

34. ročník matematické olympiády

František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Milan Koman (editor); Karol Križalkovič (editor): 34. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1984/85. 26. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404790>

Terms of use:

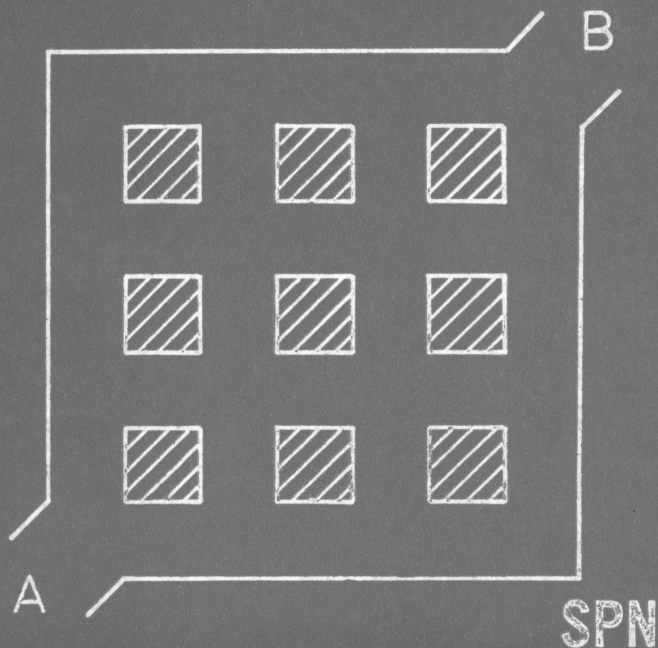
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

34. ročník matematické olympiády



TŘICÁTÝ ČTVRTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1984/85

26. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
RNDr. František Zítek, CSc., RNDr. Leo Boček, CSc.,
RNDr. Karel Horák, CSc., RNDr. Milan Koman, CSc.,
doc. RNDr. Karol Križalkovič, CSc.

Lektorovali RNDr. Jitka Kučerová, RNDr. Libor Jelínek,
RNDr. Václav Šůla

© RNDr. František Zítek, CSc., za kolektiv, 1987

Obsah

Předmluva.	5
O průběhu 34. ročníku matematické olympiády. . . .	8
Kategorie Z7	41
Úlohy I. kola	41
Úlohy II. kola	54
Kategorie Z8	62
Úlohy I. kola	62
Úlohy II. kola	73
Úlohy III. kola v ČSR	75
Úlohy III. kola v SSR	78
Kategorie C	83
Úlohy domácí části I. kola	83
Úlohy školní části I. kola	89
Úlohy II. kola	93
Kategorie B	97
Úlohy domácí části I. kola	97
Úlohy školní části I. kola	104
Úlohy II. kola	106
Kategorie A	110
Úlohy domácí části I. kola	110
Úlohy školní části I. kola	124
Úlohy II. kola	127
Úlohy III. kola	134
Korespondenční seminář ÚV MO	147
26. ročník mezinárodní matematické olympiády	157
Hodnocení 34. ročníku MO	179

Předmluva

*Milí mladí přátelé a spolupracovníci
v matematické olympiádě!*

Uzavřel se 34. ročník matematické olympiády (MO) a jako obvykle Vám zde předkládáme zevrubnou zprávu o jeho organizaci, průběhu a výsledcích.

Jak se přesvědčíte v dalším textu, nedošlo v tomto roce k žádným podstatným změnám v organizaci středoškolských kategorií A, B a C - zde se pokračovalo podle osvědčeného programu.

Jiná je situace na základních školách. Tam proniká MO postupně do nižších ročníků, avšak s odlišnou rychlostí v SSR a v ČSR. Na Slovensku se totiž pořádá MO - pod názvem Malá matematická olympiáda - již po několik let experimentálně pro žáky pátých až sedmých tříd a začíná se již i se čtvrtými třídami. Zkušeností z této soutěže pro mladší žáky se snažíme využít při rozšiřování celostátní MO. Zatím se podařilo zavést MO na základních školách vedle dosavadní kategorie Z jen pro sedmé třídy. Máme tedy dvě kategorie, nyní označované Z7 a Z8, které probíhají v celé ČSSR s jednotnými úlohami a stejnou organizací ve

všech krajích; zprávu o nich najdete také v této brožuře. Pro nižší ročníky se však v ČSR zatím MO nepořádá ani experimentálně a lze jen doufat, že se časem podaří dořešit organizační otázky tak jako v SSR. Na některých školách v ČSR se řeší úlohy ze SSR, příp. školy nebo okresy pořádají zvláštní soutěže pro žáky nižších ročníků.

K organizaci MO dnes již neodmyslitelně patří i četné pomocné akce, jako různá školení a soustředění řešitelů, korespondenční semináře atd. O některých z nich, zejména o celostátním korespondenčním semináři, který je určen především k prohloubení přípravy těch žáků, kteří se nemohou osobně účastnit seminářů pořádaných ve větších centrech, najdete rovněž zprávu v této brožurce. Úlohy z těchto seminářů Vám mohou - spolu se soutěžními úlohami MO - poskytnout vhodnou příležitost k procvičování.

Vyvrcholením každého ročníku MO se již pravidelně stává účast československého družstva na mezinárodní matematické olympiádě (MMO). V červenci 1985 proběhla 26. MMO, hostitelskou zemí bylo tentokrát Finsko, které tak oslavilo dvacáté výročí své první účasti na MMO. Stručná zpráva o průběhu 26. MMO je připojena na konci této knížky. Výsledky MMO jsou v mnohém poučné. Je vidět, že se přes stále rostoucí počet zúčastněných zemí daří udržovat poměrně vysoký standard náročnosti soutěžních úloh MMO, zřetelně vyšší než je zvykem v naší domácí MO. S tímto faktorem, který - ač ne jediný - bezpochyby také přispěl k nepřilíš výraznému úspěchu naší reprezentace na 26. MMO, se budeme muset v příštích letech lépe vyrovnat.

Dlouholeté zkušenosti s MO prokazují, že tato soutěž nezanedbatelnou měrou přispívá k podpoře zájmu o mate-

matiku mezi naši mládeží, pomáhá vyhledávat talentované žáky a rozvíjet jejich schopnosti a znalosti. Těmto cílům chce MO ještě lépe sloužit i v příštích letech. Doufáme, že nám při tom pomůžete - starší aktivní spoluprací, mladší hojnou účastí v soutěži - v této činnosti Vám přejeme mnoho úspěchů.

Ústřední výbor matematické olympiády

O průběhu 34. ročníku matematické olympiády

Soutěž »Matematická olympiáda« pořádají ministerstva školství ČSR a SSR ve spolupráci s Jednotou československých matematiků a fyziků, Jednotou slovenských matematiků a fyziků, Matematickým ústavem ČSAV a Socialistickým svazem mládeže. Soutěž řídí ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím krajských a okresních výborů matematické olympiády (KV MO, OV MO). Členy ÚV MO jmenují ministerstva školství, členy KV MO a OV MO příslušné odbory školství KNV a ONV. Od 31. ročníku MO nedošlo v organizaci MO k žádným změnám. V kategorii A soutěží žáci III. a IV. ročníků středních škol, v kategorii B žáci II. ročníků, v kategorii C žáci I. ročníků. Kategorie Z je určena pro žáky nejvyšších tříd základních škol a dělí se na část Z8, v níž soutěží žáci osmých tříd, a na část Z7 určenou pro žáky sedmých tříd. V kategoriích A, B, C má první kolo dvě části, domácí (studijní) a školní (klauzurní). V II. kole soutěží nejúspěšnější účastníci I. kola z celého kraje. V kategorii A se koná ještě kolo III., celostátní. V kategorii Z má I. kolo jen jednu část, II. kolo je okresní. Pro žáky osmých tříd se koná ještě krajské, III. kolo.

Ústřední výbor MO pracoval během 34. ročníku MO ve

stejném složení jako v předcházejícím roce, předsedou byl RNDr. František Zítek, CSc., z MÚ ČSAV v Praze, místopředsedy profesor RNDr. Miroslav Fiedler, člen korespondent ČSAV, z téhož ústavu, a profesor RNDr. Beloslav Riečan, DrSc., z MFF UK v Bratislavě. Ministerstva školství zastupovali RNDr. Václav Šůla a RNDr. Julia Lukátšová. Funkce tajemníků ÚV MO zastávali RNDr. Leo Boček, CSc., z MFF UK Praha a RNDr. Karel Horák, CSc., z MÚ ČSAV Praha.

V průběhu 34. ročníku MO se konala dvě zasedání všech členů ÚV MO, první 10. a 11. prosince 1984 v Praze, druhé při celostátním kole MO ve dnech 26. a 27. dubna 1985 v Banské Bystrici. Hlavním bodem jednání prvního zasedání bylo zvýšení péče o žáky talentované v matematice a rozšíření MO do nižších tříd základní školy. Na dubnovém zasedání se projednávaly možnosti zavedení zvláštní kategorie MO zaměřené na programování. Kromě toho předsedové KV MO hodnotili vhodnost výběru úloh MO a průběh MO v jednotlivých krajích. Pracovní předsednictvo ÚV MO se scházelo jednou měsíčně, zabývalo se především výběrem úloh pro všechna kola soutěže.

Slavnostní zahájení celostátního kola MO se konalo v sále gymnázia v Tajovského ulici v Banské Bystrici. Soutěžící i členy ÚV MO přivítal PaedDr. Ján Čakloš, krajský školní inspektor. Místopředseda ÚV MO profesor RNDr. B. Riečan, DrSc., připomněl ve svém projevu události národně-osvobozenického boje před 40 lety. Rovněž tajemník OV KSS s. O. Petro vzpomněl slavných dnů Slovenského národního povstání. Vyzdvihl péči, kterou naše společnost věnuje mládeži, rozvoji talentů. Velkou zásluhu v této oblasti vý-

chovy mají pedagogové na školách všech stupňů. Za ÚV SSM se slavnostního zahájení celostátního kola zúčastnila s. Květa Hruběšová, kulturní program předvedl folklórní soubor Spievanky. O velmi dobrou organizaci celostátního kola MO se zasloužili hlavně PaedDr. Ján Čakloš, dále učitelé Pedagogické fakulty v Banské Bystrici prof. RNDr. P. Kršňák, CSc., doc. RNDr. P. Hanzel, doc. RNDr. A. Haviar, CSc., RNDr. L. Beracková, RNDr. B. Sivák, CSc., a RNDr. P. Klenovčan, predseda KV MO Stredoslovenského kraja, dále ředitel gymnázia Fr. Adamča a s. Vlasta Micháľková z Ústředního domu pionýrů a mládeže KG v Bratislavě.

Ve všech krajích se i v školním roce 1984/85 pořádaly různé akce pro rozvoj a vyhledávání žáků talentovaných v matematice. Podle požadavku ministerstva školství ČSR a podle hlášení krajských výborů MO uvádíme jejich přehled:

Praha

Pracovní přednášky pro řešitele kategorie Z - celkem 87 přednášek s průměrnou účastí 25 žáků,

pracovní přednášky pro řešitele kategorie A - celkem 15 přednášek, průměrná účast 13 žáků,

pracovní přednášky pro řešitele kategorie B - 9 přednášek, průměrně 14 žáků,

pracovní přednášky pro řešitele kategorie C - celkem 17 přednášek s průměrnou účastí 18 žáků.

Korespondenční seminář, pět sérií úloh řešilo 65 žáků.

Soustředění pro úspěšné řešitele úloh korespondenčního semináře v Jevanech bylo třídní pro 25 účastníků.

Soustředění pro úspěšné řešitele úloh MO kategorie B, C se konalo též v Jevanech, trvalo 5 dní, 40 účastníků.

Středočeský kraj

Krajské soustředění pro 36 nejlepších řešitelů MO a FO žáků základních škol se konalo jeden týden v červnu v Dubé u České Lípy.

Krajské soustředění pro 39 nejlepších řešitelů MO a FO kategorie A, B, C trvalo 10 dní, konalo se v září také v Dubé u České Lípy.

Instruktaž pro referenty MO na středních školách byla jednodenní, stejně tak instruktaž pro předsedy OV MO.

Přednášky pro řešitele MO kategorie A, B, C se konaly na střediskových středních školách, každé kategorii byly věnovány 4–6 hodin.

Přednášky pro řešitele MO kategorie Z se konaly jen na některých základních školách (2–6 hodin).

Jihočeský kraj

Pod patronací JČSMF se uskutečnilo 39 přednášek pro řešitele kategorií A, B, C.

Korespondenční seminář byl tříkolový, zúčastnili se ho 142 žáci, nejlepších 8 účastníků bylo pozváno na soustředění. Letní škola MO a FO byla uspořádána pro nejlepší řešitele MO a FO, konala se jeden týden v červnu na Zadově pro 83 žáků.

Západočeský kraj

Přednášky k soutěžním úlohám každé kategorie ve třech střediscích, pro učitele základních škol v pěti střediscích.

Korespondenční seminář se konal ve dvou kategoriích ve třech kolech. V kategorii pro 3. a 4. ročníky středních škol bylo 113 účastníků, žáků 1. a 2. ročníků se zúčastnilo 310.

Týdenní soustředění pro úspěšné řešitele MO, FO a korespondenčního semináře se pro 40 žáků konalo v červnu v Karlových Varech.

Severočeský kraj

Letní soustředění v Teplicích (společně s FO) bylo týdenní, zúčastnilo se ho 57 žáků.

Oblastní semináře se konaly v 7 střediscích, celkem 35 seminářů, průměrná účast 20 středoškoláků.

Pro řešitele MO kategorie Z pořádaly různé akce OV MO.

Východočeský kraj

Soustředění úspěšných řešitelů MO a FO pro žáky 1. ročníků středních škol se konalo v Jevíčku, trvalo 8 dní, 32 účastníků.

Soustředění před II. kolem MO

kategorie A — 35 účastníků kategorie B — 35 účastníků.

Doba trvání 2 dny.

Korespondenční seminář pro kategorie A a B, vždy dvě série úloh, 11 a 13 účastníků.

Jihomoravský kraj

Soustředění úspěšných řešitelů MO a FO v Jedovnicích pro 60 účastníků, doba trvání 6 dní.

Semináře pro řešitele —

kategorie A - v Brně 20 účastníků, v Jihlavě 11,

kategorie B - v Brně 15 účastníků, v Jihlavě 17,

kategorie C - v Brně 55 účastníků, v Jihlavě 15.

Severomoravský kraj

Instruktaž předsedů OV MO - jednodenní, 10 účastníků.
Instruktáže referentů MO na středních školách - jednodenní, zúčastnilo se 18 středoškolských profesorů.

Přednášky pro řešitele kategorie A, B, C - formou sobotních besed v Ostravě a v Olomouci v měsících říjen až únor, průměrná účast 15 žáků v kategorii A, 20 v kategorii B a 35 v kategorii C.

Krajský korespondenční seminář pro 8 řešitelů.

Krajské soustředění MO a FO se konalo pro 42 žáků ve dvou desetidenních běžích v Bruntále.

Soustředění žáků tříd gymnázií se zaměřením na matematiku, 45 účastníků, trvalo 12 dní.

Celostátní seminář o práci s talentovanými žáky (ve spolupráci s VÚP Praha a MŠ ČSR, Bílovec, 70 účastníků, 3 dny).

Bratislava

Instruktaže pro učitele základních škol, účast 60 učitelů.

Instruktaže pro profesory středních škol, 4 instruktáží se zúčastnilo 60 učitelů.

Korespondenční seminář pro středoškoláky, 120 řešitelů - nejlepší účastníci byli pozváni na dvě týdenní soustředění, každé pro 35 řešitelů.

Korespondenční seminář pro žáky základních škol, 80 řešitelů. Soustředění formou pionýrského tábora (2 týdny).

Týdenní soustředění pro žáky základních škol, úspěšné řešitele MO a FO, celkem 30 účastníků.

Týdenní soustředění pro středoškoláky (kategorie B, C), 30 účastníků.

Individuální vedení zvláště nadaných řešitelů MO učiteli MFF UK Bratislava a SVŠT.

Západoslovenský kraj

Inštruktáže referentů MO na středních školách ve všech okresech kraje.

Inštruktáže pro referenty MO na základních školách.

Krajské soustředění pro 46 nejlepších řešitelů MO kategorie Z, týdenní.

Korespondenční seminář pro žáky středních škol, 5 sérií úloh po 5 úlohách, řešil 61 žák, 16 nejúspěšnějších se zúčastnilo čtyřdenního soustředění v Jelenci.

Středoslovenský kraj

Soustředění pro řešitele kategorie A a krajského korespondenčního semináře bylo pětidenní, 50 účastníků.

Soustředění řešitelů MO kategorie B, C pro 30 žáků, čtyřdenní.

Dvoudenní seminář před II. kolem kategorie A pro 15 středoškoláků.

Týdenní soustředění řešitelů MO kategorie A, B, C spojené s vyhodnocením 34. a přípravou na 35. ročník MO.

Inštruktáž pro referenty MO na středních školách, přítomno 58 učitelů.

Krajský korespondenční seminář, kategorie A 27 řešitelů, kategorie B, C 98 řešitelů, po 5 sériích úloh.

Krajský korespondenční seminář pro kategorii Z, 83 řešitelé, 7 sérií úloh.

Krajský tábor mladých matematiků pro 35 žáků, 10 dní.

Inštruktáže pro referenty MO na základních školách se

konaly ve všech okresech kraje, průměrně se zúčastnilo 25 učitelů.

Východoslovenský kraj

Instruktaže pro učitele a vedoucí kroužků MO kategorie A, B, C.

Kroužky MO pro řešitele MO kategorie A, B košických a blízkých škol.

Klub mladých matematiků při Krajském domě pionýrů a mládeže.

Korespondenční seminář, 8 sérií úloh, 110 řešitelů.

Soustředění úspěšných řešitelů úloh MO a korespondenčního semináře, celkem tři soustředění, každé pětidenní pro 35 účastníků.

ÚV MO zajišťoval po odborné stránce tři celostátní soustředění. Pro žáky nematurujících ročníků se konalo společné soustředění pro matematickou a fyzikální olympiádu v Jevíčku. Další dvě soustředění byla zaměřena na přípravu československých žáků na 26. mezinárodní matematickou olympiádu, první se konalo v Jevanech, druhé v Praze. Dále pořádal ÚV MO celostátní korespondenční seminář, s nímž se podrobněji seznámíte na dalších stránkách.

V edici Škola mladých matematiků vydává ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta brožurky vhodné pro mladé zájemce o matematiku. V průběhu 34. ročníku MO vyšel již 56. svazek zmíněné edice, svazek J. Sedláček: Faktoriály a kombinační čísla. Svazky edice ŠMM jsou dobrou pomůckou pro řešitele úloh MO a pro práci v matematických kroužcích.

TABULKA I

Počty středních škol zapojených do 34. ročníku MO

Kraj	Celkem	Gymnázia z toho zapojeno			Ostatní střední školy zapojeno		
		v kategoriích			v kategoriích		
		A	B	C	A	B	C
Praha	22	10	13	16	2	0	4
Středočeský	23	21	21	22	2	3	10
Jihočeský	18	11	11	11	5	2	2
Západočeský	15	15	15	15	0	3	6
Severočeský	21	20	18	21	6	7	12
Východočeský	35	14	21	27	4	5	4
Jihomoravský	38	31	32	35	1	2	7
Severomoravský	39	23	35	35	1	3	7
Bratislava	11	9	10	10	0	2	2
Západoslovenský	38	25	33	35	7	12	30
Středoslovenský	38	33	34	34	13	25	52
Východoslovenský	39	23	28	36	3	15	40
ČSR	211	145	166	182	21	25	52
SSR	126	90	105	115	23	54	124
ČSSR	337	235	271	297	44	79	176
							192

TABULKA 2

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 34. ročníku MO

Kraj	Kategorie										Celkem	
	A		B		C		U		S			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	91	73	107	66	205		99		403		238	
Středočeský	119	56	103	26	266		51		488		133	
Jihočeský	80	60	62	45	83		52		225		157	
Západočeský	117	79	96	68	291		188		504		335	
Severočeský	109	65	132	97	388		295		629		457	
Východočeský	89	58	108	78	132		92		329		228	
Jihomoravský	180	108	206	126	417		220		803		454	
Severomoravský	124	59	199	85	478		100		801		244	
Bratislava	153	125	95	78	158		125		406		328	
Západoslovenský	194	158	212	169	335		278		741		605	
Středoslovenský	130	92	267	102	403		206		800		400	
Východoslovenský	249	106	396	143	1 024		303		1 669		552	
ČSR	909	558	1 013	591	2 260		1 097		4 182		2 246	
SSR	726	481	970	492	1 920		912		3 616		1 885	
ČSSR	1 635	1 039	1 983	1 083	4 180		2 009		7 798		4 131	

S — počet všech soutěžících
U — počet úspěšných řešitelů

TABULKA 3

Počty žáků středních škol soutěžících ve II. kole 34. ročníku MO

Kraj	Kategorie										Celkem	
	A		B		C							
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	72	31	65	40	94	46	231				117	
Středočeský	54	2	25	7	49	13	128				22	
Jihočeský	53	3	39	19	47	14	139				36	
Západočeský	46	8	38	18	66	15	150				41	
Severočeský	37	4	54	14	90	21	181				39	
Východočeský	54	8	75	36	85	24	214				68	
Jihomoravský	88	11	118	58	209	61	415				130	
Severomoravský	59	31	85	41	100	49	244				121	
Bratislava	121	37	74	32	119	68	314				137	
Západoslovenský	141	22	151	45	256	65	548				132	
Středoslovenský	85	12	81	28	117	16	283				56	
Východoslovenský	89	15	133	30	237	34	459				79	
ČSR	463	98	499	233	740	243	1 702				574	
SSR	436	86	439	135	729	183	1 604				404	
ČSSR	899	184	938	368	1 469	426	3 306				978	

S — počet všech soutěžících
 U — počet úspěšných řešitelů

TABULKA 4

Počty účastníků III. kola 34. ročníku MO - kategorie A

Kraj	Počet všech účastníků	Počet úspěšných řešitelů	Z toho vítězů
Praha	14	9	7
Středočeský	1	0	0
Jihočeský	1	0	0
Západočeský	3	2	0
Severočeský	2	2	1
Východočeský	2	1	1
Jihomoravský	5	2	1
Severomoravský	12	9	4
Bratislava	18	11	4
Západoslovenský	7	0	0
Středoslovenský	5	0	0
Východoslovenský	9	5	0
ČSR	40	25	14
SSR	39	16	4
ČSSR	79	41	18

TABULKA 5

Počty základních škol, které se zúčastnily 34. ročníku MO

Kraj	Celkový počet	Zúčastnilo se					
		I. kola v kategoriích		II. kola		III. kola	
		Z8	Z7	Z8	Z7	Z8	
Praha	208	174	162	140	119	27	
Středočeský	274	215	174	173	127	29	
Jihočeský	184	160	74	135	69	35	
Západočeský	215	177	76	144	68	30	
Severočeský	292	220	85	146	65	27	
Východočeský	319	228	133	192	116	29	
Jihomoravský	459	350	331	298	125	42	
Severomoravský	471	404	175	316	120	49	
Bratislava	75	79	72	79	72	17	
Západoslovenský	479	424	434	357	385	40	
Středoslovenský	414	295	302	252	282	29	
Východoslovenský	392	339	352	300	331	45	
ČSR	2 422	1 928	1 210	1 544	809	268	
SSR	1 360	1 137	1 160	988	1 070	131	
ČSSR	3 782	3 065	2 370	2 532	1 879	399	

TABULKA 6

Počty žáků základních škol soutěžících ve 34. ročníku MO - kategorie Z8

Kraj	I. kolo		II. kolo		III. kolo	
	S	U	S	U	S	U
Praha	1 368	790	537	223	32	32
Středočeský	1 451	759	550	237	36	31
Jihočeský	1 184	542	373	128	44	34
Západočeský	1 632	671	351	113	47	42
Severočeský	1 636	584	396	163	33	27
Východočeský	1 337	650	529	221	42	37
Jihomoravský	2 299	1 338	871	355	44	36
Severomoravský	3 375	1 353	838	320	69	62
Bratislava	924	535	528	153	39	32
Západoslovenský	2 322	1 140	858	333	45	36
Středoslovenský	1 555	718	604	167	34	14
Východoslovenský	2 718	1 235	757	366	56	26
ČSR	14 282	6 687	4 445	1 760	347	301
SSR	7 519	3 628	2 747	1 019	174	108
ČSSR	21 801	10 315	7 192	2 779	521	409

S — počet všech soutěžících
U — počet úspěšných řešitelů

TABULKA 7

Počty žáků základních škol soutěžících ve 34. ročníku MO - kategorie Z7

Kraj	I. kolo		II. kolo	
	S	U	S	U
Praha	1 326	749	477	252
Středočeský	892	499	369	142
Jihočeský	687	283	184	41
Západočeský	622	311	201	103
Severočeský	1 705	735	507	244
Východočeský	1 006	469	335	124
Jihomoravský	2 509	1 595	325	163
Severomoravský	862	452	400	156
Bratislava	683	341	260	65
Západoslovenský	3 366	1 909	761	151
Středoslovenský	1 604	889	731	114
Východoslovenský	3 617	1 906	612	169
ČSR	9 609	5 093	2 798	1 225
SSR	9 270	5 045	2 364	499
ČSSR	18 879	10 138	5 162	1 724

S — počet všech soutěžících

U — počet úspěšných řešitelů

SEZNAM VÍTĚZŮ A ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ CELOSTÁTNÍHO KOLA 34. ROČNÍKU MO

Vítězové

1. *Adam Obdržálek*, 3., M, G W. Piecka, Praha
2. *Radek Adamec*, 3., G Kroměříž
3. *Vladan Majerech*, 2., MF, G Pardubice
4. *Pavol Gvozdjak*, 1., M, G A. Markuša, Bratislava
5. *Milan Horák*, 3., M, G W. Piecka, Praha
6. *Marcel Polakovič*, 2., M, G A. Markuša, Bratislava
7. *Vladimír Kordula*, 3., M, G M. Koperníka, Bílovec
8. — 9. *Petr Hájek*, 3., M, G W. Piecka, Praha
Marián Šumšala, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
10. *Martin Heisler*, 3., M, G W. Piecka, Praha
11. — 15. *Petr Adámek*, 4., M, G M. Koperníka, Bílovec
Martin Knor, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
Ľarmila Ranošová, 4., M, G M. Koperníka, Bílovec
Jan Spousta, 4., SPŠE Praha, Ječná
Petr Šleich, 3., G Děčín
16. *Patrik Španěl*, 4., M, G W. Piecka, Praha
17. — 18. *Robert Babilon*, 2., M, G M. Koperníka, Bílovec
David Bednárek, 3., M, G W. Piecka, Praha

Další úspěšní řešitelé

- 19.—23. *Pavel Krtouš*, 4., MF, G Liberec
Richard Seda, 3., G Blansko
Ľán Šefčík, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
Tomáš Trégl, 2., M, G W. Piecka, Praha
Roman Tůma, 4., M, G W. Piecka, Praha
- 24.—26. *Martin Blatný*, 3., M, G M. Koperníka, Bílovec
Vladimír Kliment, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
Róbert Trávník, 3., MF, G J. Hronca, Bratislava
- 27.—28. *Anton Belan*, 2., M, G A. Markuša, Bratislava
Antonín Franek, 3., M, G M. Koperníka, Bílovec
29. *Pavel Calábek*, 2., M, G M. Koperníka, Bílovec
- 30.—32. *Igor Bilák*, 3., G Prešov, Konštantínova
Ľán Lúžny, 4., SPŠE Prešov, Plzenská
Roman Soták, 2., M, G Košice, Šmeralova
33. *Milada Slaninová*, 4., M, G M. Koperníka, Bílovec
- 34.—38. *Cyril Beňačka*, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
Mário Drosc, 2., G Michalovce
Ladislav Hanyk, 4., MF, G Karlovy Vary
Eva Kopecká, 4., MF, G J. Hronca, Bratislava
Peter Matta, 3., G Michalovce
- 39.—41. *Martin Foltin*, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
Michal Hrabák, 3., M, G M. Koperníka, Bílovec
Michal Wittner, 3., MF, G Karlovy Vary

G značí gymnázium,

zaměření třídy: M — na matematiku,

MF — na matematiku a fyziku

Vítězové celostátního kola

1. *Radek Adamec*, G Kroměříž
2. *Vladan Majerech*, G Pardubice
- 3.— 4. *Jan Spousta*, SPŠE Praha, Ječná
Petr Šleich, G Děčín

Další úspěšní řešitelé

- 5.— 6. *Pavel Krtouš*, G Liberec
Richard Seda, G Blansko
7. *Róbert Trávník*, G J. Hronca, Bratislava
- 8.— 9. *Igor Bilák*, G Prešov, Konštantínova
Ján Lúžny, SPŠE Prešov, Plzenská
- 10.— 13. *Mário Drosc*, G Michalovce
Ladislav Hanyk, G Karlovy Vary
Eva Kopecká, G J. Hronca, Bratislava
Peter Matta, G Michalovce
14. *Michal Wittner*, G Karlovy Vary

SEZNAMY NEJÚSPĚŠNĚJŠÍCH ŘEŠITELŮ II. KOLA KATEGORIÍ A, B, C

Z každého kraje a každé kategorie je uvedeno nejvýše prvních deset nejúspěšnějších řešitelů. Zaměření tříd je označeno stejně jako u úspěšných řešitelů celostátního kola. Soutěžící kategorie C jsou žáci 1. ročníku, soutěžící kategorie B jsou žáci 2. ročníku, pokud není uveden jiný údaj. Není-li uvedena škola, jde o gymnázium.

