iracionálne číslo.

Zostáva ukázať, že množina **M** obsahuje nekonečne mnoho mrežových bodov. Vieme, že existuje postupnosť racionálnych čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že k_n má desiatkový rozvoj ukončený na n-tom mieste a $0 \leqq k_n < k < k_n + 10^{-n}$. Potom platí

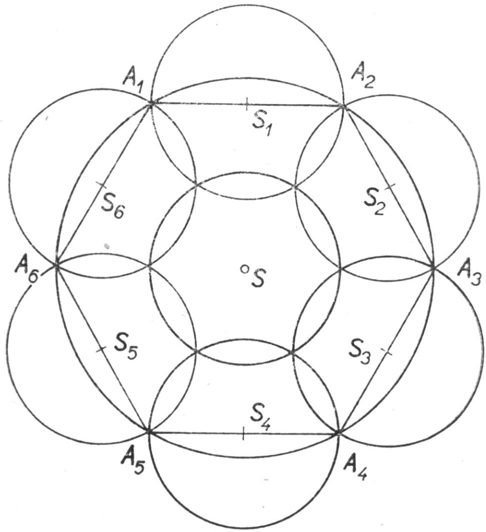
$$k.10^n < k_n.10^n + 1 < k.10^n + 1.$$

Naviac, číslo $k_n.10^n + 1$ je číslo prirodzené. Teda množina **M** obsahuje nekonečne mnoho mrežových bodov $[10^n; k_n.10^n + 1]$, $n = 1, 2, \ldots$.

A - III - 4

V kruhu o poloměru 1 je zvoleno 64 navzájem různých bodů. Dokažte, že z nich lze vybrat 10 navzájem různých bodů, které leží v některém kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$.

Riešenie. Nech k je kružnica, ktorá ohraničuje skúmaný kruh K so stredom S a polomerom 1. Nech $S_1, \ldots, S_6$ sú stredy strán vpísaného pravidelného šesťuholníka $A_1A_2A_3$-$A_4A_5A_6$ do kružnice k (pozri obr. 40). Ukážeme, že kruhy so stredmi S, $S_1, \ldots, S_6$ a polomerom $\frac{1}{2}$ pokrývajú kruh K.



Obr. 40

Uvažujme bod X ležiaci v kruhu K. Bod X leží v niektorom z uhlov A_1SA_2, $A_2SA_3, \ldots, A_6SA_1$. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že X leží v uhle A_1SA_2. Uvažujme najprv prípad, keď bod X leží mimo trojuholníka A_1SA_2. Označíme α veľkosť uhla S_1SX (pozri obr. 41).

Zrejme $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{6}$. Podľa kosínusovej vety platí

$$(1) \qquad |S_1X|^2 = |S_1S|^2 + |SX|^2 - 2 \,.\, |S_1S| \,.\, |SX| \,.\cos\alpha .$$

Keďže $|S_1S| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, tak platí

$$(2) \qquad |S_1X|^2 = \frac{3}{4} + |SX|^2 - \sqrt{3} \,.\, |SX| \,.\cos\alpha .$$

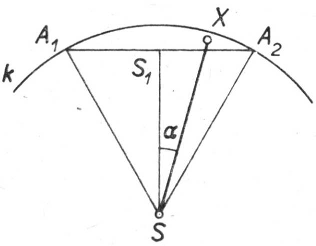
Bod X leží v kruhu K, teda $|SX| \leqq 1$. Z predpokladu, že bod X neleží v trojuholníku A_1A_2S, vyplýva $|SX| \,.\cos\alpha \geqq$ $\geqq |SS_1| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Z rovnosti (2) dostávame

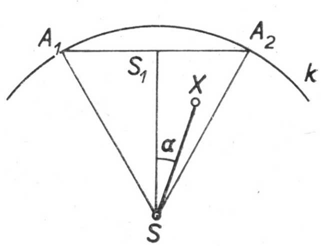
$$|S_1X|^2 \leqq \frac{3}{4} + 1 - \sqrt{3} \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} .$$

Takže bod X leží v kruhu o strede S_1 a polomere $\frac{1}{2}$.

Teraz uvažujme prípad, keď bod X leží v trojuholníku A_1A_2S. Nech naviac $|SX| < \frac{1}{2}$. Ak α je veľkosť uhla XSS_1,



Obr. 41



Obr. 42

tak (pozri obr. 42) z kosínusovej vety dostávame znovu vzťah (1). Keďže $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{6}$, tak

$$(3) \qquad |S_1S| \cos \alpha \geqq |S_1S| \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Označíme $x = |SX|$. Podľa predpokladu je $\frac{1}{2} < x \leqq 1$. Po dosadení do (1) a použitím (3) dostaneme

$$(4) \quad |S_1X|^2 \leqq \frac{3}{4} + x^2 - 2 . \frac{3}{4} x = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}.$$

Výraz $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ v intervale $\left(\frac{1}{2}, 1\right\rangle$ nadobúda najväčšiu hodnotu $\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$. Podľa (4) teda

$$|S_1X|^2 \leqq \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}.$$

Takže bod X leží v kruhu o strede S_1 a polomere $\frac{1}{2}$.

Keďže v kruhu K leží 64 zvolených bodov, K je pokrytý siedmymi kruhmi o polomere $\frac{1}{2}$, aspoň v jednom z týchto siedmych kruhov leží 10 bodov. Keby totiž každý zo siedmych kruhov obsahoval najviac 9 zo zvolených bodov, tak by ich bolo spolu nie viac ako $7 . 9 = 63$.

A - III - 5

Daná je postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $a_n \neq a_m$ pre $n \neq m$, dané je prirodzené číslo k. Zostrojte prosté zobrazenie P množiny $1, 2, \ldots, 20k$ do množiny prirodzených čísel také, aby platilo

$$a_{P(1)} < a_{P(2)} < \ldots < a_{P(10)},$$

$$a_{P(10)} > a_{P(11)} > \ldots > a_{P(20)},$$

$$a_{P(20)} < a_{P(21)} < \ldots < a_{P(30)},$$

$$\vdots$$

$$a_{P(20k-10)} > a_{P(20k-9)} > \ldots > a_{P(20k)},$$

$$a_{P(10)} > a_{P(30)} > \ldots > a_{P(20k-10)},$$

$$a_{P(1)} < a_{P(20)} < \ldots < a_{P(20k)}.$$

Riešenie. Najprv prvých $20k$ členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zoradíme podľa veľkosti do rastúcej postupnosti. To znamená, že zostrojíme prosté zobrazenie R množiny $\{1, 2, \ldots, 20k\}$ na seba také, že

$$a_{R(1)} < a_{R(2)} < \ldots . < a_{R(20k)}. \tag{1}$$

Zobrazenie P zostrojíme tak, že položíme $P(1) = R(1)$ a za čísla $P(2),\ldots,P(10)$ zvolíme deväť najväčších z čísel $R(1),\ldots, R(20k)$, za $P(11),\ldots,P(20)$ zvolíme desať najmenších z čísel $R(2),\ldots,R(20k)$, ale v klesajúcom poradí. Za $P(21),\ldots,P(30)$ volíme desať najväčších (z čísel $R(1),\ldots,R(20k)$), ktoré sme ešte nepoužili, a tak ďalej striedajúc zase desať najmenších v klesajúcom poradí za čísla $P(31),\ldots,P(40)$.

Teda (zabezpečujeme platnosť prvých dvoch riadkov a $a_{P(1)} > a_{P(20)}$):

$$P(1) = R(1),$$

$$P(2) = R(20k-8),\ P(3) = R(20k-7),\ldots,P(10) =$$
$$= R(20k),$$

$$P(11) = R(11),\ P(12) = R(10),\ldots,P(20) = R(2).$$

Ďalej definujeme v súlade s nerovnosťami v riadkoch $2i + 1$ a $2i + 2$:

$$P(20i + j) = R(20k - 10i - 9 + j) \quad \text{pre} \quad i = 1,2,\ldots,k - 1,$$
$$j = 1,2,\ldots,10,$$

$$P(20i + 10 + j) = R(10i + 12 - j) \quad \text{pre} \quad i = 1,2,\ldots, k - 1,$$
$$j = 1,2,\ldots, 10.$$

Ak $l = 2i + 1$ je nepárne, tak

$$P(10l) = P(20i + 10) = R(20k - 10i - 9 + 10) =$$

$$= R(20k - 10i + 1),$$

$$P(10l + 1) = P(20i + 10 + 1) = R(10i + 12 - 1) =$$

$$= R(10i + 11).$$

Keďže $2i < k$, tak $10i + 11 < 20k - 10i + 1$, a teda

$$a_{P(10l)} > a_{P(10l+1)} \,.$$

Pre l párne by sme postupovali podobne. Ukážeme ešte platnosť nerovnosti v predposlednom riadku. Podľa definície zobrazenia P platí

$$P(20i + 10) = R(20k - 10i + 1).$$

Keďže $20k - 10 + 1 > 20k - 20 + 1 > \ldots > 20k - - 10(k - 1) + 1$, tak

$$a_{P(10)} > a_{P(30)} = a_{R(20k-10+1)} > a_{P(50)} = a_{R(20k-20+1)}$$

atď.

A - III - 6

Nechť n, k jsou daná přirozená čísla. Určete všechny uspořádané n-tice nezáporných reálných čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které splňují soustavu rovnic

$$(1) \qquad x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = 1,$$

$$(2) \qquad (1 + x_1).(1 + x_2). \ldots .(1 + x_n) = 2.$$

Riešenie. Nech nezáporné čísla $x_1, \ldots, x_n$ vyhovujú rovniciam (1) a (2).

Keby bolo $x_i > 1$, tak $x_1^k + \ldots + x_n^k \geqq x_i^k > 1$, čo je spor s (1). Teda $0 \leqq x_i \leqq 1$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Takže pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $x_i^k \leqq x_i$.

