

33. ročník matematické olympiády

František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Beloslav Riečan (editor); Karol Križalkovič (editor): 33. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1983-84. 25. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404776>

Terms of use:

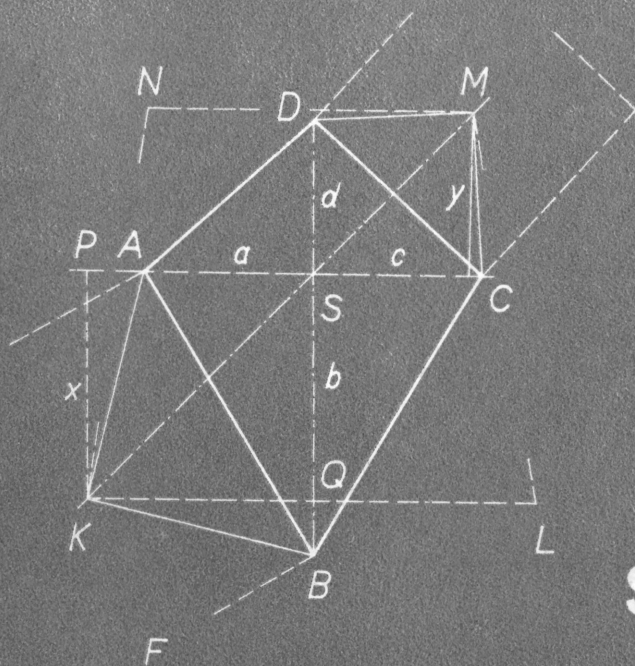
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

33. ročník matematické olympiády



SPN

TŘICÁTÝ TŘETÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva o řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1983—84*

25. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

**STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA**

Za přispění spolupracovníků zpracovali
dr. František Zítek, CSc., dr. Leo Boček, CSc.,
dr. Karel Horák, CSc., prof. dr. Beloslav Riečan, DrSc.,
doc. dr. Karol Križalkovič, CSc.

Lektorovali dr. Jitka Kučerová, dr. Miroslav Šisler, CSc.,
a dr. Václav Šůla

© Dr. František Zítek, CSc., za kolektiv, 1986

Obsah

Předmluva	5
O průběhu 33. ročníku matematické olympiády	11
Kategorie Z	43
Úlohy I. kola	43
Úlohy II. kola	49
Úlohy III. kola v ČSR	51
Úlohy III. kola v SSR	54
Kategorie C	58
Úlohy domácí části I. kola	58
Úlohy školní části I. kola	66
Úlohy II. kola	69
Kategorie B	72
Úlohy domácí části I. kola	72
Úlohy školní části I. kola	81
Úlohy II. kola	84
Kategorie A	90
Úlohy domácí části I. kola	90
Úlohy školní části I. kola	101
Úlohy II. kola	106
Úlohy III. kola	114
Korespondenční seminář ÚV MO	124
Zpráva o 25. mezinárodní matematické olympiádě . . .	133

dostáváte do rukou obvyklou výroční zprávu o organizaci, průběhu a výsledcích 33. ročníku naší nejvýznamnější matematické soutěže pro žáky základních a středních škol - matematické olympiády (MO). Za třetinu století své existence se MO rozrostla ze skrovných počátků v široce rozvinutou komplexní akci, která zdaleka není omezena jen na vlastní soutěž v řešení matematických úloh. Postupem let se její organizace obohatila o celou řadu pomocných a doplňkových činností, jako jsou různá školení, semináře a soustředění řešitelů MO, korespondenční seminář, vydávání sbírek úloh a knižnice Škola mladých matematiků, atd.

I při zachování hlavních cílů MO, k nimž bezpochyby patří především vyhledávání a podchylování mladých matematických talentů a podpora jejich dalšího rozvoje, se vlastně stále poněkud mění a zdokonalují její organizační formy. K nejzávažnějším změnám z poslední doby patří reorganizace prvního kola MO v kategoriích A, B a C a postupné rozšiřování MO směrem k nižším věkovým ročníkům.

V 31. ročníku MO byla namísto dřívějších přípravných úloh, jejichž řešení žáci většinou podceňovali, neboť neměly přímý vliv na jejich úspěch v MO, zavedena školní část prvního kola, která má již zřetelně soutěžní charakter. Jedním z cílů, který se tím sledoval, bylo zkvalitnění výběru účastníků druhého kola, a tím i snížení procenta neúspěšných řešitelů ve druhém kole. Školní část soutěže tak přirozeně překlenula mezeru v náročnosti mezi domácím prvním kolem a klausurním druhým kolem. Rovněž se od zavedení školní části prvního kola očekávalo, že přispěje ke zvýšení zájmu o MO ze

strany vedení jednotlivých škol, jejichž úloha se dříve dosti často redukovala na pouhé uvolňování účastníků MO na akce pořádané mimo školu; šlo tedy i o zvýšení prestiže MO v očích ředitelů škol.

Jak nasvědčují dosavadní zkušenosti, plní školní část prvního kola oba tyto hlavní cíle, takže se s ní počítá i pro další ročníky. Zanedbatelná není ostatně ani skutečnost, že se takto podstatně efektivněji využívá fondu vhodných olympiádních úloh.

Z historie MO víme, že zpočátku byla tato soutěž pořádána jen pro žáky středních škol; teprve od 3. ročníku má MO zvláštní kategorii - zprvu D, později Z - pro žáky nejvyšších tříd základních škol. Od počátku se však tato kategorie poněkud liší od kategorií středoškolských tím, že je v ní kladen relativně větší důraz na podchycování zájmu žáků o MO a o matematiku vůbec: kategorie Z tedy má také cíle propagační a náborové.

S postupující modernizací učiva i celého pojetí matematiky na základní škole se začal v příznivém smyslu měnit i zásadní poměr žáků k tomuto kdysi spíše obávanému předmětu. Rostl i zájem žáků o různé matematické zábavné soutěže, které pro ně byly v různých krajích pořádány. Vznikla idea rozšířit MO tak, aby postihla všechny ročníky druhého stupně základních škol. V SSR byla tato idea realizována a již několik let zde probíhá Malá matematická olympiáda; v ČSR se v tomto směru teprve začíná. Vzhledem k dobrým zkušenostem ze SSR lze doufat, že se postupně dospěje k celostátně organizované matematické soutěži i na základních školách.

Součástí této ročenky je také zpráva o mezinárodní matematické olympiádě (MMO), která byla v r. 1984 uspořádána

již po pětadvacáté. Skutečnost, že dějištěm 25. MMO byla Praha, silně poznamenalo i činnost naší MO. Byla věnována zvýšená pozornost přípravě československého družstva a mnozí spolupracovníci MO v Praze i mimo Prahu se zapojili do přípravných a organizačních prací. I když nelze mluvit o výrazném úspěchu našich reprezentantů v soutěži, skutečnost, že ČSSR dokázala zabezpečit hladký průběh MMO s rekordním počtem 192 soutěžících ze 34 států celého světa a zároveň se všem jejím účastníkům předvést jako vyspělá socialistická země se staletou kulturní tradicí, s hlavním městem plným jedinečných historických památek a zároveň pulsujícím současným životem poskytujícím svým obyvatelům přednosti moderní doby znásobené jistotami socialistického zřízení, můžeme považovat za záslužný příspěvek k propagaci dobrého jména naší vlasti ve světě.

Za čtvrt století své existence se MMO rozrostly do rozměrů skutečně významné celosvětové soutěže - svědčí o tom mj. i zájem, který o ně projevují tak vážené mezinárodní organizace jako UNESCO a Mezinárodní matematická unie. Československý přínos k udržování a rozvíjení ušlechtilé tradice olympiád, vyjádřený mj. trojím pořadatelstvím a stoprocentní účastí, můžeme pak bez rozpaků hodnotit veskrze pozitivně.

Hodnocení průběhu a výsledků 33. ročníku MO

V organizaci soutěže v kategoriích A, B a C nedošlo v tomto roce ke změnám.

Počty škol, jejichž žáci soutěžili v MO, nedoznaly podstatných změn, s výjimkou menšího poklesu ve Východočeském a Jihočeském kraji. V počtech účastníků 1. kola je patrný určitý pokles v kategorii B, zvláště v Praze, v Západoslovenském a Středoslovenském kraji, avšak k zjištění skutečných příčin tohoto výkyvu nám chybí podklady. Potěšitelné je, že se na stabilní úrovni udržuje zájem o MO v kategorii C.

Pokud se týče úspěšnosti v 1. kole, je zjevný všeobecný pokles v kategoriích B a C. Ten se promítl rovněž do počtu účastníků 2. kola v těchto kategoriích. Naproti tomu však tu vzrostlo procento relativní úspěšnosti, což znamená, že větší náročnost 1. kola vedla ke zkvalitnění výběru účastníků 2. kola - to byl i jeden z cílů, jež zavedení školní klauzurní části soutěže 1. kola sledovalo. Není tedy žádného důvodu, proč hodnotit pokles úspěšnosti v 1. kole negativně.

V kategorii A je vcelku ustálený stav jak v počtech účastníků, tak i v úspěšnosti, a to ve všech třech kolech.

Kategorie Z sleduje poněkud jiné cíle nežli kategorie vyšší, a proto při hodnocení jejich výsledků klademe větší důraz na její co nejširší záběr. Pokud jde o zapojení škol, je zřejmé, že již bylo dosaženo stavu plného nasycení; půjde tedy jen o to, získané počty udržet.

Počty účastníků 1. kola i jejich úspěšnost zůstaly v tomto roce na přibližně stejné úrovni jako dříve. Byly tedy zhruba stejné i počty účastníků 2. kola. Procento úspěšnosti ve 2. kole však ve srovnání s předchozím ročníkem silně pokleslo, a to ve všech krajích. Ani tento jev však v nás nemusí vzbuzovat nepokoj, neboť opět znamenal jen zdravé zvýšení náročnosti ve 2. kole. Svědčí o tom i skutečnost, že 3. kolo kategorie Z bylo obesláno dostatečným počtem soutěžících a relativní úspěšnost ve 3. kole byla v ČSR podstatně vyšší než v minulém ročníku. V SSR, kde je 3. kolo pořádáno v jiném termínu a s jinými úlohami, úspěšnost ve 3. kole nevzrostla, spíše naopak.

Příčiny výkyvů v úspěšnosti ve 2. a 3. kole dlužno hledat mj. ve výběru úloh pro MO; jejich obtížnost se obvykle odhaduje jen s potížemi, nepřesně a ne zcela spolehlivě.

Závěrem je třeba ještě říci, že všechna tato porovnávání jsou v podstatě pouze orientační, na značně intuitivním základě. Důkladnější statistická analýza by vyžadovala značnou znalost údajů, které nejsou v materiálech MO obsaženy a jen těžko by se zjišťovaly. K tomu by pak samozřejmě nutně přistoupil i hlubší rozbor zadaných soutěžních úloh.

V nejbližší době se v kategorii Z chystají určité úpravy a změny v souvislosti se snahou rozšířit MO i do nižších ročníků základních škol. V SSR se již po řadu let organizuje olympiádní soutěž pro žáky 5.—7. ročníků základních škol.

Zkušeností ze SSR se nyní využívá při zavádění obdobné soutěže také v ČSR.

Závěrem lze říci, že 33. ročník MO proběhl vcelku úspěšně, aniž by vybočil ze standardních mezí.

Pořadateli celostátní soutěže »Matematická olympiáda« jsou *ministerstva školství ČSR a SSR, Matematický ústav ČSAV v Praze (MÚ ČSAV), Jednota československých matematiků a fyziků (JČSMF), Jednota slovenských matematiků a fyziků (JSMF) a Socialistický svaz mládeže (SSM)*. Soutěž je řízena ústředním výborem matematické olympiády (ÚV MO) a dále krajskými a okresními výbory matematické olympiády (KV MO, OV MO).

Žáci soutěží ve čtyřech kategoriích: v kategorii A žáci III. a IV. ročníků středních škol, v kategorii B žáci II. ročníků a pro žáky I. ročníků je určena kategorie C. Žáci 8. tříd základních škol soutěží v kategorii Z, v Slovenské socialistické republice se začala matematická olympiáda organizovat i pro žáky nižších tříd. Se souhlasem KV MO může žák soutěžit i v kategorii určené pro žáky vyšších ročníků.

Na začátku školního roku 1983—84 jmenovala ministerstva školství ČSR a SSR na další tříleté funkční období, nový ústřední výbor MO ve složení:

předseda: *dr. František Zítek, CSc., MÚ ČSAV Praha*

místopředsedové: *prof. dr. Miroslav Fiedler*, člen korespondent
ČSAV, MÚ ČSAV Praha

prof. dr. Beloslav Riečan, DrSc., MFF UK

Bratislava

jednatelé: *dr. Leo Boček*, CSc., MFF UK Praha

dr. Karel Horák, MÚ ČSAV Praha

zástupce MŠ ČSR: *dr. Václav Šůla*

zástupce MŠ SSR: *dr. Júlia Lukátšová*

zástupce ÚV SSM: *Pavel Krsička*

ostatní členové:

dr. František Běloun, Praha

dr. Ivan Bušek, Pedagogický ústav hl. m. Prahy

dr. Milan Cirjak, KPÚ Prešov

doc. dr. Ján Gatiaľ, CSc., SVŠT Bratislava

dr. Tomáš Hecht, CSc., MFF UK Bratislava

dr. Vladimír Jodas, gymnázium J. Hronca, Bratislava

dr. Milan Koman, CSc., MÚ ČSAV Praha

doc. dr. Karol Križalkovič, CSc., Pedagogická fakulta Nitra

doc. dr. Alois Kufner, DrSc., MÚ ČSAV Praha

Olga Maříková, NVP Praha

dr. Milan Maxian, gymnázium A. Markuša, Bratislava

dr. Jiří Mída, CSc., pedagogická fakulta UK Praha

Vlasta Micháľková, SMP Bratislava

Sylvia Michalovičová, KPÚ Bratislava

dr. Jaroslav Morávek, CSc., MÚ ČSAV Praha

dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha

doc. dr. Aleš Pultr, CSc., MFF UK Praha

dr. Oliver Raltk, Pedagogická fakulta Nitra

Stanislav Rypáček, gymnázium Praha 9

dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV Praha

Ing. Oldřich Skopal, gymnázium Brno, tř. kpt. Jaroše
dr. Bohumil Šmarda, CSc., UJEP Brno

Dodatečně byl členem ÚV MO jmenován *prof. dr. Lev Bukovský, DrSc., PF UPJŠ Košice.*

Členy ÚV MO jsou též předsedové krajských výborů MO:

Praha: *prof. dr. Karel Drbohlav, DrSc., MFF UK Praha*

Středočeský kraj: *Ludmila Tréglová*, gymnázium Říčany

Jihočeský kraj: *doc. dr. Ing. Lada Vaňatová*, Pedagogická fakulta České Budějovice

Západočeský kraj: *dr. Josef Polák, CSc., VŠSE Plzeň*

Severočeský kraj: *Jiří Slavík*, gymnázium Teplice

Východočeský kraj: *dr. Josef Kubát*, gymnázium Pardubice

Jihomoravský kraj: *doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., FE VUT Brno*

Severomoravský kraj: *dr. Vladimír Vlček, CSc., UP Olomouc*

Bratislava: *dr. Ľudovít Niepel, CSc., MFF UK Bratislava*

Západoslovenský kraj: *prof. dr. Ondrej Šedivý, CSc., Pedagogická fakulta Nitra*

Středoslovenský kraj: *dr. Pavol Klenovčan*, Pedagogická fakulta Banská Bystrica

Východoslovenský kraj: *doc. dr. Ján Ohriska, CSc., PF UPJŠ Košice*

Pracovní předsednictvo ÚV MO (PÚV MO) tvořili (v abecedním pořadí): *dr. Leo Boček, CSc., prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., doc. dr. Ján Gatiaľ, CSc., dr. Karel Horák, dr. Milan Koman, CSc., doc. dr. Karol Križalkovič, CSc., dr. Júlia Lukátšová, Sylvia Michalovičová, prof. dr. Beloslav Riečan, DrSc., dr. Jiří Sedláček, CSc., dr. Václav Šula, dr. František Zítek, CSc.*

V průběhu 33. ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO. Na zasedání, které se konalo ve dnech 12. – 13. prosince 1983 v Praze, byla projednána otázka rozšíření matematické olympiády i do nižších tříd základní školy, dále příprava celostátního kola MO a příprava 25. mezinárodní matematické olympiády v Praze. Druhé zasedání ÚV MO se konalo při celostátním kole MO v Čáslavi 4. – 5. května 1984. Bylo věnováno zhodnocení průběhu 33. ročníku MO a především přípravě jejího dalšího ročníku. Předsednictvo ÚV MO se scházelo pravidelně jednou měsíčně, zajišťovalo především výběr úloh pro všechna kola soutěže.

Celostátní kolo 33. ročníku MO se konalo v Čáslavi. Slavnostního zahájení se zúčastnil tajemník OV KSČ v Kutné Hoře *dr. Jaroslav Jílek* a vedoucí odboru školství Středočeského KNV *Ing. Josef Pokorný*. Po projevu *Ing. J. Pokorného*, ve kterém vyzdvihl pozornost, kterou naše socialistická společnost věnuje rozvoji přírodních věd, a tedy i matematiky, následoval bohatý kulturní program připravený žáky a profesory gymnázia a střední pedagogické školy v Čáslavi. Velmi pěkným zážitkem pro všechny účastníky celostátního kola MO v Čáslavi byla bezesporu beseda s letcem kosmonautem *Ing. pplk. Vladimírem Remkem*, se zasloužilou mistryní sportu *Jarmílou Kratochvílovou* a jejím trenérem *Ing. Miroslavem Kváčem*. Za zdařilý průběh III. kola MO vděčíme organizačnímu výboru v čele s profesorem *Ladislavem Šachem*, další díky patří předsedkyni KV MO *prof. Ludmile Tréglové* a také řediteli gymnázia v Čáslavi *Jindřichu Vyhánkovi* a jeho učitelskému sboru.

Pro rozvoj a vyhledávání žáků talentovaných v matematice se ve všech krajích pořádají různé akce, které většinou nava-

zuji na matematickou olympiádu. V Praze je to tradiční seminář na gymnáziu W. Piecka, na kterém jsou třídy se zaměřením na matematiku. Ve spolupráci s FV SSM na matematicko-fyzikální fakultě UK pořádá krajský výbor MO korespondenční seminář pro žáky středních škol, jehož nejlepší účastníci jsou zváni na týdenní soustředění.

KV MO Středočeského kraje uspořádal dvě instruktáže pro referenty MO. První, určené pro středoškolské profesory, se zúčastnilo 50 zájemců. Druhá byla určena pro předsedy OV MO a byly na ní zastoupeny téměř všechny okresy kraje. Celkem 48 dvouhodinových přednášek bylo v Středočeském kraji zorganizováno přímo pro žáky, průměrná účast byla dvacet řešitelů úloh MO. Čtyřicet úspěšných řešitelů MO a fyzikální olympiády z řad žáků základních škol bylo vybráno na týdenní soustředění v červnu 1984.

Jihočeský kraj uspořádal rovněž několik instruktáží učitelů a tradičně organizoval zájmové kroužky MO na základních školách. Kroužky vedou studenti Pedagogické fakulty v Českých Budějovicích v rámci společenskopolitické praxe. V červnu 1984 bylo uspořádáno týdenní soustředění pro 100 žáků středních škol na Zadově.

V Západočeském kraji se na práci pro MO podílejí především pracovníci kateder matematiky VŠSE a Pedagogické fakulty v Plzni. Přednášky pro žáky i pro učitele konají v pěti střediscích kraje. Již čtvrtým rokem se koná v kraji korespondenční seminář, jehož se zúčastnilo téměř 130 středoškoláků. Nejlepší z nich a úspěšní řešitelé krajských kol MO a FO byli vybráni mezi těch 40 žáků, kteří se mohli zúčastnit červnového soustředění, jež se konalo v Karlových Varech.

V dalším lázeňském městě, v Teplicích, se koná stejné

soustředění pro úspěšné řešitele MO a FO Severočeského kraje. Program pro 85 účastníků zajistila pobočka JČSMF v Ústí n. L. V sedmi městech kraje bylo uspořádáno celkem 39 seminářů pro řešitele MO s průměrnou účastí 15 žáků. Korespondenční seminář je pořádán pro žáky 3. ročníků středních škol.

Východočeský kraj pořádá dva korespondenční semináře, jeden pro žáky 2. ročníků a druhý pro žáky vyšších ročníků. Pro žáky těchto ročníků se konala dvě soustředění (dvoudenní a jednodenní), týdenní soustředění bylo určeno pro 30 úspěšných řešitelů MO kategorie C.

V Jihomoravském kraji se konaly semináře pro řešitele MO především v Brně, ale též v Třebíči, Ivančicích a Jihlavě. Ivančice byly též místem krajského soustředění úspěšných řešitelů úloh MO a FO, kterého se zúčastnilo 58 žáků. Měli nejen možnost vyslechnout zajímavé přednášky z matematiky a fyziky, ale i zúčastnit se několika exkurzí. KV MO považuje tato soustředění za jednu z velmi efektivních forem práce s talentovanou mládeží.

V Severomoravském kraji se kroužky zájmové matematiky soustřeďují především na gymnáziu M. Koperníka v Bílovci a účastní se jich převážná většina žáků z tříd se zaměřením na matematiku. Kroužky vedou pracovníci Univerzity Palackého v Olomouci. Krajského korespondenčního semináře se zúčastnilo 54 žáků, jeho vítězové byli pozváni na soustředění žáků matematických tříd. Tradiční jsou v kraji sobotní besedy MO pro žáky středních škol, které se konají v Olomouci a v Havířově od října do dubna. Předtím se konaly instruktáže pro učitele základních i středních škol.

Také v Slovenské socialistické republice se konají podobné

akce. Velké zkušenosti s korespondenčními semináři mají v Bratislavě a v Košicích, po odborné stránce zajišťují semináře pracovníci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Komenského v Bratislavě a Přírodovědecké fakulty Univerzity P. J. Šafaříka v Košicích. Úspěšní řešitelé korespondenčního semináře jsou zváni na soustředění, ve Východoslovenském kraji se konala tři taková soustředění, každé pro 40 účastníků. Kroužky MO vede v Košicích prof. Bukovský a dr. Vojtáš, v každém kroužku je asi 15 žáků. Ve spolupráci s Krajským domem pionýrů a mládeže se 15 žáků účastní práce v Klubu mladých matematiků. KV MO v Košicích pořádal též pro každou kategorii MO instruktáže učitelů, celkem se jich zúčastnilo 240 pedagogů.

Podobné instruktáže se konají v Západoslovenském kraji. Stará se o ně metodická komise pro MO ve spolupráci s Krajským pedagogickým ústavem. Členy komise jsou zkušení učitelé středních škol, kteří již delší dobu dosahují dobré výsledky v práci MO. Pro žáky se konaly individuální konzultace, korespondenční seminář a 40 nejlepších se zúčastnilo soustředění v Budmericích. Korespondenční seminář vedl dr. P. Vrábel, CSc. Také pro kategorii Z se konalo jak soustředění žáků, na kterém bylo přítomno 46 nejlepších řešitelů krajského kola, tak instruktáže učitelů, které vedli doc. dr. K. Križalkovič, CSc. a dr. Silvia Šúňová.

ÚV MO zajišťoval po odborné stránce tři celostátní soustředění. Pro žáky nematurujících ročníků to bylo soustředění ve Žďáru n. S., které je společné pro matematickou i fyzikální olympiádu. Zúčastnilo se ho 92 žáků, dík patří profesoru *dr. Janu Gregorovi* ze SPŠ strojnické ve Žďáru n. S., který měl na starosti organizaci soustředění, včetně exkurzí, večerních

besed apod. Další dvě soustředění byla věnována přípravě československého družstva na 25. mezinárodní matematickou olympiádu. První se konalo v Brezové p. B., druhé v Bratislavě. Organizačně je zajišťoval Ústřední dům pionýrů a mládeže Klementa Gottwalda v Bratislavě, zvláště *s. Vlasta Michálková*. Odborné semináře na obou soustředěních vedli dlouholetí pracovníci matematické olympiády, například *prof. dr. J. Moravčík, CSc.*, z VŠDS v Žilině, *prof. dr. B. Riečan, DrSc.*, z MFF UK v Bratislavě, *dr. A. Vrba, CSc.*, z MÚ ČSAV v Praze a další, ale též někteří mladí studenti a aspiranti z řad bývalých úspěšných účastníků mezinárodních matematických olympiád *dr. J. Kratochvíl* a *J. Nekovář*. ÚV MO zajišťoval též celostátní korespondenční seminář, kterému je však věnována samostatná část této brožurky.

Úlohy první části I. kola MO byly jako vždy otištěny spolu s organizačními pokyny v letácích, které vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze a Slovenské pedagogické nakladatelstvo v Bratislavě. Kromě toho otiskly tyto úlohy i časopisy *Rozhledy matematicko-fyzikální* a *Matematika a fyzika ve škole*. Spolu s úlohami školní části I. kola a úlohami dalších kol je třeba pro každý ročník MO připravit víc než 60 pokud možno původních a zajímavých úloh s pěkným řešením. Většina vybraných úloh pochází z konkursu JČSMF a JSMF na úlohy MO, který probíhá již několik let. Své případné návrhy úloh posílejte na adresu ÚV MO, za přijaté úlohy obdržíte odměnu. Především je zájem o série úloh na sebe navazujících.

V edici *Škola mladých matematiků* vydává ÚV MO v nakladatelství *Mladá fronta matematické brožurky*, vhodné pro všechny mladé i starší zájemce o matematiku. V roce 1984

vyšly svazky *J. Holubář: Množiny bodů v prostoru* a *L. Davidov: Funkcionální rovnice*, celkem již vyšlo 55 svazků edice ŠMM. Jsou dobrými pomocníky soutěžícím v MO a je účelné, aby byly žákům k dispozici v školních knihovnách.