Praha

Kategorie A

1. *David Bednárek*, 3., M, G W. Piecka, Praha
2. *Milan Horák*, 3., M, G W. Piecka, Praha
3. *Tomáš Koumar*, 3., MF, Praha 8, U libeňského zámku
- 4.—6. *Filip Friedlaender*, 4., M, G W. Piecka, Praha
Adam Obdržálek, 3., M, G W. Piecka, Praha
Roman Tůma, 4., M, G W. Piecka, Praha
7. *Petr Loucký*, 4., M, G W. Piecka, Praha
8. *Patrik Španěl*, 4., M, G W. Piecka, Praha

Kategorie B

1. *Jan Sochor*, M, G W. Piecka, Praha
2. *Michal Dostál*, M, G W. Piecka, Praha
3. *Jiří Krčil*, M, G W. Piecka, Praha
4. *Filip Král*, M, G W. Piecka, Praha
5. *Daniela Košnarová*, M, G W. Piecka, Praha
6. — 7. *Josef Straka*, M, G W. Piecka, Praha
Aleš Škvor, M, G W. Piecka, Praha
8. *Michal Kopecký*, M, G W. Piecka, Praha
9. *Ondřej Šmíd*, M, G W. Piecka, Praha
10. *Martin Götz*, M, G W. Piecka, Praha

Kategorie C

1. — 2. *Jan Dvořák*, MF, Praha 3, Sladkovského nám.
Petr Marek, MF, Praha 8, U libeňského zámku
3. *Marta Sochorová*, M, G W. Piecka, Praha
4. — 9. *Štěpán Gazda*, M, G W. Piecka, Praha
Karel Holubička, Praha 6, Nad alejí
Petr Knobloch, MF, Praha 10, Voděradská
Karel Kuna, M, G W. Piecka, Praha
Marek Polášek, M, G. W. Piecka, Praha
Michal Žemlička, Praha 6, Nad alejí
10. *Pavel Peterka*, MF, Praha 8, U libeňského zámku

Středočeský kraj

Kategorie A

1. *Milan Plaček*, 4., Čáslav
2. *Karel Kumsta*, 4., Říčany

Kategorie B

1. *Jan Plešinger*, Říčany
2. *Karel Chmel*, Benešov
3. *Robert Hetka*, Benešov
4. *Tomáš Rosický*, Kutná Hora
- 5.–6. *Milena Bejdová*, Říčany
 Jiří Knap, Nymburk
7. *Radek Musil*, SPŠ Mělník

Kategorie C

- 1.–3. *Michael Gróf*, SOU Mladá Boleslav
Mirka Chromá, Čáslav
Radek Šanda, SPŠ Kutná Hora
- 4.–5. *Helena Emingerová*, Nové Strašecí
Pavel Frič, Poděbrady
- 6.–7. *Jiří Kubeš*, Říčany
Jan Malínský, Kralupy

Jihočeský kraj

Kategorie A

1. *Petr Jaroš*, 3., Pelhřimov
2. *Pavel Cabadaj*, 4., Pelhřimov
3. *Jiří Bořík*, 3., SPŠE Písek

Kategorie B

1. *Aleš Chrdle*, MF, České Budějovice, G K. Šátala
- 2.–3. *Jiří Otta*, Pelhřimov
Martin Zítek, Milevsko

4. *Ľindřich Zapletal*, Tábor
- 5.—6. *Milan Broum*, Tábor
Ľosef Nečas, Písek
7. *Ľiřĩ Veselý*, Strakonice
- 8.—9. *Edita Kučerová*, Písek
Zdeněk Řanda, Písek

Kategorie C

1. *Martin Kronika*, MF, České Budějovice, G K. Šatala
- 2.—6. *Soňa Brořová*, Milevsko
Čestmír Čĩhal, SPŠE Písek
Marek Layer, MF, České Budějovice, G K. Šatala
František Pláteník, SPŠK Bechyně
Václav Vozandych, Strakonice

Západočeský kraj

Kategorie A

1. *Ladislav Hanyk*, 4., MF, Karlovy Vary
2. *Lubomĩr Perk*, 3., MF, Plzeň, G J. Fučíka
3. *Michal Wittner*, 3., MF, Karlovy Vary
- 4.—6. *Ľan Boček*, 4., Plzeň, ul. Pionýřů
Václav Kohout, 3., Plzeň, ul. Pionýřů
Radovan Osoba, 3., MF, Plzeň, ul. Pionýřů
7. *Pavel Samek*, 3., MF, Plzeň, G J. Fučíka
8. *Daniel Rypl*, 3., MF, Plzeň, ul. Pionýřů

Kategorie B

1. *Roman Libochowitz*, MF, Karlovy Vary
2. *Pavel Nýč*, Tachov
3. *Vladimír Kališ*, MF, Plzeň, G J. Fučíka
4. *Petra Domalípová*, Cheb
- 5.— 6. *Tomáš Mužík*, Ostrov n. O.
 Jiří Šmíd, Ostrov n. O.
7. *Pavla Herciková*, MF, Plzeň, G J. Fučíka
- 8.—10. *Martin Černý*, MF, Plzeň, ul. Pionýrů
Petr Kozel, MF, Karlovy Vary
Petr Zapletal, Ostrov n. O.

Kategorie C

1. *Pavla Maříková*, 8. třída, 22. základní škola, Plzeň
2. *Barbora Mottlová*, MF, Plzeň, G J. Fučíka
3. *Dalibor Procházka*, MF, Karlovy Vary
4. *Vladislav Nevoral*, Mariánské Lázně
5. *Lukáš Georgiev*, M, Plzeň, G J. Fučíka
- 6.—7. *Filip Nebřenský*, Ostrov n. O.
Zdeněk Tryner, M, Plzeň, G J. Fučíka

Severočeský kraj

Kategorie A

1. *Pavel Krtouš*, 4., MF, Liberec
- 2.—3. *Ondřej Pavlata*, 3., Jablonec n. N.
Petr Šleich, 3., Děčín
4. *Pavel Truhlář*, 1., M, Liberec

Kategorie B

1. *Jan Klajl*, SPŠ stroj. a el., Liberec
2. *Petr Slavík*, MF, Teplice
3. *Radka Zuzánková*, Děčín
4. – 5. *Josef Hrdlička*, SPŠE Chomutov
Dana Kunclová, MF, Teplice
6. – 8. *Karel Hrach*, MF, Ústí n. L.
Hana Jirglová, Děčín
Simona Soukupová, Ústí n. L.

Kategorie C

1. *David Swigoň*, M, Liberec
2. – 3. *Martin Rybka*, M, Liberec
Jaroslav Trnka, M, Liberec
4. *Petr Tůma*, M, Liberec
5. *Romana Heinrichová*, Děčín
6. *Jindřich Šimon*, Rumburk
7. *Petra Nováková*, M, Liberec
8. *Jana Špilarová*, Podbořany
9. – 10. *Dana Ježdíková*, Louny
Pavel Olyšar, M, Liberec

Východočeský kraj

Kategorie A

1. *Ivan Pícek*, 4., MF, Hradec Králové, Šimkova
2. *Vladan Majerech*, 2., MF, Pardubice
3. *Luděk Brukner*, 4., MF, Pardubice

4. *Jana Ježková*, 2., MF, Hradec Králové, Šimkova
5. *Petr Fencel*, 2., MF, Pardubice
- 6.—7. *Radka Joudalová*, 4., MF, Hradec Králové, Šimkova
Jiří Moser, 4., MF, Pardubice
8. *Petr Jelínek*, 2., MF, Pardubice

Kategorie B

1. *Vladan Majerech*, MF, Pardubice
2. *Jana Ježková*, MF, Hradec Králové, Šimkova
3. *Tomáš Klepal*, MF, Pardubice
4. *Martin Daniel*, Havlíčkův Brod
5. *Diana Jamborová*, Pardubice
6. *Petr Eisler*, Havlíčkův Brod
7. *Zdeněk Kouba*, MF, Hradec Králové, G J. K. Tyla
8. *Petr Jelínek*, MF, Pardubice
9. *Richard Kotrba*, MF, Hradec Králové, Šimkova
10. *Petr Vaňkát*, Havlíčkův Brod

Kategorie C

1. *Petr Krákora*, Trutnov
2. *René Levínský*, M, Hradec Králové, G J. K. Tyla
3. *Jan Janoušek*, MF, Hradec Králové, Šimkova
4. *Hynek Pikhart*, MF, Pardubice
5. *Miroslav Beneš*, M, Hradec Králové, G J. K. Tyla
6. *Silvestr Badal*, Jevíčko
7. *Petr Hellinger*, Hořice
8. *Kateřina Marešová*, MF, Hradec Králové, G J. K. Tyla
9. *Petr Novák*, Pardubice
10. *Jan Talafant*, M, Hradec Králové, G J. K. Tyla

Kategorie A

1. *Libor Skříčka*, 3., MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
2. *Dominik Munzar*, 3., MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
3. *Petr Mayer*, 4., MF, Brno, Lerchova
4. *Richard Seda*, 3., Blansko
5. *Bedřich Horný*, 3., MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
6. *Radek Adamec*, 3., Kroměříž
7. *Michal Krupka*, 3., MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
8. *Vít Kratochvíl*, 4., MF, Třebíč
9. *Pavel Jančí*, 4., Prostějov

Kategorie B

1. *František Klein*, MF, Brno, Koněvova
2. *Jaroslav Hora*, MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
3. *Patrik Munzar*, MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
4. *Vladimír Olšan*, Boskovice
- 5.— 7. *Jan Caha*, MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
 Jana Pernicová, MF, Jihlava
 Radek Tomčík, Brno, Koněvova
- 8.—10. *Jan Dvořák*, Moravské Budějovice
 Jaroslav Jelínek, MF, Znojmo
 Dagmar Odehnalová, Tišnov

Kategorie C

1. *Tomáš Dvořák*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
2. *Radek Vystavěl*, Prostějov

3. *Tomáš Vítek*, MF, Jihlava
4. *Petr Volák*, Otrokovice
- 5.— 7. *Petr Kříž*, Blansko
Zdeněk Pytela, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
Hana Škavradová, MF, Gottwaldov
8. *Tomáš Heroudek*, Brno, Koněvova
- 9.—10. *Tomáš Hron*, Telč
Pavel Kryštof, SPŠE Brno, Leninova

Severomoravský kraj

Kategorie A

1. *Jarmila Ranošová*, 4., M, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Petr Adámek*, 4., M, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Martin Blatný*, 3., M, G M. Koperníka, Bílovec
- 4.— 5. *Antonín Franek*, 3., M, G M. Koperníka, Bílovec
Pavel Seleši, 3., M, G M. Koperníka, Bílovec
6. *Michal Hrabák*, 3., M, G M. Koperníka, Bílovec
7. *Pavel Calábek*, 2., M, G M. Koperníka, Bílovec
- 8.— 9. *Robert Babilon*, 2., M, G M. Koperníka, Bílovec
Milan Ling, 2., M, G M. Koperníka, Bílovec
10. *Miroslav Novák*, 3., M, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie B

- 1.—2. *Radan Kuča*, M, G M. Koperníka, Bílovec
Tomáš Novotný, Frýdek Místek
- 3.—4. *Robert Babilon*, M, G M. Koperníka, Bílovec
František Kašpárek, M, G M. Koperníka, Bílovec

5. *Pavel Calábek*, M, G M. Koperníka, Bílovec
6. *Petr Slouka*, MF, Ostrava-Hrabůvka
7. *Petr Habala*, M, G M. Koperníka, Bílovec
8. *Alena Bartoňová*, MF, Ostrava-Hrabůvka
9. *Petr Kučera*, Zábřeh n. M.

Kategorie C

1. *Radomír Měch*, M, G M. Koperníka, Bílovec
- 2.—6. *Ondřej Blaha*, M, G M. Koperníka, Bílovec
Gabriela Čechová, M, G M. Koperníka, Bílovec
Rostislav Fukala, M, G M. Koperníka, Bílovec
Martin Krejčí, M, G M. Koperníka, Bílovec
 Jiří Polách, M, G M. Koperníka, Bílovec
7. *Jiří Zatloukal*, M, G M. Koperníka, Bílovec
8. *Vladan Vala*, Vsetín

Bratislava

Kategorie A

- 1.— 5. *Cyril Beňačka*, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
Eva Kopecká, 4., MF, G J. Hronca, Bratislava
Martin Ohnheiser, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
Marcel Polakovič, 2., M, G A. Markuša, Bratislava
Ján Šefčík, 4., M, G A. Markuša, Bratislava
- 6.— 7. *Pavol Gvozďjak*, 1., M, G A. Markuša, Bratislava
Zuzana Reichwalderová, 2., M, G A. Markuša, Bratislava
8. *Vladimír Kliment*, 4., M, G A. Markuša, Bratislava

- 9.—10. *Peter Fedor*, 4., Metodovova, Bratislava
Robert Trávník, 3., MF, G J. Hronca, Bratislava

Kategorie B

1. *Ľán Budinský*, M, G A. Markuša, Bratislava
2. *Zuzana Reichwalderová*, M, G A. Markuša, Bratislava
3. *Adrian Liška*, M, G A. Markuša, Bratislava
4. *Zohdy Hamid*, M, G A. Markuša, Bratislava
5.—6. *Ľana Koncová*, MF, G J. Hronca, Bratislava
Róbert Krídl, M, G A. Markuša, Bratislava
7. *Anton Belan*, M, G A. Markuša, Bratislava
8. *Stanislav Párnický*, M, G A. Markuša, Bratislava
9. *Peter Klein*, M, G A. Markuša, Bratislava
10. *Renáta Smékalová*, M, G A. Markuša, Bratislava

Kategorie C

1. *Tibor Bartoš*, M, G A. Markuša, Bratislava
2.—3. *Andrej Doboš*, 8. třída ZŠ, Palackého, Bratislava
Radoslav Tomek, 8. třída ZŠ, Nevädzová, Bratislava
4.—5. *Ilja Martišovits*, 8. třída ZŠ, Košická, Bratislava
Zuzana Uhríková, M, G A. Markuša, Bratislava
6. *Patricia Matyášová*, M, G A. Markuša, Bratislava

Západoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Vladimír Uhelský*, 4., G E. Gudernu, Nitra
2. *Martin Lukáč*, 2., Bánovce n. B.

3. *Viktor Bódi*, 1., MF, G E. Gudernu, Nitra
4. *Erik Hevesi*, 3., Levice
5. *András Czekus*, 3., maď. G Komárno
6. *Peter Mužila*, 3., MF, Nitra, Párovská
7. *Rudolf Burcl*, 2., Trnava
8. *Róbert Zemánek*, 4., Skalica
9. *Peter Pereszlényi*, 3., Šamorín
10. *Alžběta Stemmerová*, 4., maď. G Dunajská Streda

Kategorie B

1. *Marián Lukáč*, Bánovce n. B.
2. *Peter Križalkovič*, Nitra, Párovská
3. *Ladislav Baráth*, Komárno
4. *Rudolf Burcl*, Trnava
5. *Pavol Kolník*, Nové Mesto n. V.
6. *Oliver Ralík*, G E. Gudernu, Nitra
7. *Iveta Hercová*, Levice
8. *Jana Polcová*, Levice
9. *Iveta Gálisová*, Partizánske
10. *Peter Ratkovský*, G E. Gudernu, Nitra

Kategorie C

1. *Juraj Šimko*, Nitra, Párovská
2. *Katalin Kis Petiková*, maď. G Komárno
3. *Ján Úžik*, SPŠE Piešťany
4. *Roman Greguš*, G E. Gudernu, Nitra
5. *Štefan Bakalár*, Topoľčany
6. *Lubica Karepecká*, Komárno
7. *Ján Pavelka*, SPŠE Stará Turá

8. *Miroslava Vavrová*, Hlohovec
9. *Angelika Lenická*, Nitra, Párovská
10. *Patrícia Pomothyová*, Levice

Stredoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Igor Melicherčík*, 3., MF, Banská Bystrica, Tajovského
2. *Dušan Hanes*, 2., MF, Prievidza
3. *Marián Turac*, 4., M, Žilina, Veľká Okružná
4. *Pavel Šály*, 4., Nová Baňa
5. *Jozef Šipoš*, 3., MF, Prievidza
6. *Jozef Čierny*, 3., M, Žilina, Veľká Okružná
7. *Ivan Kohútek*, 3., M, Žilina, Veľká Okružná
8. *Igor Ľucha*, 4., Povážská Bystrica
9. *Richard Nemec*, 4., MF, Banská Bystrica, Tajovského

Kategorie B

1. *Dušan Hanes*, MF, Prievidza
2. *Bohuš Bariak*, Veľký Krtíš
3. *Štefan Rakučák*, M, Žilina, Veľká Okružná
4. *Tomáš Kubík*, MF, Prievidza
5. *Daniel Mašula*, MF, Prievidza
6. *Miroslav Laššák*, M, Žilina, Veľká Okružná
7. *Anna Koreňová*, M, Žilina, Veľká Okružná
8. *Jaroslav Ľaroš*, M, Žilina, Veľká Okružná
9. *Miroslav Pavlák*, Dubnica n. V.
10. *Karol Rozenberg*, M, Žilina, Veľká Okružná

Kategorie C

1. *Vladimír Šošovička*, M, Žilina, Veľká Okružná
2. *Jozef Radler*, MF, Zvolen
3. *Pavol Eliáš*, MF, Martin
4. *Jozef Gemela*, MF, Prievidza
5. *Milan Grega*, Povážská Bystrica
6. *Miroslav Šidlík*, M, Žilina, Veľká Okružná
7. *Vladimír Valent*, Banská Bystrica, trieda SNP
8. *Štefan Poláčik*, SOU el., Nižná

Východoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Roman Soták*, 2., M, Košice, Šmeralova
2. *Peter Matta*, 3., Michalovce
3. *Igor Bilák*, 3., Prešov, Konštantínova
4. *Alexander Szabari*, 3., M, Košice, Šmeralova
5. *Ján Lúžny*, 4., SPŠE Prešov
6. – 8. *Leonard Bučko*, 4., Prešov, Konštantínova
Zuzana Čornáková, 4., M, Košice, Šmeralova
Robert Kazimír, 3., M, Košice, Šmeralova
9. – 10. *Mário Drosc*, 2., Michalovce
Radovan Schreiber, 3., Krompachy

Kategorie B

1. *Roman Soták*, M, Košice, Šmeralova
2. *Mário Drosc*, Michalovce

- 3.— 4. *Ľaroslav Dunajský*, Košice, Šrobárova
Pavol Hudák, Košice, Šrobárova
5. *Jozef Mičko*, M, Košice, Šmeralova
6.— 8. *Ján Paralič*, Košice, Šrobárova
Rastislav Sendorák, Prešov, Konštantínova
Róbert Čiško, Spišská Nová Ves
9. *Michal Urban*, Prešov, Konštantínova
10. *Daniela Soreková*, M, Košice, Šmeralova

Kategorie C

1. *Stanislav Krajči*, M, Košice, Šmeralova
2. *Roman Vávra*, Rožňava
3. *Radoslav Mróz*, Spišská Nová Ves
4.—5. *Zuzana Bobovská*, Poprad, Leninovo nábr.
Peter Eliáš, Prešov, Konštantínova
6. *Alena Murová*, Košice, Opatovská
7.—8. *Olga Katreniaková*, Košice, Šrobárova
Slavomír Onderko, Michalovce
9. *Gabriel Semanišin*, Bardejov

Kategorie Z7

ÚLOHY I. KOLA

Z7 - I - 1

Nahradte písmena číslicemi tak, aby vznikl správný zápis sčítání:

$$\begin{array}{rcccccc} & P & S & I & C & I & \\ & P & S & I & C & I & \\ & P & S & I & C & I & \\ \hline H & A & F & A & N & I & \end{array}$$

Řešení. Zápis přepíšeme do tabulky a označíme sloupce:

<i>f</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
	P	S	I	C	I
	P	S	I	C	I
	P	S	I	C	I
H	A	F	A	N	I

Ze sloupce a je vidět, že pro I mohou nastat jen dvě možnosti

$$(1) \quad I = 0 \quad \text{nebo} \quad I = 5.$$

Ze sloupců e, d plyne, že

$$P + P + P + (\text{přenos ze sloupce } d) \leq 29,$$

proto je

$$(2) \quad H = 1 \quad \text{nebo} \quad H = 2.$$

Protože platí (1), plyne ze sloupců b, a

$$C + C + C + (\text{přenos ze sloupce } a) \leq 28.$$

Proto je

$$(3) \quad A = I + 1 \quad \text{nebo} \quad A = I + 2.$$

Protože musí být $A \neq H$, stačí podle (1) a (3) rozlišit šest případů:

$$a) \quad I = 0, H = 1, A = 2$$

f	e	d	c	b	a
	P	S	0	C	0
	P	S	0	C	0
	P	S	0	C	0
1	2	F	2	N	0

Odtud postupně dostaneme:

$P = 4$ (neboť přenos ze sloupce $d \leq 2$)

$S = 3$ ($S \geq 3$, neboť $S \neq 1$, $S \neq 2$ a $S \leq 3$, neboť $P = 4$)

$F = 9$

$C = 7$ ($C \geq 7$, neboť přenos ze sloupce b je 2,

$C \neq 8$, neboť $P \neq N$ a $C \neq 9$, neboť $C \neq F$)

Ale pro $C = 7$ dostaneme $N = 1$, což není možné, protože $H = 1$. Možnost a) je tedy vyloučena.

b) $I = 0, H = 2, A = 1$

f	e	d	c	b	a
	P	S	0	C	0
	P	S	0	C	0
	P	S	0	C	0
2	1	F	1	N	0

Odtud postupně dostaneme:

$P = 7, S = 3, F = 9,$

$C = 6$ ($C \neq 4$, neboť $N \neq 2$; $C \neq 5$, neboť $C \neq N$;

$C \neq 8$, neboť podle sloupce c je $C + C + C < 20$),

$N = 8.$

Tím dostáváme řešení:

(4)

7	3	0	6	0
7	3	0	6	0
7	3	0	6	0
2	1	9	1	8 0

c) $I = 5, H = 1, A = 6$

f	e	d	c	b	a
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
1	6	F	6	N	5

Tento případ vzhledem k sloupci e nenastane, neboť $P \neq 5$.d) $I = 5, H = 1, A = 7$

f	e	d	c	b	a
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
1	7	F	7	N	5

Tento případ nemůže opět nastat, neboť $P \neq 5$.

e) $I = 5, H = 2, A = 6$

f	e	d	c	b	a
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
2	6	F	6	N	5

V tomto případě musí být $P = 8$ a odtud $S = 7$ nebo $S = 9$, neboť přenos ze sloupce d je roven 2. Protože přenos ze sloupce c je roven 1, dostáváme v prvním případě $F = 2$, v druhém případě $F = 8$. Ale ani jedna z těchto možností nemůže nastat, neboť číslo 2 je rovno již H a číslo 8 je rovno již P .

f) $I = 5, H = 2, A = 7$

f	e	d	c	b	a
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
	P	S	5	C	5
2	7	F	7	N	5

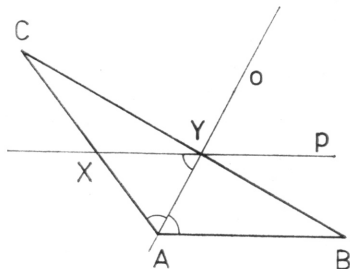
Dostaneme $P = 9$. Odtud a ze sloupců c, b plyne, že $C = 8$. Ale to nemůže nastat, neboť $N \neq 5$.

Závěrem vidíme, že úloha má jediné řešení, které je dané zápisem (4).

Z7 - I - 2

Narýsujte trojúhelník ABC ; $d(AB) = 5$ cm, $d(BC) = 10$ cm, $d(AC) = 6$ cm. Na straně AC sestrojte bod X a na straně BC bod Y tak, aby platilo: $\leftrightarrow XY \parallel \leftrightarrow AB$ a současně $d(AX) = d(XY)$.

Řešení. *Rozbor.* Načrtneme obrázek, na kterém doplníme přímku $o = AY$ (obr. 1). Protože $AX \cong XY$ je trojúhelník



Obr. 1

AXY rovnoramenný s rameny AX a XY . Proti těmto ramenům jsou shodné úhly

$$(1) \quad \sphericalangle XAY \cong \sphericalangle XYA.$$

Úhly XYA a YAB jsou střídavé úhly vyřáté přímkou o na rovnoběžkách XY a AB . Proto jsou shodné, takže

$$(2) \quad \sphericalangle XYA \cong \sphericalangle YAB.$$

Ze zápisů (1) a (2) vidíme, že

$$(3) \quad \sphericalangle XAY \cong \sphericalangle YAB,$$

tzn. AY je osou úhlu CAB .

Konstrukce

1. $\triangle ABC$;

$$d(AB) = 5 \text{ cm}, \quad d(BC) = 10 \text{ cm}, \quad d(AC) = 6 \text{ cm (sss)}$$

2. o ; o je osa $\sphericalangle CAB$

3. Y ; $Y \in o \cap BC$

4. p ; $p \parallel AB$, $Y \in p$

5. X ; $X \in p \cap AC$

Zkouška *). Z konstrukce plyne, že platí (3) a (2). Proto platí i (1), tzn. $\triangle AYZ$ je rovnoramenný, takže je skutečně $d(AX) = d(XY)$.

Z7 - I - 3

Představte si, že máte 81 dvoukorun, z nich jednu falešnou. Falešná mince je lehčí než pravá. K dispozici máte přesné dvouramenné váhy. Kolik nejméně vážení potřebujete k tomu, abyste našli falešnou minci? (Své tvrzení odůvodněte.)

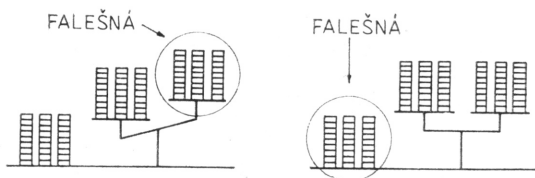
Řešení se skládá ze dvou částí. V první části ukážeme,

*) Od řešitelů nebyla vyžadována.

že k nalezení falešné mince stačí provést čtyři vážení. V druhé části pak ukážeme, že počet vážení už nelze zmenšit, tzn. že tři vážení nestačí k určení falešné mince.

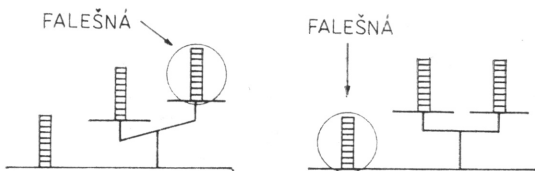
(I) Mince rozdělíme na tři hromádky po 27 kusech.

1. vážením zjistíme, ve které z těchto hromádek je hledaná falešná mince. Zvážíme prvé dvě hromádky. Když se váha vychýlí, je falešná mince na misce vah, která je výše. Jsou-li váhy v rovnováze, je falešná mince ve třetí hromádce (obr. 2). Hromádku, ve které je falešná mince, opět rozdělíme na tři stejné hromádky po 9 mincích.



Obr. 2

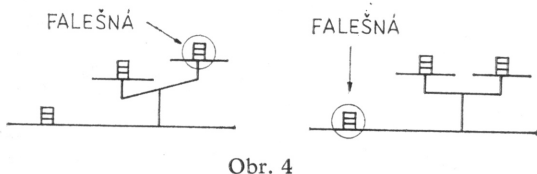
2. vážením (stejným postupem jako při 1. vážení) zjistíme, ve které z těchto hromádek se hledaná falešná mince nachází (obr. 3). Tuto hromádku opět rozdělíme na tři stejné hromádky po 3 mincích.



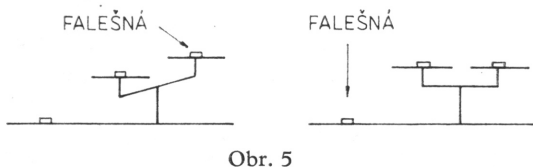
Obr. 3

3. vážením (opět stejným způsobem) určíme, ve které z těchto hromádek je hledaná falešná mince (obr. 4). Po třech váženích zůstanou jen tři mince, mezi kterými se falešná mince musí nacházet.

4. vážením zjistíme, která z těchto tří je falešná (obr. 5). Tím jsme ukázali, že čtyři vážení budou určitě stačit.



Obr. 4



Obr. 5

(II)*) Nyní dokážeme, že tři vážení nestačí k nalezení falešné mince.

1. Bez vážení falešnou minci mezi třemi mincemi nepoznáme.

2. Jedním vážením nerozeznáme falešnou minci mezi devíti mincemi. Ať rozdělíme mince jakkoliv na tři hromádky a dvě z nich dáme na váhy, pak vždy nejméně jedna z těchto

*) Druhá část řešení nebyla od řešitelů požadována.

hromádek má aspoň tři mince. Může se stát, že po prvním vážení zjistíme, že falešná mince je právě v této hromádce. Ale bez druhého vážení falešnou minci nenajdeme.

3. Podobně zjistíme, že dvě vážení nestačí k rozeznání falešné mince mezi 27 mincemi. Ať rozdělíme mince kterýmkoliv způsobem na misky váhy a zbývající mince, vždy má aspoň jedna hromádka nejméně 9 mincí. A na vyhledání falešné mince mezi nimi by zbylo jen jedno vážení.

4. Stejným způsobem zjistíme, že tři vážení nestačí k rozeznání falešné mince mezi 81 mincemi.

Poznámka. Řešení úlohy souvisí s trojkovou soustavou. Postup stručně naznačíme.

Mince očíslováme čísly 1, 2, ..., 81 a zapíšeme tato čísla v trojkové soustavě.

$1 = 0001_3$	$10 = 0101_3$	$19 = 0201_3$
$2 = 0002_3$	$11 = 0102_3$	$20 = 0202_3$
$3 = 0010_3$	$12 = 0110_3$	$21 = 0210_3$
$4 = 0011_3$	$13 = 0111_3$	$22 = 0211_3$
$5 = 0012_3$	$14 = 0112_3$	$23 = 0212_3$
$6 = 0020_3$	$15 = 0120_3$	$24 = 0220_3$
$7 = 0021_3$	$16 = 0121_3$	$25 = 0221_3$
$8 = 0022_3$	$17 = 0122_3$	$26 = 0222_3$
$9 = 0100_3$	$18 = 0200_3$	$27 = 1001_3$

atd.

Mince při prvním vážení rozmístíme podle číslic na posledním místě takto:

levá miska	$\boxed{\dots 0}_3$
pravá miska	$\boxed{\dots 1}_3$
mimo váhu	$\boxed{\dots 2}_3$

Podobně postupujeme při dalších váženích podle číslic na dalších místech od konce.