Využijeme to, že čísla $x_1, \ldots, x_n$ sú nezáporné a z rovnice (2) postupne dostaneme

$$2 = (1 + x_1). \ldots .(1 + x_n) = 1 + (x_1 + \ldots + x_n) +$$
$$+ (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}\, x_n) + \ldots + x_1x_2. \ldots .x_n \geqq 1 +$$
$$+ (x_1 + \ldots + x_n) + (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}\, x_n) \geqq 1 +$$
$$+ (x_1^k + \ldots + x_n^k) + (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}\, x_n) \geqq 2 +$$
$$+ (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}\, x_n).$$

V uvedených nerovnostiach musí platiť rovnosť a teda musí platiť

$$x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n = 0.$$

Z toho vyplýva, že z čísel $x_1, \ldots, x_n$ môže byť najviac jedno nenulové. Ak všetky $x_1, \ldots, x_n$ okrem x_i sú rovné nule, tak z (1) vyplýva, že $x_i = 1$. Teda n-tica $x_1, \ldots, x_n$ musí byť niektorá z n-tíc

$$
(3) \qquad \begin{array}{c}
1, 0, 0, 0, \ldots, 0 \\
0, 1, 0, 0, \ldots, 0 \\
0, 0, 1, 0, \ldots, 0 \\
\vdots \\
0, 0, 0, \ldots, 0, 1\,.
\end{array}
$$

Skúškou sa presvedčíme, že uvedené n-tice sú riešením rovníc (1) a (2).

Podľa riešenia *J. Sgalla,* žiaka III. D triedy
Gymnázia W. Piecka v Prahe.

Iné riešenie. Ľahko vidieť, že n-tice (3) sú riešením rovníc (1) a (2). Matematickou indukciou ukážeme, že rovnice (1) a (2) iné riešenia nemajú.

Pre $n = 1$ rovnice (1) a (2) majú tvar

$$x_1^k = 1,$$

$$1 + x_1 = 2,$$

a teda $x_1 = 1$ je jediné riešenie.

Predpokladajme, že sústava (1) a (2) nemá iné riešenia ako (3), a skúmajme sústavu

$$(4) \qquad x_1^k + \ldots + x_{n+1}^k = 1,$$

$$(5) \qquad (1 + x_1). \ldots .(1 + x_{n+1}) = 2.$$

Z rovnice (4) vyplýva, že $0 \leqq x_i \leqq 1$ pre $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, a teda $0 \leqq x_i^k \leqq x_i$. Potom tiež

$$x_1 + \ldots + x_{n+1} \geqq 1.$$

Z rovnice (5) dostaneme

$$2 = (1 + x_1). \ldots .(1 + x_{n+1}) = 1 + (x_1 + \ldots + x_{n+1}) +$$

$$+ \ldots + x_1 x_2. \ldots .x_{n+1} \geqq 1 + 1 + x_1 . x_2. \ldots .x_{n+1}.$$

Teda $x_1 . x_2 . \ldots . x_{n+1} = 0$. Teda jedno z čísel $x_1, x_2, \ldots,$ x_{n+1} musí byť rovné nule, napr. $x_{n+1} = 0$. Potom dosadením do rovníc (4) a (5) dostaneme pre čísla $x_1, \ldots, x_n$ rovnice (1) a (2). O tých už vieme, že majú riešenia (3). Teda rovnice (4) a (5) majú riešenia $n + 1$-tice núl a jednej jednotky.

Podľa riešenia *L. Kouby,* žiaka IV. D triedy
Gymnázia W. Piecka v Prahe.

Korespondenční seminář ÚV MO

Jednou z forem péče o žáky talentované v matematice, kteří nejsou z Prahy ani z Bratislavy, a nemají tudíž možnost pracovat v tamních seminářích, jsou korespondenční semináře. ÚV MO pořádal v průběhu 31. ročníku MO celostátní korespondenční seminář, jehož se zúčastnilo 37 žáků. Bylo jim zasláno ve třech tématech celkem 17 úloh. Řešení účastníků semináře opravovali pracovníci MÚ ČSAV v Praze a opravená řešení se žákům vracela spolu s rozmnoženým komentářem ke každé úloze. Správnost řešení se bodovala, nejlepšími účastníky celostátního korespondenčního semináře ve školním roce 1981/82 byli:

Vladan Pecha, 3. ročník gymnázia M. Koperníka v Bílovci,
Galina Kumičáková, 4. ročník gymnázia v Košicích, Kováčská ul.,
Jaroslav Šindelář, 4. ročník gymnázia v Teplicích,
Ľubomír Šoltés, 4. ročník gymnázia v Michalovcích.

Uvádíme znění všech úloh korespondenčního semináře ÚV MO.

1.1 Posloupnost $\{p_n\}$ je rekurentně definována takto: $p_1 = 2$, pro $n > 1$ je p_n největší prvočíselný dělitel čísla

$$p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1.$$

Dokažte, že žádný člen posloupnosti p_n není roven 5.

1.2 Je dáno přirozené číslo k. Sestavte k-člennou posloupnost $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ tak, aby pro každé i ($0 \leqq i \leqq k - 1$) byl člen a_i roven počtu členů rovných i.

1.3 Je dáno přirozené číslo n, ($n \geqq 2$). Definujeme n-členné posloupnosti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ rekurentně: $x_1 = n$, $y_1 = 1$, pro $i \geqq 1$ je

$$x_{i+1} = \left[\frac{1}{2}(x_i + y_i)\right], \quad y_{i+1} = \left[\frac{n}{x_i + 1}\right].$$

Dokažte, že nejmenší z členů $x_1, x_2, \dots, x_n$ je roven $[\sqrt{n}]$. ([ ] znamená celou část čísla.)

1.4 Nechť $\{a_n\}$ je neklesající posloupnost přirozených čísel taková, že posloupnost $\left\{\dfrac{n}{a_n}\right\}$ je neomezená. Dokažte, že nekonečně mnoho členů posloupnosti $\left\{\dfrac{n}{a_n}\right\}$ jsou celá čísla.

1.5 Dokažte, že z každé posloupnosti přirozených čísel lze vybrat posloupnost, jejíž každé dva členy jsou nesoudělné, nebo posloupnost, jejíž všechny členy mají společného dělitele většího než 1.

1.6 Je dána posloupnost přirozených čísel taková, že pro každé přirozené číslo n součet členů, které nejsou větší než n, není menší než n. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu k existuje její vybraná posloupnost, která má součet členů roven k.

1.7 Je dáno reálné číslo a. Posloupnost $\{a_n\}$ je rekurentně definována takto: $a_1 = a$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{a_n}\right)$ pro $a_n \neq 0$, $a_{n+1} = 0$ pro $a_n = 0$. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ obsahuje nekonečně mnoho nekladných členů.

Geometrie

2.1 ABC je rovnoramenný trojúhelník, $|AC| = |BC|$, k je kružnice se středem C, jejíž poloměr je menší než $|AC|$. Najděte na k všechny body T, pro které je tečna kružnice k v bodě T osou úhlu ATB.

2.2 Je dána kružnice k se středem O, na ní body A, B, $A \neq B$, AB není průměrem kružnice k, NN' je průměr kolmý k AB, přičemž N leží na menším oblouku kružnice k s krajními body A, B. Označme M průsečík tětiv NN', AB. Nechť P je libovolný bod většího oblouku, $P \neq A, B, N'$. Dále je PQ tětiva kružnice k procházející bodem M, a R průsečík tětiv AB, PN. Dokažte, že $|QM| < |RN|$.

2.3 ABC, AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 jsou čtyři rovnostranné trojúhelníky ležící v jedné rovině a stejně orientované. Dokažte, že středy úseček A_1C_2, B_1A_2, C_1B_2 tvoří rovnostranný trojúhelník.

2.4 $ABCDE$ a $A_1B_1C_1D_1E_1$ jsou dva pravidelné pětiúhelníky ležící v jedné rovině a stejně orientované, přičemž $A = A_1$. Dokažte, že přímky BB_1, CC_1, DD_1 a EE_1 procházejí jedním bodem.

2.5 Strany trojúhelníku jsou a, b, c, $r = a^2 + b^2 + c^2$, $s = (a + b + c)^2$. Dokažte, že $2r < s \leqq 3r$.

Matematická indukce

3.1 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nechť je konečná posloupnost nezáporných čísel, pro kterou platí: $a_1 \leqq a_2 \leqq 2a_1$, $a_2 \leqq a_3 \leqq \leqq 2a_2, \ldots, a_{n-1} \leqq a_n \leqq 2a_{n-1}$. Dokažte, že existuje konečná posloupnost $b_1, b_2, \ldots, b_n$, pro kterou platí: b_i se rovná 1 nebo -1 a $0 \leqq b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n \leqq a_1$.

3.2 Budiž n přirozené číslo, x libovolné přirozené číslo menší nebo rovné $n!$. Potom existují přirozená čísla $k, a_1, a_2, \ldots, a_k$ taková, že platí následující podmínky: $k \leqq n$, a_i dělí $n!$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$ a $x = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

3.3 Vrcholy neorientovaného grafu (bez smyček) obarvujeme několika různými barvami tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu. Dokažte: Jestliže existuje přirozené číslo n takové, že z každého vrcholu daného grafu vychází nejvýše n hran, potom je možno vrcholy obarvit $n + 1$ barvami.

3.4 Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí: Součet žádných n po sobě jdoucích členů Fibonacciovy posloupnosti není dělitelný třemi.

Fibonacciova posloupnost přirozených čísel je definována vztahy $a_1 = a_2 = 1$, $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ pro všechna $k > 1$.

3.5 V rovině je dána jednotková čtvercová síť. Uvažujme mnohoúhelník (ne nutně konvexní) s vrcholy ve vrcholech sítě, jehož hranice je jediná lomená čára, která sama sebe neprotíná. Označme P obsah tohoto mnohoúhelníku, V počet mřížových bodů ležících uvnitř a S počet mřížových bodů ležících na hranici tohoto mnohoúhelníku. Dokažte, že pro každý takový mnohoúhelník platí

$$\tfrac{1}{2} S + V - P = 1.$$

Správa o 23. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. Organizácia a priebeh súťaže

V poradí už 23. medzinárodná matematická olympiáda (MMO) sa konala v dňoch 5.—14. 7. 1982 v Maďarskej ľudovej republike, a to v prevažnej miere v jej hlavnom meste - - Budapešti. Poriadateľom 23. MMO bolo ministerstvo školstva MĽR a pri príprave odbornej časti súťaže i rámcového programu spolupracovali predstavitelia a členovia maďarskej matematickej spoločnosti Jánosa Bolyaia.