Tabulka 1

Počet středních škol zapojených do 33. ročníku MO

Kraj	Gymnázia					Ostatní střední školy			
	Celkový počet	z toho zapojeno				zapojeno			
		v kategorii			aspoň v jedné kategorii	v kategorii			aspoň v jedné kategorii
		A	B	C		A	B	C	
Praha	22	15	13	15	19	—	2	—	2
Středočeský	23	22	22	22	23	4	4	4	7
Jihočeský	19	10	10	10	13	2	5	5	6
Západočeský	15	14	14	15	15	1	3	5	5
Severočeský	21	19	20	19	21	3	7	8	11
Východočeský	35	14	17	19	19	3	2	1	4
Jihomoravský	39	29	22	21	33	3	2	3	5
Severomoravský	39	24	34	36	38	1	1	2	4
Bratislava	11	8	10	9	10	—	2	2	3
Západoslovenský	38	29	34	38	38	8	12	23	25
Středoslovenský	37	32	33	33	37	10	19	35	37
Východoslovenský	38	29	27	33	37	5	14	31	33
ČSR celkem	213	147	152	157	181	17	26	28	44
SSR celkem	124	98	104	113	122	23	47	91	98
ČSSR celkem	337	245	256	270	303	40	73	119	142

Tabulka 2

Počet žáků soutěžících v I. kole MO

Kraj	Kat. A		Kat. B		Kat. C		Celkem	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	97	80	102	58	115	56	314	194
Středočeský	169	59	126	18	179	29	474	106
Jihočeský	57	40	66	49	122	50	245	139
Západočeský	94	47	97	23	130	26	321	96
Severočeský	146	50	148	22	190	54	484	126
Východočeský	63	45	54	39	84	60	201	144
Jihomoravský	196	116	198	65	206	78	600	259
Severomoravský	106	58	129	42	214	67	449	167
Bratislava	115	92	125	52	145	92	385	236
Západoslovenský	215	186	165	123	226	184	606	493
Středoslovenský	152	123	141	110	408	136	701	369
Východoslovenský	336	124	396	127	892	221	1624	472
ČSR	928	495	920	316	1240	420	3088	1231
SSR	818	525	827	412	1671	633	3316	1570
ČSSR	1746	1020	1747	728	2911	1053	6404	2801

S — celkový počet

Ú — počet úspěšných řešitelů

Tabulka 3

Počet žáků soutěžících v II. kole MO

Kraj	Kat. A		Kat. B		Kat. C		Celkem	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	77	36	57	23	52	44	186	103
Středočeský	49	2	16	2	29	10	94	14
Jihočeský	38	5	42	6	47	26	127	37
Západočeský	43	7	21	8	23	16	87	31
Severočeský	46	5	19	5	49	26	114	36
Východočeský	43	10	36	8	59	36	138	54
Jihomoravský	93	9	63	17	59	33	215	58
Severomoravský	55	15	42	22	63	45	160	82
Bratislava	89	37	52	13	62	37	203	87
Západoslovenský	168	10	112	15	156	39	436	64
Středoslovenský	103	12	80	13	82	24	265	49
Východoslovenský	69	17	71	13	186	54	326	84
ČSR	444	89	296	91	381	236	1121	415
SSR	429	76	315	54	486	154	1230	284
ČSSR	873	165	611	145	867	390	2351	699

S — celkový počet

Ú — počet úspěšných řešitelů

Tabulka 4

Počet účastníků III. kola MO kategorie A

Kraj	Celkový počet účastníků	Počet úspěšných	Z toho vítězů
Praha	19	11	7
Středočeský	1	0	0
Jihočeský	2	2	1
Západočeský	2	1	0
Severočeský	2	1	1
Východočeský	4	3	0
Jihomoravský	3	0	0
Severomoravský	10	4	2
Bratislava	27	16	4
Západoslovenský	1	0	0
Středoslovenský	2	1	0
Východoslovenský	7	3	2
ČSR	43	22	11
SSR	37	20	6
ČSSR	80	42	17

Tabulka 5

**Počet základních škol, které se zúčastnily 33. ročníku MO -
kategorie Z**

Kraj	Celkový počet	Zúčastnilo se					
		I. kola		II. kola		III. kola	
		počet	%	počet	%	počet	%
Praha	204	191	94	184	90	30	15
Středočeský	274	206	75	194	71	29	11
Jihočeský	184	160	87	130	71	27	15
Západočeský	216	177	82	165	76	31	14
Severočeský	288	227	79	185	64	31	11
Východočeský	317	240	76	214	68	34	11
Jihomoravský	457	341	75	320	70	54	12
Severomoravský	469	415	88	339	72	43	9
Bratislava	73	54	74	54	74	12	16
Západoslovenský	480	427	89	392	82	41	9
Středoslovenský	411	309	75	286	70	29	7
Východoslovenský	389	336	86	296	76	36	9
ČSR	2409	1957	81	1731	72	279	12
SSR	1353	1126	83	1028	76	118	9
ČSSR	3762	3083	82	2759	73	397	11

Tabulka 6

Počet žáků soutěžících v kategorii Z

Kraj	I. kolo		II. kolo		III. kolo	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	1687	1126	762	150	36	34
Středočeský	1448	781	635	106	37	30
Jihočeský	1317	551	439	65	34	18
Západočeský	1601	837	475	83	45	38
Severočeský	1890	758	549	76	34	29
Východočeský	2009	1225	674	114	41	32
Jihomoravský	2750	1629	1123	211	62	51
Severomoravský	3546	1617	1107	238	53	46
Bratislava	950	580	541	129	38	15
Západoslovenský	2807	1201	981	190	46	22
Středoslovenský	1691	939	739	110	32	9
Východoslovenský	3317	1417	851	224	46	12
ČSR	16248	8524	5764	1043	342	278
SSR	8765	4137	3112	653	162	58
ČSSR	25013	12661	8876	1696	504	336

S — celkový počet

Ú — počet úspěšných řešitelů

VÝSLEDKY CELOSTÁTNÍHO KOLA MO KATEGORIE A

Vítězové

Pořadí, jméno a příjmení, ročník a zaměření, škola

- 1.—2. *Juraj Balázs*, 4 P, G Košice, Kuzmányho ul.
Jiří Witzany, 4 M, G W. Piecka, Praha
 3. *Ján Šefčík*, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
 - 4.—7. *David Bednárek*, 2 M, G W. Piecka, Praha
Martin Grajcar, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
Vladimír Kordula, 2 M, G M. Koperníka, Bílovec
Pavel Krtouš, 3 MF, G Liberec
 - 8.—9. *Adam Obdržálek*, 2 M, G W. Piecka, Praha
Andrej Pastva, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
 - 10.—12. *Petr Hájek*, 2 M, G W. Piecka, Praha
Marián Šumšala, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
Pavel Valtr, 4 M, G W. Piecka, Praha
 13. *Josef Pelikán*, 4 MF, G K. Šátala, České Budějovice
 - 14.—17. *Martin Černý*, 4 M, G W. Piecka, Praha
Martin Foltín, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
Ján Lužný, 3, SPŠE Prešov
Petr Maršálek, 4 P, G Praha 4, Ohradní
- Ostatní úspěšní řešitelé*
- 18.—21. *Andrej Hoos*, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
Petr Kodet, 4 M, G W. Piecka, Praha

- Ján Kováč*, 4 P, G Poprad, Lenin. nábrežie
Roman Tůma, 3 M, G W. Piecka, Praha
- 22.—27. *Vlado Hapák*, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
Ján Mareš, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
Marcel Polakovič, 1 M, G A. Markuša, Bratislava
Jarmila Ranošová, 3 M, G M. Koperníka, Bílovec
Ivo Švec, 4 MF, G J. Hronca, Bratislava
Tomáš Vaníček, 4 M, G W. Piecka, Praha
- 28.—31. *Eva Koncová*, 4 MF, G J. Hronca, Bratislava
Eva Kopecká, 3 MF, G J. Hronca, Bratislava
Tomáš Pecina, 4 P, G Turnov
Richard Pleva, 4 MF, G Praha 3, Sladkovského nám.
- 32.—35. *František Adamec*, 4 P, G Ostrov n. O.
Richard Nemec, 3 P, G Banská Bystrica
Ivan Polách, 2 MF, G J. Hronca, Bratislava
Róbert Szelepcsényi, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
- 36.—37. *Martin Knor*, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
Bohumír Sládek, 4, SPŠE Písek
- 38.—40. *Ivo Čermák*, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
Peter Klein, 1 M, G A. Markuša, Bratislava
Vladan Majerech, 1 MF, G Pardubice
- 41.—42. *Matej Lexa*, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
Jan Ternbach, 4 P, G Jevíčko

Pořadí úspěšných řešitelů z tříd, které nejsou zaměřeny na matematiku:

1. *Juraj Balázs*, 4, G Košice, Kuzmányho ul.
2. *Pavel Krtouš*, 3, G Liberec
3. *Josef Pelikán*, 4, G K. Šatala, České Budějovice
- 4.—5. *Ján Lužný*, 3, SPŠE Prešov

- Petr Maršálek*, 4, G Praha 4, Ohradní
6. *Ján Kováč*, 4, G Poprad, Lenin. nábrežie
7. *Ivo Švec*, 4, G J. Hronca, Bratislava
- 8.—11. *Eva Koncová*, 4, G J. Hronca, Bratislava
Eva Kopecká, 3, G J. Hronca, Bratislava
Tomáš Pecina, 4, G Turnov
Richard Pleva, 4, G Praha 3, Sladkovského nám.
- 12.—14. *František Adamec*, 4, G Ostrov n. O.
Richard Nemec, 3, G Banská Bystrica
Ivan Polách, 2, G J. Hronca, Bratislava
15. *Bohumír Sládek*, 4, SPŠE Písek
16. *Vladan Majerech*, 1, G Pardubice
17. *Jan Ternbach*, 4, G Jevíčko

NEJÚSPĚŠNĚJŠÍ ŘEŠITELÉ II. KOLA MO V KATEGORIÍCH A, B, C

Z každého kraje a každé kategorie uvádíme nejvýše prvních deset nejúspěšnějších řešitelů.

Praha

Kategorie A

1. *Martin Černý*, 4 M, G W. Piecka, Praha
- 2.—3. *Zdeněk Čulík*, 4 M, G W. Piecka, Praha
Richard Pleva, 4 MF, G Praha 3, Sladkovského nám.
- 4.—5. *David Bednárek*, 2 M, G W. Piecka, Praha
 Jiří Witzany, 4 M, G W. Piecka, Praha
6. *Pavel Valtr*, 4 M, G W. Piecka, Praha
7. *Adam Obdržálek*, 2 M, G W. Piecka, Praha
8. *Petr Hájek*, 2 M, G W. Piecka, Praha
9. *Roman Tůma*, 3 M, G W. Piecka, Praha
10. *Petr Maršálek*, 4 P, G Praha 4, Ohradní

Kategorie B

- 1.—2. *David Bednárek*, M, G W. Piecka, Praha
Adam Obdržálek, M, G W. Piecka, Praha
3. *Tomáš Ledvinka*, SPŠE Praha 1, Na příkopě

4. *Petr Hájek*, M, G W. Piecka, Praha
5. *Tomáš Holman*, M, G W. Piecka, Praha
6. *Martin Heisler*, M, G W. Piecka, Praha
7. *Michal Matyska*, M, G W. Piecka, Praha
8. *Ivo Petrouš*, M, G W. Piecka, Praha
9. *Ivo Majetič*, M, G W. Piecka, Praha
10. *Aleš Kemr*, MF, G W. Piecka, Praha

Kategorie C

1. *František Trojánek*, P, G Praha 4, Na vítězné pláni
2. *Jan Sochor*, M, G W. Piecka, Praha
3. *Miroslav Šíma*, M, G W. Piecka, Praha
- 4.—7. *Martin Barhoň*, M, G W. Piecka, Praha
Tomáš Liška, M, G W. Piecka, Praha
Martin Novotný, P, G Praha 9, Litoměřická
Ondřej Šmíd, M, G W. Piecka, Praha
8. *Jiří Krčál*, M, G W. Piecka, Praha
9. *František Hrnčíř*, MF, G Praha 3, Sladkovského nám.

Středočeský kraj

Kategorie A

1. *Petr Kolář*, 4 P, G Mladá Boleslav
2. *Petr Votava*, 3 P, G Kolín

Kategorie B

1. *Leoš Sýkora*, P, G Mělník
2. *Petr Flek*, P, G Slaný

Kategorie C

1. *Josef Šimůnek*, SPŠE Kutná Hora
2. *Jiří Knap*, P, G Nymburk
3. *Evžen Mazánek*, P, G Vlašim
4. *Libuše Husáková*, P, G Slaný
5. *Roman Masopust*, P, G Kutná Hora
6. *Jan Plešinger*, P, G Říčany
7. *Antonín Foller*, SPŠE Kutná Hora
8. *Milena Bejdová*, P, G Říčany
9. *Vladimíra Rauchová*, P, G Mnichovo Hradiště
10. *David Jánošík*, P, G Poděbrady

Jihočeský kraj

Kategorie A

1. *Bohumír Sládek*, 4, SPŠE Písek
2. *Josef Pelikán*, 4 MF, G K. Šatala, České Budějovice
3. *Tomáš Drtina*, 4 P, G České Budějovice, Jírovčova
- 4.—5. *Vojtěch Hromíř*, 3 P, G Strakonice
Štěpánka Šindelářová, 3 P, G Č. Budějovice, Jírovčova

Kategorie B

1. *Josef Fictum*, SPŠ staveb. Volyně
2. *Barbora Štěpková*, P, G České Budějovice, Jírovčova
3. *Petr Jaroš*, P, G Pelhřimov
4. *Jiří Měšťan*, P, G Tábor
- 5.—6. *Jindra Matoušková*, MF, G K. Šatala, Č. Budějovice
Milan Štech, MF, G K. Šatala, České Budějovice

Kategorie C

- 1.—6. *Roman Bartoš*, P, G Písek
Robert Kostohryz, P, G Písek
Pavel Liška, P, G Písek
Josef Nečas, P, G Písek
Zdeněk Řanda, P, G Písek
Jindřich Zapletal, P, G Tábor
7. *Aleš Chrdle*, MF, G K. Šatava, České Budějovice
- 8.—9. *Stanislav Kropš*, P, G Strakonice
Pavel Peniaštek, P, G Tábor
10. *Jiří Veselý*, P, G Strakonice

Západočeský kraj

Kategorie A

1. *František Adamec*, 4 P, G Ostrov nad Ohří
2. *Miroslav Plevný*, 4 P, G Cheb
3. *Pavel Hajn*, 4 MF, G J. Fučíka, Plzeň
4. *Herbert Urbanec*, 3 MF, G Karlovy Vary
5. *Ladislav Hanyk*, 3 MF, G Karlovy Vary
6. *Jan Boček*, 3 P, G Plzeň, ul. Pionýrů
7. *Josef Běláč*, 4 MF, G J. Fučíka, Plzeň

Kategorie B

1. *Jiří Pittner*, MF, G J. Fučíka, Plzeň
2. *Lubomír Perk*, MF, G J. Fučíka, Plzeň
3. *Kamil Meisl*, MF, G J. Fučíka, Plzeň

4. *Jakub Yaghob*, MF, G J. Fučíka, Plzeň
5. *Radovan Osoba*, MF, G Plzeň, ul. Pionýrů
6. *Pavel Samek*, MF, G J. Fučíka, Plzeň
- 7.—8. *Václav Kohout*, P, G Plzeň, ul. Pionýrů
Martin Lorentz, P, G Cheb

Kategorie C

1. *Jaroslav Vracovský*, P, G Plzeň, Opavská
2. *Petr Kozel*, MF, G Karlovy Vary
3. *Martin Černý*, MF, G Plzeň, ul. Pionýrů
4. *Pavla Herciková*, MF, G J. Fučíka, Plzeň
- 5.—7. *David Ježek*, P, G Ostrov n. O.
Jan Šmrha, P, G Plzeň, Opavská
Marcel Šůcha, MF, G J. Fučíka, Plzeň
- 8.—9. *Luboš Houdek*, P, G Mariánské Lázně
Pavel Nýč, P, G Tachov

Severočeský kraj

Kategorie A

1. *Pavel Krtouš*, 3 MF, G Liberec
2. *Petr Jaklin*, 4 P, G Ústí n. L.
- 3.—4. *Kateřina Denksteinová*, 3 P, G Děčín
Martin Klazar, 4 P, G Louny
5. *Vladimír Smutný*, 4 MF, G Liberec

Kategorie B

1. *Petr Šleich*, P, G Děčín
2. *Libor Pánek*, SPŠSE Liberec

3. *Ondřej Pavlata*, P, G Jablonec n. N.
- 4.—5. *Martin Beneš*, MF, G Teplice
Pavel Nevyhoštěný, SPŠSE Liberec

Kategorie C

1. *Jana Vejvalková*, P, G Most
2. *Blanka Havelková*, MF, G Ústí n. L.
3. *Radka Zuzánková*, P, G Děčín
- 4.—5. *Šárka Březinová*, P, G Děčín
Otakar Jirgl, P, G Děčín

Východočeský kraj

Kategorie A

1. *Jan Ternbach*, 4 P, G Jevíčko
2. *Aleš Limpouch*, 4 MF, G J. K. Tyla, Hradec Králové
3. *Tomáš Pecina*, 4 P, G Turnov
4. *Vladan Majerech*, 1 MF, G Pardubice
5. *Tomáš Kopf*, 4, SPŠCh Pardubice
6. *Zbyněk Linhart*, 4 MF, G Pardubice
7. *Ivo Hladík*, 4 P, G Náchod
8. *Ivan Pícek*, 3 MF, G Hradec Králové, Šimkova
9. *Luděk Brukner*, 3 MF, G Pardubice
10. *Josef Hynek*, 4, SPŠE Pardubice

Kategorie B

1. *Michal Deml*, MF, G Pardubice
2. *Vladan Majerech*, 1 MF, G Pardubice

3. *Jiří Charbuský*, SPŠ Jičín
4. *Michal Blažej*, P, G Trutnov
5. *Luboš Dvořák*, MF, G Pardubice
6. *Vojtěch Jaruška*, MF, G Pardubice
7. *Martin Hospodka*, SPŠE Pardubice
8. *Martin Špelda*, P, G Dobruška

Kategorie C

- 1.—3. *Petr Jelinek*, MF, G Pardubice
Jana Ježková, MF, G Hradec Králové, Šimkova
Vladan Majerech, MF, G Pardubice
4. *Rudolf Rousek*, MF, G Hradec Králové, Šimkova
5. *Petr Fencl*, MF, G Pardubice
- 6.—8. *Luboš Borůvka*, P, G Náchod
David Janáček, SPŠE Pardubice
Josef Kříž, SPŠE Pardubice

Jihomoravský kraj

Kategorie A

- 1.—2. *Martin Kovár*, 3 P, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Dušan Vaškovic, 4 P, G Uherský Brod
3. *Tomáš Drtílek*, 4 P, G Brno, Koněvova
- 4.—5. *Michal Beneš*, 4 P, G Jihlava
Alan Kuběna, 4, SPŠE Brno, Leninova
6. *Pavel Zemčík*, 4, SPŠE Brno, Leninova
7. *Michal Krupka*, 2 P, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 8.—9. *Luděk Niedermayer*, 4 P, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Václav Studený, 3 P, G Brno, Elgartova

Kategorie B

1. *Pavel Adamec*, P, G Kroměříž
2. *Richard Seda*, P, G Blansko
3. *Petr Brada*, P, G Třebíč
- 4.—6. *Petr Fuchs*, P, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Michal Krupka, P, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Libor Skřička, P, G Brno, tř. kpt. Jaroše
7. *Petr Veselý*, P, G Jihlava
- 8.—10. *Radek Dočekal*, P, G Jihlava
Hana Roztočilová, P, G Brno, Koněvova
Jan Vecheta, P, G Brno, Koněvova

Kategorie C

1. *Jaroslav Hora*, P, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 2.—3. *František Klein*, P, G Brno, Koněvova
Radek Tomčík, P, G Brno, Koněvova
- 4.—5. *Hana Peňázová*, P, G Brno, tř. kpt. Jaroše
David Toman, P, G Brno, tř. kpt. Jaroše
6. *Miroslav Minárik*, P, G Jihlava
7. *Petr Steinmentz*, P, G Brno, Koněvova
8. *Jiří Kubáček*, P, G Brno, Koněvova

Severomoravský kraj

Kategorie A

1. *Vladimír Kordula*, 2 M, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Ivo Staněk*, 3 M, G M. Koperníka, Bílovec

3. *Ivo Čermák*, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
4. *Petr Adámek*, 3 M, G M. Koperníka, Bílovec
- 5.—8. *Pavel Kráčmar*, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
Jarmila Ranošová, 3 M, G M. Koperníka, Bílovec
Petr Šimon, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
Angel Vargas, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
9. *Jiří Lihotský*, 4 P, G Opava
10. *Aleš Pořízka*, 2 M, G, M. Koperníka, Bílovec

Kategorie B

- 1.—2. *Martin Blatný*, M, G M. Koperníka, Bílovec
Vladimír Kordula, M, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Tomáš Klínek*, P, G Valašské Meziříčí
4. *Michal Šverdík*, M, G M. Koperníka, Bílovec
5. *Pavel Seleši*, M, G M. Koperníka, Bílovec
6. *Antonín Franek*, M, G M. Koperníka, Bílovec
7. *Aleš Pořízka*, M, G M. Koperníka, Bílovec
8. *Ivo Kožušník*, P, G Havířov
9. *Martin Novotný*, P, G Ostrava-Hrabůvka
10. *Otto Jünger*, M, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie C

- 1.—5. *Robert Babilon*, M, G M. Koperníka, Bílovec
Pavel Calábek, M, G M. Koperníka, Bílovec
František Kašpárek, M, G M. Koperníka, Bílovec
Radan Kuča, M, G M. Koperníka, Bílovec
Vojtěch Šlězka, M, G M. Koperníka, Bílovec
- 6.—9. *Petr Habala*, M, G M. Koperníka, Bílovec

- Tomáš Novotný, P, G Frýdek-Místek
Martina Sklenářová, P, G Ostrava, Jízdárenská
Petra Sýkorová, M, G M. Koperníka, Bílovec
10. Marek Petřivalský, P, G Olomouc-Hejčín

Bratislava

Kategorie A

1. Ján Šefčík, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
2. Ondrej Pastva, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
- 3.—4. Eva Koncová, 4 MF, G J. Hronca, Bratislava
Marián Šumšala, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
5. Matej Lexa, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
- 6.—7. Martin Foltin, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
Eva Kopecká, 3 MF, G J. Hronca, Bratislava
8. Martin Knor, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
9. Andrej Hoos, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
10. Róbert Szelepcsényi, 4 M, G A. Markuša, Bratislava

Kategorie B

1. Miroslav Bedlek, M, G A. Markuša, Bratislava
- 2.—3. Vladimír Potisk, MF, G J. Hronca, Bratislava
Stanislav Meduna, MF, G J. Hronca, Bratislava
4. Milan Balucha, SPŠ Stavebná, Bratislava
5. Ivan Vargovič, M, G A. Markuša, Bratislava
6. Anna Vojtková, MF, G J. Hronca, Bratislava
7. Tomáš Fischer, MF, G J. Hronca, Bratislava
- 8.—9. Mária Orgonášová, MF, G J. Hronca, Bratislava

- Pavol Serres*, P, G L. Novomeského, Bratislava
10. *Robert Trávník*, MF, G J. Hronca, Bratislava

Kategorie C

- 1.—6. *Anton Belan*, G A. Markuša, Bratislava
Zohdy Hamid, M, G A. Markuša, Bratislava
Jana Koncová, MF, G J. Hronca, Bratislava
Juraj Mázor, M, G A. Markuša, Bratislava
Marcel Polakovič, M, G A. Markuša, Bratislava
Milan Singhofer, M, G A. Markuša, Bratislava
7. *Peter Klein*, M, G A. Markuša, Bratislava
8. *Róbert Kridl*, M, G A. Markuša, Bratislava
9. *Adrian Liška*, M, G A. Markuša, Bratislava
10. *Stanislav Párnický*, M, G A. Markuša, Bratislava

Západoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Pavel Beluský*, 4 P, G Nitra, Párovská
2. *Vladimír Uhelský*, 3 P, G E. Gudernu, Nitra
3. *Štefan Dragúň*, 4 P, G Šurany
4. *Vladimír Púček*, 4 P, G Skalica
5. *Tibor Hlédik*, 4 P, G maď. Komárno
6. *Gabriel Drobný*, 4 P, G Trenčín
7. *Ján Malý*, 3 P, G E. Gudernu, Nitra
8. *Michal Valent*, 4 P, G Levice
9. *Tibor Lacza*, 4 P, G Nové Zámky
10. *Stanislav Varga*, 4 P, G Topoľčany

Kategorie B

1. *Gejza Berek*, P, G maď. Želiezovce
2. *Bronislav Krajčovič*, SPŠ stavebná, Trnava
3. *Zoltán Sedlák*, 2 P, G Nové Zámky
4. *Tomáš Polakovič*, P, G Nové Zámky
5. *Peter Mužila*, P, G Nitra, Párovská
6. *Róbert Jakubík*, P, G Levice
7. *Peter Olláry*, SPŠ Komárno
8. *Roman Vince*, P, G Šahy
9. *Zuzana Šuppová*, P, G E. Gudernu, Nitra
10. *Jozef Kúdela*, P, G Levice

Kategorie C

1. *Marián Lukáč*, P, G Bánovce n. B.
2. *Rudolf Burcl*, P, G Trnava
3. *Oliver Ralík*, P, G E. Gudernu, Nitra
4. *Martin Šteška*, P, G Piešťany
5. *Ildikó Vázsonyiová*, P, G maď. Komárno
6. *Pavol Kolník*, P, G Nové Mesto n. V.
7. *Peter Križalkovič*, P, G Nitra, Párovská
8. *Iveta Hercová*, P, G Levice
9. *Gabriel Iró*, P, G maď. Senec
10. *Andrea Szabóová*, P, G maď. Komárno

Středoslovenský kraj

Kategorie A

- 1.—3. *Igor Jucho*, 3 P, G Povážská Bystrica
- Richard Nemec*, 3 MF, G Banská Bystrica, Tajovského

- Igor Odrobina*, 3 P, G Žilina, Veľká Okružná
- 4.—5. *Roman Gajdošech*, 4 M, G Žilina, Veľká Okružná
Roman Kučera, 4 M, G Žilina, Veľká Okružná
- 6.—7. *Erich Bielik*, 3 P, G Dolný Kubín
Štefan Brisuda, 4 M, G Žilina, Veľká Okružná
8. *Dušan Pospíšil*, 4 P, G Povážská Bystrica
9. *Jozef Bača*, 4 M, G Žilina, Veľká Okružná

Kategorie B

1. *Igor Melicherčík*, MF, G Banská Bystrica, Tajovského
2. *Milan Kubala*, M, G Žilina, Veľká Okružná
3. *Róbert Germič*, M, G Žilina, Veľká Okružná
4. *Ivan Berkeš*, MF, G Zvolen
- 5.—7. *Ľubomír Čaňo*, MF, G Zvolen
Beáta Prostináková, SPŠ Dubnica n. V.
Peter Uher, MF, G Prievidza
8. *Ľubica Ferencová*, MF, G Zvolen
- 9.—10. *Jozef Čierny*, M, G Žilina, Veľká Okružná
Igor Kohút, P, G Púchov

Kategorie C

- 1.—2. *Dušan Hanes*, MF, G Prievidza
Anna Koreňová, M, G Žilina, Veľká Okružná
- 3.—4. *Miroslav Laššák*, M, G Žilina, Veľká Okružná
Miroslav Leštach, M, G Žilina, Veľká Okružná
5. *Fridrich Štrba*, MF, G Žilina, Wolkerova
6. *Branislav Grešák*, P, G Kysucké Nové Mesto
7. *Pavel Galba*, P, G Dubnica n. V.

- 8.—9. *Tomáš Kubík*, MF, G Prievidza
Roman Labát, M, G Žilina, Veľká Okružná
10. *Ľubomír Bašo*, MF, G Prievidza

Východoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Juraj Balázs*, 4 P, G Košice, Kuzmányho ul.
2. *Ján Kováč*, 4 P, G Poprad, Lenin. nábrežie
3. *Ján Lúžny*, 3, SPŠE Prešov
4. *František Bobenič*, 4 M, G Košice, Šmeralova
5. *Ľuboš Krupa*, 4 P, G Humenné
6. *Peter Vargovčík*, 4, SPŠE Prešov
7. *Juraj Vataščin*, 4 P, G Prešov, Konštantínova
8. *Ignác Tereščák*, 4 P, G Michalovce
9. *Renáta Franková*, 4 P, G Košice, Šrobárova
10. *Viliam Schichman*, 4 P, G Prešov, Konštantínova

Kategorie B

1. *Vladimír Hašík*, SPŠE Košice
2. *Alexander Szabari*, M, G Košice, Šmeralova
3. *Igor Bilak*, P, G Prešov, Konštantínova
4. *Alexander Slanina*, P, G Košice, Šmeralova
5. *Rudolf Bosák*, P, G Giraltovce
- 6.—7. *Igor Kuruc*, G Prešov, Revolučná
Gabriel Zamborský, SPŠE Prešov

Kategorie C

1. *Roman Soták*, M, G Košice, Šmeralova
2. *Mário Drosc*, P, G Michalovce
3. *Igor Fedačko*, P, G Michalovce
4. *Jozef Mičko*, M, G Košice, Šmeralova
5. *Michal Nemčík*, P, G Poprad, Lenin. nábřežie
6. *Adriana Jergová*, P, G Prešov, T. Ševčenka
7. *Michal Lieskovský*, P, G Prešov, Konštantinova
8. *Jana Marcinová*, Str. hotelová škola Kežmarok
9. *Peter Muška*, P, G Poprad, Lenin. nábřežie
10. *Michal Urban*, P, G Prešov, Konštantinova

G — gymnázium

M — třídy se zaměřením na matematiku

MF — třídy matematicko-fyzikální

P — třídy přírodovědné, s odbornou přípravou nebo experimentální

Pokud není uvedeno jinak, byli všichni uvedení řešitelé v kategorii B žáky 2. ročníku, řešitelé v kategorii C žáky 1. ročníku.

ÚLOHY I. KOLA

Z - 1 - 1

Nájdite všetky päťciferné čísla deliteľné číslom 84, ktoré majú túto vlastnosť: Prvé tri číslice tvoria číslo, ktoré je trikrát väčšie ako číslo zo zostávajúcich dvoch číslic. Poradie číslic je pritom rovnaké ako v päťcifernom čísle.

Riešenie. Označme x dvojciferné číslo tvorené posledným dvojčíslím hľadaného päťciferného čísla, y trojciferné číslo tvorené jeho prvými tromi ciframi; potom hľadané päťciferné číslo n je rovné $100y + x$. Podľa zadania úlohy má platiť $y = 3x$, teda $n = 300x + x = 301x = 7 \cdot 43 \cdot x$. Keďže 84 delí $7 \cdot 43x$ vtedy a len vtedy, keď 12 delí $43x$, preto nutne x sa rovná jednému z čísel 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96. Keďže pre 12 a 24 číslo $3x$ nie je trojciferné číslo, tak ostáva týchto 6 riešení pre n :

10 836, 14 448, 18 060, 21 672, 25 284, 28 896.