Číslo falešné mince určíme v trojkové soustavě podle pravidla:

Podle výsledku i -tého vážení ($i = 1, 2, 3, 4$) určíme i -tou číslici a_i od konce takto:

$a_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$	levá miska je nahoře
	levá miska je dole
	misky jsou v rovnováze

Vyzkoušejte si to sami.

Z7 - I - 4

Anička, Václav, Jakub a Lukáš jsou čtyřčata. Anička ví, že Lukáš nikdy nelže, naopak Jakub lže vždycky a Václav ten to střídá: jednou lže, hned potom zase mluví pravdu a potom zase lže atd.

Jednou odpoledne přiběhli všichni domů a jeden říká Aničce: »Maminka na tebe čeká v OBUVI.« »Dobře, Lukáši,« odpověděla Anička. Vtom se bratr zasmál a řekl: »Já jsem Václav.«

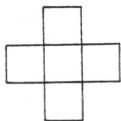
Můžete říci, který z bratrů vyřídil Aničce matčin vzkaz? Byl vzkaz pravdivý?

Řešení. Lukáš Aničce vzkaz nevyřizoval, neboť vždy mluví pravdu a neřekl by o sobě, že je Václav. Vzkaz mohl vyřídít Jakub. V obou tvrzeních lže a vzkaz je tedy nepravdivý. Vzkaz mohl vyřídít i Václav. Ve svém druhém tvrzení by mluvil pravdu, tudíž v prvním by musel lhát a vzkaz by byl opět nepravdivý.

Závěr. Vzkaz je nepravdivý, ale nelze jednoznačně určit, zda jej vyřídil Jakub nebo Václav (s určitostí pouze víme, že Lukáš to nebyl).

Z7 - I - 5

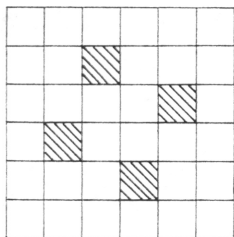
Kolik čtverečků musíme vyšrafovat na šachovnici skládající se ze 6×6 čtverečků, aby se útvar (kříž) sestavený z pěti čtverečků nedal nakreslit na zbytek (nevyšrafované) šachovnice (obr. 6)?



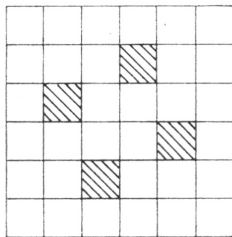
Obr. 6

Řešení. Stačí vyšrafovat čtyři vhodně zvolené čtverečky a kříž se na šachovnici už nevejde. Šrafování lze provést dvěma způsoby (obr. 7a, b).

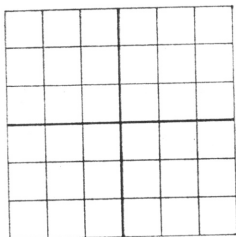
Vyšrafujeme-li jen tři čtverečky (nebo dokonce ještě méně), vždy lze na šachovnici kříž umístit. Aspoň v jednom ze 4 čtverců 3×3 (viz obr. 8) nebude žádné šrafované pole, takže se do něho kříž vejde.



Obr. 7a



7b



Obr. 8

Z7 - I - 6

Představte si, že vynásobíte všechna přirozená čísla od 1 do 63. Potom vynásobíte všechna přirozená čísla od 1 do 61. Nakonec tyto součiny odečtete; je tento rozdíl dělitelný číslem 71?

Řešení. Napíšeme rozdíl

$$R = (1.2.3. \dots .61.62.63) - (1.2.3. \dots .59.60.61)$$

Z rozdílu R vytkneme součin $s = 1.2.3. \dots .59.60.61$. Dostaneme

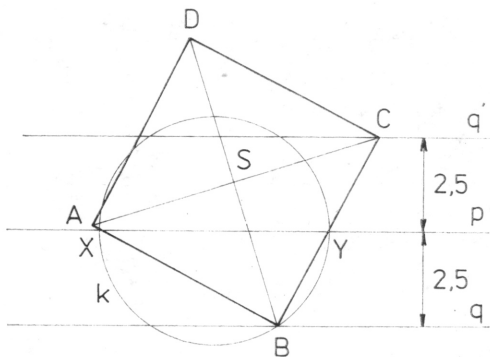
$$R = s \cdot (62.63 - 1) = s.3905 = s.71.55.$$

Rozdíl je dělitelný číslem 71.

Z7 - II - 1

Je dána přímka p a na ní dva různé body X, Y ($d(XY) \leq 6$ cm). Sestrojte takový čtverec $ABCD$, aby strana AB procházela bodem X , strana BC procházela bodem Y , aby úhlopříčka čtverce měla délku 8 cm a aby bod B měl od přímky p vzdálenost 2,5 cm. Má úloha vždy řešení? Kolik může mít úloha nejvýše řešení?

Řešení. *Rozbor.* Načrtneme si obrázek. Bod B leží na přímce q nebo q' , které jsou rovnoběžné s přímkou p a mají od p vzdálenost 2,5 cm. Dále leží bod B na Thaletově kružnici k opsané nad průměrem XY . Střed S hledaného čtverce leží na ose úhlu XBY . Bod S má od bodu B vzdálenost rovnou polovině úhlopříčky, proto je $d(BS) = 4$ cm (obr. 9).



Obr. 9

Zápis konstrukce

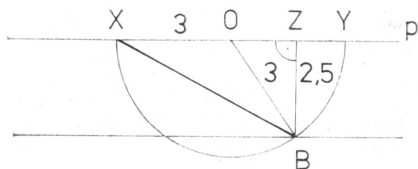
0. $p: X, Y \in p, d(X, Y) \leq 6 \text{ cm.}$ (Zadání úlohy)
1. $q, q': q \parallel p \parallel q', v(p, q) = v(p, q') = 2,5 \text{ cm}$
2. k : Thaletova kružnice s průměrem XY
3. $B: B \in (q \cup q') \cap k$
4. $\mapsto BX, \mapsto BY$
5. polopřímka u : osa $\sphericalangle XBY$
6. $S: S \in u, d(BS) = 4 \text{ cm}$
7. $v: v \perp u, S \in v$
8. $A, C: A \in \mapsto BX \cap v, C \in \mapsto BY \cap v$
9. $D: S$ je střed úsečky BD
10. $\square ABCD$

*Zkouška**). Podle věty *usu* jsou $\triangle ABS, \triangle CBS$ shodné. Protože jsou pravoúhlé a úhly při vrcholech B jsou poloviny pravého úhlu, jsou tyto trojúhelníky rovnoramenné. Úsečky BS, AS a CS jsou tedy shodné. Také úsečka DS je s nimi shodná. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhlopříčky k sobě kolmé, dlouhé 8 cm a půlí se, proto je tento čtyřúhelník čtverec.

Zbývá ukázat, že body X, Y leží na stranách čtverce $ABCD$ jdoucích z vrcholu B , tzn., že $BX \leq AB$ a $BY \leq BC$. Můžeme předpokládat, že $BX \geq BY$. Úsečka BX bude zřejmě nejdelší, bude-li také XY nejdelší, tzn. $d(XY) = 6 \text{ cm}$ (obr. 10). Z pravoúhlého $\triangle OZB$ vypočítáme podle Pythagorovy věty délku OZ

$$d(OZ) = \sqrt{3^2 - 2,5^2} = \sqrt{2,75} \doteq 1,67.$$

*) Od řešitelů se zkouška nepožadovala.



Obr. 10

Nyní určíme délku XZ a podle Pythagorovy věty vypočítáme z trojúhelníku XZB délku XB .

$$d(XB) = \sqrt{4,67^2 + 2,5^2} \doteq \sqrt{28,06} \doteq 5,30.$$

Strana čtverce $ABCD$ má délku

$$d(AB) = 4 \cdot \sqrt{2} \doteq 5,66.$$

Tedy je skutečně $d(AB) > d(XB)$.

Diskuse. Úloha má buď čtyři, nebo dvě, anebo žádné řešení. Počet řešení závisí na počtu společných bodů kružnice k a rovnoběžek q, q' .

Z7 - II - 2

Určete číslice x a y , jestliže víte, že trojčíferné číslo xyy je dělitelné sedmi, trojčíferné číslo xyx je dělitelné čtyřmi a trojčíferné číslo xyx je dělitelné třemi.

Řešení. Protože číslo xyx je dělitelné čtyřmi, musí být poslední dvojčíslí yx dělitelné čtyřmi. Napíšeme tabulku těchto čísel, přitom obě číslice x, y jsou různé od nuly (jinak by xyy a xyx nebyla trojčíferná čísla).

12	16	24	28	32	36	44	48	52
56	64	68	72	76	84	88	92	96

Protože xyx je dělitelné třemi, musí být ciferný součet $(2x + y)$ dělitelný třemi. Z tabulky čísel ponecháme pouze ta, která splňují tuto podmínku:

28 36 44 52 88 96

Jim odpovídají čísla xyy :

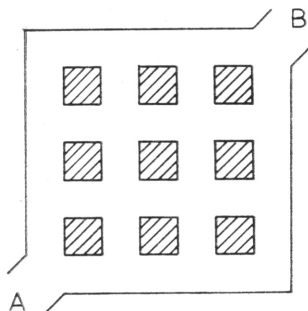
288 366 444 522 888 966.

Z nich je dělitelné sedmi pouze číslo 966.

Výsledek je $x = 9, y = 6$.

Z7 - II - 3

V místě A (obr. 11) vběhla do bludiště vyděšená myší rodina. Všechny myši šťastně proběhly bludištěm do místa B. (Hladový kocour prská v místě A.) Z rozhovoru udýchaných myší se dozvídáme:



Obr. 11

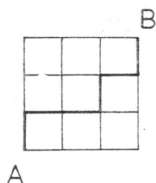
1. Každá myš běžela po chodbičkách jen směrem doprava a nahoru;
2. žádné dvě myši neběžely stejnou cestou;
3. kdyby bylo ještě o jednu myš více, pak by některé dvě myši musely běžet po stejné cestě.

Kolik členů měla myší rodina?

Řešení. Musíme najít počet cest z A do B, které probíhají pouze vpravo a nahoru. Tento počet můžeme určit např. výčtem všech možností. Místo kreslení použijeme »čárkovací metodu«, při níž např. cestu z obr. 12 zapíšeme takto

/ - - / - /

(svislé a vodorovné čárky udávají postupně průběh cesty).



Obr. 12

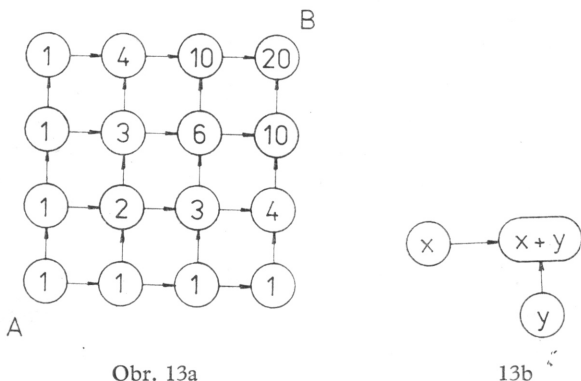
Napíšeme tabulku všech cest.

(T)

/	/	/	-	-	-	-	/	/	/	-	-
/	/	-	/	-	-	-	/	/	-	-	/
/	/	-	-	/	-	-	/	-	/	/	-
/	-	/	/	-	-	-	/	-	/	-	/
/	-	/	-	-	/	-	/	-	-	/	/
/	-	-	/	/	-	-	-	/	/	-	/
/	-	-	/	-	/	-	-	/	-	/	/
/	-	-	-	/	/	-	-	-	/	/	/

Těchto cest je celkem 20.

Počet cest můžeme určit i početně bez tabulky (T). Použijeme schématu z obrázku 13a sestaveného podle klíče z obrázku 13b.



Obr. 13a

13b

Čísla udávají počet cest z bodu A na křižovatku, kde je příslušné číslo uvedeno.*)

Možných cest je 20, a tedy i myší rodina má 20 členů.

Z7 - II - 4

Ivan čekal s otcem a pejskem Haríkem na vlak. Čas si krátili vážením na osobní váze. Zjistili, že:

*) Čtenáři z tříd s rozšířenou výukou matematice a přírodovědným předmětem jistě poznávají ve schématu tabulku Pascalových čísel (sestavenou od zdola). Takže příslušný počet můžeme určit buď Pascalovým, nebo kombinačním číslem

$$P(3, 3) = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

1. Všichni dohromady mají hmotnost 106 kg.
2. Otec je o 50 kg těžší než Ivan s Haríkem.
3. Harík má přesně $\frac{2}{5}$ Ivanovy hmotnosti.

Vypočítejte hmotnost každého z nich.

Řešení 1 - úsudkem. Z podmínky 2 plyne, že otec váží o 25 kg více než je polovina ze 106 kg. Otec má tedy hmotnost 78 kg ($53 + 25$). Hmotnost Ivana s Haríkem je dohromady 28 kg ($53 - 25$). Těchto 28 kg tvoří součet hmotnosti Ivana a $\frac{2}{5}$ hmotnosti Ivana (= hmotnost Haríka). Proto 28 kg je

rovno $\frac{7}{5}$ hmotnosti Ivana. Odtud snadno vypočítáme, že hmotnost Haríka je 8 kg a hmotnost Ivana 20 kg.

Řešení 2 - rovnicí. Hmotnost Ivana označíme x .

Hmotnost Ivana x kg

Hmotnost Haríka $\frac{2}{5} x$ kg

Hmotnost otce $\left(x + \frac{2}{5} x + 50\right)$ kg

Celkem..... 106 kg

Dostaneme rovnici

$$x + \frac{2}{5} x + \left(x + \frac{2}{5} x + 50\right) = 106$$

Jejím řešením dostaneme kořen

$$x = 20.$$

Ivan má hmotnost 20 kg, Harík 8 kg a otec 78 kg.

Zkouška. Podmínka 1. $20 + 8 + 78 = 106$

Podmínka 2. $78 = (20 + 8) + 50$

Podmínka 3. $8 = \frac{2}{5} \cdot 20$

ÚLOHY I. KOLA

Z8 - I - 1

Najděte všechna čtyřciferná přirozená čísla dělitelná číslem 99, která mají tuto vlastnost: vyměníme-li mezi sebou první dvě cifry, dostaneme čtyřciferné číslo dělitelné číslem 91.

Řešení. Hledaná čtyřciferná čísla mají být dělitelná číslem 99, to znamená, že musí být dělitelná devíti a současně jedenácti. Uvážíme-li dělitelnost číslem 9 (přirozené číslo vyjádřené v desítkové soustavě je dělitelné devíti právě tehdy, když je devíti dělitelný ciferný součet tohoto čísla), a dále tu skutečnost, že záměnou první a druhé číslice hledaných čísel se jejich ciferný součet nezmění, je zřejmé, že přirozená čísla vzniklá z hledaných čísel záměnou první a druhé číslice budou dělitelná číslem 9 a podle podmínky úlohy číslem 91, tj. budou dělitelná čísla 9, 7 a 13, neboť $91 = 7 \cdot 13$. Vezmeme tedy všechny čtyřciferné násobky přirozeného čísla $7 \cdot 9 \cdot 13 = 819$. Jsou to čísla 1 638, 2 457, 3 276, 4 095, 4 914, 5 733, 6 552, 7 371, 8 190, 9 009 a 9 828. Dále již snadno zjistíme (například použitím kritéria dělitel-

nosti číslem 11), že všem podmínkám úlohy vyhovují právě čísla 6 138, 4 257 a 2 376.

Z8 - I - 2

Je dán obdélník $ABCD$ s obsahem 42 cm^2 , jehož rozměry jsou vyjádřené přirozenými čísly. Necht' M je takový vnitřní bod obdélníku $ABCD$, že přímky jím procházející rovnoběžně se stranami obdélníku rozdělí daný obdélník na čtyři pravoúhelníky, jejichž rozměry jsou také vyjádřeny přirozenými čísly. Zjistěte všechny možnosti pro polohu bodu M v případě, že mezi vzniklými pravoúhelníky je alespoň jeden čtverec a určete velikosti stran všech takových čtverců.

Řešení. Nejprve je třeba určit rozměry všech obdélníků s obsahem 42 cm^2 . Podle zadání mají být tyto rozměry vyjádřeny přirozenými čísly. Jsou to tyto možnosti:

- | | |
|--|--|
| a) $a = 1 \text{ cm}, b = 42 \text{ cm}$ | c) $a = 3 \text{ cm}, b = 14 \text{ cm}$ |
| b) $a = 2 \text{ cm}, b = 21 \text{ cm}$ | d) $a = 6 \text{ cm}, b = 7 \text{ cm}$ |

Případ a) z našich úvah vypustíme, neboť je zřejmé, že uvnitř obdélníku s těmito rozměry nelze zvolit bod M podle zadání úlohy.

Případy b) až d). Má-li být mezi pravoúhelníky, které vzniknou způsobem popsaným v zadání úlohy alespoň jeden čtverec, jsou tím pro polohu bodu M dány tyto podmínky:

1. Bod M je stejně vzdálen alespoň od dvou sousedních stran obdélníku.

2. Tyto vzdálenosti jsou vyjádřeny přirozenými čísly. Strany uvažovaných čtverců jsou rovny těmto vzdálenostem.

Protože bod M má být vnitřním bodem obdélníku, musí být strana každého čtverce menší než kratší rozměr obdélníku a současně musí být její velikost vyjádřena přirozeným číslem. Co se týče počtu možností polohy bodu M , je třeba vzít v úvahu, že obdélník má čtyři dvojice sousedních stran.

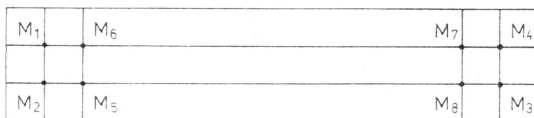
Případ b). Pro délku strany čtverce je jediná možnost rovná 1 cm. Pro polohu bodu M jsou pak dvě možnosti. V obou případech jsou mezi vzniklými pravoúhelníky právě dva čtverce o straně délky 1 cm. V obr. 14 jsou možné polohy bodu M označeny M_1, M_2 .



Obr. 14

Případ c). Pro délku strany čtverce jsou dvě možnosti: 1 cm a 2 cm. Pro to, aby způsobem uvedeným v zadání úlohy vznikl čtverec o straně délky 1 cm, jsou čtyři možnosti (v obrázku 15 označené $M_1 - M_4$). Má-li být strana vzniklého čtverce 2 cm dlouhá, jsou pro polohu bodu M čtyři možnosti (v obr. 15 označené $M_5 - M_8$). Celkem je tedy 8 možností polohy bodu M .

Případ d). Pro délku strany čtverce jsou tyto možnosti: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm.



Obr. 15

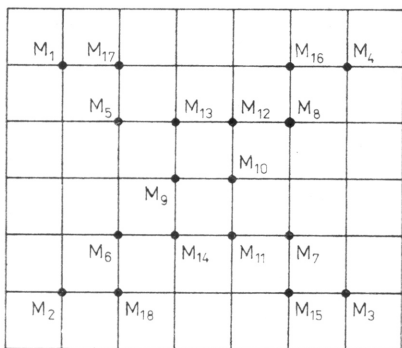
Pro délky stran čtverců 1 cm, 2 cm, 4 cm a 5 cm jsou vždy čtyři možné polohy bodu M (vzhledem k tomu, že obdélník $ABCD$ má čtyři dvojice sousedních stran). Při každé poloze bodu M je mezi vzniklými pravoúhelníky právě jeden čtverec. Jedná se tedy o 16 možných poloh bodu M .

V případě, že délka strany uvažovaného čtverce je 3 cm, jsou pro polohu bodu M dvě možnosti. Přitom v obou případech vznikají právě dva čtverce o straně délky 3 cm.

Možnosti polohy bodu M v případě, že vznikne čtverec o straně délky

- 1 cm jsou v obr. 16 označeny $M_1 - M_4$,
- 2 cm jsou v obr. 16 označeny $M_5 - M_8$,
- 3 cm jsou v obr. 16 označeny $M_9 - M_{10}$,
- 4 cm jsou v obr. 16 označeny $M_{11} - M_{14}$,
- 5 cm jsou v obr. 16 označeny $M_{15} - M_{18}$.

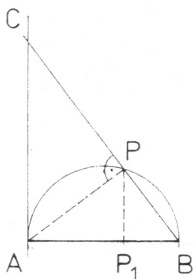
V obdélníku o rozměrech $a = 6$ cm, $b = 7$ cm je tedy 18 možností pro polohu bodu M a 5 možností pro délku strany uvažovaného čtverce.



Obr. 16

Je dána úsečka AB . Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou BC , ve kterém pro patu P výšky z vrcholu A na stranu BC platí $d(BP) : d(CP) = 3 : 5$. Kolik řešení má úloha?

Řešení. *Rozbor* (obr. 17). Bod P leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem AB . $\triangle ABP \sim \triangle CBA$ podle



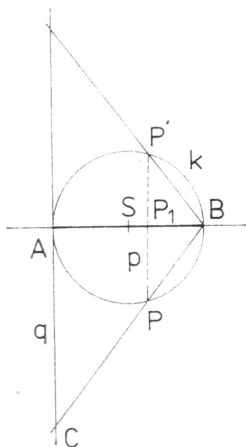
Obr. 17

věty *uu*: $\sphericalangle APB \cong \sphericalangle CAB = R$, $\sphericalangle ABP$ společný. Sestrojíme-li v trojúhelníku ABP výšku z vrcholu P na stranu AB a označíme-li její patu P_1 , platí $d(BP_1) : d(AP_1) = 3 : 5$. Platnost tohoto tvrzení plyne z vlastnosti podobného zobrazení. Označíme-li k poměr podobnosti, ve které je obrazem trojúhelníku ABC trojúhelník PBA , platí $d(AP_1) = k \cdot d(CP)$, $d(BP_1) = k \cdot d(BP)$ a dále $d(BP_1) : d(AP_1) =$
 $= k \cdot d(BP) : k \cdot d(CP) = d(BP) : d(CP) = 3 : 5$.

Bod P_1 tedy lze sestrojit. Bod P je pak průsečíkem Thaletovy kružnice s kolmicí k přímce AB vedené bodem P_1 .

Zbývající vrchol C trojúhelníku ABC je pak průsečíkem přímky PB s kolmicí k přímce AB vedené bodem A .

Konstrukce (obr. 18)



Obr. 18

1. S ; S střed AB
2. k ; $k \left(S, r = \frac{1}{2} d(AB) \right)$
3. P_1 ; $P_1 \in AB$ a $d(BP_1) : d(AP_1) = 3 : 5$
4. p ; $P_1 \in p$ a $p \perp AB$
5. P ; $P \in p \cap k$
6. $\leftrightarrow BP$
7. q ; $A \in q$ a $q \perp AB$
8. C ; $C \in q \cap \leftrightarrow BP$

Zkouška. Trojúhelník ABC je pravoúhlý, $\sphericalangle BAC = R$.
 $\triangle ABP \sim \triangle CPB$ dle uu. $d(BP_1) : d(AP_1) = 3 : 5$. Z vlast-
 nosti podobnosti pak plyne

$$d(BP) : d(CP) = d(BP_1) : d(AP_1) = 3 : 5.$$

Diskuse. Počet řešení úlohy je dán počtem průsečíků
 přímky p a kružnice k . Tyto průsečíky jsou vždy dva. Dostá-
 váme tak dva trojúhelníky vyhovující zadání, které jsou sou-
 měrně sdružené podle přímky AB .

Z8 - I - 4

Určete všechny dvojice prvočísel p , q , pro které platí

$$11p + 13q = 1985.$$

Řešení. Víme, že

$$(1) \quad 11p + 13q = 1985$$

Mohli bychom za p postupně dosazovat malá prvočísla
 taková, že $11p$ je menší než 1985, vypočítat vždy příslušné q
 a zjistit, zda je to prvočíslo. Výpočet si však můžeme usnadnit
 touto úvahou: Prvočísla p , q nemohou být obě lichá, neboť
 pak by levá strana rovnice (1) byla sudé číslo, zatímco 1985
 je číslo liché. Je tedy buď $p = 2$, nebo $q = 2$.

Pro $p = 2$ dostáváme: $11 \cdot 2 + 13q = 1985$

$$13q = 1963$$

$$q = 151$$

Číslo 151 je prvočíslo, takže dvojice $[2, 151]$ vyhovuje úloze.

Pro $q = 2$ plyne z rovnice (1): $11p + 13 \cdot 2 = 1985$

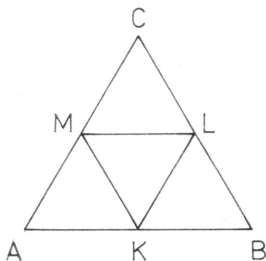
$$11p = 1959$$

Číslo 1959 není dělitelné jedenácti, takže žádná dvojice tvaru $[p, 2]$ neexistuje.

Vyhovuje jediná dvojice $[2, 151]$.

Z8 - I - 5

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC , který je rozdělen úsečkami KL , KM , LM , kde body K , L , M jsou v uvedeném pořadí středy stran AB , BC a AC , na čtyři menší rovnostranné trojúhelníky, viz obr. 19. Kolika způsoby je možno strany



Obr. 19

těchto menších trojúhelníků očíslovat čísla $1, 2, \dots, 9$ tak, aby součet tří čísel na stranách každého z menších trojúhelníků byl stejný a jeden byl očíslován čísly $4, 5, 6$ (v libovolném pořadí).

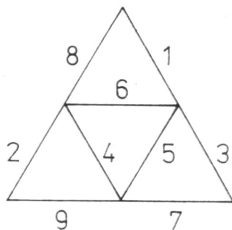
Poznámka. Dvě číslování jsou různá, jestliže aspoň jedna z devíti úseček $AK, BK, \dots$ je v každém z nich očíslována jiným číslem.

Řešení. Číslo 15 můžeme napsat jako součet tří navzájem různých čísel množiny $\{1, 2, \dots, 9\}$ pouze jedním z následujících 8 způsobů:

$$\begin{aligned}
 15 &= 1 + 5 + 9 = 2 + 6 + 7 \\
 &= 1 + 6 + 8 = 3 + 4 + 8 \\
 \text{(I)} \quad &= 2 + 4 + 9 = 3 + 5 + 7 \\
 &= 2 + 5 + 8 = 4 + 5 + 6
 \end{aligned}$$

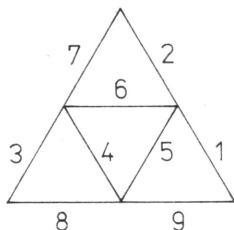
Protože v každém ze zápisů je zastoupeno jedno z čísel 4, 5, 6, musí být čísla 4, 5, 6 očíslován nutně trojúhelník KLM ; kdyby to byl jeden z »rohových« trojúhelníků, nebylo by už zbývající dva »rohové« trojúhelníky čím očíslovat.

Předpokládejme nejprve, že úsečky KM je přiřazeno číslo 4, úsečky KL číslo 5 a úsečky LM číslo 6. Z tabulky I je vidět, že úsečky AK a AM potom musí být očíslované čísla 2 a 9 nebo čísla 3 a 8. Rozebereme první případ. Tabulka I říká, že pak úsečky BK , BL musí být očíslované čísla 3 a 7 a CL , CM čísla 1 a 8. Protože uvedenými čísly může být očíslovaná libovolná ze dvou úseček, dostáváme celkem 8 možností; jedna z nich je nakreslena na obr. 20. Podobně v případě,



Obr. 20

že úsečky AK a AM jsou očíslované čísly 3 a 8, dostáváme z tabulky I 8 dalších možností; jedna z nich je nakreslena na obr. 21. Jsou-li úsečkám KM , KL a LM po řadě přiřazená čísla 4, 5 a 6, pak již další možnosti, než ty, které jsme



Obr. 21

uvedli, nejsou. Úsečkám KM , KL a LM můžeme však přiřadit čísla 4, 5, 6 celkem šesti možnými způsoby; každý z nich dává 16 očíslování všech devíti úseček. Počet možných očíslování je tedy $16 \cdot 6 = 96$.

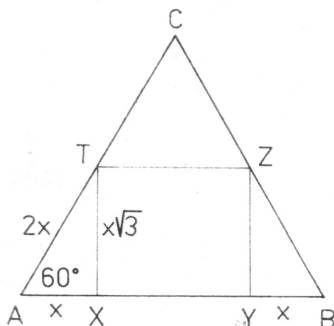
Existuje 96 možných očíslování úseček.

Z8 - I - 6

Do rovnostranného trojúhelníku ABC se stranou délky 8 cm je vepsán pravoúhelník $XYZT$ tak, že body X , Y leží na úsečce AB , bod Z na úsečce BC a bod T na úsečce AC .

a) Vypočítejte obsah pravoúhelníku v závislosti na velikosti úsečky AX a zjistěte, pro kterou její hodnotu $|AX_0|$ je největší.

b) Najděte vzdálenost $|AX|$, pro kterou se obsah pravoúhelníku $XYZT$ rovná $\frac{3}{8}$ obsahu trojúhelníku ABC .



Obr. 22

Řešení. a) Obsah pravoúhelníku $XYZT$ (obr. 22) je roven $(8 - 2x)x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(4x - x^2) = 2\sqrt{3}(4 - 4 + 4x - x^2) = 2\sqrt{3}(4 - (x - 2)^2)$, a tedy největší je pro $x = 2$ cm.

$$\text{b) } 2\sqrt{3}(4 - (x - 2)^2) = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2} 8 \cdot 4\sqrt{3} \right),$$

$$4 - (x - 2)^2 = 3,$$

$$(x - 2)^2 = 1;$$

jestliže $x > 2$, dostáváme $x - 2 = 1$, $x = 3$,

jestliže $x < 2$, potom $2 - x = 1$, $x = 1$.

Tedy $|AX| = 3$ cm nebo 1 cm.

ÚLOHY II. KOLA

Z8 - II - 1

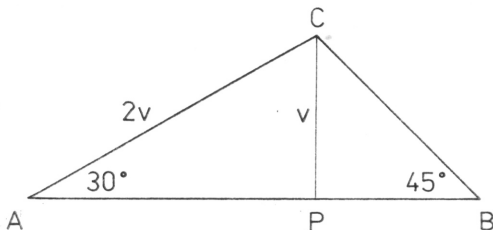
Napišeme-li trojciferné číslo vedle sebe dvakrát, dostaneme šesticiferné číslo, které je dělitelné sedmi. Zdůvodněte.

