

35. ročník matematické olympiády na středních školách

František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Hvorecký (editor); Branislav Rován (editor): 35. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1985/86. 27. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988.

Terms of use:

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404805>

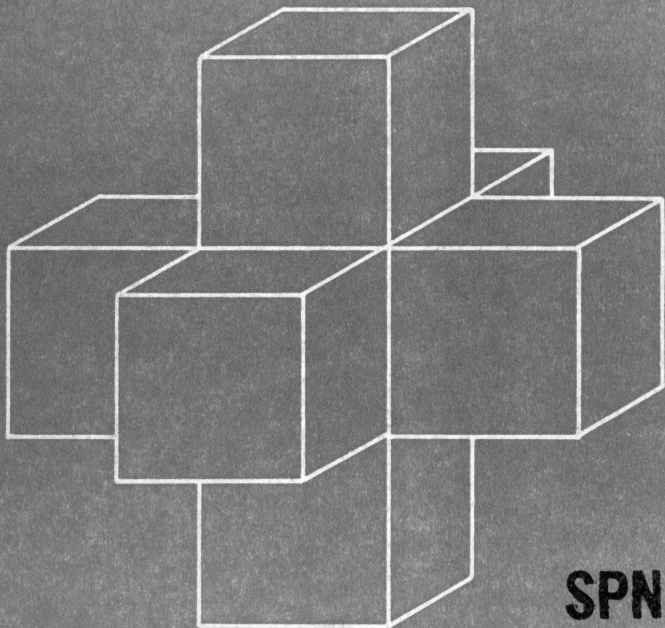
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

**35. ročník matematické olympiády
na středních školách**



SPN

TŘICÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1985/86

27. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Státní pedagogické nakladatelství sděluje všem zájemcům o matematickou olympiádu, že současně s touto publikací vychází knížka *35. ročník matematické olympiády na základních školách*. V ní jsou uvedeny soutěžní úlohy kategorií Z4—Z8 určené žákům základních škol.

Za přispění spolupracovníků zpracovali

RNDr. František Zítek, CSc., doc. RNDr. Leo Boček, CSc.,
RNDr. Karel Horák, CSc., doc. RNDr. Jozef Hvorecký, CSc.,
doc. RNDr. Branislav Rován, CSc.

Lektorovali RNDr. Vladimír Burjan, RNDr. Libor Jelínek,
RNDr. Václav Šůla, RNDr. Pavel Töpfer

© František Zítek za kolektiv, 1988

Obsah

O průběhu 35. ročníku matematické olympiády	7
Hodnocení 35. ročníku MO	15
Kategorie C	41
Úlohy domácí části I. kola	41
Úlohy školní části I. kola	51
Úlohy II. kola	56
Kategorie B	60
Úlohy domácí části I. kola	60
Úlohy školní části I. kola	69
Úlohy II. kola	72
Kategorie A	76
Úlohy domácí části I. kola	76
Úlohy školní části I. kola	100
Úlohy II. kola	105
Úlohy III. kola	113
Hodnotenie a zdôvodnenie 35. ročníka MO - kategória P .	124
O priebehu 35. ročníka MO - kategória P	126
Kategorie P	134
Úlohy I. kola	134
Úlohy II. kola	151
Úlohy III. kola	161
Korespondenční seminář ÚV MO	181
27. mezinárodní matematická olympiáda	189

Milí přátelé a spolupracovníci matematické olympiády,

po skončení již pětatřicátého ročníku této soutěže dostáváte do rukou soubornou zprávu o jeho průběhu a výsledcích. Některé změny v organizaci matematické olympiády (MO), které byly provedeny právě v tomto ročníku, se promítly také do uspořádání této ročenky.

Jednou ze změn bylo další postupné rozšiřování MO do nižších ročníků základní školy. Tento proces trvá již nějaký čas. Z původní jediné kategorie Z pro žáky nejvyšších ročníků základních škol se vyčleňují samostatné kategorie pro osmé, sedmé, šesté, ... třídy. Ve školním roce 1985/86 byly soutěže v kategoriích Z 8 a Z 7 pořádány již jednotně v celostátním měřítku, nižší kategorie Z 6, Z 5 a Z 4 zatím probíhají pokusně pouze v SSR. Předpokládá se však, že se kategorie Z 6 rozšíří v dohledné době na celou ČSSR.

Druhou závažnou změnou v MO bylo zavedení zcela nové kategorie P, určené žákům středních škol a orientované na problematiku z oblasti matematické informatiky. Soutěž v této kategorii byla ve školním roce 1985/86 poprvé uspořádána celostátně, s přímým využitím zkušeností ze soutěží, seminářů a dalších akcí s informatickou tematikou, které byly v dřívějších letech pořádány pouze z iniciativy škol, případně krajů, převážně v SSR.

Zavedením kategorie P (programování) se pořadatelé MO snažili poskytnout těm našim středoškolákům, kteří se hlouběji zajímají o moderní výpočetní techniku a o matematické problémy spojené s jejím racionálním využíváním, příležitost změřit své síly a schopnosti formou soutěže. Přitom nejde — a to je třeba zdůraznit — o soutěž v sestavování konkrétních programů v určitém programovacím jazyce, ale především o problematiku skutečně matematickou. Bližší údaje jsou ostatně obsaženy v příslušné kapitole této ročenky.

Zavedením nových kategorií se přirozeně zvětšil rozsah prací i materiálů MO. Ministerstva školství proto rozhodla rozdělit ročenky MO do dvou svazků. Počínaje tímto 35. ročníkem MO budou tedy vycházet paralelně ročenky dvě: jedna pro MO na středních školách, tedy pro kategorie A, B, C a P, a druhá pro MO na základních školách, tj. kategorie Z 8, Z 7, Z 6, ... Některé základní údaje o MO jsou přirozeně společné všem kategoriím, a najdete je proto v obou svazcích.

Ročenka, kterou vám zde předkládáme, obsahuje zevrubnou zprávu o průběhu a výsledcích MO v kategoriích A, B a C, zprávu o nové kategorii P, úlohy z celostátního korespondenčního semináře a také obvyklou zprávu o průběhu a výsledcích 27. mezinárodní MO. Vedle svého »historického« poslání zachovat v tištěné podobě dokumentární informace o minulých událostech plní ročenky MO ještě druhou nezanedbatelnou úlohu. Jsou totiž cenným zdrojem matematických úloh, jež mohou — bez ohledu na samotnou MO a soutěže vůbec — prospět každému čtenáři se zájmem o matematiku k tříbení teoretických znalostí i obratnosti při řešení konkrétních úloh, a mohou tedy obecně přispět k pozdvižení úrovně matematického vzdělávání v nejširším smyslu.

Přejeme vám tedy, abyste nad stránkami naší ročenky strávili chvíle příjemněné nejenom osvěženými vzpomínkami na 35. ročník MO, ale především oním zvláštním pocitem známým všem matematikům, kterého dosáhnete, když se vám podaří samostatně rozřešit problém, jenž se vám zpočátku zdál obtížný. V tom vám přejeme plný úspěch.

Ústřední výbor MO

O průběhu 35. ročníku matematické olympiády

Soutěž Matematická olympiáda pořádají *ministerstva školství ČSR a SSR* ve spolupráci s *Jednotou československých matematiků a fyziků, Jednotou slovenských matematiků a fyziků, Matematickým ústavem ČSAV a Socialistickým svazem mládeže*. Soutěž řídí ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím krajských a okresních výborů matematické olympiády (KV MO, OV MO). Členy ÚV MO jmenují ministerstva školství, v průběhu 35. ročníku MO pracoval ústřední výbor MO ve stejném složení jako v předcházejícím roce — předsedou byl *RNDr. František Zítek, CSc.*, z MÚ ČSAV v Praze, místopředsedy *profesor RNDr. Miroslav Fiedler, DrSc.*, člen korespondent ČSAV, z téhož ústavu, a *profesor RNDr. Beloslav Riečan, DrSc.*, z Vysoké vojenské školy ČSSP v Liptovském Mikuláši. Ministerstva školství zastupovali *RNDr. Václav Šůla* a *RNDr. Júlia Lukátšová*. Funkci tajemníků ÚV MO vykonávali *doc. RNDr. Leo Boček, CSc.*, z MFF UK Praha a *RNDr. Karel Horák, CSc.*, z MÚ ČSAV v Praze.

Jak jste si již přečetli v předmluvě, došlo v průběhu 35. ročníku MO k zavedení kategorie P (programování), v níž soutěží žáci všech ročníků středních škol. V kategorii A soutěží žáci III. a IV. ročníků středních škol, v kategorii B žáci II. ročníků, v kategorii C žáci I. ročníků. Pro žáky základních škol

jsou určeny kategorie Z. Zprávou o 35. ročníku MO na základních školách se zabývá samostatná brožurka, tato je věnována pouze MO na školách středních.

V průběhu 35. ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO, první ve dnech 9.—10. prosince 1985 v Praze, druhé 25.—26. dubna 1986 v Pelhřimově při celostátním kole MO kategorie A. Na prvním zasedání byla projednávána především otázka nově zavedené kategorie P a hodnocen průběh minulého ročníku MO. Hlavním bodem jarního zasedání ÚV MO byla příprava 36. ročníku MO, příprava celostátních soustředění úspěšných řešitelů úloh MO včetně soustředění nejlepších účastníků MO pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu. Byla projednána též ediční činnost ÚV MO, především příprava dalších svazků edice Škola mladých matematiků. Předsedové KV MO hodnotili vhodnost výběru úloh MO a průběh MO v jednotlivých krajích. Pracovní předsednictvo ÚV MO se scházelo jednou měsíčně, zabývalo se hlavně výběrem úloh pro všechna kola soutěže.

Organizací celostátního kola kategorie A 35. ročníku MO byl ministerstvem školství ČSR pověřen Jihočeský kraj, za místo konání bylo vybráno město Pelhřimov. Do celostátního kola postoupilo 82 nejúspěšnějších řešitelů krajských kol, největší zastoupení měla Bratislava (25 účastníků). Slavnostní zahájení se konalo 24. dubna 1986. Po vystoupení žákyň pelhřimovského gymnázia s pěkným kulturním programem přivítal soutěžící žáky i členy ÚV MO tajemník OV KSČ soudruh *František Ježek*. Ve svém projevu seznámil přítomné nejen s minulostí Pelhřimova, ale přiblížil jim také současný hospodářský a kulturní rozvoj města a celého okresu. Předseda ÚV MO RNDr. František Zítek, CSc., poděkoval organizáto-

rům za přípravu celostátního kola jubilejního ročníku této matematické soutěže. Za ÚV SSM vystoupila s. *Mária Turanová*. Poukázala na význam vzdělanosti a na nemalou účast mládeže při budování naší socialistické společnosti.

Další dva dny byly dopoledne vyhrazeny vlastní soutěži, odpoledne se seznámili žáci ze všech částí naší republiky s městem Pelhřimovem a jeho okolím, navštívili památná místa protifašistického odboje — obce Mnich a Leskovice, dále zámek Kámen s výstavou motocyklů a zajeli též do Těchobuzi, kde pobýval významný filozof a matematik Bernard Bolzano. Na večerní hodiny byl zajištěn kulturní program v klubu ROH, v němž mimo jiné vystoupili akademický malíř *Jiří Mádl* a herci pražských divadel *Blanka Bohdanová* a *Josef Langmiller*. Členové ÚV MO byli na ONV přijati jeho místopředsedou *PaedDr. Janem Říhou*, který je podrobně informoval o úspěších průmyslu a zemědělství okresu, o bytové výstavbě a o péči, kterou okresní orgány věnují oblasti školství.

V neděli 27. dubna 1986 se konalo slavnostní vyhlášení výsledků za účasti tajemníka OV KSČ F. Ježka, místopředsedy ONV *PaedDr. J. Říhy*, zástupkyně KV SSM s. *Krňákové* a zástupců ministerstva školství ČSR V. Pecha a RNDr. Václava Šuly. RNDr. Václav Šula ve svém závěrečném projevu poukázal na vzrůstající úroveň matematické olympiády a na potěšitelný jev, že se do celostátního kola probojovali i žáci I. ročníků a umístili se mezi jeho úspěšnými řešiteli. Jménem ministerstva školství ČSR poděkoval strannickým a státním orgánům Jihočeského kraje, okresu i města Pelhřimov za vzornou přípravu a organizaci celé akce. Je třeba poděkovat všem, kteří se zasloužili o pěkný průběh celostátního kola MO kategorie A, kteří zorganizovali bohatý

kulturní program a zařídili mnoho pro uskutečnění soutěže. Byl to především tajemník OV KSČ s. František Ježek, který svým elánem a osobní iniciativou byl hybnou pákou celé akce. Dík patří předsedovi organizačního výboru a řediteli gymnázia s. *Stanislavu Makovcovi* a mnoha profesorům všech středních škol v Pelhřimově, z nichž jmenujme aspoň profesora *Ladislava Zrzavého* a profesorku *Svatavu Matějkovou*. Za Krajský pedagogický ústav v Českých Budějovicích se o dobrý průběh soutěže velmi zasloužil s. *Kamil Flachs*. Je samozřejmé, že se na organizaci podíleli i pracovníci katedry matematiky Pedagogické fakulty v Českých Budějovicích, hlavně předsedkyně KV MO doc. RNDr. ing. *Lada Vaňatová*.

Ve všech krajích se pořádají akce nejen pro samotné řešitele úloh MO, ale také pro učitele matematiky, referenty MO na školách. KV MO v Praze uspořádal v měsících říjen až prosinec 1985 pracovní přednášky pro řešitele, které se konaly na gymnáziu v Praze 7, Nad štolou. Pro kategorii C probíhaly podobné přednášky i na gymnáziu v Praze 9. Pro úspěšné řešitele úloh MO proběhla dvě soustředění v Jevanech, první v lednu a druhé v červnu 1986. Na soustředění byli pozváni též nejúspěšnější účastníci korespondenčního semináře, který pro žáky pražských středních škol organizoval FV SSM matematicko-fyzikální fakulty UK pod vedením RNDr. *Ľ. Malého*.

Středočeský KV MO uspořádal pro referenty MO na středních školách celodenní instruktáž o řešení úloh MO kategorií A, B, C v říjnu 1985. Pro řešitele úloh se uskutečnily přednášky na osmi střediskových školách, každé kategorii bylo věnováno 4–6 hodin. V přednáškách byly použity komentáře k úlohám MO. Pro 34 nejlepších řešitelů úloh matematické

a fyzikální olympiády se konalo ve dnech 1.—10. září 1986 soustředění v Telnici v Krušných horách.

V Jihočeském kraji byli referenti MO ze středních škol informováni o úlohách MO v září 1985 na semináři Krajského pedagogického ústavu. Pobočka JČSMF uspořádala přednášky o úlohách MO v jednotlivých městech kraje. Ve dnech 23. až 27. června 1986 proběhla letní škola pro 70 úspěšných řešitelů matematické a fyzikální olympiády. Matematické přednášky byly zaměřeny na tematické okruhy 36. ročníku MO. Pro 15 řešitelů krajského kola MO kategorie A proběhlo dvou-denní soustředění, které vedl *RNDr. P. Pech* z Pedagogické fakulty v Českých Budějovicích.

V Západočeském kraji byly zorganizovány pro účastníky MO dvě přednášky pro každou z kategorií A, B, C ve třech střediscích (Plzeň, Karlovy Vary a Klatovy). Přednášejícími byli pracovníci kateder matematiky VŠSE a Pedagogické fakulty v Plzni. Tito pracovníci vedli též korespondenční seminář, který probíhal ve dvou kategoriích. V kategorii 3. a 4. ročníků se ho zúčastnili 54 studenti, v kategorii pro 1. a 2. ročníky dokonce 229 žáků. Pro úspěšné řešitele MO a FO a nejlepší účastníky korespondenčního semináře se uskutečnilo týdenní soustředění pro 40 účastníků v Kašperských Horách v červnu 1986.

Podobné soustředění se konalo pro 51 účastníků v Severočeském kraji v Teplicích. Program zajistila pobočka JČSMF v Ústí n. L. ve spolupráci s KV MO a KV FO. Pro učitele proběhly semináře k řešení úloh I. kola MO ve čtyřech oblastech kraje (Liberec, Chomutov, Ústí n. L. a Děčín), organizoval je Krajský pedagogický ústav. Pro samotné řešitele

se uskutečnilo v měsících říjen—prosinec 1985 celkem 33 seminářů v šesti městech kraje.

Ve Východočeském kraji proběhl korespondenční seminář ve dvou kategoriích. Pro každou z kategorií A, B matematické olympiády se uskutečnilo pro 35 vybraných řešitelů soustředění před krajským kolem MO, podobné jednodenní soustředění proběhlo před celostátním kolem kategorie A. Soustředění 34 úspěšných řešitelů úloh MO a FO z I. ročníků bylo osmidenní, uspořádaly je KV MO, KV FO a KPÚ v Hradci Králové.

Jihomoravský kraj pořádal pro řešitele úloh MO semináře pro všechny kategorie, a to nejen v Brně, ale též v Jihlavě, Třebíči a Žďaru n. S. V průběhu 35. ročníku MO se však neuskutečnil korespondenční seminář, který byl do jisté míry nahrazen seminářem na přírodovědecké fakultě Univerzity J. E. Purkyně v Brně.

KV MO Severomoravského kraje uspořádal pro referenty MO na středních školách instruktáže k úlohám I. kola, jichž se zúčastnilo 28 profesorů, převážně z gymnázií. Na 50 středních školách kraje se pravidelně konají jednou týdně zájmové kroužky matematiky pro řešitele úloh MO. V Ostravě a v Olomouci se konaly jednou měsíčně besedy k úlohám MO s průměrnou účastí 20 žáků v kategoriích A, B, v kategorii C byla účast dvojnásobná. Krajské soustředění se konalo pro 40 vybraných řešitelů úloh MO a FO v červenci v Krnově, trvalo tři týdny. Zaměstnání vedli jak učitelé vysokých škol, tak profesori středních škol a pracovníci KPÚ.

KV MO Bratislava uspořádal korespondenční seminář spojený s dvěma soustředěními a další týdenní soustředění pro úspěšné řešitele MO kategorií B a C. Velkou pozornost věnují

v Bratislavě matematickým kroužkům a individuálnímu vedení vybraných studentů pracovníky vysokých škol a Akademie věd.

V listopadu 1985 se ve všech okresech Západoslovenského kraje uskutečnily instruktáže pro referenty MO na středních školách. Pro žáky středních škol byl zorganizován korespondenční seminář. Zúčastnilo se ho 66 žáků z 24 škol. Na závěr proběhlo ve dnech 16.—19. dubna 1986 soustředění 17 nejúspěšnějších řešitelů.

Středoslovenský kraj uspořádal tři soustředění řešitelů úloh MO, v září 1985 pro 40 žáků v Terchové, pro dalších 40 žáků v listopadu v Lučatině a v červnu 1986 v Piatrové. Jednodenní instruktáže k úlohám I. kola se zúčastnilo 87 učitelů středních škol. Krajský korespondenční seminář se uskutečnil ve dvou kategoriích, vždy po pěti sériích úloh. Zúčastnilo se ho v kategorii A 22 řešitelů, v kategorii B a C 80 žáků.

KV MO Východoslovenského kraje uskutečnil jednodenní instruktáž pro učitele a vedoucí matematických kroužků MO podle jednotlivých kategorií. V kategorii A se zúčastnilo 50 učitelů, v kategorii B 70 učitelů a v kategorii C bylo 110 účastníků. Na přírodovědecké fakultě UPJŠ v Košicích se scházely jednou týdně matematické kroužky, navštěvovalo je 10 žáků v kategorii A a 12 žáků v kategorii B. Při krajském domě pionýrů a mládeže pracoval klub mladých matematiků, který se scházel jednou za 14 dní. Krajského korespondenčního semináře se zúčastnilo 120 žáků, seminář měl 7 úloh v každé ze šesti sérií. Každá série obsahovala také jednu úlohu z programování. Korespondenční seminář byl během školního roku doplněn třemi týdenními soustředěními, každé pro 35—40 žáků.

Ústřední výbor matematické olympiády zajišťoval po obsahové stránce tři celostátní soustředění. Pro žáky nematurujících ročníků to bylo soustředění ve dnech 16.—28. 6. 1986 v Banské Štiavnici, společné pro matematickou a fyzikální olympiádu. Zaměstnání z matematiky byla věnována kombinatorice, teorii čísel, finitní matematice i dějinám matematiky. Přípravě československého družstva na mezinárodní matematickou olympiádu bylo věnováno týdenní soustředění v březnu 1986 v Štíříně a třítydenní soustředění v červnu 1986 v Pardubicích. Prvního soustředění se zúčastnilo 12 žáků, zaměstnání vedli převážně bývalí úspěšní účastníci MMO. Na druhé soustředění bylo pozváno 14 žáků, z nich pak byli vybráni členové československého družstva na 27. mezinárodní matematickou olympiádu. O ní se dočtete na dalších stránkách, rovněž tak o celostátním korespondenčním semináři, který organizoval ÚV MO.

V edici Škola mladých matematiků, kterou vydává ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta, vyšlo již 57 svazků. Poslední vyšel během 35. ročníku MO, byl to svazek Nerovnosti v trojúhelníku od Stanislava Horáka. Svazky edice ŠMM jsou dobrou pomůckou pro řešitele úloh MO a pro práci v matematických kroužcích.

Porovnáme-li statistiku 35. ročníku MO s ročníkem předcházejícím, vidíme, že v účasti škol nedošlo téměř k žádným změnám. Také celkový počet účastníků soutěže z řad žáků středních škol zůstal stejný. Avšak počet soutěžících v kategorii B se zvýšil více než o třetinu, zatímco v kategorii C byl zaznamenán pokles počtu účastníků o pětinu. Úspěšnost ve druhém kole je asi 20 %, nijak se neliší v ČSR a SSR. Pouze v kategorii C byli opravovatelé úloh na Slovensku asi přísnější, neboť procento úspěšnosti je v SSR 23, v ČSR 37. V kategorii A to bylo v celé ČSSR 25 %, velmi nízká úspěšnost (12 %) byla ve II. kole kategorie B, v některých krajích dokonce jen 5 %. Znamená to, že úlohy II. kola kategorie B byly přece jen dosti náročné. Na tuto skutečnost poukázali též zástupci KV MO na zasedání ÚV MO v Pelhřimově. Byly to především důkazové úlohy B-II-3a a B-II-3b, které byly pro žáky příliš obtížné. Je zajímavé, že špatné výsledky byly také u úlohy B-II-1, která je sice velmi lehká, avšak pro žáky trochu neobvyklá. Nejsou totiž zvyklí na funkce, jejichž definiční obor není množinou čísel. Přitom nová učebnice matematiky pro I. ročníky gymnázií obsahuje definici funkce takto širě chápanou. V kategorii C patřila mezi obtížnější úloha C-II-2 o rozdělení prostoru rovinami.

Do celostátního kola kategorie A bylo vybráno 82 žáků

z 31 škol. Větší zastoupení měla samozřejmě gymnázia s třídami se zaměřením na matematiku. Z gymnázia W. Piecka v Praze bylo 7 účastníků, z gymnázia M. Koperníka v Bílovci bylo 9 účastníků celostátního kola a gymnázium A. Markuša v Bratislavě bylo zastoupeno 10 žáky. Nejvíce účastníků—13—bylo z gymnázia J. Hronca v Bratislavě. Po pěti žácích bylo z gymnázia v Brně, tř. kpt. Jaroše, a z gymnázia v Žilině, Velká Okružná. Čtyřmi žáky bylo zastoupeno gymnázium v Košicích na Šmeralově třídě a třemi žáky gymnázium v Pardubicích. Podle organizačního řádu MO obdrželo 19 nejlepších účastníků diplom vítěze, z nich bylo 5 z gymnázia W. Piecka v Praze, 4 z gymnázia A. Markuša v Bratislavě a 3 z gymnázia M. Koperníka v Bílovci.

Mezi účastníky celostátního kola byly tři dívky a kromě jednoho žáka ze střední průmyslové školy byli všichni žáky gymnázií. Bylo mezi nimi 5 žáků z I. ročníků, z nichž se jeden umístil mezi vítězi a další tři mezi úspěšnými řešiteli. Přes náročné úlohy celostátního kola se pěti účastníkům podařilo získat plný počet bodů a stát se tak absolutními vítězi celostátního kola kategorie A 35. ročníku matematické olympiády.

Počty středních škol zapojených do 35. ročníku MO

Kraj	Celkový počet	Gymnázia				Ostatní střední školy			
		z toho zapojeno				zapojeno			
		v kategorii			aspoň v jedné kategorii	v kategorii			aspoň v jedné kategorii
		A	B	C		A	B	C	
Praha	21	9	15	14	19	1	3	1	3
Středočeský	23	22	23	23	23	5	3	15	18
Jihočeský	18	10	14	12	15	3	5	3	6
Západočeský	15	13	13	12	15	1	2	6	6
Severočeský	21	18	20	19	20	4	7	12	16
Východočeský	35	11	27	21	34	1	1	1	2
Jihomoravský	38	30	32	32	32	0	8	9	9
Severomoravský	39	21	32	30	38	0	3	6	8
Bratislava	10	8	9	10	10	0	2	2	2
Západoslovenský	37	30	34	28	37	10	16	22	22
Středoslovenský	37	37	37	37	37	49	53	74	74
Východoslovenský	40	18	32	33	38	3	12	29	31
ČSR	210	134	176	163	196	15	32	53	68
SSR	124	93	112	108	122	62	83	127	129
ČSSR	334	227	288	271	318	77	115	180	197

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole MO

Kraj	Kategorie						Celkem	
	A		B		C			
	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	77	46	97	75	130	53	304	174
Středočeský	141	29	196	98	274	54	611	181
Jihočeský	109	40	103	88	96	51	308	179
Západočeský	86	51	110	68	133	42	329	161
Severočeský	147	39	198	96	337	58	682	193
Východočeský	73	49	162	102	189	93	424	244
Jihomoravský	211	113	443	236	391	197	1 045	546
Severomoravský	159	52	266	113	334	87	759	252
Bratislava	120	85	115	87	95	72	330	244
Západoslovenský	176	120	298	223	311	201	785	544
Středoslovenský	132	108	184	139	154	120	470	367
Východoslovenský	202	85	545	224	963	224	1 710	533
ČSR	1 003	419	1 575	876	1 884	635	4 462	1 930
SSR	630	398	1 142	673	1 523	617	3 295	1 688
ČSSR	1 633	817	2 717	1 549	3 407	1 252	7 757	3 618

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole MO

Kraj	Kategorie						Celkem	
	A		B		C			
	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	43	25	67	20	52	31	162	76
Středočeský	24	2	87	5	52	6	163	13
Jihočeský	33	9	82	4	48	20	163	33
Západočeský	43	5	68	6	42	14	153	25
Severočeský	34	8	91	12	54	19	179	39
Východočeský	46	12	89	11	86	39	221	62
Jihomoravský	91	16	192	17	149	34	432	67
Severomoravský	51	20	112	21	86	46	249	87
Bratislava	82	40	83	31	69	28	234	99
Západoslovenský	116	16	218	12	190	38	524	66
Středoslovenský	54	10	109	9	87	22	250	41
Východoslovenský	85	15	111	11	224	45	420	71
ČSR	365	97	788	96	569	209	1 722	402
SSR	337	81	521	63	570	133	1 428	277
ČSSR	702	178	1 309	159	1 139	342	3 150	679

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

Počty účastníků III. kola MO kategorie A

Kraj	Celkový počet účastníků	Počet úspěšných řešitelů	Z toho vítězů
Praha	7	6	5
Středočeský	1	0	0
Jihočeský	1	0	0
Západočeský	1	0	0
Severočeský	3	1	1
Východočeský	8	4	3
Jihomoravský	8	6	1
Severomoravský	9	5	3
Bratislava	25	15	5
Západoslovenský	4	3	0
Středoslovenský	7	5	0
Východoslovenský	8	3	1
ČSR	38	22	13
SSR	44	26	6
ČSSR	82	48	19

VÝSLEDKY CELOSTÁTNÍHO KOLA MO KATEGORIE A

Pořadí, jméno a příjmení, ročník, škola. U žáků z tříd gymnázií se zaměřením na matematiku je za ročníkem označení M, u žáků z tříd gymnázií se zaměřením na matematiku a fyziku je uvedeno označení MF. G značí gymnázium.

Vítězové

- 1.—5. *David Bednárek*, 4 M, G W. Piecka, Praha
Petr Hájek, 4 M, G W. Piecka, Praha
Vladimír Kordula, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
Adam Obdržálek, 4 M, G W. Piecka, Praha
Petr Šleich, 4, G Děčín
- 6.—7. *Martin Heisler*, 4 M, G W. Piecka, Praha
Vladan Majerech, 3 MF, G Pardubice
- 8.—9. *Anton Belan*, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
Roman Soták, 3 M, G Košice, Šmeralova
- 10.—11. *Radek Adamec*, 4, G Kroměříž
Robert Babilon, 3 M, G M. Koperníka, Bílovec
12. *Petr Fencl*, 3 MF, G Pardubice
13. *Petr Čížek*, 1 M, G W. Piecka, Praha
- 14.—16. *Jana Ježková*, 3 MF, G Hradec Králové, Šimkova
Ivan Polách, 4 MF, G J. Hronca, Bratislava
Marcel Polakovič, 3 M, G A. Markuša, Bratislava

- 17.—19. *Tibor Bartoš*, 2 M, G A. Markuša, Bratislava
Petr Habala, 3 M, G M. Koperníka, Bílovec
Peter Klein, 3 M, G A. Markuša, Bratislava

Další úspěšní řešitelé

- 20.—24. *Andrej Doboš*, 1 M, G A. Markuša, Bratislava
Marián Lukáč, 3, G Bánovce n. B.
Dominik Munzar, 4 MF, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Alexander Szabari, 4 M, G Košice, Šmeralova
Tomáš Trégl, 3 M, G W. Piecka, Praha
- 25.—26. *Jozef Čierný*, 3 M, G Žilina, Veľká Okružná
Libor Skříčka, 4 MF, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 27.—29. *Miroslav Bedlek*, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
Pavol Gvozdjak, 2 M, G A. Markuša, Bratislava
Vladimír Potisk, 4 MF, G J. Hronca, Bratislava
- 30.—32. *Igor Bilák*, 4, G Prešov, Konštantínova
František Klein, 3 MF, G Brno, Koněvova
Milan Kubala, 4 M, G Žilina, Veľká Okružná
- 33.—37. *Martin Blatný*, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
Ján Budinský, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
Petr Fuchs, 4 MF, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Michal Hrabák, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
Ilja Martišovič, 1 MF, G J. Hronca, Bratislava
38. *Dušan Hanes*, 3 MF, G Prievidza
39. *Petr Krákora*, 2 MF, G Trutnov
- 40.—42. *Ľaroslav Hora*, 3 MF, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Pavol Kolník, 3, G Nové Mesto n. V.
Miroslav Laššák, 3 M, G Žilina, Veľká Okružná

- 43.—46. *Karol Hrivnák*, 2 M, G A. Markuša, Bratislava
Stanislav Januschke, 1 MF, G J. Hronca, Bratislava
Igor Melicherčík, 4 MF, G Banská Bystrica,
Tajovského
Vladimír Veselý, 3 MF, G J. Hronca, Bratislava
47.—48. *Rudolf Burcl*, 3, G Trnava
Stanislav Meduna, 4 MF, G J. Hronca, Bratislava

*Pořadí úspěšných řešitelů z tříd, které nejsou zaměřeny
na matematiku*

1. *Petr Šleich*, 4, G Děčín
2. *Vladan Majerech*, 3, G Pardubice
3. *Radek Adamec*, 4, G Kroměříž
4. *Petr Fencel*, 3, G Pardubice
- 5.—6. *Ľana Ježková*, 3, G Hradec Králové, Šimkova
Ivan Polách, 4, G J. Hronca, Bratislava
- 7.—8. *Marián Lukáč*, 3, G Bánovce n. B.
Dominik Munzar, 4, G Brno, tř. kpt. Jaroše
9. *Libor Skříčka*, 4, G Brno, tř. kpt. Jaroše
10. *Vladimír Potisk*, 4, G J. Hronca, Bratislava
- 11.—12. *Igor Bilák*, 4, G Prešov, Konštantínova
František Klein, 3, G Brno, Koněvova
- 13.—14. *Petr Fuchs*, 4, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Ilja Martišovits, 1, G J. Hronca, Bratislava
15. *Dušan Hanes*, 3, G Prievidza
16. *Petr Krákora*, 2, G Trutnov
- 17.—18. *Ľaroslav Hora*, 3, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Pavol Kolník, 3, G Nové Mesto n. V.

- 19.—21. *Stanislav Januschke*, 1, G J. Hronca, Bratislava
Igor Melicherčík, 4, G Banská Bystrica, Tajovského
Vladimír Veselý, 3, G J. Hronca, Bratislava
- 22.—23. *Rudolf Burcl*, 3, G Trnava
Stanislav Meduna, 4, G J. Hronca, Bratislava

NEJÚSPĚŠNĚJŠÍ ŘEŠITELÉ II. KOLA MO V KATEGORIÍCH A, B, C

Z každého kraje a každé kategorie je uvedeno nejvýše prvních deset nejúspěšnějších řešitelů. Pokud není uvedeno jinak, byli všichni uvedení řešitelé v kategorii B žáci 2. ročníku, řešitelé v kategorii C žáci 1. ročníku.

G - gymnázium, M - třída se zaměřením na matematiku, MF - třída se zaměřením na matematiku a fyziku.