Z - 1 - 2

Pre ktoré prvočíslo p je číslo $2p + 1$ trefou mocninou nejakého prirodzeného čísla?

Riešenie. Položme $2p + 1 = m^3$, kde m je prirodzené

číslo a p prvočíslo. $2p + 1$ je vždy nepárne číslo, preto nutne m^3 teda aj m je nepárne. Zrejme $2p = m^3 - 1$ a odtiaľ po rozklade pravej strany máme

$$2p = (m - 1)(m^2 + m + 1). \quad (1)$$

Pretože m je nepárne, možno ho vyjadriť v tvare $m = 2k + 1$, kde $k > 0$ je prirodzené číslo. Po dosadení do rovnosti (1) máme

$$2p = 2k(4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 + 1)$$

a odtiaľ

$$p = k(4k^2 + 6k + 3).$$

Pretože prvočíslo môže byť deliteľné len číslom 1 a sebou samým, nutne $k = 1$ a $p = 4 + 6 + 3 = 13$.

Teda len pre $p = 13$ je $2p + 1$ tretou mocninou prirodzeného čísla, $2 \cdot 13 + 1 = 27 = 3^3$.

Z - 1 - 3

Na linke električky je čas jazdy medzi konečnými stanicami 45 minút. Na obidvoch konečných staniciach čakajú električky 5 minút. Pridaním piatich električiek na linku sa interval medzi električkami znížil o jednu minútu. Koľko súprav jazdí teraz na linke a v akom intervale? (Dĺžka intervalu vyčíslená v minútach je prirodzené číslo.)

Riešenie. Jedna električka prejde celú trať tam i späť za

100 minút. Pred zmenou jazdí x vlakov s intervalom y minút. Po zmene jazdí $x + 5$ vlakov s intervalom $y - 1$ minút. Počet intervalov násobený dĺžkou intervalu dáva vždy čas, potrebný k prejdenu celej trati.

$$x \cdot y = 100$$

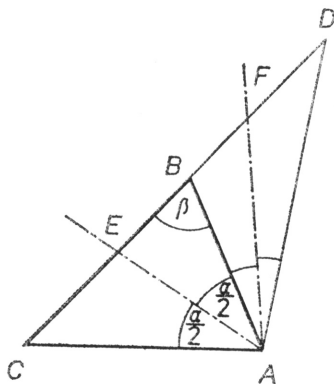
$$(x + 5) \cdot (y - 1) = 100$$

Riešením sústavy rovníc: $x = 20, y = 5$.

Po trati jazdí 25 súprav s intervalom 4 minúty.

Z - 1 - 4

Je daný rovnoramenný trojuholník ABC , $d(AC) = d(BC)$. Na predĺžení strany CB za bod B zvoľte bod D tak, aby $d(BD) = d(AB)$. Priesečníky osí uhlov BAC a BAD s úsečkou CD označte E a F . Akú veľkosť má uhol EAF , ak $v(\sphericalangle CAB) = \alpha$?



Obr. 1

Riešenie (obr. 1). Polpriamka AE je osou uhla α , preto $v(\sphericalangle EAB) = \frac{1}{2} \alpha$. Trojuholník ABC je rovnoramenný, preto $\alpha = \beta$. Uhol ABD je susedný k uhlu ABC , preto $v(\sphericalangle ABD) = 180^\circ - \alpha$. Trojuholník ABD je rovnoramenný, $d(AB) = d(BD)$. Potom $v(\sphericalangle BAD) = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Polpriamka AF je osou uhla BAD , preto $v(\sphericalangle BAF) = \frac{1}{4} \alpha$.

Súčet uhlov EAB a FAB je $\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \alpha = \frac{3}{4} \alpha$. Pre uhol α v rovnoramennom trojuholníku ABC platí $\alpha < 90^\circ$. Potom musí platiť pre súčet uhlov EAB a FAB $\frac{3}{4} \alpha < 67^\circ 30'$.

Uhol EAF zostrojený vyššie popísaným spôsobom je pre každý rovnoramenný trojuholník ABC vždy menší ako $67,5^\circ$.

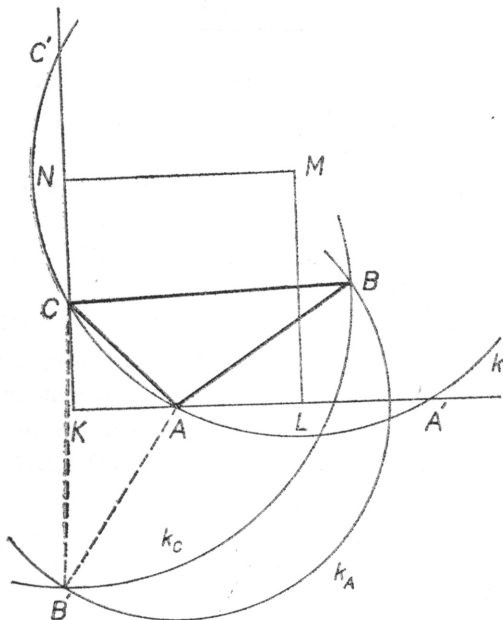
Z - I - 5

Je daný štvorec $KLMN$ s dĺžkou strany 6 cm. Zostrojte trojuholník ABC , ktorý má tieto štyri vlastnosti:

1. vrchol A leží na priamke KL ,
2. vrchol C leží na priamke KN ,
3. bod M má od každého z bodov A a C vzdialenosť 7 cm,
4. $d(AB) : d(BC) : d(CA) = 1,5 : 2 : 1$.

Koľko riešení má úloha?

Riešenie. Zostrojíme kružnici $k = (M, 7 \text{ cm})$ (obr. 2). Jej priesečníky s KL označíme A, A' a jej priesečníky s KN



Obr. 2

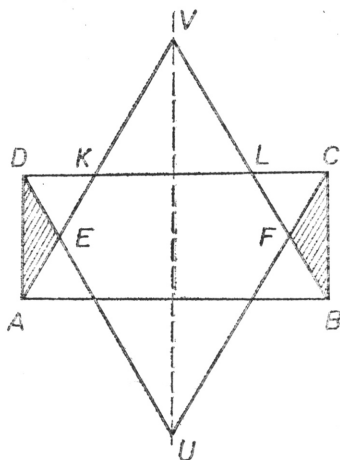
označíme C, C' . Každá z dvojíc bodov $A, C; A, C'; A', C; A', C'$; predstavuje vždy dva vrcholy zostrojeného trojuholníka.

Uvažujme dvojicu A, C . Potom bod B je priesečníkom kružníc $k_A = (A; 1,5 \cdot AC)$ a $k_C = (C; 2 \cdot AC)$. Obdobne je tomu v prípade dvojíc $A, C'; A', C; A', C'$.

Úloha má celkom 8 riešení.

Je daný rovnostranný trojuholník ABV , $d(AB) = 8$ cm. Zostrojte obdĺžnik $ABCD$, ktorého strana CD prechádza stredom K úsečky AV . Ďalej zostrojte v polrovine s hraničnou priamkou CD a vnútorným bodom A rovnostranný trojuholník CDU . Vypočítajte obsah tých častí obdĺžnika $ABCD$, ktoré ležia mimo trojuholníka ABV i trojuholníka CDU .

Riešenie. Priesečníky priamok AV a DU , BV a CU označme (obr. 3), po rade E a F . Zvonku obidvoch uvažovaných trojuholníkov ležia v obdĺžniku len trojuholníky ADE a BCF . V obidvoch týchto trojuholníkoch majú uhly pri stranách AD a CB veľkosť 30° . Strany AD a CB sú proti-



Obr. 3

Iahlé strany obdĺžnika $ABCD$. Teda trojuholníky ADE a BCF sú podľa vety usu zhodné rovnoramenné trojuholníky. Stačí vypočítať obsah jedného z nich.

Označme L priesečník priamok BV a DC . Z konštrukcie obdĺžnika $ABCD$ vyplýva, že KL je stredná priečka trojuholníka ABV , takže $d(KL) = 4$. Z osovej súmernosti obdĺžnika $ABCD$ a trojuholníka ABV podľa osi UV vyplýva, že $d(DK) = 2$. Trojuholník DKE má pri strane DK uhly o veľkosti 60° , a preto je rovnostranný. Teda ADE je rovnoramenný trojuholník o ramenách dĺžky 2 a uhloch pri základni o veľkosti 30° , takže má ten istý obsah ako rovnostranný trojuholník o strane dĺžky 2. Obsah $\triangle AED$ je teda

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Celkový obsah časti obdĺžnika $ABCD$, ktoré ležia zvonku $\triangle ABV$ i $\triangle CBU$ je $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

ÚLOHY II. KOLA

Z - II - 1

Pred dvojčiferné číslo napíšeme to isté číslo, avšak s opačným poradím cifier. Dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je deliteľné číslom 21. Určte dvojčiferné číslo.

Riešenie. Označme a cifru na mieste desiatok a b počet jednotiek zvoleného dvojčiferného čísla. Podľa podmienok

úlohy má byť číslo $100(10b + a) + 10a + b = 1001b + 110a$ deliteľné číslom 21, teda siedmymi a tromi. Pretože 1001 je deliteľné siedmymi, musí byť siedmymi deliteľné číslo a , teda $a = 7$. Číslo $1001b + 770$ sa rovná $3(333b + 256) + 2(b + 1)$ a je deliteľné tromi práve vtedy, keď je číslo $b + 1$ deliteľné tromi. Jediným riešením sú čísla 72, 75, 78.

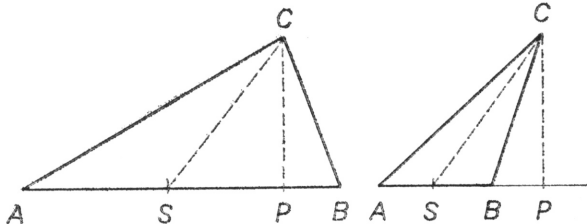
Z - II - 2

Nájdite všetky prvočísla p pre ktoré je číslo $p + 4$ druhou mocninou prirodzeného čísla.

Riešenie. Ak je $p + 4 = a^2$, je $p = (a - 2)(a + 2)$. Pretože je p prvočíslo, musí byť $a - 2 = 1$, $p = a + 2 = 5$. To je jediné riešenie.

Z - II - 3

V trojuholníku ABC je S stred strany AB a P päta výšky na priamku AB . Ďalej je $d(CS) = 5$, $d(CP) = 4$ a $d(AP) : d(BP) = 2$. Vypočítajte veľkosť strany AB .



Obr. 4a

4b

Riešenie. (obr. 4a, b). Podľa Pytagorovej vety je $d(SP) = 3$. Ak označíme $d(AS) = x$, je $d(AP) = x + 3$, $d(BP) = x - 3$ lebo $d(BP) = 3 - x$. Z podmienky $d(AP) : d(BP) = 2$, potom vyplýva v prvom prípade $x = 9$, v druhom $x = 1$. Potom je $d(AB) = 18$ alebo $d(AB) = 2$.

Z - II - 4

Auto ide z miesta A do miesta B priemernou rýchlosťou 70 km/h, naspäť priemernou rýchlosťou 50 km/h. Keby išlo tam i späť priemernou rýchlosťou 60 km/h, trvala by celá jazda o 8 minút menej. Aká je vzdialenosť miest A a B?

Riešenie. Ak označíme hľadanú vzdialenosť s (v km), má podľa podmienok úlohy platiť

$$\frac{s}{70} + \frac{s}{50} = \frac{2s}{60} + \frac{8}{60}, \text{ odtiaľ } s = 140 \text{ km.}$$

ÚLOHY III. KOLA V ČSR

(úlohy pripravil KV MO - Severočeský kraj)

Z - III - 1

Aké musia byť číslice x, y , ak päťciferné číslo $4x01y$ je deliteľné päťnástimi? Nájdite všetky riešenia úlohy a získané čísla vypíšte.

Riešenie. Číslica y môže byť 0 alebo 5 a číslica x ľubovoľné číslo z množiny $\{0, 1, \dots, 8, 9\}$, ktoré doplnia ciferný súčet tak, aby bol deliteľný tromi. Teda ak

$y = 0$, tak $5 + x = 3k$, $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \{1, 4, 7\}$,
 $y = 5$, tak $10 + x = 3k$, $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \{2, 5, 8\}$.

Hľadané päťciferné čísla, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy, sú:

41 010, 42 015, 44 010, 45 015, 47 010, 48 015.

Z - III - 2

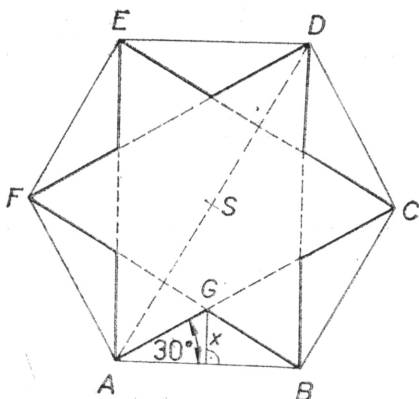
Existuje päťica po sebe nasledujúcich nepárnych čísel, aby súčet ich štvorcov bolo prvočíslo?

Riešenie. Neexistuje. Číslíca nultého rádu súčtu štvorcov ľubovoľnej päťice po sebe nasledujúcich nepárnych čísel $[(2k - 1)^2 + (2k + 1)^2 + (2k + 3)^2 + (2k + 5)^2 + (2k + 7)^2]$, $k \in \mathbb{Z}$ je vždy číslo päť.

Z - III - 3

Je daný pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ o strane $a = 2$ cm. Určte obsah obrazca, ktorý je zjednotením trojuholníkov ACE a BDF .

Riešenie. Najprv vypočítame obsah rovnoramenného trojuholníka (obr. 5) $P_{ABC} = \frac{2 \cdot x}{2} = x$, kde $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Potom obsah obrazca $P = P_6 - 6 \cdot P_{ABG} = 6 \cdot \sqrt{3} - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4 \sqrt{3} \text{ cm}^2$.



Obr. 5

Z - III - 4

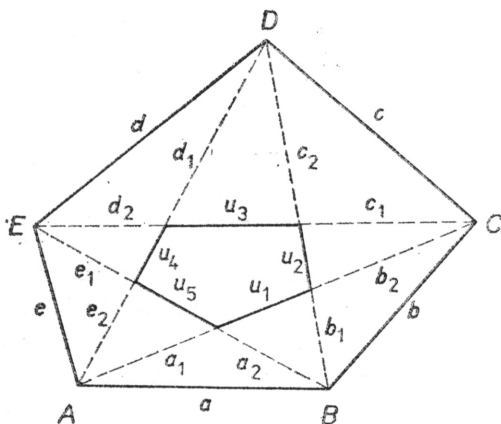
Kolóna áut mala doraziť do mesta najneskôr o 11.00 hodine. Keby išla priemernou rýchlosťou 30 km/h, prišla by do mesta už o 10.00 hodine. Keby išla priemernou rýchlosťou 20 km/h, dorazila by až o 12.00 hodine. Akou priemernou rýchlosťou musí kolóna ísť a akú vzdialenosť má prekonať?

Riešenie. Návod: Z podmienok úlohy dostávame rovnice $s = 30t$ (1), $s = 20(t + 2)$ (2), $s = v(t + 1)$ (3). Z (1) a (2) máme $30t = 20(t + 2)$, odkiaľ $t = 4$. Potom z (1) a (3) vyplýva $s = 120$, $v = 24$. Kolóna musí prejsť 120 km najviac za 5 hodín. Musí teda ísť rýchlosťou aspoň 24 km/h.

ÚLOHY III. KOLA V SSR
(úlohy pripravil KV MO - Bratislava)

Z - III - 1

Dokážte, že pre každý konvexný päťuholník platí: súčet veľkostí uhlopriečok (všetkých) je väčší ako súčet všetkých jeho strán.



Obr. 6

Riešenie. Pri označení podľa obr. 6 zrejme platí:

$a_1 + a_2 > a$, $b_1 + b_2 > b$, $c_1 + c_2 > c$, $d_1 + d_2 > d$, $e_1 + e_2 > e$; ďalej platí: $u_1 > a_1 + b_2$, ..., $u_5 > e_1 + a_2$.

Sčítaním uvedených nerovností dostaneme požadované tvrdenie.

Z - III - 2

a) Ak napíšeme ľubovoľné 3-ciferné číslo 4-krát za sebou, tak výsledné 12-ciferné číslo bude deliteľné 4-ciferným číslom 9 901. Dokážte!

b) Nájdite ďalšie (najlepšie všetky) 4-ciferné čísla, ktoré majú rovnakú vlastnosť, ako číslo 9 901.

Riešenie. a) Nech a je trojciferné číslo, potom príslušné 12-ciferné číslo je $(1\ 001\ 001\ 001) \cdot a$, tento súčin je deliteľný číslom 9 901, pretože činiteľ 1 001 001 001 je deliteľný týmto číslom. Možno sa o tom presvedčiť vydelením alebo rozkladom.

b) Platí: $1\ 001\ 001\ 001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101 \cdot 9\ 901$. Vlastnosť z a) má každý deliteľ čísla 1 001 001 001. Štvorciferné delitele sú: $1\ 001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $7\ 777 = 7 \cdot 11 \cdot 101$, $9\ 191 = 7 \cdot 13 \cdot 101$, $1\ 111 = 11 \cdot 101$, $1\ 313 = 13 \cdot 101$.

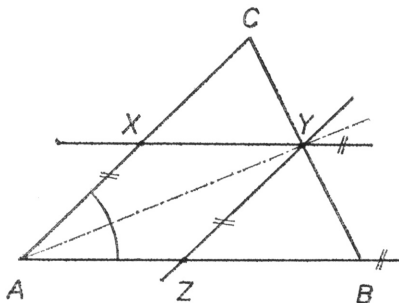
Z - III - 3

Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC . Vo vnútri strany AC zostrojte bod X , vo vnútri strany BC zostrojte bod Y tak, aby platilo:

$$d(AX) = d(XY), \quad \leftrightarrow XY \parallel \leftrightarrow AB$$

a dokážte správnosť konštrukcie.

Riešenie. Konštrukcia úlohy je zrejmá z obr. 7, ak si uvedomíme, že priamka AY je osou uhla BAC . Úloha má jediné riešenie.



Obr. 7

Z - III - 4

Vlado a Peter sa vydali na túru z miesta A do miesta B a späť. Vlado išiel rýchlejšie ako Peter a keď sa vracal, stretol Petra. Peter mal prejsť do miesta B ešte 2 km. Peter sa rozhodol, že ho musí dobehnúť. Zvýšil rýchlosť chôdze na dvojnásobok. Vlado už nevládal, preto zvyšok cesty do A prešiel polovičnou rýchlosťou. Do miesta A sa obaja vrátili zároveň. Vypočítajte vzdialenosť miest A a B.

Riešenie. Označme x vzdialenosť miest AB v km, v_1 rýchlosť Vlada, v_2 rýchlosť Petra (označenie pre východiskové rýchlosti). Podmienka, že obaja turisti dorazili do cieľa naraz, sa dá zapísať v tvare:

$$\frac{x+2}{v_1} + \frac{x-2}{1/2 v_1} = \frac{x-2}{v_2} + \frac{x+2}{2v_2}$$

odkiaľ dostaneme $v_1 = 2 \cdot v_2$.

Čas, ktorý uplynul od začiatku túry po prvé stretnutie turistov bol rovnaký, z čoho možno zapísať ďalšiu rovnicu:

$$\frac{x + 2}{v_1} = \frac{x - 2}{v_2}$$

Z oboch rovníc dostávame:

$$x + 2 = 2 \cdot (x - 2)$$

Teda $x = 6$.

Vzdialenosť miest AB je 6 km.

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

C - I - 1

Najděte všechny uspořádané trojice kladných reálných čísel a, b, c , pro které platí

$$a + 2b^2 + 3c^3 + \frac{1}{a} + \frac{2}{b^2} + \frac{3}{c^3} = 12.$$

Řešení. Pro každé kladné číslo u platí nerovnost $u + \frac{1}{u} \geq 2$, přičemž znaménko rovnosti platí jen v případě $u = 1$. Pro každou trojici kladných čísel a, b, c proto platí

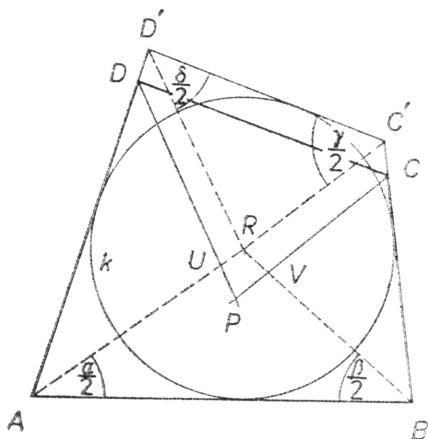
$$a + \frac{1}{a} + 2 \left(b^2 + \frac{1}{b^2} \right) + 3 \left(c^3 + \frac{1}{c^3} \right) \geq 12,$$

přičemž znaménko rovnosti platí právě tehdy, je-li $a = b = c = 1$. To je jediná trojice, která vyhovuje rovnici úlohy.

C - I - 2

Osy vnitřních úhlů konvexního čtyřúhelníku procházejí jedním bodem nebo omezují čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici. Dokažte.

Řešení. Osy vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$ při vrcholech A, B nemohou být rovnoběžné, označme jejich průsečík R . Bod R je středem kružnice, která se dotýká strany AB čtyřúhelníku a také polopřímek AD a BC . Je-li CD také tečnou této kružnice k , procházejí všechny osy vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$ bodem R . Dál budeme předpokládat, že přímka CD není tečnou kružnice k . Na polopřímkách BC a AD zvolíme body C' a D' tak, aby čtyřúhelník $ABC'D'$ byl kružnici k opsán a aby $C'D' \parallel CD$ (obr. 8). Osy vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABC'D'$ se protínají v bodě R , osy vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$ při vrcholech C, D se protínají v bodě P , pro který platí $CP \parallel C'R$, $DP \parallel D'R$. Přímky BC, AD, RP procházejí buď jedním bodem, nebo jsou spolu rovnoběžné. Proto jsou body R, P



Obr. 8

protějšími vrcholy čtyřúhelníku $PURV$ omezeného osami vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$. Platí $|\sphericalangle UPV| = |\sphericalangle D'RC'| = 180^\circ - \frac{\gamma + \delta}{2}$, $|\sphericalangle URV| = |\sphericalangle ARB| = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$, kde jsme α , β , γ , δ označili velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$ při vrcholech A , B , C , D . Protože $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$, je součet velikostí úhlů UPV a URV roven 180° . Podle věty o obvodovém a středovém úhlu lze čtyřúhelníku $PURV$ opsat kružnici, což jsme měli dokázat.

C - I - 3

Určete všechna přirozená čísla n ($200 > n > 3$) s touto vlastností: Poslední dvojčíslí dekadického zápisu čísla $(n+1)^2$ se liší od posledního dvojčíslí dekadického zápisu čísla n^2 nejvýše pořadím cifer.

Řešení. Kdyby čísla $(n+1)^2$ a n^2 končila stejným dvojčíslím, byl by jejich rozdíl dělitelný číslem 100, avšak $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ je vždy číslo liché a tedy není dělitelné číslem 100. Má-li tedy být přirozené číslo n řešením naší úlohy, musí se čísla $(n+1)^2$ a n^2 lišit na posledních dvou místech pořadím cifer. Do následující tabulky si napíšeme do sloupců všechny možnosti pro poslední číslici čísel n , $n+1$, n^2 , $(n+1)^2$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n + 1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$(n + 1)^2$	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

Končí-li například číslo n^2 číslicí 4 a číslo $(n + 1)^2$ číslicí 9, a mají-li se tato dvě čísla lišit na posledních dvou místech pořadí cifer, musí n^2 končit dvojčíslím 94 a číslo $(n + 1)^2$ dvojčíslím 49. Výše uvedenou tabulku můžeme tedy doplnit tabulkou posledního dvojčíslí čísel n^2 a $(n + 1)^2$ (předpokládáme-li, že n vyhovuje podmínce úlohy):

n^2	10	41	94	69	56	65	96	49	14	01
$(n + 1)^2$	01	14	49	96	65	56	69	94	41	10

Je-li druhá mocnina přirozeného čísla n dělitelná deseti, je číslo n dělitelné deseti, pak je však číslo n^2 dělitelné stem a nemůže končit dvojčíslím 10. To znamená, že v poslední tabulce nemůže nastat situace vyjádřená v prvním sloupci, stejně tak pro poslední sloupec. Končí-li číslo n^2 číslicí 5, musí končit číslicí 5 i číslo n , pak však končí číslo n^2 dvojčíslím 25. To znamená, že nemůže platit obsah 5. a 6. sloupce. Konečně končí-li číslo n^2 číslicí 4, musí číslo n končit číslicí 2 nebo 8, pak je však v čísle n^2 na místě desítek číslo sudé. Proto žádná druhá mocnina přirozeného čísla nemůže končit dvojčíslím 94 nebo 14. Zbývají tedy jen dvě možnosti,

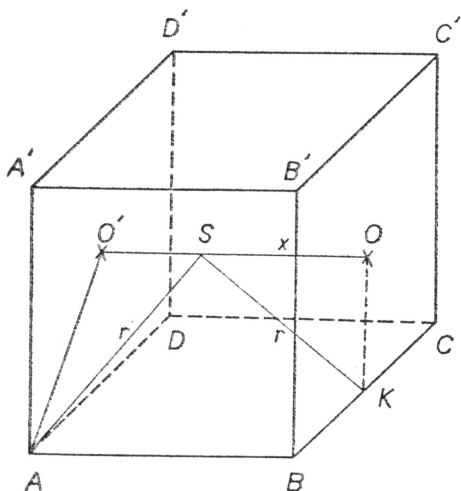
buď číslo n^2 končí dvojčíslím 69 a číslo $(n + 1)^2$ dvojčíslím 96, nebo obráceně. V prvním případě končí číslo n číslicí 3, na místě desítek pak musí být cifra 1 nebo 6. V druhém případě musí číslo n končit dvojčíslím 36 nebo 86. Protože $n < 200$, může n nabýt pouze hodnot 13, 63, 113, 163 a 36, 86, 136, 186. Zkouškou se přesvědčíme, že všechny tyto hodnoty vyhovují.

C - I - 4

Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$ o hraně délky a . Kulová plocha protíná stěnu BCC' v kružnici vepsané čtverci $BCC' B'$ a prochází

- a) bodem A ,
- b) středem úsečky AB .

V obou případech určete střed a poloměr kulové plochy.



Obr. 9

Řešení. Střed S dané kulové plochy leží na kolmici vedené středem O čtverce $BCC'B'$ k jeho rovině, tedy na spojnici středů O, O' čtverců $BCC'B'$ a $ADD'A'$, přesněji na polopřímce OO' . Označme $x = |OS|$ a r hledaný poloměr. Střed S bude vypočtenou velikostí x jednoznačně určen (obr. 9). V případě a) vypočteme x a r ze vztahů mezi stranami pravoúhlých trojúhelníků SAO' a SOK , kde K je střed strany BC . Podle Pythagorovy věty je

$$r^2 = (a - x)^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2, r^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

odkud plyne $x = \frac{5}{8}a$, $r = \frac{a}{8}\sqrt{41}$. V případě b) nahradíme trojúhelník SAO' trojúhelníkem SLM , kde L je střed hrany AB a M střed krychle. Vyjde pak $x = \frac{a}{2}$, což znamená, že bod S splývá s bodem M , trojúhelník SLM je vlastně jen úsečkou, a $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

C - I - 5

Nechť a, b jsou nesoudělná přirozená čísla. Pak přirozená čísla x, y, z , kde $x = a(a + b)$, $y = b(a + b)$, $z = ab$ jsou nesoudělná a platí $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Dokažte.

Nechť x, y, z jsou nesoudělná přirozená čísla, pro něž platí $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Zjistěte, zda pak existují přirozená čísla a, b taková, že $x = a(a + b)$, $y = b(a + b)$, $z = ab$.

Řešení. Čísla x, y, z jsou opravdu nesoudělná, když jsou nesoudělná čísla a, b . V opačném případě by některé prvočíslo z rozkladu čísla z muselo dělit čísla x i y . Dělí-li prvočíslo p číslo z , dělí buď a nebo b . Necht' dělí číslo a , pak nedělí číslo b , protože a, b jsou nesoudělná. Protože dělí číslo y , musí dělit číslo $a + b$. Jelikož dělí p číslo a a také číslo $a + b$, musí dělit b , což je spor. Tím je dokázáno, že

čísla x, y, z jsou nesoudělná, vztah $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ dokážeme prostým dosazením.

Necht' platí obráceně pro nesoudělná přirozená čísla x, y, z vztah $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Označme d největší společný dělitel čísel x, y . Pak je $x = ad, y = bd$, čísla a, b jsou nesoudělná.