Řešení. Napišeme-li za nějaké číslo tři nuly, dostaneme číslo, které je 1000násobkem zvoleného čísla. Napišeme-li trojciferné číslo vedle sebe dvakrát, dostaneme číslo, které je 1001násobkem zvoleného trojciferného čísla. Je to totiž totéž číslo, které dostaneme tak, že zvolené trojciferné číslo vynásobíme číslem 1000 a přičteme ještě zvolené číslo. Jelikož číslo 1001 je násobkem čísla sedm, je i obdržené šestimístné číslo násobkem sedmi, tedy dělitelné sedmi.

Z8 - II - 2

V trojúhelníku ABC je $|AB| = 12$ cm, úhel při vrcholu A má velikost 30° , úhel při vrcholu B je 45° . Vypočtete obsah trojúhelníku ABC .

Řešení. Označme P patu výšky z bodu C na stranu AB (obr. 23). Je $v = |CP| = |PB|$, jelikož při vrcholu B je



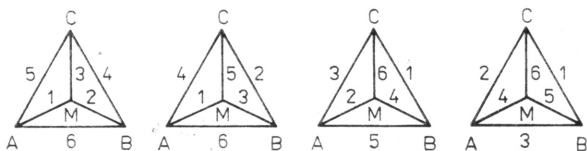
Obr. 23

úhel 45° . V pravouhlém trojúhelníku APC je $|AC| = 2v$, tedy podle Pythagorovy věty je $|AP| = v\sqrt{3}$. Bod P je bodem úsečky AB , proto je $12 = v\sqrt{3} + v$, odkud vypočteme $v = 6(\sqrt{3} - 1)$, obsah trojúhelníku je $36(\sqrt{3} - 1) \doteq 26,354$.

Z8 - II - 3

Uvnitř trojúhelníku ABC je zvolen bod M . Úsečky AB , BC , CA , AM , BM , CM jsou očíslovány čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, že součet tří čísel, kterými jsou očíslovány strany trojúhelníků ABM , BCM , CAM se rovná pro všechny tři trojúhelníky témuž číslu s . Určete všechny hodnoty, kterých může nabýt číslo s , ke každé udané hodnotě uveďte příklad očíslování.

Řešení. Číslo s může nabýt hodnot 9, 10, 11, 12, příklady očíslování jsou na obr. 24. Od žáků se nepožadovalo zdůvod-



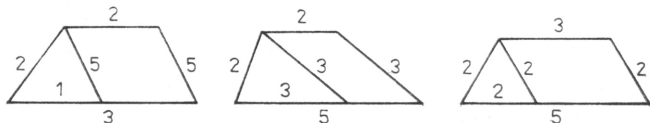
Obr. 24

nění, že jiných hodnot s nenabývá. Není to však těžké. Označíme-li a, b, c čísla přiřazená úsečkám AM, BM, CM , je $3s = 1 + 2 + \dots + 6 + a + b + c = 21 + a + b + c$. Součet $a + b + c$ je aspoň $1 + 2 + 3$ a nejvýše $4 + 5 + 6$, proto je s aspoň 9 a nejvýše 12.

Z8 - II - 4

Může mít lichoběžník strany velikostí 2, 2, 3, 5? Které z těchto hodnot jsou pak délkami jeho základů? Uveďte všechna řešení.

Řešení. Základny lichoběžníku nemohou mít stejné délky, jsou tedy myslitelné tyto tři případy: Základny mají délky 3 a 2, ramena 5 a 2, nebo jsou základny 2 a 5 a ramena 2 a 3, nebo by musel být lichoběžník rovnoramenný s rameny délky 2 a základnami délek 5 a 3. První případ nemůže nastat, protože neexistuje trojúhelník o stranách 1, 2, 5, zbývající dva případy jsou možné, viz obr. 25.



Obr. 25

ÚLOHY III. KOLA V ČSR

Z8 - III - 1

Na číselné ose leží pět navzájem různých bodů. Označte je A, B, C, D, E tak, aby zároveň platilo:

- bod A leží mezi body B a E ,
- bod C leží mezi body A a B ,
- bod D neleží mezi body B a E .

Najděte všechna řešení.

Řešení. Jelikož bod A leží mezi body B a E , je pořadí těchto tří bodů na číselné ose BAE nebo EAB . Protože bod C leží mezi body A , B , musí být pořadí bodů A , B , C , E buď $BCAE$ nebo $EACB$. Bod D neleží mezi body B , E , proto musí být buď na začátku celé pětice, nebo na konci.

Úloha má tudíž právě čtyři řešení: $DBCAE$, $BCAED$, $DEACB$, $EACBD$.

Z8 - III - 2

Jirka si chce nastříhat stejné obdélníkové kartičky s rozměry v celých centimetrech. Počet kartiček chce mít větší než 20, ale menší než 40, obsah jedné kartičky větší než 10 cm^2 , ale menší než 20 cm^2 . Ze všech kartiček chce složit obdélník tak, aby počet kartiček v řadě byl stejný jako počet řad. Obsah složeného obdélníku chce mít větší než 550 cm^2 , ale menší než 580 cm^2 . Určete všechny možné rozměry kartiček, které si může Jirka nastříhat.

Řešení. Jelikož Jirka chce kartičky složit do obdélníku tak, aby v každé řadě byl stejný počet kartiček jako je počet řad, je počet kartiček druhou mocninou přirozeného čísla. Má jich být aspoň 21 a méně než 40, přicházejí tedy v úvahu pouze čísla 25 a 36. Kdyby jich bylo 25, byl by celkový obsah všech kartiček menší než $25 \cdot 20 \text{ cm}^2 = 500 \text{ cm}^2$, což by neodpovídalo dalšímu požadavku úlohy. Počet kartiček musí být 36. Aby byl obsah všech kartiček větší než 550 cm^2 , musí být obsah jedné kartičky větší než $550 : 36 \text{ cm}^2$, tedy větší než 15 cm^2 . Podobně dostaneme, že obsah kartičky musí být menší než 17 cm^2 . Proto je obsah jedné kartičky 16 cm^2 , její rozměry jsou buď 1 cm a 16 cm , nebo 2 cm a 8 cm . Kar-

tička o rozměrech 4 cm a 4 cm by byla totiž čtvercová, nebyla by obdélníková.

Z8 - III - 3

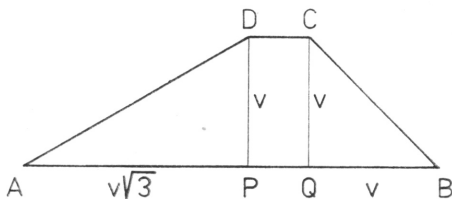
Určete všechna čtyřciferná čísla, která jsou dělitelná patnácti a jsou zapsána pouze ciframi z množiny $\{3, 4, 5\}$.

Řešení. Číslo je právě tehdy dělitelné číslem 15, je-li dělitelné číslem 5 a zároveň číslem 3. Číslo je dělitelné pěti, končí-li cifrou 0 nebo 5. Číslo je dělitelné právě tehdy třemi, je-li jeho ciferný součet dělitelný třemi. Čísla, která máme určit, musí tedy končit cifrou 5 a součet tří předcházejících cifer musí při dělení třemi dát zbytek 1. Můžeme ještě rozlišit, zda bude mezi těmito třemi ciframi jedna, dvě, tři pětky, nebo nebude na prvních třech místech žádná pětka. Při jedné pětce musí být obě dvě zbývající cifry 4, při dvou pětkách musí být zbývající cifra 3. Samé pětky nevyhovují a není-li mezi prvními třemi ciframi žádná pětka, musí to být cifry 3, 3, 4. Na pořadí prvních tří cifer nezáleží, úloze tudíž vyhovují právě čísla 5 445, 4 545, 4 455, 3 555, 5 355, 5 535, 3 345, 3 435, 4 335.

Z8 - III - 4

V lichoběžníku $ABCD$ je $AB \parallel CD$, $|AB| = 32,3$ cm, $|CD| = 5$ cm, $|\sphericalangle DAB| = 30^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 45^\circ$. Vypočítejte jeho obsah.

Řešení. Označme P a Q paty kolmic vedených body D a C na přímkou AB , obr. 26. Výšku lichoběžníku označíme v , je pak $|QB| = v$, $|AP| = v/\sqrt{3}$, což je možné odvodit podobně



Obr. 26

jako v úloze Z-II-2. Dále je $|AB| = 32,3 = |AP| + |PQ| + |QB|$, $|PQ| = |DC|$, odkud plyne $v(1 + \sqrt{3}) = 27,3$, tedy $v \doteq 10$, obsah pak je $186,5 \text{ cm}^2$.

ÚLOHY III. KOLA V SSR

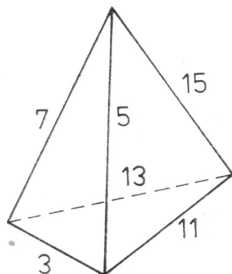
Z8 - III - 1

a) Očíslujte hrany štvorstena piatimi najmenšími nepárny-mi prvočíslami a číslom 15 tak, aby súčet čísel prislúchajúcich hranám podstavy sa rovnal súčtu čísel prislúchajúcich zvyš-ným hranám (nepatriacim podstave) a zároveň, aby sa rovnali súčty čísel prislúchajúcich každej dvojici mimobežných hrán. Riešenie načrtnite.

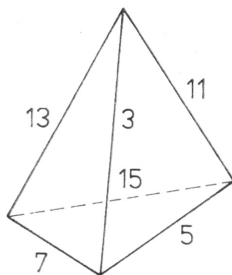
b) Nech číslo pripísané ku hrane určuje dĺžku hrany. Dá sa potom každý štvorsten vyhovujúci podmienkam z časti a) vymodelovať? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Riešenie. a) Hrany budeme číslovať číslami 3, 5, 7, 11, 13, 15. Pretože $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 15 = 54$ a $54 : 2 = 27$, hrany podstavy môžeme očíslovať číslami 3, 11, 13 alebo číslami 5, 7, 15. Pretože $54 : 3 = 18$, jednu dvojicu

mimobežných hrán môžeme očíslovať číslami 3, 15, druhú číslami 7, 11 a tretiu číslami 5, 13. Existujú teda dve riešenia (obr. 27a, b).



Obr. 27a

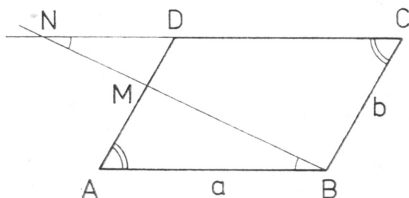


27b

b) Nedá. V 2. riešení by jedna stena musela byť trojuholník s rozmermi 3, 5, 11 a tie nevyhovujú trojuholníkovej nerovnosti.

Z8 - III - 2

Vo vnútri strany AD rovnobežníka $ABCD$ zvolte bod M . Priamka BM pretne priamku CD v bode N . Dokážte, že súčin dĺžok $d(AM) \cdot d(CN)$ nezávisí od voľby bodu M .



Obr. 28

Riešenie. V rovnobežníku $ABCD$ (obr. 28) označme

$$d(AB) = a, d(BC) = b.$$

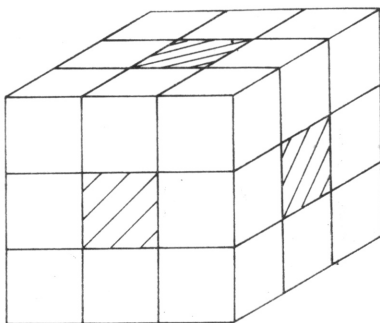
Pretože $|\sphericalangle BNC| = |\sphericalangle MBA|$ a $|\sphericalangle NCB| = |\sphericalangle BAM|$, platí, že $\triangle BCN \sim \triangle MAB$. Potom

$$\frac{d(CN)}{d(BC)} = \frac{d(AB)}{d(MA)}, \text{ t.j. } \frac{d(CN)}{b} = \frac{a}{d(MA)}.$$

Z toho dostávame, $d(CN) \cdot d(MA) = a \cdot b$.

Z8 - III - 3

Kocka s dĺžkou hrany 3 cm je poskladaná z 27 rovnakých malých kociek. Odstránime z nej tri »stĺpčky« kociek tak, ako je na (obr. 29) vyznačené šrafovaním. Vznikne teleso zložené z 20 kociek. Zistite súčet dĺžok hrán a súčet plôch stien takto vzniknutého telesa.



Obr. 29

Riešenie

Súčet dĺžok hrán pôvodnej kocky ... $12 \cdot 3 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$
súčet dĺžok »vnútorných« hrán $12 \cdot 3 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$
súčet dĺžok hrán, ktoré vzniknú na stenách $6 \cdot 4 \cdot 1 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$

celkový súčet 96 cm

súčet plôch »vonkajších« stien $6 \cdot 9 \text{ cm}^2 - 6 \text{ cm}^2 = 48 \text{ cm}^2$

súčet plôch »vnútorných« stien ... $6 \cdot 4 \cdot 1 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$

celkový súčet 72 cm²

Z8 - III - 4

Dané je 3-ciferné číslo. K nemu vytvoríme 6-ciferné číslo nasledujúcim spôsobom. Za spomínané 3-ciferné číslo napíšeme ďalšie 3-ciferné číslo, ktoré dostaneme z pôvodného tak, že každú z jeho cifier zmeníme na tzv. »komplementárnu«. (Dve cifry nazveme komplementárne, ak ich súčet je rovný 9. Napr. k číslu 296 by sme vytvorili číslo 296 703.) Zistite, pre ktoré 3-ciferné čísla platí, že k nim vytvorené 6-ciferné čísla sú deliteľné 90-imi.

Riešenie 1. Nech pôvodné 3-ciferné číslo má v desiatkovej sústave zápis abc . K nemu vytvorené 6-ciferné číslo má zápis $abc(9 - a)(9 - b)(9 - c)$.

$$\begin{aligned} abc(9 - a)(9 - b)(9 - c) &= a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + \\ &+ (9 - a) \cdot 10^2 + (9 - b) \cdot 10 + (9 - c) = \\ &= 99\,900a + 9\,900b + 999c + 999 = \\ &= 90 \cdot (1\,110a + 111b + 11c + 11) + 9c + 9 \end{aligned}$$

Z toho vidíme, že číslo 90 delí »naše« 6-ciferné číslo práve vtedy, keď $90|(9c + 9)$, t.j. práve vtedy, keď $c = 9$. Hľadané 3-ciferné čísla sú tie, ktoré majú na mieste jednotiek číslo 9.

Riešenie 2. Celé číslo je deliteľné 90-imi práve vtedy, keď je deliteľné 9-imi a 10-imi. Pretože ciferný súčet vytvoreného 6-ciferného čísla je 27 a $9|27$ je toto číslo deliteľné 90-imi práve vtedy, keď je deliteľné 10-imi, t.j. keď $9 - c = 0$. Z toho dostávame $c = 9$.

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

C - I - 1

Dokažte, že pro každý rozklad množiny $M = \{1, 2, \dots, 15\}$ na dvě disjunktní podmnožiny A, B platí: v alespoň jedné z množin A, B lze nalézt tři navzájem různá čísla x, y, z tak, že x je největší společný dělitel čísel y, z .

Řešení. Mohli bychom se pokusit vypsát všechny možné rozklady množiny M na dvě disjunktní podmnožiny A, B a ukázat přímo, že v každém rozkladu obsahuje aspoň jedna z množin A, B trojici čísel s popsanou vlastností. Vzhledem k tomu, že je těch rozkladů přes 16 tisíc, není tento postup prakticky možný. Zkusíme proto důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje rozklad množiny M na dvě disjunktní podmnožiny A, B tak, že v žádné z množin A, B neleží tři navzájem různá čísla x, y, z , pro která je číslo x největším společným dělitelem čísel y, z . Víme, že jedna z množin A, B obsahuje číslo 1, nechť je to množina A . V ní pak neleží žádná dvojice nesoudělných čísel z množiny M , různých od 1, protože největším společným dělitelem dvou nesoudělných čísel je číslo 1. Do množiny B nepatří současně

čísla 3, 9, 15, rovněž tak nepatří do množiny B současně čísla 2, 4, 14. Musí tedy do A patřit aspoň jedno z čísel 2, 4, 14 a aspoň jedno z čísel 3, 9, 15. To je však spor, neboť v množině A neleží žádná dvě nesoudělná čísla větší než 1. Místo trojice 2, 4, 14 jsme mohli vzít též trojici 2, 8, 14.

C - I - 2

Určete rozměry pravidelných čtyřbokých hranolů těchto vlastností:

- (1) délky jeho hran jsou vyjádřeny celými čísly,
- (2) velikost objemu hranolu a velikost povrchu hranolu jsou vyjádřeny tímž číslem.

Řešení. Velikost strany čtvercové podstavy hranolu označíme a , výšku hranolu označíme b . Pak se objem hranolu rovná a^2b , jeho povrch je $2a^2 + 4ab$. Máme tedy najít přirozená čísla a, b tak, aby splňovala rovnici $a^2b = 2a^2 + 4ab$, tj. $ab = 2a + 4b$. Poslední rovnici upravíme na tvar $(a - 4)(b - 2) = 8$. Uvážíme-li všechny možné rozklady čísla 8 na součin dvou přirozených čísel, dostaneme pro a, b tyto čtyři možnosti:

$$a - 4 = 1, \quad b - 2 = 8, \text{ tj. } a = 5, b = 10,$$

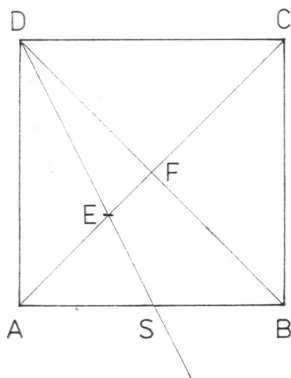
$$a - 4 = 2, \quad b - 2 = 4, \quad a = b = 6,$$

$$a - 4 = 4, \quad b - 2 = 2, \quad a = 8, b = 4,$$

$$a - 4 = 8, \quad b - 2 = 1, \quad a = 12, b = 3.$$

Úloha má čtyři řešení.

Na úhlopříčce AC daného čtverce $ABCD$ zvolme bod E tak, aby $|AE| = \frac{1}{3} |AC|$. Dokažte, že přímka DE protíná stranu AB v jejím středu.



Obr. 30

Řešení. Označme S průsečík přímek DE a AB (obr. 30). Z podobnosti trojúhelníků ASE , CDE ihned plyne $|AS| : |CD| = |AE| : |CE| = \frac{1}{2}$, takže $|AS| = \frac{1}{2} |CD| = \frac{1}{2} |AB|$. Tím je dokázáno, že S je střed úsečky AB .

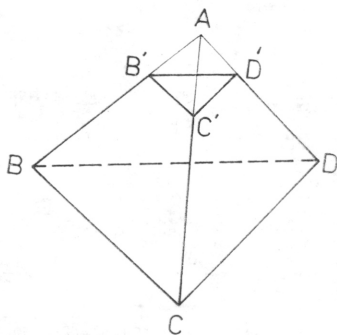
Jiný postup důkazu: Označme F střed čtverce. Bod E leží na úsečce AF a platí $|AE| = \frac{2}{3} |AF|$, $|BF| = |DF|$. Proto je

bod E těžištěm trojúhelníku ABD a přímka DE jeho těžnice. Ta protíná stranu AB trojúhelníku v jejím středu.

C - I - 4

Od pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ o hraně $|AB| = 6$ cm oddělíme pravidelný čtyřstěn $AB'C'D'$ o hraně $|AB'| = 2$ cm, kde $B' \in AB$, $C' \in AC$, $D' \in AD$. Vypočtěte povrch tělesa $BCDB'C'D'$. Oč je tento povrch menší než povrch původního čtyřstěnu $ABCD$?

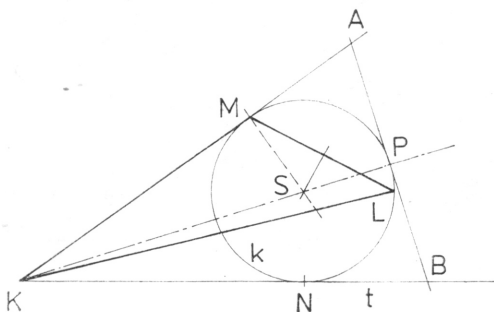
Řešení. Povrch čtyřstěnu $ABCD$ se rovná čtyřnásobku obsahu rovnostranného trojúhelníku o straně 6 cm, tj. $36\sqrt{3}$ cm². Povrch tělesa $BCDB'C'D'$ dostaneme z povrchu čtyřstěnu $ABCD$ tak, že odečteme obsahy trojúhelníků $AB'C'$, $AC'D'$, $AD'B'$ (obr. 31) a přičteme obsah trojúhelníku $B'C'D'$. Jsou to vesměs rovnostranné trojúhelníky o straně 2 cm, takže povrch tělesa $BCDB'C'D'$ je $34\sqrt{3}$ cm² a je o $2\sqrt{3}$ cm² menší než povrch čtyřstěnu $ABCD$.



Obr. 31

Je dán trojúhelník KLM . Sestrojte rovnoramenný trojúhelník KAB tak, aby kružnice mu vepsaná procházela bodem L a dotýkala se přímky KM v bodě M .

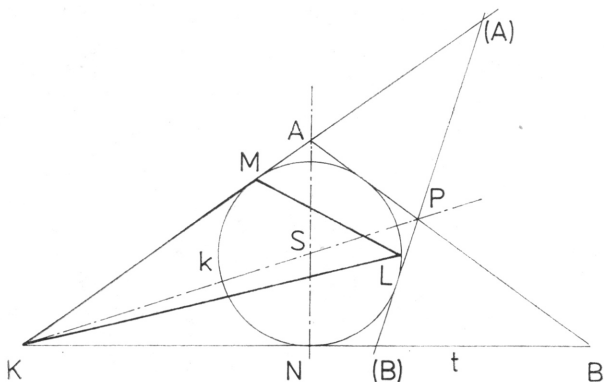
Řešení. Sestrojíme nejdříve kružnici k vepsanou hledanému trojúhelníku KAB . Její střed S leží na ose úsečky ML a na kolmici k přímce KM vedenou bodem M . Tyto dvě přímky nejsou rovnoběžné, takže jsou bod S a kružnice k jednoznačně určeny. Jedna strana trojúhelníku KAB je přímka KM , další strana je druhá tečna t vedená bodem K ke kružnici k , její bod dotyku označíme N (obr. 32). Hledaný troj-



Obr. 32

úhelník KAB má být rovnoramenný, proto musí být jedna z přímek KS , MS , NS jeho osou souměrnosti. Je-li to přímka KS , najdeme ten její průsečík P s kružnicí k , který leží mimo úsečku KS . Tečna kružnice k v bodě P je třetí strana hledaného trojúhelníku, její průsečíky s přímkami KM , KN jsou jeho vrcholy A , B . Má-li být přímka NS osou hledaného

trojúhelníku (obr. 33), je jeho vrchol A průsečíkem přímky NS a polopřímky KM , bod B je souměrně sdružený k bodu K podle středu N . Polopřímka KM však protne přímku NS



Obr. 33

jen tehdy, je-li $|\sphericalangle MKN| < 90^\circ$. V tom případě dostaneme další řešení z řešení právě sestrojeného souměrností podle přímky KS . V něm bude osou přímka MS . Je-li však $|\sphericalangle MKN| = 60^\circ$, všechna tři řešení splynou. Můžeme shrnout: Je-li $|\sphericalangle MKN| \geq 90^\circ$ nebo $|\sphericalangle MKN| = 60^\circ$, má úloha právě jedno řešení. V ostatních případech má úloha tři řešení, z nichž dvě jsou souměrně sdružená podle přímky KS .

C - I - 6

Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou vyjádřeny celými čísly, jedno z těchto čísel je 20. Jaké mohou být délky ostatních stran trojúhelníku?

Řešení. Nechť je 20 délka přepony, pro odvěsny a , b pak platí $b^2 = 20^2 - a^2 = (20 - a)(20 + a)$. Dosadíme-li za a postupně 1, 2, 3, ..., 19, dostaneme pro b^2 hodnoty 19.21, 18.22, 17.23, ..., 1.39. Z těchto čísel jsou však druhou mocninou přirozeného čísla pouze čísla 8.32 a 4.36. První dostaneme pro $a = 12$, je pak $b = 16$, druhé dostaneme pro $a = 16$, $b = 12$. Je-li 20 délka jedné odvěsny, platí pro druhou odvěsnu b a přeponu c vztah $400 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$. Čísla $c - b$, $c + b$ jsou buď obě lichá, nebo obě sudá, neboť jejich rozdíl je sudý, rovná se $2b$. Kdyby byla obě lichá, nemohl by se jejich součin rovnat číslu 400, musí být tedy obě sudá. Rozklady čísla 400 na součin dvou sudých čísel jsou 2.200, 4.100, 8.50, 10.40, 20.20, k nim dostaneme postupně tyto možnosti pro dvojice (c, b) : (101, 99), (52, 48), (29, 21), (25, 15), (20, 0). Poslední dvojice úloze nevyhovuje, délka odvěsny nemůže být nulová. S výše obdrženou dvojicí (12, 16) má úloha pět řešení.

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

C - S - 1

Najděte všechny dvojice přirozených čísel p , q , pro které platí

$$p^2 + 4p = q^2 + q$$

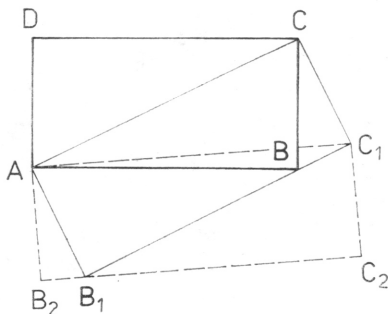
a p je prvočíslo.

Řešení. Protože $p(p + 4) = q(q + 1)$, musí být číslo p sudé, neboť číslo $q(q + 1)$ je vždy sudé. Jediné sudé prvo-

číslo je $p = 2$, pak je $q(q + 1) = 12$, tedy $q = 3$. Dvojice $p = 2, q = 3$ je jediné řešení úlohy.

C - S - 2

Je dán obdélník $ABCD$ o stranách $|AB| = a, |BC| = b$. Obdélník AB_1C_1C je sestaven tak, že jeho strana B_1C_1 prochází bodem B . Obdobně sestojíme obdélník $AB_2C_2C_1$ tak, aby jeho strana B_2C_2 procházela bodem B_1 . Vypočítejte délky stran obdélníku $AB_2C_2C_1$.



Obr. 34

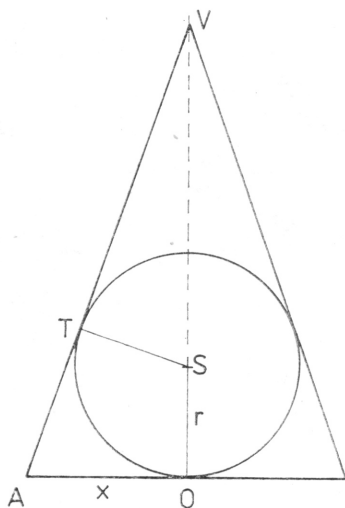
Řešení. Obdélníky $ABCD$ a AB_1C_1C mají stejné obsahy, jelikož trojúhelníky ABC a AB_1C mají stejné obsahy. Délka strany AC je $\sqrt{a^2 + b^2}$, proto je $|AB_1| = ab / \sqrt{a^2 + b^2}$. Pokračujeme-li v tomto postupu (obr. 34), dostaneme

$$|AC_1| = \sqrt{a^4 + 3a^2b^2 + b^4} / \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$|AB_2| = ab \sqrt{a^2 + b^2} / \sqrt{a^4 + 3a^2b^2 + b^4}.$$

Vypočtete poměr objemů rotačního kužele a koule jemu vepsané, jestliže je výška kužele dvakrát větší než průměr koule.

Řešení. Označme poloměr vepsané koule r , výška kužele e pak $v = 4r$. Označme ještě x poloměr kružnice, jež je

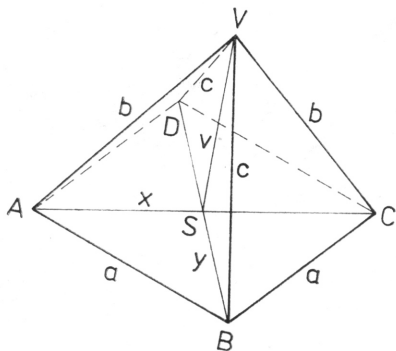


Obr. 35

podstavou kužele (obr. 35). Z pravoúhlého trojúhelníku TSV plyne $|TV| = 2r\sqrt{2}$, z pravoúhlého trojúhelníku AOV pak $(x + 2r\sqrt{2})^2 = x^2 + 16r^2$, tedy $x = r\sqrt{2}$. Proto je objem kužele $\frac{1}{3} \pi x^2 v = \frac{8}{3} \pi r^3$, hledaný poměr je 2.

Podstavou čtyřbokého jehlanu je kosočtverec o straně a , bočními stěnami jsou čtyři shodné trojúhelníky o stranách a , b , c . Vypočítejte jeho objem, je-li $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$.

Řešení. Podstavou jehlanu je kosočtverec $ABCD$, označme S jeho střed a V hlavní vrchol jehlanu. Je-li označení vrcholů kosočtverce zvoleno tak, že $|AV| = b$, je $|BV| = c$, a tedy



Obr. 36

$|CV| = b$, $|DV| = c$. Protože $|DV| = |BV|$, $|AV| = |CV|$, je pravouhlým průmětem bodu V do roviny ABC bod S , VS je výškou jehlanu. Označme $|VS| = v$, $|AS| = x$, $|BS| = y$. Je $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + v^2 = b^2$, $y^2 + v^2 = c^2$ (obr. 36).

Objem jehlanu je $\frac{1}{3} \cdot 2xyv$. Z předchozích rovností plyne

$2x^2 = a^2 + b^2 - c^2$, $2y^2 = a^2 + c^2 - b^2$, $2v^2 = b^2 + c^2 - a^2$,
takže se objem jehlanu rovná

$$\frac{1}{6} \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sqrt{a^2 + c^2 - b^2} \sqrt{b^2 + c^2 - a^2} \sqrt{2},$$

po dosazení daných hodnot a, b, c vyjde $4\sqrt{95}$.

