

35. ročník matematické olympiády na základních školách

Milan Koman (editor); Leo Boček (editor); Vladimír Repáš (editor):
35. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o
řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1985/86. (Czech).
Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404820>

Terms of use:

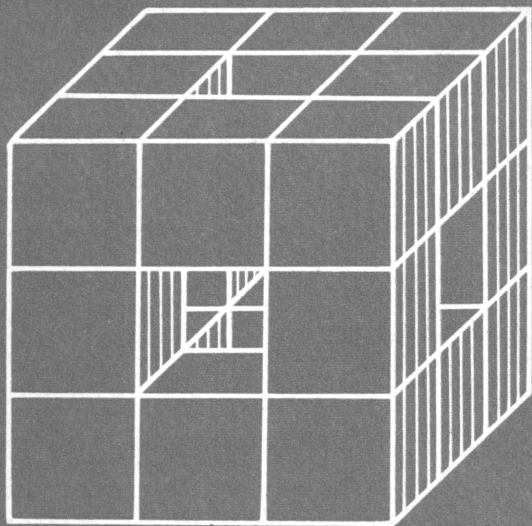
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides
access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of
any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for
electronic delivery and stamped with digital
signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital
Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

**35. ročník matematické olympiády
na základních školách**



SPN

TŘICÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH

*Zpráva o řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1985/86*

**STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA**

Státní pedagogické nakladatelství upozorňuje všechny zájemce o matematickou olympiádu, že současně s touto publikací vychází knížka

*Třicátý pátý ročník matematické olympiády
na středních školách.*

V ní jsou uveřejněny soutěžní úlohy kategorií A, B, C, P určené žákům středních škol.

Za přispění spolupracovníků zpracovali
RNDr. Milan Koman, CSc., doc. RNDr. Leo Boček, CSc.,
RNDr. Vladimír Repáš

Lektorovali PhDr. Libuše Hozová, RNDr. Jitka Kučerová,
RNDr. Václav Šůla

© Milan Koman za kolektiv, 1988

Obsah

O průběhu 35. ročníku matematické olympiády	7
Kategorie Z8	20
Úlohy I. kola	20
Úlohy k dalšímu procvičování	36
Úlohy II. kola	39
Úlohy III. (krajského) kola v ČSR	47
Úlohy III. (krajského) kola v SSR	55
Kategorie Z7	63
Úlohy I. kola	63
Úlohy II. kola	73
Kategorie Z6	79
Úlohy I. kola	79
Úlohy II. kola	88
Kategorie Z5	93
Úlohy I. kola	93
Úlohy II. kola	96
Kategorie Z4	99
Úlohy I. kola	99
Úlohy II. kola	103

Ústřední výbor MO připravuje tradičně po ukončení každého ročníku matematické olympiády ročenky o průběhu soutěže. V nich se mohou čtenáři seznámit s organizací soutěže, se soutěžními úlohami ze všech kol a s jejich řešeními. Až do 34. ročníku, který se konal ve školním roce 1984/85, vycházela každoročně jedna ročenka určená všem soutěžním kategoriím žáků středních škol (kat. A, B, C) i soutěžním kategoriím žáků základních škol (kat. Z8 a ve školním roce 1984/85 poprvé celostátně též kat. Z7). Od 35. ročníku se matematická olympiáda rozšířila o kategorii P, která je věnována programování a je určena především žákům středních škol bez rozdílu tříd, které navštěvují. Od 36. ročníku, který se uskuteční ve školním roce 1986/87, se matematická olympiáda rozšíří celostátně do 6. ročníků základních škol. Ministerstva školství obou republik se proto rozhodla, aby se počínaje 35. ročníkem soutěže rozdělila ročenka na dvě samostatné brožurky. První bude věnována MO středních škol, tj. kategoriím A, B, C a P a druhá MO základních škol, tj. všem soutěžním kategoriím Z. Dostává se vám tak do rukou první výtisk ročenky MO pro základní školy. Věříme, že se vám stane tato útlá knížka dobrou pomůckou pro přípravu na MO v dalších soutěžních ročnících.

Jak máte této brožury nejlépe využívat? Přečtěte si nejdříve zadání úloh. Pak se snažte sami tyto úlohy vyřešit. Teprve potom se podívejte na otištěná řešení. Budete mít dvojnásobnou radost, jestliže se vám podaří řešit úlohy jiným,

možná i jednodušším způsobem, než který najdete v ročence. Najdete-li obzvláště pěkné řešení, poraďte se se svým učitelem matematiky a pak řešení zašlete ÚV MO.

Ročenku nemusíte studovat najednou. Zaměřte se především na úlohy, které mají obdobnou tematiku jako soutěžní úlohy, které právě řešíte. Přitom je vhodné podívat se i do úloh z jiných kategorií, než ve kterých soutěžíte.

Přejeme vám při studiu této ročenky hodně úspěchů a zejména úspěchů v řešení soutěžních úloh. Budeme rádi, když vám brožura dopomůže i k tomu, že zvládnete úlohy i z vyšších kategorií.

V říjnu 1986

Ústřední výbor MO

Žitná 25

115 67 Praha 1

O průběhu 35. ročníku matematické olympiády

Matematickou olympiádu pořádají ministerstva školství ČSR a SSR ve spolupráci s Jednotou československých matematiků a fyziků (JČSMF), Jednotou slovenských matematiků a fyziků (JSMF), Matematickým ústavem ČSAV, Ústředním Domem pionýrů a mládeže Kl. Gottwalda v Bratislavě a Socialistickým svazem mládeže. Soutěž řídí ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím krajských a okresních výborů matematické olympiády (KV MO a OV MO). Organizačně pomáhají zajišťovat soutěž krajské pedagogické ústavy, pobočky JČSMF a JSMF a řady dobrovolných pracovníků, zejména učitelů ZŠ.

Členy ÚV MO jmenují vždy na tříleté období ministerstva školství, členy KV MO a OV MO jmenují příslušné odbory školství KNV a ONV. V průběhu 35. ročníku MO byl předsedou ÚV MO *dr. František Zítek, CSc.*, z MÚ ČSAV, místopředsedy byli *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.*, člen *korrespondent* ČSAV z téhož ústavu a *prof. Beloslav Riečan, DrSc.*, z Vysoké vojenské školy technické, Liptovský Mikuláš.

Komisi pro kategorii Z vedl v ÚV MO *dr. Milan Koman, CSc.*, z MÚ ČSAV. Jednateli ÚV MO byli *doc. dr. Leo Boček, CSc.*, z matematicko-fyzikální fakulty UK a *dr. Karel Horák, CSc.*, z MÚ ČSAV.

Žáci základních škol soutěžili ve dvou kategoriích Z. Kategorie Z8 byla určena žákům 8. ročníků a kategorie Z7 žákům 7. ročníků. Se souhlasem KV MO mohli však i nadaní žáci základních škol soutěžit v některé z kategorií A, B, C nebo P určených žákům středních škol. Se souhlasem OV MO mohli soutěžit žáci základních škol i v kategoriích určených pro vyšší ročníky, než které v tomto školním roce navštěvovali.

V kategorii Z8 se soutěžilo ve 3 kolech, v kategorii Z7 ve 2 kolech. Úlohy I. kola řešili žáci obou kategorií doma nebo v kroužcích MO a mohli se radit se svými učiteli a vedoucími kroužků. Úlohy byly hodnoceny třemi klasifikačními stupni: 1 - výborně, 2 - dobře, 3 - nevyhovuje. Ze soutěživých, kteří řešili úspěšně aspoň 4 úlohy I. kola, vybraly OV MO nejlepší řešitele, kteří postoupili do II. kola.

Druhá kola se konala v okresních městech pro kategorii Z8 dne 5. února 1986 a pro kategorii Z7 dne 16. dubna 1986 a měla formu písemné práce, při které řešili účastníci 4 úlohy. Řešení byla bodována s ohledem na obtížnost jednotlivých úloh. Nejvýše dosažitelný počet bodů soutěžních úloh je uveden v úlohové části ročenky. Podle součtu získaných bodů se sestavilo v každém okrese pořadí žáků II. kola. Účastníci, kteří získali více než polovinu dosažitelných bodů, byli úspěšnými řešiteli II. kola. Nejlepší z nich se stali vítězi II. kola.

Z iniciativy KV MO proběhlo v kategorii Z8 ještě v každém kraji III. kolo. V krajích ČSR se uskutečnilo 12. dubna 1986, v krajích SSR dne 17. května. Vzhledem k odlišnosti termínů byly soutěžní úlohy pro ČSR a SSR také odlišné. V obou případech se řešily, podobně jako ve II. kole, 4 úlohy

formou písemné práce. Hodnocení soutěžících bylo stejné jako ve II. kole.

V SSR byla již od roku 1980 experimentálně ověřována matematická olympiáda i pro žáky nižších kategorií Z. Od školního roku 1980/81 řešili úlohy MO žáci 5., 6. a 7. ročníků vždy ve svých kategoriích. Od školního roku 1983/84 jsou zapojeni do MO i žáci 4. ročníků. Soutěž organizovala subkomise pro ZŠ ustanovená při slovenské komisi MO Jednoty slovenských matematiků a fyziků, kterou vede *prof. dr. Jozef Moravčík, DrSc.* V kategoriích Z7, Z6 a Z5 probíhala soutěž ve dvou kolech podobně jako v celostátní soutěži v kategorii Z8. Pro žáky 4. ročníků byla soutěž uspořádána také ve dvou kolech, ale II. kolo se nekonalo v okresním městě, ale jen na škole, kterou žáci navštěvovali. Konalo se ve stanoveném termínu a mělo formu písemné práce.

Abychom umožnili i žákům v ČSR seznámit se se soutěžními úlohami kategorií Z4 až Z6 35. ročníku MO v SSR, zařazujeme je i do této ročenky. Úlohy kategorie Z6 uvádíme i s jejich řešeními. Na rozdíl od řešení úloh kategorií Z8 a Z7 jsou otištěná řešení úloh kategorie Z6 spíše heslovitá. Svou formou se tak blíží řešením, jaká jsou schopni samostatně vypracovat soutěžící žáci 6. ročníků. V některých případech tak jde spíše o ideu řešení používající i názoru, než o striktní matematické řešení, jaké se požaduje až ve vyšších soutěžních kategoriích, zejména žáků ze středních škol.

Úlohy 35. ročníku MO vybíralo pro kategorii Z8 předsednictvo ÚV MO (pro I. a II. kolo), KV MO Praha (pro III. kolo v ČSR) a KV MO Západoslovenského kraje (pro III. kolo v SSR). Úlohy pro ostatní kategorie základních škol

vybíraly česká a slovenská komise pro kategorie Z. Byly použity úlohy přijaté do konkursu na úlohy MO.

Autory úloh byli: Jozef Gallo, Komjatice, dr. Kveta Hončariová, Košice, Stanislav Horák, Praha, dr. Ľudovít Hrdina, CSc., Bratislava, dr. Milan Koman, CSc., Praha, doc. dr. Karol Križalkovič, CSc., Nitra, dr. Jiří Mída, CSc., Brandýs n. L., dr. Gabriela Monoszová, Banská Bystrica, dr. Vladimír Repáš, Bratislava, dr. Marta Stovičová, Nitra, dr. Alena Šarounová, CSc., Praha, dr. Juraj Vantuch, Bratislava, Miroslav Žákovič, Nové Mesto n. Váhom.

Soutěžní úlohy I. kola včetně pokynů pro soutěžící byly uveřejněny v českém a slovenském letáku MO dodávaném přímo na školy a dále v časopisech Matematika a fyzika ve škole, Rozhledy matematicko-fyzikální a Sedmička pionýrů. Úlohy ostatních soutěžních kol byly tajné a byly zasílány organizátorům v zapečetěných obálkách těsně před soutěží.

Na pomoc referentům MO byly jako každoročně vypracovány komentáře k soutěžním úlohám a pokyny pro jednotné hodnocení jejich řešení. Ve všech krajích se kromě toho konaly pro učitele matematiky a referenty MO instruktáže k výchově talentovaných žáků v matematice a k vedení zájmových kroužků MO.

Pro úspěšné řešitele MO, řešitele korespondenčních seminářů, řešitele Pythagoriád a další talentované žáky se konaly na mnohých místech republiky různé letní školy, soustředění a pionýrské tábory mladých matematiků. Mnoho žáků od čtvrtých až po osmé ročníky mělo příležitost se zúčastnit korespondenčních seminářů organizovaných v různých místech ČSSR. Jejich vzorem byly většinou dva slovenské korespondenční semináře. První z nich s názvem

PIKOMAT (= pionýrský korespondenční seminár z matematiky) určený žákům 7. a 8. ročníků z Bratislavy a Západoslovenského kraje zahájil svou činnost již v roce 1983 pod vedením dr. V. Burjana, vyučujícího gymnázia A. Mar-kuša v Bratislavě. Druhý s názvem KOMINÁR (= korespondenční matematický seminár) je určen žákům 4. až 6. ročníků z celého Slovenska. Seminár vznikl pod vedením dr. V. Černeka ze stavební fakulty SVŠT v Bratislavě. Ústřední výbor MO evidoval tyto akce:

Praha. 14denní pionýrský tábor ROH pro řešitele MO a Pythagoriády v Roztokách u Jilemnice pro 20 vybraných účastníků z celé Prahy v červenci 1986. Dvě týdenní letní školy v Holicích pro vybrané řešitele MO a Pythagoriády ze 7. a 8. ročníků (1. běh) a z 5. a 6. ročníků (2. běh) z obvodu Praha 4 s celkem 90 účastníky. V průběhu školního roku proběhly v 7 pražských obvodech pracovní přednášky pro řešitele MO.