Dále platí $\frac{1}{ad} + \frac{1}{bd} = \frac{1}{z}$, tedy $z = \frac{abd}{a+b}$. Protože a, b jsou nesoudělná, jsou nesoudělná i čísla $a, a+b$, rovněž čísla $b, a+b$ jsou nesoudělná. Protože číslo z je přirozené, musí číslo $a+b$ dělit číslo d , $d = k(a+b)$, k je číslo přirozené, takže $x = ka(a+b), y = kb(a+b), z = kab$. Protože však čísla x, y, z jsou podle předpokladu čísla nesoudělná, musí být $k = 1$ a pak je $x = a(a+b), y = b(a+b), z = ab$. Tím jsme zjistili, že existují přirozená čísla a, b tak, že jsou splněny podmínky druhé části úlohy, navíc víme, že to jsou čísla nesoudělná.

C - 1 - 6

Je dáno přirozené číslo $n, n > 2$. Dřevěnou krychli o hraně délky n natřeme na červeno a rozřežeme $3(n-1)$ rovinnými řezy na n^3 malých krychlíček o hraně délky 1.

a) Kolik malých krychliček bude mít jednu červenou stěnu, kolik dvě červené stěny, kolik tři červené stěny?

b) Je možné z malých krychliček sestavit kvádr o rozměrech $1, 4n - 8, 4n - 8$ tak, aby jedna jeho čtvercová stěna o rozměrech $4n - 8, 4n - 8$ byla vybarvena jako šachovnice?

Řešení. Krychle má 8 vrcholů, krychličky při vrcholech mají obarveny tři stěny. Právě dvě červeně natřené stěny budou mít ty krychličky, které jsou umístěny při hranách velké krychle, avšak ne při vrcholech. Vzhledem k tomu, že krychle má 12 hran, je jich $12(n - 2)$. Právě jednu červenou stěnu mají krychličky, které leží ve velké krychli při jejích stěnách, avšak ne při hranách. Je jich $6(n - 2)^2$. Tím je vyřešena část a) úlohy.

Abychom mohli kvádr z části b) úlohy složit tak, aby jedna jeho velká čtvercová stěna byla vybarvena šachovnicově, potřebujeme k tomu $(4n - 8)^2/2$ obarvených krychliček, stejně velký počet bude neobarvených. K dispozici máme $6n^2 - 12n + 8$ krychliček, které mají aspoň jednu stěnu červeně natřenou. Musí tudíž pro n platit

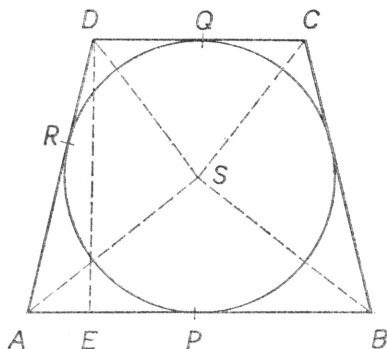
$$\frac{(4n - 8)^2}{2} \leq 6n^2 - 12n + 8,$$

tedy $(n - 5)^2 \leq 13$. Z přirozených čísel větších než 2 vyhovují pouze čísla $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Celkem máme n^3 krychliček, natřených i nenatřených, potřebujeme jich $(4n - 8)^2$, přičemž natřené můžeme dát případně i nenatřenou stěnou do stěny šachovnicově složené. Musí tudíž ještě platit $(4n - 8)^2 \leq n^3$. Z výše uvedených čísel pak vyhovují jen $n = 3$ a $n = 4$.

C - S - 1

V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ procházejí osy vnitřních úhlů jedním bodem. Vypočtete součet a součin velikostí jeho základů $a = |AB|$, $c = |CD|$ pomocí velikosti ramene $b = |AD|$ a výšky v .

Řešení. Procházejí-li všechny osy vnitřních úhlů jedním bodem (označíme ho S), lze lichoběžníku vepsat kružnici, jež má střed v bodě S a poloměr $\frac{v}{2}$. Označme P , Q její body dotyku se základnami, R bod dotyku s ramenem (obr. 10). Je pak $|DR| = |DQ| = \frac{c}{2}$, $|AR| = |AP| = \frac{a}{2}$, tedy $a + c = 2b$. Můžeme předpokládat $c < a$. Vedme bodem D



Obr. 10

kolmici k přímce AB , patu označíme E . Z pravoúhlého trojúhelníku AED plyne

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 + v^2, \text{ tedy } ac = v^2.$$

C - S - 2

Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$ o hraně délky a . Kulová plocha protíná rovinu BCC' v kružnici opsané čtverci $BCC'B'$ a prochází středem M hrany AA' . Určete střed a poloměr této kulové plochy.

Řešení. Úloha i postup řešení je obdobný jako u úlohy C-I-4; pro poloměr kulové plochy vyjde $r = \frac{a}{8} \sqrt{41}$, její střed S leží na spojnici středů K, L čtverců $BCC'B', ADD'A'$,
 $|LS| = \frac{5}{8}a, |KS| = \frac{3}{8}a.$

C - S - 3a

Číslo $n = 123 \dots 399400$ vzniklo tak, že jsme za sebou zapsali prvních 400 přirozených čísel. Zjistěte, zda je číslo n druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení. Jestliže by číslo n bylo druhou mocninou přirozeného čísla p , muselo by číslo p být dělitelné deseti, $p = 10q$, q je číslo přirozené. Číslo q musí končit takovým dvojčíslem, jehož druhá mocnina končí dvojčíslem 94. Takové dvojčíslí však neexistuje, viz řešení úlohy C-I-3.

Dřevěný pravidelný čtyřboký hranol H má podstavnou hranu délky n a výšku $6n$, číslo n je přirozené. Hranol natřeme červeně a rozřežeme na krychličky o hraně délky 1. Zjistěte, pro která n lze z krychliček slepit dutou krychli K o hraně délky $2n$, jejíž vnější povrch je celý červený.

Řešení. Pro $n = 1$ zřejmě nelze krychli K slepit, protože hranol K je složen pouze ze šesti krychliček, zatímco pro slepení krychle bychom jich potřebovali aspoň 8. Předpokládejme, že $n \geq 2$. Hranol H je složen z $6n^3$ malých krychliček, z nich je 8 s třemi červenými stěnami, dále ještě $8(n - 2) + 4(6n - 2) = 32n - 24$ má dvě červené stěny. Právě jednu červenou stěnu má $2(n - 2)^2 + 4(n - 2) \cdot (6n - 2) = 26n^2 - 64n + 24$ krychliček. K sestavení krychle K potřebujeme všech 8 krychliček s třemi červenými stěnami, dále $12(2n - 2) = 24n - 24$ krychliček s dvěma červenými stěnami, a konečně $6(2n - 2)^2 = 24n^2 - 48n + 24$ krychliček, které mají aspoň jednu červenou stěnu. Vidíme, že krychliček s dvěma červenými stěnami máme dostatek, ani všechny nepotřebujeme, $8n$ jich přebývá a můžeme je použít při slepování krychle K jako krychličky s jednou červenou stěnou. Těch potřebujeme $24n^2 - 48n + 24$, máme k dispozici $26n^2 - 64n + 24 + 8n = 26n^2 - 56n + 24$.

Pro n tak máme jedinou podmínku

$$26n^2 - 56n + 24 \geq 24n^2 - 48n + 24,$$

tj. $n \geq 4$.

C - II - 1

Najděte všechny uspořádané n -tice $(x_1, \dots, x_n)$ reálných čísel ($n = 2k$ je číslo sudé), které splňují soustavu dvou rovnic:

$$x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_{2k-1}^2 = x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{2k-1}x_{2k}$$

$$x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{2k}^2 = x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{2k-1}x_{2k}.$$

Řešení. Sečtením obou rovnic a odečtením pravé strany obdržené rovnice dostaneme rovnici

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 + \dots + (x_{2k-1} - x_{2k})^2 = 0.$$

Odtud plyne nutně $x_2 = x_1, x_4 = x_3, \dots, x_{2k} = x_{2k-1}$.

Na druhé straně je ihned vidět, že každá n -tice čísel, která splňuje tyto vztahy, je řešením dané soustavy rovnic.

C - II - 2

Žák měl určit délku tětiny v kruhu o poloměru r cm, vzdálenost středu kruhu od tětiny byla d cm. Číslo r, d byla dána. Žák použil nesprávného postupu. Domníval se, že délka tětiny bude $(r + d)$ cm. Přes chybný postup došel k správnému výsledku. Jaký byl poměr délek r a d ?

Řešení. Správně měl žák dosadit do výrazu $2\sqrt{r^2 - d^2}$, víme tedy, že pro čísla r, d platí vztah $2\sqrt{r^2 - d^2} = r + d$, po

umocnění $4(r - d)(r + d) = (r + d)^2$. Součet $r + d$ je nenulový, můžeme tímto součtem předcházející rovnost dělit, dostaneme $4(r - d) = r + d$, odkud plyne $r : d = 5 : 3$. Zkouškou se přesvědčíme, že každá dvojice $r = 5p$, $d = 3p$ ($p > 0$) je řešením.

C - II - 3a

Zjistěte, zda je přirozené číslo $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 16^{16} + 17^{17}$ dělitelné třemi. Svou odpověď zdůvodněte.

Řešení. Každé přirozené číslo n můžeme psát ve tvaru $3m + z$, kde m je přirozené číslo nebo nula a z je zbytek při dělení čísla n třemi, $0 \leq z < 3$. Pro každé přirozené číslo k dávají čísla n^k a z^k při dělení třemi stejný zbytek. Dané číslo je právě tehdy dělitelné třemi, když je třemi dělitelný součet $1^1 + 2^2 + 0^3 + 1^4 + 2^5 + 0^6 + \dots + 1^{16} + 2^{17} = 6 + 2^2 + 2^5 + \dots + 2^{17}$. Zbytek při dělení čísla 2^k třemi je 2 při lichém k a 1 při sudém k . Proto je číslo $2^2 + 2^5$ dělitelné třemi, stejně tak $2^8 + 2^{11}$, $2^{14} + 2^{17}$. Tím je dokázáno, že dané číslo je dělitelné třemi.

C - II - 3b

Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, $|AB| = 16$, $|BC| = |AD| = 13$ a $|CD| = 6$. Uvnitř lichoběžníku leží bod M tak, že poměr obsahů trojúhelníků ABM a CDM je $4 : 3$ a poměr obsahů trojúhelníků BCM a ADM je $7 : 12$. Určete obsahy trojúhelníků ABM , BCM , CDM a ADM .

Řešení. Výška lichoběžníku je 12, vypočteme ji pomocí Pythagorovy věty. Označme x výšku v trojúhelníku ABM ,

y výšku v trojúhelníku CDM . Podle zadání je $8x : 3y = 4 : 3$, tedy $y = 2x$. Protože $x + y = 12$, je $x = 4$, $y = 8$, obsah trojúhelníku ABM je 32, obsah trojúhelníku CDM je 24. Obsah celého lichoběžníku je 132, zbývá tedy na trojúhelníky ADM a BCM obsah 76. Protože poměr jejich obsahů je $12 : 7$, je obsah trojúhelníku ADM roven 48, obsah trojúhelníku BCM je 28.

ÚLOHY DOMÁČÍ ČÁSTI I. KOLA

B - I - 1

Všechna obvodová pole šachovnice tvaru 497×497 jsou očíslována přirozenými čísly od 1 do 1984. Číslování začíná v levém horním rohu a pokračuje ve směru pohybu hodinových ručiček po obvodu šachovnice. Je dáno přirozené číslo k . Na očíslované pole klademe figurky tak, že první položíme na pole číslo 1 a další figurky pokládáme o k polí dále, tedy druhou na pole číslo $1 + k$, třetí na pole $1 + 2k$, atd. ve směru očíslování, dokud se nedostaneme na pole, které už je obsazené figurkou. V tom okamžiku pokládání figurek končí.

a) Na kterém poli skončí pokládání figurek?

b) Kolik obvodových polí šachovnice bude obsazeno figurkami?

Řešení. Nejdříve je třeba vědět, kolik má naše šachovnice polí na obvodu. V horní řadě je jich 497, v pravém sloupci ještě 496, stejný počet ještě v dolní řadě, a v levém sloupci zbývá 495, celkem 1984. První figurku položíme na pole číslo 1, druhou na pole číslo $1 + k$, třetí na pole $1 + 2k$, atd., proto i -tá figurka připadne na pole číslo $1 + (i - 1)k$. Pokud je však toto číslo už větší než 1984, vezmeme pouze jeho zbytek při dělení číslem 1984. Při našem obíhání obvodových

polí šachovnice následuje totiž po poli číslo 1984 pole číslo 1. Necht' je $j > i$. Figurka j -tá připadne právě tehdy na stejné pole jako figurka i -tá, jestliže čísla $1 + (j - 1)k$ a $1 + (i - 1)k$ dávají stejný zbytek při dělení číslem 1984, neboli když je jejich rozdíl $(j - i)k$ dělitelný číslem 1984. Jestliže i -tá a j -tá figurka připadnou na téže pole, připadnou na téže pole také figurky s pořadovými čísly $i - 1$ a $j - 1$, dále figurky s pořadovými čísly $i - 2$, $j - 2$, atd. Jelikož však pokládání figurek končí, jakmile má být některá figurka položena na již obsazené pole, musí být $i = 1$ a pokládání figurek končí vždy na prvním poli. Číslo j je takové nejmenší přirozené číslo větší než 1, pro které je číslo $(j - 1)k$ dělitelné číslem 1984, tedy $(j - 1)k = m \cdot 1984$, m je přirozené. Tady je výhodné vzít na pomoc největšího společného dělitele čísel k a 1984, který označíme D . Je pak $(j - 1) \frac{k}{D} = m \frac{1984}{D}$ a přirozená čísla $\frac{k}{D}$, $\frac{1984}{D}$ jsou nesoudělná. Protože j má být nejmenší přirozené číslo, jež splňuje výše uvedenou rovnost, musí být $(j - 1) = \frac{1984}{\frac{k}{D}}$ a to je též počet obsazených polí, protože j -tá figurka by už musela být položena na pole číslo 1, obsazené první figurkou. Jsou-li čísla k , 1984 nesoudělná, budou obsazena všechna obvodová pole šachovnice.

B - I - 2

V rovině je dáno šest navzájem různých bodů $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Někte-

rými dvojicemi z těchto bodů jsme vedli přímku. Necht' s_k označuje počet všech těchto přímek, které procházejí bodem A_k ($k = 1, 2, \dots, 6$). Jestliže z každých tří různých bodů množiny $A_1, \dots, A_6$ lze vybrat dvojici bodů, jimiž byla vedena přímka, pak platí nerovnost

$$(2s_1 - 7)^2 + (2s_2 - 7)^2 + \dots + (2s_6 - 7)^2 \leq 54.$$

Dokažte.

Řešení. Každé z čísel s_k se rovná některému z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5, proto se číslo $(2s_k - 7)^2$ rovná některému z čísel 49, 25, 9, 1. Jestliže pro všechna $k = 1, 2, \dots, 6$ platí $s_k \geq 2$, je pro každé k hodnota $(2s_k - 7)^2$ rovna 1 nebo 9, a proto je dokazovaná nerovnost splněna. Necht' se některé s_k rovná nule, můžeme předpokládat, že je to číslo s_1 . To znamená, že bod A_1 není spojen přímkou s žádným dalším bodem z bodů $A_2, \dots, A_6$. Pak ale musí být spojeny přímkou každé dva z těchto pěti bodů. Kdyby například nebyly body A_2, A_3 spojeny přímkou, znamenalo by to, že jsme žádnými dvěma body z bodů A_1, A_2, A_3 nevedli přímkou, což je proti předpokladu. Je proto $s_1 = 0$ a $s_k = 4$ pro $k = 2, 3, \dots, 6$, součet na levé straně dokazované nerovnosti je $49 + 5 \cdot 1 = 54$, nerovnost je splněna. Zbývá vyšetřit případ, kdy se některé s_k , třeba s_1 , rovná 1. Pak jsme bodem A_1 vedli jedinou přímku, můžeme předpokládat, že jsme bod A_1 spojili přímkou s bodem A_2 . Podobně jako v předcházejícím případě dokážeme, že jsme vedli přímkou každými dvěma body z bodů A_3, A_4, A_5 a A_6 . Přitom jsme žádný z těchto bodů nespojili přímkou s bodem A_1 . Nevíme, zda jsme vedli přímkou bodem A_2 , a některým z bodů $A_3, \dots, A_6$. Víme však, že platí $s_1 = 1$,

$1 \leq s_2 \leq 5, 3 \leq s_k \leq 4$ pro $k = 3, 4, 5, 6$. Proto je $(2s_1 - 7)^2 = 25, (2s_2 - 7)^2 \leq 25$ a $(2s_k - 7)^2 = 1$ pro $k = 3, 4, 5, 6$. Dokazovaná nerovnost je i v tomto případě vždy splněna.

B - I - 3

Nechť a, b jsou daná reálná čísla. Nalezněte všechny uspořádané dvojice reálných čísel x, y , vyhovující soustavě nerovnic

$$x^2 + y^2 \leq ax + by$$

$$|a - b + y - x| \leq a + b - x - y$$

$$|x - y| \leq -x - y.$$

Proveďte diskusi vzhledem k parametrům a, b .

Řešení. První nerovnici můžeme přepsat ve tvaru

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{4},$$

dvojice (x, y) splňuje tuto nerovnici právě tehdy, když bod

$[x, y]$ patří do kruhu o středu $\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right]$ a poloměru $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$,

který se ovšem v případě $a = b = 0$ redukuje na pouhý bod $[0, 0]$. Pro další postup je dobře si uvědomit, že $|r| \leq s$ platí tehdy a jen tehdy, když platí $r \leq s$ a současně $-r \leq s$. Proto je druhá nerovnice úlohy splněna právě tehdy, když je $y \leq b$ a současně $x \leq a$. Stejně tak můžeme poslední nerovnici úlohy nahradit nerovnicemi $x \leq 0$ a $y \leq 0$. Dál musíme rozlišit čtyři případy podle znamének čísel a, b . Je-li například

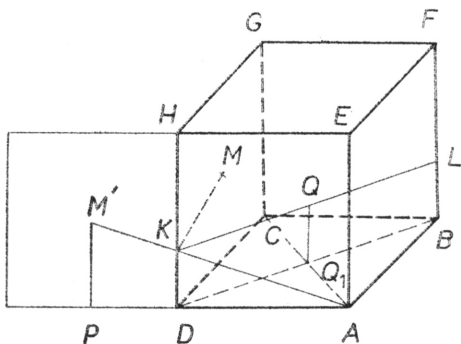
$a \geq 0, b \geq 0$, musí být $x \leq 0, y \leq 0$ a bod $[x, y]$ musí ležet v kruhu popsáném na začátku řešení úlohy. Jeho střed leží v 1. kvadrantu, jeho průnikem s 3. kvadrantem je pouze počátek $[0, 0]$. Podobně postupujeme v ostatních třech případech. Řešením dané soustavy nerovnic je vždy právě jedna uspořádaná dvojice reálných čísel. Pro $a \geq 0, b \geq 0$ je to dvojice $(0, 0)$, je-li $a < 0, b \geq 0$, je řešením dvojice $(a, 0)$, pro $a \geq 0, b < 0$ je to dvojice $(0, b)$, a konečně v případě $a < 0, b < 0$ je řešením dvojice (a, b) . Výsledek můžeme shrnout takto: Řešením dané soustavy nerovnic je vždy jediné dvojice $x = \min(a, 0), y = \min(b, 0)$. Označení $\min(c, d)$ znamená vzít minimum z čísel c, d , tedy menší z čísel c, d , nebo kterékoliv z nich, jsou-li si rovna.

B - I - 4

Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a . Vrchol A je spojen po povrchu krychle nejkratší čarou se středem stěny $BCGF$, respektive $DCGH$. Tato lomená čára má s hranou BF , respektive DH společný bod L , resp. K . Určete obsah trojúhelníku AKL .

Řešení. Představme si, že jsme stěnu $DCGH$ uvažované krychle otočili kolem hrany DH do roviny $AEHD$ tak, že se její střed M zobrazí do bodu M' , různého od středu stěny $DAEH$ (obr. 11). Protože bod A byl spojen s bodem M přes bod K nejkratší lomenou čarou, leží body A, K, M' na přímce a lomená čára se skládá z úseček AK a KM . Z podobnosti trojúhelníků ADK a APM' určíme velikost úsečky DK . Pro-

tože $|AP| = 3|PM'|$, je $|AD| = 3|DK|$, tedy $|DK| = \frac{a}{3}$. Stej-



Obr. 11

nou velikost má úsečka BL , trojúhelník AKL je rovnoramenný se základnou KL , $|KL| = a\sqrt{2}$. Označíme-li střed úsečky KL a jeho pravoúhlý průmět do roviny ABC písmeny Q , Q_1 , je

$$|QQ_1| = \frac{a}{3}, |AQ| = a \frac{\sqrt{22}}{6} \text{ (dostaneme z pravoúhlého troj-}$$

úhelníku AQQ_1), obsah trojúhelníku AKL je tedy $a^2 \frac{\sqrt{11}}{6}$.

B - 1 - 5

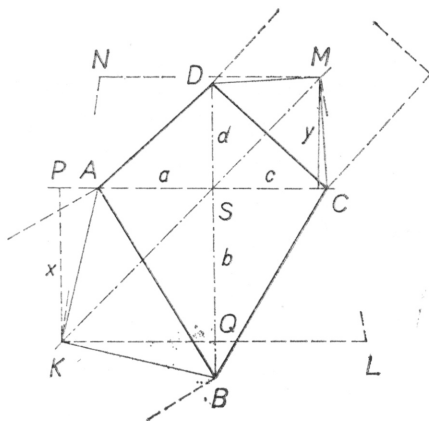
Je dán deltoid $ABCD$, jehož úhlopříčka BD délky f půlí úhlopříčku AC délky e . Označme postupně K , L , M , N středy vně sestrojených čtverců nad stranami AB , BC , CD , DA . Dokažte tato tvrzení:

a) Čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoramenný lichoběžník, jehož úhlopříčky KM a LN jsou k sobě kolmé a protínají se v témže bodě S , jako úhlopříčky daného deltoidu.

b) Obsah lichoběžníku $KLMN$ se rovná obsahu daného deltoidu zvětšenému o obsahy dvou čtverců se stranami délek

$$\frac{e}{2}, \frac{f}{2}.$$

Řešení. Označme velikosti úseček AS , BS , CS a DS po řadě a , b , c , d . Je pak $a = c = \frac{e}{2}$, $b + d = f$. Vedme bodem K kolmice k úhlopříčkám AC , BD deltoidu, jejich paty označíme P , Q (obr. 12). Pak jsou přímky KP , KQ na sebe kolmé,



Obr. 12

stejně tak přímky KA , KB , navíc je $|KA| = |KB|$. Proto jsou pravoúhlé trojúhelníky KPA a KQB shodné. Z toho plyne rovnost $|KP| = |KQ|$, to znamená, že bod K leží na ose úhlu ASB . Stejně tak dokážeme, že bod M leží na ose

úhlu DSC , a proto prochází přímka KM bodem S . Označme x velikost úsečky KP . Protože je $|PA| = |QB|$, je $x - a = b - x$, tedy $x = \frac{a+b}{2}$. Označíme-li vzdálenosti bodu M od přímek AC a BD jako y , dostaneme obdobným způsobem $y = \frac{a+d}{2}$. Je zřejmě $y \neq x$, jinak by bylo $b = d$ a místo deltoidu bychom měli kosočtverec. Ze souměrnosti podle přímky BD plyne ihned, že čtyřúhelník $KLMN$ je lichoběžník o základnách $2x, 2y$ a výšce $x + y$. Jeho obsah je $(x + y)^2 = \frac{(a + b + a + d)^2}{4} = \frac{(e + f)^2}{4} = \frac{ef}{2} + \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4}$. Protože obsah výchozího deltoidu je $\frac{ef}{2}$, je tím dokázáno i tvrzení

b) úlohy.

B - I - 6

Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má všechny vrcholy na kružnici, jeho nejdelší strana má délku $\sqrt{2}$ a jeho třetí nejdelší strana délku 1. Dokažte, že poloměr kružnice je nejvýše 1.

Řešení. Můžeme předpokládat, že nejdelší stranou pětiúhelníku je strana AB , tedy $|AB| = \sqrt{2}$. Ukážeme nejprve, že střed S kružnice k pětiúhelníku $ABCDE$ opsané je bodem pětiúhelníku. Kdyby tomu tak nebylo, ležely by vrcholy C, D, E v opačné polorovině ohraničené přímkou AB , než ve které leží bod S (obr. 13). Označme X ten bod kružnice k , který leží v polorovině ABC a zároveň na průměru kružnice k kolmém k přímce AB , dále Y průsečík úseček AB, XS .

B - S - 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 = |ax + by|$$

$$bx - ay = 0.$$

Proveďte diskusi vzhledem k reálným parametrům a, b .

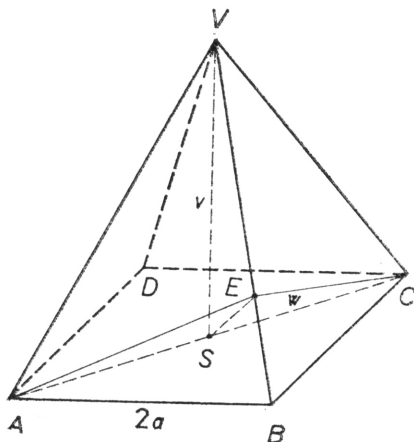
Řešení. Je-li $a = b = 0$, má soustava jediné řešení $x = y = 0$. V opačném případě můžeme předpokládat $a \neq 0$, případ $b \neq 0$ bychom řešili obdobně. Je-li $a \neq 0$, je $y = \frac{bx}{a}$.

Dosazením do rovnic $x^2 + y^2 = ax + by$, $x^2 + y^2 = -ax - by$ dostaneme $x = a$, $x = -a$, $x = 0$. K nim vypočteme hodnoty $y = \frac{bx}{a}$ a zkouškou se přesvědčíme, že dvojice (a, b) , $(-a, -b)$ a $(0, 0)$ jsou opravdu řešením.

B - S - 2

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s výškou v a velikostí podstavné hrany $2a$. Vypočtete odchylku sousedních bočních stěn jehlanu.

Řešení. Označme E patu kolmice vedené bodem A k přímce BV (obr. 14). Ta je též patou kolmice vedené bodem C



Obr. 14

k přímce BV . Máme určit velikost $\alpha = |\sphericalangle AEC|$. Trojúhelník AEC je rovnoramenný, jeho základna AC je půlena středem S čtverce $ABCD$. Také trojúhelník BCV je rovnoramenný, jeho základna BC má velikost $2a$, výška příslušná k této základně je $\sqrt{v^2 + a^2}$, velikost ramene je $|VB| = \sqrt{v^2 + 2a^2}$. Dvojím vyjádřením obsahu trojúhelníku BCV dostaneme pro $w = |\sphericalangle EC|$ vztah $w\sqrt{v^2 + 2a^2} = 2a\sqrt{v^2 + a^2}$. Z pravoúhlého trojúhelníku ESC plyne pro $\beta = |\sphericalangle SEC|$ rovnost $\sin \beta = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{v^2 + 2a^2}}{2a\sqrt{v^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{v^2 + 2a^2}}{\sqrt{2v^2 + 2a^2}}$, tudíž $\cos \alpha = \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta = -\frac{a^2}{v^2 + a^2}$. Tím je odchylka α určena.

Číslo $n = 1234 \dots 328329$ vzniklo tak, že jsme zapsali čísla 1, 2, ..., 328, 329 bez mezer za sebou. Dokažte, že číslo n není druhou mocninou žádného přirozeného čísla.