ÚLOHY II. KOLA

C - II - 1

Najděte všechny trojice kladných čísel a, b, c , pro které platí současně rovnice

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} = c^2, \quad \frac{a}{c} = \frac{c}{b}.$$

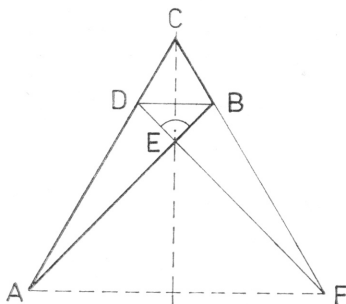
Řešení. Z první rovnice plyne $a^3 + b^3 = (a + b)c^2$. Dosadíme-li z druhé rovnice $c^2 = ab$, dostaneme $a^3 + b^3 = (a + b)ab$, po úpravě $(a - b)^2(a + b) = 0$. Protože a, b, c mají být kladná, mohou být řešením dané soustavy rovnic pouze trojice $a = b = c > 0$. Zkouškou se přesvědčíme, že tyto trojice jsou opravdu řešením.

C - II - 2

Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby uvnitř strany AC ležel bod D a uvnitř strany AB bod E s těmito vlastnostmi: Troj-

úhelník BCD je rovnostranný, trojúhelník BED je rovnoramenný a pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu E . Určete poměr $|AC| : |AE|$.

Řešení. Protože trojúhelník BCD má být rovnostranný, musí se velikost jeho úhlu při vrcholu C rovnat 60° . Sestrojíme tedy libovolný rovnostranný trojúhelník BCD , dále pravoúhlý a rovnoramenný trojúhelník BDE s pravým úhlem při vrcholu E tak, aby body E, C ležely v opačných polo-
rovinách s hraniční přímkou BD . Průsečík přímek CD a BE je bod A . Bod A existuje, protože přímky CD, BE nejsou rovnoběžné, bod D leží mezi body A, C , a trojúhelník ABC má požadované vlastnosti (obr. 37). Sestrojíme-li k bodu A



Obr. 37

bod F souměrně sdružený podle přímky CE , dostaneme rovnostranný trojúhelník CAF . Je pak $|AC| = |AF| = |AE|\sqrt{2}$, tedy $|AC| : |AE| = \sqrt{2}$.

C - II - 3a

Určete všechny dvojice prvočísel p, q , která splňují rovnici

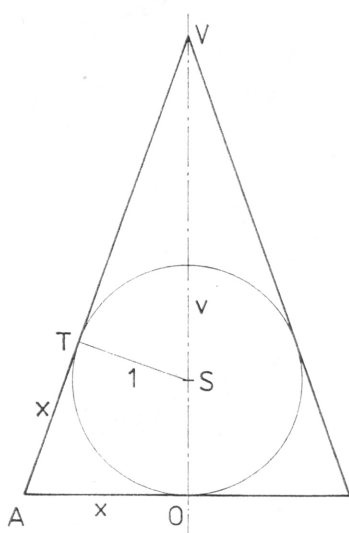
$$3p^2 + p = q^2 + 3q.$$

Řešení. Pro prvočísla p, q má platit $p(3p + 1) = q(q + 3)$. Pak musí existovat přirozené číslo k tak, že $3p + 1 = kq$, $q + 3 = kp$, tedy $3p + 1 = k(kp - 3)$, po úpravě $(k^2 - 3)p = 3k + 1$. Pro $k > 4$ je $k^2 - 3 > 3k + 1$ a nemůže existovat p splňující poslední rovnici. Z ostatních hodnot k vyhovuje pouze $k = 2$, je tedy $p = 7$, $q = 11$ jediné řešení úlohy.

C - II - 3b

Mezi všemi kuželi opsanými kouli o poloměru $r = 1$ najděte ty, jejichž objem je dvakrát větší než objem dané koule. Které kužele opsané této kouli mají objem menší, než je dvojnásobek objemu koule?

Řešení. Označme x poloměr podstavy a v výšku kužele opsaného kouli o poloměru $r = 1$ (obr. 38). Z pravoúhlých trojúhelníků AOV , STV plyne podle Pythagorovy věty $x^2 + v^2 = (x + \sqrt{(v - 1)^2 - 1})^2$, takže $x = v / \sqrt{v^2 - 2v}$, objem kužele je $V = \frac{1}{3} \frac{\pi v^2}{v - 2}$. Tato hodnota se rovná dvojnásobku objemu jednotkové koule právě tehdy, když v splňuje rovnici $v^2 = 8v - 16$, tj. $(v - 4)^2 = 0$. Z uvažovaných kuželů pouze kužel o výšce $v = 4$ má objem rovný dvojnásob-



Obr. 38

nému objemu jednotkové koule. Pro $v \neq 4$ je vždy číslo $(v - 4)^2$ kladné, objem kužele je pak větší $\frac{8}{3} \pi$. Žádný kužel opsaný kouli o poloměru 1 nemá objem menší, než je dvojnásobek objemu této koule.

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

B - I - 1

Zobrazení f roviny do sebe zobrazuje bod $[x, y]$ na bod $[ax + by + m, cx + dy + n]$, přičemž se body $[3, 0]$, $[1, 2]$ a $[-1, -1]$ zobrazí po řadě na body $[1, 4]$, $[-1, 2]$ a $[2, 0]$. Určete koeficienty a, b, c, d, m, n . Ukažte, že f je shodnost s jediným samodružným bodem, tedy otočení. Vypočtěte úhel otočení.

Řešení. Bod $[3, 0]$ se zobrazí na bod $[1, 4]$, musí tudíž platit $1 = 3a + m$, $4 = 3c + n$. Pro další dva body a jejich obrazy dostaneme analogicky další čtyři rovnice. Z obdržených šesti rovnic vypočteme $a = d = 0$, $b = -1$, $c = 1$, $m = n = 1$. Zobrazení f zobrazuje tudíž bod $[x, y]$ na bod $[-y + 1, x + 1]$, bod $[u, v]$ se zobrazí na bod $[-v + 1, u + 1]$. Protože $[(-y + 1) - (-v + 1)]^2 + [(x + 1) - (u + 1)]^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2$, rovná se vzdálenost libovolných dvou bodů vzdálenosti jejich obrazů, zobrazení f je shodné. Bod $[x, y]$ je právě tehdy samodružný, platí-li rovnice $x = -y + 1$, $y = x + 1$, proto má zobrazení f

jediný samodružný bod, je to bod $[0, 1]$. Bod $[1, 1]$ se zobrazí na bod $[0, 2]$, jde tedy o otočení o úhel 90° .

B - I - 2

Nechť jsou a, b nesoudělná přirozená čísla. Určete nejmenší přirozené číslo m tak, aby pro všechna přirozená čísla $c, c \geq m$, měly rovnice $ax + by = c$ řešení v oboru přirozených, tj. celých kladných čísel.

Řešení. Nejdříve si zkusíme určit číslo m pro některou volbu čísel a, b , například zvolíme $a = 2, b = 3$ nebo $a = 5, b = 3$. To nás vede k domněnce, že $m = ab + 1$. Ukážeme nejdříve, že rovnice

$$ax + by = ab$$

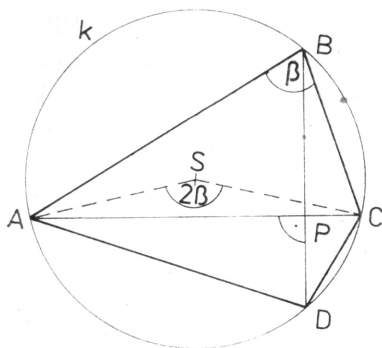
není řešitelná v oboru přirozených čísel. V opačném případě by se ax rovnalo $b(a - y)$, tedy číslo b by dělilo číslo ax . Protože čísla a, b jsou nesoudělná, muselo by být číslo x násobkem čísla b . To by ale bylo $ax \geq ab$ a nemohlo by platit $ax + by = ab$ pro přirozené číslo y . Nechť je nyní $c \geq ab + 1$. Jelikož a, b jsou nesoudělná, existují celá čísla u, v tak, že $au + bv = 1$. Položíme-li $x = cu, y = cv$, je $ax + by = c$. Jsou-li čísla x, y kladná, je řešitelnost rovnice $ax + by = c$ v oboru přirozených čísel dokázána. Je-li například $x \leq 0$, plyne z rovnosti $ax + by = c$ nerovnost $y > a$ a platí $a(x + b) + b(y - a) = c$. Je-li $x + b$ kladné, jsme hotovi, v opačném případě je $y - a > a$ a platí $a(x + 2b) + b(y - 2a) = c$. Je-li číslo $x + 2b$ přirozené, dokázali jsme řešitelnost rovnice $ax + by = c$ v oboru přiroze-

ných čísel, jinak musíme pokračovat obdobným způsobem. Po konečném počtu zvětšení čísla x o b a současném zmenšení čísla y o a dosáhneme toho, že obě čísla budou kladná, přirozená. Tím je důkaz dokončen.

B - I - 3

Je dána kružnice k . Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s kolmými úhlopříčkami AC , BD a vepsaný kružnici k , znáte-li velikosti α , β , γ , δ jeho vnitřních úhlů při vrcholech A , B , C , D . Určete podmínky řešitelnosti.

Řešení. Předpokládejme, že čtyřúhelník $ABCD$ vyhovuje podmínkám úlohy (obr. 39). Protože je to čtyřúhelník tětí-



Obr. 39

vový, je $\alpha + \gamma = \pi$ a zároveň $\beta + \delta = \pi$. Označme P průsečík úhlopříček čtyřúhelníku. Z pravoúhlého trojúhelníku ABP plyne $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, analogicky pro součet každých dvou

sousedních vnitřních úhlů čtyřúhelníku. Jsou tudíž $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$, $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, $\beta + \gamma > \frac{\pi}{2}$, $\gamma + \delta > \frac{\pi}{2}$ a

$\delta + \alpha > \frac{\pi}{2}$ nutné podmínky pro existenci čtyřúhelníku požadovaných vlastností. Ukážeme, že to jsou i podmínky postačující. Předpokládejme, že jsou splněny. Aspoň jedna z hodnot α, γ je nejvýše rovna $\frac{\pi}{2}$, nechť je třeba $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (ji-

nak by bylo $\gamma < \frac{\pi}{2}$ a další postup by byl obdobný). Stejně

tak můžeme předpokládat $\beta \leq \frac{\pi}{2}$. Označme ještě S střed

kružnice k a r její poloměr. Protože $|\sphericalangle ABC| = \beta$, je podle věty o obvodovém a středovém úhlu $|\sphericalangle ASC| = 2\beta$. Sestrojíme tedy libovolnou tětivu AC kružnice k , ke které přísluší středový úhel 2β . Pak sestrojíme tětivu BD kolmou na $\overline{AC}$ tak, aby jí příslušel středový úhel 2α . Musíme ještě dokázat, že se tyto dvě tětivy protnou v bodě vnitřní oblasti kružnice k .

Označme P průsečík přímek AC, BD . Vzdálenost přímky AC od středu S je $r \cos \beta$, vzdálenost bodu S od přímky BD je $r \cos \alpha$. Proto je $|SP|^2 = r^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)$. Jelikož je

$\beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$, je $\cos \beta < \sin \alpha$ a tedy $|SP| < r$, takže je bod P

bodem vnitřní oblasti kružnice k . Protože $|\sphericalangle ASC| = 2\beta$, je $|\sphericalangle ABC| = \beta$ nebo $|\sphericalangle ABC| = \pi - \beta$. V druhém případě zaměníme označení bodů B, D . Stejně tak zvolíme označení bodů C, A tak, aby $|\sphericalangle BAD| = \alpha$. Body A, B, C, D

pak tvoří čtyřúhelník podle zadání úlohy. Až na shodnost má úloha právě jedno řešení.

B - I - 4

Najděte všechna přirozená čísla n taková, že čísla $1, 2, \dots$, ..., n je možno opatřit znaménky $+$ a $-$ tak, aby se pak jejich součet rovnal nule.

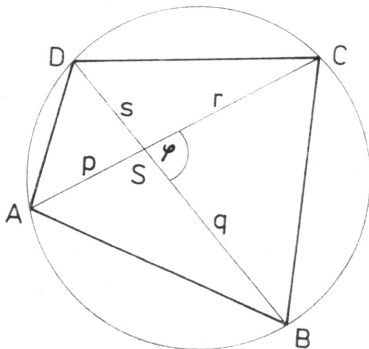
Řešení. Je $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Je-li toto číslo

liché, není možné opatřit čísla $1, 2, \dots, n$ znaménky podle podmínky úlohy. Součet čísel opatřených znaménkem $+$ by se musel rovnat součtu čísel opatřených znaménkem $-$ a součet obou těchto součtů by se rovnal lichému číslu, což

nemůže být splněno. Aby bylo číslo $\frac{n(n+1)}{2}$ sudé, musí

být $n = 4k$ nebo $n = 4k - 1$, kde k je přirozené číslo. Je-li $n = 4k$, můžeme čísla $1, 2, \dots, k, 3k + 1, 3k + 2, \dots, 4k$ opatřit znaménkem $+$, ostatní znaménkem $-$, pak je součet všech čísel opatřených takto znaménky nulový. Nebo jsme mohli čísla $1, 2, \dots, 4k$ rozdělit do k čtveřic za sebou jdoucích čísel a v každé čtveřici opatřit první a poslední číslo znaménkem $+$, prostřední dvě čísla znaménkem $-$. V případě $n = 4k - 1$ opatříme čísla $1, 2$ znaménkem $+$, číslo 3 znaménkem $-$, zbývajících $4k - 4$ čísel rozdělíme do $k - 1$ čtveřic za sebou jdoucích čísel, v každé čtveřici opatříme čísla znaménky výše uvedeným způsobem. Pak bude opět součet všech takto znaménky opatřených čísel nulový. Úloze tedy vyhovují právě všechna čísla dělitelná čtyřmi a všechna čísla, která dávají při dělení čtyřmi zbytek 3.

Najděte všechny tětíkové čtyřúhelníky $ABCD$ o obsahu 8 cm^2 , pro které platí $|AB| = |BC|$ a součet délek úhlopříček je 8 cm .



Obr. 40

Řešení. Označme S průsečík úhlopříček a p, q, r, s délky úseček SA, SB, SC, SD (obr. 40). Úhel úhlopříček označíme φ . Pak se obsah čtyřúhelníku rovná $\frac{1}{2} (pq + qr + rs +$

$+ sp) \sin \varphi$, takže má platit $8 = \frac{1}{2} (p + r)(q + s) \sin \varphi$. Sou-

časně platí $p + r + q + s = 8$. Pro každá dvě nezáporná čísla a, b platí $ab \leq \left(\frac{a + b}{2} \right)^2$, dosadíme-li za a, b čísla

$$p + r, q + s, \text{ dostaneme } 8 = \frac{1}{2} (p + r)(q + s) \sin \varphi \leq \frac{1}{8} \cdot$$

$\cdot (p + r + q + s)^2 \sin \varphi = 8 \sin \varphi \leq 8$. Protože první hodnota

se rovná poslední, musí v předcházejícím řádku platit všude znaménko rovnosti, tedy $\sin \varphi = 1$ a zároveň $a = b$, tj. $p + r = q + s = 4$. Čtyřúhelník $ABCD$ musí mít na sebe kolmé úhlopříčky stejných délek. Jelikož $|AB| = |BC|$, musí to být deltoid. A jelikož to má být čtyřúhelník tětiový se stejně dlouhými úhlopříčkami, musí to být čtverec. Jediný čtyřúhelník, který splňuje podmínky úlohy, je čtverec o straně $2\sqrt{2}$.

B - I - 6

K, M, N jsou konečné množiny reálných čísel s počtem prvků po řadě k, m, n . Označme L množinu všech čísel tvaru $x + y + z$, kde $x \in K, y \in M, z \in N$. Ukažte, že množina L má aspoň $k + m + n - 2$ prvků.

Řešení. Prvky množiny K označíme $x_1, x_2, \dots, x_k$. Můžeme předpokládat, že jsme je uspořádali tak, že platí $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Podobně můžeme předpokládat, že

$$M = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}, y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m,$$

$$N = \{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n\}, z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1} < z_n.$$

Pak jsou součty

$$x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_1 + z_1, \dots, x_k + y_1 + z_1,$$

$$x_k + y_2 + z_1, x_k + y_3 + z_1, \dots, x_k + y_m + z_1,$$

$$x_k + y_m + z_2, x_k + y_m + z_3, \dots, x_k + y_m + z_n$$

navzájem různé, každý z nich je větší než předcházející.

V prvním řádku je jich k , v druhém $m - 1$ a v třetím $n - 1$.

Tím jsme dokázali, že v množině L je aspoň $k + m + n - 2$

navzájem různých čísel. Je-li například $K = \{1, 2, \dots, k\}$,

$$M = \{1, 2, \dots, m - 1, m\}, N = \{1, 2, \dots, n - 1, n\},$$

je $L = \{3, 4, \dots, k + m + n\}$, množina L má právě $k + m + n - 2$ prvků.

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

B - S - 1

Zobrazení f roviny do sebe přiřadí bodu $[x, y]$ bod $[ax + by + m, cx + dy + n]$, přičemž se body $[-1, 3]$ a $[8, 0]$ zobrazí po řadě na body $[1, -1]$ a $[4, 8]$ a bod $[4, 3]$ se zobrazí na sebe. Určete koeficienty a, b, c, d, m, n a ukažte, že samodružné body zobrazení f tvoří přímku. (Bod je samodružný, jestliže se zobrazí na sebe.)

Řešení. Postupujeme obdobně jako v úloze B-I-1, vyjde $a = \frac{3}{5}, b = c = \frac{4}{5}, d = -\frac{3}{5}, m = -\frac{4}{5}, n = \frac{8}{5}$. Bod

$[x, y]$ je právě tehdy samodružný, platí-li $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Samodružné body tedy tvoří přímku.

B - S - 2

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n ($n > 1$) je možné čísla $1, 3, 5, \dots, 4n - 3, 4n - 1$ opatřit znaménky $+$ a $-$ tak, že se pak jejich součet rovná nule.

Řešení. Máme $2n$ za sebou jdoucích lichých čísel $1, 3, \dots, 4n - 1$. Tato čísla rozdělíme odzadu do čtveřic. Je-li n sudé, nezbyde žádné číslo. V každé čtveřici za sebou jdoucích lichých čísel $(2k - 3, 2k - 1, 2k + 1, 2k + 3)$ můžeme

k prvnímu a poslednímu dát znaménko $+$, k prostředním dvěma znaménko $-$, součet všech čísel v čtveřici a tudíž i součet všech uvažovaných čísel se pak rovná nule. Je-li n liché, postupujeme obdobně. Čísla rozdělíme odzadu do čtveřic až na prvních šest, které opatříme znaménky takto: $+1, +3, +5, -7, +9, -11$.

B - S - 3a

Ukažte, že neexistují přirozená čísla a, b tak, aby bylo číslo $a^3 + b^3 - 3$ dělitelné sedmi.

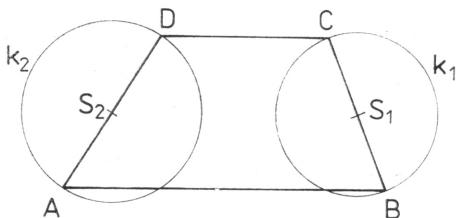
Řešení. Při dělení čísla a sedmi jsou možné zbytky 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, při dělení čísla a^3 sedmi jsou možné zbytky 0, 1, 6. Totéž platí pro číslo b^3 , součet $a^3 + b^3$ může dát při dělení sedmi pouze zbytky 0, 1, 6, 2 nebo 5. Proto číslo $a^3 + b^3 - 3$ dává při dělení sedmi zbytek 4, 5, 3, 6 nebo 2, nikdy však zbytek 0, takže není dělitelné sedmi.

B - S - 3b

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD . Úsečka BC je průměrem kružnice k_1 , úsečka AD je průměrem kružnice k_2 . Dokažte, že lichoběžníku $ABCD$ lze vepsat kružnici právě tehdy, jestliže se kružnice k_1, k_2 vně dotýkají.

Řešení. Středy S_1, S_2 kružnic k_1, k_2 (obr. 41) splývají se středy ramen BC, AD , je tudíž $|S_1 S_2| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$.

Pro poloměry r_1, r_2 kružnic k_1, k_2 platí $2r_1 = |BC|$, $2r_2 = |AD|$. Kružnice k_1, k_2 se vně dotýkají právě tehdy, je-li $r_1 + r_2 = |S_1 S_2|$, tedy $|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$. To je



Obr. 41

však nutná a postačující podmínka pro to, aby byl čtyřúhelník $ABCD$ tečnový.

ÚLOHY II. KOLA

B - II - 1

Zobrazení h roviny na sebe zobrazuje bod $[x, y]$ na bod $[ax + by + m, cx + dy + n]$, kde a, b, c, d, m, n jsou reálná čísla. Určete je tak, aby se body $[0, 0]$, $[3, 0]$, $[0, 1]$ zobrazily po řadě na body $[6, 3]$, $[0, 3]$, $[6, 1]$. Najděte samodružné body zobrazení h a rozhodněte, zda h je shodnost, podobnost, středová souměrnost, stejnoolehlost.

Řešení. Postupem stejným jako při řešení úloh B-I-1 a B-S-1 vypočteme $a = d = -2$, $b = c = 0$, $m = 6$, $n = 3$. Zobrazení h má jediný samodružný bod $S[2, 1]$. Zobrazení h není shodnost, tím spíše to není středová souměrnost. Zobrazení h je stejnoolehlost a tedy i podobnost, neboť pro každý bod $X \neq S$ jsou polopřímky SX , $Sh(X)$ opačné a $|Sh(X)| = 2|SX|$.

B - II - 2

Najděte všechna řešení soustavy rovnic

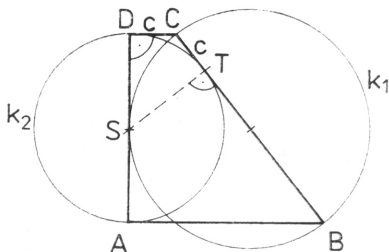
$$x + y + z = 3$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 27.$$

Řešení. Dosadíme-li $z = 3 - x - y$ do druhé rovnice, dostaneme po úpravě rovnici $(x + y)(x - 3)(y - 3) = 0$. Je-li $x + y = 0$, je $z = 3$. Je-li $x = 3$, je $z = -y$, podobně pro $y = 3$ je $z = -x$. Čísla x, y, z jsou řešením dané soustavy právě tehdy, je-li jedno z nich rovné 3 a zbývající dvě jsou libovolná dvě opačná čísla.

B - II - 3a

Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem při vrcholu A , základnami lichoběžníku jsou strany AB, CD . Dokažte, že kružnice nad průměrem BC se dotýká ramene AD právě tehdy, když se kružnice nad průměrem AD dotýká ramene BC .



Obr. 42

Řešení. Kružnice k_1 nad průměrem BC se dotýká ramene AD (obr. 42) právě tehdy, když platí $b = a + c$, kde $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, neboť střední příčka lichoběžníku je $\frac{a+c}{2}$ a poloměr kružnice k_1 je $\frac{b}{2}$. Dotýká-li se kružnice k_2 nad průměrem AD ramene BC , je $b = a + c$, jak vyplývá z rovnosti úseků na tečnách vedených bodem B , případně C , ke kružnici k_2 . Je-li obráceně $b = a + c$, můžeme na úsečce BC zvolit bod T tak, že $|CT| = c$, $|BT| = a$. Bodem T vedeme kolmici k přímce BC , její průsečík s přímkou AD označíme S . Ze shodnosti trojúhelníků SCD , SCT plyne $|SD| = |ST|$, stejně tak bychom dokázali, že $|SA| = |ST|$. Je tedy bod S střed kružnice k_2 . Z rovnosti $|SD| = |ST|$ plyne, že se kružnice k_2 dotýká ramene BC . Tím jsme dokázali, že kružnice k_2 se dotýká ramene BC tehdy a jen tehdy, je-li $b = a + c$. Jelikož tato rovnost je též nutnou a postačující podmínkou pro dotyk kružnice k_1 a přímky AD , je tím tvrzení úlohy dokázáno.

B - II - 3b

Nechť m je dané přirozené číslo. Množinu

$$M = \{1, 2, \dots, 2m-1, 2m\}$$

rozložte na dvě disjunktní podmnožiny A , B tak, aby každá z množin A , B měla právě m prvků a číslo $c = \max(s(A), s(B))$ bylo co nejmenší. Přitom $s(A)$, resp. $s(B)$, značí součet všech čísel z množiny A , resp. z množiny B . Určete číslo c v závislosti na m .

Řešení. Je $s(A) + s(B) = 1 + 2 + \dots + 2m = m(2m + 1)$.
Můžeme předpokládat, že je $s(A) \geq s(B)$. Číslo c bude nejmenší, budou-li se čísla $s(A)$, $s(B)$ sobě rovnat nebo bude-li jejich rozdíl co nejmenší, neboť jejich součet je dán. Je-li m sudé, $m = 2k$, zkusíme najít takové rozdělení, aby platilo $s(A) = s(B)$. Stačí položit $A = \{1, 2, \dots, k, 3k + 1, 3k + 2, \dots, 4k\}$, $B = \{k + 1, \dots, 3k\}$, porovnej s úlohou B-I-4. Je pak $c = s(A) = s(B) = \frac{m}{2}(2m + 1) =$
 $= m^2 + \frac{m}{2}$. Je-li m liché, je $s(A) + s(B)$ číslo liché, nemůže být $s(A) = s(B)$. Zkusíme najít takové rozdělení, aby $s(A) =$
 $= s(B) + 1$. Necht' $m = 2k + 1$. Čísla $1, 2, \dots, 4k$ rozdělíme do množin A, B jako v předcházejícím případě, do množiny A přidáme ještě číslo $4k + 2$, do množiny B přidáme číslo $4k + 1$. Je pak $c = s(A) = k(4k + 1) + 4k + 2 =$
 $= m^2 + \frac{m + 1}{2}$.

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

A - I - 1

Nechť $M = A_1A_2\dots A_n$ je konvexní n -úhelník ($n \geq 3$), $c_1, c_2, \dots, c_n$ reálná čísla. Pro $X \in M$ označme

$$f(X) = \sum_{i=1}^n c_i d_i,$$

kde d_i je vzdálenost bodu X od přímky A_iA_{i+1} , $1 \leq i \leq n$ ($A_{n+1} = A_1$).

a) Jestliže existují tři body X_1, X_2, X_3 neležící v přímce tak, že

$$f(X_1) = f(X_2) = f(X_3),$$

pak je funkce f konstantní na M .

b) Nalezněte všechny trojúhelníky a čtyřúhelníky, pro které je funkce f při $c_i = 1$ konstantní (tj. součet vzdáleností bodu X od stran M je konstantní).

Řešení. a) Označme u_i jednotkový normálový vektor

přímky $A_i A_{i+1}$ směřující ven z daného n -úhelníku. Vzdálenost d_i bodu $X \in M$ od přímky $A_i A_{i+1}$ pak dostaneme jako skalární součin

$$d_i = (\mathbf{X} \mathbf{A}_i, \mathbf{u}_i).$$

Vzhledem k tomu, že

$$f(X) = \sum_{i=1}^n c_i d_i = \sum_{i=1}^n c_i (\mathbf{X} \mathbf{A}_i, \mathbf{u}_i), \text{ je}$$

$$f(X) - f(X_1) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{X} \mathbf{A}_i - \mathbf{X}_1 \mathbf{A}_i, c_i \mathbf{u}_i) = (\mathbf{X} \mathbf{X}_1, \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i).$$

Rovnost $f(X_1) = f(X_2) = f(X_3)$ tedy znamená, že pro vektor

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i \text{ platí}$$

$$(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2, \mathbf{u}) = (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_3, \mathbf{u}) = 0.$$

Avšak vektory $\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2$ a $\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_3$ jsou lineárně nezávislé, protože body X_1, X_2, X_3 neleží v přímce. Proto musí být $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ a pro libovolný bod $X \in M$ pak platí

$$f(X) - f(X_1) = (\mathbf{X} \mathbf{X}_1, \mathbf{u}) = 0,$$

neboli f je na M konstantní.

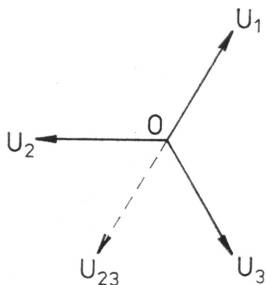
b) Jak plyne z předcházející části, funkce f je pro $c_i = 1$ konstantní na M , právě když

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

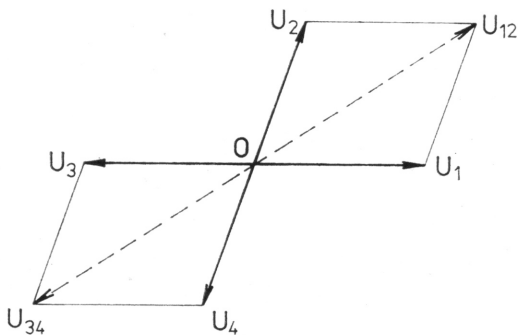
Umístíme vektory $\mathbf{u}_i$ do počátku soustavy souřadnic. Je-li $n = 3$, musí být (obr. 43)

$$|OU_2| = |OU_3| = |OU_{23}| = 1,$$

takže trojúhelník OU_2U_{23} je rovnostranný podobně jako trojúhelník OU_3U_{23} . Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ tedy svírají navzájem úhel 120° , odkud plyne, že M je rovnostranný trojúhelník.



Obr. 43



Obr. 44

Je-li $n = 4$, musí být (obr. 44) $|OU_{12}| = |OU_{34}|$, takže trojúhelníky $OU_{12}U_2$, $U_{34}OU_3$, $U_{12}OU_1$ a $OU_{34}U_4$ jsou shodné. Je tedy $\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_4$ a $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_3$, což ale znamená, že M je rovnoběžník.

To, že obráceně pro každý rovnostranný trojúhelník a pro každý rovnoběžník je uvedená funkce f při $c_i = 1$ konstantní, je zřejmé.