Středočeský kraj. Krajské 8denní soustředění pro 30 nejlepších řešitelů MO a FO kategorií Z8 v Zadní Telnici v Krušných horách (červen 1986). V kraji probíhaly dva korespondenční semináře s názvem PIKOMAT pro žáky 7. a 8. ročníků. Seminár v Kralupech nad Vltavou vedl K. Šimánek, vyučující gymnázia, a seminár v Kutné Hoře vedl K. Blažek při stanici mladých přírodovědců ODPM. Řešení úloh zaslalo asi 250 žáků. V lednu 1986 bylo pro 20 nejlepších žáků 4denní soustředění. V červenci se 40 nejlepších řešitelů zúčastnilo pionýrského tábora s matematickou náplní v Mckrosukách na Šumavě.

Jihočeský kraj. Letní škola MO a FO pro řešitele kategorie Z na Zadově se 42 účastníky po dobu 5 dnů v měsíci

červnu 1986. Zájmové kroužky MO na většině ZŠ v Českých Budějovicích, které vedli studenti Pedagogické fakulty v rámci své společensko-politické praxe.

Západočeský kraj. V kraji bylo celkem 38 kroužků MO, kterých se zúčastnilo asi 420 žáků. Pro úspěšné řešitele kategorie Z8 byl uskutečněn 8denní seminář, kterého se zúčastnilo 46 žáků.

Severočeský kraj. Pro žáky 4. ročníků byla uspořádána soutěž, pozůstávající ze školního a okresního kola. Soutěž napomáhá při výběru žáků do 5. tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů. Soutěží se zúčastnilo na 300 žáků. Pro 30 vítězů kategorie Z8 byla uspořádána v Liberci letní týdenní škola.

jihomoravský kraj. Dvě 3denní soustředění pro řešitele kategorie Z8 v listopadu a v březnu organizované paralelně v Gottwaldově a v Brně, kterých se zúčastnilo v každém středisku 30 až 40 žáků. Od října do dubna byl pravidelně 2krát měsíčně seminář pro řešitele kategorie Z8 z Brna, počet žáků se pohyboval kolem 25.

Severomoravský kraj. 10denní soustředění v Krnově pro 42 účastníků. Po celý rok se v Opavě konal pravidelně Klub mladých matematiků, ve kterém se scházelo průměrně 150 žáků z 6. až 8. ročníků z celého okresu.

Bratislava. Byly organizovány dva korespondenční semináře PIKOMAT a KOMINÁR, které pokrývaly i Západo-slovenský kraj. Pikomatu se zúčastnilo 300 žáků 7. a 8. ročníků. Pro nejlepší účastníky byly uspořádány 2 soustředění po pěti dnech. První bylo na jaře, druhé na konci školního roku. Obou se zúčastnilo vždy 40 žáků. Kominár byl určen žákům 4., 5. a 6. ročníků. Zúčastňovalo se okolo 1 000 žáků.

Na 14denní soustředění bylo pozváno do Hnilčíku 40 dětí. Kromě seminářů organizovala Bratislava ještě 2 letní pionýrské tábory. Jeden ve Vrátné dolině ve spolupráci se žilinskou pobočkou JSFM pro 30 dětí z Bratislavy a 30 dětí ze Žiliny. Druhý tábor pro 30 účastníků byl v Nové Bošáci.

Západoslovenský kraj. Druhým rokem vede v okrese Považská Bystrica PIKOMAT dr. I. Bartho, vyučující gymnázia v Považské Bystrici. Zúčastňuje se průměrně 50 dětí.

Středoslovenský kraj. 10denní krajský tábor mladých matematiků pro 36 žáků pořádaný v srpnu 1986 v Lučatině. Okresní tábory mladých matematiků z Liptovského Mikuláše, Dolního Kubína, Martina a Žiliny. Krajský korespondenční seminář vede již sedmým rokem dr. Sivák z Pedagogické fakulty v Banské Bystrici. Má čtyři kategorie. Vedle matematiky jsou to programování, šachy a fyzika. Zúčastňuje se kolem 100 soutěžících. V okrese Čadca vede druhým rokem korespondenční seminář OČKO dr. Černý z Čierného pri Čadci. Na Oravě, v okrese Dolný Kubín vedl pro 50 až 70 dětí PIKOMAT Š. Jány, vyučující gymnázia z Dolního Kubína.

Východoslovenský kraj. 5denní soustředění nejlepších řešitelů korespondenčního semináře pro kategorii Z8, kterého se zúčastnilo 30 žáků. Korespondenční seminář pro kategorii Z, do kterého zasílalo svá řešení v závislosti na obtížnosti úloh 130–150 žáků, vedl doc. Duplák z Pedagogické fakulty v Prešově.

Ještě několik slov k průběhu celého ročníku. Ve školním roce 1985/86 probíhala kategorie Z7 v celostátním měřítku teprve

druhým rokem. V SSR byla však experimentálně organizována tato kategorie spolu s kategorií Z6 a Z5 již od roku 1980 a kategorie Z4 od roku 1983. Obě skutečnosti se promítly i do počtu účastníků MO kategorie Z7. V SSR, kde má soutěž již svou tradici, se ve všech krajích, s výjimkou Bratislavy, počet účastníků pohyboval na úrovni předcházejících ročníků. Jen v Bratislavě byl velký nárůst účastníků. Zájem učitelů i žáků o kategorii Z7 však značně stoupl v tomto ročníku v celé ČSR. Projevilo se to zejména ve Středočeském, Jihočeském a Severomoravském kraji, kde počet soutěžících stoupl o 60 až 100 %. Tím se kategorie Z7 v celé ČSSR přiblížila až na ojedinělé výjimky co do počtu účastníků na stejnou úroveň jako kategorie Z8.

Některé KV MO poukazovaly na to, že největší zájem o MO je v době jejího vyhlášení. Žáci většinou vyřeší všech 6 úloh I. kola již k termínu odevzdání první trojice úloh. Zdá se proto, že mezi I. a II. kolem je v kategorii Z7 příliš dlouhá doba. Žáci proto vítají, mohou-li se kromě MO zúčastnit i různých korespondenčních seminářů.

V kategorii Z8 se ukázalo, že úlohy III. kola zadané v ČSR byly poměrně dost obtížné, zejména úlohy číslo 2 a 3, které nenavazovaly na úlohy z předcházejících kol. V řadě krajů se tak stalo, že ani jeden žák nedosáhl plného počtu bodů. Zajímavé však je, že vítězem krajského kola v Praze se stal žák 7. ročníku ze ZŠ na Uhelném trhu v Praze 1, navštěvující třídu s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů.

Pokud jde o kategorii Z7 a v SSR též o kategorii Z6 a Z5, shodovali se učitelé většinou v názoru, že kategorie Z5 byla náročná, což potvrdil i menší počet úspěšných řešitelů,

kategorii Z6 označovali učitelé za lehkou a kategorii Z7 za přiměřeně náročnou.

Velkým kladem tohoto ročníku byla zvýšená péče o talentované žáky, což se projevilo v růstu akcí věnovaných těmto žákům, zejména v růstu počtu korespondenčních seminářů.

K výměně zkušeností zájemců o výchovu nadaných žáků v matematice přispěl i týdenní seminář pořádaný pro 25 účastníků v listopadu 1986 v Alšovicích komisí pro talenty při HV JČSMF, kterou vede prof. dr. M. Fiedler, DrSc., člen korespondent ČSAV.

Konkurs na úlohy MO. Již v roce 1966 vyhlásily JČSMF a JSMF konkurs na návrhy úloh do MO. Návrhy úloh do MO může podat kdokoliv. Návrhy úloh spolu s řešením se posílají na adresu ÚV MO, Žitná 25, Praha 1, PSČ 115 67. Ústřední výbor má právo přijatou úlohu upravit a autor má povinnost úlohu utajit. Každá přijatá úloha je bez ohledu na kategorii honorována Kčs 50.

Praha, říjen 1986

Ústřední výbor MO

Počty základních škol, účast v MO - kategorie Z7, Z8

Kraj	Celkový počet v kraji	I. kola se zúčastnilo v kategorii		II. kola se zúčastnilo v kategorii		III. kola se zúčastnilo (kat. Z8)
		Z7	Z8	Z7	Z8	
Praha	210	160	189	138	168	25
Středočeský	276	195	198	172	174	32
Jihočeský	185	149	165	121	143	24
Západočeský	215	94	179	70	157	26
Severočeský	294	225	205	177	167	29
Východočeský	319	157	244	143	210	32
Jihomoravský	462	338	355	321	318	45
Severomoravský	472	202	400	142	343	55
Bratislava	78	70	71	70	71	12
Západoslovenský	483	415	394	375	371	32
Středoslovenský	414	321	384	302	361	26
Východoslovenský	397	348	350	341	319	43
ČSR	2 433	1 520	1 935	1 284	1 680	268
SSR	1 372	1 154	1 199	1 088	1 122	113
ČSSR	3 805	2 674	3 134	2 372	2 802	381

Tabulka 2

Počty žáků základních škol soutěžících v 35. ročníku MO

Kraj	Kategorie Z7				Kategorie Z8					
	I. kolo		II. kolo		I. kolo		II. kolo		III. kolo	
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	1 255	809	520	271	1 420	875	516	177	45	29
Středočeský	1 403	736	587	222	1 394	653	488	169	35	18
Jihočeský	1 289	591	359	117	1 270	589	373	106	42	28
Západočeský	738	373	237	146	1 543	632	370	96	49	32
Severočeský	1 904	805	502	205	1 643	675	461	133	33	18
Východočeský	859	508	454	152	1 557	715	505	175	37	22
Jihomoravský	3 123	1 866	1 052	357	2 519	1 393	942	285	56	32
Severomoravský	1 341	651	411	189	3 281	1 438	922	318	77	52
Bratislava	1 050	535	530	172	925	450	425	148	45	29
Západoslovenský	2 394	1 329	935	383	2 219	1 232	883	289	50	36
Středoslovenský	1 723	983	739	251	1 021	278	78	40	39	19
Východoslovenský	3 107	1 799	649	306	2 596	1 216	765	300	58	22
ČSR	11 912	6 339	4 122	1 659	14 627	6 970	4 577	1 459	374	231
SSR	8 274	4 646	2 853	1 112	6 761	3 176	2 151	777	192	106
ČSSR	20 186	10 985	6 975	2 771	21 388	10 146	6 728	2 236	566	337

S ... počet všech soutěžících U ... počet úspěšných

Tabulka 3

Počty základních škol zapojených v SSR do MO - kat. Z4, Z5, Z6

Kraj	I. kola se zúčastnilo v kategorii			II. kola se zúčastnilo v kategorii		
	Z4	Z5	Z6	Z4	Z5	Z6
Bratislava	45	72	70	33	70	67
Západoslovenský	389	347	370	384	331	359
Středoslovenský	292	302	322	276	281	307
Východoslovenský	436	353	358	373	315	331
SSR	1 162	1 074	1 120	1 066	997	1 064

Tabulka 4

Počty žáků základních škol soutěžících v SSR v 35. ročníku MO v kat. Z4, Z5, Z6

Kraj	Kategorie Z4				Kategorie Z5				Kategorie Z6			
	I. kolo S U		II. kolo S U		I. kolo S U		II. kolo S U		I. kolo S U		II. kolo S U	
Bratislava	539	509	487	251	562	401	386	83	541	424	338	160
Západo- slovenský	4 108	2 985	3 072	1 763	2 576	1 572	669	129	2 679	1 712	731	225
Střed- slovenský	3 205	2 135	2 064	877	2 058	964	706	80	1 888	1 029	826	234
Východo- slovenský	5 413	3 064	2 722	1 635	3 902	1 961	596	147	4 139	2 160	679	270
SSR	13 265	8 693	8 345	4 526	9 098	4 898	2 357	439	9 247	5 325	2 574	889

S ... počet všech soutěžících U ... počet úspěšných

ÚLOHY I. KOLA

Z8 - I - 1

Najděte všechny dvojice dvojciferných čísel, které mají tyto vlastnosti:

- a) jejich součet je dělitelný číslem 23,
- b) odečteme-li od většího čísla menší, dostaneme číslo dělitelné číslem 29.

Řešení. Větší z hledaných čísel označíme A , menší B . Protože to jsou dvojciferná čísla, musí pro jejich součet a rozdíl platit

$$21 \leq A + B \leq 197, \quad 1 \leq A - B \leq 89. \quad (1)$$

Podle zadání úlohy je součet $A + B$ násobek čísla 23 a rozdíl $A - B$ násobek čísla 29. Tedy

$$21 \leq A + B = 23k \leq 197, \quad (2)$$

$$1 \leq A - B = 29h \leq 89. \quad (3)$$

Odtud dostaneme podmínky pro celá čísla k a h . Z nerovností (2) plyne

$$\frac{21}{23} \leq k \leq \frac{197}{23}$$

neboli

$$1 \leq k \leq 8. \quad (4)$$

Podobně z nerovnosti (3) plyne

$$\frac{1}{29} \leq h \leq \frac{89}{29}$$

neboli

$$1 \leq h \leq 3. \quad (5)$$

Pro k máme 8 možností, pro h máme 3 možnosti. Stačí tedy prozkoumat $8 \cdot 3 = 24$ možných dvojic k a h .

Řešení si však ještě usnadníme. Sečtením a odečtením rovností ve vztazích (2) a (3) dostaneme

$$2A = 23k + 29h \quad (6)$$

$$2B = 23k - 29h. \quad (7)$$

Protože levé strany jsou sudá čísla, musí být i pravé strany sudá čísla. To může nastat jedině v případě, že čísla k a h jsou buď obě sudá, nebo obě lichá.

Protože $99 \geq A$, plyne z rovnosti (6)

$$198 \geq 23k + 29h \quad (8)$$

neboli

$$198 - 29h \geq 23k.$$

Protože h je aspoň 1, plyne odtud

$$198 - 29 \geq 23k,$$

takže $k \leq 7$.