V organizácii tohtoročnej MMO v porovnaní s predchádzajúcimi došlo k niekoľkým zmenám. Najpodstatnejšou z nich však bolo, že usporiadatelia pozvali len štvorčlenné družstvá, zatiaľ čo v minulosti sa MMO zúčastňoval z jednotlivých krajín dvojnásobný počet súťažiacich žiakov. Oficiálne bolo pozvaných 32 krajín (z účastníkov predchádzajúcich MMO nepozvali organizátori len Taliansko a Turecko, ktoré sa nezúčastňovali pravidelne), z ktorých účasť odriekli iba Luxembursko, Mexiko a Španielsko. Spolu s poriadajúcou MĽR poslalo teda na 23. MMO svoje družstvá týchto 30 zemí: Alžírsko (DZ), Austrália (AU), Belgicko (BE), Brazília (BR), Bulharsko (BG), Československo (CS), Fínsko (FI), Francúzsko (FR), Grécko (GR), Holandsko (NL), Izrael (IL), Juhoslávia (YU), Kanada (CA), Kolumbia (CO), Kuba (CU), Kuvajt (KW), Maďarsko (HU), Mongolsko (MG), NDR (DD), NSR (DE), Poľsko (PL), Rakúsko (AT), Rumunsko (RO), Švédsko (SE), Tunis (TN), USA (US), Veľká Británia (GB), Venezuela (VE), Vietnam (VN) a ZSSR (SU). Je to rekordný počet, keď po prvý raz na MMO pricestovala delegácia Kuvajtu, po niekoľkoročnej prestávke delegácie Alžírska a Mongolska a po vlaňajšej absencii na 22. MMO v USA tiež NDR a Vietnam. Z 27 delegácií zastúpených na 22. MMO chýbali len Luxembursko a Mexiko. Všetky delegácie pricestovali so štvorčlennými družstvami, ale jeden z alžírskych žiakov pre onemocnenie na súťaž nenastúpil, takže na 23. MMO si zmeralo svoje schopnosti 119 matematických nádejí zo všetkých svetadielov.

Prevažná časť vedúcich delegácií, ktorí s pracovníkmi usporiadajúcej krajiny tvoria medzinárodnú jury, pricestovala do Budapešti v pondelok 5. 7. 1982. Stadiaľ ich organizátori po skupinkách mikrobusom a automobilmi prepravili do Ceglédu, štyridsaťtisícového mestečka ležiaceho 70 km juhovýchodne od Budapešti. Predsedom jury bol akademik Ákos Császár, vedúci katedry na budapeštianskej univerzite Loranda Eötvösa. Úlohy tajomníka jury príkladne plnil najčastejší účastník doterajších MMO prof. dr. Endre Hódi, vedúci matematického oddelenia pedagogického ústavu v Budapešti, ktorý bol zároveň vedúcim maďarskej delegácie.

Po svojom príchode do Ceglédu dostali vedúci delegácií širší návrh úloh pre súťaž s riešeniami v angličtine a textami vo všetkých štyroch oficiálnych jazykoch (angličtina, francúzština, nemčina, ruština). Obsahoval dva varianty šiestich úloh tvoriace tematicky pestré celky a osem náhradných úloh pre prípadné doplňovanie. Návrh pripravila maďarská úlohová komisia vedená dr. Józsefom Pelikánom z 57 úloh navrhnutých zúčastnenými krajinami, keď takmer polovica krajín, ktoré prijali pozvanie na 23. MMO, do požadovaného termínu (15. 4. 1982) možnosť poslať najviac 5 úloh pre súťaž nevyužila. Boli to AT, CO, CU, DE, DZ, GR, IL, KW, MG, RO, SE, VE. V predloženom širšom výbere 20 úloh boli návrhy jednotlivých delegácií zastúpené takto: CA a GB po 3, NL a SU po 2 a AU, BG, BR, CS, FI, FR, PL, TN, VN a YU po 1 úlohe. Neuplatnili sa teda len návrhy úloh z BE, DD a US.

Prvé zasadnutie jury (6. 7. 1982 predpoludním) bolo venované všeobecnej rozprave o navrhovaných úlohách.

Po obedňajšej prestávke, počas ktorej prijal členov jury a ďalších účastníkov 23. MMO mešťanosta Ceglédu, rokovanie pokračovalo ďalšou diskusiou o úlohách, v závere ktorej bol v podstate prijatý prvý navrhnutý variant s dvoma zmenami, keď juhoslovanská úloha o plošnom obsahu konvexného mnohouholníka a mrežových bodoch bola nahradená mierne archaickou holandskou planimetrickou dôkazovou úlohou a bulharskú úlohu o koreňoch reciprokej rovnice 4. stupňa vystriedala anglická úloha o riešeniach diofantickej rovnice 3. stupňa. Zvlášť prvá zmena, za ktorú sa pri hlasovaní vyslovilo 18 delegátov, sa v konečnom dôsledku ukázala ako nie príliš šťastná pre väčšinu družstiev, naše nevynímajúc.

Na záver stredajšieho predpoludňajšieho zasadnutia jury konečne schválila všetky 4 oficiálne formulácie vybraných úloh v oficiálnych jazykoch olympiády a delegáti tak mali možnosť prikročiť k prekladom textov úloh do materčiny súťažiacich a k ich rozmnoženiu v potrebnom počte. Vedúcim delegácií už pri tejto práci pomáhali aj ich zástupcovia, ktorí 7. 7. priviedli do Budapešti súťažiace družstvá.

Po relatívne krátkej diskusii na svojom popoludňajšom zasadnutí jury väčšinou hlasov schválila návrh, aby počet bodov za úplné riešenie každej úlohy bol rovnaký - sedem. Z toho vyplývalo, že každý súťažiaci mohol získať najviac 42 bodov. O dobe určenej na riešenie úloh sa v jury nerokovalo, pretože organizačný poriadok 23. MMO stanovil na riešenie každej trojice štyri a pol hodiny čistého času.

V piatok 9. 7. 1982 vo včasných ranných hodinách čakala vedúcich delegácií a ich zástupcov cesta autobusom do Budapešti na slávnostné otvorenie 23. MMO, ktoré sa konalo v aule gymnázia Margity Kaffkovej. Po krátkom príhovore predsedu jury akad. Császára sa žiaci rozišli do tried, kde na nich čakala prvá trojica nasledujúceho súboru súťažných úloh.

Prvý deň súťaže - 9. júla 1982

1. Funkcia f je definovaná pre všetky celé kladné n a nadobúda len celé nezáporné hodnoty. Ďalej platí:

a) $f(2) = 0, f(3) > 0, f(9\,999) = 3\,333$;

b) pre všetky m, n nadobúda rozdiel

$$f(m + n) - f(m) - f(n)$$

hodnotu 0 alebo 1.

Určte $f(1982)$. (Veľká Británia)

2. Je daný nerovnoramenný trojuholník $A_1A_2A_3$ so stranami a_1, a_2, a_3 (a_i je strana protiľahlá vrcholu A_i). Nech je pre všetky

$i = 1, 2, 3$ M_i stred strany a_i, T_i bod dotyku strany a_i a kružnice vpísanej trojuholníku $A_1A_2A_3$, S_i bod súmerne združený k bodu T_i podľa osi vnútorného uhla daného trojuholníka pri vrchole A_i.

Dokážte, že priamky M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 prechádzajú tým istým bodom. (Holandsko)

3. Uvažujme o postupnostiach $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ kladných reálnych čísel s vlastnosťami: $x_0 = 1$ a pre všetky $i \geqq 0$ platí: $x_{i+1} \leqq x_i$.

a) Dokážte, že pre každú takú postupnosť existuje $n \geqq 1$ tak, že platí

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqq 3{,}999.$$

b) Nájdite takú postupnosť daných vlastností, pre ktorú nerovnosť

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$$

platí pre všetky $n \geqq 1$. (ZSSR)

Druhý deň súťaže - 10. júla 1982

4. Je daná rovnica

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n.$$

Dokážte, že ak celé kladné číslo n je také, že daná rovnica má celočíselné riešenie x, y, potom má aspoň tri celočíselné riešenia.

Ukážte, že pre $n = 2\,891$ nemá daná rovnica celočíselné riešenia. (Veľká Británia)

5. Na uhlopriečkach AC a CE pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ sú dané vnútorné body M, resp. N tak, že platí

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|CE|} = \lambda.$$

Vypočítajte deliaci pomer λ, ak body B, M, N ležia na priamke. (Holandsko)

6. Nech S je štvorec so stranou dĺžky 100 a nech L je lomená čiara v S bez násobných bodov zložená z úsečiek $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n, A_0 \neq A_n$ taká, že pre každý bod P hranice štvorca S existuje na L taký bod, ktorého vzdialenosť od P nie je väčšia než $\frac{1}{2}$.

Dokážte, že na L existujú také dva body X, Y, ktorých vzájomná vzdialenosť nie je väčšia než 1, ale dĺžka tej časti čiary L, ktorá je ohraničená bodmi X a Y, nie je menšia než 198. (Vietnam)

V zátvorke za textom úlohy je meno krajiny, z návrhu ktorej úloha pochádza.

Pre zodpovedanie otázok súťažiacich na prípadné nejasnosti v texte sa aj v Budapešti použila tradičná osvedčená forma, keď žiak má možnosť poslať otázku písomne na lístku k tomu určenom najneskoršie pol hodiny po obdržaní textov. Otázka sa prečíta a preloží v jury, ktorá schvaľuje taktiež plný text odpovede. V čase čakania na otázky žiakov v prvý súťažný deň predstavil predseda jury delegátom vedúceho skupiny koordinátorov, ktorým bol člen korešpondent Maďarskej akadémie vied dr. László Lovász, ďalší z niekdajších vynikajúcich maďarských olympionikov, ktorý získal prvú cenu na rovnakých troch MMO ako dr. Pelikán.