A - 1 - 2

Nechť m je přirozené číslo, p prvočíslo. Označme

$$\begin{aligned} m!! &= 1.3.5. \dots .m \text{ pro } m \text{ liché,} \\ &= 2.4.6. \dots .m \text{ pro } m \text{ sudé} \end{aligned}$$

tzv. dvojný faktoriál. Určete nejvyšší mocninu prvočísla p , která ještě dělí číslo $m!!$.

Řešení. Nejdříve zjistíme, že pro $m = 2k$ sudé je

$$(2k)!! = 2.4. \dots .2k = 2^k k!,$$

pro $m = 2k + 1$ liché je

$$(2k + 1)!! = 1.3. \dots .(2k + 1) = \frac{(2k + 1)!}{(2k)!!} = \frac{m!}{2^k k!}.$$

Je-li p prvočíslo, je mezi n činiteli čísla $n!$ právě $\left[\frac{n}{p} \right]$ čísel tvaru p , $2p$, $3p$, $\dots$, kde $[x]$ označuje největší celé číslo nejvýše rovné x . Mezi těmito čísly je ovšem ještě právě $\left[\frac{n}{p^2} \right]$

čísel dělitelných p^2 a ovšem ještě $\left[\frac{n}{p^3} \right]$ čísel dělitelných dokonce p^3 atd. Celkem můžeme tedy z čísla $n!$ vytknout p^a , kde

$$a = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots = \sum_{i \geq 1} \left[\frac{n}{p^i} \right]$$

(přitom uvedený součet má zřejmě jen konečný počet nenulových sčítanců).

Pro $m = 2k$ je tedy

$$a = \sum_{i \geq 1} \left[\frac{k}{p^i} \right] \quad \text{pro } p > 2,$$

$$a = k + \sum_{i \geq 1} \left[\frac{k}{2^i} \right] = \sum_{i \geq 0} \left[\frac{k}{2^i} \right] \quad \text{pro } p = 2.$$

Pro $m = 2k + 1$ je

$$a = \sum_{i \geq 1} \left(\left[\frac{m}{p^i} \right] - \left[\frac{k}{p^i} \right] \right) \quad \text{pro } p > 2,$$

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i \geq 1} \left(\left[\frac{m}{2^i} \right] - \left[\frac{k}{2^i} \right] \right) - k = \sum_{i \geq 1} \left(\left[\frac{m}{2^i} \right] - \left[\frac{k}{2^{i-1}} \right] \right) = \\ &= 0 \quad \text{pro } p = 2, \end{aligned}$$

$$\text{protože pro } i \geq 1 \text{ je } \left[\frac{2k+1}{2^i} \right] = \left[\frac{k}{2^{i-1}} \right].$$

Místo posledního výpočtu si ovšem můžeme uvědomit, že $m!!$ je pro liché m rovněž liché.

A - I - 3

Dokažte, že

a) v tětíkovém pětiúhelníku s vnitřními úhly $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ (v tomto pořadí) platí

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_5 = 3\pi,$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 > \pi, \alpha_2 + \alpha_4 > \pi, \dots, \alpha_5 + \alpha_2 > \pi;$$

b) jsou-li $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ duté úhly ($0 < \alpha_i < \pi$) splňující všechny uvedené vztahy, pak existuje tětíkový pětiúhelník s vnitřními úhly α_i (v tomto pořadí).

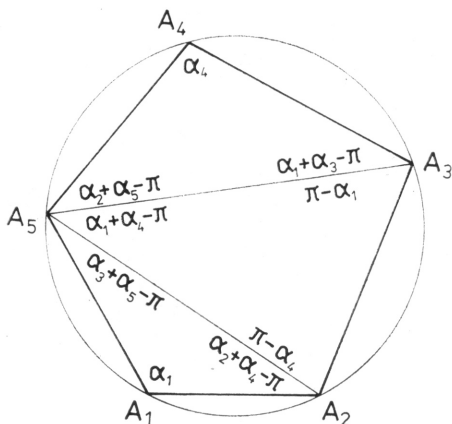
Řešení. Část a) je velmi jednoduchá. Snadno zjistíme (rozdělením na trojúhelníky), že součet úhlů v libovolném n -úhelníku (i nekonvexním, požadujeme pouze, aby se uzavřená lomená čára určená posloupností vrcholů n -úhelníku neprotínala) je $(n - 2)\pi$. Je tedy speciálně

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 = 3\pi.$$

Dále použijeme toho, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětíkový, právě když pro jeho úhly platí $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$. Pomocí tohoto vztahu spočteme úhly na obr. 45. Odtud plynou nerovnosti

$$\alpha_1 + \alpha_3 > \pi, \alpha_2 + \alpha_4 > \pi, \dots, \alpha_5 + \alpha_2 > \pi.$$

b) Splňují-li duté úhly α_i uvedené nerovnosti, můžeme sestavit trojúhelník $A_1A_2A_5$ s úhly $\alpha_1, \alpha_3 + \alpha_5 - \pi, \alpha_2 +$



Obr. 45

$+ \alpha_4 - \pi$ a v polorovině opačné k $A_2A_5A_1$ trojúhelník $A_2A_3A_5$ s úhly $\pi - \alpha_4$, $\pi - \alpha_1$, $\alpha_1 + \alpha_4 - \pi$. Protože $|\sphericalangle A_5A_1A_2| + |\sphericalangle A_2A_3A_5| = \alpha_1 + \pi - \alpha_1 = \pi$, leží vrchol A_3 na kružnici opsané trojúhelníku $A_1A_2A_5$. Podobně lze sestavit trojúhelník $A_5A_3A_4$ v polorovině opačné k $A_3A_5A_2$, a protože $|\sphericalangle A_5A_2A_3| + |\sphericalangle A_3A_4A_5| = \pi$, leží vrchol A_5 na kružnici opsané čtyřúhelníku $A_1A_2A_3A_4$. Takto sestrojený pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ je tedy tětiový a snadno zjistíme, že jeho úhly jsou $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$.

A - 1 - 4

Nechť x_i jsou kladná reálná čísla, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 2$. Pak pro každé celé k , $1 \leq k < n$, je

$$\frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k x_i + \frac{1}{(n-k)^2} \sum_{i=k+1}^n x_i \geq 2.$$

Dokažte.

Řešení. Položme nejprve

$$y_i = \frac{1}{k}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$y_i = \frac{1}{n-k}, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

Máme tedy dokázat nerovnost

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 x_i \geq 2 = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Uvedená nerovnost však plyne z Cauchyovy nerovnosti

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2};$$

stačí, když napíšeme

$$2 = \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n y_i \sqrt{x_i} \frac{1}{\sqrt{x_i}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 x_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}},$$

a protože $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 2$, plyne odtud požadovaná nerovnost.

Najděte nejmenší k taková, že platí: je-li dán libovolný trojúhelník ABC se stranami $a \leq b \leq c$, pak existuje

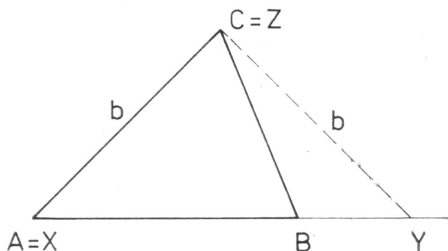
a) rovnoramenný trojúhelník XYZ ,

b) pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník XYZ ,

který obsahuje trojúhelník ABC a pro jehož obsah platí

$$P_{XYZ} \leq kb^2.$$

Řešení. a) Uvažujme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC , jeho obsah je $P_{ABC} = \frac{1}{2} b^2$. Pro každý rovnoramenný trojúhelník XYZ , který obsahuje trojúhelník ABC , je tedy $P_{XYZ} \geq \frac{1}{2} b^2$, tedy $k \geq \frac{1}{2}$. Zároveň je zřejmé, že ke každému trojúhelníku ABC se stranami $a \leq b \leq c$ sestrojíme rovnoramenný trojúhelník XYZ s vrcholy $X = A$, $Z = C$, jehož dvě ramena mají délku b (obr. 46) a jehož obsah je $P_{XYZ} =$



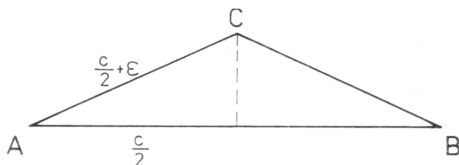
Obr. 46

$$= \frac{1}{2} b^2 \sin \gamma \leq \frac{1}{2} b^2. \text{ Odtud plyne, že v tomto případě je}$$

$$k = \frac{1}{2}.$$

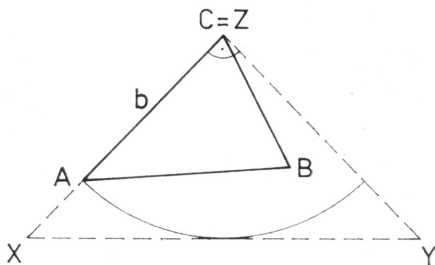
b) Pro každý pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník XYZ , který obsahuje trojúhelník ABC se stranami $a \leq b \leq c$, zřejmě platí, že jeho přepona je alespoň c , je tedy $P_{XYZ} \geq \frac{1}{4} c^2$.

Uvažujme rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou c a rameny délky $b = \frac{c}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (obr. 47). Pro takový trojúhelník pak ale máme $P_{XYZ} \geq (b - \varepsilon)^2$, což musí platit pro libovolné $\varepsilon > 0$, je tedy $k \geq 1$.



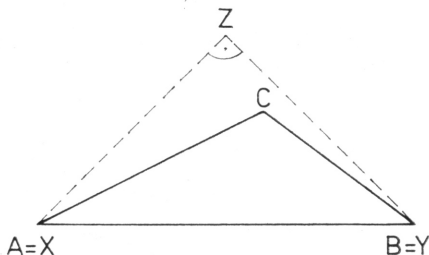
Obr. 47

Je-li nyní ABC ostroúhlý (nebo pravoúhlý) trojúhelník se stranami $a \leq b \leq c$, pak leží v pravoúhlé kruhové výseči se středem C a poloměrem b (obr. 48), a pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník XYZ , který obsahuje uvedenou výseč a má pravý úhel při vrcholu $Z = C$, má obsah $P_{XYZ} = b^2$.

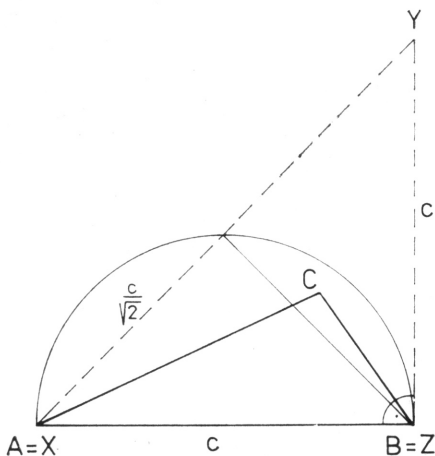


Obr. 48

Je-li ABC tupouhlý trojúhelník se stranami $a \leq b \leq c$, pak je buď celý obsažen v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku s přeponou c (obr. 49), anebo je obsažen v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku s odvěsnou c (obr. 50). První případ nastane pro $\alpha \leq \beta \leq 45^\circ$, přičemž $P_{XYZ} = \frac{c^2}{4} \leq b^2$, protože $c \leq a + b \leq 2b$. V druhém případě je $45^\circ < \beta < 90^\circ$ a $b \geq \frac{c}{\sqrt{2}}$, takže $P_{XYZ} = \frac{1}{2} c^2 \leq b^2$. V případě b) je tedy $k = 1$.

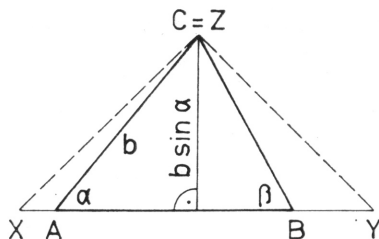


Obr. 49



Obr. 50

Poznámka. Pro ostroúhlý trojúhelník ABC se stranami $a \leq b \leq c$ můžeme ovšem najít pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník XYZ , který splňuje nerovnost $P_{XYZ} \leq \frac{3}{4} b^2$.



Obr. 51

Je-li $\alpha \leq 45^\circ$, stačí sestavit trojúhelník XYZ s vrcholy $X = A$, $Z = C$ a pravým úhlem při vrcholu Z . Pro $45^\circ < \alpha \leq 60^\circ$ sestavíme trojúhelník XYZ s pravým úhlem při vrcholu $Z = C$ a s výškou, která splývá s výškou trojúhelníku ABC (obr. 51). Pak je $P_{XYZ} = b^2 \sin^2 \alpha \leq \frac{3}{4} b^2$.

Je pro ostroúhlý trojúhelník ABC konstanta $k = \frac{3}{4}$ nejmenší?

A - I - 6

Mějme n^2 reálných čísel uspořádaných do čtvercové tabulky $n \times n$ a necht' je jejich součet roven nule. Označme C aritmetický průměr čtverců těchto čísel, s_j aritmetický průměr čísel v j -tém sloupci, r_i aritmetický průměr čísel v i -tém řádku tabulky, S bude aritmetický průměr čísel s_j^2 a R aritmetický průměr čísel r_i^2 . Potom platí nerovnost

$$C \geq R + S.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

Řešení. Označme x_{ij} číslo v i -tém řádku a j -tém sloupci tabulky. Potom platí

$$\sum_{i,j=1}^n x_{ij} = 0, \quad r_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad s_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij},$$

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2, \quad S = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j^2.$$

Zřejmě také platí

$$\sum_{i=1}^n r_i = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n s_j = 0,$$

takže je

$$\sum_{i,j=1}^n r_i s_j = \sum_{i=1}^n r_i \sum_{j=1}^n s_j = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^n (r_i + s_j)^2 = \sum_{i,j=1}^n (r_i^2 + 2r_i s_j + s_j^2) = \sum_{i,j=1}^n (r_i^2 + s_j^2).$$

Zároveň je

$$R + S = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 + \sum_{j=1}^n s_j^2 \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n (r_i^2 + s_j^2),$$

máme tedy dokázat nerovnost

$$\sum_{i,j=1}^n (r_i + s_j)^2 \leq \sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2.$$

Položme

$$d_{ij} = x_{ij} - (r_i + s_j),$$

pak je

$$\sum_{i=1}^n d_{ij} = \sum_{i=1}^n x_{ij} - n s_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} - nr_i = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2 &= \sum_{i,j=1}^n (d_{ij} + r_i + s_j)^2 = \\ &= \sum_{i,j=1}^n d_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^n (r_i + s_j)^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n d_{ij} (r_i + s_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n d_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^n (r_i + s_j)^2 \geq \sum_{i,j=1}^n (r_i + s_j)^2, \end{aligned}$$

čož jsme chtěli dokázat. Přitom rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je

$$d_{ij} = 0, \text{ tj. } x_{ij} = r_i + s_j.$$

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

A - S - 1

Dané sú reálne nezáporné čísla a_1, a_2, b_1, b_2 . Dokážte, že platí

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)(a_1 b_2 + a_2 b_1) \leq \frac{(a_1 + a_2)^2 (b_1 + b_2)^2}{4}.$$

Kedy platí rovnosť?

Řešení. Pro libovolná dvě reálná čísla platí

$$xy \leq \frac{(x + y)^2}{4},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $x = y$. Položíme-li $x = a_1b_1 + a_2b_2$, $y = a_1b_2 + a_2b_1$, dostaneme dokazovanou nerovnost, přičemž rovnost platí, právě když

$$a_1b_1 + a_2b_2 = a_1b_2 + a_2b_1,$$

což můžeme upravit na tvar

$$(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) = 0.$$

V uvedené nerovnosti tedy nastane rovnost, právě když je $a_1 = a_2$ nebo $b_1 = b_2$.

A - S - 2

Je dán konvexní tětíkový pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ s vnitřními úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ (v tomto pořadí). Vypočtete velikosti $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ úhlů $A_4A_1A_3, A_5A_2A_4, A_1A_3A_5, A_2A_4A_1, A_3A_5A_2$.

Řešení. Čtyřúhelníky $A_1A_2A_3A_4$ a $A_1A_3A_4A_5$ jsou tětíkové. V trojúhelníku $A_1A_3A_4$ tedy platí

$$|\sphericalangle A_1A_4A_3| = 180^\circ - \alpha_2,$$

$$|\sphericalangle A_1A_3A_4| = 180^\circ - \alpha_5,$$

takže

$$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_5 - 180^\circ,$$

ostatní velikosti dostaneme cyklickou záměnou indexů:

$$\beta_2 = \alpha_3 + \alpha_1 - 180^\circ, \beta_3 = \alpha_4 + \alpha_2 - 180^\circ,$$

$$\beta_4 = \alpha_5 + \alpha_3 - 180^\circ, \beta_5 = \alpha_1 + \alpha_4 - 180^\circ.$$

A - S - 3a

V rovině se zvolenou pravoúhlou soustavou souřadnic je dán rovnostranný trojúhelník se stranou délky $2\sqrt{3}$ a kruh o poloměru $\frac{1}{2}$. Dokažte, že existuje aspoň jeden mřížový bod, který leží uvnitř daného trojúhelníku a neleží uvnitř daného kruhu. (Mřížový bod je bod, jehož obě souřadnice jsou celá čísla.)

Řešení. Poloměr kružnice vepsané danému trojúhelníku je 1, proto odpovídající kruh K obsahuje aspoň dva mřížové body. Každý bod roviny leží totiž aspoň ve dvou kruzích o poloměru 1 se středy v mřížových bodech. Přitom leží buď dva mřížové body uvnitř kruhu, nebo je středem kruhu K mřížový bod a další čtyři mřížové body leží na jeho hranici, takže nejvýše jeden z nich leží na hranici daného trojúhelníku. V každém případě leží uvnitř daného trojúhelníku aspoň dva mřížové body. Uvnitř každého kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$ však leží nejvýše jeden mřížový bod, proto aspoň jeden

mřížový bod leží uvnitř daného trojúhelníku a neleží uvnitř daného kruhu.

A - S - 3b

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je nejmenší společný násobek čísel $1, 2, \dots, 2n - 1, 2n$ dělitelný číslem $\binom{2n}{n}$.

Řešení. Číslo $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! n!}$ rozložíme v součin mocnin prvočísel; nechť v tomto rozkladu je prvočíslo p s exponentem a . Pak je

$$a = \sum_{i \geq 1} \left[\frac{2n}{p^i} \right] - 2 \sum_{i \geq 1} \left[\frac{n}{p^i} \right].$$

Protože pro každé reálné číslo x je $0 \leq [2x] - 2[x] \leq 1$, rovná se a nejvýše počtu nenulových sčítanců v prvním součtu, tedy $a \leq b$, kde b je největší celé číslo, pro něž ještě platí $p^b \leq 2n$. Číslo p^a tedy dělí jedno z čísel $1, 2, \dots, 2n$, totiž p^b , proto p^a dělí i jejich nejmenší společný násobek. Protože to platí pro každé prvočíslo p v rozkladu čísla $\binom{2n}{n}$ na prvočinitele, je důkaz hotov.

ÚLOHY II. KOLA

A - II - 1

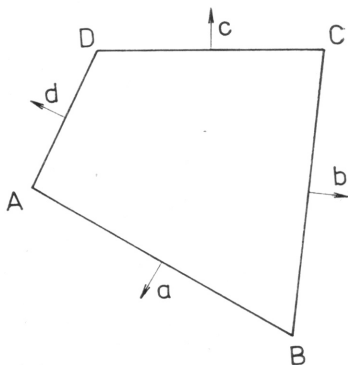
Je-li X vnitřním bodem konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, označme u, v, x, y jeho vzdálenosti od přímek AB, BC ,

CD , DA . Dokažte, že existují kladná čísla α , β , γ , δ taková, že součet $\alpha u + \beta v + \gamma x + \delta y$ je stejný pro všechny vnitřní body čtyřúhelníku $ABCD$.

Řešení. Úsečky AX , BX , CX a DX rozdělí čtyřúhelník $ABCD$ na čtyři nepřekrývající se trojúhelníky, proto je $|AB|u + |BC|v + |CD|x + |DA|y = 2P$, kde P je obsah čtyřúhelníku $ABCD$. Uvedený součet tedy nezávisí na volbě bodu X uvnitř či na hranici čtyřúhelníku, můžeme proto za α , β , γ a δ vzít velikosti úseček AB , BC , CD a DA , případně jejich násobky libovolným kladným číslem k .

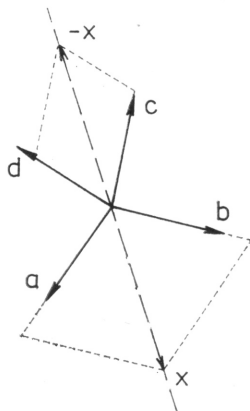
Jiné řešení. Můžeme ovšem také použít stejného postupu jako při řešení úlohy A-I-1. Označíme-li $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vnější normálové (jednotkové) vektory jednotlivých stran čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 52), máme dokázat existenci kladných čísel α , β , γ , δ takových, že $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

Z lineární závislosti čtyř vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ v rovině plyne



Obr. 52

pouze existence *reálných* konstant. Stačí si však uvědomit, že vektory **a**, **b**, **c**, **d** při umístění do počátku nemohou všechny ležet v jedné polorovině (libovolné dva sousední vektory spolu svírají dutý úhel), existuje tedy přímka (obr. 53),



Obr. 53

která prochází počátkem a leží jak mezi vektory **a**, **b**, tak mezi vektory **c**, **d**. Vezmeme-li libovolné dva opačné vektory ve směru uvedené přímky, je zřejmé, že existují kladná čísla α , β a γ , δ taková, že

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \quad -\mathbf{x} = \gamma \mathbf{c} + \delta \mathbf{d},$$

tj.

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} + \delta \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Můžeme si ovšem též uvědomit, že vektor **a** dostaneme z vektoru **AB** otočením o -90° a vynásobením číslem $|\mathbf{AB}|$,

podobně dostaneme i další vektory **b**, **c**, **d**. Protože $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CD} + \mathbf{DA} = \mathbf{0}$, plyne odtud stejný výsledek jako v prvním řešení.

A - II - 2

Dané sú celé čísla n, k také, že $n > k > 0$. Dokážte, že existujú celé nezáporné čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ také, že

$$\begin{aligned} k(c_1 + \dots + c_k) + (n - k)(c_{k+1} + \dots + c_n) &\leq \\ &\leq p(c_1 + \dots + c_p) + (n - p)(c_{p+1} + \dots + c_n) \end{aligned}$$

platí pre všetky $p \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$.

Řešení. Takto formulovaná úloha je vcelku triviální, neboť za celá *nezáporná* čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ můžeme ve všech nerovnostech volit samé nuly. K osudné záměně s čísly celými kladnými došlo až při konečné úpravě textů úloh II. kola, když se ukázalo, že termín »přirozená čísla« není v současných školních textech jednotně definován. Pro úplnost uvedme ještě i »netriviální« řešení.

Podobně jako při řešení úlohy A-I-4 použijeme nerovnost

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \sum_{i=1}^n y_i^2 x_i \geq \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2,$$

která pro nezáporná reálná čísla $x_i, y_i, x_i \neq 0$, plyne z Cauchyovy nerovnosti. Pro $x_1 = x_2 = \dots = x_p = p, x_{p+1} = \dots = x_n = n - p$ ($1 \leq p < n$) a pro $y_i = \sqrt{c_i}$ dostaneme nerovnosti

$$p(c_1 + \dots + c_p) + (n - p)(c_{p+1} + \dots + c_n) \geq \\ \geq \frac{1}{2} (\sqrt{c_1} + \dots + \sqrt{c_n})^2.$$

Pro dané k , $0 < k < n$, zkusme položit $c_1 = c_2 = \dots = c_k = A$, $c_{k+1} = c_{k+2} = \dots = c_n = B$, pak je

$$\frac{1}{2} (\sqrt{c_1} + \dots + \sqrt{c_n})^2 = \frac{1}{2} (k\sqrt{A} + (n - k)\sqrt{B})^2$$

a

$$k(c_1 + \dots + c_k) + (n - k)(c_{k+1} + \dots + c_n) = \\ = k^2 A + (n - k)^2 B.$$

Rovnost

$$\frac{1}{2} (k\sqrt{A} + (n - k)\sqrt{B})^2 = k^2 A + (n - k)^2 B,$$

neboli

$$(k\sqrt{A} - (n - k)\sqrt{B})^2 = 0$$

je splněna např. pro celá kladná čísla $A = (n - k)^2$, $B = k^2$.

Uvedeným nerovnostem tedy vyhovují např. přirozená čísla $c_1 = c_2 = \dots = c_k = (n - k)^2$, $c_{k+1} = \dots = c_n = k^2$.

Nájdite všechny celé nezáporné čísla k také, že $\binom{2k-1}{k}$ je číslo nepárne.

Řešení. Podle definice kombinačního čísla je

$$\begin{aligned}\binom{2k-1}{k} &= \frac{(2k-1)!}{(k-1)! k!} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-2)}{(k-1)! k!} = \\ &= (2k-1)!! \frac{2^{k-1}}{k!}.\end{aligned}$$

Číslo $(2k-1)!!$ je liché a pro nejvyšší mocninu 2^a , která dělí číslo $k!$, platí (viz řešení úlohy A-I-2)

$$a = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k}{2^s} \right\rfloor,$$

kde $2^s \leq k < 2^{s+1}$. Zároveň je

$$\begin{aligned}a &\leq \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \dots + \frac{k}{2^s} = k \left(1 - \frac{1}{2^s} \right) = \\ &= k - \frac{k}{2^s} \leq k - 1.\end{aligned}$$

Protože číslo $\binom{2k-1}{k}$ je liché, právě když $a = k - 1$, plyne

z uvedené nerovnosti, že číslo $\binom{2k-1}{k}$ je liché právě pro všechna přirozená čísla k tvaru $k = 2^s$, kde s je celé nezáporné.

A - II - 3b

V rovině se zvolenou pravoúhlou soustavou souřadnic je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , úhlem γ při vrcholu C a výškou na základnu

$$v_c = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right).$$

Dokažte, že trojúhelník ABC obsahuje aspoň čtyři mřížové body.

Řešení. Pro poloměr r kružnice vepsané trojúhelníku ABC platí

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{v_c - r},$$

takže je

$$v_c = \sqrt{2} \left(1 + \frac{v_c - r}{r} \right) = \frac{\sqrt{2}}{r} v_c,$$

neboli $r = \sqrt{2}$. Ovšem v každém kruhu o poloměru $\sqrt{2}$ leží aspoň čtyři mřížové body, protože každý bod leží v některém

jednotkovém čtverci s vrcholy v mřížových bodech a jeho vzdálenost od každého z vrcholů tohoto čtverce je nejvýše $\sqrt{2}$.

ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

V rovině je dán pravidelný 1 985-úhelník. Každou jeho stranou proložíme přímkou. Určete počet částí, na které tyto přímky rozdělí rovinu.

Řešení. Uvažujme n přímek v rovině takových, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním bodem (to nastane speciálně i tehdy, proložíme-li přímky stranami pravidelného n -úhelníku, je-li n liché). Označme $p(n)$ počet oblastí, na které těchto n přímek rozdělí rovinu. Zřejmě je $p(3) = 7$. Je-li nyní p další přímka, která protíná každou z n uvažovaných přímek, rozdělí n průsečíků přímkou p na $n + 1$ částí a přitom každá z těchto částí přímky p dělí některou z $p(n)$ oblastí na dvě části. Je tedy $p(n + 1) = p(n) + n + 1$. Odtud plyne, že

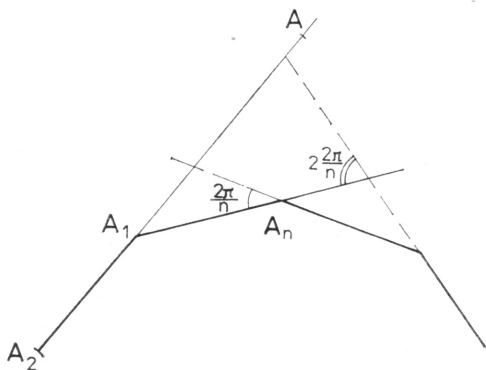
$$\begin{aligned} p(n) &= n + p(n - 1) = n + (n - 1) + \dots + 4 + p(3) = \\ &= \frac{n(n + 1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Pro $n = 1\,985$ máme $p(1\,985) = 1\,985 \cdot 993 + 1 = 1\,971\,106$.

Poznámka. Soustava přímek v rovině rozdělí rovinu na části, jejichž počet pro danou soustavu označme s , počet

průsečíků přímek soustavy označme v a počet hran (tj. těch částí přímek, na něž jsou přímky rozděleny jednotlivými průsečíky) označme h . Pak platí (Eulerova věta) $s + v = h + 1$ (jsme v rovině, nikoli v prostoru!). Protože průsečíky i hrany můžeme snadno spočítat, dostaneme odtud též předchozí výsledek.

Jiné řešení. Uvažujme uvedenou úlohu pro libovolný pravidelný n -úhelník a označme $p(n)$ počet částí, na které příslušné přímky rozdělí rovinu. Spočtěme nejprve počet



Obr. 54

$s(n)$ těch částí roviny, které leží v úhlu AA_1A_n , kde A_1A je polopřímka opačná k polopřímce A_1A_2 (obr. 54). Z velikostí úhlů snadno zjistíme, že vnitřkem úhlu AA_1A_n prochází právě k přímek A_jA_{j+1} , kde k je největší celé číslo

takové, že $k \frac{2\pi}{n} < \pi$. Ty rozdělí úhel AA_1A_n na $k + 1$

částí, tedy

$$s(n) = k + 1 = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

Všechny vnější části zřejmě dostaneme postupným otáčením kolem středu pravidelného n -úhelníku o úhel $\frac{2\pi}{n}$,

je tedy

$$p(n) = 1 + n s(n) = 1 + n \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

Pro $n = 1\,985$ odtud máme $p(1\,985) = 1\,985 \cdot 993 + 1$.

A - III - 2

Nech A_1, A_2, A_3 sú neprázdne množiny celých čísel také, že pre $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ platí

$$(x \in A_i, y \in A_j) \Rightarrow [(x + y) \in A_k, (x - y) \in A_k].$$

Dokážte, že aspoň dve z množín A_1, A_2, A_3 sa rovnajú. Môžu byť niektoré z týchto množín disjunktné?