Protože $B \geq 10$, plyne z rovnosti (7)

$$20 \leq 23k - 29h \quad (9)$$

neboli

$$20 + 29h \leq 23k.$$

Protože h je aspoň 1, plyne z poslední nerovnice

$$20 + 29 \leq 23k,$$

takže $k \geq 2$.

Z provedených dodatečných úvah vyplývá, že místo 24 případů pro dvojice čísel k a h stačí vyšetřit jen 9 případů:

$$\text{a) } h = 1 \quad \text{a} \quad k = 3, 5, 7$$

$$\text{b) } h = 2 \quad \text{a} \quad k = 2, 4, 6$$

$$\text{c) } h = 3 \quad \text{a} \quad k = 3, 5, 7$$

Tyto hodnoty dosadíme postupně do rovností (6) a (7). Dostaneme celkem pět řešení dané úlohy. Jsou to:

$$A = 49, B = 20 \quad \text{pro } h = 1 \quad \text{a} \quad k = 3$$

$$A = 72, B = 43 \quad \text{pro } h = 1 \quad \text{a} \quad k = 5$$

$$A = 95, B = 66 \quad \text{pro } h = 1 \quad \text{a} \quad k = 7$$

$$A = 75, B = 17 \quad \text{pro } h = 2 \quad \text{a} \quad k = 4$$

$$A = 98, B = 40 \quad \text{pro } h = 2 \quad \text{a} \quad k = 6$$

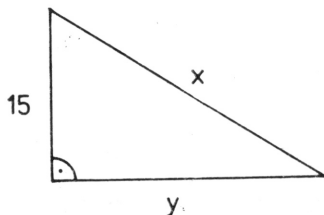
Žádné jiné řešení neexistuje.

Z8 - I - 2

Délky stran pravoúhlých trojúhelníků jsou vyjádřeny přirozenými čísly a jedna z odvěsen má délku 15. Zjistěte všechny pravoúhlé trojúhelníky s uvedenými vlastnostmi.

Řešení. Délky stran označíme podle obrázku 1. Podle Pythagorovy věty je

$$x^2 = 15^2 + y^2. \quad (1)$$



Obr. 1

Odtud dostaneme

$$x^2 - y^2 = 15^2.$$

Rozdíl na levé straně rozložíme v součin

$$(x + y)(x - y) = 225.$$

Rozložíme i číslo 225 na součin dvou činitelů. Jsou pouze tyto možnosti:

$$225 = 1 \cdot 225 = 3 \cdot 75 = 5 \cdot 45 = 9 \cdot 25 \quad (2)$$

Protože čísla x , y jsou kladná, je $x + y > x - y$. Proto v rozkladech (2) musí být první činitel roven $x - y$ a druhý činitel musí být $x + y$. Dostaneme čtyři soustavy rovnic:

$$\begin{array}{l} \text{(S1)} \quad x - y = 1 \\ \quad \quad x + y = 225 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(S2)} \quad x - y = 3 \\ \quad \quad x + y = 75 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(S3)} \quad x - y = 5 \\ \quad \quad x + y = 45 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(S4)} \quad x - y = 9 \\ \quad \quad x + y = 25 \\ \hline \end{array}$$

Řešením těchto soustav dostaneme délky neznámých stran čtyř možných pravoúhlých trojúhelníků daných vlastností.

Zadání úlohy proto vyhovují čtyři trojúhelníky s délkami stran:

$$T1: \quad 15, \quad 112, \quad 113$$

$$T2: \quad 15, \quad 36, \quad 39$$

$$T3: \quad 15, \quad 20, \quad 25$$

$$T4: \quad 15, \quad 8, \quad 17$$

Snadno sami ověříte, že ve všech čtyřech případech jsou pro délky stran splněny trojúhelníkové nerovnosti. Pomocí Pythagorovy věty se můžete také přesvědčit, že všechny čtyři trojúhelníky jsou pravoúhlé.

Poznámka. Všimněte si, že na konci řešení úlohy Z8-I-2 nemusíte ani trojúhelníkové nerovnosti ověřovat. Jestliže pro tři kladná čísla x, y, z platí

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

pak tato čísla splňují i trojúhelníkové nerovnosti a jsou to tedy délky stran pravoúhlého trojúhelníku. Snadno to dokážeme. Protože z je zřejmě největší z čísel x, y, z , stačí dokázat nerovnost

$$z < x + y.$$

Ale to je jednoduché:

$$z^2 = x^2 + y^2 < x^2 + 2xy + y^2$$

Tedy

$$z^2 < (x + y)^2$$

$$z < x + y.$$

Zjistěte hodnotu výrazu

$$\frac{11(6^2 + 5^2)(6^4 + 5^4)(6^8 + 5^8)(6^{16} + 5^{16})}{6^{32} - 5^{32}}.$$

Řešení. Protože

$$6^{32} = 6^{2 \cdot 16} = (6^{16})^2, \quad 5^{32} = 5^{2 \cdot 16} = (5^{16})^2,$$

můžeme jmenovatele rozložit podle známého vzorce pro roz-
díl druhých mocnin:

$$6^{32} - 5^{32} = (6^{16} + 5^{16})(6^{16} - 5^{16})$$

V rozkladu můžeme pokračovat. Postupně dostaneme součiny:

$$\begin{aligned} & (6^{16} + 5^{16})(6^{16} - 5^{16}) = \\ &= (6^{16} + 5^{16})(6^8 + 5^8)(6^8 - 5^8) = \\ &= (6^{16} + 5^{16})(6^8 + 5^8)(6^4 + 5^4)(6^4 - 5^4) = \\ & \dots\dots\dots \\ &= (6^{16} + 5^{16})(6^8 + 5^8)(6^4 + 5^4)(6^2 + 5^2)(6 + 5)(6 - 5) \end{aligned}$$

Přepíšeme-li v daném výrazu jmenovatele v tomto tvaru, mů-
žeme bez výpočtů mocnin krátit. Snadno krácením vypočtete:

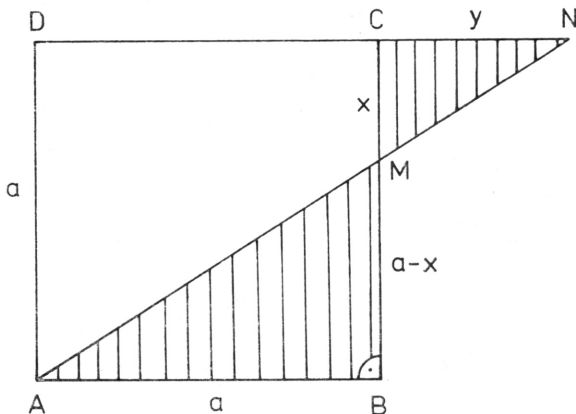
$$\frac{11 \cdot (6^2 + 5^2)(6^4 + 5^4)(6^8 + 5^8)(6^{16} + 5^{16})}{(6^{16} + 5^{16})(6^8 + 5^8)(6^4 + 5^4)(6^2 + 5^2)(6 + 5)(6 - 5)} = 1$$

Z8 - I - 4

Je dán čtverec $ABCD$ se stranou délky a . Vrcholem A vedeme libovolnou přímku, která protíná stranu BC ve vnitřním bodě M a prodloužení strany DC v bodě N . Dokažte, že

$$\frac{1}{|CM|} - \frac{1}{|CN|} = \frac{1}{a}.$$

Řešení. Načrtneme si obrázek 2.



Obr. 2

Pro zjednodušení zápisu označíme $|CM| = x$, $|CN| = y$. Trojúhelníky ABM a NCM jsou podobné, neboť pro jejich vnitřní úhly platí:

$$\sphericalangle ABM \cong \sphericalangle NCM \quad (\text{prave \u00fahly})$$

$$\sphericalangle AMB \cong \sphericalangle NMC \quad (\text{vrcholov\u00e9 \u00fahly})$$

$$\sphericalangle BAM \cong \sphericalangle CNM \quad (\text{st\u0159\u00eddav\u00e9 \u00fahly})$$

(Pro od\u00f9vodn\u00e9n\u00ed podobnosti troj\u00fa\u00faheln\u00edk\u016f ABM a NCM samozřejmě sta\u010d\u00ed uv\u00e9st jen dv\u011b z uveden\u00fdch shodnost\u00ed \u00fahl\u016f.)
Z podobnosti troj\u00fa\u00faheln\u00edk\u016f

$$\triangle ABM \sim \triangle NCM$$

plyne rovnost pom\u011br\u016f odpov\u00eddaj\u00edc\u00edch si dvojic stran:

$$x : y = (a - x) : a$$

Odtud vypo\u010dteme nejd\u00edv\u00edve $y = |CN|$ a pak $\frac{1}{y} = \frac{1}{|CN|}$:

$$y = |CN| = \frac{a \cdot x}{a - x}; \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{|CN|} = \frac{a - x}{a \cdot x}$$

Dosad\u00edme do lev\u00e9 strany rovnosti, kterou m\u00e1me dok\u00e1zat a uprav\u00edme ji.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|CM|} - \frac{1}{|CN|} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{a - x}{a \cdot x} = \\ &= \frac{a - (a - x)}{ax} = \frac{x}{ax} \end{aligned}$$

Po kr\u00e1cen\u00ed \u010d\u00edslem $x > 0$ dostaneme opravdu $\frac{1}{a}$.

Ve třech nádobách je celkem 18 l vody. Polovinu vody z první nádoby přelili do druhé, pak jednu třetinu vody z druhé do třetí, a nakonec jednu čtvrtinu vody z třetí do první nádoby. Potom zůstalo ve všech nádobách stejné množství vody. Jaké množství vody bylo původně v každé nádobě?

1. řešení – pomocí rovnic. Množství vody v nádobách na začátku i po postupném přelévání zapíšeme do tabulky.

	1. nádoba	2. nádoba	3. nádoba
Na začátku	x	y	z
Po 1. přelití	$\frac{1}{2}x$	$y + \frac{1}{2}x$	z
Po 2. přelití	$\frac{1}{2}x$	$\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x$	$z + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}x$
Po 3. přelití	$\frac{13}{24}x + \frac{1}{12}y + \frac{1}{4}z$	$\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x$	$\frac{3}{4}z + \frac{1}{4}y + \frac{1}{8}x$

Údaje v tabulce můžete překontrolovat, v každém řádku je součet $x + y + z$ a ten je samozřejmě roven číslu 18; tedy

$$x + y + z = 18.$$

Po posledním přelití je ve všech nádobách stejné množství vody, tj. 6 litrů. Tím dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} \frac{13}{24}x + \frac{1}{12}y + \frac{1}{4}z & = & 6 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y & & = 6 \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z & = & 6 \\ \hline x + y + z & = & 18 \end{array}$$

Dostáváme soustavu čtyř rovnic, ale jen pro tři neznámé. Ve skutečnosti však stačí pouze tři z nich, protože poslední rovnice je součtem předešlých tří. Jednu z rovnic můžeme vynechat, nejvhodnější je vynechat první rovnici. Budeme řešit soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y & = & 6 \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z & = & 6 \\ \hline x + y + z & = & 18 \end{array}$$

Z prvních dvou rovnic odstraníme zlomky:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 18 \\ x + 2y + 6z & = & 48 \\ \hline x + y + z & = & 18 \end{array}$$

První rovnici odečteme od zbylých dvou rovnic. Dostaneme:

$$x + 2y = 18$$

$$6z = 30$$

$$-y + z = 0$$

Odtud již snadno postupně vypočítáme neznámé

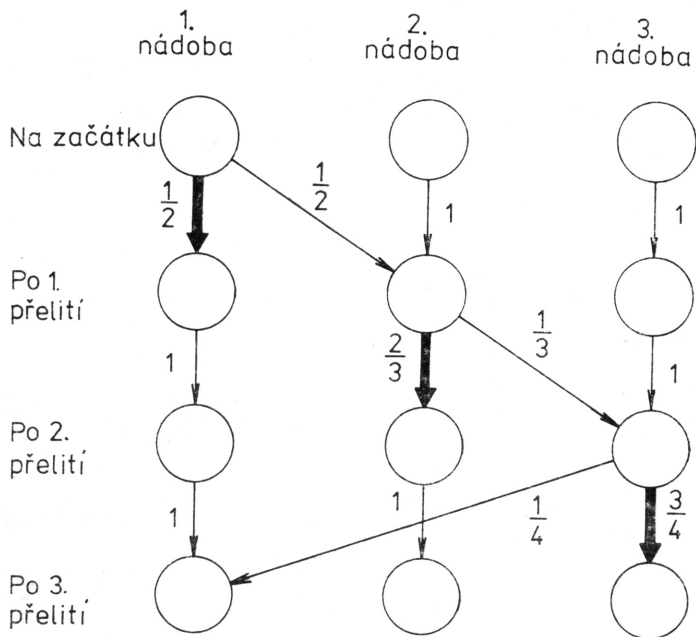
$$z = 5, \quad y = 5, \quad x = 8.$$

Protože řešíme slovní úlohu, je třeba provést ještě zkoušku:

	1. nádoba	2. nádoba	3. nádoba
Na začátku	8	5	5
Po 1. přelití	4	9	5
Po 2. přelití	4	6	8
Po 3. přelití	6	6	6

Původně bylo v 1. nádobě 8 litrů a ve zbylých dvou po 5 litrech.

2. řešení - úsudkem. Způsob přelévání a konečný stav znázorňuje šipkový diagram (str. 31). Úlohu budeme řešit od konce. Šipkový diagram si doplňte sami.

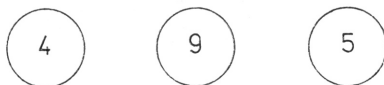


Po třetím přelití je ve všech nádobách po 6 litrech vody. Při -
tom ve 3. nádobě je těchto 6 litrů rovno $\frac{3}{4}$ stavu před přelitím.