V sobotu 10. 7. opäť zavčas rána odchádzali delegáti z Ceglédu, tentoraz už definitívne. Po zodpovedaní otázok k textom druhej trojice úloh sa ubytovali na zvyšok pobytu v MĽR v osemnásťposchodovom internáte Zoltána Schönherza patriacom budapeštianskej vysokej škole technickej, kde sa konala tiež koordinácia hodnotení a záverečné zasadnutie jury.

Pre koordináciu bolo vyhradené v programe nezvykle málo času: sobotňajšie popoludnie a celý pondelok. Vďaka tomu, že každú úlohu koordinovali dve skupiny maďarských koordinátorov podľa umne zostaveného grafikonu, nakoniec sa túto náročnú úlohu s vypätím všetkých síl podarilo zvládnuť tak, že začiatok záverečného zasadnutia jury plánovaného na pondelok 12. 7. večer sa oneskoril len asi o hodinu.

Popoludní po súťaži mali žiaci v oba súťažné dni voľný program a v nedeľu 11. 7. 1982 sa uskutočnila celodenná spoločná exkurzia všetkých účastníkov 23. MMO do Balatonského pionierskeho tábora v Zánke.

Na pondelok 12. 7. 1982 mali žiaci plánovaný celodenný výlet loďou po Dunaji do Visegrádu spojený s prehliadkou tamojších historických pamiatok. Večer sa uskutočnila beseda s autorom svetoznámej »bűvös koczky« a ďalších hlavolamov prof. Rubikom.

V pondelok 12. 7. 1982 večer na záverečnom zasadnutí jury sa najskôr rozhodlo o hodnotení riešení v tých prípadoch, keď nedošlo k dohode medzi vedením delegácie a koordinátormi. Také prípady boli celkom tri a ich riešenie nezabralo mnoho času. Potom nasledovalo rozhodovanie o potrebnom počte bodov pre získanie jednotlivých cien. Po krátkej diskusii prešiel nakoniec pôvodný návrh predsedu jury, aby cenu dostali súťažiaci, ktorí získali aspoň polovicu možných bodov. Takých bolo celkom 61. Pre prvú cenu bolo stanovené rozpätie 42—37 bodov, pre druhú cenu 36—30 bodov a pre tretiu cenu 29—21 bodov. Znamenalo to takmer ideálne rozdelenie cien, keď prvú cenu dostalo 10, druhú 20 a tretiu 31 súťažiacich. O udelení zvláštnych cien za originálne riešenie úloh sa nerokovalo, pretože organizačný poriadok 23. MMO s tým nepočítal. V závere rokovania sa diskutovala otázka organizátorov budúcich MMO. Vedúci francúzskej delegácie uviedol, že u nich sa uvažovalo o usporiadaní MMO roku 1985 v Paríži. Vzhľadom na to, že žiadna delegácia sa nehlási k usporiadaniu MMO roku 1983, pokúsi sa po návrate do vlasti získať súhlas k tomu, aby sa konala v Paríži už 24. MMO roku 1983. Vedenie delegácie ČSSR informovalo o predbežných úvahách usporiadať 25. MMO roku 1984 v Prahe a zástupca Fínska prof. Lehtinen oznámil, že o usporiadanie 26. MMO roku 1985 sa bude pravdepodobne uchádzať jeho krajina. Vedúci austrálskej delegácie prof. Williams informoval, že MMO r. 1988 by chceli usporiadať v Austrálii v rámci osláv 200. výročia vzniku austrálskeho zväzu. V rámci diskusie o budúcnosti MMO odznel o. i. návrh, aby sa oficiálnym jazykom stala taktiež španielčina. Poďakovaním predsedu jury akad. Császára ostatným členom za činorodú spoluprácu a vedúceho francúzskej delegácie prof. Deschampsa maďarským hostiteľom za starostlivú prípravu a dobrú organizáciu 23. MMO sa záverečné rokovanie jury skončilo.

V utorok 13. 7. predpoludním sa uskutočnilo rozšírené zasadnutie komisie ICMI pre organizáciu MMO za účasti jej tajomníka J. Herseeho z Veľkej Británie. S uspokojením konštatovalo, že pre najbližšie tri roky sú usporiadatelia MMO predbežne zabezpečení.

Popoludní prijala vedenia zahraničných delegácií a domácich organizátorov v zasadacej sieni rektora Vysokej školy záhradníckej v Budapešti námestníčka ministra školstva MĽR Mária Hanga a hneď potom nasledovalo slávnostné zakončenie 23. MMO spojené s vyhlásením výsledkov a odovzdaním diplomov držiteľom cien i ostatným súťažiacim v aule tejto vysokej školy. Na ňom v krátkom prejave predseda jury zhodnotil priebeh a výsledky 23. MMO a námestníčka ministra školstva MĽR M. Hanga vo svojom vystúpení vyzdvihla význam matematiky a medzinárodných stretnutí matematických talentov a poďakovala všetkým, ktorí sa pričinili o odborný i spoločenský úspech podujatia. Súčasne s diplomami preberali víťazi 23. MMO i ostatní súťažiaci vecné ceny a suveníry.

Definitívnou bodkou za tohtoročnou MMO sa stala záverečná slávnostná večera, ktorá sa konala o 20,00 hod. v budapeštianskom hoteli Ifjuság. Prehovorili na nej predseda jury, predstaviteľ ministerstva školstva MĽR a vedúci delegácie Kuvajtu, ktorí tak využili príležitosť poďakovať sa za pozvanie ich delegácie na 23. MMO, čím dostali po prvý raz príležitosť zúčastniť sa na takomto podujatí.

V stredu 14. 7. 1982 od skorých ranných hodín postupne opúšťali jednotlivé delegácie pohostinnú pôdu hlavného mesta Maďarska. Ako jedna z prvých odcestovala rýchlikom Hungária do svojej vlasti aj československá delegácia.

2. Výsledky 23. MMO

Výber súťažných úloh na MMO býva každoročne najzodpovednejšou úlohou jury a má podstatný vplyv na priebeh a výsledky súťaže. Maďarskí organizátori sa usilovali uľahčiť túto úlohu starostlivou prípravou navrhovaných variantov šiestich problémov, z ktorých prvý svojou tematickou pestrosťou i primeranou obťažnosťou, keď obsahoval relatívne ľahké i náročné úlohy, zodpovedal predstavám značnej časti vedúcich delegácií. V priebehu rokovania jury o úlohách sa však prejavila snaha niektorých delegácií zľahčiť navrhnutý variant a tak sa stalo, že mechanickou väčšinou pri hlasovaní sa do výberu dostala holandská planimetrická úloha zaradená nakoniec ako druhá v poradí. Súťaž ukázala, že väčšina súťažiacich nebola na úlohu tohto typu pripravená a nedokázali si s ňou poradiť. Okrem niekoľko málo delegácií (NDR, NSR, ZSSR, Maďarsko, Vietnam, Veľká Británia) všetky na nej strácali body, čo podstatne ovplyvnilo celkové výsledky 23. MMO. Pre zaujímavosť spomeňme, že ani družstvo Holandska, ktoré úlohu navrhlo, nezískalo za jej riešenie ani bod. Možno povedať, že ostatné úlohy boli vhodne volené a umožnili presadiť sa najschopnejším účastníkom súťaže.

Svoju suverenitu z vlaňajška potvrdili najmä družstvá NSR, ZSSR a USA. Po vlaňajšej neúčasti sa opäť umiestnili medzi najlepšími družstvá NDR a Vietnamu. Viac sa čakalo na domácej pôde od Maďarska i od tradične veľmi úspešnej Veľkej Británie, aj keď všetci členovia oboch družstiev získali ceny rovnako ako reprezentanti ČSSR a Bulharska, čím potvrdili dobrý štandard z posledných rokov. V porovnaní

Krajina	Súčet bodov žiaka č. 1	2	3	4	Celkom bodov	Neofic. porad.	Počet cien I.	II.	III.
Alžírsko (DZ)	11	10	2	–	23	27.–28.	–	–	–
Austrália (AU)	20	23	10	13	66	20.–21.	–	–	1
Belgicko (BE)	7	2	22	19	50	24.	–	–	1
Brazília (BR)	24	10	19	13	66	20.–21.	–	–	1
Bulharsko (BG)	26	29	26	27	108	9.	–	–	4
ČSSR (CS)	29	21	31	34	115	7.	–	2	2
Fínsko (FI)	16	35	28	34	113	8.	–	2	1
Francúzsko (FR)	38	17	14	20	89	15.	1	–	–
Grécko (GR)	14	19	9	13	55	23.	–	–	–
Holandsko (NL)	17	22	34	19	92	14.	–	1	1
Izrael (IL)	22	18	17	18	75	18.	–	–	1
Juhoslávia (YU)	30	20	18	30	98	12.	–	2	–
Kanada (CA)	14	12	23	29	78	17.	–	–	2
Kolumbia (CO)	3	9	18	4	34	26.	–	–	–
Kuba (CU)	17	7	17	3	44	25.	–	–	–
Kuvajt (KW)	2	1	1	0	4	30.	–	–	–
Maďarsko (HU)	21	36	33	35	125	6.	–	3	1
Mongolsko (MG)	21	12	13	10	56	22.	–	–	1
NDR(DD)	37	40	27	32	136	3.–4.	2	1	1
NSR (DE)	42	35	31	37	145	1.	2	2	–
Poľsko (PL)	30	23	16	27	96	13.	–	1	2
Rakúsko (AT)	11	11	38	22	82	16.	1	–	1
Rumunsko (RO)	26	14	26	33	99	11.	–	1	2
Švédsko (SE)	23	15	11	25	74	19.	–	–	2
Tunis (TN)	7	8	1	3	19	29.	–	–	–
USA (US)	40	35	29	32	136	3.–4.	1	2	1
Veľká Británia (GB)	23	23	28	29	103	10.	–	–	4
Venezuela (VE)	11	10	1	1	23	27.–28.	–	–	–
Vietnam (VN)	42	30	32	29	133	5.	1	2	1
ZSSR (SU)	37	42	30	28	137	2.	2	1	1
Celkom					2474		10	20	31

s vlaňajškom značne stratili Rakúsko a Kanada, kým ostatné tu nemenované družstvá dosiahli v podstate očakávané výsledky. Podrobný prehľad o výsledkoch 23. MMO podáva tabuľka.