Řešení. Chceme dokázat, že číslo n není druhou mocninou žádného přirozeného čísla m . Mohli bychom postupovat sporem: Kdyby platilo $m^2 = n$, muselo by číslo m končit cifrou 3 nebo 7, aby jeho druhá mocnina měla na konci číslici 9. Vezměme nyní v úvahu i předposlední číslice. Aby číslo m^2 končilo dvojčíslím 29, musí číslo m končit dvojčíslím 23, 27, 73 nebo 77. Tak postupujeme dále, až dojdeme ke sporu. To je ovšem postup zdoluhavý. Ukážeme si lepší metodu. Stačí totiž ukázat, že číslo n je dělitelné nějakým prvočíslem a není dělitelné jeho druhou mocninou. Zkusíme prvočíslo 3, protože známe jednoduchá kritéria pro dělitelnost třemi i devíti. Číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je třemi dělitelný jeho ciferný součet, totéž platí pro dělitelnost devíti. Platí ještě víc: Číslo a a jeho ciferný součet dávají při dělení třemi stejný zbytek a totéž platí pro dělení devíti. Jaký je ciferný součet čísla n ? Nám stačí znát jeho zbytek při dělení devíti. Považujeme-li dvě čísla za sobě rovná, jestliže se liší o celý násobek devíti (říkáme, že počítáme modulo 9), pak se sobě rovnají ciferný součet $C(s)$ a číslo s pro každé s . Kromě toho je $C(n) = C(1) + C(2) + C(3) + \dots + C(329) = 1 + 2 + 3 + \dots + 329 = 329 \cdot \frac{330}{2} = 329 \cdot 165 = 5 \cdot 3 = 6$, vše modulo 9. Proto dostaneme při dělení čísla n číslem 9 zbytek 6, při dělení třemi zbytek 0. Proto nemůže být číslo n druhou mocninou některého přirozeného čísla.

V rovině je dáno k množin $M_1, M_2, \dots, M_k$ přímek, každá z množin $M_i (i = 1, \dots, k)$ se skládá z m navzájem různých rovnoběžných přímek. Pro $i \neq j$ nejsou přímky množiny M_i rovnoběžné s přímkami množiny M_j a žádné tři přímky množiny $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ neprocházejí jedním bodem. Určete, na kolik částí dělí rovinu přímky z množiny $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$.

Řešení. Množina M_1 dělí rovinu na $m + 1$ částí, množina $M_1 \cup M_2$ rozdělí rovinu na $(m + 1)^2$ částí. Každá přímka z M_3 se protne s každou přímkou z množiny $M_1 \cup M_2$, těch je $2m$, a protíná proto $2m + 1$ částí z těch $(m + 1)^2$. Každou z těchto částí rozdělí na dvě. Proto $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ dělí rovinu na $(m + 1)^2 + m(2m + 1) = 1 + 3m + 3m^2$ částí. Obdobně odvodíme, že množina $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ dělí rovinu na $1 + 3m + 3m^2 + m(3m + 1) = 1 + 4m + 6m^2$ částí. Přidáním množiny M_5 dostaneme $1 + 4m + 6m^2 + m(4m + 1) = 1 + 5m + 10m^2$ částí. Matematickou indukcí pak dostaneme pro všech k množin konečný výsledek $1 + km + \binom{k}{2} m^2$.

ÚLOHY II. KOLA

B - II - 1

Určete, kolik řešení má v oboru reálných čísel soustava rovnic

$$x^2 + y^2 = ax + by$$

$$|bx - ay| = 1.$$

Proveďte diskusi vzhledem k reálným parametrům a, b .

Řešení. Všimněme si nejdříve, že máme určit pouze počet řešení, ne řešení sama, i když by to také nebylo obtížné. Dvojice (x, y) je řešením dané soustavy, právě když je buď řešením soustavy rovnic $x^2 + y^2 = ax + by$, $bx - ay = 1$, nebo soustavy $x^2 + y^2 = ax + by$, $ay - bx = 1$. Žádná dvojice není řešením obou soustav. Je-li $a = b = 0$, nemá ani jedna z popsaných soustav řešení. V opačném případě budeme předpokládat, že $a \neq 0$, jinak bychom zaměnili x a y , a a b . Dvojice (x, y) je pak řešením první soustavy právě tehdy, je-li

$$y = \frac{bx - 1}{a} \text{ a } x \text{ je řešením kvadratické rovnice}$$

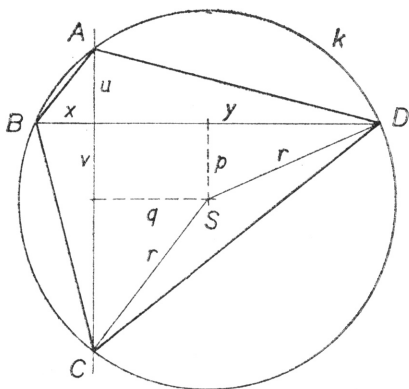
$$(a^2 + b^2)x^2 - (2b + a^3 + ab^2)x + 1 + ab = 0,$$

její diskriminant je $a^2[(a^2 + b^2)^2 - 4]$. V případě druhé soustavy rovnic dostaneme kvadratickou rovnici s tímž diskriminantem. Proto platí: Je-li $a^2 + b^2 > 2$, má úloha čtyři řešení, v případě $a^2 + b^2 = 2$ má úloha dvě řešení. Je-li $a^2 + b^2 < 2$, nemá úloha řešení. Zde je zahrnut i případ $a = b = 0$. Výsledek je dobře vidět při grafickém znázornění. Je-li aspoň jedno z čísel a, b nenulové, je první rovnicí soustavy dána kružnice se středem v bodě $\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right]$, procházející počátkem soustavy souřadnic. Druhou rovnicí jsou dány dvě přímky, jež jsou rovnoběžné se spojnicí středu kružnice

a počátku a mají od středu kružnice vzdálenost $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,
 poloměr kružnice je $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

B - II - 2

V konvexním čtyřúhelníku, kterému lze opsat kružnici a jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé, se součet druhých mocnin velikostí protějších dvou stran rovná druhé mocnině průměru kružnice čtyřúhelníku opsané. Dokažte.



Obr. 15

Řešení. Zvolme označení jako na obr. 15, jedna úhlopříčka je druhou rozdělena na úsečky velikostí x, y , druhá je rozdělena první úhlopříčkou na úsečky u, v . Vzdálenosti úhlo-

příček od středu kružnice čtyřúhelníku opsané jsme označili p, q . Označíme-li ještě dvě protější strany čtyřúhelníku a, c , je

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2.$$

Dále je $y = \sqrt{r^2 - p^2} + q$, $x = \sqrt{r^2 - p^2} - q$, podobně pro u, v ; r značí poloměr uvažované kružnice. Dosazením dostaneme $a^2 + c^2 = 4r^2 = (2r)^2$, což jsme měli dokázat.

B - II - 3a

Určete všechna reálná čísla x , která vyhovují rovnici

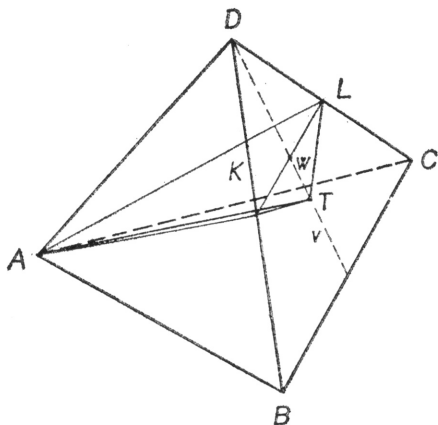
$$|x^2 - 2| + \left[\frac{x^2 - 1}{2} \right] = 1.$$

Poznámka. $[a]$ znamená celou část z čísla a .

Řešení. Aby bylo číslo x řešením, musí být číslo $x^2 - 2$ celé, protože jeho absolutní hodnota se má rovnat celému číslu. To však znamená, že x^2 musí být celé. Je-li x^2 liché, je $\frac{x^2 - 1}{2}$ celé a máme řešit rovnici $|x^2 - 2| + \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2}$, vyhovuje pouze $x^2 = 1$, protože pro $x^2 \geq 4$ je levá strana větší než 2 a nevyhovuje ani hodnota $x^2 = 3$. Je-li x^2 sudé, je $x^2 - 1$ liché, celá část čísla $\frac{x^2 - 1}{2}$ je $\frac{x^2 - 2}{2}$. Řešíme tedy rovnici

$|x^2 - 2| + \frac{x^2}{2} = 2$. Opět nevyhovují $x^2 \geq 4$, nevyhovuje $x^2 = 2$, vyhovuje pouze $x^2 = 0$. Rovnice má právě tři řešení: $-1, 0, 1$.

Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$ s hranou délky a . Vrchol A je spojen po povrchu čtyřstěnu nejkratší lomenou čarou s těžištěm T stěny BCD jednak přes hranu BD , druhá čára vede přes hranu CD . První čára protne hranu BD v bodě K , druhá protne hranu CD v bodě L . Vypočítejte objem čtyřstěnu $AKLT$.



Obr. 16

Řešení. Výška jehlanu $AKLT$ na stěnu KLT (obr. 16) je stejná, jako výška čtyřstěnu $ABCD$. Vypočteme ji z pravoúhlého trojúhelníku ATB , vyjde $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Dále je $|KL| = \frac{a}{2}$

a pro výšku w v trojúhelníku KLT na stranu KL platí $w =$
 $= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) v$, kde v je výška v trojúhelníku BCD , tedy
 $v = \frac{a}{2} \sqrt{3}$, $w = \frac{a}{12} \sqrt{3}$. Výsledný objem je $\frac{a^3 \sqrt{2}}{144}$.

ÚLOHY DOMÁČÍ ČÁSTI I. KOLA

A - 1 - 1

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, vyhovuje pro všechna přirozená čísla n rekurentnímu vztahu

$$a_{n+3} = 5a_{n+2} - 9a_{n+1} + 9a_n . \quad (1)$$

Jestliže kromě toho pro každé přirozené číslo n platí

$$|a_n| \leq 2^n , \quad (2)$$

pak tato posloupnost také vyhovuje rekurentnímu vztahu

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n \quad (3)$$

pro každé přirozené n . Dokažte.

Řešení. Označme $b_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + 3a_n$, pak je podle rekurentního vztahu (1)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 5a_{n+2} - 9a_{n+1} + 9a_n - 2a_{n+2} + 3a_{n+1} = \\ &= 3(a_{n+2} - 2a_{n+1} + 3a_n) = 3b_n , \end{aligned}$$

takže

$$b_n = 3^{n-1} b_1 .$$

Protože podle předpokladu (2) je

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq |a_{n+2}| + 2|a_{n+1}| + 3|a_n| \leq 2^{n+2} + 2 \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot 2^n = \\ &= 11 \cdot 2^n , \end{aligned}$$

platí pro každé přirozené n

$$3^{n-1}|b_1| \leq 11 \cdot 2^n, \text{ tj. } |b_1| \leq 33 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Proto je $b_1 = 0$, tedy $b_n = 3^{n-1}b_1 = 0$ pro každé n , což jsme měli dokázat.

Poznámka. Obecné řešení rekurentního vztahu (1) najdeme řešením příslušné charakteristické rovnice

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 9 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0,$$

která má kořeny $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{2}$. Každá posloupnost vyhovující rekurentnímu vztahu (1) pak má tvar

$$a_n = A \cdot \lambda^n + B \cdot \operatorname{Re}(\lambda_2^n) + C \cdot \operatorname{Im}(\lambda_2^n), \quad (4)$$

kde A , B , C jsou libovolné konstanty (viz např. *A. Prágerová*: Diferenční rovnice. SNTL 1971). Z podmínky (2) pro posloupnost $\{a_n\}$ ovšem plyne, že ve vyjádření (4)

musí být $A = 0$, jinými slovy, takové posloupnosti $\{a_n\}$ splňují rekurentní vztah (3) s charakteristickou rovnicí $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$.

A - 1 - 2

Najděte všechna reálná čísla x , pro která platí

a) $\sin \pi x = \cos (\pi/x)$;

b) $\operatorname{tg} \pi x = \operatorname{cotg} (\pi/x)$.

Řešení. a) Zřejmě musí být $x \neq 0$. Protože $\cos y = \sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right)$, je daná rovnice ekvivalentní s rovnicí $\sin \pi x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x} \right)$. Odtud plyne, že je buď

$$\pi x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x} + 2k\pi$$

pro nějaké celé číslo k , nebo

$$\pi x = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{x} + 2k\pi$$

pro nějaké celé k .

V prvním případě dostaneme kvadratickou rovnici

$$2x^2 - (4k + 1)x + 2 = 0$$

s kořeny

$$x(k)_{1,2} = \frac{1}{4} (4k + 1 \pm \sqrt{(4k + 1)^2 - 16}).$$

Reálné kořeny dostáváme pro všechna celá $k \notin \{0, -1\}$, přitom žádný z kořenů není roven nule. V druhém případě dostaneme kvadratickou rovnici

$$2x^2 - (4k + 1)x - 2 = 0$$

s kořeny

$$x'(k)_{1,2} = \frac{1}{4} (4k + 1 \pm \sqrt{(4k + 1)^2 + 16}),$$

které jsou reálné a nenulové pro všechna celá k .

Řešením první rovnice jsou čísla $x(k)_{1,2}$ pro všechna celá $k \notin \{0, -1\}$ a čísla $x'(k)_{1,2}$ pro všechna celá k .

b) Zřejmě musí být $x \neq 0$, $\pi x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, $\frac{\pi}{x} \neq n\pi$,

kde m, n jsou celá čísla. Protože $\cotg y = \tg \left(\frac{\pi}{2} - y \right)$,

je daná rovnice ekvivalentní s rovnicí $\tg \pi x = \tg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x} \right)$.

Odtud plyne, že je

$$\pi x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x} + k\pi,$$

kde k je celé. Dostáváme tak kvadratickou rovnici

$$2x^2 - (2k + 1)x + 2 = 0,$$

která má kořeny tvaru

$$x(k)_{1,2} = \frac{1}{4} (2k + 1 \pm \sqrt{(2k + 1)^2 - 16}).$$

Ty jsou zřejmě reálné a nenulové pro všechna celá $k \notin \{-2, -1, 0, 1\}$. Vyšetříme nyní, pro jaká k jsou tyto kořeny tvaru $\frac{1}{2} + m$ nebo $\frac{1}{n}$ pro celá m, n .

Nechť $x(k)_{1,2} = \frac{1}{2} + m$, pak po úpravě dostaneme

$$2k + 1 = \frac{4m^2 + 4m + 5}{2m + 1} = 2m + 1 + \frac{4}{2m + 1}.$$

Kořen $x(k)$ může tedy být uvedeného tvaru jen pro $m = 0$ nebo $m = -1$, tj. pro $k \in \{-3, 2\}$. Výpočtem zjistíme, že pouze kořeny $x(2)_2 = \frac{1}{2}$, $x(-3)_1 = -\frac{1}{2}$ mají tvar $\frac{1}{2} + m$.

Nechť $x(k)_{1,2} = \frac{1}{n}$, $n \neq 0$ celé, pak po úpravě dostaneme

$$2k + 1 = 2n + \frac{2}{n}.$$

To je liché celé číslo jen pro $n = \pm 2$, pak je však $k \in \{-3, 2\}$ stejně jako v předchozím případě.

Tuto poslední část jsme už vlastně mohli vynechat. Všechny kořeny $x(k)_{1,2}$ jsou vlastně ta čísla x , pro která je

$x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$ celé číslo. Pro ně však je $\frac{1}{x}$ celé číslo, právě když $x + \frac{1}{2}$ je celé číslo, tj. právě když je x tvaru $\frac{1}{2} + m$ pro m celé.

Řešením druhé rovnice jsou čísla $x(k)_{1,2}$ pro všechna celá $k \notin \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ a čísla $-2, 2$.

A - I - 3

Nechť $n > 1$ je dané přirozené číslo. Najděte všechna přirozená m , pro něž je číslo $\log_n m$ iracionální.

Řešení. Nejprve najdeme všechna přirozená čísla m , pro která je $\log_n m$ racionální. Budiž tedy $\log_n m = \frac{p}{q}$, kde p a q jsou celá nesoudělná čísla, $p \geq 0$, $q > 0$. Pak je

$$m = n^{\frac{p}{q}}, \text{ neboli } m^q = n^p.$$

Odtud je patrné, že každé prvočíslo, které dělí číslo m , musí také dělit číslo n .

Je-li

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r} \quad (1)$$

rozklad čísla n na prvočinitele, v němž jsou p_i navzájem různá (kladná) prvočísla, má číslo m rozklad tvaru

$$m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_r^{b_r}$$

a platí $qb_i = pa_i$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Protože p a q jsou nesoudělná, dělí q každé a_i , takže dělí i jejich největší společný dělitel d , $d = qd'$. Označme $a_i' = \frac{a_i}{d}$, pak je $qb_i = pa_i = pda_i' = pqd'a_i'$, tedy $b_i = pd'a_i'$ a $m = (d\sqrt[n]{n})^{pd'}$.

Ukázali jsme tedy, že je-li $\log_n m$ racionální, pak $m = (d\sqrt[n]{n})^k$, kde $k \geq 0$ je celé číslo. Naopak pro každé m tvaru $m = (d\sqrt[n]{n})^k$ pro $k \geq 0$ je $m^d = n^k$, $m = n^{\frac{k}{d}}$, a tedy $\log_n m$ je racionální.

Číslo $\log_n m$ je iracionální pro všechna přirozená čísla m , která nejsou nezápornou celou mocninou přirozeného čísla $d\sqrt[n]{n}$, kde d je největší společný dělitel exponentů v rozkladu (1).

A - 1 - 4

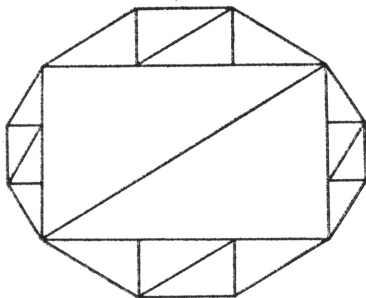
Určete největší přirozené číslo n s touto vlastností: Existuje konvexní n -úhelník, který lze vyjádřit jako sjednocení konečného počtu vzájemně se nepřekrývajících pravoúhlých trojúhelníků s ostrými úhly 30° a 60° .

Řešení. Necht $A_1A_2\dots A_n$ je konvexní n -úhelník s uvedenou vlastností. Každý z jeho vnitřních úhlů je sjednocením konečného počtu nepřekrývajících se úhlů velikosti 30° , 60° nebo 90° . To znamená, že velikost každého vnitřního úhlu mnohoúhelníku $A_1A_2\dots A_n$ je celočíselným násobkem 30° a není tedy větší než 150° . Protože součet vnitřních úhlů konvexního n -úhelníku je $(n - 2) \cdot 180^\circ$, dostáváme nerovnici

$$(n - 2) \cdot 180 \leq 150n$$

s řešením $n \leq 12$.

Pro $n = 12$ skutečně existuje dvanáctiúhelník, který lze vyjádřit jako konečné sjednocení nepřekrývajících se pravoúhlých trojúhelníků s úhly 30° a 60° (obr. 17).



Obr. 17

A - I - 5

V kouli o poloměru 1 je dáno 73 různých bodů. Dokažte, že z těchto bodů lze vybrat 13 navzájem různých, které leží uvnitř nějaké koule s poloměrem $\frac{5}{6}$.

Řešení. K důkazu uvedeného tvrzení stačí najít 6 koulí s poloměrem nejvýše $\frac{5}{6}$ takových, že sjednocení jejich vnitřků obsahuje danou jednotkovou kouli. Pak bude úloha vyře-

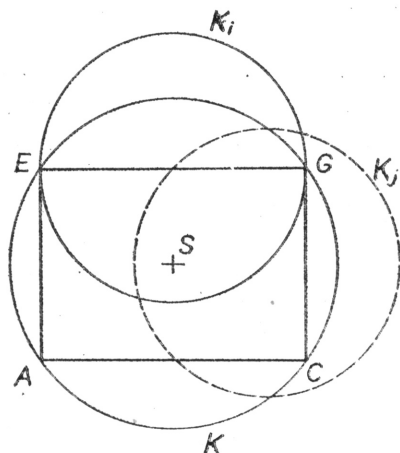
šena, neboť alespoň jedna z nalezených koulí musí ve svém vnitřku obsahovat 13 nebo více ze zvolených bodů. Jinak by totiž uvnitř každé ze zmíněných šesti koulí leželo nejvýše 12 daných bodů, takže ve sjednocení jejich vnitřků by leželo nejvýše $6 \cdot 12 = 72$ zvolených bodů a toto sjednocení by pak nemohlo obsahovat celou jednotkovou kouli.

Dokážeme nyní existenci uvedených šesti koulí. Do dané koule K o poloměru 1 vepíšme nejprve krychli $Q = ABCDEFGH$. Roviny stěn krychle Q protnou povrch koule K v šesti kružnicích, každá z těchto kružnic je hlavní kružnicí jisté koule K_i , $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, jejímž středem je střed příslušné stěny krychle. Určíme poloměr těchto koulí. Má-li krychle Q hranu velikosti a , pak její tělesová úhlopříčka měří $a\sqrt{3} = 2$, odkud $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Každá z koulí K_i má

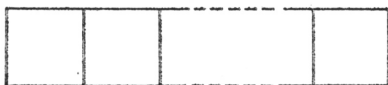
tedy poloměr $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{5}{6}$. Zbývá ukázat, že sjedno-

cení všech šesti koulí K_i obsahuje kouli K . Čtyři tělesové úhlopříčky krychle Q , které se protínají ve středu S koule K , rozkládají krychli Q na šest čtyřbokých jehlanů, jejichž podstavy tvoří stěny krychle Q a jejichž společným vrcholem je střed S . Protože střed S krychle Q zřejmě leží v průniku všech šesti koulí K_i , každý z těchto jehlanů leží v jedné z uvedených koulí, takže krychle Q leží celá ve sjednocení koulí K_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$. Roviny proložené stěnami krychle Q oddělují z koule K ještě šest kulových úsečí. Také každá z těchto úsečí leží v některé kouli K_i , jak snadno zjistíme, provedeme-li řez koule K např. rovinou $ACGE$ (obr. 18). Leží tedy celá koule K ve sjednocení koulí K_i a aspoň jedna

z nich obsahuje nejméně 13 zadaných bodů. Tím spíše je obsahuje příslušná koule s ní soustředná s větším poloměrem $\frac{5}{6}$.



Obr. 18



Obr. 19

A - I - 6

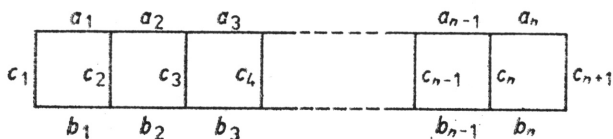
Na obr. 19 je znázorněn »žebřík« skládající se z n navzájem shodných čtverců, kde n je dané přirozené číslo. Stranou žebříku budeme rozumět stranu libovolného z uvažovaných

čtverců. Některé ze stran žebříku obarvíme červeně. Symbolem P_n označme počet všech takových obarvení žebříku, při nichž má každý ze čtverců alespoň jednu stranu červenou.

a) Určete nejmenší přirozené číslo n , pro které platí $P_n > 10^6$.

b) Dokažte, že pro všechna přirozená n je P_n liché číslo.

Řešení. Strany žebříku označme symboly $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$ podle obr. 20. Určíme nejprve P_1 a P_2 .



Obr. 20

P_1 je zřejmě počet všech neprázdných podmnožin čtyřprvkové množiny, je tedy $P_1 = 2^4 - 1 = 15$. Pro $n = 2$ rozdělme všechna obarvení na dvě části. Těch, u nichž je c_2 obarvena, je $2^6 = 64$. Těch, u nichž c_2 není obarvena, je $(2^3 - 1)^2 = 49$. Celkem je tedy $P_2 = 64 + 49 = 113$.

Pro $n > 2$ odvodíme rekurentní vzorec. Všechna možná obarvení opět rozdělíme na dvě části. Takových obarvení, že je obarvena alespoň jedna ze stran a_n, b_n, c_{n+1} , existuje $(2^3 - 1)P_{n-1} = 7P_{n-1}$. Pokud strany a_n, b_n, c_{n+1} nejsou obarveny, musí být obarvena strana c_n a ke každému ze čtyř obarvení stran a_{n-1}, b_{n-1} existuje P_{n-2} obarvení zbylých stran žebříku. Celkem je tedy pro $n > 2$

$$P_n = 7P_{n-1} + 4P_{n-2},$$

což je hledaný rekurentní vzorec. Z tohoto vzorce plyne okamžitě matematickou indukcí, že P_n jsou lichá, neboť P_1 a P_2 jsou lichá čísla. Tím je vyřešena úloha b). Z rekurentního vzorce dále plyne, že $P_3 = 7P_2 + 4P_1 = 791 + 60 = 851$. Postupně pak dostáváme $P_7 > 7P_6 > 7^2P_5 > > 7^3P_4 > 7^4P_3 > 40^2 \cdot 800 > 10^6$. Na druhé straně, přičteme-li k oběma stranám rekurentního vzorce P_{n-1} , dostaneme

$$P_n + P_{n-1} < 8(P_{n-1} + P_{n-2}),$$

takže

$$P_6 + P_5 < 8(P_5 + P_4) < 8^2(P_4 + P_3) < 8^3(P_3 + P_2) = 512 \cdot 964 < 10^6.$$

Protože $P_7 > 10^6$ a $P_6 < 10^6$, je hledané číslo $n = 7$. Tím je vyřešena úloha a).

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

A - S - 1

Je dáno přirozené číslo n . Určete $2n + 1$ za sebou jdoucích přirozených čísel, pro která platí: součet druhých mocnin prvních $n + 1$ čísel se rovná součtu druhých mocnin posledních n čísel.

Řešení. Označíme-li x první z hledaných $2n + 1$ čísel, má platit rovnost

$$x^2 + (x+1)^2 + \dots + (x+n)^2 = (x+n+1)^2 + \dots + (x+n+n)^2$$

neboli

$$\begin{aligned} & (n+1)x^2 + 2x(1+2+\dots+n) + \\ & + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \\ & = n(x+n)^2 + 2(x+n)(1+2+\dots+n) + \\ & + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2. \end{aligned}$$

Protože $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, dostáváme odtud pro

x kvadratickou rovnici

$$x^2 - 2n^2x - 2n^3 - n^2 = 0,$$

která má dva kořeny

$$x_{1,2} = n^2 \pm \sqrt{n^4 + 2n^3 + n^2} = n^2 \pm n(n+1),$$

z nichž pouze jeden je kladný. Je tedy $x = 2n^2 + n$ a řešením úlohy jsou čísla $2n^2 + n, 2n^2 + n + 1, \dots, 2n^2 + 3n$.

A - S - 2

Je-li $\cos \alpha$ racionální číslo, pak je také $\cos 7\alpha$ racionální číslo. Dokažte.

Řešení. Podle součtových vzorců je

$$\begin{aligned}\cos 7\alpha &= \cos 4\alpha \cos 3\alpha - \sin 4\alpha \sin 3\alpha = \\&= (1 - 2\sin^2 2\alpha)(\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha) - \\&- 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha(\sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha) = \\&= (1 - 8\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)[(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - \\&- 2\sin^2 \alpha \cos \alpha] - 4\sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \\&\cdot [2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] = \\&= (1 - 8\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)[(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - \\&- 2\sin^2 \alpha \cos \alpha] - 4\sin^2 \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \\&\cdot (3\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).\end{aligned}$$

Protože $\cos \alpha$ je číslo racionální, jsou racionální i čísla $\cos^2 \alpha$ a $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ a podle předcházejícího výpočtu je racionální i číslo $\cos 7\alpha$.

Jiné řešení. Podle Moivreovy věty je

$$\cos 7\alpha + i \sin 7\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^7,$$

takže stačí určit z Pascalova trojúhelníku binomické koeficienty $\binom{7}{k}$ pro lichá k , abychom dostali podle binomické věty vztah

$$\begin{aligned}\cos 7\alpha &= \operatorname{Re} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^7 = \\&= \cos^7 \alpha - 21\cos^5 \alpha \sin^2 \alpha + \\&+ 35 \cos^3 \alpha \sin^4 \alpha - 7\cos \alpha \sin^6 \alpha.\end{aligned}$$

Protože $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ a $\cos \alpha$ je racionální, plyne odtud racionality čísla $\cos 7\alpha$.

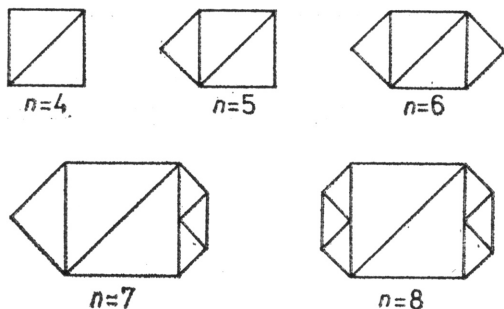
A - S - 3a

Určete všechna přirozená čísla $n > 3$ s touto vlastností: Existuje konvexní n -úhelník, který je sjednocením konečného počtu vzájemně se nepřekrývajících rovnoramenných pravouhlých trojúhelníků.