To znamená, že při třetím přelití přibýly v 1. nádobě 2 litry
a ve 3. nádobě naopak 2 litry ubyly. Stav v nádobách byl
tedy před 3. přelitím:



Při druhém přelití zůstaly v 2. nádobě $\frac{2}{3}$ stavu. Proto při tomto přelévání ubyly v 2. nádobě 3 litry, o které se zvětšil stav ve 3. nádobě. Před druhým přeléváním byl tedy stav:



Konečně při prvním přelévání ubylo z 1. nádoby $\frac{1}{2}$ stavu a $\frac{1}{2}$ tam zůstalo, což jsou 4 litry. Proto musel být na začátku stav:



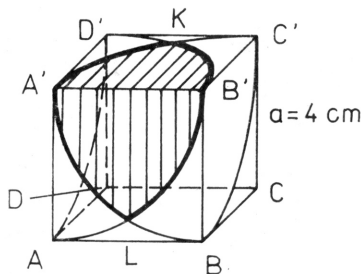
Zkouška a odpověď je stejná jako při 1. řešení.

Poznámka. Stojí za povšimnutí, že řešení úsudkem je v tomto případě kratší a numericky jednodušší.

Z8 - I - 6

Krychle $ABCD A' B' C' D'$ má hranu délky $a = 4$ cm. Zjistěte, jakou část povrchu krychle zaujímají body, které mají od vrcholu A' i od vrcholu B' vzdálenost nejvýše rovnou délce hrany krychle. Znázorněte tuto část povrchu na síti krychle.

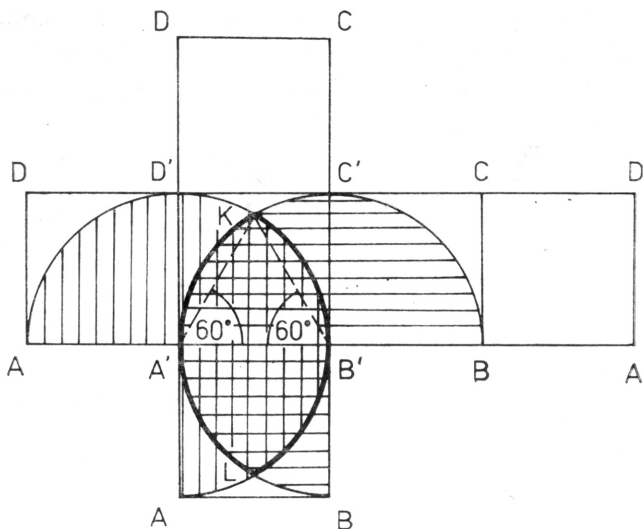
Řešení. Načtneme si obrázek 3. Nejprve určíme množinu všech bodů povrchu krychle, které mají od vrcholu A' vzdálenost v rovnou nejvýše délce hrany krychle, tj. $v \leq a = 4$ cm.



Obr. 3

Tyto body vyplní tři čtvrtkruhy se středy ve vrcholu A' , s poloměrem $a = 4$ cm, které leží ve třech stěnách se společným vrcholem A' . Znázorníme je v síti krychle, obr. 4. Podobně najdeme na povrchu krychle množinu bodů, které mají od vrcholu B' vzdálenost $v \leq a$. Budou to opět tři čtvrtkruhy. Oběma podmínkám vyhovuje tedy útvar, který je průnikem obou množin, v síti je znázorněn jako průnik dvou kruhů. Tento útvar se skládá ze dvou shodných částí $A'B'K$ a $A'B'L$. Stačí tedy vypočítat obsah jedné části např. $A'B'K$.

Trojúhelník $A'B'K$ (obr. 4) je rovnostranný a úhly při vrcholech A' , B' mají velikost 60° . Křivočarý útvar $A'B'K$ je tedy roven sjednocení dvou kruhových výsečí o poloměru $a = 4$ cm a středovém úhlu 60° . Protože $60^\circ = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ$, je



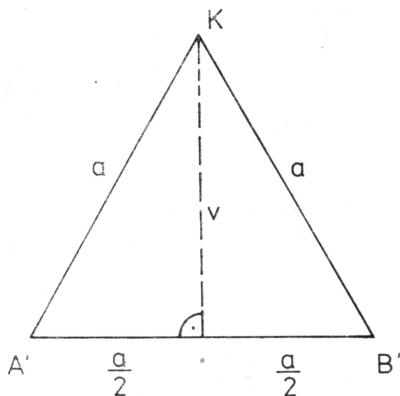
Obr. 4

obsah každé této výseče roven $\frac{1}{6}$ obsahu kruhu o poloměru $a = 4$ cm. Každá z těchto výsečí má obsah

$$S_V = \frac{1}{6}\pi a^2 \doteq 8,37 \text{ cm}^2.$$

Obsah křivočarého útvaru $A'B'K$ dostaneme jako dvojnásobek obsahu S_V zmenšený o obsah S_T rovnostranného trojúhelníku $A'B'K$. Výšku trojúhelníku $A'B'K$ (obr. 5) vypočteme pomocí Pythagorovy věty:

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



Obr. 5

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}}$$

$$v = a \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{3} \doteq 3,46 \text{ cm}$$

Obsah trojúhelníku $A'B'K$ je tedy

$$S_T = \frac{1}{2} a \cdot v = \frac{1}{2} a \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \doteq 6,93 \text{ cm}^2.$$

Obsah křivočarého útvaru $A'B'K$ je

$$S_K = 2 \cdot S_V - S_T$$

$$S_K = \frac{1}{3}\pi a^2 - \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$$

$$S_K = \frac{a^2}{12} \cdot 7,36 \doteq 9,81 \text{ cm}^2.$$

Obsah celého křivočarého útvaru $A'LB'K$ je roven $2S_K$, tzn.

$$2S_K = \frac{a^2}{6} \cdot 7,36 \doteq 19,62 \text{ cm}^2.$$

My máme vypočítat, jakou část povrchu krychle zaujímá křivočarý útvar $A'LB'K$. Povrch krychle je

$$S = 6a^2 = 96 \text{ cm}^2.$$

Hledaná část je tedy

$$c = \frac{2S_K}{S} = \frac{\frac{a^2}{6} \cdot 7,36}{6a^2} = \frac{7,36}{36} \doteq 0,20.$$

Křivočarý útvar $A'LB'K$ zaujímá přibližně 20 % povrchu krychle.

Poznámka. Všimněte si, že do vzorců pro S_V , S_K , S jsme za a nemuseli dosazovat. Proto bývá výhodné provádět výpočty obecně a dosazovat až do konečného vzorce.

ÚLOHY K DALŠÍMU PROCVIČOVÁNÍ

Účastníkům matematické olympiády z 8. ročníků byly doporučeny řešit další obdobné úlohy. Tyto úlohy řešili sou-

těžící - na rozdíl od soutěžních úloh - často s pomocí svých učitelů matematiky. Uvedeme znění těchto úloh:

1. Dvě přirozená čísla jsme sečetli, odečetli, vynásobili a vydělili. Získali jsme čtyři nová celá čísla. Když jsme je sečetli, dostali jsme výsledek 243. Najděte všechny dvojice přirozených čísel, které mají tuto vlastnost.

Návod. Hledaná čísla označíme x, y ($x > y$) a zapíšeme

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 243.$$

Na levé straně sečtěte a pak vytkněte $\frac{x}{y}$.

Výsledek. Dvě dvojice 24, 8 a 54, 2.

2. Strany pravoúhlého trojúhelníku jsou vyjádřeny v centimetrech jako celá čísla. Jedna odvěsna má délku 5 cm. Vypočtete délky zbylých dvou stran. Najděte všechny možnosti.

Výsledek. Jediný trojúhelník o stranách 5 cm, 12 cm, 13 cm.

3. Zjistěte hodnoty výrazů:

$$V = 70(71^9 + 71^8 + \dots + 71^2 + 72) + 1$$

$$H = \frac{11(18^2 + 7^2)(18^4 + 7^4)(18^8 + 7^8)(18^{16} + 7^{16})(18^{32} + 7^{32})}{18^{64} - 7^{64}}$$

Návod. V prvním případě napište $70 = (71 - 1)$ a použijte vzorec

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$

Vzorec dokažte.

$$\text{Výsledky. } 71^{10}, \frac{1}{25}.$$

4. Uvnitř rovnostranného trojúhelníku ABC je zvolen bod P . Body D, E, F jsou paty kolmic z bodu P vedených postupně ke stranám BC, CA, AB . Dokažte, že

$$\frac{|PD| + |PE| + |PF|}{|BD| + |CE| + |AF|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

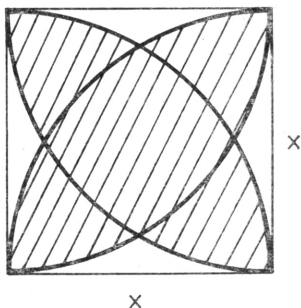
Návod. Ukažte, že hodnota činitele, a tedy ani hodnota jmenovatele, nezávisí na poloze bodu P . Přitom bod P může být nejen uvnitř trojúhelníku ABC , ale i na libovolné jeho straně. Pohybujte s bodem P po rovnoběžce s některou stranou trojúhelníku ABC .

5. Krychle má délku hrany x . Na každé stěně je vyšrafován obrazec znázorněný na obrázku 6.

Vypočtete, jak velká část povrchu krychle je vyšrafována.

Návod. Vypočtete obsahy nevyšrafovaných částí čtverce.

Výsledek. V jedné stěně a stejně na celé krychli je vyšrafováno $0,826 = 82,6 \%$ povrchu.



Obr. 6

6. Otec se rozhodl rozdělit svůj majetek svým synům takto: Nejstarší dostal 1 000 Kčs a jednu desetinu zbytku, druhý dostal 2 000 Kčs a jednu desetinu nového zbytku. Třetí syn dostal 3 000 Kčs a opět desetinu zbytku. Tak postupovalo dělení i mezi ostatní syny. Ukázalo se, že všichni synové dostali stejný díl. Vypočítejte celkovou hodnotu otcova majetku, kolik korun dostal každý syn a kolik jich bylo.

Výsledek. 81 000 Kčs, 9 000 Kčs pro každého z devíti synů.

ÚLOHY II. KOLA

Z8 - II - 1

Jestliže napíšeme čtyři za sebou jdoucí nenulové číslice ve vzestupném pořadí za sebou, dostaneme čtyřciferné číslo.

a) Dokažte, že je možné zaměnit pořadí posledních tří číslic tak, že vznikne čtyřciferné číslo dělitelné číslem 11.

b) Kolik čtyřciferných čísel dělitelných jedenácti je možno tímto způsobem vytvořit ze všech čtveřic po sobě jdoucích číslic? (7 bodů)

Řešení. Nejmenší číslo, které můžeme napsat, je $a = 1\,234$. Záměnou pořadí posledních tří číslic dostaneme z čísla a pět dalších čísel:

$$1\,234 \quad \underline{1\,243} \quad 1\,324 \quad \underline{1\,342} \quad 1\,423 \quad 1\,432 \quad (1)$$

Z nich jsou dělitelná číslem 11 jen dvě podtržená čísla $1\,243$ a $1\,342$, neboť

$$1\,234 = 11 \cdot 112 + 2$$

$$\underline{1\,342} = 11 \cdot 122$$

$$\underline{1\,243} = 11 \cdot 113$$

$$1\,423 = 11 \cdot 129 + 4$$

$$1\,324 = 11 \cdot 120 + 4$$

$$1\,432 = 11 \cdot 130 + 2.$$

Přičteme-li k číslům (1) postupně pětkrát za sebou číslo 1 111, dostaneme všechna možná výchozí čísla i čísla, která z nich vzniknou záměnou pořadí posledních tří číslic. Protože přičítáme násobek čísla 11 ($1\,111 = 11 \cdot 101$), vzniknou z čísel, která jsou násobky 11, zase násobky čísla 11 a z čísel, která nejsou násobky čísla 11, zase čísla, která nejsou násobky 11. (Můžete se o tom přesvědčit, když tato čísla vypíšete.) Tak dostaneme celkem 12 násobků čísla 11:

1 243

1 342

2 354

2 453

3 465

3 564

4 576

4 675

5 687

5 786

6 798

6 897

Poznámka. Pravděpodobně znáte znaky dělitelnosti přirozených čísel čísly 2, 3, 4, 5, 6, 9. Také pro dělitelnost číslem 11 lze uvést znak dělitelnosti. Ukážeme si to na dvou příkladech:

$$a = 724\,563 \quad b = 96\,844$$

Najdeme ciferné součty číslíc, které stojí jednak na lichém místě, jednak na sudém místě od konce. Je-li jejich rozdíl násobkem čísla 11, je i dané číslo násobek 11. V opačném případě není dané číslo násobkem čísla 11.

$$\begin{array}{rcl} a = 724\,563 & 2 + 5 + 3 = 10 \\ & 7 + 4 + 6 = 17 \\ \hline & 17 - 10 = 7 \end{array}$$

Číslo 7 ani číslo a nejsou násobky čísla 11.

$$\begin{array}{rcl} b = 96\,844 & 9 + 8 + 4 = 21 \\ & 6 + 4 = 10 \\ \hline & 21 - 10 = 11 \end{array}$$

Číslo 11 a tedy i číslo b jsou násobky čísla 11.