Praha

Kategorie A

- 1.—2. *Petr Hájek*, 4 M, G W. Piecka, Praha
Tomáš Trégl, 3 M, G W. Piecka, Praha
3. *David Bednárek*, 4 M, G W. Piecka, Praha
4. *Ivo Majetič*, 4 M, G W. Piecka, Praha
5. *Adam Obdržálek*, 4 M, G W. Piecka, Praha
6. *Petr Čížek*, 1 M, G W. Piecka, Praha
7. *Daniela Košnarová*, 3 M, G W. Piecka, Praha
8. *Martin Barhoň*, 3 M, G W. Piecka, Praha
9. *Petr Palatka*, 4 MF, G Praha 3, Sladkovského nám.
10. *Miroslav Pátek*, 3 M, G W. Piecka, Praha

Kategorie B

1. *Marta Sochorová*, M, G W. Piecka, Praha
2. *Lubomír Ursta*, M, G W. Piecka, Praha
3. *Vladimír Valenta*, M, G W. Piecka, Praha
4. *David Maxera*, G Praha 1, Hellichova
5. *Jan Baštecký*, M, G W. Piecka, Praha
6. *Jiří Hub*, M, G W. Piecka, Praha
7. *Michal Žemlička*, G Praha 6, Nad alejí
- 8.—10. *Lukáš Kencl*, M, G W. Piecka, Praha
Petr Knobloch, G Praha 10, Voděradská
Jakub Tayari, G Praha 8, U libeňského zámku

Kategorie C

- 1.—2. *Václav Bohdanecký*
Ilja Holub
3. *Miroslav Teichman*
- 4.—5. *Martin Dlouhý*
Jan Dvořák
6. *Petr Čížek*
- 7.—8. *Daniel Elleder*
Ludvík Tesař
všichni M, G W. Piecka, Praha

Středočeský kraj

Kategorie A

1. *Martin Jonáš*, 4, G Mladá Boleslav

2. *Radek Musil*, 3, SPŠ Mělník

Kategorie B

1. *Martin Vojáček*, G Kolín
2. *Radovan Čížek*, G Mladá Boleslav
3. *Pavel Krejčíř*, G Mladá Boleslav
4. *Jiří Svoboda*, SPŠ Mladá Boleslav
5. *Radek Tezaur*, G Vlašim

Kategorie C

1. *Lenka Novotná*, G Kladno
2. *Jaroslav Pilner*, G Kladno
3. *Ladislav Kocour*, G Dobříš
4. *Martin Černý*, G Brandýs n. L.
5. *Radek Novotný*, G Mladá Boleslav
6. *Martin Pánek*, SPŠ Kladno-Sítná

Jihočeský kraj

Kategorie A

1. *Aleš Chrdle*, 3 MF, G K. Šatava, České Budějovice
2. *Daniel Urban*, 3 MF, G K. Šatava, České Budějovice
3. *Petr Jaroš*, 4, G Pelhřimov
4. *Milan Štěch*, 4 MF, G K. Šatava, České Budějovice
- 5.–7. *Jiří Bořík*, 4, SPŠ Písek
Petr Holý, 3, G České Budějovice, Jírovčova
 Jiří Veselý, 3, G Strakonice

- 8.—9. *Michal Víta*, 3 MF, G K. Šatala, České Budějovice
Jindřich Zapletal, 3, G Tábor

Kategorie B

1. *Roman Polanský*, G Písek
2.—4. *Josef Jiráek*, G Prachatice
Jaromír Šilhánek, G České Budějovice, Jírovčova
Markéta Zemanová, G České Budějovice, Česká

Kategorie C

- 1.—2. *David Boukal*, M, G České Budějovice, Jírovčova
Lenka Pulcová, G Kaplice
3. *Dagmar Malečková*, G Strakonice
4.—5. *Zdeněk Křenek*, SPŠ Písek
Michal Kučera, G K. Šatala, České Budějovice
6. *František Vaněk*, SPŠ Písek
7. *Jiří Rataj*, G Strakonice

Západočeský kraj

Kategorie A

1. *Václav Kohout*, 4, G Plzeň, ul. Pionýrů
2. *Jiří Pittner*, 4 MF, G J. Fučíka, Plzeň
3. *Michal Wittner*, 4 MF, G Karlovy Vary
4. *Radovan Osoba*, 4 MF, G Plzeň, ul. Pionýrů
5. *Kamil Meisl*, 4 MF, G J. Fučíka, Plzeň

Kategorie B

1. *Luboš Černý*, M, G J. Fučíka, Plzeň
2. *Zdeněk Tryner*, M, G J. Fučíka, Plzeň
3. *Dalibor Procházka*, MF, G Karlovy Vary
- 4.–5. *Jan Koudelka*, MF, G Karlovy Vary
Dagmar Součková, MF, G Karlovy Vary
6. *Barbora Mottlová*, MF, G J. Fučíka, Plzeň

Kategorie C

1. *Vítězslav Babický*, M, G J. Fučíka, Plzeň
2. *Kateřina Větrovcová*, MF, G Plzeň, ul. Pionýrů
3. *Miroslav Vicher*, MF, G Karlovy Vary
4. *Aleš Niebauer*, G Mariánské Lázně
- 5.–6. *Štěpánka Hroníková*, MF, G J. Fučíka, Plzeň
Ladislav Smejkal, M, G J. Fučíka, Plzeň
7. *Pavla Maříková*, M, G J. Fučíka, Plzeň
8. *Milena Řežná*, MF, G J. Fučíka, Plzeň

Severočeský kraj

Kategorie A

1. *Petr Šleich*, 4, G Děčín
- 2.–3. *Ondřej Pavlata*, 4, G Jablonec
Vladimír Richter, 2 M, G Liberec
4. *Pavel Novák*, 4, G Děčín
5. *Pavel Truhlář*, 2 M, G Liberec

6. *Petr Slavík*, 3 MF, G Teplice
7.—8. *Petr Mandík*, 3, G Děčín
Dušan Oslej, 4, SPŠ stav. Děčín

Kategorie B

1. *David Swigoň*, M, G Liberec
2. *Pavel Truhlář*, M, G Liberec
3. *Daniel Šuta*, G Chomutov
4. *Jan Dvořák*, MF, G Ústí n. L.
5. *Petr Bartoš*, M, G Liberec
6.—8. *Petr Jakša*, M, G Liberec
David Orálek, MF, G Teplice
Ľindřich Šimon, G Rumburk
9.—10. *Vladimír Richter*, M, G Liberec
Ľaroslav Trnka, M, G Liberec

Kategorie C

1. *Dan Lukeš*, M, G Liberec
2. *Tomáš Brázda*, MF, G Teplice
3.—4. *Markéta Večerníková*, M, G Liberec
Petr Viták, M, G Liberec
5. *Vladimír Saur*, M, G Liberec
6.—9. *Kateřina Bobková*, M, G Liberec
Štěpánka Lazarová, G Děčín
Pavel Noga, G Litoměřice
Oldřich Vojtíšek, M, G Liberec
10. *Zdeněk Novák*, M, G Liberec

Východočeský kraj

Kategorie A

1. *Vladan Majerech*, 3 MF, G Pardubice
2. *René Levínský*, 2 M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
3. *Tomáš Skalický*, 4, G Jevíčko
4. *Petr Fencel*, 3 MF, G Pardubice
5. *Petr Jelínek*, 3 MF, G Pardubice
6. *Petr Krákora*, 2, G Trutnov
7. *Jana Ježková*, 3 MF, G Hradec Králové, Šimkova
8. *Michal Blažej*, 4, G Trutnov

Kategorie B

1. *Miroslav Beneš*, M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Hynek Píkhart*, MF, G Pardubice
3. *Jan Stareček*, MF, G Pardubice
4. *Jiří Martínek*, G Ledec n. S.
5. *Věra Keprtová*, G Žamberk
6. *Silvestr Badal*, G Jevíčko
7. *René Levínský*, M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
8. *Miroslav Končický*, SPŠE Pardubice
9. *Libor Kábrt*, G Chrudim
10. *Luboš Halousek*, G Chrudim

Kategorie C

1. *Karel Waisser*, M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Tomáš Kučera*, SPŠE Pardubice

3. *Zdeněk Slanina*, MF, G Hradec Králové, Šimkova
4. *Zbyněk Vašata*, M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
5. *Petr Bílý*, G Žamberk
6. *Kamil Mrštný*, G Žamberk
7. *Miloš Nosek*, M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
8. *Jaroslav Vejs*, M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
9. *Petr Duczynski*, G Nová Paka
10. *Helena Fikeisová*, G Rychnov n. K.

Jihomoravský kraj

Kategorie A

1. *Petr Fuchs*, 4 MF, G Brno, tř. kpt. Jaroše
2. *Petr Veselý*, 4, G Jihlava
3. *Michal Krupka*, 4 MF, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 4.—5. *Radek Adamec*, 4, G Kroměříž
Dominik Munzar, 4 MF, G Brno, tř. kpt. Jaroše
6. *Libor Skříčka*, 4 MF, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 7.—8. *František Klein*, 3 MF, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Jan Tuček, 4, G Brno, Tábořská
9. *Jaroslav Hora*, 3 MF, G Brno, tř. kpt. Jaroše
10. *Ondřej Pokluda*, 2 M, G Brno, tř. kpt. Jaroše

Kategorie B

1. *Karel Slavíček*, M, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 2.—3. *Ondřej Pokluda*, M, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Tomáš Vítek, MF, G Jihlava
4. *Tomáš Dvořák*, M, G Brno, tř. kpt. Jaroše

5. *Martin Vondráček*, M, G Brno, tř. kpt. Jaroše
6.—10. *Jan Černocký*, G Brno, Koněvova
Tomáš Heroudek, G Brno, Koněvova
Ota Jelinek, MF, G Brno, Táborská
Tomáš Kukora, MF, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Hana Škarvadová, MF, G Gottwaldov

Kategorie C

1. *Marek Velešík*, G Brno, Koněvova
2. *Michal Šmídek*, M, G Brno, tř. kpt. Jaroše
3. *Olga Pilná*, G Žďár n. S.
4. *Vít Urbanec*, MF, G Gottwaldov
5. *Petr Kachyňa*, M, G Brno, tř. kpt. Jaroše
6. *Petr Mejzlík*, M, G Brno, tř. kpt. Jaroše
7.—10. *Eva Kolářová*, M, G Brno, tř. kpt. Jaroše
Iva Musilová, G Žďár n. S.
Viktor Němec, M, G Brno, tř. kpt. Jaroše
René Samek, G Jihlava

Severomoravský kraj

Kategorie A

1. *Vladimír Kordula*, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Martin Blatný*, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Robert Babilon*, 3 M, G M. Koperníka, Bílovec
4. *Miroslav Novák*, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
5. *Tomáš Tkadlec*, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec
6. *Michal Hrabák*, 4 M, G M. Koperníka, Bílovec

7. *Radomír Měch*, 2 M, G M. Koperníka, Bílovec
8. *Vojtěch Šlěžka*, 3 M, G M. Koperníka, Bílovec
9. *Tomáš Novotný*, 3 MF, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
10. *Petr Habala*, 3 M, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie B

- 1.—2. *Romana Anýžová*, M, G M. Koperníka, Bílovec
Ondřej Blaha, M, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Martin Krejčí*, M, G M. Koperníka, Bílovec
4. *Gabriela Venhudovalá*, M, G M. Koperníka, Bílovec
- 5.—7. *Petr Miencil*, MF, G Ostrava 1, Šmeralova
Radek Porazil, M, G M. Koperníka, Bílovec
Jan Slovák, G Uničov
8. *Ladislav Sedláček*, MF, G Olomouc, Tomkova
9. *Radek Krpec*, G Frýdlant n. O.
10. *Simona Gebauerová*, M, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie C

1. *Martin Kučera*, M, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Libor Němeček*, M, G M. Koperníka, Bílovec
3. *David Šindler*, M, G M. Koperníka, Bílovec
4. *Petr Bohumský*, M, G M. Koperníka, Bílovec
- 5.—7. *Olga Břečková*, G Ostrava, Hladnovská
Petra Rozsivalová, G Zábřeh n. M.
Martin Slíva, M, G M. Koperníka, Bílovec
8. *Vladan Mišun*, M, G M. Koperníka, Bílovec
9. *Bohdana Škopcová*, MF, G Opava

Bratislava

Kategorie A

- 1.—2. *Tibor Bartoš*, 2 M, G A. Markuša, Bratislava
Pavol Gvozďjak, 2 M, G A. Markuša, Bratislava
3. *Tomáš Fischer*, 4 MF, G J. Hronca, Bratislava
- 4.—6. *Miroslav Bedlek*, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
Stanislav Meduna, 4 MF, G J. Hronca, Bratislava
Vladimír Veselý, 3 MF, G J. Hronca, Bratislava
7. *Stanislav Januschke*, 1 MF, G J. Hronca, Bratislava
8. *Pavol Seress*, 4, G Bratislava, Tomašíkova
- 9.—10. *Ivan Polách*, 4 MF, G J. Hronca, Bratislava
Marcel Polakovič, 3 M, G A. Markuša, Bratislava

Kategorie B

- 1.—4. *Róbert Bódi*, M, G A. Markuša, Bratislava
Pavol Gvozďjak, M, G A. Markuša, Bratislava
František Komora, M, G A. Markuša, Bratislava
Stanislav Šimunek, M, G A. Markuša, Bratislava
- 5.—6. *Martin Bujdák*, M, G A. Markuša, Bratislava
Zuzana Kosorincová, M, G A. Markuša, Bratislava
7. *Miloš Goda*, M, G A. Markuša, Bratislava
8. *Branislav Stríženec*, MF, G J. Hronca, Bratislava
9. *Andrea Škamlová*, M, G A. Markuša, Bratislava

Kategorie C

1. *Stanislav Januschke*, MF, G J. Hronca, Bratislava

2. *Peter Gvozďjak*, M, G A. Markuša, Bratislava
3. *Milan Mosný*, MF, G J. Hronca, Bratislava
4. *Ilja Martišovitš*, MF, G J. Hronca, Bratislava
5. *Rastislav Tamaškovíc*, MF, G J. Hronca, Bratislava
6. *Mário Strapec*, M, G A. Markuša, Bratislava
7. *Jana Zdražilová*, M, G A. Markuša, Bratislava
8. *Hana Krajňáková*, M, G A. Markuša, Bratislava
- 9.–10. *Štefan Dobrev*, M, G A. Markuša, Bratislava
Radoslav Tomek, MF, G J. Hronca, Bratislava

Západoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Juraj Marczell*, 4, maďarské gymnázium Galanta
2. *Marián Lukáč*, 3, G Bánovce n. B.
3. *Rudolf Burcl*, 3, G Trnava
4. *Pavol Kolník*, 3, G Nové Mesto n. V.
5. *Peter Mužila*, 4, G Nitra, Párovská
6. *Erik Hevesi*, 4, G Levice
7. *Oliver Ralík*, 3, G E. Gudernu, Nitra
8. *Ladislav Baráth*, 3, G Komárno
9. *András Czékus*, 4, maďarské gymnázium Komárno
10. *Róbert Jakubík*, 4, G Levice

Kategorie B

1. *Viktor Bodi*, G E. Gudernu, Nitra
2. *Ján Trojan*, G Nitra, Párovská
3. *Petik Katalin Kis*, maďarské gymnázium Komárno

4. *Benedikt Török*, G Dunajská Streda
5. *Ondrej Trubač*, G Senec
6. *Ladislav Petényi*, G Šahy
7. *Martin Holeček*, G Levice
8. *Peter Jászberenyi*, G E. Gudernu, Nitra
9. *Júlia Hamadová*, G E. Gudernu, Nitra
10. *Jana Káčeriková*, G Nitra, Párovská

Kategorie C

1. *Gabriel Varga*, G Šamorín
2. *Miklós Gyetvén*, SPŠ Komárno
3. *Viktor Gréč*, G Skalica
4. *Eva Fašángová*, maďarské gymnázium Želiezovce
5. *Marián Kocsis*, SPŠ stav. Hurbanovo
6. *Peter Hladký*, G Trenčín
7. *Terézia Vančová*, G Trnava
8. *Jozef Géci*, G Levice
9. *Daniela Vargová*, G Levice
10. *Karol Zimmer*, G E. Gudernu, Nitra

Středoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Milan Kubala*, 4 M, G Žilina, Veľká Okružná
2. *Igor Melicherčík*, 4, G Banská Bystrica, Tajovského
3. *Dušan Hanes*, 3 MF, G Prievidza
4. *Robert Germič*, 4 M, G Žilina, Veľká Okružná
5. *Miroslav Laššák*, 3 M, G Žilina, Veľká Okružná

6. *Jaroslav Jaroš*, 3 M, G Žilina, Veľká Okružná
7. *Jozef Čierny*, 4 M, G Žilina, Veľká Okružná
- 8.—9. *Roman Maslenka*, 4, G Banská Štiavnica
Luboš Mikušiak, 4 M, G Žilina, Veľká Okružná
10. *Ivan Bereš*, 4 MF, G Zvolen

Kategorie B

1. *Vladimír Šosovička*, M, G Žilina, Veľká Okružná
- 2.—3. *Roman Hric*, G Banská Bystrica, Tajovského
Peter Oravec, M, G Žilina, Veľká Okružná
4. *Jozef Radler*, MF, G Zvolen
5. *Jozef Saniga*, M, G Žilina, Veľká Okružná
6. *Peter Botek*, M, G Žilina, Veľká Okružná
7. *Marcel Zanechal*, M, G Žilina, Veľká Okružná
8. *Zuzana Hellyová*, G Žilina, Wolkerova
9. *Ján Wacławek*, G Lučenec

Kategorie C

- 1.—2. *Luboš Ciklamín*, M, G Žilina, Veľká Okružná
Ondrej Šuch, 8. trieda ZŠ Martin, ul. Mládeže
3. *Gregor Rayman*, G Žilina, Wolkerova
4. *Robert Mitka*, M, G Žilina, Veľká Okružná
5. *Aleš Černý*, M, G Žilina, Veľká Okružná
6. *Peter Korbačka*, M, G Žilina, Veľká Okružná
- 7.—8. *Luboš Bánik*, M, G Žilina, Veľká Okružná
Mário Italy, M, G Žilina, Veľká Okružná
- 9.—10. *Jotis Fotopulos*, G Banská Bystrica, Tajovského
Stanislav Matuška, M, G Žilina, Veľká Okružná

Východoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Roman Soták*, 3 M, G Košice, Šmeralova
2. *Mário Drosc*, 3, G Michalovce
3. *Daniela Gavalcová*, 4 M, G Košice, Šmeralova
4. *Stanislav Krajčí*, 2 M, G Košice, Šmeralova
5. *Peter Čirip*, 4, G Prešov, Konštantínova
6. *Igor Bilák*, 4, G Prešov, Konštantínova
7. *Alexander Szabari*, 4 M, G Košice, Šmeralova
8. *Vladimír Hašík*, 4, SPŠE Košice
9. *Zora Mlýnková*, 4 M, G Košice, Šmeralova
10. *Peter Muška*, 3 MF, G Poprad, Leninovo nábr.

Kategorie B

1. *Stanislav Krajčí*, M, G Košice, Šmeralova
2. *Radoslav Mroz*, G Spišská Nová Ves
3. *Olga Katreniaková*, G Košice, Šrobárova
4. *Zuzana Bobovská*, G Poprad, Leninovo nábr.
- 5.–6. *Roman Vávra*, G Rožňava
Roman Vodička, M, G Košice, Šmeralova
7. *Pavol Schreiber*, G Krompachy
8. *Zdeno Kalnassy*, G Prešov, Konštantínova
- 9.–10. *Rudolf Krajčí*, G Poprad, Leninovo nábr.
Daniela Pitoňáková, G Poprad, Zápotockého

Kategorie C

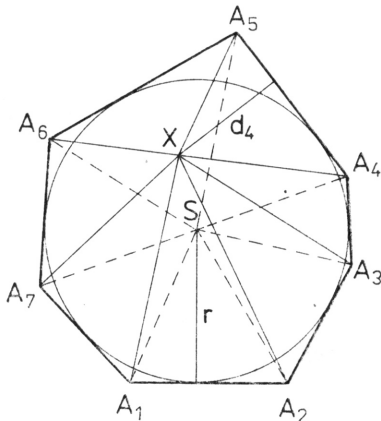
1. *Maroš Rusňák*, M, G Košice, Šmeralova
2. *Zuzana Gajdová*, SPŠ drev., Spišská Nová Ves
3. *Martin Kačur*, G Vranov
4. *Adriana Jancurová*, G Humenné
5. *Peter Fúsek*, G Poprad, Leninovo nábr.

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

C - I - 1

Uvnitř konvexního sedmiúhelníku $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ opsaného kružnici o poloměru r je dán bod X . Vyjádřete r pomocí délek stran sedmiúhelníku a vzdáleností bodu X od přímek $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_6A_7, A_7A_1$.

Řešení. Označme d_i vzdálenost bodu X od přímky A_iA_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, 6$) a d_7 vzdálenost bodu X od přímky A_7A_1 . Celý sedmiúhelník se skládá ze sedmi nepřekrývajících se trojúhelníků $XA_1A_2, XA_2A_3, \dots, XA_6A_7, XA_7A_1$ (obr. 1).



Obr. 1

Jeho obsah se tedy rovná součtu obsahů těchto trojúhelníků, tj. hodnotě

$$\frac{1}{2} (|A_1A_2| \cdot d_1 + \dots + |A_6A_7| \cdot d_6 + |A_7A_1| \cdot d_7).$$

Daný sedmiúhelník je také složen z nepřekrývajících se trojúhelníků $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_6A_7, SA_7A_1$, kde jsme označili S střed kružnice sedmiúhelníku vepsané. Všechny tyto trojúhelníky mají stejně velkou výšku r ke straně A_iA_{i+1} (A_7A_1), obsah sedmiúhelníku se tudíž rovná také hodnotě

$$\frac{1}{2} (|A_1A_2| + |A_2A_3| + \dots + |A_6A_7| + |A_7A_1|)r.$$

Porovnáním obou výrazů pro obsah sedmiúhelníku dostaneme

$$r = \frac{|A_1A_2| \cdot d_1 + \dots + |A_6A_7| \cdot d_6 + |A_7A_1| \cdot d_7}{|A_1A_2| + \dots + |A_6A_7| + |A_7A_1|}.$$

C - I - 2

Určete všechna přirozená čísla n , která se nedají napsat ve tvaru $n = 3x + 5y$, kde x, y jsou přirozená čísla.

Řešení. Jsou-li x, y přirozená čísla (tj. celá kladná), je číslo $3x + 5y$ větší než 7. Tím je zřejmé, že čísla 1, 2, 3, ..., 6, 7 nejdou napsat ve tvaru $3x + 5y$, kde x, y jsou přirozená čísla. Čísla 8, 11, 13 a 14 lze napsat v požadovaném tvaru: $8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$, $11 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1$, $13 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2$ a $14 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1$. Čísla 9, 10, 12 a 15 není možné napsat poža-

dovaným způsobem. Kdyby například platilo $15 = 3x + 5y$, x, y přirozená čísla, bylo by číslo $5y = 15 - 3x$ dělitelné třemi. Pak by však muselo být $y \geq 3$ a číslo $x = \frac{15 - 5y}{3}$

by nebylo přirozené, protože by nebylo kladné. Snadno si ověříte, že čísla 16, 17, 18, 19 a 20 lze vyjádřit ve tvaru $3x + 5y$, kde x, y jsou přirozená čísla, například $18 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3$. Každé číslo větší než 20 lze napsat ve tvaru $5k + q$, kde $k \geq 3$ a q se rovná některému z čísel 1, 2, 3, 4, 5. Pak je $5k + q = 5(k - 3) + 15 + q = 5(k - 3) + r$, $r \in \{16, 17, 18, 19, 20\}$. Víme již, že se číslo r dá napsat ve tvaru $3x + 5y$, kde x, y jsou přirozená čísla, proto to platí i pro číslo $5k + q = 3x + 5(y + k - 3)$. Hledanou množinou přirozených čísel je tedy množina

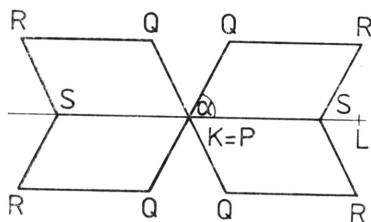
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 15\}.$$

To ovšem za předpokladu, že přirozeným číslem rozumíme číslo celé a kladné. Zahrneme-li mezi přirozená čísla také nulu, dostaneme jen množinu $\{1, 2, 4, 7\}$.

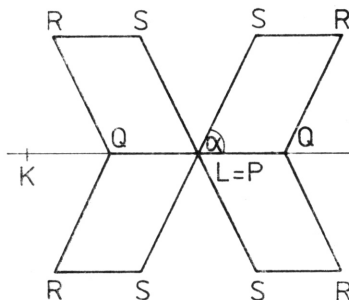
C - 1 - 3

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a v jeho rovině dva body K, L . Uvažujme všechny rovnoběžníky $PQRS$ shodné s rovnoběžníkem $ABCD$, které leží v téže rovině, přímka PQ prochází bodem K a přímka PS bodem L . Určete množinu všech vrcholů P takových rovnoběžníků a dokažte, že existují dva body takové, že úhlopříčka PR každého uvažovaného rovnoběžníku $PQRS$ prochází aspoň jedním z nich.

Řešení. Označme $\alpha = |\sphericalangle DAB|$. Do hledané množiny patří zřejmě bod K . Existují totiž čtyři rovnoběžníky $PQRS$ shodné s rovnoběžníkem $ABCD$, pro které splývá bod P s bodem K a bod S leží na přímce KL (obr. 2). Podobně to platí pro bod L (obr. 3). Žádný další bod přímky KL nemůže do hledané množiny patřit, protože by přímky PK , PL splynuly, na přímce PK leží bod Q , na přímce PL bod S , avšak body Q , P , S neleží na přímce. Hledejme ty body P , které

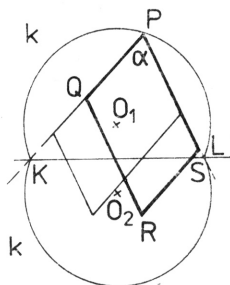


Obr. 2

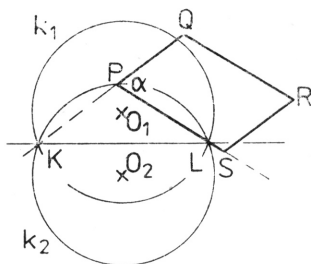


Obr. 3

neleží na přímce KL . Předpokládejme tedy, že $PQRS$ je rovnoběžník požadovaných vlastností a že bod P neleží na přímce KL . Protože $|\sphericalangle SPQ| = \alpha$ a bod K leží na přímce PQ a bod L na přímce PS , je $|\sphericalangle KPL| = \alpha$ (obr. 4) nebo je $|\sphericalangle KPL| = 180^\circ - \alpha$ (obr. 5). Podle věty o obvodovém a stře-



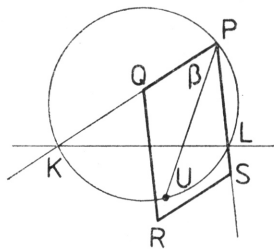
Obr. 4



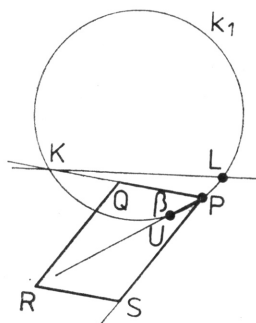
Obr. 5

dovém úhlu je množinou všech bodů P v rovině, pro které je $|\sphericalangle KPL| = \alpha$, množina všech bodů dvou kruhových oblouků s krajními body K, L . Totéž platí pro ty body P , pro které je $|\sphericalangle KPL| = 180^\circ - \alpha$. Všechny tyto čtyři kruhové oblouky

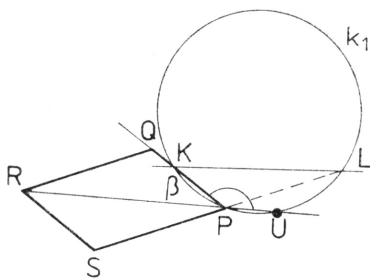
tvoří spolu s body K, L dvě kružnice procházející body K, L a souměrně sdružené podle přímky KL . Tyto dvě kružnice splývají, je-li $\alpha = 90^\circ$ (rovnoběžník $ABCD$ je pravoúhelník). Je-li obráceně P bod některé z těchto dvou kružnic a různý od bodů K, L , je $|\sphericalangle KPL| = \alpha$ nebo je $|\sphericalangle KPL| = 180^\circ - \alpha$. V prvním případě můžeme na polopřímkách PK a PL (nebo na polopřímkách opačných) zvolit body Q a S tak, že lze body P, Q, S doplnit na rovnoběžník $PQRS$ shodný s rovnoběžníkem $ABCD$. V druhém případě můžeme se stejným výsledkem zvolit bod Q na polopřímce PK a bod S na polopřímce opačné k polopřímce PL , nebo bod S na polopřímce PL a bod Q na polopřímce opačné k polopřímce PK . Protože do hledané množiny patří též body K, L , můžeme shrnout výsledek: Hledanou množinou je množina všech bodů kružnic k_1, k_2 procházejících body K, L , pro jejichž středy O_1, O_2 platí (pro $i = 1, 2$) $|\sphericalangle KO_iL| = 2\alpha$, jestliže je $\alpha = |\sphericalangle DAB| \leq 90^\circ$, nebo platí $|\sphericalangle KO_iL| = 2(180^\circ - \alpha)$ v případě $\alpha > 90^\circ$. Je-li $\alpha = 90^\circ$, kružnice k_1, k_2 splývají. Zvolme na kružnici k_1 bod U tak, aby pro každý její bod P , pro který je $|\sphericalangle KPL| = \alpha$, platilo $|\sphericalangle KPU| = \beta$, kde $\beta = |\sphericalangle BAC|$. Je-li $PQRS$ rovnoběžník požadovaných vlastností a bod P leží na kružnici k_1 , prochází jeho úhlopříčka PR bodem U , neboť $|\sphericalangle QPR| = \beta$ a $|\sphericalangle KPU| = \beta$ nebo $|\sphericalangle KPU| = 180^\circ - \beta$ (obr. 6, 7, 8), podle toho, na kterém oblouku kružnice k_1 s krajními body K, U bod P leží. V každém případě pak leží body R, U, P na jedné přímce. Leží-li bod P na kružnici k_2 , prochází přímka PR bodem V souměrně sdruženým k bodu U podle přímky KL . Tím jsme dokázali druhou část tvrzení úlohy, že přímka PR prochází buď bodem U , nebo bodem V .



Obr. 6

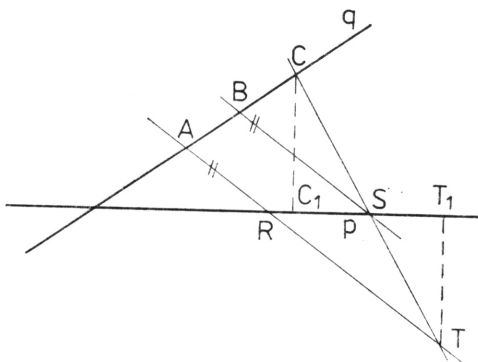


Obr. 7



Obr. 8

Jsou dány různoběžky p, q a na přímce q tři navzájem různé body A, B, C , $A \notin p$. Je-li $R \in q$ libovolný bod přímky p , označme S průsečík přímky p s přímkou rovnoběžnou s přímkou AR a procházející bodem B . Necht' je T průsečík přímek AR a CS . Dokažte, že vzdálenost bodu T od přímky p nezávisí na volbě bodu R .

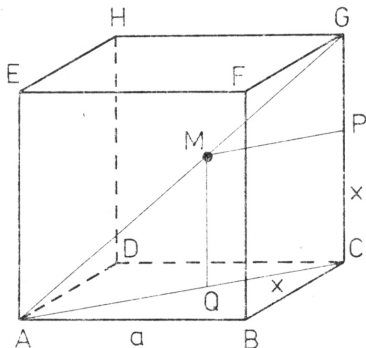


Obr. 9

Řešení. Označme C_1, T_1 paty kolmic vedených body C, T k přímce p (obr. 9). Je pak $|TT_1| : |CC_1| = |TS| : |CS|$. Z podobnosti trojúhelníků ATC, BSC plyne $|TS| : |CS| = |AB| : |CB|$, takže $|TT_1| = |AB| \cdot |CC_1| : |CB|$. Poslední výraz nezávisí na R , což jsme měli dokázat. Mlčky jsme předpokládali, že $C \notin p$. Je-li bod C průsečíkem přímek p, q , je $T = R$ a tvrzení platí také.

Uvnitř krychle určete středy všech kulových ploch, které se dotýkají jejích tří sousedních stěn se společným vrcholem a tří sousedních hran krychle, které v těchto stěnách neleží.

Řešení. Označme danou krychli $ABCDEFGH$ (obr. 10). Je-li bod M středem kulové plochy, jež se dotýká stěn ABC , ADH , ABF , leží bod M na tělesové úhlopříčce AG krychle. Každý bod úhlopříčky AG má od přímek GF , GH , GC stejné vzdálenosti. Máme tedy najít ty body M úhlopříčky AG , které



Obr. 10

mají stejnou vzdálenost od stěny ABC jako od hrany GC . Označme $|AB| = a$, $|MQ| = |MP| = x$, kde je Q pata kolmice vedené bodem M k stěně ABC , P je pata kolmice vedené bodem M k přímce GC . Z podobnosti trojúhelníků GPM , GCA plyne

$$x : (a - x) = a\sqrt{2} : a = \sqrt{2}.$$

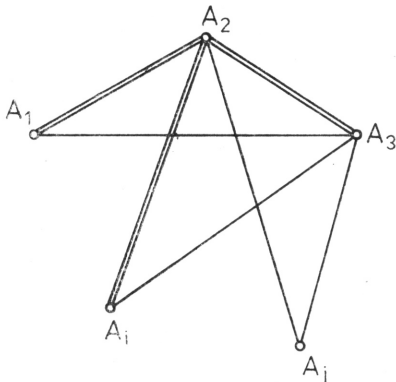
Protože $|GM| : |AM| = |GP| : |MQ| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dělí bod M úhlo-

příčku AG v poměru $\sqrt{2} : 1$. Na každé tělesové úhlopříčce krychle existují dva body s touto vlastností. Celkem existuje pro danou krychli osm bodů, jež jsou středy kulových ploch požadované vlastnosti.

C - I - 6

Je dán mnohoúhelník $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Každou ze stran a úhlopříček daného mnohoúhelníku obarvíme červeně nebo modře tak, že strany A_1A_2 a A_2A_3 budou červené a strana A_3A_4 a všechny úhlopříčky vedoucí z vrcholu A_3 budou modré. Určete n , platí-li navíc: Při každém takovém obarvení existuje aspoň 49 dvoubarevných trojúhelníků, přičemž existuje obarvení, ve kterém jich je právě 49.

Řešení. Předpokládejme, že je n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ obarven podle podmínek úlohy. Necht' je ze spojnic $A_2A_4, \dots, A_2A_n$ obarveno k modře a zbývajících $n - 3 - k$ červeně. Dvoubarevné budou určitě trojúhelníky $A_1A_2A_3$ a $A_1A_2A_j$ ($j \geq 4$), kde je A_2A_j obarveno modře (obr. 11, červená úsečka je vyznačena dvojité, modrá jednoduše). Dále jsou dvoubarevné všechny trojúhelníky $A_2A_3A_r$, $r \geq 4$, a všechny trojúhelníky $A_2A_iA_j$ ($i, j \geq 4$), pro které je úsečka A_2A_j modrá a úsečka A_2A_i červená. Je-li úsečka A_2A_i červená ($4 \leq i \leq n$), je právě jeden z trojúhelníků $A_1A_2A_i$, $A_1A_3A_i$ dvoubarevný. To je dalších $n - 3 - k$ dvoubarevných trojúhelníků. Celkem máme aspoň m dvoubarevných trojúhelníků, $m = 1 + k + (n - 3) + (n - 3 - k) + (n - 3 - k)k = 2n - 5 + k(n - 3 - k)$. Protože $0 \leq k \leq n - 3$, je $m \geq 2n - 5$,



Obr. 11

přičemž pro $k = 0$ nebo $k = n - 3$ je $m = 2n - 5$. Zvolíme-li obarvení tak, že červené budou pouze úsečky A_1A_2 a A_2A_3 , jsou podmínky úlohy splněny a v mnohoúhelníku je právě $2n - 5$ dvoubarevných trojúhelníků. Jsou to trojúhelníky $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_i$, $A_2A_3A_i$ ($i = 4, \dots, n$). Vidíme, že při každém obarvení n -úhelníku podle požadavků úlohy existuje aspoň $2n - 5$ dvoubarevných trojúhelníků a existuje obarvení, při kterém jich je právě $2n - 5$. Je tedy $2n - 5 = 49$, odkud plyne $n = 27$.

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

C - S - 1

Nechť je $\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel a nechtě a, b, c, d jsou daná přirozená čísla (celá kladná). Jestliže

$$\{a + bt; t \in \mathbb{Z}\} \cap \{c + ds; s \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset,$$

pak největší společný dělitel čísel b, d dělí rozdíl $a - c$. Dokažte.