Tabuľka zároveň ukazuje, že 3 žiaci: Bruno Haible (DE), Le Tu Quoc Thang (VN) a Grigorij Perelman (SU) získali plný počet bodov a stali sa tak absolútnymi víťazmi 23. MMO. Skutočnosť, že účastníci 23. MMO získali spolu 2 474 bodov, čo je 49,5 % z celkového možného počtu, potvrdzuje, že aj napriek vyššie uvedeným výhradám sa výber úloh podaril jury lepšie než v minulom roku a ukázal sa byť pre súťaž primeraným. Kvôli úplnosti ešte dodajme, že na 23. MMO súťažilo 7 dievčat (HU 1, IL 1, MG 1, TN 3, VE 1), z ktorých len Rita Csákány (HU) získala tretiu cenu, keď dosiahla 21 bodov.

3. Hodnotenie československej účasti

Československé družstvo pre 23. MMO vybralo predsedníctvo ÚV MO predovšetkým na základe výsledkov II. a III. kola kategórie A 31. ročníka MO. Pri nominácii však prihliadalo tiež k poznatkom z dvoch sústredení širšieho výberu, ktoré sa konali v Štiříne od 5. do 10. 4. 1982 a od 7. do 19. 6. 1982, k poznatkom z korešpondenčného seminára a predchádzajúcej účasti členov širšieho výberu na MMO. Príležitosť zmerať svoje matematické tvorivé schopnosti s reprezentantmi 29 krajín všetkých svetadielov tak dostali títo žiaci tried so zameraním na matematiku z Gymnázia W. Piecka v Prahe 2: Petr Couf, 4. tr.; Miroslav Engliš, 4. tr.; Igor Kříž, 3. tr.; Jiří Sgall, 3. tr. Vedením delegácie bol poverený predseda ÚV MO prof. dr. Jozef Moravčík, CSc., prorektor Vysokej školy dopravy a spojov v Žiline, a jeho zástupcom bol podpredseda ÚV MO dr. František Zítek, CSc., zástupca riaditeľa Matematického ústavu ČSAV v Prahe. V súvislosti s predpokladaným usporiadaním 25. MMO roku 1984 v Prahe však bola naša delegácia početnejšia než obvykle, pretože 23. MMO sa zúčastnil ako pozorovateľ tiež tajomník ÚV MO dr. Leo Boček, CSc., z MFF UK v Prahe, vyslaný MŠ ČSR a na náklady ÚV JČSMF, resp. ÚV JSMF, tiež dr. Václav Šůla z MŠ ČSR, resp. dr. Ladislav Berger, predseda pobočky JSMF v Žiline a člen ÚV MO.

Ako už bolo vyššie spomenuté, podieľalo sa Československo na organizácii 23. MMO aj zaslaním návrhu troch súťažných úloh do požadovaného termínu. Jednu z nich organizátori zaradili aj do širšieho výberu, ale do prijatej šestice sa už nedostala.

Výsledky, ktoré naši žiaci na 23. MMO dosiahli, sú zhrnuté v tabuľke:

Žiak	Počet bodov za riešenie úlohy č. 1	2	3	4	5	6	Celkom	Udelená cena a celkové umiest.	
Couf Petr	7	0	2	7	6	7	29	III.	31.–36.
Engliš Miroslav	7	0	7	0	7	0	21	III.	59.–61.
Kříž Igor	7	1	7	7	7	2	31	II.	24.–25.
Sgall Jiří	6	0	7	7	7	7	34	II.	16.–18.
ČSSR spolu	27	1	23	21	27	16	115		

Tabuľka ukazuje, že naši žiaci si suverénne poradili s 1. a 5. úlohou, keď strata jedného bodu bola v oboch prípadoch spôsobená nepozornosťou pri jednoduchom numerickom počítaní. Prekvapením bola strata bodov u M. Engliša za 4. úlohu, pretože ide o úlohu zo školskej teórie čísel, o ktorú sa pomerne silne zaujíma. V podstate uspokojivý je výsledok v 3. i v 6. úlohe, ktoré boli všeobecne považované za najnáročnejšie, ale veľmi nepríjemným prekvapením je doslovný výbuch celého družstva v planimetrickej 2. úlohe. Okrem toho, čo už bolo uvedené vyššie, je treba konštatovať, že v triedach so zameraním na matematiku sa podobnej problematike venuje málo pozornosti, ale čo je horšie, pozabudlo sa na ňu aj v tohtoročných prípravných sústredeniach.

I keď československú účasť na 23. MMO možno považovať celkove za úspešnú - veď všetci členovia družstva získali ceny, pri kritickej náročnosti musíme po pravde povedať, že v silách družstva bolo podstatne viac. Stačí, ak pripomenieme, že už na 22. MMO Kříž a Couf získali 2. cenu so stratou len 2, resp. 4 bodov a Sgall si z USA priviezol 3. cenu. Ak na budúcich MMO chceme pokračovať v úspešnom trende posledných rokov, bude treba ešte lepšie využiť podmienky, ktoré nám ministerstvá školstva pre prípravu družstva poskytujú, a v prípravných sústredeniach opravdu nič neponechať na náhodu. Podľa poznatkov z krajín najúspešnejších na 23. MMO i podľa našich vlastných skúseností by malo mať aprílové sústredenie prednáškovo-seminárny charakter a júnové formu samostatného riešenia úloh s rôznou tematikou spojeného s rozborom rôznych metôd riešení. Bude potrebné v predsedníctve ÚV MO ešte starostlivejšie zvažovať tematiku sústredení a podľa vopred schválenej tematiky vyberať tých najvhodnejších lektorov. V tematike sústredení by nemali chýbať: elementárna číselná teória (vety o deliteľnosti, kongruencie, neurčité rovnice, číselne-teoretické funkcie), základy matematickej analýzy (postupnosti, limity, nekonečné rady), nerovnosti a odhady, rekurentné postupnosti, mnohočleny jednej a viac premenných (vlastnosti koreňov, apod.), základy funkčnej teórie (limita, spojitosť, trigonometrické, exponenciálne a logaritmické funkcie), rovnice a sústavy rovníc, diferenčné a funkcionálne rovnice, kombinatorika (kombinácie, binomické koeficienty, vytvárajúce funkcie), geometrické zobrazenia v rovine (zhodnosť, podobnosť, rovnoľahlosť), dôkazové planimetrické úlohy (trojuholník, kružnica, apod.), stereometria (štvorsten a jeho vlastnosti, apod.), metrické vlastnosti geometrických útvarov v rovine a priestore (trojuholníková nerovnosť, kružnica a jej časti, guľa), konvexné mnohouholníky, kombinatorická geometria.

Pokiaľ ide o prípravu na organizovanie MMO roku 1984, možno očakávať, že naši delegáti i pozorovatelia na 23. MMO mali oči otvorené a pozorne sledovali tak dobré, ako aj tienisté stránky organizácie, a odpozorované skúsenosti uplatnia pri príprave podujatia, ktoré by sa malo stať ďalšou príležitosťou pre šírenie dobrého mena našej socialistickej vlasti vo svete.

Riešenie 1. úlohy. Z časti a) zadania úlohy vyplýva, že $f(2) = 0$, a z časti b) zasa, že buď $f(2) = 2f(1)$, alebo $f(2) = 2f(1) + 1$. Vzhľadom na nezápornosť hodnôt funkcie f z toho vyplýva, že musí byť $f(1) = 0$. Z b) taktiež vyplýva

$$(1) \qquad f(m+n) = \begin{cases} f(m) + f(n), \\ f(m) + f(n) + 1, \end{cases}$$

z čoho pre $m = 1$, $n = 2$ ďalej dostaneme

$$f(3) = \begin{cases} f(1) + f(2) = 0, \\ f(1) + f(2) + 1 = 1, \end{cases}$$

odkiaľ vzhľadom na podmienku $f(3) > 0$ plynie, že $f(3) = 1$. Pre $m = 1$ a ľubovoľné celé kladné n z (1) dostaneme

$$(2) \qquad f(n+1) = \begin{cases} f(n) + f(1) = f(n), \\ f(n) + f(1) + 1 = f(n) + 1, \end{cases}$$

z čoho vyplýva, že funkcia f je neklesajúca. Podobne pre $m = 2$ a ľubovoľné celé kladné n z (1) dostaneme, že $f(n + 2) \geqq f(n)$, ale pre $m = 3$ už z (1) vyplýva, že $f(n + 3) \geqq f(n) + 1$ pre každé celé kladné n. Z toho máme, že

$f(6) \geqq f(3) + 1 = 2$, $f(9) \geqq f(6) + 1 \geqq 3$, atď. Úplnou indukciou ľahko dokážeme, že pre celé kladné n platí:

$$f(3n) \geqq n. \tag{3}$$

Videli sme, že pre $n = 1$ vzťah (3) platí. Nech teda platí pre nejaké celé kladné k: $f(3k) \geqq k$. Potom pre $n = 3k$, $m = 3$ z (1) máme

$$f(3k + 3) = \begin{cases} f(3k) + f(3) \geqq k + 1, \\ f(3k) + f(3) + 1 \geqq k + 2, \end{cases}$$

čo znamená, že $f(3(k + 1)) \geqq k + 1$, tj., že (3) platí pre $k + 1$, ako sme potrebovali dokázať. Ak pre nejaké celé $q > 0$ platí $f(3q) > q$, potom

$$f(3q + 3) = \begin{cases} f(3q) + f(3) > q + 1, \\ f(3q) + f(3) + 1 > q + 2, \end{cases}$$

z čoho je zrejmé, že pre každé celé kladné $n \geqq q$ už platí v (3) ostrá nerovnosť.