Ověříme znak dělitelnosti číslem 11 pro případ čísla $b = 96\,844$:

$$\begin{aligned} 96\,844 &= 9 \cdot 10\,000 + 6 \cdot 1\,000 + 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 4 = \\ &= 9 \cdot (9\,999 + 1) + 6 \cdot (1\,001 - 1) + 8 \cdot (99 + 1) + \\ &\quad + 4 \cdot (11 - 1) + 4 = \\ &= (9 \cdot 9\,999 + 6 \cdot 1\,001 + 8 \cdot 99 + 4 \cdot 11) + \\ &\quad + (9 + 8 + 4) - (6 + 4) \end{aligned}$$

Součet čísel v první závorce (předposlední řádek na str. 41) je násobek čísla 11, protože podtržená čísla jsou násobky čísla 11. Druhá a třetí závorka se rovná zmíněným ciferným součtům. Dané číslo je dělitelné číslem 11, je-li dělitelný číslem 11 i rozdíl zmíněných ciferných součtů.

Ověřte si sami podobným postupem, že číslo $a = 724563$ není násobkem čísla 11.

Z8 - II - 2

Podle dohody mezi žáky třídy, kteří se zúčastnili sběru, se peníze za sběr rozdělily takto: První žák dostal 2 Kčs a jednu třicetinu zbytku, druhý dostal 4 Kčs a jednu třicetinu nového zbytku, třetí dostal 6 Kčs a jednu třicetinu dalšího zbytku atd. Všichni obdrželi stejnou částku. Kolik žáků se sběru zúčastnilo a kolik korun za sběr obdrželi dohromady?

(5 bodů)

Řešení. Označíme x celkový počet obdržených korun. První dva žáci dostali:

$$1. \text{ žák} \dots\dots\dots 2 + \frac{x - 2}{30}$$

$$2. \text{ žák} \dots\dots\dots 4 + \left[x - \left(2 + \frac{x - 2}{30} \right) - 4 \right] : 30$$

Ale oba dostali stejně. Porovnáním obou částek dostaneme rovnici:

$$2 + \frac{x-2}{30} = 4 + \left[x - \left(2 + \frac{x-2}{30} \right) - 4 \right] : 30$$

Rovnici řešíme obvyklým způsobem. Nejdříve násobíme obě strany číslem 30:

$$60 + (x - 2) = 120 + \left[x - \left(2 + \frac{x-2}{30} \right) - 4 \right]$$

Sečtením dostaneme

$$\frac{x-2}{30} = 56$$

a odtud snadno vypočteme $x = 1\,682$. Celkově dostali žáci za sběr 1 682 Kčs.

První žák dostal

$$2 + \frac{1\,682 - 2}{30} = 58$$

korun. Protože všichni žáci dostali stejně, můžeme vypočítat, kolik žáků bylo celkem:

$$1\,682 : 58 = 29$$

Musíme ovšem udělat zkoušku. Přinejmenším už proto, že jsme při řešení vůbec nevyužili podmínky pro způsob odměny ostatních žáků počínaje od třetího žáka.

Zkouška. Víme, že první dva žáci dostali po 58 Kčs. Další dostali:

$$3. \text{ žák } \dots\dots\dots 6 + \frac{1\,682 - 2 \cdot 58 - 6}{30} = 58$$

$$4. \text{ žák} \dots\dots\dots 8 + \frac{1\,682 - 3.58 - 8}{30} = 58$$

Tak bychom mohli postupovat dále. Výpočet však můžeme provést obecně:

$$n\text{-tý žák} \dots\dots\dots 2n + \frac{1\,682 - (n - 1).58 - 2n}{30}$$

Tento výraz postupně upravíme na tvar

$$2n + \frac{1\,740 - 60n}{30} = 58.$$

Podle podmínek úlohy musí být jedna třicetina ze zbytku nezáporné číslo, tedy

$$1\,740 - 60n \geq 0.$$

Odtud plyne $n \leq 29$. Poslední žák je tedy skutečně devětadvacátý.

Poznámka. Provedení zkoušky se od žáků v soutěži nepožadovalo.

Z8 - II - 3

Výška rovnoramenného trojúhelníku ABC k jeho základně AB je $v = 8$ cm. Vypočtete délku ramene AC a délku základny AB , jestliže jsou vyjádřeny přirozenými čísly.

(6 bodů)

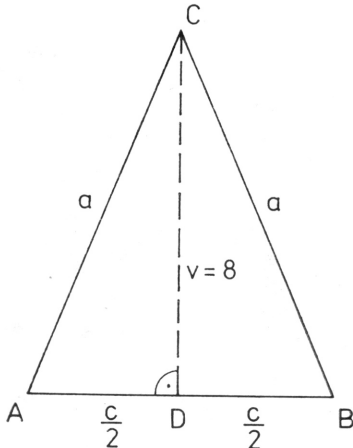
Řešení. Načrtneme si obrázek 7. Výška CD rovnoramenného trojúhelníku ABC půlí základnu AB , takže $|AD| = |DB| = \frac{c}{2}$. Pomocí Pythagorovy věty dostaneme z pravoúhlého trojúhelníku ADC

$$64 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

neboli

$$64 = \left(a - \frac{c}{2}\right)\left(a + \frac{c}{2}\right).$$

Na pravé straně je součin dvou různých činitelů, neboť $c \neq 0$. Proto rozložíme i číslo 64 na součin dvou různých činitelů. Jsou 3 možnosti:



Obr. 7

$$64 = 1.64 = 2.32 = 4.16$$

Odtud dostaneme 3 soustavy rovnic:

$$a - \frac{c}{2} = 1$$

$$a - \frac{c}{2} = 2$$

$$a - \frac{c}{2} = 4$$

$$a + \frac{c}{2} = 64$$

$$a + \frac{c}{2} = 32$$

$$a + \frac{c}{2} = 16$$

Snadno vypočteme kořeny těchto soustav:

$$a = 32,5$$

$$a = 17$$

$$a = 10$$

$$c = 63$$

$$c = 30$$

$$c = 12$$

Protože délky stran mají být vyjádřeny celými čísly, vyhovují úloze jen dvě z těchto řešení.

V obou případech jsou trojúhelníkové nerovnosti pro strany a a c splněny. Ověřte to sami.

Z8 - II - 4

Napište rozdíl $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ jako součin dvou výrazů, z nichž

jeden je $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. (5 bodů)

Řešení. Neznámý výraz označíme V . Platí tedy

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \cdot V = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}.$$

Zlomky uvedeme na společné jmenovatele

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \cdot V = \frac{a^2 - b^2}{ab}.$$

Rovnost vynásobíme součinem ab a pak vypočteme V .

$$V = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Výsledek je tedy

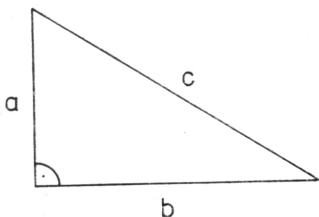
$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

ÚLOHY III. (KRAJSKÉHO) KOLA V ČSR

Z8 - III - 1

Určete délky stran pravoúhlého trojúhelníku s obsahem $S = 312 \text{ cm}^2$, jestliže součet celočíselných délek obou jeho odvěsen je 50 cm. (5 bodů)

1. řešení (pomocí dělitelnosti). Načrtneme si obrázek 8 a označíme délky stran. Obsah trojúhelníku vypočteme



$$S = \frac{1}{2} ab = 312 \text{ cm}^2.$$

Obr. 8

Můžeme sestavit soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} ab & = & 624 \\ \hline a + b & = & 50 \end{array} \quad (1)$$

Protože a , b jsou celá čísla, rozložíme číslo 624 na součin takových dvou činitelů, jejichž součet je roven 50. Nejdříve rozložíme číslo 624 na součin prvočísel

$$624 = 2^4 \cdot 3 \cdot 13.$$

Nyní snadno rozložíme číslo 624 na součin dvou přirozených činitelů. Nemusíme však vypisovat všechny možnosti, stačí jen ty, kde menší z obou činitelů je menší než 50 (neboť $a + b = 50$). Je celkem 10 možností:

$624 = 1 \cdot 624$	$624 = 8 \cdot 78$
$2 \cdot 312$	$12 \cdot 52$
$3 \cdot 208$	$13 \cdot 48$
$4 \cdot 156$	$16 \cdot 39$
$6 \cdot 104$	$24 \cdot 26$

Podle podmínky úlohy musí být součet činitelů roven 50. Tomu vyhovuje jen rozklad

$$624 = 24 \cdot 26.$$

Odvěsny hledaného trojúhelníku mají tedy délky 24 cm a 26 cm. Podle Pythagorovy věty vypočteme délku přepony

$$c = \sqrt[3]{24^2 + 26^2} = \sqrt[3]{1\,252} \doteq 35,4.$$

Přepona má tedy přibližně délku 35,4 cm.

2. řešení (užitím algebry). Soustavu rovnic (1) můžeme řešit algebraicky. První rovnici násobíme číslem 4 a druhou rovnici umocníme na druhou:

$$4ab = 2\,496$$

$$\underline{a^2 + 2ab + b^2 = 2\,500}$$

Odečteme-li od druhé rovnice první rovnici, dostaneme

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4$$

neboli

$$(a - b)^2 = 4.$$

Můžeme předpokládat, že $a > b$, takže

$$a - b = 2.$$

Odtud a z druhé rovnice soustavy (1) snadno vypočteme

$$a = 26, \quad b = 24.$$

3. řešení (experimentální). Soustavu (1) řešíme experimentálně tak, že číslo 50 rozložíme všemi možnými způsoby na součet dvou přirozených čísel, a pak ověříme, zda je splněna rovnost $\frac{1}{2}a \cdot b = 312$. Vlastní řešení přenecháme čtenářům.

Z8 - III - 2

Pro které reálné číslo a je hodnota výrazu $V = (a + 2)^2 + (1 - a)^2$ nejmenší? Určete tuto hodnotu. (4 body)

Řešení. Výraz V snadno upravíme na tvar

$$V = 2a^2 + 2a + 5.$$

Zde použijeme v matematice často používané úpravy. Vytkneme koeficient při kvadratickém členu z prvních dvou členů:

$$V = 2(a^2 + a) + 5$$

Pak výraz v závorce doplníme na druhou mocninu dvojčlenu:

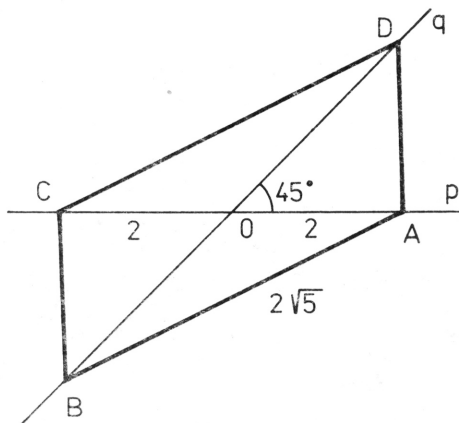
$$\begin{aligned} V &= 2\left(a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 5 = \\ &= 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 5 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Tento výraz bude zřejmě nejmenší pro $a = -\frac{1}{2}$ a jeho hodnota se bude rovnat $\frac{9}{2}$.

Z8 - III - 3

V kosodélníku má jedna strana délku $2\sqrt{5}$ cm. Jeho úhlopříčky, z nichž jedna má délku 4 cm, svírají úhel 45° . Jak je dlouhá zbývající úhlopříčka? Sestrojte kosodélník a určete jeho obsah. Kolik má úloha řešení? (6 bodů)

Řešení. a) Konstrukce kosodélníku. Načtneme a popíšeme si obrázek 9.



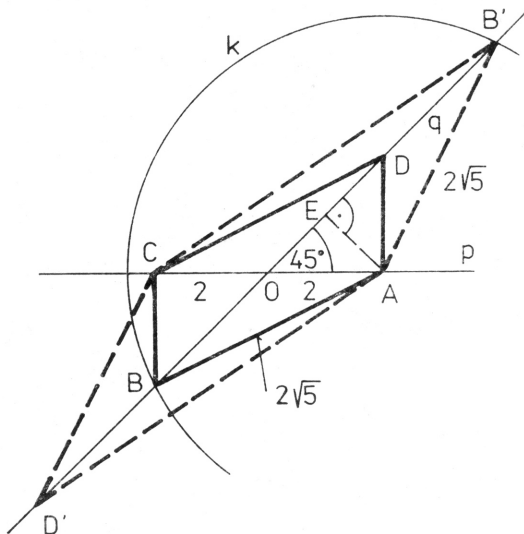
Obr. 9

Z něho snadno nahlédneme konstrukci; např. (obr. 10).

1. $AC: |AC| = 4 \text{ cm}$
2. O : střed AC
3. q : přímka jdoucí bodem O a svírající s AC úhel 45°
4. k : kružnice $k(A; 2\sqrt{5} \text{ cm})^*$
5. B : $B \in k \cap q$ (2 možnosti)
6. D : úsečku BO přeneseme na polopřímku opačnou k polopřímce OB
7. Kosodélník $ABCD$

*) Protože je $2\sqrt{5} = \sqrt{20} = \sqrt{4^2 + 2^2}$, sestojíme poloměr kružnice k jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délek 4 cm a 2 cm.

Úloha má 2 řešení, na obr. 10 jsou to kosodélníky $ABCD$, $AB'CD'$.



Obr. 10

b) Výpočet délek úhlopříček BD a $B'D'$. Z bodu A vedeme kolmici k přímce BD , její patu označíme E . Trojúhelník AEO je pravoúhlý s jedním ostrým úhlem 45° . Proto je i jeho druhý úhel roven 45° a trojúhelník AEO je rovnoramenný. Snadno vypočteme délky jeho odvěsen $|OE| = |AE| = \sqrt{2}$.

Bod E je střed základny BB' rovnoramenného trojúhelníku ABB' . Proto je $|BE| = |B'E|$. Délku BE vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku ABE podle Pythagorovy věty

$$|BE| = \sqrt{|AB|^2 - |AE|^2}$$

$$|BE| = \sqrt{20 - 2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Nyní vypočteme poloviny délek úhlopříček BD a $B'D'$.

$$\frac{1}{2}|BD| = |BO| = |BE| - |OE| = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}|B'D'| = |B'O| = |B'E| + |OE| = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Celé úhlopříčky mají tedy délky

$$|BD| = 4\sqrt{2}, \quad |B'D'| = 8\sqrt{2}.$$

c) Výpočet obsahů kosodélníků $ABCD$ a $AB'CD'$. Obsah S kosodélníku $ABCD$ je roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníku ABD .