Řešení. Necht $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Obsahuje-li některá z množin A_1, A_2, A_3 nulu, řekněme A_j , pak je zřejmě $A_i = A_k$. Podle předpokladu je totiž pro libovolné $x \in A_i$ také $x + 0 \in A_k$, tj. $A_i \subset A_k$, a obráceně, napíšeme-li implikaci ve tvaru

$$(x \in A_k, y \in A_j) \Rightarrow [(x + y) \in A_i, (x - y) \in A_i],$$

dostaneme pro $y = 0$ zas inkluzi $A_k \subset A_i$. (Rozmyslete si dobře tuto formální úvahu, která využívá rovnosti množin $\{i, j, k\} = \{k, j, i\}$. Je dobře si uvědomit, že při konkrétní volbě indexů i, j, k dává předpoklad úlohy vlastně tři různé implikace pro množiny A_1, A_2, A_3 .) Odtud plyne, že pro dvě z množin A_1, A_2, A_3 s neprázdným průnikem, $A_i \cap A_k \neq \emptyset$, pak už musí být $A_i = A_k$, neboť pro $y \in A_i \cap A_k$ z předpokladu plyne $0 = y - y \in A_j$. Navíc zřejmě platí $x \in A_i$, právě když $-x \in A_i$.

Můžeme tedy dále předpokládat, že nula neleží v žádné z množin A_1, A_2, A_3 a že všechny tři množiny jsou navzájem disjunktní. Označme $m_i = \min \{|x| : x \in A_i\} > 0$ a zvolme označení tak, aby platilo $m_i > m_j > m_k$. Pak je ale také $m_i > m_j - m_k$, to je však spor s definicí čísla m_i , neboť podle předpokladu je $m_j - m_k \in A_i$. Tím je důkaz hotov.

Je-li L množina všech lichých celých čísel a S množina všech sudých čísel, mají množiny L, L, S požadované vlastnosti a je $L \cap S = \emptyset$.

Pokuste se popsat všechny množiny A_1, A_2, A_3 , které splňují podmínky úlohy! Jakou roli tu hraje Euklidův algoritmus?

A - III - 3

Jsou-li $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektory v rovině takové, že součet jejich délek je alespoň 1, pak mezi nimi najdeme vektory, jejichž součet bude vektor délky alespoň $\sqrt[3]{2/8}$. Dokažte.

Řešení. Zvolme v rovině kartézskou soustavu souřadnic a označme (a_j, b_j) souřadnice vektoru u_j . Je-li $M = \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$, položme

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(a, b) \in M: |b| \leq a\}, \\ M_2 &= \{(a, b) \in M: |a| \leq b\}, \\ M_3 &= \{(a, b) \in M: |b| \leq -a\}, \\ M_4 &= \{(a, b) \in M: |a| \leq -b\}. \end{aligned}$$

Protože $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 = M$, musí podle předpokladu aspoň pro jednu z uvedených množin platit

$$\sum_{(a_j, b_j) \in M_k} \sqrt{a_j^2 + b_j^2} \geq \frac{1}{4},$$

pišme $M_k = \{(c_1, d_1), \dots, (c_m, d_m)\}$. Protože pro reálná čísla x, y platí

$$\max(|x|, |y|) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2 + y^2},$$

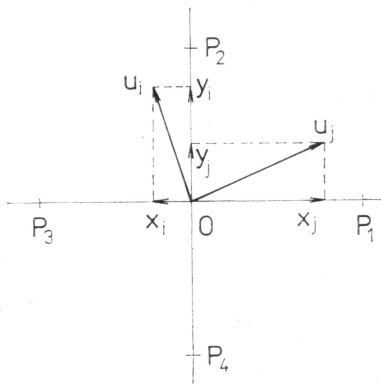
je podle definice množiny M_k buď $|\sum c_j| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ (to

když $k \in \{1, 3\}$), nebo $|\sum d_j| \geq \frac{\sqrt{2}}{8}$ (je-li $k \in \{2, 4\}$). Vektor

$(c_1, d_1) + \dots + (c_m, d_m)$ má tedy délku alespoň $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Jiné řešení. Zvolme v rovině kartézskou soustavu souřadnic a umístěme všechny vektory $\mathbf{u}_j$, $1 \leq j \leq n$, do počátku. Každý z vektorů rozložme na součet dvou vektorů (obr. 55)

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{x}_j + \mathbf{y}_j,$$



Obr. 55

kde $\mathbf{x}_j$ má směr osy x a $\mathbf{y}_j$ má směr osy y . Protože

$$|\mathbf{u}_j| \leq |\mathbf{x}_j| + |\mathbf{y}_j|,$$

je součet délek všech projekcí $\mathbf{x}_j$ a $\mathbf{y}_j$ rovněž alespoň 1. Z polopřímek OP_i ($1 \leq i \leq 4$) můžeme tedy vybrat takovou, že příslušné projekce vektorů $\mathbf{u}_j$ na ni budou mít součet

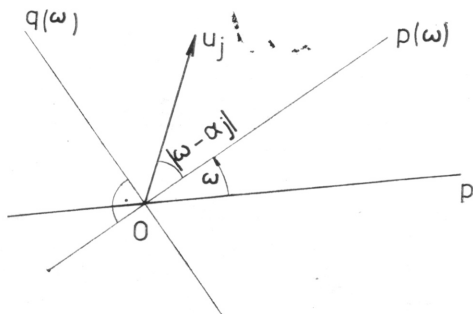
délek alespoň $\frac{1}{4}$. Projekce součtu vektorů na přímku je součtem jednotlivých projekcí, má tedy součet odpovídajících vektorů na vybranou polopřímku projekci délky alespoň $\frac{1}{4}$,

takže tento součet je vektor délky aspoň $\frac{1}{4} > \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Jiné řešení. Zvolme libovolnou přímku p v dané rovině a bod O na p a uvažujme libovolnou přímku $p(\omega)$ procházející

bodem O a svírající s přímkou p úhel ω , $\omega \in (0, \pi)$ (obr. 56). Umístíme všechny vektory $\mathbf{u}_j$ do bodu O a označme α_j úhel, který vektor $\mathbf{u}_j$ svírá s přímkou p , součet délek projekcí vektorů $\mathbf{u}_j$ na přímku $p(\omega)$ pak je

$$\sum_{j=1}^n |\mathbf{u}_j| |\cos(\omega - \alpha_j)|,$$



Obr. 56

příčměž pro vektory v jedné z polorovin určených kolmicí $q(\omega)$ na přímkou $p(\omega)$ v bodě O je tento součet aspoň

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |\mathbf{u}_j| |\cos(\omega - \alpha_j)|.$$

Označme $S(\omega)$ příslušnou množinu indexů těch vektorů, které leží v uvedené polorovině. Definujeme-li na intervalu $(0, \pi)$ funkci f předpisem

$$f(\omega) = \left| \sum_{j \in S(\omega)} \mathbf{u}_j \right|,$$

je zřejmě

$$f(\omega) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |\mathbf{u}_j| |\cos(\omega - \alpha_j)|.$$

Přitom f je nezáporná funkce, pro kterou platí

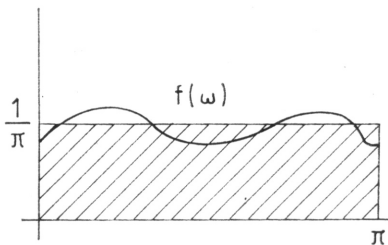
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(\omega) d\omega &\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |\mathbf{u}_j| \int_0^{\pi} |\cos(\omega - \alpha_j)| d\omega = \\ &= \sum_{j=1}^n |\mathbf{u}_j| \geq 1, \end{aligned}$$

neboť funkce $|\cos \omega|$ je periodická s periodou π a je

$$\int_0^{\pi} |\cos(\omega - \alpha_j)| d\omega = \int_0^{\pi} |\cos \omega| d\omega = 2.$$

Z nerovnosti

$$\int_0^{\pi} f(\omega) d\omega \geq 1$$



Obr. 57

ovšem plyne, že existuje aspoň jedna hodnota $\omega \in (0, \pi)$, pro kterou je $f(\omega) \geq \frac{1}{\pi}$ (obr. 57 - jinak by muselo být $\int_0^{\pi} f(\omega) d\omega < 1$), tj. existuje dokonce taková podmnožina množiny vektorů $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, pro niž má vektor součtu délku aspoň $\frac{1}{\pi} > \frac{1}{4} > \frac{\sqrt{2}}{8}$.

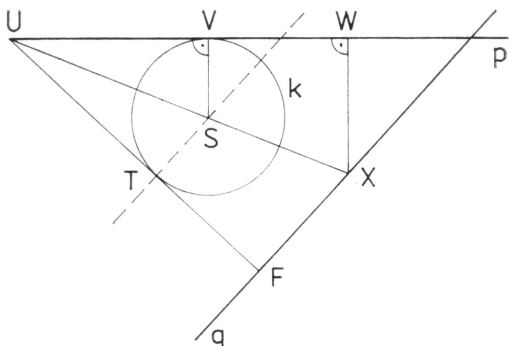
Poznámka. Hodnotu $\frac{1}{\pi}$ již nelze zlepšit, protože pro množinu $n = 2k$ vektorů umístěných ve středu pravidelného $2k$ -úhelníku a s koncovými body v jeho vrcholech se tato hodnota asymptoticky nabývá. Pro pevné n však obecně lze konstantu $\frac{1}{\pi}$ ještě zlepšit.

A - III - 4

V rovině jsou dány dvě přímky p, q a na přímce q bod F , $F \notin p$. Určete množinu všech bodů X , které lze dostat touto konstrukcí:

V rovině zvolíme bod S , který neleží ani na p , ani na q , a sestrojíme kružnici k se středem S , která se dotýká přímky p . Na kružnici k zvolíme bod T tak, aby $ST \parallel q$. Protne-li přímka FT přímku p v bodě U , je X průsečík přímek SU a q .

Řešení. Označme V bod dotyku kružnice k s přímkou p , takže $|SV| = |ST|$. Označíme-li W kolmý průmět bodu X na přímku p , pak z podobnosti zřejmě plyne (obr. 58) $|XW| = |XF|$, bod X tedy leží na parabole s ohniskem F a řídící



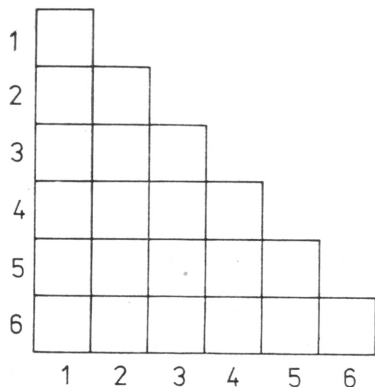
Obr. 58

přímku p . Množina bodů X tedy nezávisí na volbě bodu S a je dána pouze vzájemnou polohou přímky q a paraboly určené bodem F a přímku p . Pokud je $p \perp q$, je hledaná množina jednobodová, v opačném případě dostaneme dva body, které popsanou konstrukcí snadno sestrojíme.

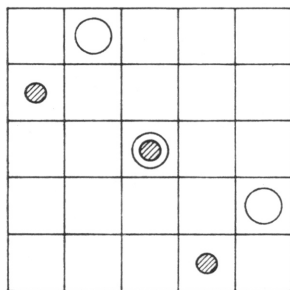
A - III - 5

Je dána trojúhelníková tabulka s n řádky a n sloupci (na obr. 59 pro $n = 6$). V každém políčku tabulky je napsáno některé z čísel $1, 2, \dots, n$ tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se v sjednocení k -tého řádku a k -tého sloupce vyskytují všechna čísla $1, 2, \dots, n$. Dokažte, že v případě lichého n je každé z čísel $1, 2, \dots, n$ napsáno v posledním políčku některého řádku.

Řešení. Doplňme tabulku na šachovnici $n \times n$ (obr. 60). Pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme M množinu těch polí tabulky, na kterých je napsáno číslo i , a M' množinu souměrně sdru-



Obr. 59



Obr. 60

ženou s M podle úhlopříčky šachovnice procházející levým horním rohem. Z předpokladu úlohy plyne, že v každém řádku i v každém sloupci šachovnice leží právě jedno políčko z množiny $M \cup M'$. Označíme-li D množinu polí úhlopříčky, platí

$$n = |M \cup M'| = 2 |M| - |M \cap D|,$$

takže $|M \cap D|$ je pro liché n rovněž liché číslo a číslo i se proto na úhlopříčce vyskytuje aspoň jednou. Protože úhlopříčka má n políček, je tvrzení úlohy dokázáno.

A - III - 6

Dokážte, že pro každé prirodzené číslo $n > 1$ existuje poradie $a_1, a_2, \dots, a_n$ čísel $1, 2, \dots, n$ také, že číslo a_{j+1} dělí součet $a_1 + a_2 + \dots + a_j$ pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Řešení. Snadno je vidět, že platí-li tvrzení úlohy pro $n > 1$, sudé, platí i pro $n+1$, protože $n+1$ dělí součet $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, takže stačí pak vzít $a_{n+1} = n+1$.

Nechť tedy $n = 2k$, pak je $1 + 2 + \dots + n = k(2k+1)$. Především musí platit $a_{2k} \mid k(2k+1)$. Zkusme tedy položit $a_{2k} = k$, pak by mělo být $a_{2k-1} \mid k \cdot 2k$, vezměme proto $a_{2k-1} = 2k$, atd. Takto zjistíme, že pořadí

$$k+1, 1, k+2, 2, \dots, 2k, k$$

vyhovuje podmínce úlohy. Opravdu, pro $1 \leq i \leq k$ snadno spočteme, že je

$$\begin{aligned} (k+1) + 1 + (k+2) + \dots + (k+i) &= \\ &= ik + \frac{i(i+1)}{2} + \frac{i(i-1)}{2} = i(k+i) \end{aligned}$$

a

$$(k+1) + 1 + (k+2) + \dots + (k+i) + i = i(k+i+1).$$

To však není jediné pořadí, které splňuje podmínky úlohy.
Řešením je i pořadí

$$2k, 2, k + 1, 3, \dots, 2k - 1, 1,$$

neboť pro $1 \leq i \leq k - 2$ je

$$\begin{aligned} & 2k + 2 + (k + 1) + 3 + \dots + (k + i) = \\ & = 2k - 1 + \frac{(i + 1)(i + 2)}{2} + ik + \frac{i(i + 1)}{2} = \\ & = k(i + 2) + (i + 1)^2 - 1 = (i + 2)(k + i) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} & 2k + 2 + (k + 1) + 3 + \dots + (k + i) + (i + 2) = \\ & = (i + 2)(k + i + 1). \end{aligned}$$

Poznámka. Není těžké sestavit všechna vhodná pořadí pro malá n , řekněme $n \leq 8$. Jejich prozkoumáním můžeme odhalit ještě další obecná řešení jako např. následující dvě pořadí pro lichá $n = 2k + 1$, která nedostaneme z již uvedených pořadí pro $n = 2k$:

$$2k + 1, 1, 2, k + 2, 3, \dots, k, 2k, k + 1;$$

$$k + 2, 1, k + 3, 2, \dots, 2k + 1, k, k + 1.$$

Korespondenční seminář ÚV MO

Korespondenční seminář ÚV MO je jednou z forem péče o talentované žáky, zvláště pak o ty, kteří nemají možnost navštěvovat speciální školy se zaměřením na matematiku a pracovat v tamních seminářích. Zásadně však nejsou přijímáni studenti pražských škol, ti mají dostatek možností seznámit se s vybranými okruhy úloh na seminářích řešitelů MO.

K účasti v korespondenčním semináři pozvalo předsednictvo ÚV MO na základě návrhů KV MO a individuálního zájmu téměř 50 žáků, z nichž se přihlásilo 28 řešitelů z celé republiky:

Kraj	Stč	Jč	Zč	Sč	Vč	Jm	Sm	Bva	Zsl	Ssl	Vsl
Počet řešitelů	—	5	3	3	4	2	1	1	1	2	6

V průběhu 34. ročníku MO jim bylo zasláno pět sérií poměrně náročných úloh. Došla řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Korespondenční seminář je řízen tajemníkem

ÚV MO RNDr. Karlem Horákem, který se stará o výběr a přípravu úloh a obvykle provádí i redakci komentářů. Opravu pak zajišťuje několik pracovníků Matematického ústavu ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK v Praze (všichni jsou bývalí olympionici).

Pouze 14 účastníků semináře se nedalo odradit nejobtížnějším 4. kolem. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli *Radek Adamec* (G Kroměříž), *Igor Melicherčík* (G Banská Bystrica), *Vladimír Kordula* (G M. Koperníka Bílovec), *Vladan Majerech* (G Pardubice) a *Richard Seda* (G Blansko). Uvádíme znění všech zadaných úloh.

1. Kombinatorika

- 1.1 Permutací čísel $1, 2, \dots, n$ nazveme každé vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ do sebe. Permutací inverzní k π nazýváme permutaci π^{-1} takovou, že $\pi^{-1}(\pi(i)) = i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Inverzí permutace π nazýváme každou dvojici $i < j$ takovou, že $\pi(i) > \pi(j)$. Dokažte, že pro každou permutaci π množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ platí: π a π^{-1} mají stejný počet inverzí.
- 1.2 Zjistěte, kolik permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ má právě 1, resp. 2, resp. 3 inverze.
- 1.3 Nechť Q je množina všech uspořádaných čtveřic utvořených z nul a jedniček. Ukažte, že čtveřice z Q nelze obarvit třemi barvami (tj. přiřadit každé čtveřici některou ze tří barev) tak, aby čtveřice, které se liší právě v jedné

složce, měly různou barvu, a také čtveřice, které se liší ve všech složkách, měly různou barvu.

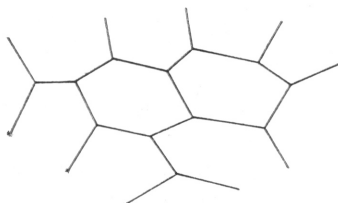
- 1.4 Body roviny jsou obarveny třemi barvami. Ukažte, že pro každé $d > 0$ existují dva body se vzdáleností d stejné barvy.
- 1.5 Množina X má 1 983 prvků. Předpokládejme, že existuje takový systém jejích podmnožin $S_1, S_2, \dots, S_m$, že
- a) sjednocení kterékoli trojice těchto množin je celá množina X ,
 - b) sjednocení libovolné dvojice má nejvýše 1 979 prvků.
- Jaká je největší možná hodnota m ?
- 1.6 Každému z vrcholů $A_1, A_2, \dots, A_{1983}$ pravidelného 1 983-úhelníku je přiřazena jedna z hodnot ± 1 . Bod A_i nazveme dobrým, jestliže součet ohodnocení vrcholů ležících na libovolné cestě (po obvodu 1 983-úhelníku) vycházející z bodu A_i je kladný (přitom ohodnocení bodu A_i se do součtu nezapočítává). Dokažte, že má-li aspoň 1 789 bodů ohodnocení $+1$, nejméně 1 207 bodů je dobrých.
- 1.7 Je dán konvexní mnohostěn. Je známo, že sečteme-li úhly při všech vrcholech daného mnohostěnu až na jeden, dostaneme $5\ 160^\circ$. Najděte součet úhlů při zbývajícím vrcholu.
- 1.8 Nechť n je liché a X konečná množina s více než n prvky, A, B podmnožiny X . Dokažte, že je-li pro každou n -prvkovou podmnožinu $Y \subset X$

$$|A \cap Y| \equiv |B \cap Y| \pmod{2},$$

je $A = B$.

2. Geometrie

- 2.1 Jeden z nejjednodušších mnohobuněčných organismů váleč koulivý se skládá z jednotlivých buněk uspořádaných na kulové ploše, takže připomínají mnohostěn. Tyto buňky mají v podstatě tvar pěti-, šesti- a sedmiúhelníků, přičemž v každém »vrcholu« se dotýkají právě tři buňky (obr. 61). Vyskytují se také jedinci se čtyřúhel-



Obr. 61

níkovými a osmiúhelníkovými buňkami, biologové však zjistili, že pokud váleč tyto nestandardní buňky nemá, pak je vždy pětiúhelníkových buněk o 12 více než sedmiúhelníkových (počet všech buněk dosahuje několika set, ba i tisíce). Umíte matematicky objasnit tento experimentální výsledek biologů?

- 2.2 Pět hran čtyřstěnu má délku menší než 1. Dokažte, že objem takového čtyřstěnu je menší než $\frac{1}{8}$.
- 2.3 Ke čtyřstěnu $ABCD$ existuje pět kulových ploch, z nichž každá se dotýká šesti přímek AB , BC , CA , AD , BD , CD , právě když je to pravidelný čtyřstěn. Dokažte.

- 2.4 Dokažte, že řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou procházející jejím středem a kolmou k tělesové úhlopříčce AG je pravidelný šestiúhelník.
- 2.5 Určete poloměr největší kružnice, kterou lze celou umístit uvnitř dané krychle o hraně délky 1.
- 2.6 Na kulové ploše je dána kružnice k , mimo kulovou plochu je dán bod P . Spojnice bodu P s body kružnice k protnou danou kulovou plochu zpravidla ještě v dalším bodě. Dokažte, že tyto body leží rovněž na kružnici.
- 2.7 Jsou-li E, F, G, H libovolné čtyři body v prostoru, označme p_{EFGH} součet délek $|EF| + |EG| + |EH| + |FH| + |FG| + |GH|$, obvod trojúhelníku KLM budeme značit p_{KLM} a délku lomené čáry g označíme p_g . Dokažte, že pak platí:
- Není-li obvod stěny KLM čtyřstěnu $KLMN$ menší než obvod každé jiné stěny, pak $p_{KLMN} \leq 2 p_{KLM}$.
 - Leží-li trojúhelník KLM uvnitř uzavřené lomené čáry g , pak $p_{KLM} \leq p_g$.
 - Jsou-li A_1, B_1, C_1, D_1 pravoúhlé průměty vrcholů čtyřstěnu $ABCD$ do roviny σ , pak pro obvod p konvexního obalu bodů A_1, B_1, C_1, D_1 platí $p < \frac{2}{3} p_{ABCD}$.
 - Leží-li čtyřstěn $KLMN$ uvnitř čtyřstěnu $ABCD$, pak $p_{KLMN} < \frac{4}{3} p_{ABCD}$.

Ukažte, že poslední nerovnost nelze zlepšit.

3. Rovnice a funkce

3.1 Necht n je přirozené číslo. Pro libovolnou n -tici reálných čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $0 \leq x_i \leq 1$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, uvažujme součet

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| = \\ & = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \dots + |x_1 - x_{n-1}| + |x_1 - x_n| + \\ & \quad + |x_2 - x_3| + \dots + |x_2 - x_{n-1}| + |x_2 - x_n| + \\ & \quad + \dots \\ & \quad + |x_{n-2} - x_{n-1}| + |x_{n-2} - x_n| + \\ & \quad + |x_{n-1} - x_n|. \end{aligned}$$

Najděte největší hodnotu tohoto součtu.

3.2 Určete největší reálné číslo z tak, aby existovala reálná čísla x, y taková, že

$$x + y + z = 5,$$

$$xy + yz + zx = 3.$$

3.3 Najděte všechna reálná čísla b , pro něž existují nezáporná reálná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 taková, že platí

$$\sum_{k=1}^5 kx_k = b, \quad \sum_{k=1}^5 k^3x_k = b^2, \quad \sum_{k=1}^5 k^5x_k = b^3.$$

3.4 Uvažujme funkci

$$f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x,$$

kde a, b, A, B jsou daná reálná čísla. Je-li $f(x) \geq 0$ pro každé reálné x , potom

$$a^2 + b^2 \leq 2, A^2 + B^2 \leq 1.$$

Dokažte.

3.5 Určete největší hodnotu, kterou může nabýt součin několika přirozených čísel, jejichž součet je 1984.

3.6 Nechť $P_1(x) = x^2 - 2$ a pro $j \in \{2, 3, 4, \dots\}$ je

$$P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x)).$$

Dokažte, že pro každé přirozené n jsou všechny kořeny rovnice $P_n(x) = x$ reálné a různé.

3.7 Určete všechny kvadratické trojčleny $f(x) = ax^2 + bx + c$, které splňují následující dvě podmínky:

a) $|f(x)| \leq 1$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$,

b) $a^2 + b^2 + c^2 = 5$.

4. Teorie čísel

4.1 Dokažte, že každý zlomek $\frac{m}{n}$, $0 < \frac{m}{n} < 1$, je možno vyjádřit ve tvaru

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{1}{q_r},$$

kde $0 < q_1 < q_2 < \dots < q_r$ jsou celá čísla a q_k dělí q_{k+1} pro $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$.

- 4.2 Pro každé přirozené číslo k existuje nekonečně mnoho přirozených čísel N takových, že v jejich dekadickém zápisu není žádná nula a přitom čísla N a kN mají stejný ciferný součet. Dokažte.
- 4.3 Je-li přirozené číslo dělitelné číslem 10 101 010 101, pak má jeho dekadický zápis aspoň šest nenulových číslic. Dokažte.
- 4.4 Je dáno sedmnácticiferné číslo. Zapišme jeho číslice v obráceném pořadí a vzniklé číslo přičteme k číslu danému. Dokažte, že aspoň jedna z číslic uvedeného součtu bude sudá.
- 4.5 Je dáno přirozené číslo n . Všechna přirozená čísla, jejichž dekadický zápis má nejvýše n číslic, rozdělíme do dvou skupin podle toho, je-li jejich ciferný součet lichý nebo sudý. Je-li $1 \leq k < n$, dokažte, že součet k -tých mocnin všech čísel první skupiny se rovná součtu k -tých mocnin všech čísel druhé skupiny.
- 4.6 Dokažte, že mezi libovolnými 200 celými čísly najdeme 100 čísel tak, že jejich součet bude dělitelný stem.
- 4.7 Je dáno přirozené číslo $n > 1\,000$. Označme a_k zbytek čísla 2^n při dělení číslem k , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dokažte, že $a_1 + a_2 + \dots + a_n > 2n$.

5. Kombinatorika

- 5.1 V jednom městě několik lidí nastydlo, a tak vypukla chřipková epidemie (v následujících dnech již nikdo nenastydl, chřipka se šířila kapénkovou nákazou). Nemoc vypukne druhý den po nákaze a trvá vždy jeden den, následující den je člověk imunní. Přitom každý zdravý občan navštíví každý den všechny své nemocné přátele, přestože se od nich nakazí, pokud není ten den imunní. Dokažte, že pokud první den epidemie nikdo nebyl imunní, pak epidemie jednoho krásného dne skončí. Zůstává tvrzení v platnosti, pokud připustíme, že první den epidemie mohl být někdo imunní následkem očkování?
- 5.2 Ve skupině několika lidí má každý nejvýše tři nepřátele. Dokažte, že skupinu lze rozdělit do dvou částí tak, aby každý člověk měl ve své části nejvýše jednoho nepřítele.
- 5.3 Turnaje v nohejbalu se zúčastnilo $n > 2$ družstev, přitom pro každá dvě mužstva se najde třetí, které nad oběma vyhrálo. Pro jaké n mohla taková situace nastat?
- 5.4 Na stole je n knih složených v několika hromádkách. Knihovník je každý den přerovnává - z každé hromádky odebere jednu knihu a z těchto vytvoří novou hromádku. Přitom do sešitu запиše počty knih v jednotlivých hromádkách (seřazené podle velikosti). Dokažte, že platí:
- a) Po nějakém čase se zápisy v sešitu začnou pravidelně opakovat.
- b) Jestliže po nějakém čase budou zápisy každý den stejné, pak $n = \binom{k}{2}$ pro vhodné k .
- Platí tvrzení b) i obráceně?

- 5.5 Ve skupině několika lidí má každý právě tři přátele. Rozhodněte, zda každou takovou skupinu je možno rozdělit do dvojic tak, aby lidé v každé dvojici byli přáteli.
- 5.6 V rovině je dáno n bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Kolik nejvýše úseček lze vytvořit spojováním daných bodů, aby přitom nevznikl žádný trojúhelník (s vrcholy v daných bodech)?
- 5.7 V rovině je dáno několik bodů, přitom žádné tři neleží na jedné přímce. Některé dvojice bodů jsou spojeny úsečkami tak, že z každého bodu vycházejí nejvýše tři úsečky. Dokažte, že body je možno obarvit dvěma barvami tak, že každý bod je úsečkou spojen nejvýše s jedním bodem téže barvy.

Průběh a výsledky

Dvacátá šestá mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 29. června — 11. července 1985 ve Finsku za rekordní účasti 209 soutěžících žáků z 38 zemí. V mezinárodní porotě, již předsedal prof. *Ilpo Laine* z helsinské univerzity, byly zastoupeny tyto státy: Alžírsko, Austrálie, Belgie, Brazílie, Bulharsko, Československo, Čína, Finsko, Francie, Island, Itálie, Izrael, Jugoslávie, Kanada, Kolumbie, Kuba, Kuvajt, Kypr, Maďarsko, Maroko, Mongolsko, NDR, Nizozemí, Norsko, NSR, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, SSSR, Španělsko, Švédsko, Tunis, Turecko, USA, Velká Británie a Vietnam. S francouzskou delegací přicestoval na MMO navíc jeden íránský žák, který tč. studuje ve Francii. Na 26. MMO byla dále přítomna pozorovatelka z Indie.

Přípravné práce, tj. výběr úloh, jejich formulace a překlad do jazyků soutěžících, prováděla mezinárodní porota ve dnech 30. června - 3. července; sídlila přitom v nevelkém finském městě Heinola, asi 100 km severně od Helsinek. Z materiálů zpracovaných finskými organizátory na základě návrhů došlých z jednotlivých zemí vybrala porota pro soutěž těchto šest úloh:

1. Je dán konvexní tětíkový čtyřúhelník $ABCD$ a kružnice k , jejíž střed leží na straně AB a která se dotýká ostatních tří stran BC , CD , DA čtyřúhelníku. Dokažte, že pak platí

$$|AD| + |BC| = |AB|.$$

2. Necht n , k jsou daná, navzájem nesoudělná přirozená čísla, $0 < k < n$, a necht $M = \{1, 2, \dots, n-1\}$. Každý prvek j množiny M obarvíme jednou ze dvou barev (modrá a bílá), a to tak, že

(1) číslo j má vždy touž barvu jako číslo $n-j$;

(2) každé číslo $j \in M$, $j \neq k$, má touž barvu jako číslo $|k-j|$.