Řešení. Má-li n -úhelník požadovanou vlastnost, je každý z jeho vnitřních úhlů sjednocením konečně mnoha nepřekrývajících se úhlů velikosti 45° nebo 90° . Je tedy velikost každého vnitřního úhlu takového mnohoúhelníku nejvýše 135° . Protože součet vnitřních úhlů n -úhelníku je $(n - 2) \cdot 180^\circ$, dostáváme pro n nerovnici

$$(n - 2) \cdot 180 \leq 135 n,$$

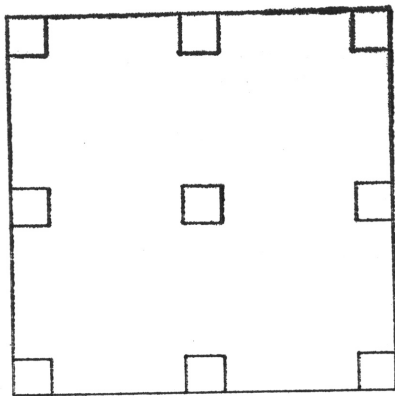
které vyhovuje $n \leq 8$. Pro každé $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ existuje n -úhelník s požadovanou vlastností (obr. 21).



Obr. 21

Rozhodněte, zda platí tvrzení: Je-li ve čtverci C o straně velikosti 1 dáno 999 různých bodů, pak existuje čtverec, který obsahuje 112 z daných bodů, přičemž jeho strany jsou rovnoběžné se stranou čtverce C a mají velikost 0,4.

Řešení. Tvrzení neplatí - uvedeme protipříklad. V rozích čtverce C , v jeho středu a při středech jeho stran zvolíme malé čtverce o straně 0,04, celkem tedy 9 čtverců (obr. 22).



Obr. 22

V každém z nich zvolme 111 různých bodů. Mezi dvěma sousedními čtverečky je vždy vzdálenost 0,44. Proto každý čtverec o straně 0,4, jehož strany jsou rovnoběžné se stranami čtverce C , může mít společné body nejvýše s jedním z devíti zvolených čtverečků, a proto může obsahovat nejvýše 111 ze zvolených 999 bodů.

A - II - 1

Nechť $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dokažte, že $\operatorname{tg} \alpha$ je racionální číslo, právě když pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí: je-li $\operatorname{tg} n\alpha$ definovaný, pak je $\operatorname{tg} n\alpha$ racionální číslo.

Řešení. Nejprve dokážeme tuto implikaci: je-li $\operatorname{tg} \alpha$ racionální, pak pro každé přirozené n platí, že buď není $\operatorname{tg} n\alpha$ definovaný, nebo je $\operatorname{tg} n\alpha$ racionální. Tvrzení zřejmě platí pro $n = 1$. Předpokládejme, že platí pro $n = m$, a dokážeme je pro $n = m + 1$. Pokud není $\operatorname{tg} m\alpha$ definovaný, tak je $m\alpha = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ pro nějaké celé číslo k , takže

$$\operatorname{tg} (m + 1) \alpha = \operatorname{tg} \left(\alpha + (2k + 1) \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

je číslo racionální. Je-li naopak $\operatorname{tg} m\alpha$ racionální, je buď $\operatorname{tg} m\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, což znamená, že je $\cos (m + 1) \alpha = 0$ a $\operatorname{tg} (m + 1) \alpha$ není definovaný, nebo

$$\operatorname{tg} (m + 1) \alpha = \frac{\operatorname{tg} m\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} m\alpha \operatorname{tg} \alpha}$$

je číslo racionální. Tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

Předpokládejme nyní obráceně, že pro každé přirozené $n > 1$ je $\operatorname{tg} n\alpha$ racionální nebo není definovaný. Tento předpoklad stačí použít pro $n = 2$ a $n = 3$. Není-li $\operatorname{tg} 2\alpha$ definovaný, je $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ a $\operatorname{tg} \alpha = 1$ je racionální. Hodnota $\operatorname{tg} 3\alpha$ není definovaná pro $\alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi$, pro takové hodnoty však není $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3}$ racionální. Je-li konečně $\operatorname{tg} 2\alpha$ i $\operatorname{tg} 3\alpha$ racionální, pak je

$$1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha \cos 3\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos 2\alpha (\cos 2\alpha - 2\sin^2 \alpha)} \neq 0$$

a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$$

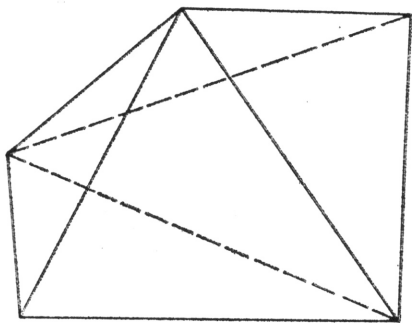
je racionální číslo.

A - II - 2

Určete nejmenší přirozené číslo n , pro které existuje mnohostěn s n hranami, jehož všechny vrcholy s výjimkou nejvýše dvou mají stupeň alespoň 4. (Stupněm vrcholu mnohostěnu nazýváme počet hran, které z tohoto vrcholu vycházejí.)

Řešení. Označme v ($v \geq 4$) počet vrcholů mnohostěnu, který má n hran a splňuje podmínky úlohy. Z každého vrcholu vycházejí aspoň tři hrany, podle předpokladu však vycházejí ze všech vrcholů kromě nejvýše dvou aspoň čtyři hrany. Celkem má tedy takový mnohostěn aspoň $\frac{4(v-2) + 3 \cdot 2}{2}$ hran (každá hrana přísluší dvěma vrcho-

lům). Je tedy $n \geq 2(v-2) + 3 = 2v - 1$. Nemůže být $v = 4$, protože ve čtyřstěnu je stupeň každého vrcholu 3. Pro $v = 5$ máme $n \geq 9$ a mnohostěn s pěti vrcholy a devíti hranami opravdu existuje (obr. 23).

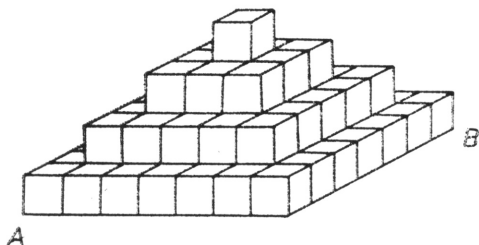


Obr. 23

A - II - 3a

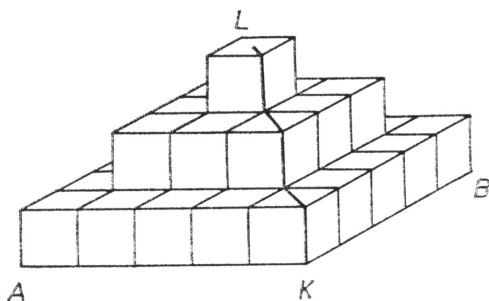
Pyramida z jednotkových krychlí má $N > 1$ vrstev (na obr. 24 je taková pyramida pro $N = 4$). Najděte nejkratší spojnici protějších vrcholů A , B podstavy vedenou po

povrchu pyramidy (vylučuje se spojnice procházející vnitřkem podstavy).



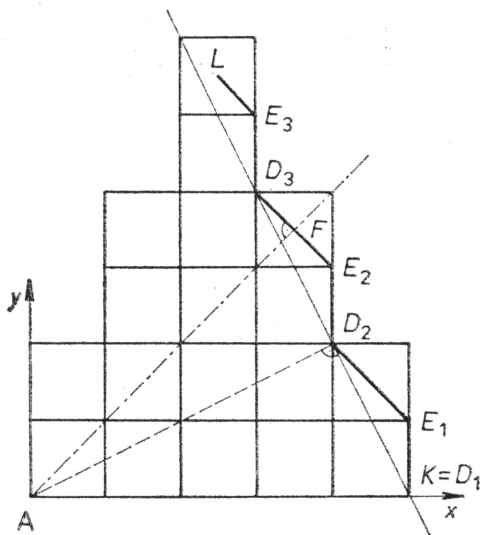
Obr. 24

Řešení. Vzhledem k souměrnosti pyramidy můžeme předpokládat, že spojnice bodů A , B prochází některým bodem C na spojnici bodů L a K , která leží v rovině souměrnosti bodů A a B (obr. 25 pro $N = 3$). Abychom našli bod C , pro který je spojnice AC nejkratší, rozvineme pří-



Obr. 25

slušnou část povrchu pyramidy do roviny (obr. 26). Je zřejmé, že je vždy $|AD_k| < |AE_k|$, takže z bodů úsečky D_kE_k ($1 \leq k \leq N$) má nejmenší vzdálenost od bodu A bod D_k . Z bodů úsečky E_kD_{k+1} má nejmenší vzdálenost od bodu A vždy některý z jejích krajních bodů s výjimkou



Obr. 26

případu, kdy je $|AE_k| = |AD_{k+1}|$ (v každém jiném případě je trojúhelník AE_kD_{k+1} tupouhlý nebo pravoúhlý). V tomto případě má z bodů úsečky E_kD_{k+1} od bodu A nejmenší vzdálenost její střed F , pak je ale $|AF| > |AD_k|$. Zjistili jsme tedy, že hledaným bodem C je některý z bodů D_k ($1 \leq k \leq N$).

Zvolme soustavu souřadnic s počátkem v bodě A tak, aby bylo $D_1 = (2N - 1, 0)$. Pak leží body $D_k = (2N - k, 2k - 2)$ na přímce, která má rovnici $y + 2x = 4N - 2$, a kolmice vedená k ní bodem A ji protíná v bodě

$$P = \left(\frac{8N - 4}{5}, \frac{4N - 2}{5} \right).$$

Hledaným bodem C je ten z bodů D_k , který je nejbližší bodu P , k je tedy takové celé číslo, pro které je rozdíl

$$\left| 2N - k - \frac{8N - 4}{5} \right| = \left| \frac{2N + 4}{5} - k \right|$$

nejmenší. Jak snadno zjistíme, nejbližší celé číslo k číslu $\frac{2N + 4}{5}$ je

$$k = \left[\frac{2N + 4}{5} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{4N + 13}{10} \right].$$

(Pro čísla tvaru $m + \frac{1}{2}$, kde m je celé, existují ovšem taková celá čísla dvě: m a $m + 1 = \left[m + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right]$.)

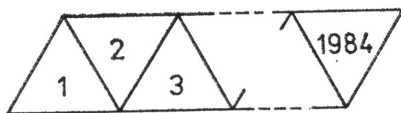
Jinak můžeme také k určit v závislosti na zbytku čísla N při dělení pěti:

N	k
$5n$	$2n + 1 = \frac{2N + 5}{5}$
$5n + 1$	$2n + 1 = \frac{2N + 3}{5}$
$5n + 2$	$2n + 2 = \frac{2N + 6}{5}$
$5n + 3$	$2n + 2 = \frac{2N + 4}{5}$
$5n + 4$	$2n + 2 = \frac{2N + 2}{5}$

Poznámka. Nalezený výsledek zřejmě platí i pro $N = 1$.

A - II - 3b

Na obr. 27 je útvar složený z 1984 shodných trojúhelníků. Některé z jejich vrcholů obarvíme tak, aby každý z 1984 uvažovaných trojúhelníků měl aspoň jeden vrchol obarven.



Obr. 27

Rozhodněte, je-li počet takovýchto obarvení sudý nebo lichý.

Řešení. Označme B_n počet všech přípustných obarvení pro útvar složený z n trojúhelníků. Je-li $n > 3$, můžeme takto obarvené útvary rozdělit do tří disjunktních skupin podle toho, jak jsou obarveny vrcholy n -tého trojúhelníku PQR (označení volíme tak, aby bod P patřil posledním třem, Q posledním dvěma a R jen poslednímu trojúhelníku).

Do první skupiny dáme útvary, jejichž vrchol R je obarven - takových obarvení je B_{n-1} . Do druhé skupiny dáme útvary, jejichž vrchol R není obarven a vrchol Q je obarven - takových obarvení je B_{n-2} . Do třetí skupiny dáme útvary, jejichž vrcholy R a Q nejsou obarveny, takže musí být obarven vrchol P - takových obarvení je B_{n-3} . Platí tedy rekurentní vzorec

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}.$$

Přímo zjistíme, že $B_1 = 7$, $B_2 = 13$, $B_3 = 24$. Vzhledem k rekurentnímu vzorci následují za sebou v posloupnosti $\{B_n\}$ vždy dvě lichá čísla a dvě sudá čísla, pak opět dvě lichá a dvě sudá čísla, atd. Proto je číslo B_{1984} sudé.

Jiné řešení. Pro $n \geq 1$ označme B_n počet všech přípustných obarvení útvaru složeného z n trojúhelníků a vrchol, který náleží pouze poslednímu n -tému trojúhelníku, označme P_n . Ke každému z B_{n-1} obarvení $n - 1$ trojúhelníků máme pro obarvení vrcholu P_n dvě možnosti (obarvit či neobarvit). Pouze v případě, kdy ani P_{n-2} , ani P_{n-1} obarveny nejsou, musí být obarven jak vrchol P_n , tak i vrchol

P_{n-3} . To nastane právě v B_{n-4} případech. Platí tedy pro $n > 4$ rekurentní vztah

$$B_n = 2B_{n-1} - B_{n-4}.$$

Protože na základě stejné úvahy je $B_4 = 2B_3 - 4$, což je číslo sudé, plyne z uvedeného rekurentního vztahu, že číslo B_{1984} je také sudé.

ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

V prostoru je dána krychle $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Označme S její střed (průsečík tělesových úhlopříček). Najděte všechna přirozená čísla k , pro která existuje rovina neobsahující bod S a protínající právě k z polopřímek $SA_1, SA_2, \dots, SA_8$.

Řešení. Označme M množinu všech rovin, které neobsahují bod S . Především je $k \geq 2$, neboť čtyři přímky $A_1A_7, A_2A_8, A_3A_5, A_4A_6$ se protínají v bodě S a žádné tři z nich neleží v jedné rovině. Je tedy každá rovina z M rovnoběžná nejvýše se dvěma z nich, tj. protíná aspoň dvě z těchto přímek neboli protíná alespoň dvě z polopřímek $SA_1, SA_2, \dots, SA_8$.

Dále je $k \leq 4$, protože rovina neprocházející bodem S může protínat vždy jen jednu z polopřímek k sobě opačných.

Rovina σ_1 obsahující body A_2, A_3 a rovnoběžná s rovinou $A_1A_4A_7$ protíná právě dvě polopřímky SA_2 a SA_3 .

Rovina σ_2 obsahující body A_3, A_6 a rovnoběžná s přímkou A_2A_8 protíná právě tři polopřímky SA_3, SA_6, SA_7 . Konečně rovina libovolné stěny krychle protíná právě čtyři z polopřímek $SA_1, SA_2, \dots, SA_8$. Úloze tedy vyhovují čísla 2, 3, 4.

A - III - 2

Nechť pro vnitřní úhly konvexního čtyřúhelníku platí

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta = 0,$$

pak je to tětíkový čtyřúhelník, lichoběžník nebo rovnoběžník. Dokažte.

Řešení. Je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$, takže použitím známých vzorců postupně dostaneme

$$\begin{aligned} & \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta = \\ &= 2 \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\gamma + \delta}{2} \cos \frac{\gamma - \delta}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\gamma - \delta}{2} \right) = \\ &= -4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma - \beta - \delta}{4} \sin \frac{\alpha + \delta - \beta - \gamma}{4}, \end{aligned}$$

neboť je

$$\cos \frac{\gamma + \delta}{2} = \cos \left(\pi - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = -\cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Dále je

$$\sin \frac{\alpha + \gamma - \beta - \delta}{4} = \sin \frac{\alpha + \gamma - \pi}{2} = -\cos \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

a

$$\sin \frac{\alpha + \delta - \beta - \gamma}{4} = -\cos \frac{\alpha + \delta}{2},$$

takže dostáváme

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta &= \\ &= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \delta}{2} = 0. \end{aligned}$$

Z poslední rovnosti plyne, že je součet dvou sousedních nebo dvou protějších úhlů roven 180° , tedy daný čtyřúhelník je lichoběžník nebo rovnoběžník anebo čtyřúhelník tětivový.

A - III - 3

Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ splňuje rekurentní vztah

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n. \quad (1)$$

Definujme posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ vztahem

$$b_n = \left[\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} \right],$$

přičemž klademe $b_n = 1$ pro $a_{n-1} = 0$. Dokažte, že od jistého členu počínaje splňuje posloupnost $\{b_n\}$ rovněž rekurentní vztah (1). ($[x]$ značí celou část čísla x .)

Řešení. Posloupnost $\{a_n\}$ splňující vztah (1) je monotónní, jak dokážeme indukcí. Necht' $a_0 \leq a_1$ a předpokládejme, že je $a_0 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$. Pak je

$$a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1} \geq a_n.$$

Přitom je tato posloupnost buď konstantní, nebo ostře monotónní. Je-li konstantní, je posloupnost $\{b_n\}$ rovněž konstantní a vyhovuje rekurentnímu vztahu (1).

Předpokládejme tedy, že posloupnost $\{a_n\}$ je nekonstantní, pak je od jistého členu počínaje (pro všechna $n \geq n_0$ pro vhodné n_0) buď stále kladná, nebo stále záporná. Položíme-li

$c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, je $c_n > 0$ pro $n \geq n_0$ a ze vztahu (1) plyne rovnost

$$c_n = 4 - \frac{3}{c_{n-1}},$$

takže je buď

(a) $0 < c_n < 1$ pro všechna $n \geq n_0 + 1$,

nebo

(b) $1 < c_n \leq 3$ pro všechna $n \geq n_0 + 1$,

nebo

(c) $3 < c_n < 4$ pro všechna $n \geq n_0 + 1$.

Přitom je v případě (a) a (c) $c_{n+1} = 4 - \frac{3}{c_n} > c_n$, v případě

(b) je $c_{n+1} \leq c_n$. Posloupnost $\{c_n\}$ stejně jako posloupnost $\{c_n c_{n+1}\}$ je tedy od určitého členu počínaje monotónní a omezená. Proto je posloupnost

$$b_n = \left[\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} \right] = [c_n c_{n+1}]$$

od určitého členu počínaje již konstantní. Konstantní posloupnosti však splňují rekurentní vztah (1).

Jiné řešení. Rekurentnímu vztahu (1) přísluší charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

která má kořeny $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Členy posloupnosti $\{a_n\}$ mají tedy tvar

$$a_n = A \cdot 3^n + B,$$

kde A , B jsou reálné konstanty. Posloupnost $\{a_n\}$ je zřejmě monotónní, takže pokud není konstantní, je od jistého členu počínaje nenulová. Pak je ale

$$\begin{aligned} b_n &= \left[\frac{3^{n+1} A + B}{3^{n-1} A + B} \right] = \left[\frac{9 \cdot 3^{n-1} A + 9B - 9B + B}{3^{n-1} A + B} \right] = \\ &= 9 + \left[\frac{-8B}{3^{n-1} A + B} \right], \end{aligned}$$

přičemž posloupnost $\frac{-8B}{3^{n-1}A + B}$ konverguje monotónně k nule. V každém případě je tedy posloupnost $\{b_n\}$ od jistého členu počínaje již konstantní, a každá konstantní posloupnost splňuje rekurentní vztah (1).

A - III - 4

Nechť r je přirozené číslo větší než 1. Potom existují kladná iracionální čísla x, y taková, že platí

$$x^y = r.$$

Dokažte.

Řešení. Zvolme libovolné prvočíslo p , které nedělí číslo r , a položme $x = \sqrt[p]{p}$. Snadno se dokáže, že x je (kladné) iracionální číslo. Logaritmus čísla r při základu $\sqrt[p]{p}$ označme y , tj.

$$(\sqrt[p]{p})^y = r.$$

Kdyby nyní y bylo racionální, tj. $y = \frac{a}{b}$ pro přirozená čísla a, b , dostali bychom

$$p^a = r^{2b},$$

což je spor, neboť p nedělilo r .

Jiné řešení. Předpokládejme, že tvrzení neplatí, tj. že pro každé iracionální x je číslo $y = \log_x r$ racionální. Vezměme

$x = \sqrt[3]{2}$ a $x = \sqrt[3]{3}$. Existují tedy racionální čísla y, z (jejich společný jmenovatel označme q) taková, že

$$(\sqrt[3]{2})^y = (\sqrt[3]{3})^z = r$$

neboli

$$2^{yq} = 3^{zq}.$$

To je zřejmě spor, protože yq a zq jsou celá čísla.

Jiné řešení. Množina $\{r^y : y \in (0, 1)\}$ je iracionální je nespočetná, existuje v ní tedy takové iracionální číslo x , že je

$$x = r^y :$$

A - III - 5

Najděte všechna přirozená čísla n , pro která existuje konvexní mnohostěn s n hranami, přičemž z právě jednoho jeho vrcholu vycházejí čtyři hrany a ze všech ostatních vrcholů tři hrany.

Řešení. Necht n je přirozené číslo vyhovující podmínce úlohy, označme k počet vrcholů příslušného konvexního mnohostěnu. Sečteme-li hrany v každém vrcholu, dostaneme dvojnásobný počet hran, tj.

$$2n = 4 + 3(k - 1) = 3k + 1.$$

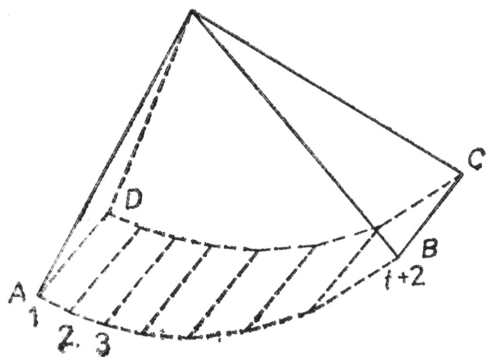
Protože $1 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5$, můžeme předchozí neurčitou rovnici upravit na tvar

$$2(n - 8) = 3(k - 5),$$

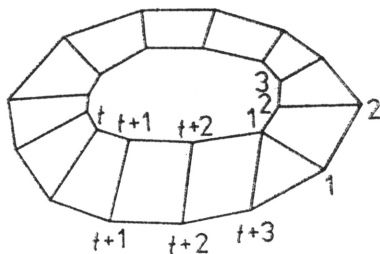
příčemž je $k \geq 5$, neboť čtyřstěn zřejmě nevyhovuje podmínce úlohy. Protože čísla 2 a 3 jsou nesoudělná, mají všechna řešení předchozí rovnice tvar

$$n = 8 + 3t, \quad k = 5 + 2t, \quad t \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Ukážeme, že pro každé takové n existuje konvexní mnohostěn, který vyhovuje podmínce úlohy. Pro $n = 8$ ($t = 0$) vyhovuje např. čtyřboký jehlan. Předpokládejme, že jsme již sestrojili pro $t \geq 0$ mnohostěn s $n = 8 + 3t$ hranami, který splňuje podmínku úlohy. Vezmeme jeho libovolný vrchol, z kterého vycházejí právě tři hrany, a na každé z nich zvolme jeden vnitřní bod. Uvedené tři body určují rovinu, která rozdělí původní mnohostěn na trojboký jehlan a konvexní mnohostěn s $8 + 3(t + 1)$ hranami, který zřejmě splňuje podmínku úlohy. Z principu matematické indukce plyne existence



Obr. 28



Obr. 29

konvexního mnohoštěnu s danou vlastností pro každé n tvaru $n = 8 + 3t$, kde $t \geq 0$ je celé číslo.

Jiný příklad mnohoštěnu s $n = 8 + 3t$ hranami, který splňuje podmínku úlohy, je na obr. 28, kde mezi hranami BC a AD je $t \geq 0$ hran, a na obr. 29, kde $t + 3$ hran spojuje vrcholy $(t + 2)$ -úhelníku s vrcholy $(t + 3)$ -úhelníku.

A - III - 6

Zobrazení f množiny $\mathbb{Z}$ všech celých čísel do sebe splňuje pro všechna $m \in \mathbb{Z}$ podmínku

$$f(f(m)) = -m. \quad (1)$$

Potom platí

- a) f je bijektivní (tj. prosté zobrazení množiny $\mathbb{Z}$ na sebe),
- b) pro všechna $m \in \mathbb{Z}$ je $f(-m) = -f(m)$,
- c) $f(m) = 0$, právě když $m = 0$.

Dokažte tato tvrzení a sestrojte příklad zobrazení f , které vyhovuje podmínce (1).

Řešení. Ze vztahu $f(m) = f(k)$ plyne

$$m = -f(f(m)) = -f(f(k)) = k,$$

f je tedy prosté, a protože pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je $f(f(-k)) = k$, zobrazuje f množinu $\mathbb{Z}$ na sebe.

Ze vztahu $f(f(m)) = -m$ plyne

$$f(-m) = f(f(f(m))) = -f(m).$$

Pro $m = 0$ odtud speciálně dostáváme $f(0) = 0$, a protože f je prosté, platí c).

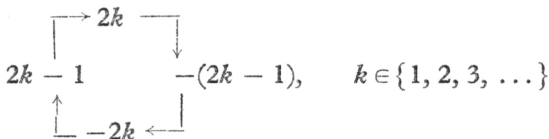
Definujme zobrazení f nyní takto:

$$f(0) = 0,$$

$$f(2k - 1) = 2k, \quad f(2k) = -2k + 1,$$

$$f(-(2k - 1)) = -2k, \quad f(-2k) = 2k - 1$$

pro libovolné k přirozené. Zobrazení f funguje podle následujícího schématu a splňuje zřejmě podmínku (1):



Korespondenční seminář ÚV MO je jednou z forem péče o talentované žáky, zvláště pak o ty, kteří nemají možnost navštěvovat speciální školy se zaměřením na matematiku a pracovat v tamních seminářích. Zásadně však nejsou přijímáni studenti pražských škol, ti mají obvykle možnost seznámit se s vybranými okruhy úloh na seminářích řešitelů MO.

K účasti v korespondenčním semináři pozvalo předsednictvo ÚV MO na základě návrhů KV MO a individuálního zájmu téměř 50 žáků, z nichž se přihlásilo 33 řešitelů ze všech krajů republiky:

Kraj	Stč	Jč	Zč	Sč	Vč	Jm	Sm	Bva	Zsl	Ssl	Vsl
Počet řešitelů	1	3	5	2	4	4	2	5	2	1	4

V průběhu 33. ročníku MO jim bylo zasláno pět sérií poměrně náročných úloh. Došla řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře.

Korespondenční seminář je řízen tajemníkem ÚV MO *Karlem Horákem*, který se stará o výběr a přípravu úloh a obvykle provádí i redakci komentářů. Opravu pak zajišťuje několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK v Praze (všichni to jsou bývalí olympionici).

Celý korespondenční seminář absolvovalo 25 řešitelů, nejlepšími v celkovém hodnocení byli *Martin Klazar* (G Louny), *Ján Šefčík* (G A. Markuša, Bratislava), *Jarmila Ranošová* (G M. Koperníka, Bílovec), *Juraj Balázs* (G Košice, Kuzmányho ul.) a *Aleš Limpouch* (G J. K. Tyla, Hradec Králové). Uvádíme znění všech zadaných úloh.

Užití invariantů

1.1 Na tabuli je napsáno několik nul, jedniček a dvojek. Můžeme smazat dvě od sebe různá čísla a místo nich napsat jedno, které se liší od právě smazaných. Dokažte, že jestliže nakonec zůstane na tabuli jediné číslo, pak stejné číslo dostaneme při každém jiném pořadí uvedené operace.

1.2 V tabulce 8×8 jsou zapsána celá čísla. Je dovoleno vybrat libovolný čtverec 3×3 nebo 4×4 a zvětšit v něm všechna čísla o 1. Je vždy možné pomocí takovéto operace dostat tabulku, v níž jsou všechna čísla dělitelná třemi?

1.3 Kruh je rozdělen na 10 výsečí, v každé z nich je jeden kámen. Jedním tahem je možno přemístit libovolné dva kameny do sousedních výsečí tak, aby se přitom pohybovaly v opačných směrech. Je možno takovými tahy dosáhnout toho, aby všechny kameny ležely ve stejné výseči?

1.4 Vrchol A_{12} pravidelného dvanáctiúhelníku je označen znaménkem $-$, ostatní vrcholy $+$. Je dovoleno změnit znaménka na opačná ve třech vrcholech tvořících rovnora-

menný nepravoúhlý trojúhelník. Je možno pomocí takovýchto změn dosáhnout toho, aby ve vrcholu A_1 bylo — a v ostatních vrcholech $+$?

1.5 Změní se výsledek předchozí úlohy, jestliže můžeme měnit znaménka i ve vrcholech rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků?

1.6 Čísla 1, 2, ..., 1975 jsou zapsána ve svém přirozeném pořadí. Je dovoleno vybrat libovolná čtyři čísla a umístit je na stejná místa, kde byla předtím, ale v opačném pořadí. Je možné pomocí takovýchto operací dosáhnout pořadí čísel 1975, 1974, ..., 2, 1?