Řešení. Je-li splněn předpoklad úlohy, existují celá čísla t, s tak, že $a + bt = c + ds$, tedy $ds - bt = a - c$. Největší společný dělitel čísel b, d dělí i číslo $ds - bt$, tedy číslo $a - c$.

C - S - 2

Vypočtete poloměr kulové plochy, která je částí krychle o délce hrany $a = 10$ cm, dotýká se tří sousedních stěn této krychle a prochází jejím středem.

Řešení. Střed S kulové plochy, která se dotýká tří sousedních stěn krychle, leží na tělesové úhlopříčce krychle. Jeho vzdálenosti od stěn, jichž se kulová plocha dotýká, se rovnají poloměru r kulové plochy, jeho vzdálenost od společného bodu A všech tří stěn je $r\sqrt{3}$. Vzdálenost bodu S od středu krychle je r , protože kulová plocha má středem krychle procházet. Proto je

$$r\sqrt{3} + r = \frac{a}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}, \quad r = \frac{5}{2}(3 - \sqrt{3}).$$

Případ, kdy je střed krychle bodem úsečky AS , a tedy $r(\sqrt{3} - 1) = 5\sqrt{3}$, nevyhovuje, protože by příslušná kulová plocha nebyla částí krychle.

C - S - 3a

Kolem Měsíce obíhá 25 spojových družic. Každá z nich je spojena s 30 výzkumnými stanicemi na povrchu Měsíce, při-

čemž libovolné dvě stanice jsou přímo spojeny nejvýše s jednou společnou družicí. Dokažte, že na Měsíci pracuje alespoň 150 stanic, které mají spojení právě s jednou družicí.

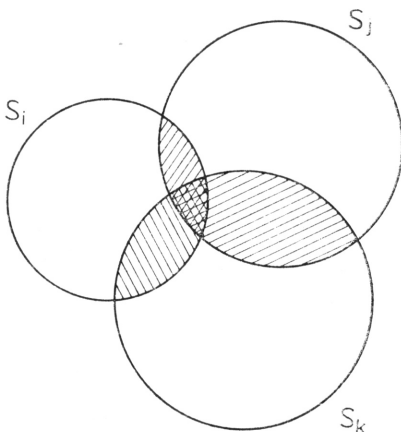
Řešení. Označme S_i množinu všech těch stanic, které jsou přímo spojeny s i -tou spojovou družicí, $i = 1, 2, \dots, 25$. Každá z množin S_i má podle předpokladu právě 30 prvků. Pro $i \neq j$ mají množiny S_i, S_j nejvýše jeden společný prvek, v opačném případě by měly dvě stanice přímé spojení s i -tou i s j -tou družicí. Označme n počet prvků množiny N , která je sjednocením všech množin $S_i, i = 1, 2, \dots, 25$, tj. množiny všech stanic, které mají spojení aspoň s jednou družicí. Zřejmě platí

$$n \geq \sum_{i=1}^{25} |S_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{25} |S_i \cap S_j|,$$

přičemž znaménko rovnosti platí právě tehdy, když každé tři množiny $S_i, S_j, S_k, i \neq j \neq k \neq i$ mají prázdný průnik (obr. 12). Zde jsme $|X|$ označili počet prvků množiny X . Jelikož je $|S_i| = 30$ a $|S_i \cap S_j| \leq 1$ pro $i \neq j$, je $n \geq 25 \cdot 30 - \binom{25}{2} \cdot 1 = 450$. Kdyby nejvýše 149 stanic mělo spojení právě s jednou družicí, měly by ostatní stanice množiny N spojení aspoň s dvěma a platilo by

$$149 \cdot 1 + (n - 149) \cdot 2 \leq 25 \cdot 30,$$

protože 25.30 je počet všech spojení. To by pak platilo $n \leq 449,5$, což je spor s odvozeným vztahem $n \geq 450$.



Obr. 12

C - S - 3b

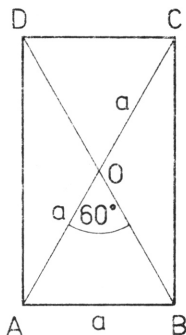
Sestrojte všechny obdélníky, jejichž úhlopříčky svírají úhel 60° a součet délek jedné strany a úhlopříčky je 12 cm.

Řešení. Rozlišíme dva případy:

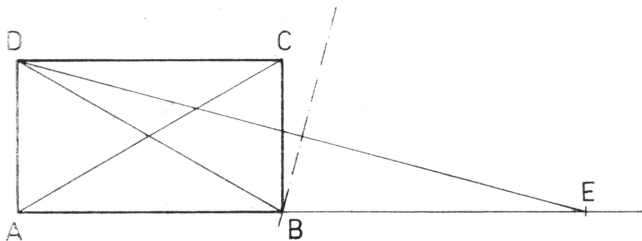
a) Necht' je součet délek kratší strany a obdélníku a jeho úhlopříčky roven 12 cm. Pak je délka úhlopříčky $u = 2a$, takže $a = 4$ cm, $u = 8$ cm, neboť trojúhelník ABO je rovnostranný (O je střed obdélníku, A, B jsou krajní body jeho kratší strany, obr. 13). Sestrojíme tedy pravoúhlý trojúhelník ABC o délce odvěsny $|AB| = 4$ cm a délce přepony $|AC| = 8$ cm a ten doplníme na obdélník $ABCD$.

b) Necht' je v obdélníku $ABCD$ součet délek delší strany AB a úhlopříčky roven 12 cm (obr. 14). Pak je $|\sphericalangle DBE| = 150^\circ$, kde je E bod na polopřímce AB , pro který je $|BE| = |BD|$.

Trojúhelník DBE je rovnoramenný, tedy $|\sphericalangle BED| = 15^\circ$. Sestrojíme tedy pravouhlý trojúhelník DAE , v němž je $|AE| = 12$ cm, $|\sphericalangle AED| = 15^\circ$ a pravý úhel při vrcholu A . Osa úsečky DE protne stranu AE v bodě B , body A, B, D doplníme na obdélník $ABCD$.



Obr. 13



Obr. 14

C - II - 1

Najděte nejmenší přirozené, tj. celé kladné číslo, jehož polovina je druhou mocninou přirozeného čísla a jehož třetina je třetí mocninou přirozeného čísla.

Řešení. Necht' má hledané číslo tvar $m = 2^p \cdot 3^q \cdot c$, kde jsou p, q čísla celá nezáporná a číslo c je přirozené a není dělitelné ani dvěma, ani třemi. Každé přirozené číslo se dá zřejmě právě jedním způsobem takto napsat. V našem případě

jsou čísla p, q dokonce kladná, protože $\frac{m}{2} = 2^{p-1} \cdot 3^q \cdot c$,

$\frac{m}{3} = 2^p \cdot 3^{q-1} \cdot c$ jsou přirozená. Protože $\frac{m}{2}$ je druhou mocni-

nou přirozeného čísla, musí být čísla $p - 1$ a q sudá. Jelikož $\frac{m}{3}$

je třetí mocninou přirozeného čísla, musí být čísla p a $q - 1$ dělitelná třemi. Číslo c musí být z uvedených důvodů druhou i třetí mocninou. Aby bylo číslo m za těchto podmínek nejmenší, musí být $p = 3, q = 4, c = 1$, tedy $m = 2^3 \cdot 3^4 = 648$.

C - II - 2

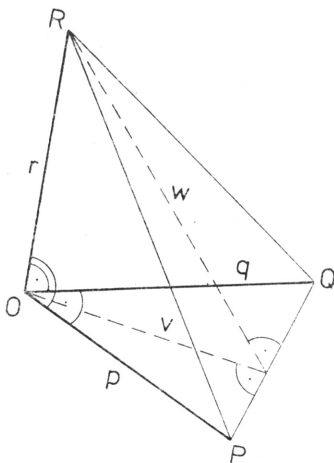
Bodem S prochází pět rovin, z nichž žádné tři neprocházejí jednou přímkou. Na kolik částí rozdělí tyto roviny celý prostor? (Předpokládáme, že rovina dělí prostor na dvě části, dvě různoběžné roviny na čtyři části apod.)

Řešení. Tři roviny dělí prostor na osm částí, tzv. oktantů. Čtvrtá rovina protne každou z těchto tří rovin v přímce pro-

cházející bodem S . Tyto tři přímky rozdělí tuto čtvrtou rovinu na šest úhlů. Každý z nich rozdělí jeden z osmi oktantů na dvě části, přibude tedy šest částí. Proto dělí čtyři roviny daných vlastností celý prostor na 14 částí. Pátá rovina protne každou z předcházejících čtyř rovin v přímce, tyto čtyři přímky dělí pátou rovinu na osm částí. Proto dělí pět rovin prostor na $14 + 8 = 22$ částí.

C - II - 3a

Jsou dány navzájem různé body O, P, Q, R tak, že každé dvě z přímek OP, OQ, OR jsou navzájem kolmé. Délky úseček OP, OQ, OR označme p, q, r . Vyjádřete obsah trojúhelníku PQR pomocí p, q, r .

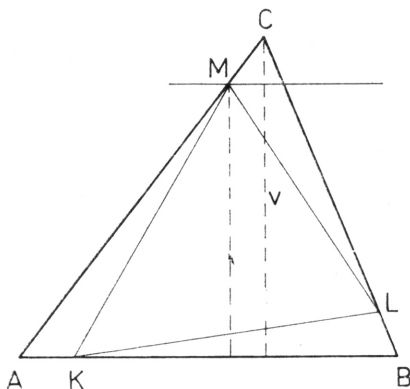


Obr. 15

Řešení. Obsah trojúhelníku OPQ je $\frac{1}{2}pq$ (obr. 15), proto se výška ke straně PQ rovná $\frac{pq}{\sqrt{p^2 + q^2}}$. Výška w v trojúhelníku PQR se proto rovná výrazu $w = \sqrt{r^2 + \frac{p^2 q^2}{p^2 + q^2}}$, hledaný obsah je $\frac{1}{2} \sqrt{p^2 q^2 + p^2 r^2 + q^2 r^2}$. Mohli jsme též použít Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí délek jeho stran.

C - II - 3b

Je dán trojúhelník ABC a na jeho stranách AB , BC , CA jsou po řadě zvoleny body K , L , M tak, že $|AK| = \frac{1}{7} |AB|$,



Obr. 16

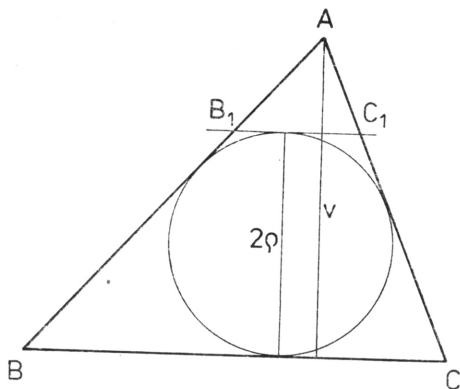
$|BL| = \frac{1}{7} |BC|$, $|CM| = \frac{1}{7} |CA|$. Vypočtete poměr obsahů trojúhelníků KLM a ABC .

Řešení. Výška ke straně AK v trojúhelníku AKM se rovná $\frac{6}{7}v$, kde je v výška ke straně AB v trojúhelníku ABC (obr. 16). Označíme-li P obsah trojúhelníku ABC , rovná se obsah trojúhelníku AKM hodnotě $\frac{6P}{49}$. Tentýž výsledek dostaneme pro obsahy trojúhelníků BLK , CML . Obsah trojúhelníku KLM dostaneme z obsahu trojúhelníku ABC odečtením obsahů trojúhelníků AKM , BLK , CML , je tedy hledaný poměr $1 - 3 \cdot \frac{6}{49} = \frac{31}{49}$.

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

B - I - 1

Do trojúhelníku ABC se stranami a, b, c vepíšme kružnici a sestrojme k ní další tečny rovnoběžné se stranami trojúhelníku. Každá z těchto tečen utíná od trojúhelníku ABC po jednom trojúhelníku. Do každého z těchto tří trojúhelníků vepíšme kružnici. Vyjádřete pomocí a, b, c součet obsahů všech čtyř kruhů ohraničených uvažovanými kružnicemi.



Obr. 17

Řešení. Tečna kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC , která je rovnoběžná se stranou BC , protíná strany AB, AC v bodech B_1, C_1 (obr. 17). Trojúhelník AB_1C_1 je s troj-

úhelníkem ABC podobný, koeficient podobnosti je $\frac{v - 2\rho}{v} =$
 $= 1 - \frac{2\rho}{v}$, kde je ρ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku
 ABC a v je výška ke straně BC . Označme P obsah trojúhelní-
ku ABC a s jeho poloviční obvod. Je $s \cdot \rho = P = \frac{1}{2}av$,
odkud plyne $1 - \frac{2\rho}{v} = 1 - \frac{a}{s}$. Obsah kruhu vepsaného
trojúhelníku AB_1C_1 je tedy $Q \left(1 - \frac{a}{s}\right)^2$, kde Q je obsah
kruhu vepsaného trojúhelníku ABC , tj. $Q = \pi\rho^2$. Hledaný
součet obsahů všech čtyř kruhů se tudíž rovná výrazu

$$\begin{aligned} Q + Q \left(1 - \frac{a}{s}\right)^2 + Q \left(1 - \frac{b}{s}\right)^2 + Q \left(1 - \frac{c}{s}\right)^2 &= \\ = \pi \frac{P^2}{s^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2} &= \\ = \pi \frac{(s-a)(s-b)(s-c)(a^2 + b^2 + c^2)}{s^3} &= \\ = \pi \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^3}. \end{aligned}$$

Přitom jsme použili Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku,
podle kterého je $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$.

B - 1 - 2

Nechť F je zobrazení množiny všech přirozených čísel na
množinu $\{-1, 1\}$, pro které platí $F(1) = -1$, $F(2k+1) =$
 $= -F(2k-1)$, $F(2k) = F(k)$ pro každé přirozené číslo k .

Dokažte, že platí

a) $F(3k) = -F(k)$ pro všechna přirozená čísla k ,

b) je-li $r \geq 0$ a $1 \leq s \leq 2^r$, $s \neq 2^{r-1}$, pak je $F(s + 2^r) = F(s)$.

Řešení. Vztahy $F(1) = -1$, $F(2k + 1) = -F(2k - 1)$ je zobrazení F definováno na posloupnosti všech lichých přirozených čísel, a to tak, že střídavě nabývá hodnot -1 a 1 , tedy $F(2k + 1) = (-1)^{k+1}$. Každé přirozené číslo se dá právě jedním způsobem napsat ve tvaru $n = 2^p(2q + 1)$, kde p, q jsou celá nezáporná čísla. Ze vztahu $F(2k) = F(k)$ pak plyne $F(n) = F(2q + 1) = (-1)^{q+1}$. Dále je $3n = 2^p(6q + 3) = 2^p[2(3q + 1) + 1]$, takže $F(3n) = (-1)^{3q+2} = (-1)^q = -F(n)$. Tím jsme dokázali první část tvrzení úlohy.

V druhé části úlohy rozlišíme tři případy:

1. $s = 2^r$, pak je $F(s + 2^r) = F(2^{r+1}) = -1 = F(s)$.
2. $s = 2^p$ a $p < r$. Pak je $F(s) = -1$, $F(s + 2^r) = F(2^p(2^{r-p} + 1)) = F(2^{r-p} + 1) = F(2 \cdot 2^{r-p-1} + 1) = -(-1)^{2^{r-p-1}}$. Je-li $p = r - 1$, rovná se poslední výraz jedné, jinak hodnotě $-1 = F(s)$.
3. $s = 2^p(2q + 1)$, $q > 0$. Protože je $s < 2^r$, je $p < r - 1$. Je $F(s) = (-1)^{q+1}$, $F(s + 2^r) = F(2^p(2q + 1 + 2^{r-p})) = F(2(q + 2^{r-p-1}) + 1) = (-1)^{q+1+2^{r-p-1}} = (-1)^{q+1} = F(s)$.

Tím jsme dokázali i druhou část úlohy.

B - I - 3

Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran (tzv. pythagorejské trojúhelníky) s obvodem 990.

Řešení. Označme a , b délky odvěsen a c délku přepony trojúhelníku daných vlastností. Má tedy platit

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a + b + c = 990.$$

Dosadíme-li do první rovnice $c = 990 - a - b$, dostaneme po úpravě

$$(990 - a)(990 - b) = 990.495.$$

Zřejmě je $a < 495$, jinak by bylo $c > 495$ a $a + b + c > 990$. Stejně tak je $b < 495$. Proto je $495 < 990 - a < 990$, $495 < 990 - b < 990$. Máme tudíž součin $990.495 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^2$ rozložit v součin dvou přirozených čísel, z nichž je každé větší než 495 a menší než 990. Takové rozklady jsou pouze čtyři: 594.825, 550.891, 605.810 a 675.726. Přitom nepřehlídíme k pořadí činitelů. Buď je totiž jeden z činitelů dělitelný číslem 121, pak přicházejí v úvahu pouze čísla 605 a 726, nebo je každý z činitelů dělitelný číslem 11. Pak je zase buď jeden z činitelů dělitelný ještě číslem 25, tedy číslem 275, přicházejí v úvahu čísla 550 a 825, nebo je každý z činitelů dělitelný číslem $5 \cdot 11 = 55$. V posledním případě nedostaneme žádné řešení.

Je-li $990 - a = 594$, $990 - b = 825$, je

$$a = 396, b = 165, c = 429.$$

Z dalších tří rozkladů dostaneme další tři řešení úlohy:

$$a = 440, b = 99, c = 451$$

$$a = 385, b = 180, c = 425$$

$$a = 315, b = 264, c = 411$$

B - I - 4

Nechť n je dané přirozené číslo. Určete počet všech po dvou neshodných trojúhelníků, jejichž všechny strany mají celočíselnou délku nejvýše rovnou n . Kolik je mezi nimi rovnoramenných trojúhelníků?

Řešení. Nejdříve určíme počet $s(n)$ trojúhelníků uvedených vlastností, jejichž největší strana má délku právě n . Označme strany takového trojúhelníku a, b, c tak, aby bylo $a \leq b \leq c = n$. Je-li n sudé, nabývá b hodnot $\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$. Pro a máme pak nutnou a postačující podmínku $a + b > n$, tj. $n + 1 - b \leq a \leq b$. Takže máme tyto možnosti:

$$c = n, b = \frac{n}{2} + 1, a = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \quad 2 \text{ možnosti}$$

$$b = \frac{n}{2} + 2, a = \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2 \quad 4 \text{ možnosti}$$

$$\dots \quad \dots$$

$$b = n, a = 1, 2, \dots, n \quad n \text{ možností}$$

Celkem jsme dostali $s(n) = 2 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+2)}{4}$

trojúhelníků. Z nich jsou rovnoramenné ty, pro které je

$a = b$, těch je $\frac{n}{2}$, a pak ještě ty, pro které je $b = n$, těch

je n . Přitom rovnostranný trojúhelník o stranách n, n, n je zahrnut v obou případech. Je tedy rovnoramenných

trojúhelníků $r(n) = \frac{3n}{2} - 1$.

Je-li n liché, je $\frac{n+1}{2} \leq b \leq n$ a dostaneme tyto možnosti:

$c = n, b = \frac{n+1}{2}, a = \frac{n+1}{2}$ 1 možnost

$b = \frac{n+3}{2}, a = \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}$ 3 možnosti

...

$b = n, a = 1, 2, \dots, n$ n možností

Celkem dostaneme při n lichém $s(n) = 1 + 3 + \dots + n =$

$= \frac{(n+1)^2}{4}$ trojúhelníků. Z nich je $r(n) = \frac{n+1}{2} + n - 1 =$

$= \frac{3n-1}{2}$ rovnoramenných. Naším úkolem je určit počet

$S(n)$ všech trojúhelníků s celočíselnými délkami stran nejvýše rovnými číslu n . Je tedy $S(n) = s(1) + s(2) + \dots + s(n)$, mezi nimi je $R(n) = r(1) + \dots + r(n)$ rovno-ramenných. Je proto

$$S(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k) + \frac{1}{4} m,$$

kde m je počet lichých čísel v množině $\{1, 2, \dots, n\}$, takže $m = \frac{n}{2}$ pro n sudé, $m = \frac{n+1}{2}$ pro n liché. Použitím vzorce

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

dostaneme:

$$n \text{ je sudé, pak je } S(n) = \frac{n(n+2)(2n+5)}{24},$$

$$n \text{ je liché, pak je } S(n) = \frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}.$$

Podobně dostaneme $R(n) = \frac{3n^2}{4}$ pro n sudé, $R(n) = \frac{3n^2+1}{4}$ pro n liché.

B - I - 5

Dokažte, že funkce

$$f(x) = \cos x \cos 2x + \cos Ax \cos 3Ax,$$

kde A je iracionální číslo, není periodická.

Řešení. Daná funkce f nabývá v bodě 0 hodnoty 2. Dokážeme, že v žádném jiném bodě hodnoty 2 nenabývá. Kdyby pro některé $x \neq 0$ platilo $2 = \cos x \cos 2x + \cos Ax \cos 3Ax$, muselo by platit $\cos x \cos 2x = 1$ a zároveň $\cos Ax \cos 3Ax = 1$, protože $\cos \alpha \cos \beta \leq 1$ pro každé α, β . Pak by ale platilo $\cos x = \cos 2x = 1$ a současně $\cos Ax = \cos 3Ax = \pm 1$, tedy $x = 2k\pi$, pro k celé nenulové a zároveň $Ax = \pi m$, m celé, takže $A = \frac{m}{2k}$. To je však spor s předpokladem iracionality čísla A .

B - I - 6

Dokažte, že pro přirozená čísla $k < m < n$ platí nerovnost

$$\frac{m(m-1) \dots (m-k)}{n(n-1) \dots (n-k)} < \left(\frac{2m-k}{2n-k} \right)^{k+1}.$$

Řešení. Položíme-li $p = m - \frac{k}{2}$, $q = n - \frac{k}{2}$, můžeme

dokazovanou nerovnost psát ve tvaru

$$\frac{\left(p + \frac{k}{2}\right)\left(p + \frac{k}{2} - 1\right) \dots \left(p - \frac{k}{2} + 1\right)\left(p - \frac{k}{2}\right)}{\left(q + \frac{k}{2}\right)\left(q + \frac{k}{2} - 1\right) \dots \left(q - \frac{k}{2} + 1\right)\left(q - \frac{k}{2}\right)} < \\ < \left(\frac{p}{q}\right)^{k+1}.$$

Výraz na levé straně nerovnosti je součinem $k + 1$ činitelů tvaru $\frac{p-x}{q-x}$, kde $x = \frac{k}{2}, \frac{k}{2} - 1, \dots, -\frac{k}{2}$. Je-li k sudé,

rovná se jeden z těchto činitelů zlomku $\frac{p}{q}$, ostatní sdružíme

do dvojic $\frac{p-x}{q-x}, \frac{p+x}{q+x}$, kde $x = 1, \dots, \frac{k}{2}$. Součin $\frac{p^2 - x^2}{q^2 - x^2}$

každých dvou činitelů v dvojici je kladný a menší než $\frac{p^2}{q^2}$;

proto je výraz na levé straně menší než $\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{p^2}{q^2}\right)^{\frac{k}{2}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{k+1}$.

Je-li k liché, je levá strana dokazované nerovnosti součinem

$\frac{k+1}{2}$ výrazů tvaru $\frac{p-x}{q-x} \cdot \frac{p+x}{q+x} = \frac{p^2 - x^2}{q^2 - x^2}$, $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2},$

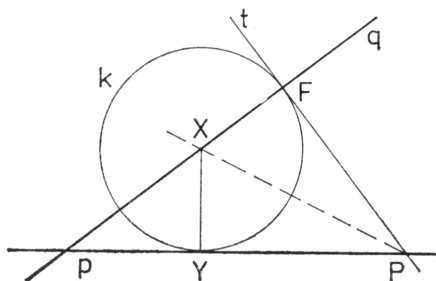
$\dots, \frac{k}{2}$, každý z nich je kladný a menší než $\frac{p^2}{q^2}$. Tím je ne-

rovnost dokázána i v případě lichého k .

B - S - 1

V rovině jsou dány přímky p , q a bod F , který leží na přímce q a neleží na přímce p . Sestrojte všechny body X na přímce q , pro které se kružnice se středem X a poloměrem $|XF|$ dotýká přímky p .

Řešení. Splňuje-li bod X podmínky úlohy (obr. 18), je tečna t kružnice $k(X, |XF|)$ v bodě F kolmá na přímkou q . Nejsou-li přímky p , q kolmé, označíme P průsečík přímek p , t . Kružnice k se pak dotýká přímky p v bodě Y , pro který platí $|PY| = |PF|$. Takové body Y jsou na přímce p právě dva, ke každému z nich dostaneme právě jeden bod X , který je řešením úlohy. Je $X \in q$, $XY \perp p$. Je-li $p \perp q$, má úloha právě jedno řešení, je to střed úsečky FQ , kde $Q = p \cap q$.



Obr. 18

B - S - 2

Reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m$ splňují nerovnosti $0 < x_j < y_j \leq 1$ pro $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Dokažte, že platí

$$\sum_{j=1}^m \frac{x_j}{y_j} \leq m - \sum_{j=1}^m (y_j - x_j).$$

Řešení. Podle předpokladu je $1 - y_j \geq 0$, $1 - \frac{x_j}{y_j} > 0$,

vynásobením dostaneme nerovnost $1 - \frac{x_j}{y_j} - y_j + x_j \geq 0$,

tedy $\frac{x_j}{y_j} \leq 1 - (y_j - x_j)$ pro $j = 1, 2, \dots, m$. Sečteme-li všechny tyto nerovnosti, dostaneme nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

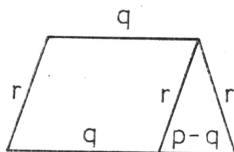
B - S - 3a

Číslo $8!$ (osm faktoriál) napište jako součin přirozených čísel x, y, z tak, aby platilo $x \leq y \leq z$ a číslo x bylo co největší.

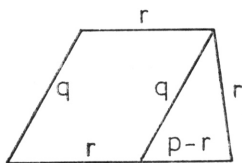
Řešení. Je $8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Podle podmínek úlohy je $x^3 \leq xyz = 8!$, tedy $x \leq \sqrt[3]{8!} = 4 \cdot \sqrt[3]{630} < 35$. Nemůže být $x = 34$ nebo $x = 33$, protože tato čísla nedělí číslo $8!$. Položíme-li $x = 32$, je $yz = 1\,260$ a nutně $y = 35$, $z = 36$. Jediné řešení úlohy je $8! = 32 \cdot 35 \cdot 36$.

Jsou dána reálná čísla p, q, r , pro která platí $p > q > r > 0$. Najděte všechny lichoběžníky, jejichž právě jedna strana má délku p , právě jedna strana délku q a právě dvě strany mají délku r . Proveďte diskusi.

Řešení. Buď mají obě ramena lichoběžníku délku r , nebo má menší základna a jedno rameno délku r . V druhém případě má delší základna délku p a druhé rameno délku q , obráceně to není možné, neboť neexistuje trojúhelník o délkách stran $r, q - r, p$. V obou případech (obr. 19, 20) je nutnou a postačující podmínkou existence lichoběžníku podmínka $2r > p - q$. Je-li tato podmínka splněna, můžeme sestavit trojúhelník o délkách stran $r, p - q, r$ nebo $r, p - r, q$, oba tyto trojúhelníky doplníme rovnoběžníkem na lichoběžník s požadovanými délkami základen a ramen.



Obr. 19



Obr. 20

ÚLOHY II. KOLA

B - II - 1

Najděte všechny funkce g definované na množině všech bodů roviny, které mají tuto vlastnost: Jsou-li A, B, C vrcholy trojúhelníku v dané rovině, je $g(A) + g(B) + g(C) = 1$.

Řešení. Zvolme v uvažované rovině dva různé body X, Y . K nim můžeme vždy zvolit dva různé body A, B tak, že přímka AB neprochází žádným z bodů X, Y , takže body A, B, X jsou vrcholy trojúhelníku, rovněž tak body A, B, Y . Podle předpokladu pro každou hledanou funkci platí $g(A) + g(B) + g(X) = g(A) + g(B) + g(Y) = 1$, tedy $g(X) = g(Y)$. Z toho vyplývá, že každá funkce vyhovující úloze je konstantní. Protože $g(A) + g(B) + g(C) = 1$, vyhovuje úloze pouze funkce přiřazující každému bodu X hodnotu $\frac{1}{3}$,

tj. $g(X) = \frac{1}{3}$ pro každý bod X roviny.

B - II - 2

Funkce f je definována na množině všech přirozených čísel, přičemž pro všechna přirozená čísla n platí

$$f(n+1) = \frac{(f(n))^2 + 4}{2f(n)}.$$

Jaká je nutná a postačující podmínka pro číslo $f(1)$, aby pro všechna $n \geq 2$ platilo $f(n) > 2$?

Řešení. Je-li $f(n) > 0$, je podmínka $f(n+1) > 2$ ekvivalentní podmínce $(f(n) - 2)^2 > 0$, tedy podmínce $f(n) \neq 2$. Je-li $f(n) < 0$, je $f(k) < 0$ pro všechna přirozená čísla k . Hledanou podmínkou pro $f(1)$ je tudíž podmínka $f(1) > 0 \wedge f(1) \neq 2$.

B - II - 3a

Dokažte, že neexistují celá kladná čísla x, y, z tak, aby platilo $x^x + y^y = z^z$.

Řešení (podle L. Kábrta, 2. roč. G Chrudim). Předpokládejme, že pro celá kladná čísla x, y, z platí $x^x + y^y = z^z$. Pak je zřejmě $x < z, y < z$ a

$$1 = \left(\frac{x}{z}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{z-x} + \left(\frac{y}{z}\right)^y \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{z-y},$$

tedy

$$z = \left(\frac{x}{z}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{z-x-1} + \left(\frac{y}{z}\right)^y \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{z-y-1}.$$

Avšak $z - x - 1 \geq 0, z - y - 1 \geq 0, x \geq 1, y \geq 1$,

$$\frac{x}{z} < 1, \quad \frac{y}{z} < 1, \quad \text{tedy je } \left(\frac{x}{z}\right)^x < 1, \quad \left(\frac{1}{z}\right)^{z-y-1} \leq 1,$$

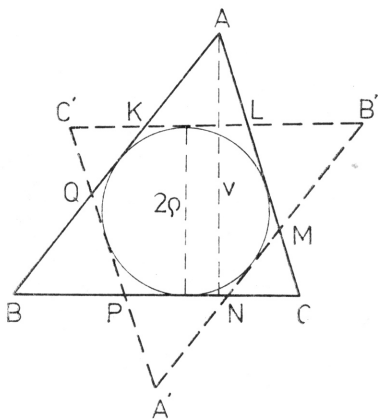
$$\left(\frac{y}{z}\right)^y < 1, \quad \left(\frac{1}{z}\right)^{z-x-1} \leq 1. \quad \text{Odtud plyne } z < 1 + 1 = 2,$$

tedy $z = 1$. Pak však neexistují celá kladná čísla x, y menší než z . To je spor, tím je tvrzení úlohy dokázáno.

K danému trojúhelníku T o délkách stran a, b, c sestrojíme trojúhelník T' souměrně sdružený podle středu kružnice vepsané trojúhelníku T . Dokažte, že obvod p šestiúhelníku, který je průnikem trojúhelníků T, T' , splňuje nerovnost

$$p \leq \frac{2(ab + bc + ca)}{a + b + c}.$$

Řešení. Označme A, B, C vrcholy trojúhelníku T , v jeho výšku ke straně BC a ϱ poloměr kružnice vepsané trojúhelníkům T, T' (obr. 21). Průsečíky stran AB, AC s obrazem $C'B'$ strany CB v uvažované středové souměrnosti označíme K, L , podobně dostaneme body M, N a P, Q . Z podobnosti trojúhelníků AKL, ABC dostaneme obdobně jako v úloze



Obr. 21

B-I-1 vztah $|KL| = |BC| \left(1 - \frac{2q}{v}\right) = |BC| \left(1 - \frac{a}{s}\right) =$
 $= \frac{a(b+c-a)}{a+b+c}$, podobně pro $|MN|$, $|PQ|$. Pro obvod p
šestiúhelníku $KLMNPQ$ je $p = 2|KL| + 2|MN| + 2|PQ|$,
protože $|KL| = |PN|$, $|MN| = |KQ|$, $|QP| = |LM|$, tedy

$$p = 2 \cdot \frac{a(b+c-a) + b(a+c-b) + c(a+b-c)}{a+b+c} =$$

$$= 2 \cdot \frac{2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2}{a+b+c}.$$

Máme tudíž dokázat nerovnost

$$2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2 \leq ab + bc + ca,$$

která je ekvivalentní nerovnosti

$$0 \leq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2,$$

jež zřejmě platí. Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když
je $a = b = c$, tedy když je trojúhelník T rovnostranný.

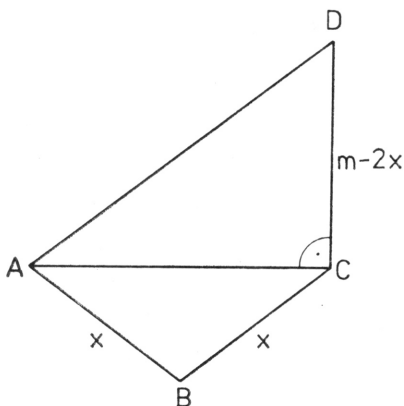
Kategorie A

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

A - I - 1

V rovině jsou dány dva různé body A, C . Pro reálné číslo $m > \frac{2|AC|}{\sqrt{3}}$ sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s maximálním obsahem, pro který platí $|AB| + |BC| + |CD| = m$.

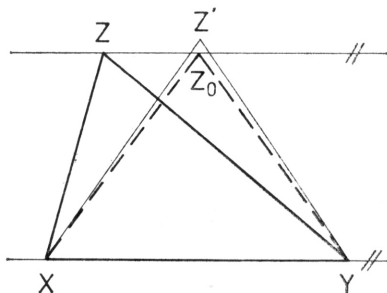
Řešení. Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný čtyřúhelník s největším obsahem. Pak je trojúhelník ACD pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C a trojúhelník ABC je rovnoarmenný se základnou AC (obr. 22). Jinak bychom mohli



Obr. 22

obsah trojúhelníku ACD , resp. obsah trojúhelníku ABC zvětšit, aniž bychom změnili délku strany CD , resp. součet $|AB| + |BC| = m - |CD|$.

První tvrzení je zřejmé; druhé dostaneme např. pomocí takovéto úvahy: Víme, že pro dané dva body X, Y mají všechny trojúhelníky XYZ , jejichž vrchol Z leží na rovnoběžce s přímkou XY , stejný obsah. Ze všech takových trojúhelníků má rovnoramenný trojúhelník XYZ_0 ($|XZ_0| = |YZ_0|$) nejmenší obvod (obr. 23). Sestrojíme-li tedy k danému nerovnoramennému trojúhelníku XYZ rovnoramenný trojúhelník XYZ_0 se stejným obsahem a k němu trojúhelník XYZ' , jehož obvod je stejný jako obvod daného trojúhelníku XYZ (obr. 23), je obsah trojúhelníku XYZ' větší než obsah trojúhelníku XYZ .



Obr. 23

Najdeme nyní mezi čtyřúhelníky $ABCD$, pro něž platí $|AB| + |BC| + |CD| = m$, $|AB| = |BC| = x$ a $AC \perp CD$, takový, jehož obsah $P(x)$ je největší.