Dokažte, že pak všechny prvky množiny M mají touž barvu.

3. Je-li $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$, $n \geq 0$, mnohočlen s celočíselnými koeficienty, označme $w(P)$ počet těch jeho koeficientů a_j , které nejsou dělitelné dvěma. Necht $Q_j(x) = (1+x)^j$ pro $j = 0, 1, 2, \dots$.

Dokažte: jsou-li $i_1, i_2, \dots, i_n$ celá čísla splňující $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$, pak platí

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_1}).$$

4. Množina M má právě 1 985 prvků. Jsou to vesměs celá kladná čísla, jejichž prvočinitelé nejsou větší než 26.

Dokažte, že v M lze nalézt čtyři navzájem různá čísla, jejichž součin je čtvrtou mocninou celého čísla.

5. Je dán trojúhelník ABC a kružnice k se středem O , kružnice k prochází body A , C a protíná úsečky AB , BC

v dalších dvou bodech K , resp. N , $K \neq N$. Přitom kružnice k_1 , resp. k_2 , opsané trojúhelníku ABC , resp. BKN , mají právě dva společné body B a M .

Dokažte, že úhel OMB je pravý.

6. Ke každému reálnému číslu x_1 sestrojíme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že položíme

$$x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$$

pro každé $n = 1, 2, 3, \dots$.

Dokažte, že existuje právě jedna hodnota x_1 taková, že pro každé $n = 1, 2, \dots$ platí

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1.$$

Tyto úlohy pocházely z návrhů předložených Velkou Británií, Austrálií, Nizozemím, Mongolskem, SSSR a Švédskem.

Ačkoliv se již na několika minulých MMO poukazovalo na nutnost rozšířit okruh témat, jež se objevují v soutěžních úlohách MMO, byl i tentokrát výběr omezen na převážně klasická témata: planimetrii, kombinatoriku, elementární číselnou teorii. Snad jen šestá úloha byla poněkud netradiční.

Jak později také potvrdily výsledky soutěže, byly vybrané úlohy vcelku vhodné pro MMO. Porota však poněkud podcenila obtížnost třetí úlohy, jejíž řešení vyžadovalo netrioviální obměnu provedení matematické indukce. Právě tato

nejtěžší úloha způsobila, že výsledné bodové hodnocení bylo o poznání nižší nežli např. v loňském roce.

Jako obvykle, byla každá úloha ohodnocena sedmi body, takže každý soutěžící mohl získat v soutěži nejvýše 42 bodů. Podrobná kritéria pro hodnocení řešení porota tentokrát nepřípravovala a přenechala tuto nelehkou úlohu finským koordinátorům, kteří se jí zhostili velmi dobře.

Ještě dříve nežli porota dokončila přípravu soutěžních úloh, přicestovali do Finska soutěžící žáci. Byli ubytováni v rekreačním středisku Joutsenlampi v motelu Rantasipi, uprostřed překrásné finské přírody. Vlastní soutěž se pak konala v nedalekém městečku Joutsa. Slavnostní zahájení 26. MMO proběhlo ve středu 3. července dopoledne v místní škole za účasti mezinárodní poroty, která sem proto přijela z Heinoly.

Další dva dny, 4. a 5. července, byly soutěžní: každé dopoledne řešili žáci po třech úlohách. V pátek 5. července přesídlila také porota do Joutsenlampi, kde se pak vykonaly veškeré práce spojené s opravou a koordinací hodnocení žákovských řešení. Díky dobré přípravě kolektivu finských koordinátorů proběhla koordinace velmi hladce a rychle, takže porota mohla na svém zasedání v neděli 7. července bez dlouhých debat schválit konečné výsledky.

Zároveň zde bylo rozhodnuto udělit 14 prvních cen (za řešení ohodnocená 34–42 body), 35 druhých cen (za 22–32 bodů) a 52 třetích cen (za 15–21 bodů). Celkem tak získalo některou z cen 101 žáků, tedy necelých 50 % z celkového počtu 209 soutěžících. Tyto počty cen odpovídají tradičním podmínkám MMO.

Po prozkoumání návrhů předložených koordinátory bylo

na dalším zasedání poroty rozhodnuto, že na 26. MMO nebudou uděleny žádné zvláštní ceny za originální řešení jednotlivých úloh.

Přehledné údaje o počtech cen a součtech bodů získaných jednotlivými delegacemi jsou uvedeny v připojené tabulce.

Vedle části matematické obsahoval program MMO jako obvykle také část kulturně-poznávací. Pro účastníky MMO bylo uspořádáno několik výletů: do města Jyväskylä (pouze pro žáky), do Lahti (s návštěvou sportovního stadionu a pivovaru), k jezerům v okolí Joutsy (s ukázkou rybolovu), na typický finský statek (s ukázkou folklóru), prohlídka města Helsinky a projížďka lodí podél pobřeží s nezapomenutelnými pohledy na Helsinky z moře.

Závěr 26. MMO probíhal v Helsinkách, kam se všichni účastníci přemístili 9. července. Ceny byly žákům rozděleny na slavnostním zakončení 26. MMO ve středu 10. července odpoledne v aule helsinské univerzity za přítomnosti finské ministryně školství paní Kaariny Suomio. Ocenění žáci dostali diplomy a medaile, ostatní jen diplomy účastníků. Šesti nejlepším věnovala firma Nokia osobní počítače.

Na slavnostním zakončení vystoupil také vedoucí polské delegace prof. A. Małowski, který pozval všechny zúčastněné na 27. MMO, která se má konat v červenci 1986 ve Varšavě.

MMO byla pak ukončena večeří na rozloučenou spojenou s improvizovaným kulturním programem. Ve čtvrtek 11. července již začaly zahraniční delegace opouštět Helsinky.

Československá účast na 26. MMO

Do soutěže na 26. MMO vyslalo Československo šest žáků gymnázií vybraných na základě výsledků dosažených v domácí MO a na přípravných soustředěních, seminářích a podobných pomocných akcích. Jména šesti soutěžících spolu s bodovým hodnocením jejich řešení soutěžních úloh MMO jsou uvedena v připojené tabulce.

Po nevýrazném úspěchu československého družstva na 25. MMO byly výsledky našich žáků na 26. MMO očekávány s nadějemi, které se však tak docela nesplnily. Ani zisk tří druhých cen a jedné třetí - což je lepší než na 25. MMO - nemůže zakrýt skutečnost, že bylo v silách našich žáků podat celkově lepší výkony. Relativní pořadí soutěžících na MMO lze považovat za poměrně signifikantní ukazatel, ať jsou soutěžní úlohy obtížné nebo snazší: mezi 209 účastníky 26. MMO se naši žáci umístili na 38. - 39., 44 - 46., 47. - 49., 75. - 83., 119. - 128., a 156. - 159. pořadí.

Pokud se týče jednotlivých úloh, nejsou jasné příčiny některých neúspěchů při řešení první úlohy, která svou náročností rozhodně nepřesáhla běžnou středoškolskou úroveň. Také pátá úloha, k jejímuž řešení vedlo několik různých cest, mohla dopadnout lépe.

Pátráme-li pro příčinách neúspěchů, objevuje se znovu význam psychického faktoru. Naším reprezentantům na MMO nechybějí, jak se zdá, ani tak konkrétní znalosti z matematiky, jako spíše pohotovost při jejich uplatňování. Všichni jistě ovládají elementy trigonometrie (první úloha), všichni jistě znají Dirichletův princip (čtvrtá úloha). Je však třeba se přizpůsobit tomu, že úlohy na MMO nejsou prostá

cvičení v aplikaci známých pouček, ale vyžadují vedle teoretických znalostí také vytrvalost a trochu zručnosti.

Případ šesté a do značné míry i třetí úlohy ilustruje tendence MMO k zařazování atypických úloh s elementy matematické analýzy.

Účast Československa na 26. MMO se ovšem neredukovala jen na soutěžící žáky. Československo přispělo už k přípravám MMO zasláním návrhu čtyř úloh pro soutěž. Jednu z nich zařadili finští organizátoři do výběru 18 úloh předkládaných mezinárodní porotě, a to jako alternativu k úloze navrhované Mongolskem: při definitivním rozhodování pak byla přijata mongolská úloha (čtvrtá soutěžní).

Také na práci mezinárodní poroty v průběhu MMO mělo Československo aktivní podíl: předložilo několik iniciativních návrhů, například reformulace textu šesté úlohy, uspořádání soutěžních úloh atd., jež byly porotou přijaty.

Celkové výsledky 26. MMO

Země	Počet účastníků	Cena			Součet bodů
		I.	II.	III.	
Alžírsko - DZ	6	0	0	0	36
Austrálie - AU	6	1	1	2	117
Belgie - BE	6	1	0	1	60
Brazílie - BR	6	0	0	2	83
Bulharsko - BG	6	2	3	0	165
Československo - CS	6	0	3	1	105
Čína - CN	2	0	0	1	27
Finsko - FI	6	0	0	0	25
Francie - FR	6	0	2	3	125
Irán - IR	1	0	1	0	28
Island - IS	2	0	0	0	13
Itálie - IT	5	0	0	0	20
Izrael - IL	6	0	1	0	81
Jugoslávie - YU	6	0	0	2	68
Kanada - CA	6	0	1	4	105
Kolumbie - CO	6	0	0	2	54
Kuba - CU	6	0	0	2	74
Kuvajt - KW	5	0	0	0	7
Kypr - CY	6	0	0	1	27
Maďarsko - HU	6	2	2	2	168
Maroko - MA	6	0	0	2	60
Mongolsko - MN	6	0	1	0	62
NDR - DD	6	0	3	3	136
Nizozemí - NL	6	0	0	1	72
Norsko - NO	6	0	0	0	34
NSR - DE	6	1	1	4	139
Polsko - PL	6	0	1	4	101
Rakousko - AT	6	0	0	3	77
Rumunsko - RO	6	3	3	0	201
Řecko - GR	6	0	1	1	69
SSSR - SU	6	1	2	2	140
Španělsko - SP	4	0	0	0	25
Švédsko - SE	6	0	0	1	65
Tunis - TN	4	0	0	2	46
Turecko - TR	6	0	0	2	54

Země	Počet účastníků	Cena			Součet bodů
		I.	II.	III.	
USA - US	6	2	4	0	180
Velká Británie - GB	6	0	2	3	121
Vietnam - VN	6	1	3	1	144
Celkem	209	14	35	52	3114

Výsledky čs. žáků na 26. MMO

Jméno a škola	Počet bodů za úlohu						Celkem	Cena
	1	2	3	4	5	6		
Radek ADAMEC 3. r., G Kroměříž	0	7	0	0	0	0	7	—
Petr HÁJEK 3. r., GWP Praha	0	0	0	0	6	5	11	—
Adam OBDRŽÁLEK 3. r., GWP Praha	1	7	1	7	0	6	22	II.
Marcel POLAKOVIČ 2. r., GAM Bratislava	7	7	0	4	0	7	25	II.
Jarmila RANOŠOVÁ 4. r., GMK Bílovec	7	3	0	3	7	3	23	II.
Ján ŠEFČÍK 4. r., GAM Bratislava	7	7	0	1	1	1	17	III.
Součty:	22	31	1	15	14	22	105	

Řešení úloh 26. MMO

1. Označme S střed kružnice k , r její poloměr a E, F, G po řadě body, v nichž se k dotýká stran BC, CD, DA . Platí

$$|EC| = |FC|, |FD| = |GD|,$$

$$SE \perp BC, SF \perp CD, SG \perp AD,$$

takže

$$|\sphericalangle CSE| = |\sphericalangle CSF|, |\sphericalangle DSG| = |\sphericalangle DSF|.$$

Jelikož čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový, platí

$$|\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle BAD| = \pi = |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle ABC|.$$

Označíme-li α velikost úhlu CSE a β velikost úhlu DSG , bude $|\sphericalangle BAD| = 2\alpha$, $|\sphericalangle ABC| = 2\beta$. Pro délky stran pravoúhlých trojúhelníků ASG, DSG, BSE, CSE dostaneme pak tato vyjádření:

$$|AS| = \frac{r}{\sin 2\alpha},$$

$$|BS| = \frac{r}{\sin 2\beta},$$

$$|AG| = r \cotg 2\alpha,$$

$$|BE| = r \cotg 2\beta,$$

$$|CE| = r \tg \alpha,$$

$$|DG| = r \tg \beta.$$

Z rovnosti

$$\tg \alpha + \cotg 2\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}$$

vyplývá rovnost

$$|AS| = |AG| + |CE|;$$

obdobně odvodíme i rovnost

$$|BS| = |BE| + |DG|$$

a sečtením obou těchto rovností pak dostaneme dokazovanou rovnost

$$|AB| = |AD| + |BC|.$$

2. Skutečnost, že čísla i, j mají touž barvu, budeme značit $i \sim j$; relace $\sim$ je ekvivalence na množině $\{1, 2, \dots, n-1\}$, pro kterou platí

$$(1) \quad j \sim n-j \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$(2) \quad j \sim |k-j| \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n-1, j \neq k.$$

Relaci $\sim$ rozšíříme na množinu $\mathbb{Z}$ všech celých čísel, a to tak, že položíme jednak

$$(3) \quad 0 \sim k,$$

jednak

$$(4) \quad j + n \sim j \quad \text{pro všechna } j \in \mathbb{Z}.$$

Snadno se přesvědčíme, že po tomto rozšíření platí

$$(1') \quad j \sim n - j$$

pro všechna $j \in \mathbb{Z}$. Skutečně, je-li $j \in \mathbb{Z}$, $j = np + r$, $p \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$, je

$$j = np + r \sim r \sim n - r \sim n - r - np = n - j.$$

Dokážeme nyní, že pro každé $q \in \mathbb{Z}$ je

$$(5) \quad qk \sim k.$$

Vztah (5) platí triviálně pro $q = 1$, podle (3) pro $q = 0$; podle (1') a (4) je pak

$$-k \sim n - k \sim k,$$

takže (5) platí také pro $q = -1$.

Dále postupujeme indukcí. Předpokládejme, že (5) platí pro všechna $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \leq m$, kde $m \geq 1$, a dokážeme, že (5) platí také pro $q = m + 1$ a pro $q = -m - 1$.

Nechť $(m + 1)k = np + r$, $0 \leq r < n$, takže podle (4) je $(m + 1)k \sim r$. Je-li $r = k$, máme vztah (5). Je-li $r > k$, je podle (2) $r \sim r - k$, avšak $r - k \sim np + r - k = mk \sim k$. Je-li konečně $r < k$, je podle (2) $r \sim k - r$, ale $k - r \sim k - np - r = -mk \sim k$.

Pro $q = m + 1$ tedy (5) platí.

Obdobně nechť $(-m - 1)k = np + r$, $0 \leq r < n$, takže $(-m - 1)k \sim r \sim n - r$. Je-li $n - r = k$, platí (5). Je-li $n - r > k$, je podle (2) $n - r \sim n - r - k$, avšak podle (4) je pak $n - r - k \sim n - r - k - n(p + 1) = -r - k - np = -k + (m + 1)k = mk \sim k$. Je-li $n - r < k$, je podle (2) $n - r \sim k - n + r$ dále podle (4) $k - n + r \sim k - n + r + n(p + 1) = k + np + r = -mk \sim k$. Opět tedy vždy platí (5).

Poněvadž čísla n , k jsou nesoudělná, lze každé celé číslo $z \in \mathbb{Z}$ vyjádřit ve tvaru

$$z = ak + bn,$$

kde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$. Podle (4) a (5) platí pak pro každé $z \in \mathbb{Z}$

$$z = ak + bn \sim ak \sim k;$$

v ekvivalenci $\sim$ patří všechna čísla do jediné třídy - tj. mají všechna touž barvu.

3. Při $0 < k < 2^m$, $m \geq 1$, je číslo $\binom{2^m}{k}$ sudé, platí totiž

$$k \binom{2^m}{k} = 2^m \binom{2^m - 1}{k - 1}.$$

Mnohočlen $Q_{2^m}(x) = (1 + x)^{2^m}$ tedy můžeme psát ve tvaru

$$Q_{2^m}(x) = 1 + R_m(x) + x^{2^m},$$

kde R_m je mnohočlen stupně $2^m - 1$, jehož koeficienty jsou vesměs sudá čísla.

Je-li P libovolný mnohočlen stupně n , $n < 2^m$, pak

$$(1) \quad P(x)Q_{2^m}(x) = P(x) + P(x)R_m(x) + x^{2^m} P(x),$$

takže

$$(2) \quad w(P \cdot Q_{2^m}) = 2w(P).$$

Nerovnost

$$(3) \quad w(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_1}),$$

kde $0 \leq i_1 < \dots < i_n$, dokážeme nyní indukcí podle stupně i_n . Pro $i_n = 0$, $i_n = 1$ je ovšem (3) triviální. Předpokládejme tedy, že (3) platí, jakmile $i_n < 2^m$, $m \geq 1$, a dokážeme, že potom platí také, když $2^m \leq i_n < 2^{m+1}$.

Rozlišíme dva případy:

I. Nechť

$$2^m \leq i_1 < \dots < i_n < 2^{m+1}.$$

Potom

$$Q_{i_1} + \dots + Q_{i_n} = Q_{2^m} (Q_{i_1-2^m} + \dots + Q_{i_n-2^m})$$

a podle (2) a indukčního předpokladu je

$$\begin{aligned} w(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_n}) &= 2w(Q_{i_1-2^m} + \dots + Q_{i_n-2^m}) \geq \\ &\geq 2w(Q_{i_1-2^m}) = w(Q_{i_1}); \end{aligned}$$

nerovnost (3) tedy platí.

II. Necht

$$i_1 < \dots < i_{q-1} < 2^m \leq i_q < \dots < i_n < 2^{m+1}$$

pro některé q , $1 < q \leq n$. Potom

$$(4) \quad Q_{i_1} + \dots + Q_{i_{q-1}}$$

je mnohočlen stupně menšího než 2^m , a tedy

$$(5) \quad w(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_{q-1}}) \geq w(Q_{i_1}).$$

Mnohočlen

$$(6) \quad Q_{i_q}(x) + \dots + Q_{i_n}(x) = \sum_{j=0}^{i_n} c_j x^j$$

můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} &Q_{2^m}(x) [Q_{i_q-2^m}(x) + \dots + Q_{i_n-2^m}(x)] = \\ &= [1 + R_m(x) + x^{2^m}] [Q_{i_q-2^m}(x) + \dots + Q_{i_n-2^m}(x)]. \end{aligned}$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že ke každému lichému číslu c_j ($0 \leq j < 2^m$) lze přiřadit rovněž liché číslo c_{j+2^m} . Proto

se přičtením mnohočlenu (6) k mnohočlenu (4) číslo w zmenší:

$$w(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_{q-1}}).$$

Podle (5) tedy nerovnost (3) platí i v tomto případě.

4. Každé číslo $c \in M$ lze vyjádřit ve tvaru

$$(1) \quad c = 2^{k_1} 3^{k_2} 5^{k_3} 7^{k_4} 11^{k_5} 13^{k_6} 17^{k_7} 19^{k_8} 23^{k_9},$$

kde $k_1, k_2, \dots, k_9$ jsou nezáporná celá čísla. Také součin libovolného počtu čísel z množiny M je možno vyjádřit ve tvaru (1). Přitom číslo c z (1) je druhou resp. čtvrtou mocninou celého čísla právě tehdy, jsou-li exponenty $k_1, k_2, \dots, k_9$ vesměs čísla sudá, resp. dělitelná čtyřmi.

Poněvadž $2^9 = 512$, najdeme v každé množině P obsahující alespoň 513 (různých) čísel tvaru (1) minimálně dvě čísla c, c' taková, že pro jejich exponenty $k_1, k_2, \dots, k_9$, resp. $k'_1, k'_2, \dots, k'_9$ z vyjádření (1) platí:

$$(2) \quad \text{pro každé } j = 1, 2, \dots, 9 \text{ je číslo } k_j + k'_j \text{ sudé.}$$

Potom je ovšem součin cc' těchto čísel čtvercem celého čísla $cc' = d^2$, přičemž číslo d lze opět vyjádřit ve tvaru (1).

Z množiny M o 1985 prvcích takto můžeme postupně získat $\frac{1985 - 511}{2} = 737$ dvojic čísel c, c' , resp. 737 čísel d

($d^2 = cc'$) tvaru (1). Poněvadž $737 > 512$, je opět možno mezi čísly d najít minimálně dvě (ve skutečnosti alespoň 113)

čísla d, d' taková, že pro jejich exponenty $k_1, k_2, \dots, k_9$, resp. $k'_1, k'_2, \dots, k'_9$ platí (2). Je tedy opět dd' čtvercem celého čísla b , $dd' = b^2$, takže $d^2 d'^2$ je jeho čtvrtou mocninou $d^2 d'^2 = b^4$. Avšak d^2 a stejně tak d'^2 je součinem dvou čísel z množiny M - získali jsme tak čtyři (navzájem různá) čísla z M , jejichž součin je čtvrtou mocninou celého čísla.

5. Trojúhelník ABC nemůže být rovnoramenný se základnou AC , neboť pak by kružnice k_1 a k_2 měly společný jediný bod B . Můžeme proto bez újmy obecnosti předpokládat, že

$$(1) \quad |\sphericalangle BAC| < |\sphericalangle BCA|,$$

takže $|\sphericalangle BAC| < 90^\circ$.

Označme S střed kružnice k_1 a R střed kružnice k_2 . Dokážeme nejprve, že $SORB$ je rovnoběžník.

Poněvadž čtyřúhelník $AKNC$ je tětiový, platí

$$|\sphericalangle BNK| = |\sphericalangle BAC|.$$

Trojúhelníky BCS a BKR jsou rovnoramenné a platí v nich jednak

$$\begin{aligned} |\sphericalangle SBN| &= |\sphericalangle SBC| = 90^\circ - \frac{1}{2} |\sphericalangle BSC| = \\ &= 90^\circ - |\sphericalangle BAC| = 90^\circ - |\sphericalangle BNK|, \end{aligned}$$

takže nutně $BS \perp NK$, jednak

$$|\sphericalangle RBK| = 90^\circ - \frac{1}{2} |\sphericalangle BRK| = 90^\circ - |\sphericalangle BNK| = \\ = 90^\circ - |\sphericalangle BAC|,$$

takže $BR \perp AC$.

Avšak $SO \perp AC$ a $RO \perp KN$, neboť společná tětiva dvou kružnic je vždy kolmá na spojnici jejich středů. Je tedy skutečně $SO \parallel BR$ a $BS \parallel RO$, takže $SORB$ je rovnoběžník.

Označme nyní B' bod kružnice k_2 takový, že BB' je jejím průměrem. Potom ovšem je také $SOB'R$ rovnoběžník.

Je-li $M = B'$, je $OM = OB' \parallel SR \perp BM$. Je-li $M \neq B'$, je jednak $BM \perp B'M$ (Thales), jednak $OB' \parallel SR \perp BM$. To však znamená, že bod B' leží na přímce OM a $OM \perp BM$.

6. Označme $\mathbf{M}$ množinu všech posloupností $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ kladných čísel splňujících

$$(1) \quad x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$$

pro všechna $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$; vztah (1) lze vyjádřit také ve tvaru

$$(2) \quad x_n = \frac{1}{2n} (\sqrt{4n^2 x_{n+1} + 1} - 1).$$

Z (1) a (2) je ihned vidět, že pro posloupnosti $\{x_n\} \in \mathbf{M}$, $\{y_n\} \in \mathbf{M}$ platí tato tvrzení:

- (i) jestliže $x_n = y_n$ pro některé $n \in \mathbb{N}$, potom $x_n = y_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$;
 (ii) jestliže $x_n < y_n$ pro některé $n \in \mathbb{N}$, potom $x_n < y_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$;
 (iii) k libovolným číslům $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$ existuje v M posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $x_m = c$.

Ke každému $k \in \mathbb{N}$ tedy najdeme v M posloupnost $\{{}^k x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ve které je ${}_k x_k = 1$, a posloupnost $\{{}_k x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ve které je ${}_k x_k = 1 - \frac{1}{k}$. Podle (ii) je pak ${}_k x_n < {}^k x_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, zejména tedy ${}_k x_1 < {}^k x_1$.

Zároveň máme podle (1) pro $k \in \mathbb{N}$

$${}^{k+1}x_{k+1} = 1 < 1 + \frac{1}{k} = {}^k x_{k+1}$$

a

$${}^{k+1}x_{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} > 1 - \frac{1}{k} = {}^k x_{k+1},$$

takže platí

$$(3) \quad {}^k x_1 < {}^{k+1}x_1 < {}^{k+1}x_1 < {}^k x_1$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$. Posloupnosti $\{{}^k x_1\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{{}_k x_1\}_{k=1}^{\infty}$ jsou tedy monotonní a omezené, tudíž konvergentní a platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} {}^k x_1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} {}_k x_1;$$

existuje tedy kladné číslo z takové, že

$$(4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} {}^k x_1 \leq z \leq \lim_{k \rightarrow \infty} {}^k x_1.$$

Podle (3) je ovšem

$${}^k x_1 < z < {}^k x_1$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, takže pro posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$, v níž je $x_1 = z$, platí

$$(5) \quad \frac{n-1}{n} = {}^n x_n < x_n < {}^n x_n = 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, resp. podle (1)

$$(6) \quad 0 < x_n < x_{n+1} < 1.$$

Kdyby v M existovaly dvě různé posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{x'_n\}$, $x_n < x'_n$, obě splňující (6) pro všechna $n \in \mathbb{N}$, platilo by podle (5)

$$\begin{aligned} x'_{n+1} - x_{n+1} &= (x'_n - x_n) \left(x'_n + x_n + \frac{1}{n} \right) > \\ &> (x'_n - x_n) \left(2 - \frac{1}{n} \right) \geq x'_n - x_n \end{aligned}$$

pro $n \in \mathbb{N}$, na druhé straně však také

$$x'_n - x_n < 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$

což vede ke sporu. Existuje tedy právě jedna kladná hodnota x_1 , (cca 0,446 534 914 ...) taková, že posloupnost $\{x_n\} \in M$ s prvním členem x_1 splňuje (6) pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Na úrovni středních škol, tj. v kategoriích A, B a C, probíhají poslední ročníky MO v poměrně stabilizované formě, bez mimořádných výkyvů.

I když statistické údaje o počtech účastníků z jednotlivých krajů nebyly očištěny od vlivu populačních trendů, lze z nich vysledovat určitý vzestup zájmu o MO, především v kategorii C a částečně i B.

Ve srovnání s předchozím 33. ročníkem MO vzrostl v tomto roce počet účastníků 1. kola kategorie C zhruba o třetinu, 2. kola pak až o polovinu. Svědčí to o pozitivním vývoji v práci s mladými matematickými talenty, a to již od základní školy. Z tohoto vývoje lze čerpat určité naděje pro příští léta i pro vyšší kategorie MO.

V kategorii B jsou zjištěné přírůstky sice menší (zhruba desetiprocentní, resp. třicetiprocentní), avšak stále patrné. Naproti tomu se oproti loňsku příliš nezměnily počty gymnazistů z vyšších tříd soutěžících v kategorii A. Teprve příští ročníky ukáží, zda nárůst v účasti dospěje postupně až sem.

Porovnávání procenta úspěšnosti v MO v různých kolech, kategoriích a ročnících je velice složitou záležitostí, nemá-li ulpívat jen na povrchu; k solidním výsledkům nelze dospět bez hlubšího rozboru všech působících faktorů.

Nicméně však zkušenosti z posledních MMO nasvědčují tomu, že naší MO, jejíž úroveň je všeobecně velmi dobrá, chybí náročnější závěrečné vyvrcholení: úroveň obtížnosti 3. kola kategorie A je zřetelně nižší nežli úroveň obvyklá na MMO. Tento rozpor bude třeba řešit, i když prosté zvýšení obtížnosti úloh 3. kola by patrně nebylo optimálním řešením.

Ve věkových kategoriích žáků základních škol je situace v MO charakterizována určitými organizačními diskrepancemi mezi ČSR a SSR. Ve 34. ročníku MO se podařilo zorganizovat celostátně soutěž vedle tradičních osmých tříd ještě také pro sedmé třídy. Pro páté a šesté třídy se MO pořádala (experimentálně) jen v SSR.

Dosavadní zkušenosti ukazují dostatečný zájem žáků sedmých tříd o soutěž; počty účastníků kategorie Z7 jsou přiměřeně srovnatelné s počty žáků v Z8.

Změny v organizaci bezpochyby ovlivnily (a ještě v budoucnu ovlivní) zájem žáků základních škol o MO a pomohou - doufejme - udržet jej i ve vyšších kategoriích.

Kategorie Z, resp. nyní Z8 a Z7, jsou záměrně pojímány jako soutěž s mnohem širší základnou nežli kategorie středoškolské, jsou tedy přirozeně citlivější k vlivům populačních trendů.

Všechny tyto faktory je třeba brát v úvahu při hodnocení účasti v 34. ročníku MO. Není tedy nutné hodnotit určitý pokles v počtu účastníků kategorie Z8 oproti 33. ročníku jednoznačně negativně.

RNDr. František Zítek, CSc.
RNDr. Leo Boček, CSc.
RNDr. Karel Horák, CSc.
RNDr. Milan Koman, CSc.
doc. RNDr. Karol Križalkovič, CSc.

TŘICÁTÝ ČTVRTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku navrhl Jaromír Jarkovský
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze roku 1987
jako svou publikaci č. 5-42-14/34

Edice Pomocné knihy pro žáky
Odpovědná redaktorka RNDr. Ilona Fořtová
Výtvarný redaktor Václav Hanuš
Technická redaktorka Věra Havlíková

Z nové sazby písmem Plantin vytiskly Moravské tiskařské závody, n. p.,
Olomouc

Formát papíru 70 cm × 100 cm

Počet stran 184

AA 5,50 VA 5,94

Náklad 3 550 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/2

1. vydání

Cena brožovaného výtisku Kčs 7,50

505/21, 825

14-559-87

Kčs 7,50





**matematická
olympiáda**



SPN 5-42-14/34

14-559-87

03/2

Kčs 7,50