1.7 Na kružnici je rozmístěno 10 bílých a 20 černých kamenů. Můžeme vyměnit libovolné dva kameny, mezi kterými stojí ještě tři jiné kameny. Dvě konfigurace kamenů jsou ekvivalentní, jestliže můžeme od jedné ke druhé přejít prováděním uvedené operace. Kolik existuje neekvivalentních konfigurací kamenů?

Planimetrie

2.1 Z měst A a B vyjíždějí v různou dobu různými rychlostmi proti sobě dva jezdci, aby si vyměnili zprávy. Setkají se v místě C a okamžitě se vracejí zpět. Po návratu do svých měst opět vyjíždějí proti sobě s novými zprávami, setkají se v místě D a opět se vracejí atd. Kde se setkají při 1983. cestě, pohybují-li se oba neustále konstantní rychlostí?

2.2 Trojúhelník $A_1B_1C_1$ dostaneme z trojúhelníku ABC otočením o nějaký úhel $\omega < 180^\circ$ okolo středu kružnice opsané trojúhelníku ABC . Průsečíky odpovídajících si stran AB , A_1B_1 ; BC , B_1C_1 a CA , C_1A_1 jsou vrcholy trojúhelníku podobného trojúhelníku ABC . Dokažte.

2.3 Úhlopříčky rozdělují daný čtyřúhelník $ABCD$ na čtyři trojúhelníky, jimž vepsané kružnice mají shodné poloměry. Dokažte, že $ABCD$ je kosočtverec nebo čtverec.

2.4 O čtyřúhelníku $ABCD$ víme, že poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC , BCD , CDA , DAB jsou shodné. Dokažte, že pak je $ABCD$ obdélník.

2.5 Necht a , b , c , d jsou strany čtyřúhelníku $ABCD$, e , f necht jsou velikosti jeho úhlopříček. Označíme-li α , γ dva z protilehlých úhlů čtyřúhelníku, potom platí

$$e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma).$$

Dokažte.

2.6 Dokažte, že je-li ABC rovnostranný trojúhelník a P libovolný bod v rovině ABC takový, že neleží na kružnici opsané trojúhelníku ABC , pak existuje trojúhelník se stranami délky $|PA|$, $|PB|$, $|PC|$.

2.7 Mějme trojúhelník ABC a sestrojme nad jeho stranami rovnostranné trojúhelníky APB , BQC , CRA tak, že trojúhelníky APB ($|AP| = |AB|$) a BQC ($|BQ| = |BC|$) nemají s trojúhelníkem ABC společný žádný vnitřní bod a trojúhelník CRA ($|CR| = |CA|$) leží v polorovině CAB . Dokažte, že $BPRQ$ je rovnoběžník.

Posloupnosti

3.1 Dokažte, že pro každou posloupnost $\{a_n\}$, jejíž členy jsou navzájem různá přirozená čísla, která nemají ve svém dekadickém zápisu nulu, platí pro každé k

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} < 29.$$

3.2 Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu m existuje přirozené číslo k tak, že

$$\left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=k+1}^m a_i \right| = \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|.$$

3.3 Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$, která má tuto vlastnost: existuje přirozené číslo m takové, že

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = 0$$

a pro každé přirozené číslo k je $a_{m+k} = a_k$. Dokažte, že existuje přirozené číslo p tak, že pro každé celé nezáporné číslo k platí

$$a_p + a_{p+1} + \dots + a_{p+k} \geq 0.$$

3.4 Uvažujme čtyři posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ takové, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n + b_n, b_{n+1} = b_n + c_n, c_{n+1} = c_n + d_n,$$

$$d_{n+1} = d_n + a_n.$$

Dokažte, že pokud existují přirozená čísla k, m tak, že

$$a_{k+m} = a_m, b_{k+m} = b_m, c_{k+m} = c_m, d_{k+m} = d_m,$$

pak je

$$a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0.$$

3.5 Necht' pro posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ platí

$$a_n + a_{n+2} \geq 2a_{n+1}$$

pro každé přirozené n . Dokažte, že pak pro každé n přirozené je

$$\frac{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n+1}}{n+1} \geq \frac{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}}{n}.$$

3.6 Jsou dána přirozená čísla a_1, a_2 . Pro přirozená čísla $n > 2$ položíme $a_n = |a_{n-2} - a_{n-1}|$. Tak jsme definovali posloupnost nezáporných celých čísel a_n . Je-li největší člen této posloupnosti 1984, jaký je největší možný index prvního nulového členu?

3.7 Je dána posloupnost číslic $\{a_n\}$ neobsahující číslici 9. Tato posloupnost určuje posloupnost $\{b_n\}$, jejíž členy mají dekadické zápisy $b_1 = (a_1)$, $b_2 = (a_1a_2)$ atd. Dokažte, že posloupnost $\{b_n\}$ obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.

Kombinatorické úlohy z teorie čísel

4.1 Jsou dána přirozená čísla a, b . Existují přirozená čísla c, d taková, že $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$?

4.2 Turnaje se zúčastnilo $(m-1)n + 1$ sportovců. Dokažte, že buď je mezi nimi m účastníků, kteří se navzájem neznají, nebo je mezi nimi sportovec, který se zná s alespoň n ostatními sportovci.

4.3 V tabulce $n \times m$ jsou zapsána navzájem různá reálná čísla. V každém řádku (resp. sloupci) je podrženo k (resp. r) největších čísel. Dokažte, že alespoň kr čísel je podrženo dvakrát.

4.4 Je dáno prvočíslo p . Pro každé $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ označíme symbolem a_k zbytek čísla k^p při dělení číslem p^2 . Určete

$$s = \sum_{k=1}^{p-1} a_k.$$

4.5 Necht p_n, q_n jsou nesoudělná přirozená čísla, pro něž platí

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n}.$$

Dokažte, že platí

- a) p_n je sudé pro všechna n ;
- b) pro každé k existuje n tak, že 2^k dělí p_{n+m} pro všechna m .

4.6 V posloupnosti 19842376... je každá číslice počínaje pátou rovna poslední číslici součtu předchozích čtyř číslic.

- a) Existuje v posloupnosti čtveřice 1985?
- b) Vyskytuje se v posloupnosti čtveřice 4198?

Rovnice a funkce

5.1 Označme Q^2 množinu všech bodů v rovině R^2 , jejichž obě souřadnice jsou racionální čísla. Rozhodněte, zda

- a) sjednocení všech úseček, jejichž krajní body náleží množině Q^2 , pokrývá rovinu R^2 ,
- b) konvexní obal Q^2 (tj. nejmenší konvexní podmnožina R^2 obsahující množinu Q^2) je celá rovina.

5.2 Najděte všechna celá čísla x , pro která je

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

úplný čtverec.

5.3 Určete všechna reálná čísla a tak, aby pro kořeny x_1, x_2, x_3 rovnice

$$x^3 - 6x^2 + ax + a = 0$$

platilo

$$(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 2)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0.$$

5.4 Mohou mít rovnice

$$x^5 - x - 1 = 0, \quad x^2 + ax + b = 0,$$

kde a, b jsou racionální čísla, společný (komplexní) kořen?

5.5 Uvažujme rovnici

$$\sqrt{2p + 1 - x^2} + \sqrt{3x + p + 4} = \sqrt{x^2 + 9x + 3p + 9}, \quad (1)$$

kde x, p jsou reálná čísla. Ukažte, že pak je

$$(x^2 + x - p)(x^2 + 8x + 2p + 9) = 0,$$

a najděte množinu reálných parametrů p , pro které má rovnice (1) právě jeden reálný kořen.

5.6 Ukažte, že rovnice

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n}x^n = 0$$

nemá pro sudá n žádný reálný kořen.

5.7 Necht f a g jsou zobrazení množiny A do sebe. Funkci f nazveme n -tou funkcionální odmocninou g (n je přirozené číslo), je-li

$$f^n(x) = g(x)$$

pro každé $x \in A$. Přitom definujeme

$$f^1(x) = f(x), f^{n+1}(x) = f(f^n(x)).$$

a) Dokažte, že funkce $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, g(x) = \frac{1}{x}$, má nekonečně mnoho n -tých funkcionálních odmocnin pro každé $n \geq 2$.

b) Dokažte, že existuje prosté zobrazení $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, které nemá n -tou funkcionální odmocninu pro žádné $n \geq 2$.

Správa o 25. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. Organizácia a priebeh súťaže

Jubilejná - 25. medzinárodná matematická olympiáda sa konala v hlavnom meste našej republiky - v Prahe. Táto skutočnosť znamenala možno menšiu atraktivnosť pre našich reprezentantov, lebo účasť v súťaži nebola spojená so zahraničnou cestou. Na druhej strane však umožnila zoznámiť sa s neopakovateľnou atmosférou súťaže oveľa širšiemu okruhu našich odborníkov ako je to možné v prípade jej konania sa v zahraničí.

Usporiadateľom 25. MMO bolo Ministerstvo školstva ČSR (po vzájomnej dohode oboch národných ministerstiev), ktoré prípravou a organizačným zabezpečením poverilo Matematicko-fyzikálnu fakultu Univerzity Karlovej a Matematický ústav ČSAV. Na usporiadaní MMO sa ďalej podieľali JČSMF, ÚV SZM, ÚV MO, odbor školstva NVP a KV MO v Prahe.

Možno to neprichodí hodnotiť nam a hodnotiť to už teraz, ale pražská olympiáda sa vyznačovala priateľskou atmosférou znásobenou srdečnosťou a obetavosťou usporiadateľov a znamenala úspech tak z hľadiska upevnenia priateľstva a spolupráce mladých matematikov z celého sveta, ako aj z hľadiska

upevnenia dobrého mena usporiadajúcej krajiny. Zásahu na tom mal predovšetkým organizačný výbor na čele s *prof. dr. Karlom Drbohlavom, DrSc.* Nezabudnuteľným zážitkom bol otvárací ceremoniál i vyhlásenie výsledkov olympiády v aule Karolína, bohatý kultúrny a spoločenský program (vrátane prijatia na staromestskej radnici, výletu na Karlštejn atď.), ako aj matematické hry organizované pre mládež po skončení súťaže. Druhý raz v histórii olympiád sa uskutočnilo v jej programe sympóziu, na ktorom referovali viacerí delegáti o výchove matematických talentov v jednotlivých krajinách. Za ČSSR prehovoril dlhoročný funkcionár MO *prof. dr. Jozef Moravčík, CSc.* Priebeh olympiády bol široko komentovaný našimi hromadnými oznamovacími prostriedkami, vrátane rozhlasu a televízie. Účastníci sa mali príležitosť zoznámiť s hodnotnou výstavkou matematických materiálov z mnohých krajín.

Olympiády sa zúčastnil rekordný počet 34 krajín z 5 kontinentov (po prvýkrát sa zúčastnili Cyprus a Nórsko) i rekordný počet 192 účastníkov. Prítomný bol aj zástupca UNESCO *prof. E. Jacobsen*. Otvorenie súťaže sa konalo 3. júla 1984, záver 9. júla 1984, samotná súťaž prebiehala v dňoch 4. a 5. júla, ďalšie 3 dni boli venované oprave úloh a ich koordinácii (hlavným koordinátorom bol *prof. dr. Lev Bukovský, DrSc.,* z PF UPJŠ v Košiciach). Ale ešte predtým medzinárodná jury (pod vedením jedného z našich najskúsenejších olympijských pracovníkov *dr. Františka Zítka, CSc.,* z MÚ ČSAV v Prahe) vybrala 6 súťažných úloh. Podklady jej pripravila problémová komisia (vedená členom korešpondentom ČSAV *prof. dr. Miroslavom Fiedlerom, DrSc.* z MÚ ČSAV v Prahe), ktorá vybrala a spracovala 16 najvhodnejších úloh spomedzi

úloh navrhnutých jednotlivými krajinami. Jury rozhodla hlasovaním o konečnom výbere. Bola pritom o niečo náročnejšia ako problémová komisia. Možno až príliš, čo ostatne môže čitateľ posúdiť sám.

Úlohy prvého súťažného dňa

1. Nech x, y, z sú nezáporné reálne čísla, $x + y + z = 1$. Dokážte, že

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

(Táto úloha bola navrhnutá NSR.)

2. Nájdite takú dvojicu (a, b) celých kladných čísel, aby platilo:

(1) číslo $ab(a + b)$ nie je deliteľné číslom 7,

(2) číslo $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ je deliteľné číslom 7^7 .

Výsledok zdôvodnite.

(Táto úloha bola navrhnutá Holandskom.)

3. V rovine sú dané dva rôzne body O, A . Pre ľubovoľný bod X roviny rôznej od bodu O označíme symbolom $\alpha(X)$ veľkosť orientovaného uhla AOX meranú v radiánoch proti smeru hodinových ručičiek ($0 \leq \alpha(X) < 2\pi$) a symbolom $C(X)$ kružnicu so stredom v bode O a polomerom dĺžky

$|OX| + \frac{\alpha(X)}{|OX|}$. Daný je konečný počet farieb a každý bod roviny je zafarbený jednou z nich. Dokážte, že v rovine

existuje taký bod X , že $\alpha(X) > 0$ a na kružnici $C(X)$ existuje aspoň jeden bod tej istej farby ako X .

(Táto úloha bola navrhnutá Rumunskom.)

Úlohy druhého súťažného dňa

4. V konvexnom štvoruholníku sa priamka CD dotýka kružnice o priemere AB . Dokážte, že priamka AB sa dotýka kružnice o priemere CD vtedy a len vtedy, keď sú priamky BC , AD rovnobežné.

(Táto úloha bola navrhnutá Rumunskom.)

5. Nech d je súčet dĺžok všetkých uhlopriečok a p je obvod rovinného konvexného n -úholníka ($n > 3$). Dokážte, že

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2$$

($[x]$ je celá časť čísla x , tj. najväčšie celé číslo neprevyšujúce x).

(Táto úloha bola navrhnutá Mongolskom.)

6. Nech a, b, c, d sú nepárne celé čísla vyhovujúce nasledujúcim podmienkam:

(1) $0 < a < b < c < d$,

(2) $ad = bc$,

(3) $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$ pre nejaké celé čísla k, m .

Dokážte, že $a = 1$.

(Táto úloha bola navrhnutá Poľskom.)

Po oba dni mali súťažiaci na riešenie k dispozícii čas 4,5 hodiny.

2. Výsledky 25. MMO

Po náročnej koordinácii, pri ktorej panovala spokojnosť s našimi koordinátormi (československé riešenia boli koordi-

nované autorskými krajinami vzhľadom na to, že sme boli usporiadajúcou krajinou), jury určila výsledky. Stalo sa tak na zasadnutí siahajúcom hlboko do noci. Okrem určenia výsledkov jury prerokovala na záverečnom zasadnutí aj ďalšie otázky. Medziiným sa dohodlo, že v r. 1985 sa uskutoční medzinárodná matematická olympiáda vo Fínsku, v r. 1986 v Poľsku a v r. 1988 v Austrálii. Otvoreným ostal rok 1987, na ktorý predložili návrh Kuba aj Švédsko.

Jury rozhodla, že ocenených bude polovica zo 192 účastníkov. Pri tradičnom rozdelení prvých, resp. druhých, resp. tretích cien v pomere 1 : 2 : 3, bolo udelených 14 prvých, 32 druhých a 49 tretích cien. Okrem toho bola udelená jedna osobitná cena za originálne riešenie úlohy č. 5. Prehľad výsledkov je uvedený v priloženej tabuľke (str. 138).

K celkovým výsledkom treba poznamenať, že 3 krajiny vyslali neúplný počet účastníkov: Alžírsko štyroch, Luxembursko a Nórsko po jednom. (Ostatne, už aj z tohto vidieť, že nie je možné stanoviť oficiálne poradie krajín.) MMO mala 8 absolútnych víťazov, ktorí získali plný počet 42 bodov. Boli to: *A. Astrelín* (ZSSR), *Dan Than Son* (Vietnam), *K. Gröger* (NDR), *K. Ignatiev* (ZSSR), *B. D. Mihov* (Bulharsko), *D. Moews* (USA), *L. Oridoroga* (ZSSR), *D. Tataru* (Rumunsko).

3. Hodnotenie československej účasti

Predsedníctvo ÚV MO určilo členov čs. družstva na svojom zasadnutí 21. 6. 1984. Vychádzalo najmä z výsledkov celoštátneho kola a krajského kola ako aj permanentnej súťaže prebiehajúcej v rámci 3-týždňového sústredenia užšieho

Krajina	Počet bodov	Neoficiálne poradie	Počet cien		
			1.	2.	3.
Alžírsko	36	28	—	—	—
Austrália	103	15	—	1	2
Belgicko	56	23—24	—	—	1
Brazília	92	18	—	—	3
Bulharsko	203	2	2	3	1
Cyprus	47	26	—	—	1
ČSSR	125	13	—	2	2
Fínsko	31	29	—	—	—
Francúzsko	126	12	—	2	2
Grécko	88	19	—	1	—
Holandsko	93	17	—	1	2
Juhoslávia	105	14	—	—	4
Kanada	83	20	—	—	1
Kolumbia	80	21	—	—	2
Kuba	67	22	—	—	1
Kuvajt	9	33	—	—	—
Luxembursko	22	32	—	—	1
Maďarsko	195	4—5	1	4	1
Maroko	56	23—24	—	—	1
Mongolsko	146	10	—	3	2
NDR	161	8	1	2	3
NSR	150	9	—	2	4
Nórsko	24	31	—	—	1
Poľsko	140	11	—	1	5
Rakúsko	97	16	—	1	2
Rumunsko	199	3	2	2	2
Španielsko	43	27	—	—	—
Švédsko	53	25	—	—	—
Taliansko	0	34	—	—	—
Tunis	29	30	—	—	—
USA	195	4—5	1	4	1
Veľká Británia	169	6	1	3	1
Vietnam	162	7	1	2	3
ZSSR	235	1	5	1	—

10-členného výberu. Toto sústredenie sa konalo 4.—23. 6. 1984 v Bratislave. Predsedníctvo prihliadalo tiež k sústredeniu širšieho kádra (1.—8. 4. 1984 v Brezovej pod Bradlom) a k celoštátnemu korešpondenčnému semináru. Určilo týchto reprezentantov: *Juraja Balázsa* (4. ročník gymnázia na Kuzmányho ul. v Košiciach), *Martina Grajcara* (4. ročník gymnázia M. Koperníka v Bílovci), *Pavla Krtouša* (3. ročník gymnázia v Liberci), *Adama Obdržálka* (2. ročník gymnázia W. Piecka v Prahe), *Jána Šefčíka* (3. ročník gymnázia A. Mar-kuša v Bratislave) a *Jiřího Witzanyho* (4. ročník gymnázia W. Piecka v Prahe). Náhradníkom bol *Petr Hájek* (2. ročník gymnázia W. Piecka v Prahe). Vedúcim čs. delegácie bol *prof. dr. Beloslav Riečan, DrSc.*, z MFF UK v Bratislave, jeho zástupcom *dr. Leo Boček, CSc.*, z MFF UK v Prahe.

Dosiahnuté výsledky sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

Žiak	Počet bodov za riešenie úlohy č.						Súčet bodov	Udelená cena a celkové umiestnenie	
	1	2	3	4	5	6			
Juraj Balázs	7	7	0	7	4	1	26	2.	47.—49.
Martin Grajcar	6	7	0	7	4	1	25	3.	50.—52.
Pavel Krtouš	0	1	0	6	3	1	11	—	123.—132.
Adam Obdržálek	3	1	0	4	1	0	9	—	139.—143.
Ján Šefčík	7	7	0	6	0	0	20	3.	76.—81.
Jiří Witzany	7	1	7	6	7	6	34	2.	25.—28.
							125		

Vzhľadom na mimoriadnu náročnosť príkladov 25. MMO môžeme s uspokojením konštatovať, že naši reprezentanti podali solídne výkony. Isteže, naše (neoficiálne) 13. miesto nepôsobí efektne a v posledných rokoch sme si zvykli na umiestnenie o niečo lepšie. Treba si však uvedomiť, že medzitým rady našich súťažiacich opustilo niekoľko výnimočných talentov (napr. jeden z nich, Igor Kříž, už tohto roku ako poslucháč 1. ročníka MFF UK v Prahe získal popredné umiestnenie v celoštátnom kole ŠVOČ), do nášho družstva nastúpili noví, nadaní síce, ale neskúsení členovia. Svoje zohrala aj napätá atmosféra medzinárodnej súťaže.

Na druhej strane, v takej náročnej súťaži, akou MMO je, hrá významnú úlohu aj náhoda. Keby napr. aj zvyšní dvaja členovia nášho tímu boli získali ceny (tj. keby boli uhrali svoj štandard, ako to dokázal urobiť v neoficiálnom súťažení, pravda, v neporovnateľne uvoľnenejšej atmosfére, náš náhradník), boli by sme zopakovali vlnajší úspech a umiestnili sa v prvej desiatke. Alebo taký útok nášho Witzanyho na 1. cenu. Zo suchých čísel sa nedá vyčítať ten drobný krôčik, čo ho od nej delil. Witzanyho položil druhý príklad. Mimochodom príklad bez zvláštnej invencie, ani nie obzvlášť ťažký. Bolo treba upraviť binóm; kto prišiel na vhodnú úpravu, príklad vyriešil. Jiří uskutočnil niekoľko rôznych jednoduchších i zložitejších obrátov. V jednom z nich sa už implicitne objavilo riešenie. Možno Jiřímu chýbalo 5 minút a bol by mal namiesto jedného bodu za 2. príklad bodov sedem, namiesto druhej ceny, cenu prvú.

Ale také je už súťaženie, treba ho brať športovo. Pre všetkých našich súťažiacich bola MMO životným zážitkom, pre tých mladších azda aj povzbudením do ďalšieho ročníka sú-

ťaže. Zanedbateľným nie je ani spôsob, akým na 25. MMO zvíťazila myšlienka priateľstva medzi národmi. Ani to, že sa tak stalo v hlavnom meste našej vlasti.

4. Řešení úloh 25. MMO

Řešení 1. úlohy. K důkazu nezápornosti uvedeného výrazu si stačí uvědomit, že $0 \leq x, y, z \leq 1$, takže

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - z) + yz(1 - x) + zx \geq 0.$$

Můžeme také díky symetrii předpokládat $x \leq y \leq z$, takže

$$x \leq \frac{1}{3} \text{ a}$$

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy + yz(1 - 2x) + zx \geq 0.$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a harmonickým průměrem platí dokonce

$$\frac{xy + yz + zx}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \frac{3xyz}{x + y + z} = 3xyz,$$

tj.

$$xy + yz + zx \geq 9xyz.$$

Nyní dokážeme druhou nerovnost. Položme $x = \frac{1}{3} + a$,

$y = \frac{1}{3} + b, z = \frac{1}{3} + c$, podle předpokladu úlohy pak je
 $a + b + c = 0, -\frac{1}{3} \leq a, b, c \leq \frac{2}{3}$ a

$$\begin{aligned} xy + yz + zx - 2xyz &= \frac{7}{27} + \frac{1}{3}(ab + bc + ca) - 2abc = \\ &= \frac{7}{27} + \frac{1}{3}(bc - a^2 - 6abc). \end{aligned} \quad (1)$$

Vzhledem k symetrii můžeme předpokládat $a \leq b \leq c$, pak musí být buď $a \leq b \leq 0 \leq c$, nebo $a \leq 0 \leq b \leq c$.

V prvním případě je $bc - a^2 - 6abc \leq 0$, v druhém případě můžeme psát pro $-\frac{1}{3} \leq a \leq 0$

$$\begin{aligned} bc - a^2 - 6abc &= bc - (b + c)^2 - 6abc = -(b - c)^2 - \\ &- 3bc - 6abc = -(b - c)^2 - 3bc(1 + 2a) \leq 0 \end{aligned}$$

s rovností, právě když $b = c = a = 0$. V obou případech plyne z (1) nerovnost

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

2. řešení. Necht' např. $x \geq \frac{1}{2}$, pak je

$$\begin{aligned}
 xy + yz + zx - 2xyz &= x(y + z) + yz(1 - 2x) = \\
 &= x(1 - x) + yz(1 - 2x) \leq x(1 - x) \leq \frac{1}{4} < \frac{7}{27}.
 \end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii zbývá vyšetřit jen případ, kdy je $0 \leq x, y, z < \frac{1}{2}$. Položme $x' = 1 - 2x$, $y' = 1 - 2y$, $z' = 1 - 2z$, pak je

$$x' + y' + z' = 1, \quad x', y', z' > 0$$

a

$$xy + yz + zx - 2xyz = \frac{1}{4}(1 + x'y'z').$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dostaneme

$$x'y'z' \leq \left(\frac{x' + y' + z'}{3} \right)^3 = \frac{1}{27},$$

takže

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

3. řešení. Uvažujme mnohočlen

$$\begin{aligned}
 p(t) &= (t - x)(t - y)(t - z) = \\
 &= t^3 - t^2 + t(xy + yz + zx) - xyz.
 \end{aligned}$$

Máme tedy dokázat, že pro $x \geq y \geq z \geq 0$, $x + y + z = 1$ je

$$-\frac{1}{8} \leq p\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{216}.$$

Je-li $x \geq \frac{1}{2}$, je $y \leq \frac{1}{2}$, $z \leq \frac{1}{2}$, $p\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$ a podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\begin{aligned} -p\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - y\right) \left(\frac{1}{2} - z\right) \leq \\ &\leq \left(\frac{2x - \frac{1}{2}}{3}\right)^3 \leq \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

podobně pro $x \leq \frac{1}{2}$ je

$$0 \leq p\left(\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{\frac{3}{2} - x - y - z}{3}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

4. řešení. Funkce

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx - 2xyz$$

je spojitá a nabývá proto v uvažovaném definičním oboru $0 \leq x, y, z \leq 1$, $x + y + z = 1$ svého maxima. Je-li

$x < \frac{1}{2}$ a $y \neq z$, platí

$$f\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right) = x(y+z) + \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 (1-2x) > \\ > x(y+z) + yz(1-2x) = f(x, y, z).$$

Z důvodu symetrie můžeme předpokládat, že $x \leq y \leq z$.

Není-li $x = y = z = \frac{1}{3}$, je buď $x < y < z$, nebo

$x = y < z$ (v obou případech musí být $x < \frac{1}{2}$), takže

$$f\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right) > f(x, y, z),$$

nebo $x < y = z$ a $z \leq \frac{1}{2}$, takže pokud $z \neq \frac{1}{2}$, je

$$f\left(z, \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) > f(z, x, y) = f(x, y, z).$$

Pro $y = z = \frac{1}{2}$, $x = 0$ máme $f\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} < \frac{7}{27}$.

Funkce f tedy nabývá v uvedeném definičním oboru svého

maxima v jediném bodě $x = y = z = \frac{1}{3}$ a je

$$f(x, y, z) \leq f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}.$$

5. řešení. Označme $k = xy + yz + zx - 2xyz =$
 $= x(1 - x) + yz(1 - 2x)$. Vzhledem k symetrii můžeme
 předpokládat, že $x \leq \frac{1}{3}$. Protože

$$y + z = 1 - x,$$

$$yz = \frac{k + x(x - 1)}{1 - 2x},$$

jsou čísla y, z reálné kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 + (x - 1)t + \frac{k + x(x - 1)}{1 - 2x} = 0,$$

pro jejíž diskriminant platí

$$(x - 1)^2(1 - 2x) - 4k - 4x(x - 1) \geq 0,$$

neboli

$$k \leq -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}.$$

Funkce $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$ má v intervalu $\langle 0, \frac{1}{3} \rangle$
 nezápornou derivaci

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(1 - 3x) \geq 0,$$

takže

$$k \leq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}.$$

6. řešení. Najdeme extrémy funkce

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy + y(1 - x - y) + \\ &+ (1 - x - y)x - 2xy(1 - x - y) = \\ &= x + y - x^2 - y^2 - 3xy + 2x^2y + 2xy^2 \end{aligned}$$

v trojúhelníku T s vrcholy $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Ty budou ležet buď na jeho hranici, nebo v jeho vnitřních bodech, pro které zároveň

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 1 - 2x - 3y + 4xy + 2y^2 = \\ &= (2x + y - 1)(2y - 1) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 - 2y - 3x + 4xy + 2x^2 = \\ &= (2y + x - 1)(2x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že těmito dvěma podmínkám vyhovuje jediný vnitřní bod trojúhelníku T , totiž $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, v němž

$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$. Zbývá prozkoumat hranici trojúhelníku T , tj. vyšetřit průběh funkce

$$f(x, 0) = f(0, x) = f(x, 1 - x) = x(1 - x)$$

v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Tam je ale $0 \leq x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$.