Označme $|AC| = 2u$, pak je

$$\begin{aligned} P(x) &= u(m - 2x) + u\sqrt{x^2 - u^2} = \\ &= um + u(\sqrt{x^2 - u^2} - 2x). \end{aligned}$$

Protože

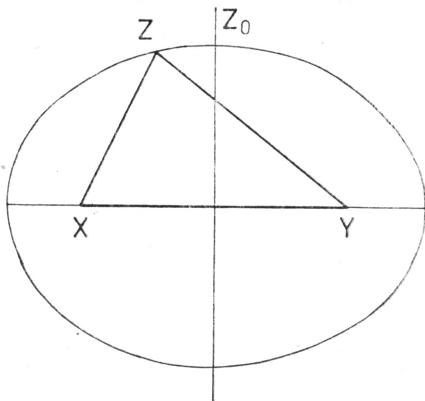
$$P'(x) = u\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - u^2}} - 2\right),$$

vidíme, že pro $x > 2\sqrt{x^2 - u^2}$, tj. pro $x < \frac{2}{\sqrt{3}} u = \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$

funkce P roste a pro $x > \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$ klesá. Čtyřúhelník $ABCD$ bude mít tedy největší obsah, právě když $|AB| = |BC| = \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$, $|CD| = m - \frac{2}{\sqrt{3}}|AC|$. Odtud již snadno plyne konstrukce.

Poznámky. Tvrzení, že rovnoramenný trojúhelník má ze všech trojúhelníků XYZ s danou stranou XY a stejným obvodem největší obsah, plyne také ze základní vlastnosti elipsy: Body, které mají od bodů X, Y daný součet vzdáleností, leží na elipse s ohnisky X a Y (obr. 24). Přitom největší vzdálenost od hlavní osy elipsy má právě její vedlejší vrchol Z_0 .

Uvedené tvrzení lze dokázat i algebraicky, použijeme-li Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku. Má-li trojúhelník XYZ délky stran x, y, z , kde z je pevné a $x + y = k$, platí pro jeho obsah P



Obr. 24

$$\begin{aligned}
 16P^2 &= (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z) = \\
 &= ((x + y)^2 - z^2)(z^2 - (x - y)^2) = \\
 &= (k^2 - z^2)(z^2 - (x - y)^2) \leq \\
 &\leq (k^2 - z^2)z^2
 \end{aligned}$$

s rovností, právě když $x = y$.

Maximum funkce P můžeme najít i bez derivování. Protože pro každé x je $\sqrt{x^2 - u^2} - 2x < 0$, hledáme nejmenší kladné číslo A takové, aby pro každé $x \in \left(u, \frac{m}{2}\right)$ platilo

$$\frac{P(x) - um}{u} = \sqrt{x^2 - u^2} - 2x \leq -A$$

a přitom pro nějaké $x \in \left(u, \frac{m}{2}\right)$ nastala rovnost. Uvedená

nerovnost je ekvivalentní kvadratické nerovnosti

$$3x^2 - 4Ax + A^2 + u^2 \geq 0,$$

která má diskriminant $D = 16A^2 - 12(A^2 + u^2) = 4(A^2 - 3u^2)$. Vidíme, že uvedené požadavky splňuje číslo $A = \sqrt[3]{3}u$ a rovnost nastane právě pro $x = \frac{2A}{3} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}u = \frac{|AC|}{\sqrt[3]{3}}$.

Podmínka $m > 2 \frac{|AC|}{\sqrt[3]{3}}$ je nutná: funkce P je v intervalu

$\left(0, \frac{|AC|}{\sqrt[3]{3}}\right)$ rostoucí, takže pro $\frac{m}{2} < \frac{|AC|}{\sqrt[3]{3}}$ nemá v intervalu

$\left(0, \frac{m}{2}\right)$ maximum.

A - 1 - 2

Je dáno přirozené číslo n . Určete počet všech množin $M \subset \{1, 2, \dots, n\} \times \{-1, 1\}$, pro něž existuje taková n -tice reálných čísel $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, že

$$[i, j] \in M \Leftrightarrow ja_i > 0$$

platí pro všechny dvojice $[i, j] \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{-1, 1\}$.

Řešení. Označme $\boxed{M}$ množinu všech množin M vyhovujících podmínce úlohy. Je-li $M \in \boxed{M}$ a $[a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$ odpovídající n -tice, pak pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ nastane právě jedna ze tří možností:

$$a_i > 0 \Leftrightarrow [i, 1] \in M \text{ a } [i, -1] \notin M$$

$$a_i < 0 \Leftrightarrow [i, 1] \notin M \text{ a } [i, -1] \in M$$

$$a_i = 0 \Leftrightarrow [i, 1] \notin M \text{ a } [i, -1] \notin M$$

Přiřadme každé množině $M \in \boxed{M}$ n -tici

$z(M) = [\text{sign } a_1, \text{sign } a_2, \dots, \text{sign } a_n] \in \{-1, 0, 1\}^n$,
kde

$$\text{sign } a = \begin{cases} -1 & \text{pro } a < 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ 1 & \text{pro } a > 0. \end{cases}$$

Zobrazení z je zřejmě prosté a obrazem množiny $\boxed{M}$ je množina všech uspořádaných n -tic z množiny $\{-1, 0, 1\}$:
Je-li $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \{-1, 0, 1\}^n$, je

$$M = \{[i, x_i]: i \in \{1, 2, \dots, n\}, x_i \neq 0\} \in \boxed{M}.$$

Zobrazení $z: \boxed{M} \rightarrow \{-1, 0, 1\}^n$ je tedy vzájemně jednoznačné. A protože množina $\{-1, 0, 1\}^n$ má 3^n prvků, je počet všech množin M , jež splňují podmínku úlohy, 3^n .

A - I - 3

Je dáno číslo $\alpha \in (0, \pi)$. Najděte reálné číslo r s touto vlastností: Je-li A množina bodů libovolného rovinného úhlu

velikosti α s vrcholem v počátku kartézské soustavy souřadnic, pak pro každý bod $X \in A$ existuje bod $M \in A$ s celočíselnými souřadnicemi, který má od bodu X vzdálenost nejvýše r .

Řešení. Každý bod roviny má od nejbližšího mřížového bodu vzdálenost nejvýše $\frac{\sqrt{2}}{2}$, protože množina všech kruhů se středy v mřížových bodech a poloměrem $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pokrývá rovinu. Je-li $X \in A$, nemusí ovšem tento mřížový bod ležet v úhlu A .

Označme K ten kruh o poloměru $\frac{\sqrt{2}}{2}$, který leží celý v množině A a je nejbližší počátku soustavy souřadnic. Pro vzdálenost v jeho středu S od počátku platí

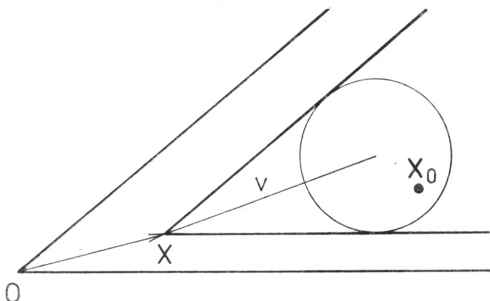
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2v},$$

takže

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \alpha}}.$$

Je-li nyní X libovolný bod množiny A , označme A_X množinu bodů, která vznikne z úhlu A posunutím o vektor OX

(obr. 25). V kruhu K_X o poloměru $\frac{\sqrt{2}}{2}$ vepsaném úhlu A_X leží aspoň jeden mřížový bod X_0 , pro který platí



Obr. 25

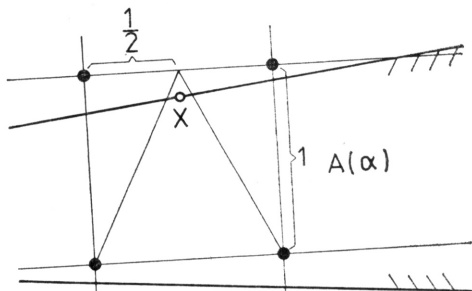
$$|XX_0| \leq v + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stačí tedy položit $r = v + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \alpha}} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Úlohu najít nejmenší takové r v závislosti na daném čísle α vyřešil student 4. ročníku gymnázia v Kroměříži Radek Adamec. Jeho řešení se všemi důkazy zabíralo ovšem 23 strany čistopisu. Uvádíme ho proto v zestručněné a poněkud upravené formě.

Jiné řešení (podle R. Adamce). Pro dané $\alpha \in (0, \pi)$ najdeme nejmenší číslo r takové, že libovolný rovinný úhel A velikosti α s vrcholem v počátku O je pokryt kruhy o poloměru r se středy v mřížových bodech ležících v A . Zřejmě se můžeme omezit jen na úhly, jejichž osa leží v 1. oktantu (tj. v té části roviny, kde platí $x \geq y \geq 0$).

Zřejmě pro žádné α nemůže být $r < \frac{\sqrt{5}}{2}$, protože vždycky najdeme úhel $A(\alpha)$ s vrcholem v počátku tak, aby existoval bod $X \in A(\alpha)$, jehož vzdálenost od nejbližšího mřížového bodu v $A(\alpha)$ je libovolně blízká $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (obr. 26). Zároveň si uvědomme, že v každém úhlu A pro dostatečně velké x_0 najdeme mřížové body na všech pořadnicích $x = a$, kde $a \geq x_0$ je celé

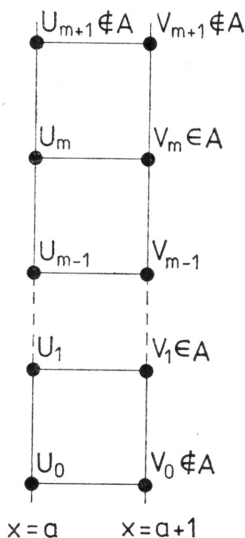


Obr. 26

(stačí vzít x_0 takové, aby délka úsečky $\{(x, y) \in A: x = x_0\}$ byla aspoň 1). Pro tuto část úhlu A pak platí, že ji lze pokrýt

kruhy o poloměru $\frac{\sqrt{5}}{2}$ se středy v mřížových bodech ležících

v A . Skutečně, vezměme tu část úhlu A , která je omezena dvěma takovými sousedními celočíselnými pořadnicemi (obr. 27), přičemž $V_1, V_2, \dots, V_m$ ($m \geq 1$) jsou všechny mřížové body pořadnice $x = a + 1$ ležící v A . Čtverce $U_i V_i V_{i+1} U_{i+1}$ pro $i \in \{1, \dots, m-1\}$ pokryjeme kruhy se středy $V_1, \dots, V_m$. Vzhledem k předpokladu, že osa



Obr. 27

úhlu A leží v 1. oktantu, vidíme, že tu část čtverce $U_m V_m V_{m+1} U_{m+1}$, která leží v A , pokryjeme buď z bodů U_m, V_m (pokud $U_m \in A$), nebo z bodu V_m (když $U_m \notin A$). Tu část čtverce $U_0 V_0 V_1 U_1$, která může ležet v A , vyšetříme podobně: Pokud příslušné rameno úhlu A svírá s osou x záporný (orientovaný) úhel, je situace stejná jako v předchozím případě; v případě kladného úhlu pokryjeme čtverec $U_0 V_0 V_1 U_1$ z bodů U_0, V_1 (pokud $U_0 \in A$), anebo z bodů U_1, V_1 (když $U_0 \notin A$ — protože osa úhlu A leží v 1. oktantu, musí být $U_1 \in A$).

Z právě dokázaného tvrzení plyne, že pro úhly $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$

je hledané číslo $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Budeme teď hledat poloměr r pro

taková čísla $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, jejichž kotangens je přirozené číslo, $\cotg \alpha = n > 1$. Svírá-li jedno z ramen takového úhlu A s osou x dostatečně malý kladný úhel, je $(n, 1)$ mřížový bod, který je v A nejbližze počátku. Je to jediný mřížový bod ($\neq O$), který leží v A ve vzdálenosti nejvýše $\sqrt{n^2 + 1}$ od počátku. Ukážeme, že takovýto případ je jaksí nejméně příznivý, tj. že *v libovolném úhlu $A(\alpha)$ s vrcholem v počátku, kde $\alpha = \arccotg n$, leží aspoň jeden mřížový bod ($\neq O$) ve vzdálenosti nejvýše $s = \sqrt{n^2 + 1}$ od počátku.* K tomu nám stačí dokázat, že mezi všemi polopřímkami v 1. oktantu s počátkem O a procházejícími nějakým dalším mřížovým bodem v kruhu $K = (O, s)$ nejsou dvě sousední, jež by svíraly úhel větší než α .

Pro malá n skutečně snadno najdeme systém polopřímek takový, že libovolné dvě sousední polopřímky svírají úhel nejvýše α . Uvažujme např. polopřímky se směrnici

$$0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1, \quad (1)$$

kde $(k, k-1) \in K$, $(k+1, k) \notin K$. Pro tangenty úhlů sousedních polopřímek pak platí

$$a_i = \frac{\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}}{1 + \frac{1}{i(i+1)}} = \frac{1}{i(i+1) + 1},$$

$$b_i = \frac{\frac{i}{i+1} - \frac{i-1}{i}}{1 + \frac{i-1}{i+1}} = \frac{1}{2i^2}$$

a je

$$a_i \leq \frac{1}{7} \text{ pro } 2 \leq i \leq n-1, \quad b_i \leq \frac{1}{8} \text{ pro } 2 \leq i \leq k-1.$$

Dále stačí uvažovat k takové, že současně platí

$$\frac{1 - \frac{k-1}{k}}{1 + \frac{k-1}{k}} = \frac{1}{2k-1} \leq \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{n}$$

a přitom $(k, k-1) \in K$, tj.

$$(k-1)^2 + k^2 \leq n^2 + 1 = s^2.$$

Obě nerovnosti jsou ekvivalentní nerovnostem

$$n^2 \leq (2k-1)^2 \leq 2n^2 + 1,$$

stačí proto vzít $k = \frac{n+1}{2}$ pro liché n a $k = \frac{n}{2} + 1$ pro sudé $n \geq 2$.

Směrnice (1) dávají tedy hledaný systém polopřímek pro $n \leq 7$. Přidáme-li k nim ještě směrnice $\frac{2}{5}$ a $\frac{3}{5} \left(\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \right.$

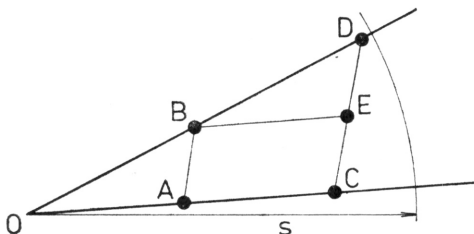
$\left(< \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} \right)$, zjistíme, že takovýto systém polopřímek vyhovuje pro $6 \leq n \leq 12$ (to se nám bude ještě hodit).

Obecný důkaz uvedeného tvrzení, který teď následuje, je klíčem k řešení celé úlohy. Připomeňme zde ještě jedno tvrzení (známé jako Pickův vzorec), které budeme v důkazu potřebovat:

Obsahuje-li mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech h mřížových bodů na hranici a u mřížových bodů uvnitř, je jeho obsah

$$S = \frac{h}{2} + u - 1.$$

Uvažujme tedy dvě polopřímky OA , OB v 1. oktantu, které procházejí mřížovými body A , B v kruhu K , přičemž uvnitř úhlu AOB žádný mřížový bod z kruhu K neleží. Předpokládejme rovnou, že uvnitř úseček OA , OB již žádné mřížové body neleží. Kdyby navíc v kruhu K ležely i oba mřížové body C , D , které dostaneme z bodů A , B stejnolehlostí se středem O a koeficientem 2 (obr. 28), ležel by v kruhu K



Obr. 28

a uvnitř úhlu AOB také střed E úsečky CD , který je rovněž mřížovým bodem. Můžeme tedy předpokládat, že např. polopřímka OA obsahuje v kruhu K kromě počátku právě jeden mřížový bod A a polopřímka OB právě m mřížových bodů (obr. 29), takže pro délky $d = |OB|$ a $|OA|$ platí

$$md \leq s < (m+1)d, \quad 2|OA| > s. \quad (2)$$

Nyní máme dokázat, že je $\varphi = |\sphericalangle AOB| \leq \alpha$, neboli

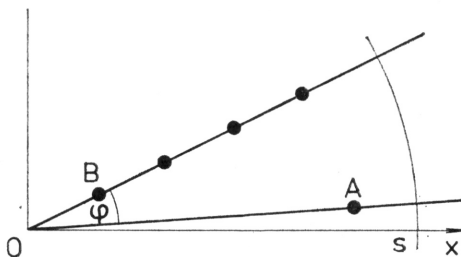
$$\sin \varphi \leq \sin \alpha = \frac{1}{s}.$$

Pro obsah trojúhelníku AOB z Pickova vzorce plyne

$$S(AOB) = \frac{1}{2}d|OA| \sin \varphi = \frac{1}{2},$$

takže

$$\sin \varphi = \frac{1}{d|OA|}.$$



Obr. 29

Použijeme-li odhadů (2), dostaneme nerovnost

$$\sin \varphi < \frac{2(m+1)}{s^2},$$

takže stačí dokázat, že $2(m+1) \leq s$, neboli

$$m \leq \frac{s}{2} - 1. \quad (3)$$

Z první nerovnosti v (2) máme pro m odhad $m \leq \frac{s}{d}$, přičemž d jako vzdálenost dvou mřížových bodů může nabývat jen diskrétních hodnot $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \dots$. Hodnoty $d = 1, d = \sqrt{2}$, které odpovídají ose x a ose 1. kvadrantu, nás už nemusejí zajímat, protože pro ně jsme našli směrnice $\frac{1}{n}$ a $\frac{k-1}{k}$ polopřímek, které s nimi svírají úhel nejvýše α .

Můžeme tedy dále předpokládat, že $d \geq \sqrt{5}$, takže $m \leq \frac{s}{\sqrt{5}}$, a pro platnost (3) nám stačí ověřit, zda je

$$\left[\frac{s}{\sqrt{5}} \right] \leq \frac{s}{2} - 1. \quad (4)$$

Nerovnost

$$\frac{s}{\sqrt{5}} \leq \frac{s}{2} - 1$$

platí, právě když $n^2 + 1 \geq 20(9 + 4\sqrt{5})$, tj. pro $n \geq 19$. Nicméně nerovnost (4) platí i pro menší hodnoty n , jak zjistíme výpočtem.

$$n \quad \left| \quad \left[\frac{s}{\sqrt{5}} \right] = \left[\left\lfloor \sqrt{\frac{n^2 + 1}{5}} \right\rfloor \right] \leq \frac{n}{2} - 1 < \frac{s}{2} - 1$$

18	$[\sqrt{65}] = 8$	8
17	$[\sqrt{58}] = 7$	7,5
16	$[\sqrt{51,4}] = 7$	7
15	$[\sqrt{45,2}] = 6$	6,5
14	$[\sqrt{39,4}] = 6$	6
13	$[\sqrt{34}] = 5$	5,5

Vzhledem k tomu, že pro $n \leq 12$ jsme tvrzení již dokázali, ukončili jsme tabulku hodnot. Snadno zjistíte, že nerovnost (4) je splněna i pro hodnoty $n \in \{4, 6, 8, 10, 11, 12\}$. Nikoli však pro $n = 9$. Systém polopřímek nalezený pro $6 \leq n \leq 12$ je tedy důležitý zejména pro $n = 9$. Z dokázaného tvrzení navíc plyne, že v každém úhlu A velikosti α existuje mřížový

bod ležící zároveň v mezikruží $K' = \{X \in \mathbb{R}^2 : \frac{s}{2} < |OX| \leq s\}$

(protože stejnolehlost se středem v počátku a celočíselným koeficientem zachovává mřížové body). Vidíme tedy, že prakticky celou část úhlu A , která leží v kruhu K , můžeme pokrýt dvěma kruhy se středy v počátku a v nalezeném mřížovém bodě ležícím v K' , přičemž pro jejich poloměr R platí (obr. 30):

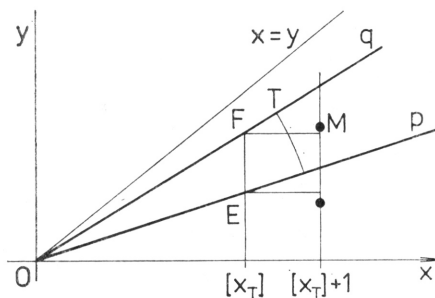
Pro každé n je však $n^2 \equiv 0$ nebo $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$ a $\frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{2}$, takže mezi čísly $\left(\frac{s}{2}\right)^2$ a R^2 žádné celé číslo ležet nemůže.

Spojením obou dosavadních výsledků teď už snadno dostaneme, že *každý úhel A s vrcholem v počátku a velikosti α , kde $\cotg \alpha = n \geq 2$, můžeme pokrýt kruhy o poloměru $R = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right)$ se středy v mřížových bodech ležících v A.*

Při důkazu se omezíme jen na úhly A, které leží celé v 1. oktantu, protože úhel A, který obsahuje přímkou $x = y$ nebo osu x , umíme podle prvního tvrzení pokrýt kruhy o poloměru $\frac{\sqrt{5}}{2} < R$.

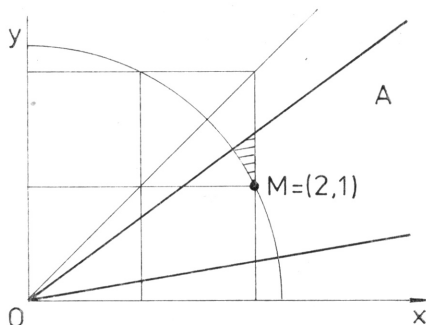
Nechť T je ten z bodů úhlu A, který leží na kružnici (O, s) a má od osy x největší vzdálenost. Jeho vzdálenost od druhého ramene úhlu A je aspoň 1. Leží-li T na celočíselné pořadnici, není již co dokazovat (jak $A \cap K$, tak i $A \cap \{(x, y): x \geq x_T\}$ pokryjeme kruhy o poloměru $R > \frac{\sqrt{5}}{2}$). Není-li x_T celé číslo, označme E, F průsečíky pořadnice $x = [x_T]$ s rameny p, q úhlu A (obr. 31). Pokud $|EF| \geq 1$, jsme hotovi, protože úsečka EF obsahuje mřížový bod. Pokud EF neobsahuje žádný mřížový bod, leží v úhlu A mřížový bod M se souřadnicí $x_M = [x_T] + 1$, přičemž

$$y_M - 1 < y_E < y_F < y_M.$$



Obr. 31

Část úhlu $\{(x, y) \in A: [x_T] \leq x \leq [x_T] + 1\}$ můžeme tedy pokrýt kruhem se středem M a poloměrem $\sqrt{2}$. Poslední úvaha nevyhovuje pro $n = 2$, protože v tomto případě je $R = \frac{5}{4} < \sqrt{2}$. Mřížový bod $M = (2, 1)$ je však obsažen v libovolném úhlu A velikosti $\alpha = \operatorname{arccotg} 2$ ležícím v 1. oktantu (obr. 32). V tomto případě tu část úhlu A , která zůstala zatím



Obr. 32

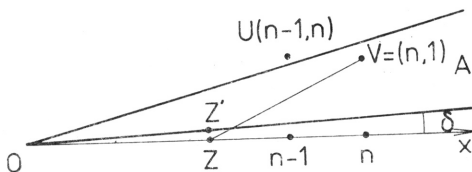
nepokryta, pokryjeme kruhem se středem M a poloměrem

$$1 < R = \frac{5}{4}.$$

Naše úloha bude vyřešena, jakmile ukážeme, že nalezené R je pro dané α ($\cotg \alpha = n$) skutečně nejmenší. To však plyne z obr. 33, kde úhel A vznikne otočením úhlu, jehož ramena tvoří osa x a polopřímka OV , o dostatečně malý úhel δ . Je-li

$$Z \text{ bod na ose } x \text{ takový, že } |OZ| = |ZV| = R = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{n} \right),$$

vidíme, že pro dané $\alpha = \operatorname{arccotg} n$ umíme sestrojit takový úhel A a v něm bod Z' , jehož vzdálenost od nejbližšího mřížového bodu V bude libovolně blízká číslu R .



Obr. 33

Je-li konečně $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$ takové, že $n - 1 < \cotg \alpha \leq n$, tj.

$\operatorname{arccotg} n \leq \alpha < \operatorname{arccotg} (n - 1)$, vidíme, že každý úhel A velikosti α s vrcholem v počátku můžeme pokrýt kruhy o polo-

měru $R = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{n} \right)$ a se středy v mřížových bodech ležících v A . Je-li totiž $X \in A$, sestrojíme libovolný úhel $A' \subset A$

velikosti $\operatorname{arccotg} n$ s vrcholem v počátku takový, že $X \in A'$. V něm (a tedy i v A) existuje mřížový bod, jehož vzdálenost

od X je nejvýše R .

Z obr. 33 je zároveň patrné, že pro takové α je uvedené $r = R$ nejmenší: Je-li A úhel velikosti α s ramenem x a $V \in A$, pak není $U \in A$; stačí tedy volit úhel δ tak malý, aby bod V byl mřížovým bodem s nejmenší vzdáleností od počátku.

Závěr. Pro každý bod X rovinného úhlu A velikosti α s vrcholem v počátku existuje mřížový bod $M \in A$ takový, že $|MX| \leq r(\alpha)$, kde

$$r(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ pro } \alpha \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \pi \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \left([\cotg \alpha] + \frac{1}{[\cotg \alpha]} \right) \text{ pro } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right);$$

přitom pro každé $r < r(\alpha)$ existuje úhel A velikosti α s vrcholem v počátku a bod $X \in A$ tak, že pro každý mřížový bod $M \in A$ je $|MX| > r$.

Poznámka. Zřejmě je $r(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i pro $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, $r(2\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Funkce $[x]$ je tzv. horní celá část čísla x , tj. nejmenší celé číslo větší nebo rovné x .

A - I - 4

Najděte nejmenší přirozené n takové, že existují dva neshodné pythagorejské trojúhelníky s přeponou délky n . (Trojúhelník se nazývá pythagorejský, je-li pravoúhlý a délky jeho stran jsou vyjádřeny celými čísly.)

Řešení. Najdeme nejdříve všechny trojice přirozených čísel x, y, z takové, že

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (1)$$

To je klasická úloha, jejíž podrobné řešení najdete např. v ročence XXVI. MO, úloha A-P-1.

Všechna řešení rovnice (1) mají tvar

$$x = k(a^2 - b^2), y = 2kab, z = k(a^2 + b^2), \quad (2)$$

kde a, b jsou nesoudělná přirozená čísla taková, že $a > b$, $2|ab$, a k je libovolné přirozené číslo. Každé číslo z , pro něž má rovnice (1) dvě různá řešení (řešení lišící se pořadím x a y nepovažujeme za různá), se dá vyjádřit dvěma způsoby ve tvaru (2),

$$z = k(a^2 + b^2) = l(c^2 + d^2),$$

a je tedy společným násobkem čísel $a^2 + b^2, c^2 + d^2$, kde čísla a, b i c, d jsou nesoudělná a součiny ab, cd sudé. Nejmenší přirozené číslo n splňující podmínky úlohy tak najdeme mezi nejmenšími společnými násobky čísel $1^2 + 2^2 = 5, 2^2 + 3^2 = 13, 1^2 + 4^2 = 17, 3^2 + 4^2 = 25, 2^2 + 5^2 = 29, \dots$ Vidíme, že $n = 25$ a příslušné pythagorejské trojúhelníky mají délky stran 15, 20, 25 a 7, 24, 25.

A - I - 5

Je dán mnohočlen

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

který nabývá jen nezáporných hodnot. Označme

$$Q(x) = a_0x^n + 2a_1x^{n-1} + \dots + na_{n-1}x + (n+1)a_n.$$

Je-li $P(1) = 0$, pak je také $Q(1) = 0$. Dokažte.

Řešení. Je-li $P(1) = 0$, má nezáporný mnohočlen P v bodě 1 lokální minimum, takže $P'(1) = 0$, tj.

$$na_0 + (n-1)a_1 + \dots + a_{n-1} = 0.$$

Je tedy

$$\begin{aligned} Q(1) &= a_0 + 2a_1 + \dots + na_{n-1} + (n+1)a_n = \\ &= (n+1)(a_0 + a_1 + \dots + a_n) - \\ &\quad - (na_0 + (n-1)a_1 + \dots + a_{n-1}) = \\ &= (n+1)P(1) - P'(1) = 0. \end{aligned}$$

Poznámka. Řešení s použitím derivace je elegantní a krátké. Můžeme ale uvažovat i takto: Je-li $P(1) = 0$, tj.

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0,$$

je

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - P(1) = \\ &= a_0(x^n - 1) + a_1(x^{n-1} - 1) + \dots + a_{n-1}(x - 1) = \\ &= (x-1)(a_0(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) + \\ &\quad + a_1(x^{n-2} + \dots + 1) + \dots + a_{n-1}) = \\ &= (x-1)R(x). \end{aligned}$$

Protože $P(x) \geq 0$ pro všechna x , je $R(x) \geq 0$ pro $x > 1$ a $R(x) \leq 0$ pro $x < 1$. Je tudíž $R(1) = 0$, tj.

$$na_0 + (n-1)a_1 + \dots + a_{n-1} = 0.$$

A - I - 6

Pro vnitřní úhly trojúhelníku ABC platí

$$\sin \frac{\gamma}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}.$$

Určete vztah mezi stranami a, b, c takového trojúhelníku.

Řešení. Ze vztahu $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ a z kosinové věty dostáváme rovnost

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

a podobně (cyklickou záměnou)

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{(s-a)(s-c)}{ac}, \quad \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{ab},$$

kde $s = \frac{a+b+c}{2}$. Z dané rovnosti pak tedy plyne

$$c^2 = 4(s-c)^2$$

neboli

$$2c = a + b.$$

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

A - S - 1

Pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ existuje n navzájem neshodných pythagorejských trojúhelníků se stejným obvodem. Dokažte.

Řešení. Využijeme toho, že existuje nekonečně mnoho navzájem nepodobných pythagorejských trojúhelníků (všechny primitivní pythagorejské trojúhelníky jsou navzájem nepodobné). Pro dané číslo n označme $s_k = a_k + b_k + c_k$ ($1 \leq k \leq n$) obvody n takových trojúhelníků. Je-li $s = s_1 s_2 \dots s_n$, jsou trojúhelníky se stranami

$$a'_k = a_k \frac{s}{s_k}, \quad b'_k = b_k \frac{s}{s_k}, \quad c'_k = c_k \frac{s}{s_k}$$

rovněž navzájem nepodobné (tedy neshodné) pythagorejské trojúhelníky, jejichž obvod je s .

Jiné řešení. Jsou-li u, v, k přirozená čísla, jsou čísla

$$a = k(u^2 - v^2), \quad b = 2kuv, \quad c = k(u^2 + v^2)$$

strany pythagorejského trojúhelníku, jehož poloviční obvod je $s = ku(u + v)$. Abychom našli dostatečné množství pythagorejských trojúhelníků se stejným obvodem, stačí zvolit za s číslo, které má dostatečně velký počet dělitelů.

Pro dané n položíme např. $s = (n + 3)!$ a $v = 1$, takže je

$$k = \frac{(n + 3)!}{u(u + 1)}.$$

Pro $u \in \{2, 3, \dots, n+2\}$ dostaneme pythagorejské trojúhelníky s odvěsnami

$$\frac{u-1}{u}(n+3)! \text{ a } \frac{2(n+3)!}{u+1}.$$

Dva takovéto trojúhelníky mohou být shodné, jen když pro nějaká $i, j \in \{2, 3, \dots, n+2\}$ platí

$$2i = (i-1)(j+1)$$

neboli

$$ij = i + j + 1.$$

Pro $2 \leq i < j$ dostaneme rovnost jen pro $i=2, j=3$. Našli jsme tedy n neshodných pythagorejských trojúhelníků s obvodem $2(n+3)!$.

A - S - 2

Najděte všechna reálná čísla p , pro něž jsou všechny kořeny x_1, x_2, x_3 rovnice $x^3 - 12x^2 + px - 64 = 0$ reálné a nezáporné.

Řešení. Pro kořeny x_1, x_2, x_3 dané kubické rovnice platí (Viètovy vztahy)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p,$$

$$x_1x_2x_3 = 64,$$

jak plyne z rovnosti koeficientů v rozkladu na kořenové činitele. Protože

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = 4,$$

nastává ve známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem tří nezáporných čísel x_1, x_2, x_3 rovnost. Je tedy $x_1 = x_2 = x_3 = 4$ a $p = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 48$.

A - S - 3a

Zjistěte, zda existují čtyři celá čísla x_1, x_2, x_3, x_4 , pro něž je číslo

$$|(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)|$$

mocninou čísla 2 s celým nezáporným mocnitelem.

Řešení. Taková čísla neexistují. Kdyby existovala, byl by každý z činitelů $|x_i - x_j|$ ($i \neq j$) nezápornou mocninou čísla 2, takže bychom pro vhodná celá nezáporná čísla a, b, c dostali rovnosti

$$x_1 - x_2 = 2^a,$$

$$x_2 - x_3 = 2^b, \tag{1}$$

$$x_3 - x_4 = 2^c,$$

čili

$$x_1 - x_3 = 2^a + 2^b, \quad x_2 - x_4 = 2^b + 2^c.$$

Čísla $2^a + 2^b$, $2^b + 2^c$ jsou ovšem celou mocninou čísla 2 jen pro $a = b = c$. Pak ale sečtením vztahů (1) dostaneme

$$x_1 - x_4 = 3 \cdot 2^a,$$

což není celočíselná mocnina čísla 2 pro žádné a .

Jiné řešení (podle V. Veselého, 3. roč., G J. Hronca, Bratislava). Mezi libovolnými čtyřmi celými čísly x_1, x_2, x_3, x_4 existují dvě, která dávají při dělení třemi stejný zbytek. Jejich rozdíl, a tedy i uvedený součin je dělitelný třemi, proto nemůže být nezápornou mocninou čísla 2. Žádná taková celá čísla tedy neexistují.

A - S - 3b

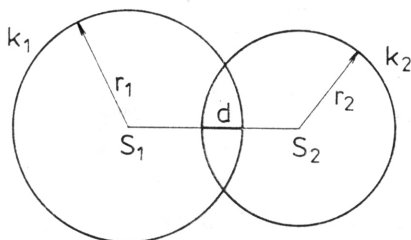
V rovině s kartézskou soustavou souřadnic jsou dány kruhy $k_1 = (S_1, r_1)$, $k_2 = (S_2, r_2)$, pro jejichž vzdálenost středů s platí

$$\max(r_1, r_2) \leq s \leq r_1 + r_2 - 2.$$

Dokažte, že průnik těchto kruhů obsahuje aspoň dva body s celočíselnými souřadnicemi.

Řešení. Protože $s < r_1 + r_2$, je průnik obou kruhů neprázdný, a protože $\max(r_1, r_2) \leq s$, není jeden z kruhů částí druhého. Označme d délku té části úsečky S_1S_2 , která leží v průniku $k_1 \cap k_2$ (obr. 34). Protože $r_1 + r_2 = s + d$, je podle předpokladu

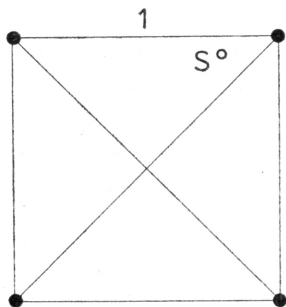
$$d = r_1 + r_2 - s \geq 2,$$



Obr. 34

takže do průniku $k_1 \cap k_2$ lze umístit kruh o poloměru 1. Každý takový kruh však obsahuje aspoň dva mřížové body, neboť množina všech jednotkových kruhů se středy v mřížových bodech pokrývá každý bod roviny aspoň dvakrát.

finý argument: Střed S libovolného jednotkového kruhu leží v jednom ze čtyř pravoúhlých trojúhelníků, na které úhlopříčky rozdělí příslušný jednotkový čtverec s vrcholy v mřížových bodech (obr. 35). Vzdálenost bodu S od obou vrcholů příslušného trojúhelníku je nejvýše 1.