Z časti a) zadania úlohy však vieme, že $f(9\,999) = 3\,333$, čo znamená, že pre všetky $n \leqq 3\,333$ platí v (3) rovnosť. Špeciálne preto platí

$$1\,982 = f(3\,.\,1\,982) \geqq f(2\,.\,1\,982) + f(1\,982) \geqq$$

$$\geqq 3\,.\,f(1\,982).$$

Z toho však priamo vyplýva, že

$$661 > \frac{1\,982}{3} \geqq f(1\,982) \geqq f(1\,980) + f(2) =$$

$$= \frac{1\,980}{3} = 660\,.$$

Teda $f(1\,982) = 660$.

Iné riešenie (podľa *M. Engliša*). Rovnosť $f(1) = 0$ a vzťah (2) dostaneme ako hore. Vzťah (2) prakticky znamená, že pre každé celé kladné n platí

$$f(n) \leqq f(n+1) \leqq f(n) + 1. \tag{4}$$

Nech n je ľubovoľné celé kladné číslo. Dokážeme úplnou indukciou, že pre ľubovoľné celé kladné k platí

$$f(n) = \left[\frac{f(kn)}{k}\right], \tag{5}$$

kde symbol $[c]$ znamená celú časť čísla c. Pre $k = 1$ rovnosť (5) zrejme platí. Nech (5) platí pre nejaké celé $K > 0$, tj. nech

$$Kf(n) \leqq f(Kn) < Kf(n) + K. \tag{6}$$

Potom podľa b) je $f(Kn + n) = f(Kn) + f(n) + \varepsilon$, kde $\varepsilon \in \{0;\ 1\}$. Je teda $f(Kn + n) \geqq f(Kn) + f(n) \geqq Kf(n) +$

$+ f(n) = (K+1) f(n)$ podľa (6) a taktiež $f(Kn+n) \leqq \leqq f(Kn) + f(n) + 1 < (K+1) f(n) + K + 1$ čiže

$$(K+1) f(n) \leqq f((K+1) n) < (K+1)(f(n)+1),$$

odkiaľ

$$f(n) \leqq \frac{f((K+1) n)}{K+1} < f(n) + 1,$$

čo sme mali dokázať.

Teraz podľa (5) pre $n = 11$ a $k = 909$ a podľa a) dostaneme $f(11) = \left[\frac{f(9\,999)}{909}\right] = \left[\frac{3\,333}{909}\right] = 3$. Na druhej strane však z (5) pre $k = 8$, $n = 11$ máme $f(11) = \left[\frac{f(88)}{8}\right] = 3$, z čoho vyplýva, že $f(88) \leqq 31$. Preto podľa (4) je $f(89) \leqq 32$. Analogicky zistíme, že $f(9) = \left[\frac{f(9\,999)}{1\,111}\right] = \left[\frac{3\,333}{1\,111}\right] = 3 = \left[\frac{f(90)}{10}\right]$ z čoho vyplýva, že $f(90) \geqq 30$ a stadiaľ podľa (4) máme $f(89) \geqq 29$. Platí teda

$$29 \leqq f(89) \leqq 32. \tag{7}$$

Z b) pre $m = 9\,910$, $n = 89$ máme

$$f(9\,999) = 3\,333 = f(9\,910) + f(89) + \varepsilon,$$

kde $\varepsilon \in \{0; 1\}$. Z toho vzhľadom na (7) vyplýva

$$3\,300 \leqq f(9\,910) \leqq 3\,304. \tag{8}$$

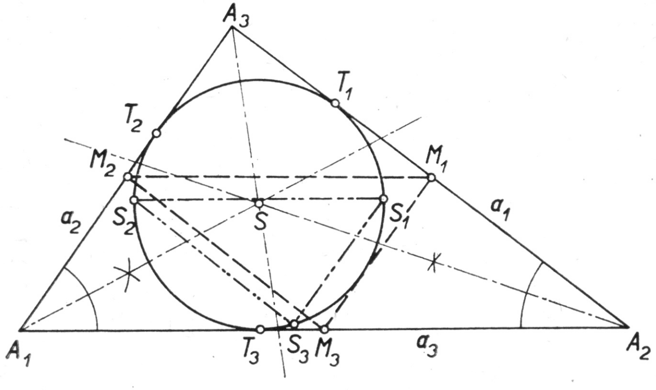
Keďže $9\,910 = 5 \,.\, 1\,982$, z (8) podľa (5) dostaneme

$$f\,(1\,982) = \left[\frac{f\,(9\,910)}{5}\right] = 660.$$

Poznámka. Dá sa dokázať, že vlastnosti a), b) požadované v úlohe má napr. aj funkcia $f\,(n) = \left[\dfrac{n}{3}\right]$.

Riešenie 2. úlohy. Pri osovej súmernosti podľa osi uhla trojuholníka $A_1A_2A_3$ pri vrchole A_1 je oblúk S_1T_3 kružnice vpísanej trojuholníku $A_1A_2A_3$ súmerne združený k oblúku T_1T_2 tejto kružnice (pozri obr. 43). Pri súmernosti podľa osi uhla pri vrchole A_2 analogické tvrdenie platí pre oblúky T_3S_2 a T_1T_2 tejto kružnice. Platí teda:

$$\widehat{T_3S_1} = -\,\widehat{T_2T_1} = \widehat{T_1T_2} = -\,\widehat{T_3S_2}.$$



Obr. 43

Z toho vyplýva, že $S_1S_2 \parallel A_1A_2$, ale pretože $M_1M_2 \parallel A_1A_2$, je tiež $S_1S_2 \parallel M_1M_2$. Analogickou úvahou prídeme k záveru, že $S_1S_3 \parallel M_1M_3$ a $S_2S_3 \parallel M_2M_3$. Trojuholníky $M_1M_2M_3$ a $S_1S_2S_3$ majú teda odpovedajúce strany rovnobežné, čo znamená, že ich možno na seba transformovať buď posunutím, alebo stredovou rovnoľahlosťou (homotetiou). Je zrejmé, že v rovnakom vzájomnom vzťahu sú aj kružnice týmto trojuholníkom opísané. Trojuholník $M_1M_2M_3$ je však nerovnoramenný rovnako ako daný trojuholník $A_1A_2A_3$, a tak jemu opísaná kružnica pretína strany a_i daného trojuholníka v dvoch rôznych bodoch. Z toho vyplýva, že jej polomer je väčší ako polomer kružnice opísanej trojuholníku $S_1S_2S_3$, ktorá je zhodná s kružnicou vpísanou trojuholníku $A_1A_2A_3$. Spomínané zobrazenie nemôže byť preto posunutím, ale stredovou rovnoľahlosťou. Potom však priamky M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 musia prechádzať stredom tejto rovnoľahlosti, čím je tvrdenie dokázané. Poznamenajme ešte, že vzhľadom na to, že trojuholník $A_1A_2A_3$ je nerovnoramenný, je $M_i \neq S_i$ pre všetky $i = 1, 2, 3$.

Poznámka. Dá sa dokázať, že tým stredom rovnoľahlosti je spoločný dotykový bod kružníc opísaných trojuholníkom $M_1M_2M_3$ a $S_1S_2S_3$ (tzv. Feuerbachova veta).

Riešenie 3. úlohy. a) Predpokladajme, že existuje postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných reálnych čísel tak, že pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ daných vlastností platí

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqq c_n x_0. \tag{1}$$

Potom z (1) a nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvojice nezáporných reálnych čísel vyplýva

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \left(\frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} + \frac{x_n^2}{x_{n+1}}\right) \geqq \frac{x_0^2}{x_1} +$$

$$+ c_n x_1 \geqq 2\sqrt{x_0^2 c_n} = x_0 2\sqrt{c_n}$$

Možno preto položiť $c_{n+1} = 2\sqrt{c_n}$ pre každé $n \geqq 1$, a keďže $x_0^2 \geqq x_1^2$, z čoho vyplýva $\dfrac{x_0^2}{x_1} \geqq x_1$, stačí zvoliť $c_1 = 1$. Potom však platí $c_2 = 2$, $c_3 = 2\sqrt{2} = 2^{1+1/2}$, $c_4 = 2\sqrt{c_3} = 2^{1+1/2+1/4}$ a všeobecne $c_n = 2^{1+1/2+\ldots+1/2^{n-2}} = 2^{2(1-1/2^{n-1})} = 4 \,.\, 2^{-1/2^{n-2}}$ pre $n \geqq 2$. Vzhľadom na (1) a predpoklad, že $x_0 = 1$, stačí teraz n zvoliť tak, aby platilo $4 \,.\, 2^{-1/2^{n-2}} \geqq 3{,}999$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou $\left(\dfrac{4}{3{,}999}\right)^{2^{n-2}} \geqq 2$. Pretože zrejme platí $\dfrac{4}{3{,}999} > \dfrac{4{,}001}{4}$, je

$$\left(\frac{4}{3{,}999}\right)^{2^{n-2}} > \left(1 + \frac{1}{4000}\right)^{2^{n-2}} > 1 + \frac{2^{n-2}}{4000},$$

čo je väčšie než 2 pre každé $n \geqq 14$. Tým je prvá časť úlohy dokázaná.

b) Stačí zvoliť postupnosť s všeobecným členom $x_n = 2^{-n}$. Potom

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{-2k+2}}{2^{-k}} = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+2} = 2 + 1 + 2^{-1} + \ldots +$$

$$+ 2^{-n+2} = 4 - 2^{-n+2} < 4 \quad \text{pre všetky } n \geqq 1.$$

Poznámka. Dá sa dokázať, že je to jediná postupnosť požadovaných vlastností. Z toho, čo sme ukázali v časti a), vyplýva totiž, že pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ daných vlastností platí $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} \geqq \frac{x_0^2}{x_1} + c_{n-1} x_1$ pre každé $n \geqq 2$. Pretože $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 4 \,.\, 2^{-1/2^{n-2}} = 4$, potom, ak vo vzťahu

$$4 > \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} \geqq \frac{x_0^2}{x_1} + c_{n-1} x_1,$$

ktorý má platiť pre všetky $n \geqq 1$ pri $c_0 = 0$, prejdeme k limite pre $n \to \infty$, dostaneme

$$4 \geqq \frac{x_0^2}{x_1} + 4x_1 = 4 + \frac{1}{x_1}(x_0 - 2x_1)^2\,,$$

z čoho už vyplýva, že musí byť $x_0 = 2x_1$. Metódou úplnej indukcie z toho už teraz analogickou úvahou ľahko dokážeme, že pre každé $n \geqq 1$ musí platiť $x_n = 2x_{n+1}$, z čoho zrejme vyplýva, že $x_n = 2^{-n}$.