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}|BD| \cdot |AE| = |BD| \cdot |AE|$$

$$S = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$$

$$S = 8 \text{ cm}^2$$

Podobně vypočteme obsah S' kosodélníku $AB'CD'$.

$$S' = 16 \text{ cm}^2$$

Z8 - I - 4

Adam, Bořek a Cyril měli poštovní známky, ale o různém počtu kusů. Když dal Adam Cyrilovi sedminu ze svého počtu,

měli Adam a Cyril stejný počet známek. Když pak ještě Bořek dostal od obou (Adama a Cyrila) po třiceti známkách, měli všichni stejný počet známek. Kolik kusů známek měl původně každý z chlapců, jestliže na začátku měli Bořek s Cyrilem dohromady o 110 kusů známek více než měl Adam?

(5 bodů)

Řešení. Počty známek, které měli na začátku Bořek a Cyril, označíme postupně b , c . Další podmínky zapíšeme do tabulky.

	Adam	Bořek	Cyril
Na začátku	$b + c - 110$	b	c
Po 1. předání	$\frac{6}{7}(b + c - 110)$	b	$c + \frac{1}{7}(b + c - 110) =$ $= \frac{1}{7}(b + 8c - 110)$
Po 2. předání	$\frac{6}{7}(b + c - 110) - 30 =$ $= \frac{6}{7}(b + c - 145)$	$b + 60$	$\frac{1}{7}(b + 8c - 110) - 30 =$ $= \frac{1}{7}(b + 8c - 320)$

Zapišeme rovnicemi stavy známek po 1. a po 2. předání:

$$\frac{6}{7}(b + c - 110) = \frac{1}{7}(b + 8c - 110)$$

$$\frac{6}{7}(b + c - 145) = b + 60$$

Po odstranění zlomků a jednoduché úpravě dostaneme:

$$5b - 2c = 550$$

$$\underline{-b + 6c = 1\,290}$$

Řešením této soustavy zjistíme, že na začátku měli Bořek a Cyril tyto počty známek:

$$b = 210, c = 250$$

Z 1. řádku tabulky vypočteme, že Adam měl na začátku 350 známek.

Zkouškou ověřte sami, že nalezené řešení vyhovuje všem daným podmínkám.

ÚLOHY III. (KRAJSKÉHO) KOLA V SSR

Z8 - III - 1

Nájdite najmenšie prirodzené číslo väčšie ako 100 000, ktoré sa dá zapísať pomocou číslic 6, 8 a ktoré je násobkom čísla 72.

Řešení. Hledané číslo bude aspoň šesticiferné. Protože má být násobkem čísla $72 = 9 \cdot 8$, musí být i násobkem čísel 9 a 8. Aby bylo násobkem čísla 9, musí být jeho ciferný součet také násobkem čísla 9.

Vypočteme ciferné součty všech šesticiferných čísel zapsaných pomocí číslic 6 a 8.

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36$$

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 8 = 38$$

$$6 + 6 + 6 + 6 + 8 + 8 = 40$$

.....

$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$$

Jedině 36 je násobek čísla 9. Ale číslo 666 666 není násobkem čísla 8.

Hledané číslo bude tedy aspoň sedmiciferné. Vypočteme opět ciferné součty všech čísel sestavených z číslic 6 a 8.

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 42$$

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 8 = 44$$

.....

$$6 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 54$$

$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 56$$

Mezi nimi je jediný násobek čísla 9, tj. číslo 54. Nejmenší číslo sestavené z jedné šestky a šesti osmiček je číslo 6 888 888. Snadno zjistíme, že je také násobkem čísla 8, a tedy i 72.

Poznámka. Chceme-li vyzkoušet, zda číslo 6 888 888 je

násobkem čísla 8, nemusíme je celé dělit. Stačí použít znaku dělitelnosti číslem 8:

Přirozené číslo je násobkem čísla 8, právě když číslo určené posledním trojčíslím je násobkem čísla 8.

Důkaz plyne ihned z rozkladu tvaru

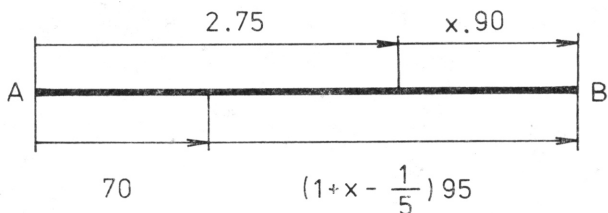
$$6\,888\,888 = 6\,888 \cdot 1\,000 + 888 = 6\,888 \cdot 125 \cdot 8 + 888.$$

Podrobnosti důkazu přenecháváme čtenářům.

Z8 - III - 2

Z místa A do místa B išli dve autá. Prvé auto išlo 2 hodiny rýchlosťou 75 km/h a potom zrýchlilo na 90 km/h. Druhé auto išlo jednu hodinu rýchlosťou 70 km/h a potom zvýšilo rýchlosť na 95 km/h. Do miesta B dorazilo druhé auto o 12 minút skôr než prvé. Aká je vzdialenosť medzi miestami A a B?

Řešení. Načrtneme si obrázek 11. Dobu jízdy prvního auta zvýšenou rychlostí 90 km/h označíme x .



Obr. 11

První auto ujelo dráhu dlouhou

$$2.75 + x \cdot 90 = 150 + 90x. \quad (1)$$

Druhé auto přijelo o 12 minut, tj. o $\frac{1}{5}$ hodiny do B dříve než první auto. Ujelo celkovou dráhu

$$70 + \left(1 + x - \frac{1}{5}\right)95 = 146 + 95x. \quad (2)$$

Obě auta ujela stejnou vzdálenost. Dostáváme rovnici

$$150 + 90x = 146 + 95x.$$

Její kořen je $x = \frac{4}{5} = 0,8$. Vzdálenost mezi A, B vypočítáme dosazením $x = 0,8$ do výrazu (1) nebo (2). Vyjde $|AB| = 222$ km.

Zkoušku si udělejte sami.

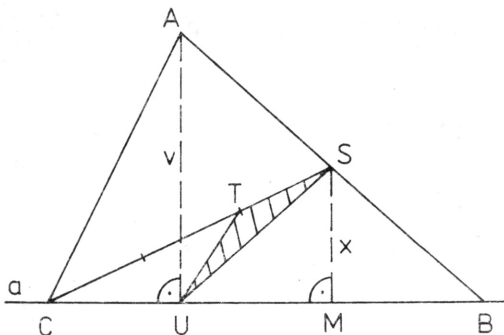
Z8 - III - 3

V rovine je daný trojúhelník STU . Zostrojte trojúhelník ABC tak, aby platilo: S je střed strany AB , T je ťažisko trojúhelníka ABC a U je pĕta výšky vedenej vrcholem A .

Řešení. Načrtne si obrázek 12. Těžiště T dělí těžnici CS v poměru $2 : 1$, proto je $CT = 2TS$. Výška trojúhelníku z vrcholu A se rovná dvojnásobku vzdálenosti bodu S od přímky CB , tj. $v = 2x$. To nám stačí k sestrojení trojúhelníku ABC .

Popis konstrukce

1. $\triangle STU$
2. C : C leží na polopřímce opačné k TS ; $CT = 2TS$
3. a : $a = \leftrightarrow CU$



Obr. 12

4. x : x je vzdálenost S od přímky a
5. A : A leží v polovině aS na kolmici vedené bodem U k přímce a ve vzdálenosti $v = 2x$
6. B : $B \in a \cap \leftrightarrow AS$
7. $\triangle ABC$

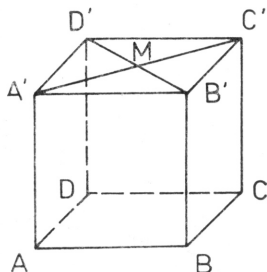
Zkouška. Bod S je středem strany AB , neboť úsečka SM je střední příčkou trojúhelníku ABU ($SM \parallel AU$ a $|SM| = \frac{1}{2}|AU|$). Z konstrukce plyne, že T je těžiště a U pata výšky z vrcholu A .

Z8 - III - 4

Daná je kocka $ABCD A' B' C' D'$ s hranou délky 1 m. V strede M steny $A' B' C' D'$ je mravec, ktorý dokáže prejsť 1 m za 1 minútu. Označme P všetky miesta na povrchu

kocky, ku kterým dokáže mravec přist za 1 minutu alebo kratší čas. Všetky tieto miesta tvoria časť povrchu kocky, ktorej obsah máte vypočítat.

Řešení. Načrtne si obrázek krychle (obr. 13) a rozvíme část povrchu, po kterém se může pohybovat mravenec (obr. 14 na str. 61).

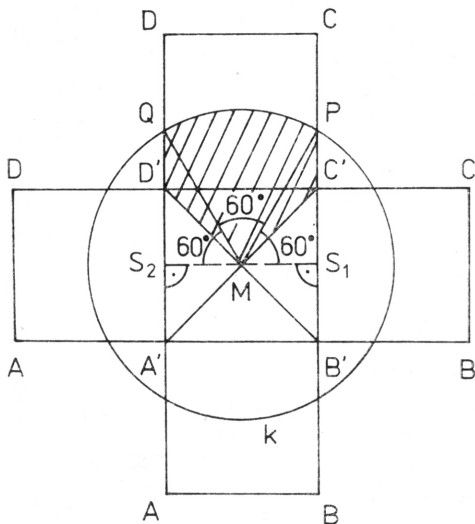


Obr. 13

Místa, kam může dorazit mravenec, jsou na síti (obr. 14) znázorněna jako průnik kruhu $k = (M; r = 1)$ a sítě. Obsah tohoto útvaru je roven čtyřnásobku obsahu útvaru $MC'PQD'$.

Nyní vypočteme obsah obrazce $MC'PQD'$. Všechny výpočty provádíme v metrech a čtverečných metrech. Obsah obrazce $MC'PQD'$ vypočteme jako součet obsahů dvou shodných trojúhelníků $MC'P$ a $MD'Q$ a kruhové výseče MPQ . Ze zadání a konstrukce plyne, že

$$|MP| = 1, \quad |MS_1| = \frac{1}{2}.$$



Obr. 14

Proto je pravoúhlý trojúhelník MS_1P roven polovině rovnostranného trojúhelníku, takže úhel S_1MP má velikost 60° . Podobně mají velikost 60° i úhly S_2MQ a PMQ .

Můžeme vypočítat délky stran PC' a QD' .

$$|PC'| = |PS_1| - |C'S_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Součet obsahů trojúhelníků $MC'P$ a MQD' je tedy roven

$$2 \cdot \frac{1}{2} |PC'| \cdot |MS_1| = \frac{1}{4} (\sqrt{3} - 1).$$

Obsah kruhové výseče MPQ je roven jedné šestině kruhu o poloměru $r = 1$, tj. $\frac{1}{6}\pi$. Obsah obrazce $MC'PQD'$ je roven

$$\frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1) + \frac{1}{6}\pi.$$

Obsah útvaru, který může dosáhnout mravenec, je roven čtyřnásobku, tedy

$$S = \sqrt{3} - 1 + \frac{2\pi}{3} \doteq 2,83.$$

Hledaný obsah je roven přibližně $2,8 \text{ m}^2$.

Poznámka. Je možné kontrolovat výsledek odhadem. Obsah hledaného útvaru je přibližně obsah kruhu o poloměru $r = 1 \text{ m}$ zmenšený o obsah čtyř pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků s odvěsnami délky $|PC'| = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$. Tedy obsah S je odhadem

$$\pi 1^2 - 2 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) \right]^2 \doteq 2,87.$$

Odhad vychází o něco větší, což je pochopitelné. (Proč?) Řádově však odhad souhlasí s výsledkem.

ÚLOHY I. KOLA

Z7 - I - 1

Námořník vzpomínal, že při poslední plavbě kolem Evropy vyplouval se svou lodí z Leningradu za krásného slunečného rána první pondělí v měsíci. První pondělí po první neděli v témže měsíci se koupal již v Kodani. Poslední sobotu před poslední nedělí v dalším měsíci si prohlížel Atény. Do Oděsy připlul poslední sobotu téhož měsíce. Určete den, měsíc a rok začátku a konce cesty. Příhoda není starší sedmi let. (Úloha byla zadána ve školním roce 1985/86.)

Řešení. První pondělí v měsíci (vyplutí z Leningradu) musí být 1. den tohoto měsíce. V opačném případě by následující pondělí (koupání v Kodani) nebylo prvním, ale druhým ponděním po první neděli v měsíci, viz tabulku A (str. 64). Podobně poslední sobota v následujícím měsíci (připlutí do Oděsy) musí být posledním dnem měsíce. V opačném případě by předcházející sobota (prohlídka Atén) nebyla poslední, ale předposlední sobotou před poslední nedělí. (Sestavte si sami tabulku obdobnou tab. A.)

Tabulka A

Ú	St	Č	Pá	So	Ne	Po	Ú	St	Č	Pá	So	Ne	Po
						1	2	3	4	5	6	7	8
					1	2	3	4	5	6	7	8	9
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Plavba trvala celé dva po sobě jdoucí měsíce. Počet dní těchto měsíců může být:

a) $28 + 31 = 59$

b) $29 + 31 = 60$

c) $30 + 31 = 61$

d) $31 + 31 = 62$

Je-li 1. den plavby pondělí, pak 59. den je středa, 60. den je čtvrtek, 61. den je pátek a konečně 62. den sobota. Protože plavba skončila v sobotu, trvala 62 dny a musela se uskutečnit buď v červenci a srpnu, nebo v prosinci a lednu.