Obr. 35

ÚLOHY II. KOLA

A - II - 1

Najděte všechny pythagorejské trojúhelníky s přeponou menší než 1 986 a s jednou odvěsnou o 675 menší než přepona.

Řešení. Máme řešit v přirozených číslech soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= z^2 \\ z &= y + d,\end{aligned}$$

kde $d = 675$, $z < 1\,986$. Dosazením za z z druhé rovnice dostáváme

$$y = \frac{x^2 - d^2}{2d},$$

takže musíme najít všechna $x > d$ celá, pro něž je y celé a zároveň

$$z = \frac{x^2 + d^2}{2d} < 1\,986.$$

Sečtením posledních dvou rovností dostaneme

$$y + z = \frac{x^2}{d},$$

pro o musí d dělit x^2 . Protože $z = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{d} + d \right)$ a d je liché, musí být $\frac{x^2}{d}$ liché. Číslo $d = 675 = 3^3 \cdot 5^2$ dělí x^2 , právě když $3^2 \cdot 5 = 45$ dělí x , takže musí být $x = 45k$, kde k je liché. Z podmíněk úlohy plyne jednak

$$675 < 45k, \text{ tj. } k > 15,$$

jednak

$$\frac{45^2 k^2 + d^2}{2d} = \frac{1}{2} (3k^2 + 675) < 1\,986,$$

neboli

$$k \leq [\sqrt{1\,099}] = 33.$$

Pro $k \in \{17, 19, \dots, 33\}$ dostáváme tedy devět řešení tvaru

$$x = 45k, \quad y = \frac{1}{2} (3k^2 - 675), \quad z = \frac{1}{2} (3k^2 + 675).$$

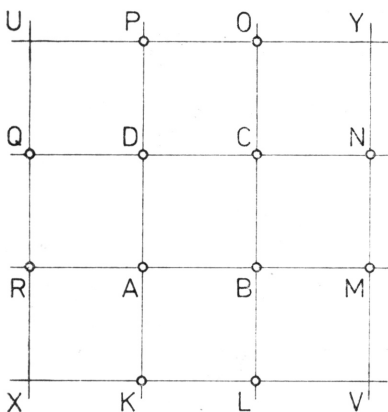
A - II - 2

V rovině s kartézskou soustavou souřadnic umístíme dva útvary A a B. Útvar A je kruh o poloměru $\sqrt{5}$, útvar B je sjednocením čtyř kruhů průměru 1 se středy ve vrcholech

čtverce o délce strany $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dokažte, že při každém umístění útvarů A, B existuje aspoň 10 bodů s celočíselnými souřadnicemi, které leží v A a neleží uvnitř B.

Řešení. Uvažujme množinu všech kruhů se středy v mřížových bodech a poloměrem $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Každý bod roviny leží aspoň ve 14 takových kruzích: Leží-li totiž bod ve čtverci s vrcholy v mřížových bodech A, B, C, D (obr. 36), pokrývají ho kruhy se středy v mřížových bodech K, L, M, N, O, P, Q, R a čtyři kruhy se středy ve vrcholech čtverce ABCD, dále aspoň jeden z kruhů se středy U, V a aspoň jeden z kruhů se středy X, Y.

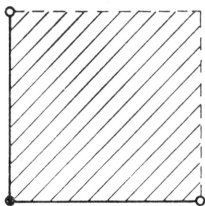
Útvar B je sjednocením čtyř kruhů o průměru 1. Kdyby uvnitř B ležely více než čtyři mřížové body, ležely by aspoň



Obr. 36

v jednom z těchto kruhů dva mřížové body. Ty by musely být krajními body průměru uvažovaného kruhu, neboť jejich vzdálenost je aspoň 1. Pak však nemohou být oba vnitřními body útvaru B. Do kruhu A tedy patří alespoň $14 - 4 = 10$ mřížových bodů, které neleží uvnitř B.

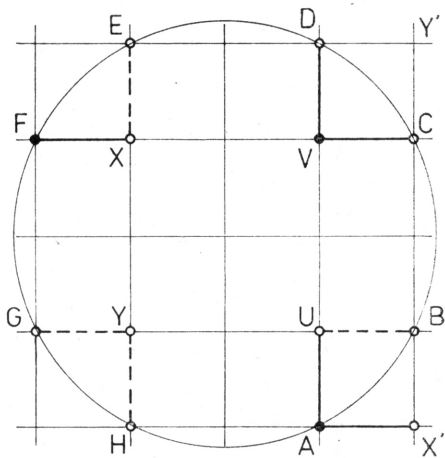
Jiné řešení. Uvažujme vnitřek jednotkového čtverce spolu s vnitřkem dvou sousedních stran a jejich společným vrcholem (obr. 37). Každý takový »čtverec«, jehož strany jsou



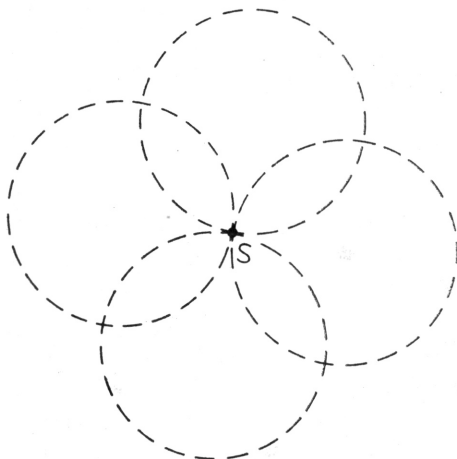
Obr. 37

rovnoběžné s osami souřadnic, zřejmě obsahuje právě jeden mřížový bod. Kruh o poloměru $\sqrt{5}$ obsahuje 12 takových »čtverců« (obr. 38); kromě toho jeden z »trojúhelníků« ABU , EFX (a podobně i jeden z »trojúhelníků« CDV , GHY) obsahuje mřížový bod, právě když ho obsahuje »čtverec« $AX'BU$ (resp. $CY'DV$). Libovolný kruh o poloměru $\sqrt{5}$ tedy obsahuje aspoň 14 mřížových bodů.

Útvar B je sjednocením čtyř otevřených kruhů o průměru 1 doplněných bodem S (obr. 39). Protože každý takový »kruh« může obsahovat nejvýše jeden mřížový bod (vzdálenost dvou mřížových bodů je alespoň 1), leží uvnitř útvaru B nejvýše čtyři mřížové body. Tím je důkaz hotov.



Obr. 38



Obr. 39

Jsou dána celá čísla p, q . Určete nejmenší přirozené číslo n , pro které existuje mnohočlen f stupně n s reálnými koeficienty takový, že současně platí

a) $f(p) = f(q) = 0$,

b) $f(m) > 0$ pro všechna celá čísla $m, p \neq m \neq q$.

Řešení. Uvažujme mnohočlen

$$f(x) = (x - p)^2(x - q)^2.$$

Zřejmě f vyhovuje podmínkám úlohy, takže hledané nejmenší přirozené n existuje a je $n \leq 4$. Mějme mnohočlen g třetího stupně,

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0).$$

Je-li $ax < -(|a| + |b| + |c| + |d|)$, $1 \leq |x|$, je

$$g(x) \leq ax^3 + |b||x|^2 + |c||x| + |d| \leq$$

$$\leq ax^3 + x^2(|b| + |c| + |d|) <$$

$$< x^2(ax + |a| + |b| + |c| + |d|) < 0,$$

takže $n \neq 3$. Dále je zřejmé, že $n \neq 1$. Zbývá tedy zjistit, kdy může být $n = 2$.

Je-li $p = q$, vyhovuje podmínkám úlohy mnohočlen $(x - p)^2$, takže $n = 2$. Podobně pro $|p - q| = 1$ vyhovuje

mnohočlen $(x - p)(x - q)$, takže je rovněž $n = 2$. Nakonec nechť $|p - q| \geq 2$. Ukážeme, že podmínkám úlohy nevyhovuje žádná kvadratická funkce. Vzhledem k a) by takový kvadratický trojčlen musel mít tvar $f(x) = a(x - p)(x - q)$, kde $a \neq 0$. Přitom ale je pro $p < q$

$$f(q - 1) = -a(q - 1 - p) < 0 \text{ pro } a > 0,$$

$$f(q + 1) = a(q + 1 - p) < 0 \text{ pro } a < 0.$$

A podobně i pro $p > q$. V případě $|p - q| \geq 2$ je tedy $n = 4$.

A - II - 3b

Pro n přirozené označme M_n množinu všech jednoprvkových a dvouprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Je-li $n \geq 3$, lze ke každé $(n - 2)$ -prvkové podmnožině P množiny M_n najít dvouprvkovou podmnožinu $\{i, j\}$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, pro kterou je

$$\{\{i\}, \{j\}, \{i, j\}\} \cap P = \emptyset.$$

Dokažte.

Řešení. Nechť P obsahuje k ($0 \leq k \leq n - 2$) dvouprvkových a $n - 2 - k$ jednoprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$; v množině $\{1, 2, \dots, n\}$ tedy zbývá $k + 2$ čísel i takových, že $\{i\} \notin P$. Z nich můžeme utvořit $\binom{k+2}{2}$

dvouprvkových podmnožin, stačí tedy ověřit, že vždy platí

$$\binom{k+2}{2} > k,$$

neboli

$$(k+2)(k+1) > 2k.$$

Tato nerovnost zřejmě platí pro každé $k \geq 0$.

Jiné řešení. Předpokládejme, že tvrzení úlohy neplatí, tj. že existuje taková $(n-2)$ -prvková podmnožina $P \subset M_n$, že

$$P \cap \{\{i\}, \{j\}, \{i, j\}\} \neq \emptyset$$

pro každou $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Kdyby pro nějaké $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ nebylo $\{m\} \in P$, pak by pro každé $j \neq m$ muselo být $\{j\} \in P$ nebo $\{j, m\} \in P$, takže by P obsahovala více než $n-2$ prvků. Je tedy $\{m\} \in P$ pro libovolné $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, což je opět spor s předpokládaným počtem prvků množiny P .

Jiné řešení (podle T. Ledvinky, 4. roč. SPŠE, Praha 2, Ječná a M. Wittnera, 4. roč. G Karlovy Vary). Zapišme všechny prvky množiny M_n do trojúhelníkové tabulky

$$\begin{array}{ccccccc} \{1\} & \{2\} & \{3\} & \dots & \{n\} \\ & \{1, 2\} & \{1, 3\} & \dots & \{1, n\} \\ & & \{2, 3\} & \dots & \{2, n\} \\ & & & \dots & \\ & & & & \{n-1, n\} \end{array}$$

Protože P má $n - 2$ prvků, existují aspoň dva sloupce, které neobsahují žádný prvek z P ($i < j$):

$$\begin{array}{cc} \{i\} & \{j\} \\ \{1, i\} & \{1, j\} \\ \dots\dots\dots & \\ \{i-1, i\} & \{i-1, j\} \\ & \{i, j\} \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \end{array}$$

takže $P \cap \{\{i\}, \{j\}, \{i, j\}\} = \emptyset$.

ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

Nechť n je přirozené číslo a $[S]$ množina podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ s touto vlastností: Pro každé dvě množiny $M_1 \in [S]$, $M_2 \in [S]$ má množina $(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$ sudý počet prvků. Určete největší možný počet prvků množiny $[S]$.

Řešení. Protože

$$|(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)| = |M_1| + |M_2| - 2|M_1 \cap M_2|,$$

má uvedený symetrický rozdíl množin sudý počet prvků, právě když obě množiny M_1, M_2 mají stejný počet prvků modulo 2. Musí mít tedy všechny množiny v $[S]$ buď sudý, anebo všechny lichý počet prvků. Odtud plyne, že největší možný počet prvků množiny $[S]$ je 2^{n-1} (polovina všech podmnožin dané množiny má totiž sudý počet prvků a polovina lichý počet prvků).

A - III - 2

Nechť $m \geq n \geq 3$ jsou přirozená čísla. Je dán mnohočlen p stupně m s celočíselnými koeficienty takový, že $p(a_1) = p(a_2) = \dots = p(a_n) = 1$ pro n různých celých čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dokažte, že p nemá žádný celočíselný kořen.

Řešení. Protože čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou kořeny mnohočlenu $p - 1$, je

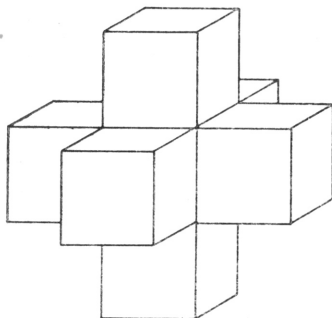
$$p(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) q(x),$$

kde q je mnohočlen stupně $m - n$ s celočíselnými koeficienty. Kdyby bylo $p(a) = 0$ pro nějaké a celé, dostali bychom rovnost

$$-1 = (a - a_1)(a - a_2) \dots (a - a_n) q(a).$$

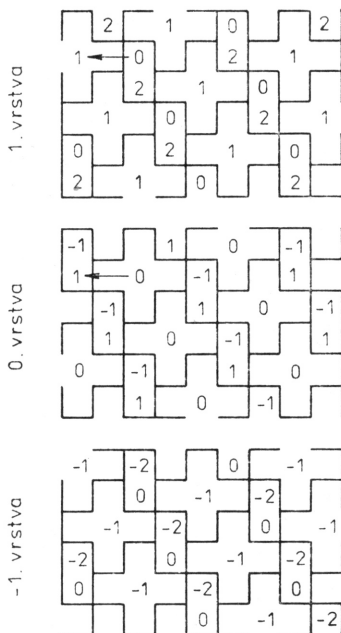
V takovém případě by muselo být $|a - a_i| = 1$ pro tři různá celá čísla a_1, a_2, a_3 . To nejde, takže mnohočlen p nemůže mít celočíselné kořeny.

Předpokládejme, že máme nekonečně mnoho stejných stavebnicových dílů složených ze sedmi krychlí (obr. 40). Dokažte, že je možno těmito díly vyplnit beze zbytku celý prostor.



Obr. 40

Řešení. Uvažujme krychlovou síť v prostoru tvořenou navzájem rovnoběžnými vrstvami krychlí stejné velikosti jako u daných dílů. Zvolme jednu vrstvu, označme ji nulou a všechny ostatní vrstvy očíslovme postupně celými čísly tak, aby nad n -tou vrstvou byla $(n + 1)$ -ní vrstva. Rozmístíme-li nyní středové krychle jednotlivých dílů v nulté vrstvě podle obr. 41 na místa označená nulou, zůstanou nevyplněny právě všechny dvojice sousedních krychlí na místech označených -1 a 1 . Přitom rozmístěné díly zaplní ještě místa označená 0 v -1 . a 1 . vrstvě. Rozmístíme-li další díly v 1 . vrstvě tak, aby středové krychle jednotlivých dílů byly na místech označených 1 , a podobně v -1 . vrstvě

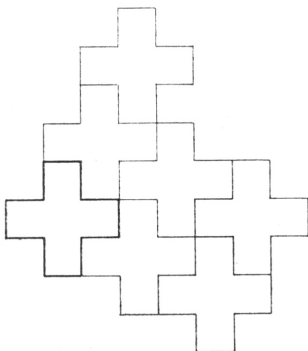


Obr. 41

do míst označených -1 , bude nultá vrstva vyplněna beze zbytku. Pokračujeme-li analogicky i v dalších vrstvách (tj. díly se středy v n -té vrstvě posuneme např. o dvě krychle doleva a pak je zvedneme do následující vrstvy), vidíme, že takto vyplníme beze zbytku každou vrstvu, a tedy i celý prostor.

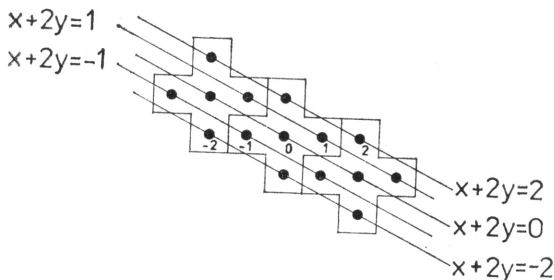
Poznámka. Není těžké zjistit, že po sedmi vrstvách se rozmístění dílů v jednotlivých vrstvách začne periodicky opakovat.

Jiné řešení. Uvažujme nejprve obdobnou úlohu v rovině pro útvary složené z pěti čtverců (obr. 42). Již z názoru je patrné, že těmito útvary lze vyplnit rovinu. Pokusme se přesto o přesný důkaz tohoto tvrzení.



Obr. 42

Uvažme kartézskou soustavu souřadnic takovou, že čtverce tvořící jednotlivé díly budou jednotkové a jejich středy budou mřížové body. Stačí si pak uvědomit (obr. 43), že



Obr. 43

středy jednotlivých dílů budou např. všechny mřížové body ležící na přímce s rovnicí $x + 2y = 0$. Podobně středy ostatních čtverců budou ležet na přímkách $x + 2y = \pm 1$, resp. $x + 2y = \pm 2$. Umístíme-li tedy středy jednotlivých dílů tak, aby jejich souřadnice (x, y, z) byly celočíselné a ležely na přímkách $x + 2y = 5k$, kde k je celé číslo, budou středy ostatních čtverců ležet na přímkách $x + 2y = 5k \pm 1$, resp. $x + 2y = 5k \pm 2$. Přitom se žádné dva díly nemohou překrývat a každý mřížový bod leží na některé z přímek $x + 2y = m$ pro nějaké m celé.

Právě naznačené řešení teď snadno přeneseme do prostoru: Uvažujme kartézskou soustavu souřadnic v prostoru takovou, že krychle tvořící daný díl budou jednotkové a jejich středy budou mřížové body. Jsou-li (x_0, y_0, z_0) souřadnice středu daného dílu a (x, y, z) souřadnice středu libovolné z jeho krychlí, platí

$$|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0| \leq 1. \quad (1)$$

Umístíme nyní středy jednotlivých dílů tak, aby jejich souřadnice byly celočíselné a číslo $x + 2y + 3z$ bylo dělitelné sedmi. Jsou-li $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ souřadnice středu dvou různých dílů, je číslo $(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2) + 3(z_1 - z_2)$ nenulové a dělitelné sedmi, takže musí být $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \geq 3$, podle (1) se tedy žádné dva díly nepřekrývají. A naopak každý mřížový bod se souřadnicemi (t, u, v) je pokryt některým dílem, jehož střed bude mít souřadnice

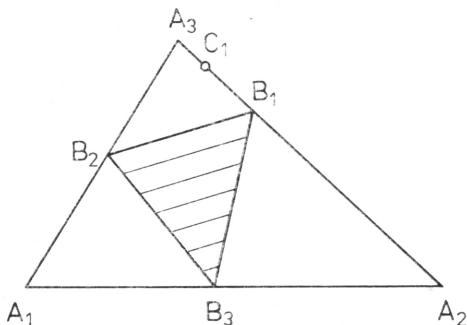
$$(t, u, v), \text{ když } t + 2u + 3v \equiv 0 \pmod{7},$$

$(t \pm 1, u, v)$, když $t + 2u + 3v \equiv \mp 1 \pmod{7}$,
 $(t, u \pm 1, v)$, když $t + 2u + 3v \equiv \mp 2 \pmod{7}$,
 $(t, u, v \pm 1)$, když $t + 2u + 3v \equiv \mp 3 \pmod{7}$.

A - III - 4

V rovině je dána omezená konvexní množina A a tři navzájem disjunktní polopřímky s počátky v A . Doplnkem sjednocení těchto čtyř útvarů jsou tři navzájem disjunktní oblasti. Necht' množiny B a C jsou konvexní a disjunktní se všemi třemi polopřímkami, přičemž každá z množin B , C má neprázdný průnik s každou z uvedených tří oblastí. Dokažte, že množiny B a C mají neprázdný průnik.

Řešení. Pokud počátky A_1, A_2, A_3 uvedených tří polopřímek leží v přímce, neexistují konvexní množiny B, C požadovaných vlastností. Uvažujme trojúhelník $A_1A_2A_3 \subset A$. Pokud jedna z polopřímek protíná stranu trojúhelníku $A_1A_2A_3$, množiny B, C požadovaných vlastností neexistují



Obr. 44

Předpokládejme tedy, že dané polopřímky mají s trojúhelníkem $A_1A_2A_3$ společné právě jeho vrcholy. Množina B pak nutně obsahuje nějaký trojúhelník $B_1B_2B_3$ a množina C trojúhelník $C_1C_2C_3$ s vrcholy $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ uvnitř stran trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Nechť např. $C_1 \in B_1A_3$ (obr. 44). Protože $C_3 \in A_1A_2$ a množiny B, C jsou konvexní, je $B \cap C \neq \emptyset$.

A - III - 5

Nechť funkce f zobrazuje množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel do sebe tak, že je $f(1) = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n) + 2.$$

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$f(n)f(n+1) = f(m).$$

Řešení. Protože

$$f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n) + 2,$$

platí pro každé $n \geq 1$

$$f(n+1) - f(n) = f(2) - 1 + 2(n-1),$$

takže

$$\begin{aligned} f(n) &= f(1) + (n-1)(f(2) - 1) + 2(1 + 2 + \dots + n-2) = \\ &= (n-1)f(2) + (n-2)^2. \end{aligned}$$

$$f(n)f(n+1) = (n-1)n(f(2))^2 + f(2)(n(n-2)^2 + (n-1)^3) + \\ + ((n-2)(n-1))^2$$

bychom chtěli pro libovolné n přirozené vyjádřit jako $(m-1)f(2) + (m-2)^2$. Položme $m-1 = af(2) + b$, pak dostaneme

$$a(a+1) = (n-1)n,$$

$$(b-1)^2 = ((n-2)(n-1))^2,$$

$$2a(b-1) + b = 2n^3 - 7n^2 + 7n - 1.$$

Těmto podmínkám vyhovují čísla $a = n-1$, $b = (n-2)(n-1) + 1 = n^2 - 3n + 3$, takže $m = (n-1)f(2) + n^2 - 3n + 4 = f(n) + n$. Je tedy

$$f(n)f(n+1) = f(f(n) + n).$$

A - III - 6

Nechť A je taková množina celých kladných čísel, že pro každé dva její různé prvky x, y platí nerovnost

$$|x - y| \geq \frac{xy}{25}.$$

Dokažte, že množina A obsahuje nejvýše 9 prvků. Rozhodněte, zda taková devítiprvková množina A existuje.

Řešení. V množině A existuje nejvýše jeden prvek větší než 24, jinak by pro $25 \leq y < x$ bylo $|x - y| < x \leq \frac{xy}{25}$, což je ve sporu s předpokladem. A je tedy konečná.

Nechť $A = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, kde $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ a $x_{N-1} < 25$. Pro $j \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ označme $d_j = x_{j+1} - x_j$, pak platí

$$d_j \geq \frac{x_j x_{j+1}}{25} = \frac{x_j(x_j + d_j)}{25},$$

neboli

$$d_j \geq \frac{x_j^2}{25 - x_j}.$$

Zřejmě $x_5 \geq 5$, pak ale $d_5 \geq \frac{25}{20} > 1$, neboli $x_6 \geq 7$, dále

$d_6 \geq \frac{49}{18} > 2$, neboli $x_7 \geq 10$, $d_7 \geq \frac{100}{15} > 6$, neboli $x_8 \geq 17$,

$d_8 \geq \frac{289}{8} > 36$, tedy $x_9 \geq 54$. Musí tedy být $N \leq 9$. Zároveň ale vidíme, že množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, 54\}$ vyhovuje naší úloze.

Poznámka. Není těžké popsat všechny množiny A vyhovující dané podmínce. Např. množiny

$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, a_1\}$, kde $a_1 \geq 54$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 18, a_2\}$, kde $a_2 \geq 70$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 19, a_3\}$, kde $a_3 \geq 80$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 20, a_4\}$, kde $a_4 \geq 100$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 21, a_5\}$, kde $a_5 \geq 132$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 22, a_6\}$, kde $a_6 \geq 184$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 23, a_7\}$, kde $a_7 \geq 288$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 24, a_8\}$, kde $a_8 \geq 600$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 20, a_9\}$, kde $a_9 \geq 100$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 21, a_{10}\}$, kde $a_{10} \geq 132$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 22, a_{11}\}$, kde $a_{11} \geq 184$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 23, a_{12}\}$, kde $a_{12} \geq 288$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 24, a_{13}\}$, kde $a_{13} \geq 600$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 12, 24, a_{14}\}$, kde $a_{14} \geq 600$,
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 24, a_{15}\}$, kde $a_{15} \geq 600$,
 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, a_{16}\}$, kde $a_{16} \geq 600$

jsou všechny devítiprvkové množiny, které vyhovují dané podmínce.

Hodnotenie a zdôvodnenie 35. ročníka MO — kategória P

Veľký záujem o novovytvorenú kategóriu P (programovanie) bol príjemným prekvapením pre všetkých organizátorov Matematickej olympiády. Súťaže sa zúčastnilo zhruba 250 účastníkov, čo je – vzhľadom na vysokú obtiažnosť riešených úloh – veľmi vysoký počet. Do súťaže sa zapojili študenti stredných škôl z celej republiky, i keď nie rovnomerne. V pomere k počtu študentov a škôl najhojnejšia bola účasť zo Slovenska, potom z Moravy a relatívne najnižšia z českých krajov.

Priebeh súťaže poukázal na dva dôležité momenty:

- a) K programovaniu na špičkovej úrovni treba značné vedomosti z matematiky.
- b) Samotné vedomosti z »klasickej« matematiky nepostačujú k úspešnému vyriešeniu úloh v kategórii P. Na to treba mať aj istú (a nie malú) dávku bezprostredných skúseností z práce s počítačmi a najmä rozvinuté algoritmické myslenie.

Prvý poznatok potvrdzuje, že kategória P právom patrí do Matematickej olympiády ako jej harmonická zložka. Obohacuje túto súťaž o nové prúdy a impulzy, súvisiace s najnovšími trendami vo vede a technike. Súťažiaci mohli vidieť a pochopiť hlbšie súvislosti prepojenia matematiky s praxou, než sú dostupné z bežnej školskej látky ako v matematike, tak v programovaní.

Z druhého konštatovania zase vyplýva, že zavedenie samostatnej kategórie bolo oprávnené, lebo algoritmické myslenie má svoje špecifiká, ktoré sa dajú vystihnúť vhodnou voľbou príkladov. Je oprávnená nádej, že v súvislosti s realizáciou dlhodobého komplexného projektu elektronizácie v rezorte školstva sa úroveň algoritmického myslenia žiakov podstatne zvýši a zároveň s tým porastie aj záujem o túto kategóriu.

O priebehu 35. ročníka MO

kategória P

Definitívne rozhodnutie usporiadať kategóriu P ako novú súťažnú kategóriu od 35. ročníka MO padlo pomerne neskoro — na zasadnutí ÚV MO v máji 1985 v Banskej Bystrici. Príčinou váhania boli (do istej miery oprávnené) obavy o spôsob organizácie a vyhodnocovania súťaže. Nie v každom kraji je totiž dostatok kvalifikovaných odborníkov, ktorí by mohli úlohy opravovať a tak vybrať najlepších pre postup do vyšších kôl.

Z viacerých návrhov sa nakoniec vybral »triparitný« model, v ktorom sa farcha organizácie rozdelila na zástupcov troch fakúlt, vychovávajúcich špecialistov v odbore teoretická kybernetika, matematická informatika a teória systémov. MFF UK Praha sa zaviazala zaistiť priebeh súťaže v českých krajoch, PřF UJEP Brno na Morave a MFF UK Bratislava na Slovensku. MFF UK Bratislava bola súčasne aj hlavným garantom výberu a rozmnožovania úloh pre celý ročník a organizátorom celoštátneho kola.

Súťaž bola trojkolová. Prvého, domáceho kola sa zúčastnilo vyše 250 študentov stredných škôl. Z nich 100 najlepších bolo vybraných do krajských kôl, ktoré sa uskutočnili naraz s krajskými kolami kategórií B a C. 50 najlepších (20 z českých krajov, 10 z Moravy a 20 zo Slovenska) postúpilo do celoštátneho kola, ktoré sa konalo 12.—15. mája v Medzinárod-

nom pionierskom tábore SÚV SZM v Kováčove pri Štúrove.

Súťaž slávnostne otvorila námestníčka ministra školstva SSR *Dr. Marta Vlačíhová, CSc.*, za účasti zástupcov ÚDPM KG, ZsKNV a ÚV MO. Vďaka patrí aj profesorom a študentom Gymnázia v Štúrove, ktorí sa postarali o kultúrny program na slávnostnom otvorení a vychádzku do Chránenej krajinej oblasti Kováčovské kopce. Súťažiaci tak mali príležitosť zoznámiť sa s týmto málo navštevovaným, ale krásnym kútom našej vlasti medzi Hronom, Ipľom a Dunajom.

Na výraznom úspechu slovenských účastníkov majú veľký podiel *RNDr. Andrej Blaho* a *RNDr. Peter Tomcsányi* z Ústavu aplikovanej matematiky a výpočtovej techniky Univerzity Komenského v Bratislave a *RNDr. Ondrej Demáček* z Gymnázia Jura Hronca v Bratislave, ktorí už po tri roky organizujú Korešpondenčný seminár z programovania ako celoročnú súťaž a pre jej najlepších účastníkov aj letné a zimné týždenné sústreďenia. Táto starostlivosť sa odrazila na dobrom písomnom prejave, vynaliezavosti i formuláciách slovenských účastníkov. Výsledky potvrdzujú, že podobnú formu prípravy by bolo vhodné uplatniť aj v ďalších krajoch. Prvou lastovičkou je zaraďovanie úloh z programovania do korešpondenčného seminára z matematiky, organizovaného Prírodovedeckou fakultou UPJŠ v Košiciach.

Žiaľ, pre nedostatok kvalifikovaných nadšencov nebolo zatiaľ možné organizovať inštruktaže pre učiteľov, bežné v iných kategóriách MO.

Na záver hodnotenia kategórie P vymenujme tú hŕstku nadšencov, vďaka ktorým sa súťaž v tejto kategórii uskutočnila: Praha: *Doc. RNDr. Jiří Demner, CSc.*, *RNDr. Petr Savický*, *RNDr. Pavel Töpfer*

Brno: RNDr. *Luboš Brim, CSc.*, RNDr. *Tomáš Havlát, CSc.*
 Bratislava: RNDr. *Andrej Blaho, doc.* RNDr. *Ľozef Hvo-*
recký, CSc., RNDr. *Peter Tomcsányi*

Tabulka 5

Počty účastníkov III. kola kategórie P

Kraj	Celkový počet	Počet úspešných riešiteľov	Z toho víťazov
Praha	8	3	2
Stredočeský	0	0	0
Juhočeský	2	2	0
Západočeský	0	0	0
Severočeský	5	2	1
Východočeský	3	1	1
Juhomoravský	5	3	0
Severomoravský	4	0	0
Bratislava	8	7	4
Západoslovenský	4	2	1
Stredoslovenský	4	2	1
Východoslovenský	4	3	1
ČSR	27	11	4
SSR	20	14	7
ČSSR	47	25	11

Výsledky celoštátneho kola MO kategória P

Vítazi

1. *Zohdy Hamid*, 3, G A. Markuša, Bratislava
2. *Alexander Szabari*, 4, G Košice, Šmeralova
3. *Roman Dudek*, 4, G Nitra, Párovská
4. *Peter Klein*, 3, G A. Markuša, Bratislava
- 5.–6. *Vladan Majerech*, 3, G Pardubice
Marcel Polakovič, 3, G A. Markuša, Bratislava
7. *Petr Šleich*, 4, G Děčín
- 8.–9. *Vladimír Veselý*, 3, G J. Hronca, Bratislava
Filip Zavoral, 4, G Praha 10, Voděradská
- 10.–11. *Richard Krajčoviech*, 3, G Považská Bystrica
Tomáš Trégl, 3, G W. Piecka, Praha 2

Ďalší úspešní riešitelia

12. *Pavel Kozlovský*, 2, G Jindřichův Hradec
- 13.–15. *Michal Dostál*, 3, G W. Piecka, Praha 2
Mario Drosc, 3, G Michalovce
Róbert Germič, 3, G Žilina, Veľká Okružná
16. *Ivan Polách*, 4, G J. Hronca, Bratislava
17. *Petr Veselý*, 4, G Jihlava
18. *Ľuboslav Martinec*, 2, G Ústí nad Labem
- 19.–20. *Peter Muška*, 3, G Poprad
Ladislav Zejda, 4, G Jihlava

- 21.—22. *Pavol Kolník*, 3, G Nové Mesto nad Váhom
Marián Szabo, 3, G J. Hronca, Bratislava
23.—25. *Stanislav Párnický*, 3, G A. Markuša, Bratislava
Petr Steinmetz, 3, G Brno, Koněvova
Martin Zítek, 3, G Milevsko

NAJÚSPEŠNEJŠÍ RIEŠITELIA II. KOLA MO
KATEGÓRIA P

Praha

- 1.—2. *Tomáš Trégl*, G W. Piecka
Michal Dostál, G W. Piecka
3. *Ivan Libicher*, G Budějovická
4. *Pavel Plachký*, G W. Piecka
5. *Ľuboslav Hnát*, G W. Piecka
6.—7. *Filip Zavoral*, G Voděradská
Lucie Kárná, G W. Piecka
8. *Martin Barhoň*, G W. Piecka
9. *Jan Sochor*, G W. Piecka

Stredočeský kraj

Žiaden úspešný riešiteľ.

Juhočeský kraj

1. *Pavel Dvořák*, G K. Šátala, České Budějovice

- 2.—3. *Vít Pavlík*, SPŠSE České Budějovice
Martin Zítek, G Milevsko
4. *Pavel Kozlovský*, G Jindřichův Hradec

Západočeský kraj

Žiaden úspešný riešiteľ.