Iné riešenie časti a) (podľa *M. Engliša*). Označme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2}{x_k}\,, \qquad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} x_k\,.$$

Pretože $x_k > 0$ pre všetky $k \geqq 0$, platí pre všetky $n \geqq 1$:

$$s_n > 0,\ \sigma_n > 0,\ s_{n+1} > s_n,\ \sigma_{n+1} > \sigma_n.$$

Použitím Cauchyho nerovnosti dostaneme, že pre každé $n \geqq 1$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \right)^2 ,$$

čiže

(2)
$$s_n (\sigma_n - x_0) \geqq \sigma_{n-1}^2 .$$

Zrejme je však $\sigma_n - x_0 > \sigma_1 - x_0 = x_1 > 0$, a keďže $x_0 = 1$, z (2) máme

(3)
$$s_n \geqq \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n - 1} = v_n , \qquad n \geqq 1 .$$

Rozoznávajme nasledujúce dva prípady:

1. Postupnosť $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. Pretože pre všetky $k \geqq 0$ platí: $x_k \leqq x_0 = 1$, je $\sigma_n - 1 \leqq \sigma_{n-1}$ pre každé $n \geqq 1$. Z toho vyplýva, že

$$v_n = \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n - 1} \geqq \sigma_{n-1}$$

platí pre každé $n \geqq 1$, čiže postupnosť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taktiež neohraničená. Existuje teda prirodzené číslo N tak, že $v_N > 3{,}999$, z čoho vzhľadom na (3) vyplýva, že $s_N \geqq 3{,}999$, ako bolo treba dokázať.

2. Nech postupnosť $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Vzhľadom na to, že je to postupnosť rastúca, má podľa Bolzano-Weierstrassovej vety vlastnú limitu, ktorú označíme L. Pre každé

$n \geqq 1$ zrejme platí $\sigma_n < L$, teda tiež $\sigma_1 = 1 + x_1 < L$, z čoho vyplýva, že musí byť $L > 1$. Ďalej je zrejmé, že $(L - 2)^2 \geqq 0$ čiže $L^2 \geqq 4L - 4$, z čoho máme $\dfrac{L^2}{L-1} \geqq 4$.

Preto vzhľadom na (3) platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n \geqq \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n - 1} = \frac{L^2}{L-1} \geqq 4. \tag{4}$$

Vzhľadom na to, že postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, vyplýva zo (4), že aj v tomto prípade existuje dokonca nekonečne mnoho prirodzených čísel N tak, že platí: $s_N \geqq 3{,}999$.

Ďalšie riešenie časti a) (podľa *J. Sgalla*): Označme pre $x_0 > 0$ $f(x_0)$ infimum zo súčtov $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_{k-1}^2}{x_k}$ cez všetky postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ daných vlastností. Vzhľadom na to, že ide o rady s kladnými členmi, je zrejmé, že $f(x_0)$ existuje pre každé $x_0 > 0$ a platí: $f(x_0) > 0$. Ďalej sa ľahko vidí, že pre každé $a > 0$, $b > 0$ platí $f(a) = \dfrac{a}{b} f(b)$. Ak totiž pre nejakú nerastúcu postupnosť $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ platí $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_{k-1}^2}{x_k} = s$, $x_0 = b$, potom pre nerastúcu postupnosť $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, $y_0 = a$, pre ktorú $y_k = \dfrac{a}{b} x_k$ pre všetky $k \geqq 0$, zrejme bude $s' =$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{k-1}^2}{y_k} = \frac{a}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} = \frac{a}{b}\, s.$$ Je teda $f(a) \leqq \dfrac{a}{b} f(b)$.

Ak navzájom vymeníme a a b, dostaneme $f(b) \leqq \dfrac{b}{a} f(a)$

čiže $f(a) \geqq \frac{a}{b} f(b)$, z čoho už vyplýva dokazovaná nerovnosť.

Označme ďalej $g(x_0, x_1)$ infimum zo súčtov $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k-1}^2}{x_k}$ cez všetky postupnosti $\{x_k\}_{k=2}^{\infty}$ daných vlastností. Potom podľa definície funkcií f a g platí:

$$f(1) = \inf_{x_1 \in (0;1\rangle} g(1; x_1) = \inf_{x_1 \in (0;1\rangle} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \ldots \right) =$$

$$= \inf_{x_1 \in (0;1\rangle} \left(\frac{1}{x_1} + f(x_1) \right) = \inf_{x_1 \in (0;1\rangle} \left(\frac{1}{x_1} + x_1 f(1) \right).$$

Funkcia $y = \frac{1}{x} + x f(1)$ je spojitá pre $x \in (0; 1\rangle$ a v pravom okolí bodu $x = 0$ je neohraničená. Bude preto nadobúdať infimum v nejakom čísle $x_1 \in (0; 1\rangle$, čo znamená, že bude

$$f(1) = \frac{1}{x_1} + x_1 f(1). \tag{5}$$

Zrejme nemôže platiť $x_1 = 1$. Stačí preto uvažovať o $x_1 \in (0; 1)$, pre ktoré z (5) dostaneme

$$f(1)(1 - x_1) = \frac{1}{x_1} \quad \text{čiže } f(1) = \frac{1}{x_1(1 - x_1)} \geqq 4$$

pre všetky $x_1 \in (0; 1)$.

Z toho vyplýva, že pre všetky postupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ daných vlastností má nekonečný rad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k-1}^2}{x_k}$ súčet rovný aspoň 4 alebo nekonverguje, tj. postupnosť jeho čiastočných súčtov je neohraničená. V oboch prípadoch však zrejme existuje čiastočný súčet s_n tohto radu, pre ktorý platí $s_n \geqq 3{,}999$, ako sme mali dokázať.

Riešenie 4. úlohy. Nech $[x, y]$ je nejaké celočíselné riešenie rovnice

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n, \tag{1}$$

kde n je dané celé kladné číslo. Pretože $(y - x)^3 = y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3$, je $x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y - x)^3 - 3x^2y + 2x^3 = (y - x)^3 - 3(y - x)x^2 - x^3$, čo znamená, že rovnici (1) vyhovuje tiež usporiadaná dvojica $[y - x, -x]$ celých čísel. Keďže ďalej platí $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, bude $x^3 - 3xy^2 + y^3 = (x - y)^3 - 6xy^2 + 3x^2y + 2y^3 = (x - y)^3 + 3y(x - y)^2 - y^3 = (-y)^3 - 3(-y)(x - y)^2 + (x - y)^3$, z čoho vyplýva, že rovnici (1) vyhovuje potom tiež usporiadaná dvojica $[-y, x - y]$ celých čísel.

Ľahko sa vidí, že dvojice $[x, y]$, $[y - x, -x]$ a $[-y, x - y]$ sú navzájom rôzne. Ak by napr. platilo $[x, y] = [y - x, -x]$, muselo by byť $x = y - x$ a súčasne $y = -x$, z čoho už vyplýva $x = y = 0$. Táto dvojica rovnici (1) však pri celom kladnom n nemôže vyhovovať. Podobne dôjdeme k sporu aj v zostávajúcich dvoch prípadoch. Tým sme dokázali, že ak rovnica (1) má nejaké celočíselné riešenie, potom má aspoň tri také riešenia.

Nech teraz pre nejaké celé čísla x, y platí

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2\,891 = 9 \,.\, 231 + 2.$$

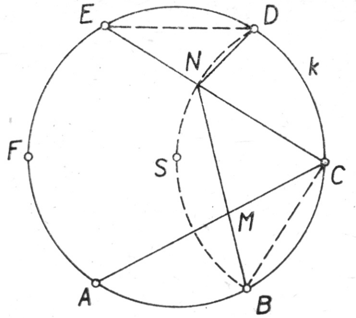
Potom zrejme je $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv 2 \pmod 9$. To však znamená, že musí byť $x^3 + y^3 \equiv 2 \pmod 3$ čiže $x^3 + y^3 \equiv -1 \pmod 3$. Uvažujme o jednotlivých možných prípadoch:

a) Nech $x \equiv 0 \pmod 3$. Potom musí byť $y^3 \equiv -1 \pmod 3$ čiže $y \equiv -1 \pmod 3$. Existujú teda celé čísla s, t tak, že platí: $x = 3s$, $y = 3t - 1$. Potom však $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 27\,s^3 - 3 \,.\, 3s\,(3t - 1)^2 + 27t^3 - 27t^2 + 9t - 1 \equiv -1 \pmod 9$, čo je spor.

b) Nech $x \equiv -1 \pmod 3$. Potom $x^3 \equiv -1 \pmod 3$ a musí platiť $y \equiv 0 \pmod 3$. Existujú teda celé čísla u, v tak, že platí $x = 3u - 1$, $y = 3v$. Analogicky ako v prípade a) dostaneme $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv -1 \pmod 9$, čo je opäť spor.

c) Nech konečne $x \equiv 1 \pmod 3$. Potom tiež $x^3 \equiv 1 \pmod 3$ a musí preto platiť $y^3 \equiv 1 \pmod 3$ čiže $y \equiv 1 \pmod 3$. Podľa vyššie dokázaného musí danej rovnici vyhovovať tiež usporiadaná dvojica $[y - x, -x]$, pre ktorú však v tomto prípade platí $y - x \equiv 0 \pmod 3$, $-x \equiv -1 \pmod 3$, ale také riešenie sme vylúčili už v prípade a). Daná rovnica teda nemôže mať celočíselné riešenie, ako sme mali dokázať.