V tabulce B je výpis z kalendářů z posledních 8 let.

Tabulka B

ROK	85	84	83	82	81	80	79	78
1. 12.	Ne	So	Č	St	Ú	Po	So	Pá
1. 7.	Po	Ne	Pá	Č	St	Ú	Ne	So

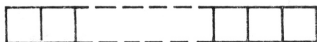
Z tabulky je vidět, že jsou dvě možnosti:

Začátek cesty 1. 7. 1985 nebo 1. 12. 1980 a konec cesty

31. 8. 1985 nebo 31. 1. 1981. (Protože se námořník během plavby koupal v Kodani, lze pokládat 1. možnost za pravděpodobnější.)

Z7 - I - 2

Pás je složen z 1 985 čtverců (obr. 15). V každém čtverci je jedna číslice. Dvojice sousedních číslic tvoří dvojciferné číslo, které je násobkem čísla 17 nebo 23. Určete první číslici, jestliže poslední číslo je 7.

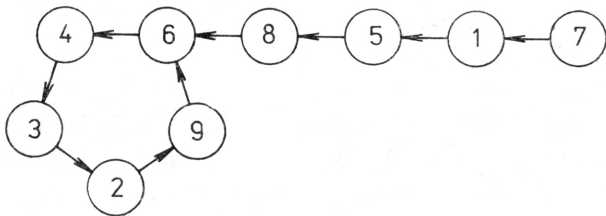


Obr. 15

Řešení. Napíšeme si dvojciferné násobky čísel 17 a 23:

$$17, 34, 51, 68, 85; \quad 23, 46, 69, 92 \quad (1)$$

Nejdříve si sestavíme pomocný šipkový diagram (obr. 16), který ukazuje, jakého souseda má nalevo každá číslice.

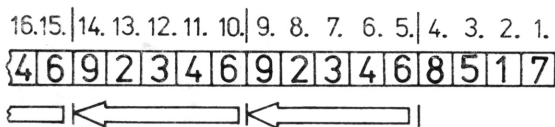


Obr. 16

Mezi násobky čísel 17 a 23 je jediné dvojciferné číslo končící číslicí 7 a to číslo 17. Číslice 7 má tedy levého souseda číslo 1. Mezi násobky (1) je opět jediné číslo, které končí číslicí 1, je to číslo 51. Číslici 1 musí tedy předcházet číslice 5. Tímto způsobem dostaneme diagram znázorněný na obrázku 16. Překontrolujte jej sami.

Z diagramu je vidět, že pás končí skupinou číslic 8 5 1 7 a před ní se opakují stále skupiny číslic 9 2 3 4 6.

Pole pásu očíslováme od konce (obr. 17). Vidíme, že do každého pole, jehož pořadové číslo je násobek čísla 5, je vepsána číslice 6. Tedy i poslední pole odprava, tj. pole číslo 1985, musí obsahovat číslici 6.

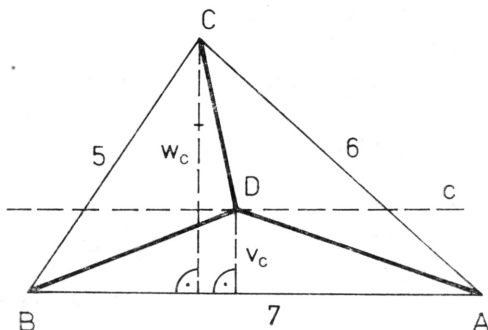


Obr. 17

Z7 - I - 3

Narýsujte trojúhelník ABC o stranách délek $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm. Sestrojte uvnitř trojúhelníku ABC bod D tak, aby trojúhelníky ABD , BCD a ACD měly stejný obsah.

Řešení. Načrtněte si obrázek 18. Trojúhelník ABC je rozložen na tři trojúhelníky ABD , BDC a CDA , které mají stejný obsah. Ten se tedy rovná jedné třetině obsahu S celého trojúhelníku ABC . Například obsah trojúhelníku ABD můžeme vypočítat dvěma způsoby:



Obr. 18

$$S_{ABD} = \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot w_c$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot v_c$$

Porovnáním pravých stran dostaneme

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot w_c = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot v_c,$$

odkud vyjde

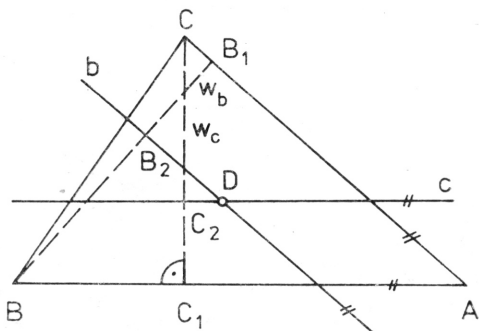
$$v_c = \frac{1}{3} w_c.$$

Bod D tedy leží na přímce c , která je rovnoběžná se stranou AB ve vzdálenosti rovné jedné třetině výšky w_c daného trojúhelníku ABC .

Podobnou úvahu můžeme opakovat pro zbývající dva trojúhelníky BDC a ADC .

Konstrukce (obr. 19)

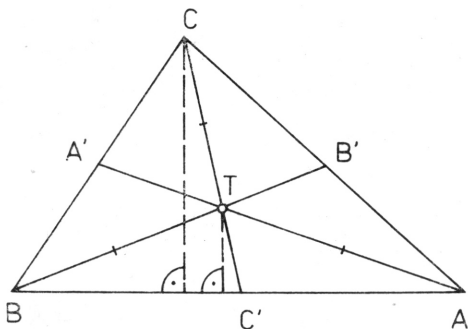
1. $\triangle ABC$: $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm
2. $w_c = CC_1$: výška ke straně AB
3. $C_2 : C_2 \in CC_1, CC_2 = \frac{2}{3}w_c$
4. c : $C_2 \in c, c \parallel AB$
5. Opakujeme kroky 2 až 4 pro jinou výšku např. $w_b = BB_1$
6. D : $D \in c \cap b$
7. $\triangle ABD, \triangle BCD, \triangle ACD$ (na obrázku nejsou vyznačeny)



Obr. 19

Zkouška. Sestrojené trojúhelníky dělí trojúhelník ABC na tři části téhož obsahu, neboť vždy mají některou stranu společnou s daným trojúhelníkem a příslušnou výšku rovnou jedné třetině odpovídající výšky trojúhelníku ABC .

Poznámka. Konstrukci lze provést jednodušeji. Bod D je totiž těžištěm trojúhelníku ABC , obr. 20. To plyne z toho,



Obr. 20

že těžiště T libovolného trojúhelníku ABC dělí každou těžnici na dvě části, jejichž délky jsou v poměru $2 : 1$, počínaje od vrcholu trojúhelníku. Proto má těžiště T od každé strany trojúhelníku ABC vzdálenost rovnou jedné třetině příslušné výšky.

Z7 - I - 4

Zvolíme libovolně osm po sobě následujících přirozených čísel. Zjistěte, kolik mezi nimi může být a) nejvýše, b) nejmeně prvočísel. Uveďte příklady.

Řešení. a) Mezi osmi po sobě jdoucími čísly jsou vždy čtyři čísla lichá a čtyři čísla sudá. Kromě čísla 2 jsou všechna prvočísla lichá. Není-li tedy mezi danými čísly dvojka, mohou být z nich nejvýše čtyři prvočísla. Zkusíme proto ještě případ, kdy mezi danými osmi čísly je dvojka. Jsou dvě možnosti.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

nebo

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ale i v těchto případech jsou mezi nimi jen čtyři prvočísla, a to 2, 3, 5, 7.

b) Nyní ukážeme, že mezi danými čísly nemusí být žádné prvočíslo. Stačí uvést příklad. Nejdříve najdeme nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. To je číslo 2 520. K němu přičteme čísla 2, 3, 4, ..., 9. Dostaneme osm čísel

2 522, 2 523, 2 524, 2 525, 2 526, 2 527, 2 528, 2 529.

Z nich první číslo je dělitelné číslem 2, druhé číslem 3, třetí číslem 4, atd. Žádné z těchto čísel není tedy prvočíslo.

Mezi osmi po sobě jdoucími celými čísly nemusí být žádné prvočíslo, nejvýše však jsou mezi nimi čtyři prvočísla.

Poznámka. Ověřte, že místo čísla 2 520 lze použít nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 5, 7, tj. 210.

Z7 - I - 5

Věžní hodiny odbíjejí malým zvonem každou čtvrt hodinu: první čtvrt jeden úder, druhá čtvrt dva údery, třetí čtvrt tři údery, čtvrtá čtvrt čtyři údery. Dále odbíjejí velkým zvonem na konci každé hodiny příslušný počet úderů (1, 2, 3, ..., 12 úderů). Zjistěte nejkratší dobu, za kterou můžeme slyšet 1 000 úderů. (Dobu mezi údery při odbíjení téže čtvrt hodiny nebo téže hodiny nepočítejte.)

Řešení. Údery se opakují ve dvanáctihodinovém cyklu. Zjistíme počet úderů během jednoho cyklu.

$$1. \text{ hodina: } 1 + 2 + 3 + 4 + 1$$

$$2. \text{ hodina: } 1 + 2 + 3 + 4 + 2$$

$$3. \text{ hodina: } 1 + 2 + 3 + 4 + 3$$

.....

$$12. \text{ hodina: } 1 + 2 + 3 + 4 + 12$$

Počet všech úderů je

$$12 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3 + \dots + 12) = 198.$$

Během pěti dvanáctihodinových cyklů odbijí hodiny $5 \cdot 198 = 990$ úderů.

Začneme-li poslouchat při odbíjení dvanácté hodiny, a pak posloucháme 5 celých dvanáctihodinových cyklů, uslyšíme dokonce

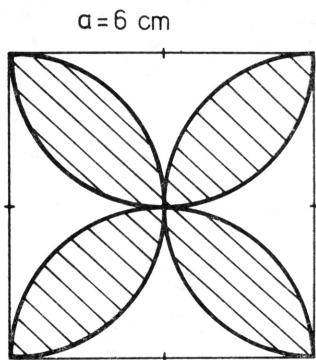
$$1 + 2 + 3 + 4 + 12 + 990 = 1012$$

úderů. Nejkratší doba je tedy 60 hodin.

Z7 - I - 6

Narýsujte čtyřlístek a vypočtěte jeho obsah; délka strany čtverce je $a = 6$ cm (obr. 21, str. 72).

Řešení. Narýsujeme čtverec o straně $a = 6$ cm. Čtyřlístek ohraničují čtyři půlkružnice o poloměrech 3 cm opsané ze středů stran narýsovaného čtverce.



Obr. 21

Čtyřlístek je složen ze čtyř částí, z nichž každá je průnikem dvou půlkruhů o poloměru $r = \frac{1}{2}a = 3 \text{ cm}$. Součet obsahů čtyř půlkruhů se rovná součtu dvojnásobného obsahu čtyřlístku a obsahu nevyšrafované části čtverce. Tedy součet obsahů čtyř půlkruhů o poloměru $r = 3 \text{ cm}$ se rovná součtu obsahu čtverce o straně $a = 6 \text{ cm}$ a hledaného obsahu S čtyřlístku.

$$4S_{\triangle} = a^2 + S$$

neboli

$$S = 4S_{\triangle} - a^2.$$

Po dosazení vypočteme:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot 3^2 - 6^2 = 18\pi - 36 = 18(\pi - 2)$$

$$S = 20,52 \doteq 20,5.$$

Obsah čtyřlístku je přibližně $20,5 \text{ cm}^2$.

Poznámka. Jsou další možné výpočty. Např. polovina každého ze 4 lístků má obsah rovný rozdílu obsahu čtvrtkruhu o poloměru $r = 3$ cm a poloviny obsahu čtverce o straně délky 3 cm.

ÚLOHY II. KOLA

Z7 - II - 1

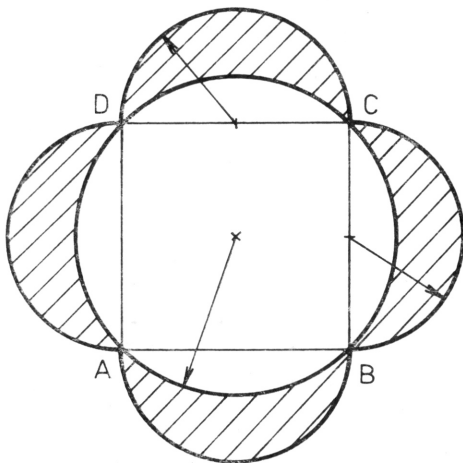
V krabici je 666 hracích kostek. Jirka je postupně bere z krabice a pokládá na stůl. První kostku položí s jedním okem nahoru, pak dvě kostky se dvěma oky nahoru, dále tři kostky se třemi oky nahoru atd., až šest kostek s šesti oky nahoru. Potom vše začne opakovat, tj. opět položí jednu kostku jedním okem nahoru atd. dokud se krabice nevyprázdní. Vypočtete součet všech ok na horních stěnách kostek. (4 body)

Řešení. Situace se opakuje vždy po položení 21 kostek. Na jejich horních stěnách je celkem

$$1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5 + 6.6 = 91 \text{ ok.}$$

Ze 666 kostek vznikne 31 úplných skupin, které se skládají z 21 kostek a zbude neúplná skupina s 15 kostkami ($666 : 21 = 31$, zbytek 15). Na 31 úplných skupinách po 21 kostkách je na horních stěnách celkem $31.91 = 2821$ ok. Na posledních 15 kostkách je na horních stěnách $1.1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5 = 55$ ok. Celkový počet ok, která vidíme na horních stěnách, je roven součtu čísel $2821 + 55$, což je 2 876.