Severočeský kraj

- 1.—2. *Petr Šleich*, G Děčín
 Jiří Martinek, G Ústí nad Labem
3. *Vítězslav Nový*, G Most
4. *Petr Mandík*, G Děčín
5. *Pavel Novák*, G Děčín

Východočeský kraj

1. *Petr Fencl*, G Pardubice
2.—3. *Radim Dlouhý*, G Dvůr Králové nad Labem
Vladan Majerech, G Pardubice

Juhomoravský kraj

1. *Pavel Kolařík*, SPŠ Gottwaldov
2. *Petr Veselý*, G Jihlava
3. *Petr Steinmetz*, G Brno, Koněvova
4. *Michal Blažke*, G Brno, Koněvova
5. *Ladislav Zejda*, G Jihlava
6. *Jan Matějka*, G Třebíč

Severomoravský kraj

1. *Martin Novotný*, G Ostrava-Hrabůvka
2. *Jan Hřebíček*, G Valašské Meziříčí
3. *Vladimír Solnický*, G Opava
4. *David Jedelský*, G Ostrava-Hrabůvka
5. *Miroslav Novák*, G M. Koperníka, Bílovec
6. *Robert Komanec*, G M. Koperníka, Bílovec

Bratislava

1. *Tomáš Hatrák*, G A. Markuša
- 2.—5. *Zohdy Hamid*, G A. Markuša
Peter Klein, G A. Markuša
Marcel Polakovič, G A. Markuša
Marián Szabó, G J. Hronca
6. *Stanislav Párnický*, G A. Markuša
- 7.—8. *Ivan Polách*, G J. Hronca
Vladimír Veselý, G J. Hronca
9. *Marek Belluš*, G J. Hronca
- 10.—14. *Torsten Török*, G A. Markuša
Anton Belna, G A. Markuša
Miroslav Beldek, G A. Markuša
Zuzana Reichwalderová, G A. Markuša
Marián Valent, G A. Markuša

Západoslovenský kraj

- 1.—2. *Pavol Kolník*, G Nové Mesto nad Váhom
Zdenko Mikláš, G Piešťany

- 3.—4. *Roman Dudek*, G Nitra, Párovská
Milan Mancel, G Piešťany
5. *Iván Vermes*, maď. G Komárno
6. *Peter Eliáš*, SPŠE Stará Turá
- 7.—9. *András Csékus*, maď. G Komárno
Andrej Demovič, G Trnava
Ladislav Maitz, maď. G Komárno

Stredoslovenský kraj

1. *Róbert Germič*, G Žilina, Veľká Okružná
2. *Miroslav Laššák*, G Žilina, Veľká Okružná
3. *Richard Krajčoviech*, G Považská Bystrica
4. *Rastislav Reháč*, G Žilina, Veľká Okružná

Východoslovenský kraj

1. *Martin Lieskovský*, G Prešov, Konštantínova
2. *Alexander Szabari*, G Košice, Šmeralova
3. *Mário Drosc*, G P. Horova, Michalovce
4. *Peter Muška*, G Poprad, Leninovo nábr.
5. *Peter Fekete*, G P. Horova, Michalovce
6. *Peter Matta*, G P. Horova, Michalovce
- 7.—8. *Marián Geroč*, G Poprad, Leninovo nábr.
Rastislav Senderák, G Prešov, Konštantínova

ÚLOHY I. KOLA

P - I - 1

Máme presne N lístkov papiera. Na každý lístok napíšeme z každej strany jedno prirodzené číslo od 1 po N (čísla na opačných stranách lístka môžu byť rôzne) tak, že každé číslo je napísané práve dva razy.

a) Dokážte, že pre ľubovoľný spôsob rozpísania čísel na lístky je možné poukladať lístky na stôl tak, že na ich vrchnej strane vidíme práve čísla 1 až N .

b) Nájdite algoritmus (predpis pre človeka), pomocou ktorého je možné poukladať lístky tak, aby spĺňali podmienku z bodu a). Algoritmus zapíšte v prirodzenej reči za pomoci matematických symbolov a označení tak, ako by ste ho vysvetľovali (zasvätenému) kamarátovi. Dávajte však pozor na to, aby bol presný, jednoznačný a logický. Dokážte, že algoritmus pracuje pre ľubovoľné rozpísanie čísel.

Riešenie. a) Dokážeme, že lístky možno vždy pootáčať tak, aby sme videli všetky čísla od 1 po N , matematickou indukciou vzhľadom na N .

1. Keď $N = 1$, lístok môžeme položiť ľubovoľne, t. j. úloha je vyriešená.
2. Ukážeme, že keď vieme rozložiť N lístkov s ľubovoľným rozpísaním čísel, tak vieme rozložiť aj $N + 1$ lístkov. V jednoduchšom prípade je číslo $N + 1$ na oboch stranách jedného lístka. V tom prípade rozmiestnime najprv lístky

s číslami 1 až N a nakoniec $N + 1$ -vý lístok položíme ľubovoľnou stranou navrch.

V opačnom prípade je $N + 1$ na dvoch rôznych lístkoch. Tieto dva lístky »zlepíme« číslami $N + 1$ k sebe. Tým vznikne sada N lístkov s číslami 1, 2, ..., N , ktorú podľa indukčného predpokladu vieme rozložiť. Potom zlepený lístok rozlepíme a na stol položíme oba lístky tak, aby ten, ktorý bol v zlepenej dvojici »dolu«, mal na hornej strane číslo $N + 1$ a ten, ktorý bol »hore«, mal na hornej strane to isté číslo ako vtedy, keď boli lístky zlepené. Tým sme požadovaným spôsobom rozložili všetkých $N + 1$ lístkov.

b) Na základe predchádzajúceho dôkazu možno navrhnúť nasledujúci algoritmus:

1. Označ všetky lístky ako nezaradené.
2. Medzi nezaradenými lístkami vyhľadaj lístky s číslom N .
3. Ak si našiel len jeden lístok (t. j. číslo je na jeho oboch stranách), tak ho polož medzi zaradené, pokračuj krokom 5.
4. Ak si našiel dva lístky, potom ich polož na seba tak, aby číslo N bolo na vnútornej strane »zlepenia«. Takto vzniknutú dvojicu lístkov považuj za jeden a polož ho medzi nezaradené.
5. Zníž N o 1 a ak N je väčšie ako 0, pokračuj krokom 2.
6. Teraz sú všetky lístky zaradené. Tie, ktoré sa skladajú z viacerých na seba položených lístkov, rozlož na jednotlivé lístky tak, aby sa pritom žiaden z nich neprevrátil. Vtedy sa bude každé číslo nachádzať na vrchnej strane práve raz, čo sme chceli dosiahnuť. Tým teda algoritmus končí. Uvedený algoritmus pracuje presne podľa myšlienky uvedenej v predchádzajúcom dôkaze, takže ďalšie dokazovanie je zbytočné.

Def. 1: Konečnú postupnosť $A(0), A(1), \dots, A(N)$, kde N je prirodzené číslo a platí $A(i) = 0$ alebo 1 pre všetky i , nazveme »dobrou«, ak pre všetky i platí

$$A(i) = 0 \text{ alebo } A(i + 1) = 0.$$

Def. 2: Nekonečná postupnosť prirodzených čísel $F(i)$ je definovaná vzťahmi:

$$F(0) = F(1) = 1$$

$$F(i + 2) = F(i + 1) + F(i) \quad \text{pre } i \geq 0$$

Def. 3: Ku každej konečnej postupnosti A

$$A(0), A(1), \dots, A(N)$$

priradíme číslo $H(A, N)$ podľa predpisu

$$H(A, N) = A(0).F(0) + A(1).F(1) + \dots + A(N).F(N).$$

Def. 4: Dve konečné postupnosti A :

$$A(0), A(1), \dots, A(N)$$

a B :

$$B(0), B(1), \dots, B(M)$$

nazveme príbuznými, keď platí

$$H(A, N) = H(B, M).$$

Nájdite algoritmus, ktorý pre danú konečnú postupnosť $A(i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ nájde príbuznú »dobrú« postupnosť $B(j)$, $j = 0, 1, \dots, M$. Pritom predpokladajte, že nie je možné vypočítať hodnotu $H(A, N)$, lebo by mohla byť príliš veľká.

Dokážte, že pre každú zadanú postupnosť dá algoritmus požadovaný výsledok.

Riešenie. V texte riešenia sa bude všade namiesto termínu »postupnosť núl a jedničiek $A(i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ « používať termín »postupnosť A «. Podobne miesto »postupnosť núl a jedničiek $B(j)$, $j = 0, 1, \dots, M$ « budeme písať »postupnosť B «.

Algoritmus

1. Skopíruj postupnosť A do postupnosti B , tj. vytvor novú postupnosť B takú, že

$$A(i) = B(i) \text{ pre } i = 0, 1, \dots, N,$$

a polož $M = N$.

2. Ak je postupnosť B dobrá, koniec.
3. Nech k je najväčšie také číslo, že

$$B(k) = B(k - 1) = 1.$$

4. Ak $k = M$, polož $M = M + 1$ a $B(M) = 0$.
5. Polož $B(k) = B(k - 1) = 0$, polož $B(k + 1) = 1$, pokračuj krokom 2.

Dôkaz. Dôkaz rozložíme na dve časti. Najprv dokážeme, že ak výpočet algoritmu skončí, tak dá požadovaný výsledok (táto vlastnosť algoritmu sa nazýva *čiasťočná správnosť*). Potom dokážeme, že algoritmus skončí pre ľubovoľnú konečnú postupnosť A (táto vlastnosť sa nazýva *konečnosť algoritmu*).

Čiasťočná správnosť. Treba dokázať, že ak výpočet skončí (v kroku 2), tak postupnosť B bude »dobrá« a zároveň postupnosti A a B budú príbuzné.

a) To, že po skončení výpočtu bude postupnosť B »dobrá«, je zrejmé. Algoritmus končí v kroku 2 iba za predpokladu, že B je »dobrá« postupnosť.

b) Teraz stačí dokázať, že postupnosti A a B sú príbuzné vždy, keď vykonávame príkaz 2. Platia dve tvrdenia, z ktorých príbuznosť A a B vyplýva podľa matematickej indukcie:

1. Keď do 2 pridáme z 1, tak sú postupnosti A a B určite príbuzné, lebo sú identické.

2. Ak sú pri vykonávaní 2. kroku algoritmu postupnosti A a B príbuzné, tak budú príbuzné aj po vykonaní cyklu pozostávajúceho z krokov 3, 4, 5, 2 v uvedenom poradí.

To vyplýva zo skutočnosti, že

- príkaz 3 sa vykonáva len v tom prípade, keď postupnosť B nie je »dobrá«. Teda zaručene existuje také k , že

$$B(k) = B(k - 1) = 1,$$

- príkaz 4 nezmení hodnotu $H(B, M)$,
- pred vykonaním 5 platí, že $B(k + 1) = 0$. V opačnom prípade by k nebolo najväčšie číslo, pre ktoré $B(k) = B(k - 1) = 1$.

- V príkaze 5 sa hodnota $H(B, M)$ nezmení, lebo pre členy postupnosti F platí

$$F(k + 1) = F(k) + F(k - 1).$$

Konečnosť. Činnosť algoritmu skončí, keď je zaručené, že skončí vykonávanie každého cyklu, ktorý obsahuje. Náš algoritmus obsahuje jediný cyklus 2–5.

V tomto cykle sa pri každom prechode zaručene vykoná príkaz 5. V ňom sa dve jednotky v postupnosti B nahradia jednou – teda pri každom prechode cyklom sa počet jednotiek o jednu zmenší. Toto znižovanie nemôže trvať nekonečne dlho, lebo postupnosť, ktorá obsahuje iba jednu jednotku, je zaručene dobrá. Cyklus teda skončí najneskôr po N krokoch.

Zhrnutie. Podarilo sa dokázať, že

- ak sa výpočet podľa algoritmu skončí, tak dá správny výsledok pre ľubovoľnú vstupnú postupnosť A ;
- výpočet podľa algoritmu skončí pre každú postupnosť A .

Z toho vyplýva, že výpočet skončí a dá správny výsledok pre ľubovoľnú vstupnú postupnosť A .

Ešte poznamenávame, že takto formulovaný algoritmus je dostatočne presný pre »ručné« spracovanie. Pre výpočet na počítači by bolo treba presnejšie špecifikovať krok 3. Hľadanie čísla k totiž nemusí vždy začínať od konca, ale od toho miesta, kde sme naposledy našli dve jednotky vedľa seba (túto hodnotu udáva premenná i). Keď zameníme dve jednotky za jednu, stačí preveriť, či sme tým nevytvorili novú dvojicu. Dôkaz správnosti takto modifikovaného algoritmu by bol podobný, iba by obsahoval viac technických detailov.

Na záver uvádzame takto upravený algoritmus v jazyku Basic:

```
110 FOR I = 1 TO N
120 LET B(I) = A(I)
130 NEXT I
140 M = N
150 FOR I = N TO 2 STEP -1
160     LET K = I
170     IF B(K) = 0 OR B(K - 1) = 0 THEN GOTO
        240
180     IF K = M THEN LET M = M + 1
190     B(K) = 0
200     B(K - 1) = 0
210     B(K + 1) = 1
220     K = K + 2
230     GO TO 170
240 NEXT I
```

P - I - 3

Nasledujúci program v jazyku Basic hľadá v N-prvkovom poli čísel úsek, ktorého súčet je maximálny:

```
100 LET M = 0
110 FOR DLZ = 1 TO N
120     FOR ZAC = 1 TO N - DLZ + 1
130         LET S = 0
140         FOR I = ZAC TO ZAC + DLZ - 1
150             LET S = S + A(I)
160         NEXT I
170         IF S > M THEN LET M = S
180     NEXT ZAC
190 NEXT DLZ
200 END
```

Označme $S(N)$ počet vykonaní priradovacieho príkazu v riadku 150. Vyjadrite $S(N)$ ako funkciu zadaného N .

Riešenie. V ďalšom texte budeme namiesto »cyklus pre DLZ v riadkoch 110 až 190« písať »cyklus pre DLZ« (a podobne pre ZAC a I).

Program začneme analyzovať od najvnútornejšieho cyklu. Cyklus pre I sa vykoná DLZ-krát, pričom v každom priebehu cyklom sa vykoná práve jedno sčítanie. Teda v celom cykle pre I sa vykoná DLZ sčítaní. Cyklus pre ZAC sa vykonáva $N - DLZ + 1$ razy, teda v celom cykle pre ZAC sa vykoná

$$(N - DLZ + 1).DLZ$$

sčítaní. Hľadaný počet - funkciu $S(N)$ zistíme, keď vyjadríme počet sčítaní v cykle pre DLZ.

Cyklus pre DLZ sa vykonáva od 1 po N . Teda počet sčítaní $S(N)$ je vyjadrený sumou:

$$S(N) = (N - 1 + 1).1 + (N - 2 + 1).2 + \dots + \\ + (N - N + 1).N$$

Roznásobením každej zátvorky dostávame vzťah:

$$S(N) = (N + 1).1 - 1.1 + (N + 1).2 - 2.2 + \\ + \dots + (N + 1).N - N.N$$

Jednotlivé členy združíme takto:

$$S(N) = (N + 1).(1 + 2 + 3 + \dots + N) - \\ - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2) \quad (S)$$

Teraz vyjadríme zvlášť každý člen rozdielu.

Prvý člen obsahuje súčet aritmetickej postupnosti s diferenciou 1. Teda

$$(N + 1).(1 + 2 + 3 \dots + N) = (N + 1).N.(N + 1)/2 \quad (S1)$$

Druhý člen (súčet druhých mocnín) označíme ako $D(N)$. Zo známej rovnosti

$$A^3 - B^3 = (A - B).(A^2 + A.B + B^2)$$

vieme, že

$$1^3 - 0^3 = 1.(1^2 + 1.0 + 0^2)$$

$$2^3 - 1^3 = 1.(2^2 + 2.1 + 1^2)$$

$$3^3 - 2^3 = 1.(3^2 + 3.2 + 2^2)$$

... ..

$$N^3 - (N - 1)^3 = 1.(N^2 + N.(N - 1) + (N - 1)^2).$$

Sčítaním všetkých týchto rovností dostávame:

$$N^3 - 0^3 =$$

$$= D(N) + (1.0 + 2.1 + 3.2 + \dots + N.(N-1)) + \\ + D(N-1)$$

Vieme, že platí

$$N.(N-1) = N^2 - N$$

a

$$D(N) = D(N-1) + N^2.$$

Preto

$$N^3 = D(N) + (D(N) - (1 + 2 + 3 \dots + N)) + \\ + D(N) - N^2.$$

Už sme ukázali, že

$$1 + 2 + 3 + \dots + N = N.(N+1)/2,$$

takže

$$N^3 = 3.D(N) - N^2 - N.(N+1)/2.$$

Z tohoto vzťahu určíme $D(N)$:

$$3.D(N) = N.(N^2 + N + (N+1)/2) = \\ = N.(N+1)(2N+1)/2$$

$$D(N) = \frac{N \cdot (N + 1) \cdot (2N + 1)}{6} \quad (S2)$$

Po dosadení vzťahov (S1) a (S2) do (S) dostávame

$$S(N) = N(N + 1)(N + 1)/2 - N(N + 1)(2N + 1)/6,$$

a teda

$$S(N) = \frac{N^3 + 3N^2 + 2N}{6}.$$

Poznámka. Vzťah

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2 = N \cdot (N + 1) \cdot (2N + 1)/6$$

stačilo nájsť v literatúre a dokázať indukciou. My sme sa snažili podať jeho konštruktívny dôkaz, lebo môže poslúžiť ako návod na odvodenie podobných súčtov v budúcnosti.

P - 1 - 4

Modifikovaný Minského stroj (MMS) je teoretický model jednoduchého počítača. Pozostáva z konečného, dostatočne veľkého počtu pomenovaných premenných (mená sú obyčajné identifikátory) a »riadiacej jednotky«. Obsahom každej premennej je *nezáporné celé číslo*. Riadiaca jednotka dokáže manipulovať s premennými, ale vykonáva len veľmi jednoduché operácie:

- pripočítat k premennej jednotku, čo označujeme
»meno premennej« +,
- odčítat od premennej jednotku, čo označujeme
»meno premennej« −,
- testovať obsah premennej na rovnosť nule a podľa výsledku riadiť ďalší výpočet. Existujú dva testy:
»meno premennej« = 0,
resp.
»meno premennej« $\neq$ 0.

Poznamenávame, že

- rozsah čísel nie je zhora ohraničený,
- od premennej s hodnotou nula môžete odčítat jednotku; výsledkom je nula v premennej (t. j. jej hodnota sa nezmení),
- MMS nepoužíva žiaden príkaz vstupu ani výstupu. Všetky údaje potrebné k výpočtu musia byť v premenných dané vopred a výpočet skončí s výsledkami vo vopred určených premenných.

Modifikovaný Minského stroj sa programuje tak, že sa postupne vytvárajú predpisy na stále zložitejšie činnosti. Takýto postup predvedieme:

Činnosť »NULUJ X«

rob pokiaľ $X \neq 0$

rob X — koniec

koniec

Táto činnosť pozostáva len z elementárnych akcií, známych MMS. Avšak zo skôr definovaných činností možno skladať komplikovanejšie; popíšeme činnosť, ktorá presunie obsah premennej A do premennej B a súčasne premennú A vynuluje:

činnosť »PRESUŇ $A \rightarrow B$ «

rob NULUJ B; ... B sa dosadilo za X pomocou
skôr definovanej činnosti

pokiaľ $A \neq 0$

rob A—; B+ **koniec**

koniec

Takto by sme mohli pokračovať a naprogramovať veľmi zložité činnosti. Jazyk na zápis týchto činností stručne definujeme:

- príkazmi sú elementárne činnosti, napr. A—, G+ atď;
- podmienky smú byť len typu »premenná = 0« alebo »premenná $\neq 0$ «, logické operácie AND, OR atď. nie sú k dispozícii;
- z riadiacich štruktúr sú povolené nasledujúce:
- *zložený príkaz*

rob

⟨postupnosť príkazov oddelených bodkočiarkami⟩

koniec

- *príkaz vetvenia*

ak ⟨podmienka⟩ **tak** ⟨príkaz⟩ **inak** ⟨príkaz⟩

resp.

ak ⟨podmienka⟩ **tak** ⟨príkaz⟩

- dva *príkazy cyklu* (s podmienkou na začiatku a s podmienkou na konci)

pokiaľ ⟨podmienka⟩

⟨zložený príkaz⟩

Vykonávanie tela cyklu (zloženého príkazu, obsahujúceho povinne zátvorky **rob** — **koniec**) sa opakuje tak dlho, pokiaľ podmienka cyklu platí. Teda vykonávanie skončí vtedy, keď podmienka pri testovaní je prvýkrát neprav-

divá. Druhým príkazom cyklu je

opakuj

⟨zoznam príkazov, oddelených bodkočiarkami⟩

kým ⟨podmienka⟩

ktorého vykonávanie sa skončí, keď podmienka prvýkrát platí (t. j. návrat na začiatok cyklu sa uskutoční, keď podmienka neplatí).

Ak chcete použiť cyklus FOR, musíte ho simulovať vhodne definovanou činnosťou. (Činnosť definujeme názvom a zloženým príkazom, ktorý opisuje túto činnosť a odvoláva sa iba na skôr definované činnosti.)

Zadanie úloh

1. V premennej A je číslo X. Napíšte činnosť (jednu hlavnú a niekoľko pomocných), ktorá vypočíta celú časť z druhej odmocniny čísla X a uloží ju do A.
(Pozn.: Hodnoty ostatných premenných nás nezaujímajú.)
2. V premennej A je číslo P. Napíšte činnosť, ktorá do premennej B uloží hodnotu 1, ak je P prvočíslo, inak do B uloží nulu.

Riešenie

1. Prístupov k riešeniu môže byť veľmi mnoho. Predvedieme riešenie, založené na jednoduchom tvrdení:

$$1 + 3 + 5 + 7 \dots + (2N - 1) = N^2,$$

ktoré pre prirodzené N možno ľahko dokázať matematickou indukciou. V tomto vzťahu N je jednak počet

sčítancov a jednak »celá časť druhej odmocniny N^2 «.

To využijeme v nasledujúcom algoritme:

činnosť »do A daj celú časť odmocniny z A«

N := 0; ...počet sčítancov

I := 1; ...sčítanec

pokiaľ A $\neq$ 0

rob

N := N + 1;

odčítaj I od A;

I := I + 2;

koniec;

ak výsledok – odčítania – je – záporný **tak** N := N – 1;

A := N;

koniec;

Algoritmus nie je zapísaný v jazyku MMS. Na prepis do jazyka MMS potrebujeme dodefinovať činnosť »odčítaj A OD B«, ktorá okrem odčítania indikuje zápornosť výsledku.

To realizujeme tak, že pomocnú premennú CHYBA nastavíme na 1, ak výsledok odčítania je záporný (a teda výsledok, ktorý získame pri odčítaní, je chybný).

Činnosť »ODČÍTAJ A OD B«

rob NULUJ CHYBA;

NULUJ POM1;

pokiaľ A $\neq$ 0

rob ak B = 0 **tak rob** CHYBA+;

NULUJ A **koniec**

inak rob A–; B–;

POM1 – **koniec**

koniec;

PRESUŇ POM1 $\rightarrow$ A

koniec;

Teraz už lahko prepíšeme algoritmus do jazyka MMS:

Činnosť »DO A DAJ CELÚ ČASŤ ODMOCNINY Z A«

rob NULUJ N; ...N := 0

NULUJ I ; I+ ; ...I := 1

pokiaľ A $\neq$ 0

rob N+ ; ...N := N + 1

ODČÍTAJ I OD A;

...A := A - I

(s »chybou«)

I+; I+ ...I := I + 2

koniec;

ak CHYBA $\neq$ 0 **tak** N- ;

PRESUŇ N $\rightarrow$ A

koniec

2. Pri riešení druhého problému postupujeme podobne. Prvočíselnosť zisťujeme hľadaním deliteľa len medzi číslami menšími, nanajvýš rovnými ako celá časť druhej odmocniny A.

Činnosť »DO B DAJ 1, AK A JE PRVOČÍSLO, INAK DAJ 0«

rob X := A;

DO Y DAJ CELÚ ČASŤ ...to umožní

ODMOCNINY Z X; urýchliť výpočet

NULUJ B ; B+ ; ...B := 1

pokiaľ X $\neq$ 0

rob DO C DAJ A MODULO X;

X- ; ...zmenši X a presved-

či sa, či si nedelil
číslo 1

ak $X \neq 0$ **tak**

ak $C = 0$ **tak** ... keď nie, vyšetři
deliteľnosť

rob $B -$; **NULUJ** X **koniec**
... A nie je prvočíslo

koniec;

koniec;

Dodefinujeme činnosť na výpočet zvyšku po celočíselnom
delení.

Činnosť »DO C DAJ A MODULO B«

rob $POM1 := A$;

pokiaľ $POM2 \neq 0$

rob $C := POM2$; ... tu je výsledok
ODČÍTAJ B vtedy, keď zvyšok
OD $POM2$; je nenulový

koniec

ak $CHYBA = 0$... tu sa priradí
tak **NULUJ** C výsledok pri
nulovom zvyšku

koniec

a činnosť $Y := X$

Činnosť » $Y := X$ «

rob **NULUJ** Y ;

NULUJ $POM3$; ... pomocné premenné

pokiaľ $X \neq 0$

rob $X -$; $Y +$; $POM3 +$ **koniec**

PRESUŇ $POM3 \rightarrow X$

koniec

P - II - 1

Najmenším nasledovníkom prirodzeného čísla A nazveme najmenšie také číslo B , ktoré spĺňa nasledujúce podmienky:

- číslo B sa skladá z tých istých cifier ako A (t. j. B vznikne nejakou permutáciou cifier čísla A);
- číslo B je väčšie ako A .

Sformulujte (slovami) a dokažte algoritmus, ktorý pre dané prirodzené číslo A nájde najmenšieho nasledovníka. Predpokladajte, že číslo A je zadané v poli C »rozbité po cifrách«, teda, že

$$A = C(1) \cdot 10^{N-1} + C(2) \cdot 10^{N-2} + \dots + C(N-1) \cdot 10 + C(N).$$

Výsledok — číslo B stačí vytvoriť v tom istom poli.

Príklad. Pre číslo 123 542 je jeho najmenší nasledovník číslo 124 235.

Riešenie. Použijeme toto označenie:

- | | |
|---------------------|--|
| C , resp. C' | budú polia, v poli C' bude nasledovník C ; |
| $C(i)$ | označuje i -tý prvok poľa; |
| $C(i:j)$ | označuje postupnosť prvkov poľa $C(i)$, $C(i+1)$, ..., $C(j)$; |
| VYMEŇ (C, i, j) | bude pole, ktoré vznikne z poľa C výmenou prvkov $C(i)$ a $C(j)$; |
| $C(i:j) \leq C(k)$ | znamená, že všetky prvky z intervalu $C(i:j)$ sú menšie, nanajvýš rovné prvku $C(k)$; |

OTOČ $C(i:j)$ je operácia, ktorá zmení poradie prvkov v intervale $C(i:j)$ na opačné, t. j. na $C(j)$, $C(j-1)$, ..., $C(i)$.

Algoritmus pracuje takto:

Najprv nájdeme číslo i , pre ktoré platí

$$C(i) < C(i+1)$$

tak, aby $C(i+1:N)$ bola nerastúca postupnosť (t. j. i je najväčší index, pre ktorý platí vyššie uvedená nerovnosť). Keď takéto i neexistuje, potom postupnosť $C(1:N)$ je nerastúca a pre ňu najmenší nasledovník neexistuje. V tomto prípade algoritmus končí.

Rozoberme preto iba prípad, že také i existuje. Aby sme našli najmenšieho nasledovníka, musí platiť, že

$$C'(1:i-1) = C(1:i-1)$$

a prvok $C'(i)$ musí byť najmenší z prvkov v postupnosti $C(i+1:N)$, ktorý je väčší ako $C(i)$. Taký prvok určite existuje. Keď ich je viac, zoberieme ten, ktorý má najväčší index — označme ho j .

Teraz vymeníme v poli C i -tý a j -tý prvok operáciou $\text{VYMEŇ}(C, i, j)$, a takto ich vložíme do poľa C' . Teda postupnosť $C'(1:i)$ má väčšiu hodnotu ako $C(1:i)$, ale ide o »najmenšie možné zväčšenie«, aké sme mohli dosiahnuť.

Potrebuje už iba vytvoriť zvyšok postupnosti $C'(i+1:N)$. Mohlo by sa zdať, že čísla v tejto postupnosti treba usporiadať podľa veľkosti (aj to by totiž viedlo k riešeniu). Stačí však omnoho menej. Pretože i je najvyšší index,

pre ktorý platí

$$C(i) < C(i + 1),$$

znamená to, že všetky ostatné čísla sú usporiadané klesajúco. Stačí teda ich poradie obrátiť operáciou OTOČ $C(i + 1 : N)$.

Výsledný algoritmus má teda podobu:

1. Urči i a j .
2. VYMEŇ(C, i, j).
3. OTOČ $C(i + 1 : N)$.

V tomto prípade dostanete nasledovníka v tom istom poli.

P - II - 2

Nasledujúci program v jazyku Pascal počíta pre zadané prirodzené čísla A a B ich súčin:

```
program NASOB (input, output);  
var A, B, K, SÚČIN, POČET, PRÍRASTOK: integer;  
begin readln(A, B);  
    K := 0; SÚČIN := 0; POČET := 0;  
    PRÍRASTOK := 0;  
    while K < B do  
        begin  
            PRÍRASTOK := PRÍRASTOK + A;  
            POČET := POČET + 1;  
            K := K + POČET;  
            SÚČIN := SÚČIN + PRÍRASTOK  
        end;  
    while K ≠ B do  
        begin SÚČIN := SÚČIN - A;
```

$K := K - 1$

end;

writeln (SÚČIN)

end

Ten istý program napíšeme aj v jazyku Basic:

```
10 REM PROGRAM NASOBENIA
20 INPUT A, B
30 K = 0 : SUCIN = 0 : POCET = 0 :
   PRIRASTOK = 0
40 IF K ≥ B THEN GOTO 100
50   PRIRASTOK = PRIRASTOK + A
60   POCET = POCET + 1
70   K = K + POCET
80   SUCIN = SUCIN + PRIRASTOK
90 GOTO 40
100 REM KONIEC PRVÉHO CYKLU
110 IF K = B THEN GOTO 150
120   SUCIN = SUCIN - A
130   K = K - 1
140 GOTO 110
150 PRINT SUCIN
```

Program pracuje tak, že v prvom cykle (v Basicu riadky 40–90) sa vypočíta súčin $K \cdot A$, kde $K \geq B$, a v druhom cykle sa robí korekcia na hodnotu $B \cdot A$ niekoľkonásobným odčítaním A od premennej SÚČIN.

Prirodzené číslo B_0 nazveme najhorším prípadom, ak pre zadané ľubovoľné A a $B = B_0$ platí po skončení prvého cyklu pri realizácii programu na počítači

$$K = B + \text{POČET} - 1.$$

Inak povedané, pri poslednom pripočítavaní

SÚČIN : = SÚČIN + PRÍRASTOK

sme hodnotu súčinu »prestrelili« najviac, ako sme mohli. Najhoršími prípadmi sú napríklad čísla 4 a 4 657.

a) Vyjadrite explicitne (tj. nejakým vzorcom) všetky najhoršie prípady.

b) Nech B je najhorší prípad. Nazvime S(B) počet aritmetických operácií (t.j. počet skutočne vykonaných sčítaní a odčítaní), ktoré sa vykonajú pri výpočte podľa programu pre ľubovoľné A a pevné B. (Všimnite si, že počet operácií nezávisí od A.) Vyjadrite S(B) ako funkciu B.

Riešenie. Uvedme najprv niekoľko prípravných úvah:

1. Pre priebeh výpočtu sú významné zmeny hodnôt premennej K. Hodnota K však vzniká ako súčet

$$K = 1 + 2 + 3 + \dots + n \text{ pre } n = 1, 2, \dots$$

2. Výpočet prvého cyklu skončí vtedy, keď $K \geq B$.

3. Najväčší počet krokov späť v druhom cykle treba vykonať pre také B_0 , pre ktoré z posledného prírastku K musíme odpočítať $(n - 1)$ -krát.

a) Z (1) a (3) vyplýva, že najhorší prípad nastáva pri číslach tvaru:

$$B_0 = (1 + 2 + 3 + \dots + n) - (n - 1) \quad (*)$$

$$B_0 = (1 + 2 + 3 \dots + (n - 1)) + 1$$

$$B_0 = \frac{n \cdot (n - 1)}{2} + 1 = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

b) Keď sa teraz vrátíme ku vzťahu (*) a rozoberieme význam jeho členov, vidíme, že prvých n členov súčtu vyjadruje prírastky K v jednotlivých krokoch prvého cyklu (t. j. prvý cyklus sa opakuje presne n -krát). Posledný člen je zhodný s počtom opakovaní druhého cyklu. Je teda treba určiť hodnotu n v závislosti od B .

Z tvrdení 1 a 2 vyplýva nerovnica

$$1 + 2 + 3 + \dots + n \geq B,$$

ktorej najmenšie kladné celočíselné riešenie (ak existuje) udáva tú hodnotu n , pri ktorej prvý cyklus končí. Hodnota o jednotku menšia je potom počet opakovaní druhého cyklu pre najhorší prípad. Po úpravách dostávame

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2} \geq B$$

$$n^2 + n - 2B \geq 0$$

$$n = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1 + 8B}}{2} \right\rceil,$$

kde $[x]$ je horná celá časť čísla x .

Pretože prvý cyklus obsahuje štyri sčítania a druhý cyklus dve odčítania, tak hľadaná funkcia $S(B)$ má tvar

$$S(B) = 4 \cdot n + 2 \cdot (n - 1) = 6 \cdot \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1 + 8B}}{2} \right\rceil - 2.$$

Pre dostatočne veľké B stačí uvádzať približnú hodnotu

$$S(B) \doteq 3 \cdot \sqrt{1 + 8B}.$$

P - II - 3a

Napište program v ľubovoľnom vyššom programovacom jazyku, ktorý prečítá postupnosť zloženú z núl a jedničiek, ktorá je ukončená číslom 2. Program vypíše »ÁNO«, ak postupnosť obsahovala párny počet núl a zároveň nepárny počet jedničiek. V opačnom prípade program vypíše »NIE«.

Na program sa kladie jedno podstatné obmedzenie: Smie sa použiť len jediná premenná Z, v ktorej je vždy uložená hodnota jediného načítaného čísla (0, 1 alebo 2). Obsah premennej Z sa môže meniť len tým spôsobom, že sa do nej zo vstupu prečíta ďalšie číslo. Čísla sa môžu čítať len v tom poradí, v akom sú zapísané v postupnosti, t. j. nie je dovolené vracat sa k číslam už raz prečítaným, ani ich preskakovať.

Pre jednoduchosť predpokladajte, že čísla vstupujú zapísané vždy jedno v jednom riadku. Pritom vstupná postupnosť neobsahuje iné čísla než 0, 1 a 2. Program preto môže skončiť svoju činnosť, keď prečíta znak rôzny od nuly a jednotky.

Príklady. Pre postupnosť 0011011012 (ktorú sme pre úsporu miesta zapísali v jednom riadku) program vypíše »ÁNO«. Pre postupnosť 0011002 program vypíše »NIE«, pre postupnosť 1112 program vypíše »ÁNO«, lebo aj nula je párne číslo.

Riešenie. Algoritmus, ktorý spracováva vstupnú postupnosť, sa nachádza vždy v jednom zo štyroch možných stavov:

1. Doposiaľ načítal párny počet núl a párny počet jednotiek.
 2. Doposiaľ načítal párny počet núl a nepárny počet jednotiek.
 3. Doposiaľ načítal nepárny počet núl a nepárny počet jednotiek.
 4. Doposiaľ načítal nepárny počet núl a párny počet jednotiek.
- Vzájomné prechody medzi týmito štyrmi stavmi sa uskutočňujú v závislosti na tom, či sa načíta nula alebo jednotka. Ak však načítame číslo 2, tak »ÁNO« vytláčime iba v prípade, keď sa práve nachádzame v stave č. 2. V ostatných prípadoch vypíšeme »NIE«. Z toho vyplýva i činnosť nasledujúcich programov.