Riešenie 5. úlohy. Pretože trojuholník ACE je rovnostranný (pozri obr. 44), zo zadania úlohy vyplýva, že $|CM| = |EN|$. Pretože zrejme $|BC| = |DE|$ a $\sphericalangle\, DEC = \sphericalangle\, BCA = 30°$, sú trojuholníky BMC a DNE zhodné. Z toho ďalej plynie, že $\sphericalangle\, NBC = \sphericalangle\, EDN$. Keďže $\sphericalangle\, ECB = 90°$, je



Obr. 44

$\sphericalangle BND = \sphericalangle BNC + \sphericalangle CND = (90° - \sphericalangle NBC) + \sphericalangle CED + \sphericalangle NDE = 120°$. To znamená, že úsečku BD vidno z bodu N pod uhlom 120° rovnako ako zo stredu S kružnice opísanej danému šesťuholníku. Z toho vyplýva, že bod N leží na kružnici so stredom C a polomerom $|CB| = |CD|$. Platí preto: $|CN| = |CB|$. Pre deliaci pomer λ z toho vyplýva, že

$$\lambda = |CN| : |CE| = |CB| : |CE| = 1 : \sqrt{3}$$

čiže $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, pretože v pravouhlom trojuholníku BCE je $\sphericalangle EBC = 60°$.

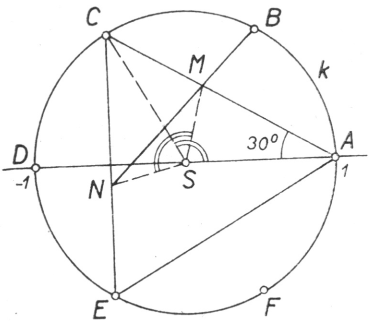
Iné riešenie (podľa *I. Kříža*). Zvoľme v rovine daného šesťuholníka súradnicovú sústavu so začiatkom v bode B a označujme polohové vektory jednotlivých bodov rovnakými symbolmi, ako sú označené tieto body. Platí teda $B = O$ a $M = \lambda C + (1 - \lambda) A$, $N = \lambda E + (1 - \lambda) C$, kde $0 \neq$

$\neq \lambda \neq 1$, pretože M, N sú podľa predpokladu vnútornými bodmi uhlopriečok AC, CE daného šesťuholníka. Z vlastností pravidelného šesťuholníka vyplýva, že $\mathsf{E} = 2(\mathsf{A} + \mathsf{C})$. Preto $\mathsf{N} = 2\lambda(\mathsf{A} + \mathsf{C}) + (1 - \lambda)\mathsf{C} = 2\lambda\ \mathsf{A} + (1 + \lambda)\mathsf{C}$. Z toho, že body B, M, N ležia na jednej priamke, vyplýva, že vektory M, N sú kolineárne. To však znamená, že musí platiť

$$\frac{2\lambda}{1 - \lambda} = \frac{1 + \lambda}{\lambda}. \tag{1}$$

Rovnosť (1) však platí práve vtedy, keď $2\lambda^2 = 1 - \lambda^2$, čiže vtedy, keď $\lambda^2 = \frac{1}{3}$. Pretože musí byť $\lambda > 0$, je jediným riešením $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ďalšie riešenie (podľa *J. Sgalla*): Zobrazme vrcholy daného šesťuholníka v rovine komplexných čísel tak, že



Obr. 45

$A = 1$, $D = -1$ a $S = 0$, kde S je stred daného šesťuholníka (pozri obr. 45). Pretože ACE je rovnostranný trojuholník, je $|AC| = |CE|$ a zo zadania úlohy vyplýva, že $|AM| = |CN|$. Keďže je tiež $|SA| = |SC|$ a $\sphericalangle SAC = \sphericalangle SCE = 30°$, sú trojuholníky SAM a SCN zhodné. Z toho vyplýva, že $|SM| = |SN|$. Pretože $\sphericalangle MSN = \sphericalangle MSC + \sphericalangle CSN = \sphericalangle ASC - \sphericalangle ASM + \sphericalangle CSN = \sphericalangle ASC = 120°$, je bod N obrazom bodu M v otočení o 120° okolo stredu S. Označme $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Potom $A = 1$, $B = \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $C = \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Podľa zadania úlohy je ďalej $M = A + \lambda(C - A) = 1 - \frac{3}{2}\lambda + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$. Potom však $N = \varepsilon^2 M = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\lambda + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda\sqrt{3}\right) i$. Ak body B, M, N, ktoré sú navzájom rôzne, ležia na priamke, potom musí existovať reálne číslo $k \neq 0$ tak, že platí

$$B - N = k(M - N) \quad \text{čiže}$$

$$1 + \lambda\sqrt{3}\,\mathrm{i} = k\left[\frac{3}{2}(1 - \lambda) + \frac{\sqrt{3}}{2}(3\lambda - 1)\,\mathrm{i}\right].$$

Porovnaním reálnych a imaginárnych častí stadiaľ máme

$$(2) \qquad 1 = k\frac{3}{2}(1-\lambda), \quad \lambda\sqrt{3} = k\frac{\sqrt{3}}{2}(3\lambda - 1).$$

Z (2) po jednoduchej úprave dostaneme

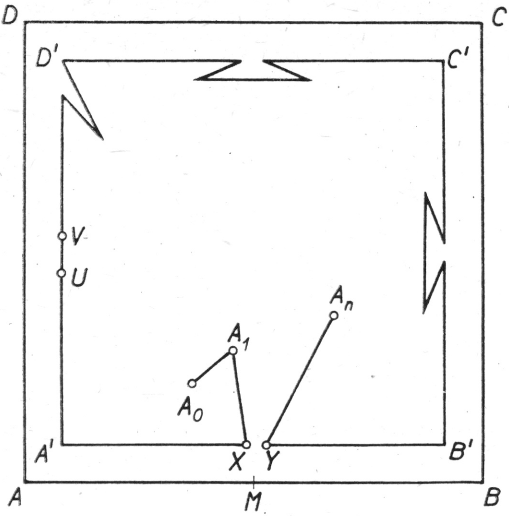
$$2 = 3k - 3k\lambda, \qquad 2\lambda = 3k\lambda - k,$$

z čoho sčítaním oboch rovností vyplýva $2k = 2\lambda + 2$ čiže $k = \lambda + 1$. Ak teraz dosadíme za k do prvej rovnosti (2), dostaneme

$$1 = \frac{3}{2}(1 - \lambda^2), \text{ z čoho už je } \lambda^2 = \frac{1}{3},$$

a stadiaľ rovnako ako v predchádzajúcom riešení máme $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Riešenie 6. úlohy (podľa *P. Coufa*). Vrcholy štvorca S označme A, B, C, D a pre body lomenej čiary L definujme usporiadanie takto: Označme $l(A_0, U)$ dĺžku tej časti L, ktorá je ohraničená bodmi A_0, U. Nech $U, V \in L$. Potom $U \leqq V$, ak $l(A_0, U) \leqq l(A_0, V)$. Vzdialenosť bodov U, V v rovine označujeme $d(U, V)$. Nech A', B', C', D' sú také body z L, pre ktoré platí: $d(A, A') \leqq \frac{1}{2}$, $d(B, B') \leqq \frac{1}{2}$, $d(C, C') \leqq \frac{1}{2}$, $d(D, D') \leqq \frac{1}{2}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že platí $A' < D' < B'$ (pozri obr. 46). Označme $L_1 = \{Z \in L \mid Z \leqq D'\}$, $L_2 = \{Z \in L \mid Z \geqq D'\}$. Nech $L_i' = \{W \in AB \mid \exists\, W' \in L_i : d(W, W') \leqq \frac{1}{2}\}, i = 1, 2$. Je zrejmé, že $A \in L_1'$, $B \in L_2'$, čiže $L_i' \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Podľa zadania úlohy taktiež platí: $AB = L_1' \cup L_2'$. Ďalej



Obr. 46

je zrejmé, že L_i', $i = 1, 2$ je zjednotením konečného počtu intervalov alebo jednobodových množín. Preto platí: $L_1' \cap \cap L_2' \neq \emptyset$. Nech teraz $M \in L_1' \cap L_2'$ a $X \in L_1$, $Y \in L_2$ sú také body, že platí $d(M, X) \leqq \frac{1}{2}$, $d(M, Y) \leqq \frac{1}{2}$. Potom z trojuholníkovej nerovnosti vyplýva, že $d(X, Y) \leqq d(M, X) + d(M, Y) \leqq 1$. Na druhej strane však pre dĺžku $l(X, Y)$ tej časti lomenej čiary L, ktorá je ohraničená bodmi X, Y, zrejme platí: $l(X, Y) = l(X, D') + l(D', Y) \geqq \geqq d(X, D') + d(D', Y) \geqq 99 + 99 = 198$, čo sme mali dokázať.

Prof. dr. Jozef Moravčík, CSc.,
dr. Leo Boček, CSc.,
doc. dr. Lev Bukovský, CSc.,
prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.

TŘICÁTÝ PRVNÍ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obrázky narýsoval dr. Vlastimil Macháček
Obálku navrhl Jaromír Jarkovský
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
v Praze roku 1984
jako svou publikaci č. 5-42-14/31
Edice Pomocné knihy pro žáky
Odpovědná redaktorka: Ilona Mahlerová
Výtvarný redaktor: Václav Hanuš
Technická redaktorka: Věra Hrubešová
Z nové sazby písmem Plantin vytiskly
Moravské tiskařské závody, n. p., Olomouc
Formát papíru 70 cm × 100 cm
Počet stran 186
AA 5,34 VA 5,70 Náklad 3550 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/2
1. vydání
Cena brožovaného výtisku Kčs 7,50
505/21,825

14-506-84 Kčs 7,50

matematická
olympiáda

MO

SPN 5-42-14/31

14–506–84
03/2 Kčs 7,50