Funkce $f(x, y)$ nabývá v trojúhelníku T maxima $\frac{7}{27}$ v bodě $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ a minima 0 v bodech $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, takže je

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

s rovností vlevo pro trojice $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ a vpravo pro $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Řešení 2. úlohy. Podle binomické věty je

$$\begin{aligned} (a + b)^7 - a^7 - b^7 &= \\ &= 7ab((a^5 + b^5) + 3ab(a^3 + b^3) + 5a^2b^2(a + b)) = \\ &= 7ab(a + b)(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) = \\ &= 7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Vyhovují-li čísla a, b podmínkám úlohy, je číslo $a^2 + ab + b^2$ dělitelné číslem $7^3 = 343$. Zkusme např. $a = 1$ a hledejme b tak, aby $b^2 + b + 1$ bylo dělitelné 343. Vyhovuje $b = 18$.

2. řešení. Použijeme rovnost (1). Položme $a = 1$ a hledejme b tak, aby čísla b , $b + 1$ nebyla dělitelná sedmi a aby $b^2 + b + 1$ bylo dělitelné 7^3 . Podle Eulerovy věty platí pro nesoudělná čísla r , s , že $r^{\varphi(s)} - 1$ je dělitelné číslem s , kde $\varphi(s)$ je počet přirozených čísel menších než s a nesoudělných s s . Je-li tedy r číslo, které není dělitelné sedmi, je

$$r^{\varphi(7^3)} - 1 = r^{6 \cdot 7^2} - 1 = (r^{2 \cdot 7^2} - 1)(r^{4 \cdot 7^2} + r^{2 \cdot 7^2} + 1)$$

dělitelné 7^3 , a není-li ani $r^{98} - 1$ dělitelné sedmi, bude $r^{2 \cdot 98} + r^{98} + 1$ dělitelné 7^3 . Dvojice $a = 1$, $b = r^{98}$ tedy vyhovuje podmínkám úlohy, pokud žádné z čísel

$$r, r^{98} - 1, b + 1 = r^{98} + 1$$

není dělitelné sedmi.

Není-li r dělitelné sedmi, dává r^6 podle Fermatovy věty při dělení sedmi zbytek 1. Protože $98 = 6 \cdot 16 + 2$, dávají čísla r^{98} a r^2 při dělení sedmi stejný zbytek, takže stačí najít takové r , aby žádné z čísel r , $r^2 - 1$, $r^2 + 1$ nebylo dělitelné sedmi. Odtud plyne, že dvojice $a = 1$, $b = r^{98}$ vyhovují úloze, právě když r dává při dělení sedmi zbytek 2, 3, 4 nebo 5.

3. řešení. Řešením úlohy jsou právě ty dvojice (a, b) , pro něž $a \not\equiv 0 \pmod{7}$, $b \not\equiv 0 \pmod{7}$, $a + b \not\equiv 0 \pmod{7}$ a

$$a^2 + b^2 + ab \equiv 0 \pmod{7^3}. \quad (2)$$

Vyhovuje-li dvojice (a, b) rovnici (2), vyhovuje jí zřejmě i dvojice (ka, kb) pro libovolné přirozené číslo k . Vyhovuje-li

tedy úloze dvojice (a, b) , vyhovuje podle Eulerovy věty i dvojice $(1, a^{293}b)$. Chceme-li tedy najít všechny dvojice (a, b) vyhovující úloze, stačí najít všechna řešení tvaru $(1, t)$, ostatní pak budou tvaru (k, kt) , kde $k \not\equiv 0 \pmod{7}$.

Řešme tedy rovnici

$$t^2 + t + 1 \equiv 0 \pmod{7^3}. \quad (3)$$

Vyhovuje-li t rovnici (3), vyhovuje jí i $\pmod{7}$ a snadno zjistíme, že $t \equiv 2 \pmod{7}$ nebo $t \equiv 4 \pmod{7}$.

Nechť $t \equiv 2 \pmod{7}$, tj. $t = 7m + 2$. Pak má rovnice

$$(7m + 2)^2 + (7m + 2) + 1 \equiv 0 \pmod{7^2}$$

neboli

$$35m + 7 \equiv 0 \pmod{7^2}$$

neboli

$$5m + 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

řešení $m \equiv 4 \pmod{7}$. Proto vyhovuje-li $t \equiv 2 \pmod{7}$ rovnici (3), je $t \equiv 30 \pmod{7^2}$, tj. $t = 49n + 30$. Platí tedy

$$(49n + 30)^2 + (49n + 30) + 1 \equiv 0 \pmod{7^3},$$

neboli

$$61n + 19 \equiv 0 \pmod{7}$$

a odtud $n \equiv 6 \pmod{7}$. V případě $t \equiv 2 \pmod{7}$ jsme našli jediné řešení rovnice $(3) \ t \equiv 324 \pmod{7^3}$.

V případě $t \equiv 4 \pmod{7}$ najdeme analogicky druhé řešení rovnice $(3) \ t \equiv 18 \pmod{7^3}$.

Řešením úlohy jsou všechny dvojice přirozených čísel

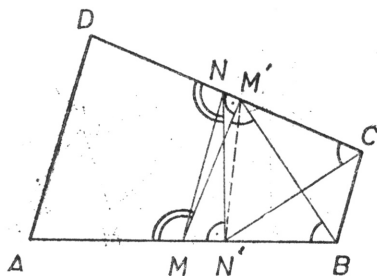
$$(a, b) = (k, 18k) \text{ nebo } (k, 324k) \pmod{7^3},$$

kde $k \not\equiv 0 \pmod{7}$.

Řešení 3. úlohy. Uvažujme dvě kružnice $R = (O, r)$ a $S = (O, s)$, kde $0 < r < s < 1$. Na kružnici R existuje bod X takový, že $S = C(X)$. Je to bod X , pro nějž $\alpha(X) = r(s - r)$ (zřejmě $0 < \alpha(X) < 1$). Nevyskytuje-li se barva bodu X na kružnici S , znamená to, že množina všech barev na kružnici R se liší od množiny všech barev na kružnici S .

Kdyby dokazované tvrzení neplatilo, znamenalo by to, že na každých dvou různých kružnicích se středem O a poloměrem menším než 1 jsou různé množiny barev. Množina všech barev, jimiž jsou obarveny body roviny, by tedy měla nekonečně mnoho podmnožin a nebyla by konečná.

Řešení 4. úlohy. Označme M střed strany AB , M' pravoúhlý průmět bodu M na přímku CD (obr. 30). Protože



Obr. 30

podle předpokladu leží bod M' na kružnici s průměrem AB , je trojúhelník $BM'M$ rovnoramenný, neboli

$$|\sphericalangle MBM'| = |\sphericalangle MM'B| = \frac{1}{2} |\sphericalangle AMM'|.$$

Dále označme N střed strany CD a N' jeho průmět na přímku AB . Protože $|\sphericalangle MM'D| = |\sphericalangle NN'A| = 90^\circ$, je

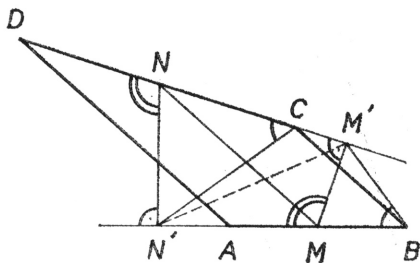
$$|\sphericalangle AMM'| = |\sphericalangle DNN'|$$

a body M, M', N, N' leží na kružnici s průměrem MN .

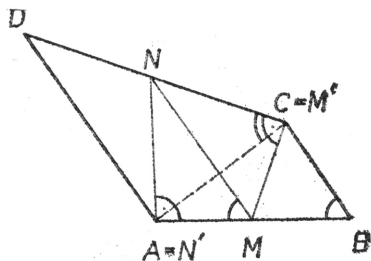
Kružnice nad průměrem CD se dotýká přímky AB , právě když trojúhelník $CN'N$ je rovnoramenný, tj. právě když

$$|\sphericalangle NCN'| = \frac{1}{2} |\sphericalangle DNN'| = \frac{1}{2} |\sphericalangle AMM'| = |\sphericalangle MBM'|.$$

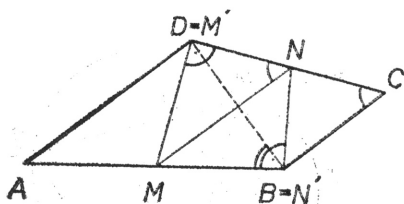
To nastane pro $M' \neq C$ a $N' \neq B$ právě tehdy, leží-li body M', N', B, C na kružnici (obr. 30, 31). Pokud je $M' = C$ (obr. 32) nebo $N' = B$ (obr. 33), je zřejmě $|\sphericalangle NCN'| = |\sphericalangle MBM'|$, právě když $MN \parallel BC$, tj. $AD \parallel BC$, takže



Obr. 31



Obr. 32



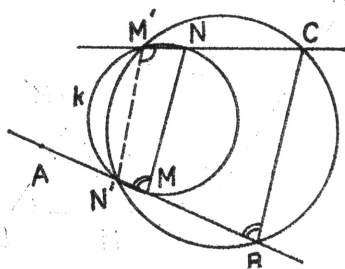
Obr. 33

v tomto speciálním případě jsme s důkazem hotovi (dokonce bude $A = N'$; resp. $D = M'$).

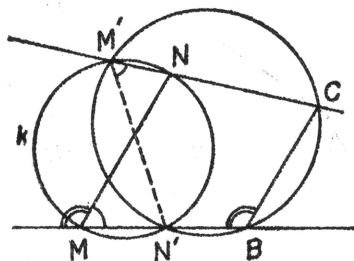
Zbývá ukázat, že čtyři různé body M' , N' , B , C leží na kružnici, právě když

$$|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle ABC|,$$

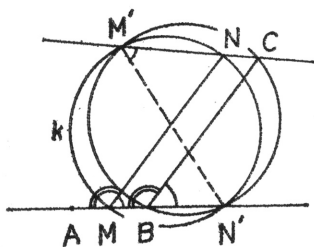
tj. jsou-li protější strany BC a AD čtyřúhelníku $ABCD$ rovnoběžné. To ale plyne okamžitě z věty o obvodových úhlech - jen je třeba uvážit všechny možné polohy bodů M' , N' vůči bodům M , N , B , C (podle toho je buď $|\sphericalangle N'MN| = |\sphericalangle N'M'N|$ nebo $|\sphericalangle N'MN| = 180^\circ - |\sphericalangle N'M'N|$ a po-



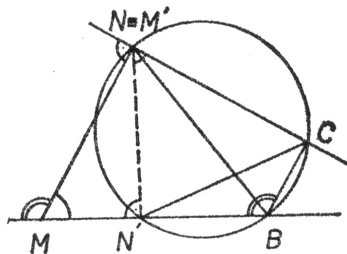
Obr. 34a



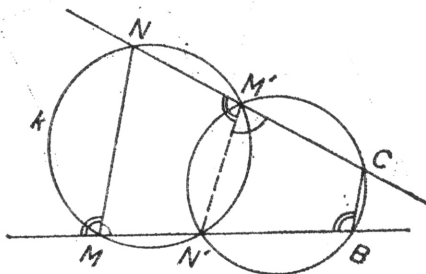
Obr. 34b



Obr. 34c



Obr. 34d

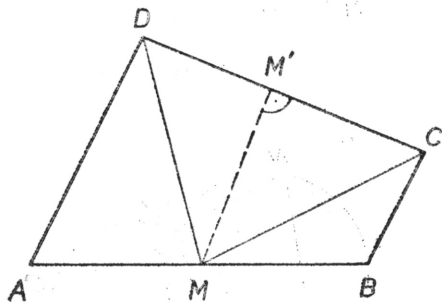


Obr. 34e

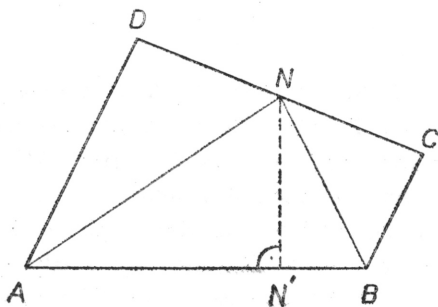
dobně buď $|\sphericalangle N'BC| = 180^\circ - |\sphericalangle N'M'N|$ nebo $|\sphericalangle N'BC| = |\sphericalangle N'M'N|$. Ze všech 16 možností však stačí uvažovat jen případy uvedené na obr. 34a – e (případ $M' = N$, $N' = M$ je triviální). Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Poslední tvrzení zřejmě platí, i když MN je libovolná tětiva kružnice k (obr. 34): Předpokládejme, že body M, N, M', N' leží na kružnici, bod B leží na přímce MN' a bod C na přímce $M'N$, $M' \neq C \neq B \neq N'$. Potom body M', N', B, C leží na kružnici, právě když $MN \parallel BC$.

2. řešení. Označme M střed strany AB , N střed strany CD . Podle předpokladu je $|MM'| = \frac{|AB|}{2}$, obsah $S(ABCD)$ čtyřúhelníku $ABCD$ můžeme tedy vyjádřit jako (obr. 35)



Obr. 35



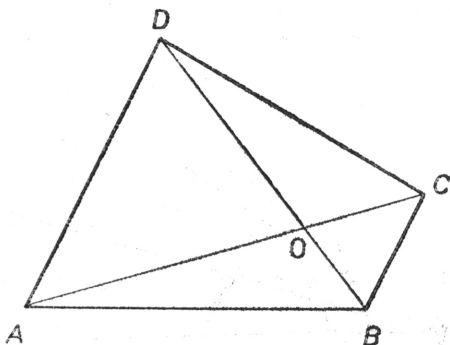
Obr. 36

$$S(ABCD) = S(AMD) + S(MBC) + S(CDM) = \\ = \frac{1}{2} S(ABD) + \frac{1}{2} S(ABC) + \frac{1}{4} |CD| \cdot |AB|.$$

Zároveň však je (obr. 36)

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} S(CDA) + \frac{1}{2} S(CDB) + \frac{1}{2} |AB| \cdot |NN'|.$$

Odtud plyne odečtením (obr. 37)



Obr. 37

$$|AB|(\frac{1}{2}|CD| - |NN'|) = S(CDA) + S(CDB) - S(ABD) - \\ - S(ABC) = S(ABCD) + S(CDO) - S(ABO) - \\ - S(ABCD) - S(ABO) + S(CDO) = \\ = 2(S(CDO) - S(ABO)) = 2(S(ADC) - S(ADB)).$$

Kružnice nad průměrem CD se dotýká přímky AB , právě když $|NN'| = \frac{1}{2}|CD|$, což je podle poslední rovnosti, právě

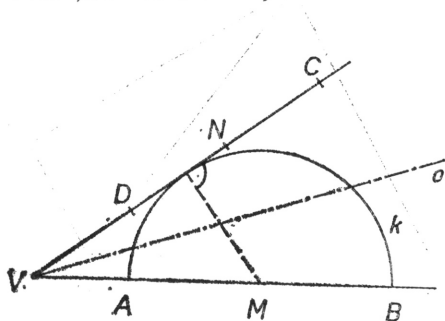
když

$$S(ADC) = S(ADB).$$

To je však ekvivalentní s rovnoběžností přímk AD a BC .

3. řešení. Pokud $AB \parallel CD$, dotýká se zřejmě kružnice nad průměrem CD strany AB , právě když $|CD| = |AB|$, tj. právě když $ABCD$ je rovnoběžník.

Jsou-li přímky AB , CD různoběžné, označme V jejich průsečík, o osu úhlu BVC , M a N středy stran AB a CD (obr. 38). Uvažujme zobrazení Z , které dostaneme složením



Obr. 38

osové souměrnosti podle osy o a stejnolehlosti se středem V

a koeficientem $\frac{|VN|}{|VM|}$. V tomto zobrazení bude $Z(M) = N$.

Protože kružnice k sestavená nad průměrem AB má střed v bodě M a dotýká se přímky CD , bude se kružnice nad průměrem CD se středem $Z(M)$ dotýkat přímky AB , právě když bude obrazem kružnice k v zobrazení Z , tj. právě

když bude $Z(A) = D$ a $Z(B) = C$. Zřejmě však je $AZ(A) \parallel BZ(B)$.

Řešení 5. úlohy. Uvažujme konvexní n -úhelník $A_1A_2\ldots A_n$. S indexy budeme počítat modulo n .

Je-li A_iA_j úhlopříčka, je podle trojúhelníkové nerovnosti

$$|A_iA_j| + |A_{i+1}A_{j+1}| > |A_iA_{i+1}| + |A_jA_{j+1}|.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro všech $\frac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček A_iA_j , dostaneme vlevo každou úhlopříčku dvakrát a vpravo každou stranu $(n-3)$ -krát, tedy

$$2d > (n-3)p.$$

Pro délku úhlopříčky A_iA_j dále platí

$$|A_iA_j| < |A_iA_{i+1}| + \ldots + |A_{j-1}A_j|, \quad (1)$$

$$|A_iA_j| < |A_jA_{j+1}| + \ldots + |A_{i-1}A_i|.$$

Je-li $n = 2k + 1$, vezměme pro každou úhlopříčku A_iA_j tu z nerovností (1), která má na pravé straně menší počet sčítanců, a těchto $\frac{n(n-3)}{2}$ nerovností sečtěme. Dostaneme nerovnost, na jejíž levé straně je d a na pravé straně je součet délek stran, v němž se každá strana vyskytuje tolikrát, pro kolik úhlopříček leží v »menší« ze dvou částí, na které je obvod úhlopříčkou rozdělen. Např. pro stranu A_1A_n vychází z vrcholu A_k jediná taková úhlopříčka, z vrcholu

A_{k-1} dvě, ..., z vrcholu A_2 jich vychází $k - 1$ a z vrcholu A_1 také $k - 1$. Na pravé straně je tedy každá strana započtena tolikrát, kolik je

$$1 + 2 + \dots + (k - 1) + (k - 1),$$

takže

$$d < \frac{(k - 1)(k + 2)}{2} p = \frac{p}{2} \left(\left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n + 1}{2} \right] - 2 \right).$$

Je-li $n = 2k$, vezměme pro každý »průměr« $A_i A_{i+k}$ nerovnost

$$|A_i A_{i+k}| < \frac{p}{2}$$

a pro ostatní úhlopříčky opět tu z nerovností (1), která má na pravé straně menší počet sčítanců. Sečteme-li těchto $\frac{n(n - 3)}{2}$ nerovností, dostaneme

$$\begin{aligned} d &< k \frac{p}{2} + \frac{(k - 2)(k + 1)}{2} p = \frac{k^2 - 2}{2} p = \\ &= \frac{p}{2} \left(\left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n + 1}{2} \right] - 2 \right). \end{aligned}$$

Poznámka. Nerovnosti, které jsme dokázali, nelze zlepšit. Pro mnohoúhelník, jehož dvě sousední strany mají délku 1 a ostatní strany jsou velmi malé, bude

$$p \doteq 2, d \doteq n - 3 \text{ a } \frac{2d}{p} \doteq n - 3.$$

Pro mnohoúhelník, jehož »protilehlé« strany $A_k A_{k+1}$, $A_n A_1$, kde $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, mají délku 1 a ostatní strany jsou velmi malé,

bude

$$p \doteq 2, d \doteq k(n - k) - 2$$

a

$$\frac{2d}{p} \doteq k(n - k) - 2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2.$$

2. řešení. Zvolme přímku q a pravouhlé průměty vrcholů $A_1, A_2, \dots, A_n$ uvažovaného mnohoúhelníku na přímku q označme $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$.

Uvažujme nejprve body $B_1, B_2, \dots, B_n$ ležící v přímce v tomto pořadí a odhadněme součet délek s všech úseček $B_i B_j$ pomocí délky úsečky $B_1 B_n$ a čísla n . Zřejmě

$$s \geq (|B_1 B_2| + |B_2 B_n|) + (|B_1 B_3| + |B_3 B_n|) + \dots + (|B_1 B_{n-1}| + |B_{n-1} B_n|) + |B_1 B_n| = (n-1) |B_1 B_n|.$$

Dále si všimněme, že každá úsečka $B_i B_j$ se skládá z úseček $B_k B_{k+1}$, přičemž každá úsečka $B_k B_{k+1}$ je částí právě $k(n-k)$ úseček $B_i B_j$. Je tedy

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) |B_k B_{k+1}|.$$

Přitom

$$4k(n - k) = n^2 - (n - 2k)^2$$

a součin $k(n - k)$ nabývá tudíž největší hodnoty pro $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$,

takže

$$s \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor |B_k B_{k+1}| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor |B_1 B_n|.$$

Odvodili jsme nerovnosti

$$(n - 1) |B_1 B_n| \leq s \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor |B_1 B_n|. \quad (2)$$

Jsou-li mezi body $B_1, B_2, \dots, B_n$ aspoň čtyři různé, jsou přitom na obou stranách ostré nerovnosti.

Průměty $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ nemusejí sice ležet na přímce q v tomto pořadí, vzhledem ke konvexitě mnohoúhelníku $A_1 A_2 \dots A_n$ je však součet

$$|A'_1 A'_2| + |A'_2 A'_3| + \dots + |A'_{n-1} A'_n| + |A'_n A'_1|$$

roven dvojnásobku nejdelší z úseček $A'_i A'_j$. Je tedy podle (2)

$$\begin{aligned} (n - 1) (|A'_1 A'_2| + |A'_2 A'_3| + \dots + |A'_n A'_1|) &\leq \\ &\leq 2 \sum_{i < j} |A'_i A'_j| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor (|A'_1 A'_2| + |A'_2 A'_3| + \\ &\quad + \dots + |A'_n A'_1|), \end{aligned}$$

přičemž $|A'_i A'_j| = |A_i A_j| \cos \alpha_{ij}$, označíme-li α_{ij} úhel sevřený přímkami $A_i A_j$, $q \left(0 \leq \alpha_{ij} \leq \frac{\pi}{2} \right)$.

Otáčíme nyní zvolenou přímku q kolem nějakého bodu O . Pro $0 \leq x < \pi$ tak dostaneme přímku $q(x)$, která bude s přímkou $A_i A_j$ svírat úhel $\alpha_{ij}(x) \left(0 \leq \alpha_{ij}(x) \leq \frac{\pi}{2} \right)$, bude tedy pro každé $x \in \langle 0, \pi \rangle$ platit

$$\begin{aligned} & (n-1)(|A_1 A_2| \cos \alpha_{12}(x) + |A_2 A_3| \cos \alpha_{23}(x) + \dots + \\ & \quad + |A_n A_1| \cos \alpha_{n1}(x)) \leq 2 \sum_{i < j} |A_i A_j| \cos \alpha_{ij}(x) \leq \\ & \leq \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n+1}{2} \right] (|A_1 A_2| \cos \alpha_{12}(x) + |A_2 A_3| \cos \alpha_{23}(x) + \\ & \quad + \dots + |A_n A_1| \cos \alpha_{n1}(x)). \end{aligned}$$

Přitom je pro $1 \leq i < j \leq n$

$$\int_0^{\pi} \cos \alpha_{ij}(x) dx = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2.$$

Zintegrujeme-li tedy poslední nerovnost na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, dostaneme

$$\begin{aligned} 2(n-1)(|A_1 A_2| + |A_2 A_3| + \dots + |A_n A_1|) & \leq 4 \sum_{i < j} |A_i A_j| \leq \\ & \leq 2 \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n+1}{2} \right] (|A_1 A_2| + |A_2 A_3| + \dots + |A_n A_1|), \end{aligned}$$

neboli

$$(n-1)p \leq 2(d+p) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor p.$$

Protože $n > 3$ a jen pro konečně mnoho $x \in \langle 0, \pi \rangle$ se stane, že některé průměty splynou, budou na obou stranách dokonce ostré nerovnosti, tj.

$$(n-1)p < 2(d+p) < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor p,$$

čili

$$(n-3)p < 2d < \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2 \right) p.$$

Řešení 6. úlohy. Nejprve dokážeme, že $k > m$, což plyne z nerovnosti

$$\begin{aligned} a((a+d) - (b+c)) &= a(a-c) + a(d-b) = \\ &= a(a-c) + bc - ab = (a-b)(a-c) > 0. \end{aligned}$$

Z rovnosti

$$a(2^k - a) = b(2^m - b)$$

dostaneme

$$2^m \mid b^2 - a^2 = (b+a)(b-a). \quad (1)$$

Čísla $b + a$, $b - a$ nejsou obě dělitelná čtyřmi, protože jejich součet $2b$ není dělitelný čtyřmi. Jedno z čísel $b + a$, $b - a$ je tedy podle (1) dělitelné číslem 2^{m-1} - označme je x . Je však

$$0 < x \leq b + a < b + c = 2^m,$$

a tedy

$$x = 2^{m-1}. \quad (2)$$

Číslo

$$b + c - x = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1} \quad (3)$$

je jedno z čísel $c + a$, $c - a$. Protože a , b , c jsou lichá čísla, plyne z (2), že a , b jsou nesoudělná čísla, a z (3), že a , c jsou nesoudělná čísla. Z podmínky $ad = bc$ vidíme, že $a|bc$. Musí tedy být $a = 1$.

Navíc x , tj. jedno z čísel $b + 1$, $b - 1$ je rovno 2^{m-1} a jedno z čísel $c + 1$, $c - 1$ je rovno 2^{m-1} . Protože $b < c$, je $b = 2^{m-1} - 1$, $c = 2^{m-1} + 1$ a odtud $d = 2^{2(m-1)} - 1$, kde $m > 2$ je přirozené číslo.

2. řešení. Nejprve ukážeme, že $k > m$:

$$\begin{aligned} 2^{2k} &= (d + a)^2 = (d - a)^2 + 4ad > (c - b)^2 + 4bc = \\ &= (b + c)^2 = 2^{2m}. \end{aligned}$$

Uvažujme přirozená čísla x , y , pro která je

$$\begin{aligned} a &= 2^{k-1} - x, \quad b = 2^{m-1} - y, \quad c = 2^{m-1} + y, \\ d &= 2^{k-1} + x. \end{aligned} \quad (4)$$

Platí

$$2^{2k-2} - x^2 = ad = bc = 2^{2m-2} - y^2, \quad (5)$$

takže

$$x^2 - y^2 = 2^{2k-2} - 2^{2m-2},$$

neboli

$$(x - y)(x + y) = 2^{2m-2}(2^{2(k-m)} - 1). \quad (6)$$

Čísla x, y jsou lichá, čísla $x + y, x - y$ sudá a přitom nemohou být obě zároveň dělitelná čtyřmi, protože

$$x + y + x - y = 2x. \quad (7)$$

Je tedy $\{x + y, x - y\} = \{2r, 2^{2m-3}s\}$ pro nějaká lichá čísla r a s . Odtud plyne podle (7) a (6)

$$x = 2^{2m-4}s + r, \quad rs = 2^{2(k-m)} - 1,$$

takže podle (4)

$$a = 2^{k-1} - x = 2^{k-1} - 2^{2(m-2)}s - r$$

a dále

$$\begin{aligned} 1 &\leq sa = 2^{k-1}s - 2^{2(m-2)}s^2 - 2^{2(k-m)} + 1 = \\ &= 1 - (2^{m-2}s - 2^{k-m})^2 \leq 1, \end{aligned}$$

tedy

$$a = s = 1.$$

Navíc je $m - 2 = k - m$, tj. $k = 2m - 2$ a ze (4) dostaneme

$$x = 2^{2m-3} - 1, d = a + 2x = 2^{2m-2} - 1 = bc = 2^{2m-2} - y^2,$$

takže

$$b = 2^{m-1} - 1, c = 2^{m-1} + 1.$$

Podmínkám úlohy tedy vyhovují právě všechny čtveřice

$$a = 1, b = 2^{m-1} - 1, c = 2^{m-1} + 1, d = 2^{2m-2} - 1,$$

kde $m > 2$ je přirozené číslo.

Dr. František Zítek, CSc.,
dr. Leo Boček, CSc.,
dr. Karel Horák, CSc.,
prof. dr. Beloslav Riečan, DrSc.,
doc. dr. Karol Križalkovič, CSc.

TŘICÁTÝ TŘETÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku navrhl Jaromír Jarkovský
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
v Praze roku 1986
jako svou publikaci č. 5-42-14/33
Edice Pomocné knihy pro žáky
Odpovědná redaktorka dr. Ilona Fořtová
Výtvarný redaktor Václav Hanuš
Technická redaktorka Eliška Pomajzlová
Z nové sazby písmem Plantin
vytiskly Moravské tiskařské závody, n. p., Olomouc
Formát papíru 70 cm × 100 cm
Počet stran 168
AA 6,28 - VA 6,72 - Náklad 3 550 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/2
1. vydání
Cena brožovaného výtisku 8,50 Kčs
505/21,825

14-501-86

Kčs 8,50

**matematická
olympiáda**



SPN 5 - 42 - 14/33

14 - 501 - 86
03/2 Kčs 8,50