Program v Basicu:

```

10 INPUT Z : REM STAV 1
11 ON Z + 1 GOTO 40, 20, 200
20 INPUT Z : REM STAV 2
21 ON Z + 1 GOTO 30, 10, 100
30 INPUT Z : REM STAV 3
31 ON Z + 1 GOTO 20, 40, 200
40 INPUT Z : REM STAV 4
41 ON Z + 1 GOTO 10, 30, 200
100 PRINT »ÁNO«
101 STOP
200 PRINT »NIE«
201 STOP

```

Program v Pascale:

```

program POSTUPNOST(input, output);
var Z: integer;
procedure S2; forward;
procedure S3; forward;
procedure S4; forward;
procedure S1;

```

```

begin readln(Z);
    case Z of 0: S4; 1: S2; 2: writeln(»NIE«) end
end;
procedure S2;
begin readln(Z);
    case Z of 0: S3; 1: S1; 2: writeln(»ÁNO«) end
end;
procedure S3;
begin readln(Z);
    case Z of 0: S2; 1: S4; 2: writeln(»NIE«) end
end;
procedure S4;
begin readln(Z);
    case Z of 0: S1; 1: S3; 2: writeln(»NIE«) end
end;
begin
    S1
end.

```

P - II - 3b

Naprogramujte pre Modifikovaný Minského stroj (viď P - I - 4) nasledujúcu úlohu:

V premenných A, B, C sú prirodzené čísla. Napište činnosť »triedenie«, ktorá do premenných A, B, C uloží takú permutáciu ich pôvodných hodnôt, že bude platiť

$$A \leq B \leq C,$$

teda, že na konci výpočtu budú ich hodnoty usporiadané vzostupne.

(Využijeme aj činnosti, definované pri riešení úlohy P - I - 4.)

```
rob POMX := X;      ...uložíme pôvodné
                     ...hodnoty X a Y
```

ODČÍTAJ X OD Y;

$$\mathbf{a} \mathbf{k} \text{ CHYBA} = 0$$

tak rob $X := POMX; \left\{ \begin{array}{l} \dots \text{ponechaj pôvodné} \\ Y := POMY \end{array} \right\}$ hodnoty

koniec

inak rob $Y := POMX;$ $X := POMY$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} Y := POMX \\ X := POMY \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} \dots \text{vymeň obsahy} \\ \text{premenných} \end{array}$

koniec

koniec

Pomocou tejto činnosti lahko definujeme činnosť UTRIEĎ, ktorá usporiada obsahy všetkých troch premenných:

Činnost' »UTRIEĐ A B C«

$$\mathbf{rob} \text{ ZORA}\check{\mathbf{D}} \text{ A B; } \dots \mathbf{A} \leq \mathbf{B}$$

ZORAĐ A C; ...A ≤ C

ZORAĐ B C; ...B ≤ C

koniec

Lahko sa možno presvedčiti, že teraz plati

$$A \leq B \leq C.$$

P - III - 1

Dané sú dve prázdne nádoby. Prvá má objem M litrov, druhá N litrov, kde M a N sú prirodzené čísla. Máme k dispozícii neobmedzený zdroj vody.

Povolené sú nasledujúce operácie:

NAPLNĚ I,

kde $I = 1$ alebo 2 , znamená naplniť vodou zo zdroja I -tú nádobu až po okraj.

PRELEJ z I do J,

kde $I \neq J$, pričom $I, J = 1$ alebo 2 , znamená preliať obsah I -tej nádoby do J -tej tak, že buď J -tú nádobu naplníme až po okraj (ak je v I -tej dostatok vody), alebo I -tú nádobu úplne vyprázdňujeme (ak je v nej menej).

VYLEJ I,

kde $I = 1$ alebo 2 , znamená vyliť obsah I -tej nádoby do kanála.

Postupom prelievania nazveme ľubovoľnú konečnú postupnosť zloženú z vyššie uvedených operácií. Určite:

a) Pre aké prirodzené čísla M, N a K existuje taký postup prelievania, že po jeho vykonaní zostane v niektorej z nádob presne K litrov vody?

b) Zostavte algoritmus, ktorý pre zadané prirodzené čísla M, N a K navrhne taký postup prelievania, že po jeho vykonaní ostane v niektorej nádobe práve K litrov vody. Ak taký postup existuje, tak ho algoritmus vypíše a na jeho konci uvedie

VÝSLEDOK JE V NÁDOBE I.

Ak taký postup neexistuje, algoritmus vydá správu

POSTUP PRELIEVANIA NEEEXISTUJE!

Príklad. Pre $M = 9$, $N = 5$ a $K = 2$ je postup nasledujúci:

Príkaz	Obsah nádob	
	1.	2.
NAPLNŇ 1	9	0
PRELEJ 1 2	4	5
VYLEJ 2	4	0
PRELEJ 1 2	0	4
NAPLNŇ 1	9	4
PRELEJ 1 2	8	5
VYLEJ 2	8	0
PRELEJ 1 2	3	5
VYLEJ 2	3	0
PRELEJ 1 2	0	3
NAPLNŇ 1	9	3
PRELEJ 1 2	7	5
VYLEJ 2	7	0
PRELEJ 1 2	2	5
VÝSLEDOK JE V NÁDOBE 1		

Riešenie. Najprv urobme niektoré jednoduché úvahy, ktoré sú na prvý pohľad zrejmé a umožňujú skrátiť dĺžku algoritmu:

1. Dve operácie—NAPLNĚNÍ a VYLEJ—zanechajú v nádobách maximálny, resp. nulový obsah. Z toho vyplýva, že keď chceme v niektorej nádobe dosiahnuť iný (netriviálny) počet litrov vody, nesmieme do tejto nádoby nalievať zo zdroja, resp. vylieváť jej (netriviálny) obsah do kanála.
2. Zbytočné je prelievať vodu z jednej nádoby do druhej a zase naspäť.
3. Nemôže sa stať, že by obidve nádoby obsahovali netriviálny počet litrov vody. (Po VYLEJ a NAPLNĚNÍ je to zrejmé, operáciou PRELEJ buď jednu nádobu naplníme až po okraj, alebo druhú celkom vyprázdňujeme.)
4. Výsledné množstvo K litrov vody máme získať v jednej z nádob. Nutnou podmienkou existencie riešenia preto bude platnosť vzťahu » K je menšie, nanajvýš rovné väčšiemu z čísel M a N «.

Z toho vyplýva, že účelné využitie nádob je také, že jedna (a to napríklad väčšia) bude slúžiť iba na naberanie vody zo zdroja a na prelievanie do druhej a druhá iba na vylievanie do kanála a na prijímanie vody z prvej.

Bez újmy na všeobecnosti predpokladajme, že $M \geq N$. Pochopiteľne, nádoba s obsahom M litrov bude tá, do ktorej budeme nalievať, nádoba s obsahom N litrov tá, z ktorej budeme vylieváť vodu do kanála. Povedané inak, hľadáme čísla x a y také, že po x naliatiach vody do nádoby M a po y vyliatiach z nádoby N budeme mať presne K litrov vody. To vyjadruje napríklad vzťah

$$M \cdot x - N \cdot y = K$$

z riešenia Marcela Polakoviča, G. A. Markuša, Bratislava.

$$\begin{aligned}M.x &= N.y + K \\M.x &= K \pmod{N} \\x &= K.M^{-1} \pmod{N}\end{aligned}$$

kde M^{-1} je inverzný prvok k M v grupe zvyškových tried modulo N . Taký prvok existuje pre všetky K iba vtedy, keď M a N sú nesúdeliteľné, inak existuje len pre tie K , ktoré sú deliteľné $\text{NSD}(M, N)$. To je vlastne odpoveď na prvú otázku.

Naznačili sme už i optimálny algoritmus. Nalievať treba vždy do väčšej nádoby. Z nej potom prelievať vodu tak dlho do menšej, kým sa väčšia nevyprázdni (menšiu, keď sa zaplní, pochopiteľne treba vyliť), alebo kým vo väčšej nebude presne K litrov vody. Postup opakujeme a pritom sústavne sledujeme počet litrov vody vo väčšej nádobe — v nej bude totiž na konci výsledok.

Existuje ešte jeden možný, veľmi podobný postup, ktorý spočíva v prelievaní vody opačným smerom — z menšej nádoby do väčšej. Samozrejme, menšia nádoba sa pri úplnom vyprázdnení naplní zo zdroja, väčšiu po úplnom naplnení vylievame. Pre každú trojicu K, M, N , pre ktorú riešenie existuje, je možné použiť obidva postupy. Pre niektoré trojice vedie rýchlejšie k výsledku prvý postup, pre niektoré druhý.

Prakticky všetky správne riešenia odhalili súvislosť medzi postupom prelievania a deliteľnosťou a viac-menej sledovali niektorý z uvedených algoritmov.

Daný je algoritmus, ktorého vstupom sú prirodzené čísla A a B a výstupom ich súčin. Najprv ho uvedieme v Pascale:

```

program CELOŠTÁTNE KOLO (input, output);
var A, B, K, SÚČIN, POČET, PRÍRASTOK: integer;
begin readln(A, B);
      K := 0; SÚČIN := 0;
      POČET := 1; PRÍRASTOK := A;
      while K  $\neq$  B do
        if K + POČET  $\leq$  B
          then begin K := K + POČET;
                    POČET := POČET + POČET;
                    SÚČIN := SÚČIN +
                      PRÍRASTOK;
                    PRÍRASTOK :=
                      PRÍRASTOK + PRÍRASTOK
          end
        else begin POČET := 1;
                  PRÍRASTOK := A
        end;
      writeln(SÚČIN)
end

```

Verzia v Basicu:

```

10 INPUT A, B
100 K = 0 : SÚČIN = 0 : POČET = 1 :
    PRÍRASTOK = A
110 IF K = B THEN GOTO 180
120 IF K + POČET > B THEN GOTO 160

```

```

130      K = K + POČET : POČET = POČET +
      POČET
140      SÚČIN = SÚČIN + PRÍRASTOK :
      PRÍRASTOK = PRÍRASTOK + PRÍRASTOK
150      GOTO 170
160      POČET = 1 : PRÍRASTOK = A
170 GOTO 110 : REM NÁVRAT NA ZAČIATOK
      CYKLU
180 PRINT SÚČIN

```

Najhorším prípadom nazveme výpočet pre takú hodnotu B_0 , pri ktorej sa vetva **else** podmieneného príkazu v cykle (v Basicu riadok 160) vykoná viackrát než pre ktorékoľvek $B < B_0$.

a) Vyjadrite explicitne (t. j. nejakým vzorcom) všetky tie hodnoty B_0 , pre ktoré bude výpočet algoritmu najhorším prípadom.

b) Vyjadrite explicitne (t. j. ako funkciu B) skutočný počet prechodov

- vetvou **then** (riadky 130 a 140)
- vetvou **else** (riadok 160)

podmieneného príkazu v najhoršom prípade.

Poznamenávame, že počet prechodov cyklom nezávisí od hodnoty A .

Riešenie. Najprv ukážeme riešenie časti a). Z neho dobre vidieť aj postup, ktorý umožní vyriešiť časť b).

a) Pre priebeh výpočtu sú charakteristické zmeny premennej $POČET$. Obsahom sú to vždy mocniny dvojky, a to v takomto poradí:

$$1, 2, 4, 8, \dots, 2^i, 1, 2, 4, 8, \dots, 2^j, 1, 2, \dots$$

Pritom musí vždy platiť $i \geq j$. Pritom všade, okrem posledných dvoch členov, platí ostrá nerovnosť $i > j$. Keby totiž $j = i + 1$, tak by člen 2^{i+1} musel nasledovať hneď po prvom člene 2^i . Z toho súčasne vyplýva, že súčet zvyšných členov postupnosti po 2^i musí byť menší ako 2^{i+1} (pretože inak by sme opäť mohli 2^{i+1} pripočítať po 2^i). A pretože

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^i = 2^{i+1} - 1,$$

rovnosť

$$i = j$$

môže nastať len pri posledných dvoch i a j , lebo vtedy (a len vtedy) nenásleduje po 2^j ďalšia jednotka.

V dôsledku toho budú najhoršími prípadmi tie hodnoty B_0 , pri ktorých K vzniká ako súčet

$$\begin{aligned} B_0 = & (1 + 2 + 4 + \dots + 2^i) + \\ & + (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{i-1}) + \\ & + (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{i-2}) + \\ & + \dots + (1 + 2) + 1 + 1. \end{aligned} \quad (*)$$

Teda

$$\begin{aligned} B_0 = & (2^{i+1} - 1) + (2^i - 1) + (2^{i-1} - 1) + \dots + \\ & + (2^2 - 1) + (2^1 - 1) + 2^0. \end{aligned}$$

Tento výraz obsahuje $i + 1$ zátvoriek. Sčítajme zvlášť ich prvé členy (a pridajme k nim 2^0) a zvlášť druhé členy:

$$\begin{aligned} B_0 &= (2^{i+1} + 2^i + 2^{i-1} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0) - (i + 1) = \\ &= (2^{i+2} - 1) - (i + 1) = 2^{i+2} - (i + 2), \end{aligned}$$

kde $i = 0$. Po vhodnej substitúcii môžeme vzťah pre všetky najhoršie prípady prepísať do tvaru

$$B_0 = 2^n - n, \text{ kde } n \geq 2.$$

Zo vzorca (*) vidieť veľmi pekne i priebeh výpočtu, takže sa oň budeme opierať v riešení časti b) tejto úlohy.

b) Krátka analýza programu ukáže, že

- počet prechodov vetvou **else** je rovný počtu jednotiek vo vzorci (t. j. $i + 2$),
- počet prechodov vetvou **then** je rovný počtu sčítancov vo vzorci, t. j.

$$\left(\sum_{k=1}^{i+1} k \right) + 1 = \frac{(i+1)(i+2)}{2} + 1 = \frac{i^2 + 3i + 4}{2}.$$

Veľa účastníkov zbytočne stratilo body na tom, že oba vzorce ponechali v takomto tvare. Text úlohy bol totiž formulovaný tak, že výsledok mal vyjadrovať počet prechodov týmito vetvami v závislosti od (teda ako funkciu) premennej B . A pretože sme vyššie ukázali, že

$$B = 2^{i+2} - (i + 2)$$

pre najhoršie prípady, tak môžeme (približne) tvrdiť, že pre dostatočne veľké i platí

$$B \doteq 2^{i+2}.$$

Takže počet vykonaní vetvy **else** je zhruba

$$i \doteq \log_2 B$$

a počet vykonaní vetvy **then**

$$\frac{1}{2} \log_2^2 B.$$

(V druhom prípade sme zanedbali lineárny a absolútny člen.) Oba vzorce je možné určiť úplne presne. Pri analýze algoritmu sa však obyčajne uspokojujeme s dostatočne presným priblížením.

P - III - 3

a) Napíšte program v ľubovoľnom vyššom programovacom jazyku, ktorý prečíta ľubovoľnú postupnosť pozostávajúcu z čísel 1, 2 a 3, ukončenú číslom 0. Program vypíše »ÁNO«, keď postupnosť obsahovala rovnaký počet čísel 1, 2 aj 3. V opačnom prípade program vypíše »NIE«.

Na program sa kladie jedno podstatné obmedzenie. Smiete

použiť len dve premenné Z a P . V premennej Z je vždy uložená hodnota jediného načítaného čísla (0, 1, 2 alebo 3). Obsah Z sa môže meniť len tým spôsobom, že sa do nej zo vstupu prečíta ďalšie číslo. Čísla sa môžu čítať len v tom poradí, v akom sú zapísané v postupnosti. Teda nie je dovolené čísla preskakovať ani vracat sa k prv prečítaným. Druhá celočíselná premenná P obsahuje ľubovoľne veľké celé číslo. Povolené sú všetky aritmetické operácie s premennými a konštantami.

Predpokladajte, že čísla vstupujú napísané vždy jedno v riadku. Pritom vstupná postupnosť neobsahuje iné čísla než 0, 1, 2 a 3, teda program musí ukončiť činnosť, keď prečíta číslo 0. Ďalej predpokladajte, že na vstupe môže byť vopred neohraničený počet čísel.

Príklady. Pre postupnosť 1232231310 (pre úsporu miesta sme čísla zapísali do riadku) program vypíše »ÁNO«. Pre postupnosť 23320 program vypíše »NIE«. Pre prázdnu postupnosť 0 program vypíše »ÁNO«.

b) Zovšeobecnite riešenie predchádzajúcej úlohy takto:

Program prečíta ľubovoľnú postupnosť zloženú z čísel 1, 2, 3, ..., N , ktorá je ukončená číslom 0. Počet vstupujúcich čísel N je vopred známa konštanta (známa aj programátorovi). Program zistí, či postupnosť obsahuje rovnaký počet každého z čísel 1 až N . Obmedzenie na 2 premenné Z a P zostáva presne to isté.

Príklady. Pre postupnosť čísel 1 až 5: 44351215320 program, zostavený pre $N = 5$, vypíše »ÁNO«, program, zostavený pre $N = 6$, vypíše »NIE« (podobne programy pre $N = 7$, 8, ...).

Riešenie. Najčastejším riešením tejto úlohy bolo riešenie založené na myšlienke prvočíselného rozkladu prirodzených čísel.

Ako je známe, každé prirodzené číslo sa dá jediným spôsobom rozložiť na súčin prvočísel. Pretože máme iba jednu celočíselnú premennú, bude v P uložené číslo, ktoré vytvoríme z uvažovanej postupnosti súčinom prvočísel. V časti a) stačia prvé tri, v časti b) potrebujeme prvých N:

$$q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 5, \dots, q_N = N\text{-t}é \text{ prvočíslo}$$

Hodnotou premennej P bude číslo, ktoré vznikne tak, že po načítaní čísla i do premennej Z vynásobíme obsah P i -tým prvočíslom. Teda prvá časť programu bude mať v Pascale tento tvar:

```
begin readln(Z); P := 1;
    while Z  $\neq$  0 do
        begin if Z = 1 then P := 2*P;
            if Z = 2 then P := 3*P;
            if Z = 3 then P := 5*P;
            ... ..
            if Z = N then P :=  $q_N$ *P;
        readln(Z)
    end
```

V pôvodnej postupnosti sa nachádza rovnaký počet čísel 1, 2, 3, ..., N iba v tom prípade, keď výsledné číslo P je deliteľné číslom

$$2 * 3 * 5 * \dots * q_N.$$

Teda na konci programu (po výstupe z cyklu) stačí skontrolovať deliteľnosť v príkaze

```
if P MOD (2 * 3 * 5 * ... * qN) = 0
  then writeln ('Postupnosť mala požadovaný tvar.')
  else writeln ('Postupnosť nemala požadovaný tvar.')
end
```

V skutočnosti však riešenie nevyžaduje, aby čísla v ňom vystupujúce boli prvé prvočísla, dokonca ani to, aby to boli prvočísla. Stačí, aby boli relatívnymi prvočíslami (teda, aby ich najväčší spoločný deliteľ bol pre všetky dvojice rovný 1). Toto využil napr. Petr Veselý z gymnázia v Jihlave. Vo svojom programe použil prvočísla 3, 5 a 7 pri riešení časti a). Vďaka tomu namiesto zložitého rozhodovania mohol použiť jediný priradovací príkaz

$$P := P * (2 * Z + 1).$$

Zaujímavú (i keď nekorektnú) obmenu vyššie uvedeného riešenia použil Jan Hřebíček z gymnázia vo Valašskom Meziříčí. Ignoroval požiadavku celočíselnosti P a pripustil sčítanie nekonečne dlhých reálnych čísel (s absolútnou presnosťou). Takto mohol vytvárať hodnotu P sčítaním (!) vhodných iracionálnych čísel. V prvej časti úlohy použil napr. 1, π , e . V tomto prípade je v postupnosti rovnaký počet čísel vtedy, keď vytvorené číslo P je celočíselným násobkom súčtu iracionálnych čísel (t. j. $1 + \pi + e$ v jednoduchšom prípade).

Dalšie správne riešenie využíva hĺbku rekurzcie ako pomocnú premennú popri premennej P . Je však vhodné iba pre postupnosti z troch čísel. Takto riešili úlohu dvaja súťažiaci. Jedným z nich bol Róbert Germič z gymnázia

v Žiline. Uvádzame ukážku jeho riešenia. Riešenie využíva fakt, že hoci v Basicu rekurzia nie je oficiálne povolená, existencia systémového zásobníka ju umožňuje. Tu je program:

```
99 LET P = 0
100 INPUT Z
110 IF Z = 1 THEN GOSUB 200 : GOTO 100
120 IF Z = 2 THEN GOSUB 300 : GOTO 100
130 IF Z = 3 THEN P = P + 1 : GOTO 100
140 IF P = 0 THEN PRINT »ANO« : STOP
150 PRINT »NIE« : STOP
200 INPUT Z
210 IF Z = 1 THEN GOSUB 200 : GOTO 200
220 IF Z = 2 THEN P = P - 1 : RETURN
230 IF Z = 3 THEN P = P + 1 : GOTO 200
240 PRINT »NIE« : STOP
300 INPUT Z
310 IF Z = 1 THEN P = P - 1 : RETURN
320 IF Z = 2 THEN GOSUB 300 : GOTO 300
330 IF Z = 3 THEN P = P + 1 : GOTO 300
340 PRINT »NIE«
```

Ak by takýto program nebol písaný s komentárom, bolo by asi vylúčené zistiť, čo vlastne autor zamýšľal. Zvlášť záhadné by boli dvojice príkazov

GOSUB i : GOTO i

v riadkoch 210 a 320. Autor však podal jednoduché vysvetlenie:

V premennej P si budeme pamätať rozdiel medzi počtom trojok a dvojíc (1, 2). Ak je v niektorom okamihu

počet dvojiek väčší ako počet jednotiek, program pokračuje od príkazu 300 (bude hľadať k prevyšujúcej jednotke dvojku). V prípade prevyšujúcej dvojky bude k nej hľadať jednotku (teda bude v časti za príkazom 200). Z týchto častí sa vráti iba vtedy, keď sa počty jednotiek a dvojok vyrovnajú do časti za príkazom 100. Ak program skončí v časti 100 a $P = 0$, tak je počet dvojíc (1, 2) rovnaký ako počet trojok. V každom inom prípade sa po prečítaní nuly vytlačí »NIE«.

P - III - 4

Naprogramujte pre Modifikovaný Minského stroj (definícia viď príklad P - I - 4) nasledujúcu úlohu:

V premenných A a K sú prirodzené čísla. Napíšte činnosť »CIFRA K A«, ktorá do premennej D uloží K-tú cifru čísla A. Počet K počítame od začiatku čísla A.

Príklad. Činnosť

»CIFRA 2 5728«

vloží do premennej D hodnotu 7.

Riešenie. Táto úloha dala opravovateľom celoštátneho kola najviac práce. Málokto z účastníkov si dal totiž dosť námahy s komentármi k programom, väčšina z nich sa sústredila iba na príkazovú časť. Ako sme už ukázali pri riešení minulej úlohy, takto vytvorené texty môžu byť priam »nedešifrovateľné« bez podrobnejšieho popisu. Pochopiteľne, nezrozumiteľnosť textu sa prejaví stratou bodov pri hodnotení riešenia.

Výber Modifikovaného Minského stroja ako úlohy, ktorá prechádzala systematicky celým ročníkom, však nebol ná-

hodný. Primitívne prostriedky na zmenu hodnôt premenných, jediná možnosť testovať ich (na nulu) totiž sledovali dôležitý cieľ – analyzovať schopnosť súťažiacich vybudovať si systém podprogramov, zaručujúcich úplné vyriešenie úlohy. Pritom iba málo súťažiacich si uvedomilo, že systém podprogramov sa nedá účelne budovať od najjednoduchších (na MMS realizovateľných) »programíkov«, že totiž cielavedomý postup je obyčajne presne opačný. Uvedomili si to však tí najlepší. Napríklad Alexander Szabari z gymnázia v Košiciach začal svoje riešenie slovami:

»Keď máme vziať K -tú cifru od konca, vtedy je program veľmi jednoduchý. Preto náš program bude pozostávať z dvoch väčších častí:

1. výmena cifier čísla K (napr. z čísla 5138 urobíme 8315),
2. zistenie K -tej cifry od konca.

Obe časti spolu umožňujú nájsť K -tú cifru od začiatku.«

Je teda jasné, že hľadaný program môže mať tvar

ČINNOST' »CIFRA K A«

rob PREVRÁŤ A;

URČI K A

koniec

Skutočnosť, že ani jedna z vnútorných činností nie je zatiaľ definovaná, síce môže vadíť MMS pri výpočte, nie však človeku pri rozmyšľaní!

V takto navrhnutom programe je viac-menej jedno, ktorú jeho časť budeme upresňovať skôr – sú totiž nezávislé. Začneme hociktorou a ďalej ju rozkladáme, až dovtedy, kým všetky činnosti vyjadríme príkazmi MMS. Pritom sa môže stať, že podprogramy vytvorené v jednej časti sa dajú priamo alebo po miernej úprave použiť i v inej časti. Aby sme ukázali, že

na poradi rozvíjania činností naozaj nezáleží, začneme pod-programom pre URČI K A, uvedeným ako druhý.

Poznamenávame, že kým spôsob zápisu programu bol presne definovaný, spôsob jeho komentovania bol ponechaný na ľubovôli autora. V zásade možno použiť tieto spôsoby:

- a) najprv uviesť program a vzápätí komentár,
- b) najprv si (slovne) určiť cieľ a potom ho realizovať programom,
- c) paralelne sprevádzať program komentármi,
- d) napísať program v známejšom jazyku a potom ho »preložiť«.

Postupne uvedieme príklady na všetky spôsoby.

Program URČI najprv zapíšeme v tvare

ČINNOST' »URČI K A«

rob K —;

pokiaľ $K \neq 0$

rob DEL A 10;

K —

koniec;

MOD A 10;

PRESUŇ A D

koniec

a vzápätí ho popíšeme komentárom:

»Každé číslo má aspoň jednu cifru. Preto sme najprv zmenšili K o 1, aby výsledok testu vychádzal správne. Potom (pokiaľ hľadaná cifra nie je poslednou v čísle A) delíme A celo-číselne desiatimi, čím vždy odtrhneme momentálne poslednú cifru. Nakoniec vypočítame túto poslednú cifru ako $A(\text{mod } 10)$ a výsledok uložíme do premennej D.«

Našou ďalšou úlohou bude teda vytvoriť činnosti DEL a MOD. Začneme podprogramom pre DEL, ktorý uvedieme s komentárom na začiatku, vytyčujúcim cieľ programu:

Deliť na MMS môžeme iba pomocou odčítania. Teda delenie nahradíme úlohou »zistiť, koľkokrát možno 10 odčítať od čísla A«. Podiel budeme zhromažďovať v premennej Q (jej hodnotu zväčšíme o 1 po zmenšení A o 10). Pri hraničných hodnotách by však mohlo dôjsť k chybe (treba, aby vyšlo $10/10 = 1$), takže na začiatku zväčšíme A o 1 a na konci Q o 1 zmenšíme. Teda píšeme

ČINNOSŤ »DEL A 10«

rob NULUJ Q;

A +;

opakuj A-; A-; A-; A-; A-; A-; A-; A-;
A-; A-;

Q+;

kým A = 0;

Q-;

PRESUŇ Q → A

koniec

Z tohoto programu veľmi jednoduchou modifikáciou získame program na výpočet zvyšku po delení. Tento program uvedieme s komentárom, paralelným s programom.

ČINNOSŤ »MOD A 10«

rob A+; ... Jedno pričítanie kvôli hraničnému prípadu

opakuj PRESUŇ A → C; priradenie C := A

A-; A-; A-; A-; A-; A-; A-; A-;

A-; A-;

... Od A odčítame 10, v C je teraz $A + 10$.
Posledná cifra A sa odčítaním desiatich
nezmení.

kým $A = 0$;

C—; ... V A je nula, v C bolo číslo od 1 do 10.
Teraz sme vyrovnali počiatočné zväčšenie
A o 1.

PRESUŇ C $\rightarrow$ A

... V A bude výsledok.

koniec

Tým sme dokončili rozklad činnosti URČI K A. Podobne
budeme postupovať i pri definícii činnosti PREVRÁŤ A.
V tomto prípade úlohu vyriešime najprv v známom progra-
movacom jazyku (v Pascale) a potom ho preložíme do jazyka
MMS a zohľadníme pritom jeho špecifiká.

Zmeniť poradie cifier v čísle na opačné môže tento pascalov-
ský program:

begin CHVOST := A MOD 10; ... posledná cifra
čísla A bude prvou
cifrou OPAK-u

OPAK := CHVOST;

A := A DIV 10;

... v A sú všetky cifry
okrem poslednej

while $A > 0$ **do**

begin CHVOST := A MOD 10;

... posledná cifra A

OPAK := (OPAK * 10) + CHVOST;

... prilep ju na koniec čísla OPAK

A := A DIV 10

... znovu odsekni poslednú cifru

end

end

Pri preklade nesmieme zabudnúť najmä na to, že MMS »ničí« obsahy premenných. Teda operácie MOD a DEL (ako sme ich definovali vyššie) nezachovávajú obsah premennej A. Preto vytvoríme program KOPÍRUJ A B, ktorý skopíruje A do B a pritom obsah A zachová (použitím tretej premennej). Takže tú istú myšlienku vyjadruje podprogram v jazyku MMS:

ČINNOSŤ »OBRÁŤ A«

```
rob KOPÍRUJ A B;      ... skopíruje obsah A do B
                        a zachová hodnotu A
MOD B 10;              ... v B bude posledná cifra A
PRESUŇ B OPAK;        ... realizuje
                        OPAK := A MOD 10
DEL A 10;              ... známy podprogram
pokiaľ A  $\neq$  0
    rob KOPÍRUJ A B;
        MOD B 10;
        PRILEP B OPAK;
                        ... realizuje OPAK :=
                        := (OPAK * 10) + B
        DEL A 10
    koniec;

PRESUŇ OPAK A          ... dá obrátenú hodnotu do A
koniec
```

Ostali už len dve nedefinované činnosti: KOPÍRUJ a PRI-
LEP. Na základe toho, čo sme povedali už skôr, však nemôže
byť problémom ich doplniť. (Naviac KOPÍRUJ A B je
zhodné s príkazom $B := A$ v úlohe P-I-4.)

Korespondenční seminář ÚV MO je jednou z forem péče o talentované žáky, zvláště pak o ty, kteří nemají možnost navštěvovat speciální školy se zaměřením na matematiku a pracovat v tamních seminářích. Tak až dosud nebyli přijímáni studenti pražských škol, protože mají možnost seznámit se s vybranými okruhy úloh na seminářích řešitelů MO.

K účasti v korespondenčním semináři pozvalo předsednictvo ÚV MO na základě návrhů KV MO a individuálního zájmu téměř 50 žáků, z nichž se přihlásilo 26 řešitelů z celé republiky:

Kraj	Stč	Jč	Zč	Sč	Vč	Jm	Sm	Zsl	Ssl	Vsl
Počet řešitelů	4	2	1	4	3	4	2	2	2	2

V průběhu 35. ročníku MO jim bylo zasláno pět sérií poměrně náročných úloh. Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Korespondenční seminář je řízen tajemníkem ÚV MO RNDr. Karlem Horákem, který se stará o výběr a přípravu úloh a provádí redakci komentářů. Opravu pak zajišťuje

několik pracovníků Matematického ústavu ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK v Praze (všichni jsou bývalí olympionici).

Pouze 13 řešitelů vydrželo až do posledního 5. kola. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli:

1. <i>Radek Adamec</i> (4, G Kroměříž)	84 bodů
2. <i>Igor Melicherčík</i> (4, G B. Bystrica)	81 bodů
3. <i>Dominik Munzar</i> (4, G kpt. Jaroše Brno)	71 bodů
4. <i>Libor Skříčka</i> (4, G kpt. Jaroše Brno)	62 bodů
5. <i>Marián Lukáč</i> (3, G Bánovce n. Bebr.)	56 bodů

Dále uvádíme znění všech zadaných úloh.

1. Posloupnosti a mnohočleny

1.1 Dokažte vztah

$$\operatorname{arccotg} u_1 = \operatorname{arccotg} u_2 + \operatorname{arccotg} u_3 + \dots,$$

kde $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ a $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$, $n \geq 2$.

1.2 Ukažte, že číslo

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} \cdot 1973 + \binom{n}{5} \cdot 1973^2 + \dots$$

je pro n přirozené násobkem čísla 2^{n-1} .

1.3 Ukažte, že posloupnost $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ určená podmínkami

$$v_n > 0,$$

$$v_n^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} v_{n-k} \quad \text{pro } n \in \{0, 1, \dots\}$$

je posloupností celých čísel.

1.4 Najděte zbytek při dělení mnohočlenu $(x + 1)^n$ mnohočlenem $(x - 1)^3$, kde n je přirozené číslo.

1.5 Ukažte, že mnohočleny p_n určené vztahy

$$p_1(x) = 1, p_2(x) = 1 + x,$$

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + xp_{n-2}(x), n \geq 3,$$

mají pro $n \geq 2$ všechny kořeny reálné.

1.6 Ukažte, že nenulový mnohočlen s celočíselnými koeficienty, který má kořeny $x = 1$ a $x = 2$, musí mít aspoň jeden koeficient menší než -1 .

1.7 Najděte všechny mnohočleny p (s reálnými koeficienty) takové, že pro všechna (reálná) x platí

$$p(x^2) + p(x)p(x + a) = 0.$$

Proveďte diskusi vzhledem k reálnému parametru a .

2. Planimetrie

2.1 Ke které ze stran trojúhelníku ABC je nejbližší průsečík jeho výšek, je-li $\alpha < \beta < \gamma$? A ke kterému vrcholu?

2.2 Vedme libovolným bodem P osy úhlu α trojúhelníku ABC kolmice PA_1 , PB_1 , PC_1 ke stranám BC , CA , resp. AB . Je-li R průsečík přímk PA_1 a B_1C_1 , dokažte, že přímka AR dělí stranu BC na dvě stejné části.

2.3 Na stranách trojúhelníku ABC jsou jako na základnách sestrojeny rovnoramenné trojúhelníky AB_1C , BA_1C , AC_1B . Dokažte, že kolmice vedené body A , B , C k odpovídajícím

přímkám B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 se protínají v jednom bodě.

2.4 Dokažte, že součet obsahů pěti trojúhelníků, které dostaneme z dvojic sousedních stran a úhlopříček konvexního pětiúhelníku, je větší než obsah celého pětiúhelníku.

2.5 Je-li tětíkový čtyřúhelník $ABCD$ takový, že tečny sestrojené k opsané kružnici v bodech A a C se protínají na přímce BD , pak

a) tečny v bodech B a D se protínají na přímce AC ;

b) osy vnitřních úhlů α a γ čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají na úhlopříčce BD .

Dokažte.

2.6 V ostroúhlém trojúhelníku ABC se osa úhlu α , těžnice na stranu AC a výška příslušná vrcholu C protínají v jednom bodě. Dokažte, že úhel BAC je větší než 45° .

2.7 Dva shodné obdélníky jsou umístěny v rovině tak, že jejich obvody se protínají v osmi bodech. Dokažte, že obsah společné části obou obdélníků je větší než polovina obsahu jednoho z nich.

3. Teorie čísel

3.1 Jaké nejmenší kladné hodnoty může nabývat součet tvaru

$$\varepsilon_1 \cdot 1^5 + \varepsilon_2 \cdot 2^5 + \varepsilon_3 \cdot 3^5 + \dots + \varepsilon_{1985} \cdot 1985^5,$$

kde $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$?

3.2 Dokažte, že součin pěti po sobě jdoucích přirozených čísel není úplným čtvercem.

3.3 Zlomek $\frac{3}{10}$ lze zapsat jako součet dvou kladných zlomků

s čitatelem 1 právě dvěma způsoby: $\frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} =$
 $= \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$. Kolika způsoby lze zapsat $\frac{3}{1984}$? Existuje čí-

slo n nesoudělné se třemi a takové, že $\frac{3}{n}$ lze zapsat právě
 1984 způsoby?

3.4 Necht p je liché prvočíslo a $a_1, a_2, \dots, a_{\frac{p+1}{2}}$ jsou
 vesměs různá přirozená čísla menší než p . Dokažte, že pro
 každé $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ existuje dvojice čísel a_i, a_j tak,
 že $a_i a_j \equiv k \pmod{p}$ (může být případně $i = j$).

3.5 Pro n přirozené označme $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ součet všech
 dělitelů čísla n (včetně 1 a n). Číslo m nazveme »bohatým«,
 jestliže pro každé $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ platí $\frac{\sigma(k)}{k} < \frac{\sigma(m)}{m}$.

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho »bohatých« čísel.

3.6 Označme $\omega(n)$ počet činitelů v rozkladu přirozeného
 čísla n na prvočinitele. Dokažte, že pro $m \geq 2$ existuje aspoň
 $\frac{m}{10}$ čísel $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ s vlastností $\omega(k) \equiv \omega(k+1)$
 $\pmod{2}$.

3.7 Dokažte, že rovnice

$$x^2 + y^2 = z^n$$

má v oboru přirozených čísel řešení pro každé přirozené n .

4. Kombinatorická geometrie

4.1 Uvnitř jednotkového čtverce je rozmístěno několik kružnic, které mají součet obvodů 10. Dokažte, že pak existuje přímka, která protíná alespoň čtyři z těchto kružnic.

4.2 Dokažte, že n bodů v rovině můžeme vždy pokrýt několika disjunktními kruhy, které budou mít součet průměrů menší než n , přičemž vzájemná vzdálenost každých dvou kruhů bude větší než 1. (Vzdáleností dvou kruhů rozumíme vzdálenost jejich nejbližších bodů.)

4.3 Čtvercový list papíru rozřízneme na dvě části (podle nějaké přímky). Jednu ze vzniklých částí opět rozřízneme atd. Jaký nejmenší počet řezů musíme učinit, abychom mezi vzniklými kusy našli právě sto dvacetíúhelníků?

4.4 Rozdělme každou stranu pravidelného trojúhelníku na n stejných částí a sestrojme jednotlivými body uvedeného dělení rovnoběžky se stranami trojúhelníku. Dostaneme tak rozdělení trojúhelníku na n^2 trojúhelníčků. Nazvěme »řetězem« takovou posloupnost trojúhelníčků, v níž se žádný trojúhelníček nevyskytuje dvakrát a každý následující má s předchozím společnou stranu. Jaký je největší možný počet trojúhelníčků v řetězu?

4.5 Předpokládejme, že vrcholy pravidelného n -úhelníku jsou obarveny několika barvami (každý jednou) tak, že vrcholy stejné barvy tvoří vrcholy pravidelného mnohoúhelníku. Dokažte, že mezi těmito mnohoúhelníky existují dva shodné.

4.6 Je dán čtverec a devět přímk. Nechť každá z devíti přímk dělí čtverec na dva čtyřúhelníky, jejichž obsahy jsou v poměru 2 : 3. Dokažte, že alespoň tři z těchto devíti přímk procházejí jedním bodem.

4.7 Na každém poli šachovnice je zapsáno jedno z čísel 1, 2, ..., 64, přičemž na různých polích jsou různá čísla. Pomocí jedné otázky můžeme (určením množiny polí) zjistit množinu čísel stojících na polích zvolené množiny. Jaký je nejmenší počet otázek potřebných k určení polohy jednotlivých čísel na šachovnici?

5. Nerovnosti a odhady

5.1 Necht rozdíl mezi největším a nejmenším z n reálných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ je d a necht součet $\sum_{i < j} |a_i - a_j|$ absolutních

hodnot všech $\binom{n}{2}$ rozdílů těchto čísel je s . Pak je

$$(n-1)d \leq s \leq \frac{n^2}{4}.$$

Dokažte.

5.2 Dokažte, že pro přirozená čísla $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ($n \geq 2$) platí

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} + \dots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} < \\ < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

5.3 Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami $|AB| = a$, $|CD| = b$. Sestrojme úsečku A_1B_1 , spojující středy úhlopříček lichoběžníku $ABCD$, dále sestrojme úsečku A_2B_2 , která spojuje středy úhlopříček lichoběžníku A_1B_1CD . podobně se-

strojíme úsečky A_3B_3 , A_4B_4 atd. Může se v posloupnosti délek úseček $(|A_kB_k|)$ vyskytnout nějaké číslo dvakrát? Bude tato posloupnost monotónní? Má uvedená posloupnost limitu?

5.4 Dokažte, že součet 45 čísel

$$\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ + \dots + \operatorname{tg} 173^\circ + \operatorname{tg} 177^\circ$$

je 45.

5.5 Jestliže pro čísla p_1, q_1, p_2, q_2 platí

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0,$$

pak mají kvadratické trojčleny

$$x^2 + p_1x + q_1, \quad x^2 + p_2x + q_2$$

reálné kořeny a mezi kořeny každého z nich leží kořen druhého trojčlenu. Dokažte.

5.6 Na kružnici je napsáno několik reálných čísel. Jestliže pro některá čtyři za sebou jdoucí čísla a, b, c, d platí $(a - d)(b - c) < 0$, pak smíme čísla b, c vyměnit. Dokažte, že vždy můžeme provést jen konečný počet takových operací.

5.7 Několik lidí pozorovalo v rozpětí t minut lezoucího hlemýžďe. Každý z nich ho pozoroval přesně 1 minutu a zjistil, že za tu dobu ulezl přesně 1 metr. Ani v jednom okamžiku nebyl hlemýžď »bez dozoru«. Jakou nejmenší a jakou největší dráhu mohl hlemýžď za uvedenou dobu t minut urazit?

27. mezinárodní matematická olympiáda

1. PRŮBĚH MMO

Dvacátá sedmá mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve Varšavě ve dnech 4. – 15. července 1986. Zúčastnilo se jí 210 soutěžících středoškoláků, kteří tu reprezentovali 37 zemí celého světa: Alžírsko, Austrálii, Belgii, Brazílii, Bulharsko, Československo, ČLR, Finsko, Francii, Island, Itálii, Izrael, Jugoslávii, Kanadu, Kolumbii, Kubu, Kuvajt, Kypr, Lucembursko, Maďarsko, Maroko, Mongolsko, NDR, Norsko, NSR, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, SSSR, Španělsko, Švédsko, Tunisko, Turecko, USA, Velkou Británií a Vietnam. Z tradičních účastníků tedy tentokrát chybělo Nizozemí.

Uvedené země měly také své zastoupení v mezinárodní porotě, jejímž předsedou byl (stejně jako na 14. MMO v roce 1972) *prof. S. Balcerzyk* z Toruně. Členové poroty se sjeli do Varšavy v pátek 4. července a zahájili přípravné práce spojené s výběrem a formulací soutěžních úloh. Z návrhů 79 úloh zaslaných třiatdvaceti zeměmi ze třiceti sedmi zúčastněných zemí připravili polští organizátoři předběžný výběr 21 úloh, z nichž pak porota v poměrně krátké době vybrala soutěžní šestici. Oč rychleji proběhl vlastní výběr, o to více času spotřebovala debata o formulaci textů, kdy se střetávala značně odlišná stanoviska. Konečné znění (zvláště textu čtvrté úlohy) je výsledkem určitého kompromisu, který ne-

odpovídá vždy zvyklostem naší MO, kde bychom texty formulovali patrně poněkud jinak.

Pro 27. MMO byly tak vybrány tyto úlohy:

1. Nechť d je kladné celé číslo, různé od 2, 5, 13. Dokažte, že v množině $\{2, 5, 13, d\}$ lze nalézt dva různé prvky a, b takové, že $\sqrt{ab} - 1$ není celé číslo.

2. V rovině je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a libovolný bod P_0 . Položme $A_{k+3} = A_k$ pro $k = 1, 2, 3, \dots$ a sestrojme posloupnost bodů $P_0, P_1, P_2, \dots$ tak, že pro každé $k = 1, 2, 3, \dots$ bude bod P_k obrazem bodu P_{k-1} při otočení o úhel 120° (v záporném smyslu) okolo středu A_k .

Jestliže $P_{1986} = P_0$, pak trojúhelník $A_1A_2A_3$ je rovnostranný; dokažte.

3. Každému vrcholu pravidelného pětiúhelníku je přiřazeno celé číslo; součet těchto pěti čísel je kladný. Jestliže třem po sobě jdoucím vrcholům jsou přiřazena čísla x, y, z , přičemž $y < 0$, je dovoleno provést tuto operaci: čísla x, y, z nahradíme po řadě čísla $x + y, -y, z + y$. Takovéto operace provádíme tak dlouho, dokud je aspoň jednomu z vrcholů přiřazeno záporné číslo.

Rozhodněte, zda tento proces nutně vždy skončí po konečném počtu kroků.

4. Je dán pravidelný n -úhelník, $n \geq 5$; označme A a B dva jeho sousední vrcholy, O jeho střed. V rovině n -úhelníku se pohybuje trojúhelník XYZ , shodný s trojúhelníkem OAB , a to tak, že nejprve $X = O, Y = A, Z = B$ a potom Y a Z probíhají oba celý obvod n -úhelníku, přičemž X leží stále uvnitř n -úhelníku.

Určete množinu všech možných poloh vrcholu X .

5. Určete všechny funkce f , které zobrazují množinu $\mathbb{R}^+$ všech nezáporných reálných čísel do $\mathbb{R}^+$ a splňují podmínky

$$f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x + y) \text{ pro } x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

$$f(2) = 0, \quad (2)$$

$$f(x) \neq 0 \text{ pro } 0 \leq x < 2. \quad (3)$$

6. V rovině se souřadnou soustavou je dána konečná množina M bodů s celočíselnými souřadnicemi. Rozhodněte, zda je vždy možné obarvit některé body z M červenou a ostatní pak bílou barvou tak, aby pro každou přímku p rovnoběžnou s některou ze souřadných os se počet červených bodů ležících na p lišil od počtu bílých bodů na p nejvýše o 1.

Tyto úlohy pocházely z návrhů, jež zaslaly ČLR (2.), Island (4.), NDR (3. a 6.), NSR (1.) a Velká Británie (5.). Každá z úloh byla pak, jak je v posledních letech na MMO zvykem, ohodnocena sedmi body, takže každý soutěžící mohl získat maximálně 42 bodů.

Soutěžící žáci a zástupci vedoucích delegací přijeli do Varšavy většinou v pondělí 7. července. Stejně jako členové poroty byli i žáci ubytováni ve Varšavě, ovšem dostatečně daleko od poroty. Zástupci vedoucích byli tentokrát po celou dobu společně s porotou, takže žáci byli svěřeni výhradně péči polských průvodců.

V sobotu 5. července byli členové poroty přijati polskou ministryní osvěty a výchovy paní *J. Michalovskou-Gumowskou*. V úterý 8. července odpoledne se konalo slavnostní zahájení 27. MMO v kinosále odborné školy elektroniky na *Žoliborzi*; v jeho programu zhlédli účastníci ukázky polských

lidových tanců v provedení tanečního kroužku žáků školy.

Vlastní soutěž 27. MMO proběhla ve dnech 9. a 10. července; každý den měli soutěžící čtyři a půl hodiny na řešení tří soutěžních úloh; během první půlhodiny mohli klást písemné dotazy, jestliže něčemu v textu úloh neporozuměli. Oprava a koordinace hodnocení žákovských řešení zabíraly pak celý pracovní čas poroty až do sobotního večera, kdy byly schváleny definitivní výsledky. Porota se rozhodla udělit celkem 107 cen, z toho 18 prvních (žákům, kteří získali 34–42 bodů), 41 druhých (za zisk 26–33 bodů) a 48 třetích (za 17–25 bodů). Vedle toho bylo rozhodnuto udělit jednu zvláštní cenu J. Keaneovi z USA za originální řešení třetí úlohy.

V průběhu pobytu ve Varšavě měli všichni účastníci možnost prohlédnout si obnovený královský zámek. V neděli 13. července se pak všichni zúčastnili autobusového výletu, jehož cílem byl Nieborów (prohlídka zámku) a Żelazowa Wola (Chopinův památník).

V pondělí 14. července odpoledne se (opět v kinosále školy) konalo slavnostní rozdělení diplomů a cen. Diplomy předávala ministryně osvěty a výchovy J. Michałowska-Gumowska. Věcné ceny tvořily broušené skleněné vázy a poháry. V průběhu tohoto zasedání vystoupil také vedoucí kubánské delegace *prof. Luis J. Davidson*, který pozval všechny zúčastněné země na 28. MMO, která se konala v červenci 1987 v Havaně.

27. MMO byla zakončena společnou večeří uspořádanou v menze vysoké školy zemědělské na Ursynově (nedaleko koleji téže školy, v nichž byli ubytováni vedoucí delegací a jejich zástupci). Nazítří, 15. července, se pak zahraniční delegace začaly rozjíždět do svých domovů.

2. VÝSLEDKY 27. MMO

Celkový obraz o výsledcích jednotlivých delegací podává připojená tabulka 5. Z tohoto přehledu i z detailní výsledkové listiny lze vyčíst některé zajímavé údaje:

- ze všech 210 soutěžících dosáhli pouze tři žáci maximálního zisku 42 bodů: dva sovětsí a jeden maďarský účastník,

- s opačným extrémem nulového bodového zisku skončil pouze jeden soutěžící z Brazílie,

- průměrný bodový zisk připadající na jednoho žáka byl 18,138 bodu, na šestičlenné družstvo tedy 108,829 bodu,

- sedm delegací odjíždělo z Varšavy bez cen a naopak v šesti družstvech měl i žák s nejhorším výsledkem aspoň třetí cenu,

- průměrný bodový zisk žáka odměněného první cenou byl 37,944, druhou cenou 29,293 a třetí cenou 20,208,

- průměrný bodový zisk žáka za první úlohu byl 3,910, za druhou 4,114, za třetí 0,838, za čtvrtou 3,252, za pátou 4,195 a za šestou 1,929.

3. ČESKOSLOVENSKÁ ÚČAST NA 27. MMO

Československo se aktivně podílelo na všech fázích příprav a průběhu 27. MMO. Již na jaře byly polským organizátorům zaslány návrhy tří úloh pro soutěž. Jedna z nich byla zahrnuta do výběru 21 úloh předložených mezinárodní porotě; uvažovalo se pak o ní jako o alternativě k první úloze, které však nakonec byla dána přednost.

Celkové výsledky 27. MMO

Země	Počet žáků	Počet získaných cen			Celkový součet bodů
		1.	2.	3.	
Alžírsko	6	—	—	2	80
Austrálie	6	—	—	5	117
Belgie	6	—	1	2	79
Brazílie	6	1	—	—	69
Bulharsko	6	1	3	2	161
Československo	6	—	3	3	149
ČLR	6	3	1	1	177
Finsko	6	—	—	1	60
Francie	6	1	1	2	131
Island	4	—	—	—	37
Itálie	3	—	—	2	49
Izrael	6	—	2	2	119
Jugoslávie	6	—	—	2	84
Kanada	6	—	2	1	112
Kolumbie	6	—	—	—	58
Kuba	6	—	—	—	51
Kuvajt	5	—	—	—	48
Kypr	6	—	1	—	53
Lucembursko	2	—	—	—	22
Maďarsko	6	1	2	2	151
Maroko	6	—	1	2	90
Mongolsko	6	—	—	—	54
NDR	6	1	3	2	172
Norsko	6	—	1	—	68
NSR	6	2	4	—	196
Polsko	6	—	—	3	93

Země	Počet žáků	Počet získaných cen			Celkový součet bodů
		1.	2.	3.	
Rakousko	6	—	2	2	127
Rumunsko	6	2	2	1	171
Řecko	6	—	—	2	63
SSSR	6	2	4	—	203
Španělsko	4	—	1	2	78
Švédsko	6	—	—	1	57
Tunisko	6	—	—	1	85
Turecko	6	—	—	—	55
USA	6	3	3	—	203
Velká Británie	6	—	2	3	141
Vietnam	6	1	2	2	146
Celkem	210	18	41	48	3 809

Jedinou zvláštní cenu získal žák Joseph Keane z USA za řešení třetí úlohy; jeho celkový výkon byl ohodnocen první cenou za zisk 41 bodů.

V průběhu debat o formulaci úloh podporovala čs. delegace stanoviska zdůrazňující požadavek přesnosti a jednoznačnosti textu před snahami o názornost. Většinový systém rozhodování v porotě si však často vynucoval kompromisy.

Do soutěže vyslalo Československo šest žáků, resp. čerstvých absolventů gymnázií, vesměs vítězů 3. kola naší MO

kategorie A. Před odjezdem na MMO absolvovali tito žáci třítydenní přípravné soustředění (8.—27. června 1986 v Pardubicích), kde soustavně řešili úlohy olympiádního typu. Šestice reprezentantů byla vybrána na základě výkonů na tomto soustředění i v předchozích kolech a ročnících MO a vzbuzovala naděje na vyrovnané výsledky na slušné úrovni.

Výsledky našich reprezentantů na 27. MMO shrnuje tabulka 6. Vcelku lze říci, že v soutěži obstáli: získal tři druhých a tři třetích cen odpovídal našim možnostem v porovnání s ostatními zeměmi.

Z tabulky je vidět, že naši žáci neměli potíže s úlohami s klasickou olympiádní tematikou, jakou je geometrie (2. a (4. úloha), kombinatorika (6. úloha) či funkcionální rovnice (5. úloha). Poněkud překvapil neúspěch při řešení první úlohy, jež byla všeobecně považována za lehkou. Sami naši žáci uváděli jako důvod nedostatečné soustředění na začátku soutěže: za druhý soutěžní den získali zhruba dvojnásobek bodů z prvního dne. Potvrdila se tak známá skutečnost, že pro tak náročnou soutěž, jakou dnes MMO je, nestačí jen faktické znalosti, ale že je potřebná i dobrá psychická kondice.

Největší, ba nepřekonatelné potíže měli naši žáci se třetí úlohou. V tom se příliš nelišili od ostatních soutěžících: tuto úlohu správně vyřešilo jen jedenáct z 210 účastníků. Naproti tomu zvládli naši reprezentanti celkem dobře šestou úlohu a zařadili se v ní mezi světovou špičku.

Ve světle výsledků 27. MMO můžeme přípravu našich reprezentantů hodnotit pozitivně co do obsahové stránky, určité rezervy jsou stále v takticko-psychologické přípravě na náročné podmínky velké soutěže.

Výsledky čs. žáků na 27. MMO

Žák	Počet bodů za úlohu č.						Celkem	Cena
	1	2	3	4	5	6		
Petr Hájek 4. r., GWP Praha	0	7	0	7	7	7	28	II.
Vladimír Kordula 4. r., GMK Bílovec	2	7	0	7	7	7	30	II.
Marcel Polakovič 3. r., GAM Bratislava	7	7	0	6	6	0	27	II.
Roman Soták 3. r., GŠ Košice	3	7	0	0	6	5	21	III.
Petr Šleich 4. r., G Děčín	2	0	0	3	6	7	18	III.
Adam Zach 4. r., GWP Praha	0	7	1	7	3	7	25	III.
Družstvo celkem	14	35	1	31	35	33	149	

4. ŘEŠENÍ ÚLOH 27. MMO

1. Volíme-li prvky a, b z množiny $\{2, 5, 13\}$, je $\sqrt{ab - 1}$ vždy celé číslo. Máme tedy dokázat, že pro každé kladné celé číslo d alespoň jedno z čísel $2d - 1, 5d - 1, 13d - 1$ není čtvercem celého čísla. Předpokládejme naopak, že existují kladná celá čísla d, x, y, z taková, že zároveň platí

$$2d - 1 = x^2, \quad (1)$$

$$5d - 1 = y^2, \quad (2)$$

$$13d - 1 = z^2; \quad (3)$$

z tohoto předpokladu odvodíme spor.

Z (1) je vidět, že x musí být liché, položíme tedy $x = 2v + 1$, v je celé nezáporné číslo. Potom je $d = 2v(v + 1) + 1$, takže d je nutně liché číslo. Z (2) a (3) však potom vyplývá, že čísla y, z jsou obě sudá, můžeme je tedy psát $y = 2p, z = 2q$, kde p, q jsou kladná celá čísla. Odečtením (2) od (3) dostaneme rovnost $8d = z^2 - y^2$ neboli $2d = q^2 - p^2 = (q + p)(q - p)$. Čísla $p + q$ a $q - p$ jsou buď obě sudá, nebo obě lichá. Kdyby byla obě lichá, muselo by být liché i číslo $2d$, což není. Kdyby byla obě sudá, muselo by být sudé i číslo d , což také není. V obou případech jsme tak dospěli ke sporu a tím je tvrzení dokázáno.

2. Označme $O_j (j = 1, 2, 3)$ operaci otočení o úhel 120° (v záporném smyslu) okolo středu A_j . Složením těchto tří otočení dostaneme zobrazení, které lze vyjádřit jako složení otočení o 360° okolo jistého středu S s jistým posunutím P .

Otočení o 360° je však identita, zbývá tedy jen posunutí P . Podle znění úlohy opakujeme sled tří otočení O_1, O_2, O_3 celkem 662krát ($1986 = 3 \cdot 662$). Výsledná operace je tedy 662násobné posunutí P . Poněvadž však $P_{1986} = P_0$, musí být toto posunutí nulové.

Máme tedy dokázat toto tvrzení: jestliže složením tří operací otočení O_1, O_2, O_3 (o úhel 120° okolo středů A_1, A_2, A_3) vznikne identita, je trojúhelník $A_1A_2A_3$ rovnostranný.

Označme A' obraz bodu A_1 při otočení O_2 a A'' obraz bodu A' při otočení O_3 . Poněvadž obrazem bodu A_1 při otočení O_1 je zřejmě bod A_1 sám a poněvadž složením otočení O_1, O_2, O_3 vznikne identita, musí být $A'' = A_1$. To je však možné právě tehdy, je-li A_3 obrazem bodu A_2 v osové symetrii s osou AA' . Je tedy $|A_1A_3| = |A_1A_2|$ a zároveň $\sphericalangle A_2A_1A_3 = 2 \cdot \sphericalangle A_2A_1A' = 60^\circ$. Trojúhelník $A_1A_2A_3$ je tedy rovnostranný.

3. Pro každou pěticí čísel x, y, z, u, v přiřazenou vrcholům pětiúhelníku (v daném pořadí) vypočteme hodnotu součtu

$$S(x, y, z, u, v) = x + y + z + u + v = S,$$

$$\sum(x, y, z, u, v) =$$

$$= (x - z)^2 + (y - u)^2 + (z - v)^2 + (u - x)^2 + (v - y)^2.$$

Předpokládejme nyní, že $y < 0$ a že provedeme operaci popsanou v textu úlohy, tzn. že pěticí (x, y, z, u, v) nahradíme pěticí $(x + y, -y, y + z, u, v)$. Ihned je vidět, že součet S se při tom nezmění:

$$\begin{aligned}
 S(x + y, -y, y + z, u, v) &= \\
 &= x + y - y + y + z + u + v = S
 \end{aligned}$$

Naproti tomu bude nová hodnota druhého součtu

$$\begin{aligned}
 \Sigma(x + y, -y, y + z, u, v) &= \\
 &= (x - z)^2 + (u + y)^2 + (z + y - v)^2 + (x + y - u)^2 + \\
 &\quad + (v + y)^2.
 \end{aligned}$$

Porovnáním dostaneme

$$\Sigma(x, y, z, u, v) - \Sigma(x + y, -y, y + z, u, v) = -2yS.$$

Podle předpokladu je $S > 0$, $y < 0$. Při provedení operace záměny se tedy hodnota Σ zmenší. Avšak Σ je součet čtverců celých čísel; je to tedy vždy nezáporné celé číslo. Poněvadž neexistuje žádná nekonečná klesající posloupnost nezáporných celých čísel, musí se proces po konečném počtu kroků zastavit – všechna čísla při vrcholech pětiúhelníku pak budou nezáporná.

Jiné řešení – předložené na 27. MMO soutěžícím J. Keanem z USA a odměněné zvláštní cenou – spočívá v tom, že místo součtu Σ vezmeme funkci

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z, u, v) &= |x| + |y| + |z| + |u| + |v| + |x + y| + \\
 &+ |y + z| + |z + u| + |u + v| + |v + x| + |x + y + z| +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |y + z + u| + |z + u + v| + |u + v + x| + \\
& + |v + x + y| + |x + y + z + u| + |y + z + u + v| + \\
& + |z + u + v + x| + |u + v + x + y| + |v + x + y + z|.
\end{aligned}$$

Porovnáním zjistíme, že provedení operace opět snižuje hodnotu F , neboť

$$\begin{aligned}
F(x, y, z, u, v) - F(x + y, -y, y + z, u, v) = \\
= |z + u + v + x| - |x + 2y + z + u + v| = \\
= |S - y| - |S + y| > 0.
\end{aligned}$$

Další postup je stejný.

Poznámka. Funkce $\sum$ a F nejsou přirozeně jediné funkce, které lze v této souvislosti použít; stejně dobře poslouží např. funkce

$$\begin{aligned}
\sigma(x, y, z, u, v) = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + (x + y + z)^2 + \\
+ (y + z + u)^2 + (z + u + v)^2 + (u + v + x)^2 + \\
+ (v + x + y)^2 = \sum(x, y, z, u, v) + 2S^2
\end{aligned}$$

a řada dalších.

Odlišnou cestu k řešení této úlohy našel náš bývalý velmi úspěšný olympionik z let 1978–81 dr. Jan Nekovář. Úlohu

nejprve zobecnil tak, že místo pěti celých čísel vzal n reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ s kladným součtem $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Jejich cyklickou permutací lze vždy docílit toho, že součty $A_k = x_1 + \dots + x_k$ jsou kladné pro $k = 1, 2, \dots, n$, ($A_n = S$). Operaci přechodu od trojice x_{k-1}, x_k, x_{k+1} s $x_k < 0$ k trojici $x_{k-1} + x_k, -x_k, x_k + x_{k+1}$ pak odpovídá prostá změna dvou sousedních součtů A_{k-1}, A_k , spojená v případě $k = n$ s určitou modifikací, při které se součet $\sum_{k=1}^n A_k$ sníží alespoň o S . Operace lze provádět jen pokud $A_{k-1} > A_k$; v případě $k < n$ se součet $\sum_{k=1}^n A_k$ nezmění, ale po konečném počtu kroků se odstraní všechny inverze $A_{k-1} > A_k$ ($k < n$), v případě $k = n$ poklesne součet $\sum A_k$ alespoň o S , avšak čísla A_k jsou vesměs kladná. Je tedy vidět, že operaci nelze provést nekonečně mnohokrát. Lze dokonce snadno odvodit horní odhad počtu kroků.

4. Necht A, B, C jsou tři po sobě jdoucí vrcholy n -úhelníku a necht k je kružnice jemu opsaná. Na straně AB zvolme libovolný bod Y . K němu sestrojíme bod $R \in k$ tak, aby $YR \parallel OB$ a aby bod R ležel na kratším z obou kruhových oblouků AB . K bodu R pak dále sestrojíme bod Y' tak, aby $Y' \in AB$ a $RY' \parallel OA$ (při $n \geq 5$ lze takový bod Y' nalézt). Trojúhelníky OAB a $RY'Y$ jsou podobné, takže $|RY'| = |RY|$.

Označme O operaci otočení se středem O , které převádí bod A v bod B . Obrazy bodů R, Y, Y' při tomto otočení označme po řadě R', Z', Z . Zřejmě je $|R'Z| = |RY|$ a zároveň $R'Z \parallel OB \parallel RY$. Je tedy také $|YZ| = |RR'| = |AB|$.

Označme nyní X obraz bodu O při posunutí o vektor RY . Trojúhelník XYZ je ovšem shodný s trojúhelníkem ORR' ,

a tedy také s trojúhelníkem OAB . Přitom $Y \in AB$, $Z \in BC$ a X leží uvnitř n -úhelníku.

Bod X leží na přímce OB ; bod O odděluje body B , X . Maximální vzdálenost bodu X od bodu O odpovídá takové poloze bodu Y na AB , při které je $|RY|$ maximální. Je to zřejmě tehdy, je-li R středem (kratšího) oblouku AB . Je pak

$$|OX| = |RY| = |OB| \cdot \left(\sec\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1 \right).$$

Obráceně lze pak ke každému bodu X takovému, že

$$|BX| - |OB| = |OX| \leq |OB| \cdot \left(\sec\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1 \right),$$

nalézt na straně AB bod Y tak, aby obraz bodu Y při posunutí o vektor XO ležel na kružnici k . Provedeme-li pak právě popsanou konstrukci s výchozím bodem Y , dostaneme X jako vrchol trojúhelníku splňujícího podmínky úlohy.

Stejně úvahy lze provést pro libovolnou dvojici sousedních stran n -úhelníku. Hledanou množinou je tedy sjednocení n úseček OV_1 , OV_2 , ..., OV_n ležících v polopřímkách opačných k polopřímkám OA , OB , ... a majících stejnou délku

$$|OV_1| = |OV_2| = \dots = |OV_n| = |OA| \cdot \left(\sec\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1 \right).$$

5. Položíme-li v (1) $y = 2$, dostaneme pro libovolné $x \in \mathbb{R}^+$ rovnost $f(x + 2) = 0$; funkce f je tedy nutně rovna nule v intervalu $\langle 2, +\infty \rangle$.

Vezměme nyní y z intervalu $0 \leq y < 2$, $x \in \mathbb{R}^+$. Podle předchozího a (3) je $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = 0$ právě tehdy, jestliže $x \cdot f(y) \geq 2$. Zároveň však také platí $f(x + y) = 0$ právě tehdy, když $x + y \geq 2$. V důsledku (1) jsou tedy nerovnosti $x \cdot f(y) \geq 2$ a $x + y \geq 2$ ekvivalentní pro každé $x \in \mathbb{R}^+$. Jsou tedy ekvivalentní také nerovnosti $x \geq \frac{2}{f(y)}$ a $x \geq 2 - y$, a to pro $x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq y < 2$. To je však možné jen tehdy, jestliže $f(y) = \frac{2}{2 - y}$ pro $0 \leq y < 2$.

Dokázali jsme tedy, že jedinou funkcí, která může vyhovět podmínkám (1), (2) a (3), je funkce f definovaná v $\mathbb{R}^+$ rovnostmi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{2 - x} && \text{pro } 0 \leq x < 2, \\ &= 0 && \text{pro } 2 \leq x < \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Zbývá dokázat, že takto definovaná funkce podmínky úlohy skutečně splňuje. Splnění podmínek (2) a (3) je zřejmé ze (4). Při ověřování podmínky (1) rozlišíme několik případů.

a) $y \geq 2$. Potom je ovšem $f(y) = 0$, ale také $x + y \geq 2$, takže $f(x + y) = 0$. Podmínka (1) je tedy splněna pro každé $x \in \mathbb{R}^+$.

b) $0 \leq y < 2$, $0 \leq x < 2 - y$. Zde máme $f(y) = \frac{2}{2 - y}$,

a tedy $x \cdot f(y) = \frac{2x}{2-y} < 2$, takže je

$$f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = \frac{2}{2 - \frac{2x}{2-y}} \cdot \frac{2}{2-y} = \frac{2}{2-x-y}.$$

Zároveň je také $x + y < 2$, a tedy $f(x + y) = \frac{2}{2-x-y}$.

Podmínka (1) je tedy opět splněna.

c) $0 \leq y < 2$, $2 - y \leq x$. Tu je $f(y) = \frac{2}{2-y}$, avšak

$x \cdot f(y) = \frac{2x}{2-y} \geq -2$, a tedy $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = 0$. Zároveň je $x + y \geq 2$, takže $f(x + y) = 0$. Podmínka (1) je opět splněna.

Funkce f definovaná v (4) je tedy (jediným) řešením úlohy.

6. Popsané obarvení je vždy možné. Důkaz provedeme indukcí podle počtu bodů množiny M .

Obsahuje-li množina M nanejvýše dva body, je zřejmé, jak se mají obarvit, aby podmínky úlohy byly splněny. Předpokládejme tedy, že dovedeme obarvit každou množinu, která má méně než n bodů ($n \geq 3$), a uvažujme množinu o n bodech. Rozlišíme následující případy:

a) Jestliže neexistuje přímka rovnoběžná s některou ze souřadných os taková, že na ní leží alespoň dva body množiny M , je lhostejné, jak body obarvíme.

b) Necht' tedy naopak existuje přímka p rovnoběžná s některou z os, obsahující dva body A, B z množiny M . Potom buď

ba) na přímkách kolmých k p a procházejících body A , B neleží žádné další body z M . Potom obarvíme množinu $M \setminus \{A, B\}$ o $n - 2$ prvcích tak, aby obarvení vyhovovalo podmínkám, a body A , B pak obarvíme každý jinou barvou; podmínky zůstanou přitom zachovány.

Anebo

bb) existuje přímka q kolmá k p a jdoucí např. bodem A taková, že na ní leží vedle A ještě další bod $C \in M$. Body A , B , C jsou tedy vrcholy pravoúhlého trojúhelníku s pravým úhlem při vrcholu A . Vezměme bod D takový, že $ABCD$ je pravoúhelník.

bba) Jestliže $D \in M$, obarvíme množinu $M \setminus \{A, B, C, D\}$ ve shodě s podmínkami a pak obarvíme jednou barvou body A , D a druhou barvou body B , C . Podmínky obarvení zůstanou zachovány.

bbb) Jestliže $D \notin M$, pak obarvíme množinu $M \cup \{D\} \setminus \{A, B, C\}$ o $n - 2$ prvcích podle podmínek úlohy a potom obarvíme body B a C stejnou barvou, jakou je obarven bod D , kdežto bod A obarvíme druhou barvou. Obarvení množiny M bude pak opět splňovat podmínky úlohy.

RNDr. František Zítek, CSc., doc. RNDr. Leo Boček, CSc.,
RNDr. Karel Horák, CSc., doc. RNDr. Jozef Hvorecký, CSc.,
doc. RNDr. Branislav Rován, CSc.

**TŘICÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
roku 1988 jako svou publikaci č. 5-42-14/1

Edice Pomocné knihy pro žáky

Odpovědná redaktorka RNDr. Alena Jelénková a Anežka Bittnerová

Výtvarný redaktor Václav Hanuš

Technická redaktorka Hana Polívková

Z nové sazby písmem Plantin

výtiskly Moravské tiskařské závody, n. p., Olomouc

Formát papíru 70 cm × 100 cm

Počet stran 208

AA 7,62 - VA 8,16

Náklad 2 700 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/2

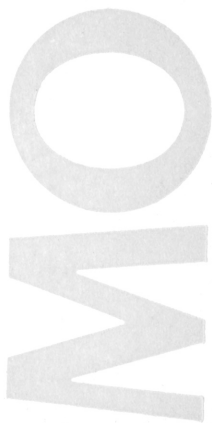
1. vydání

Cena brožovaného výtisku Kčs 10,00

505/21, 825

14-659-88 Kčs 10,00

matematická olympiáda



SPN 5-42-14/1

14-659-88
03/2 Kčs 10,00