Vypočtete součet obsahů čtyř měsíčků, které jsou sestaveny nad stranami čtverce $ABCD$ (obr. 22); $|AB| = 6$ cm. Porovnejte výsledek s obsahem čtverce $ABCD$. (5 bodů)



Obr. 22

Řešení. V celém řešení jsou délky vyjádřeny v centimetrech a obsahy v centimetrech čtverečných. Průměr d a poloměr r kruhu opsaného čtverci $ABCD$ jsou

$$d = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}, \quad r = 3\sqrt{2}.$$

Obsah kruhu opsaného čtverci $ABCD$ je

$$S_1 = \pi \cdot (3\sqrt{2})^2 = 18\pi.$$

Čtyři půlkruhy opsané nad stranami čtverce $ABCD$ mají dohromady obsah

$$S_2 = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 18 \cdot \pi.$$

Obsah čtverce $ABCD$ je

$$S_3 = 6^2 = 36.$$

Součet obsahů všech čtyř měsíčků je

$$S = S_3 + S_2 - S_1 = 36 + 18 \cdot \pi - 18 \cdot \pi = 36.$$

Součet obsahů všech čtyř měsíčků je stejný jako obsah čtverce $ABCD$ a rovná se 36 cm^2 .

Poznámka. Všimněte si, že za číslo π jsme v celém řešení nemuseli dosazovat. Tím se výpočet značně zjednodušil.

Z7 - II - 3

Určete prvních 9 a posledních 9 číslic podílu

$$\underbrace{3\,000 \dots\dots\dots 000}_{99 \text{ nul}} 7 : 37.$$

99 nul

Udejte také zbytek.

(6 bodů)

Řešení. Postupným dělením se zjistí, že dokud sepisujeme k dílčím zbytkům nuly, opakuje se v podílu trojice číslic 810:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 000 \, 000 \, 000 \, \dots : 37 = 810 \, 810 \, \dots \\ \hline & 40 \\ \hline & 300 \\ \hline & 40 \\ \hline & 300 \\ \hline & 40 \\ \hline & 3 \end{array}$$

Částečný zbytek 3 vyjde vždy pod každou třetí nulou, tedy i pod 99. nulou. Takže konec dělení má tvar

$$\begin{array}{r} \dots 000 \overline{) 000} 7 : 37 = \dots 811 . \\ \underline{3 } 00 \\ 40 \\ \underline{3 } 7 \\ 0 \end{array}$$

Podíl je proto roven číslu

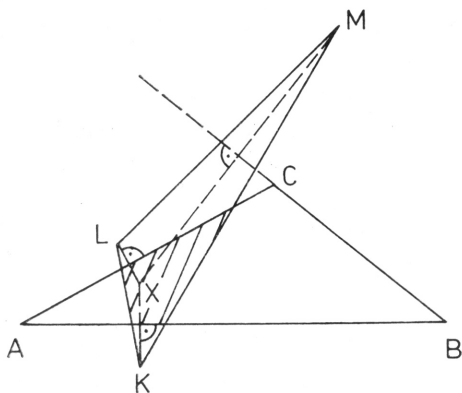
$$\underbrace{810 \, 810 \, 810 \, \dots \, 810 \, 810 \, 811.}_{32\text{krát trojice } 810}$$

Zbytek je nula.

Z7 - II - 4

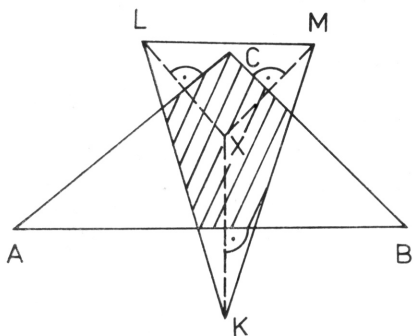
Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a zvolte jeho bod X neležící na žádné straně. Sestrojte k bodu X body souměrně sdružené podle přímek AB , AC , BC a označte je postupně K , L , M . Vyznačte průnik trojúhelníků ABC a KLM . Měňte tvar trojúhelníku ABC i polohu bodu X a zjistěte, zda průnikem může být čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník. Výsledky narýsujte. (5 bodů)

Řešení. Průnikem může být čtyřúhelník, pětiúhelník i šestiúhelník. Čtyřúhelník jen v případě, že trojúhelník ABC je tupoúhlý a bod X zvolíme dostatečně blízko vrcholu jednoho nebo druhého ostrého vnitřního úhlu trojúhelníku ABC

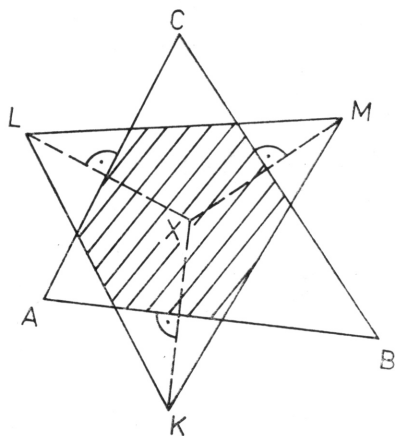


Obr. 23a

(obr. 23a). Pětiúhelník může vzniknout pro pravoúhlý nebo tupouhlý trojúhelník ABC (obr. 23b). Šestiúhelník může vzniknout jen pro ostroúhlý trojúhelník ABC (obr. 23c).



Obr. 23b



Obr. 23c

ÚLOHY I. KOLA

Z6 - I - 1

Daný je rovnobežník $ABCD$: $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 6$ cm, $\angle DAB = 60^\circ$. Rozdeľte daný rovnobežník na 6 zhodných trojuholníkov. Zhodnosť trojuholníkov dokážte.

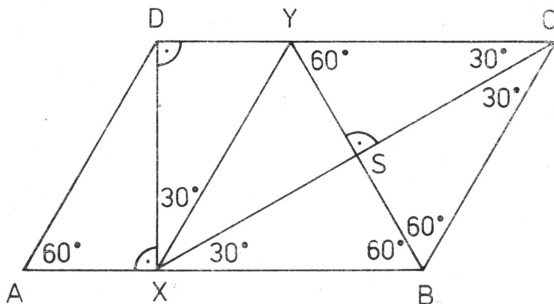
Riešenie (obr. 24)

1. Priamka CX je osou uhla BCD . Potom platí:

$$\angle XCB = \angle XCY = 30^\circ$$

$$\angle YCX = \angle CXB = 30^\circ \dots \text{striedavé uhly}$$

Z toho vyplýva, že trojuholník XBC je rovnoramenný.



Obr. 24

Priamka BY je osou uhla XBC , z toho

$$\triangle XBS \cong \triangle BCS \text{ (usu).}$$

2. Trojuholník BCY je rovnostranný; z toho vyplýva
 $v(\sphericalangle YBC) = v(\sphericalangle BCY) = v(\sphericalangle BYC) = 60^\circ$,
 uhol BYC a uhol XBS sú striedavé, z toho vyplýva:

$$\triangle BCS \cong \triangle CYS$$

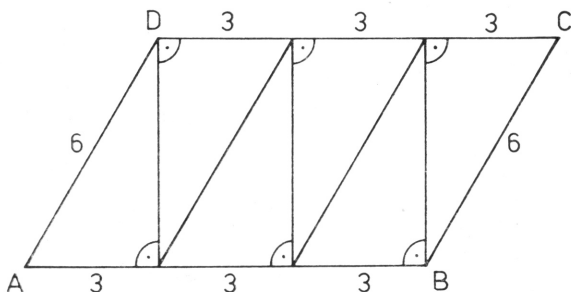
3. $\triangle XSY \cong \triangle CSY$ (sus)

4. $\triangle XYD \cong \triangle XYS$ (usu)

5. $\triangle XYD \cong \triangle DAX$ (usu)

Teda: $\triangle AXD \cong \triangle YDX \cong \triangle YSX \cong \triangle BSX \cong$
 $\cong \triangle BSC \cong \triangle YSC$

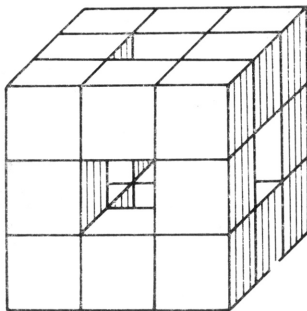
Poznámka. Iné riešenie je na obr. 25.



Obr. 25

Z6 - 1 - 2

Samko mal 100 kusov samolepiek tvaru štvorca so stranou 3 cm. Koľko samolepiek mu ostalo, ak nimi oblepil steny telesa »deravej kocky« (aj znútra) znázornenej na obrázku 26? Teleso je postavené z 20-tich zhodných kociek s hranou 3 cm.

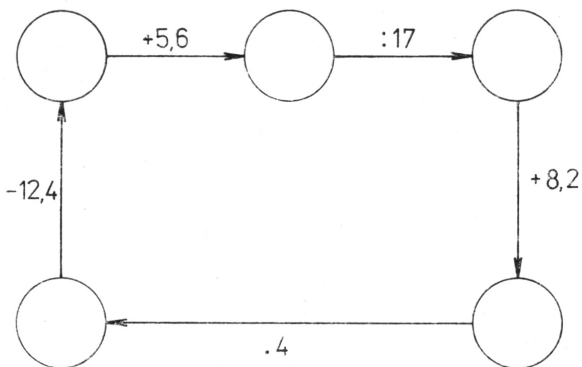


Obr. 26

Riešenie. Na každú stenu potrebujeme 8 ks, tj. $6 \cdot 8 = 48$ ks, na každú »dieru« potrebujeme 4 ks, tj. $6 \cdot 4 = 24$ ks. $100 - (48 + 24) = 28$. Samkovi ostalo 28 samolepiek.

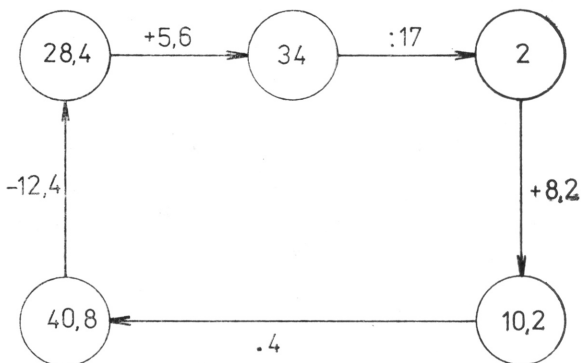
Z6 - 1 - 3

Do krúžkov vpište čísla tak, aby zodpovedali uvedeným počtovým výkonom. (Pozri obrázok 27.) (Ak nerozumiete zadaniu, pozrite úlohu Z5-I-5.)



Obr. 27

Riešenie (obr. 28)



Obr. 28

Príklad možno riešiť experimentálne, alebo rovnicou.

$$[(x + 5,6) : 17 + 8,2] \cdot 4 - 12,4 = x$$

$$x = 28,4$$

Z6 - I - 4

Názov mesta sa píše piatimi písmenami. Keď každé písmeno nahradíme poradovým číslom abecedy (A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, ...; nezabudnite na CH), dostaneme čísla, ktoré majú tieto vlastnosti: Súčet všetkých piatich čísel sa rovná $\frac{1}{4}$ z 256. Tretie číslo je väčšie ako všetky ostatné, a to od druhého o 10, od prvého o 5, od štvrtého o 2 a od piateho o 19. Aký je názov mesta?

Riešenie. Označme 3. číslo x , potom

1. číslo je $x - 5$,
2. číslo je $x - 10$,
4. číslo je $x - 2$,
5. číslo je $x - 19$.

Ich súčet je

$$x + (x - 5) + (x - 10) + (x - 2) + (x - 19) = 5x - 36.$$

Pritom súčet všetkých piatich čísel má byť $\frac{1}{4}$ z 256, čo je 64. Teda

$$5x - 36 = 64$$

$$5x = 100$$

$$x = 20.$$

Tieto čísla sú v poradí: 15, 10, 20, 18, 1. Priradíme im písmená N I T R A.

Z6 - I - 5

Karol má telefónne číslo $abcd$, Marián má telefónne číslo $mnpq$. Tieto čísla sú zaujímavé tým, že spolu obsahujú všetky číslice od 1 až po 9, každú číslicu práve jeden raz. Pritom súčin týchto dvoch čísel je najväčší možný. Zistite, aké telefónne čísla majú Karol a Marián.

1. riešenie. Hľadáme také dve čísla A , B (štvorciferné a päťciferné), aby obsahovali každú cifru 1 až 9 práve raz a pritom ich súčin bol čo najväčší. Aby to platilo, musia mať čísla A , B na prvom mieste cifru 9 a 8 a na druhom mieste cifru 7 a 6. Sú dve možnosti: $A = 97_\$, $B = 86_\$, alebo $A = 96_\$, $B = 87_\$. Súčin $97_\cdot 86_\ = 8342_\$ je väčší ako súčin $96_\cdot 87_\ = 8352_\$. Nám vyhovujú teda čísla $96_\$, $87_\$. Ako ďalšie cifry použijeme najväčšie zo zvyšných, teda 5 a 4. Porovnáme súčiny $965_\cdot 874_\ = 843410_\$, $964_\cdot 875_\ = 843500_\$. Výhodnejší je druhý z nich. Najväčšie zo zvyšných čísel sú 2 a 3. Cifry 2, 3 zapíšeme na štvrté miesto v číslach A , B . Porovnáme súčiny $9643_\cdot 8752_\ = 84395536_\$, $9642_\cdot 8753_\ = 84396426_\$. Výhodnejší je druhý. Poslednú cifru 1 môžeme pridať jednému, alebo druhému číslu. Porovnáme súčiny $96421\cdot 8753 = 843973013$ a $9642\cdot 87531 = 843973902$. Karol má telefónne číslo 9642 a Marián 87531. (Ak ste úlohu riešili len úsudkom, mohli ste dôjsť k výsledku 97531.8642. V čom bol váš úsudok chybný?)

Poznámka. Všimnite si ešte raz, ako sme našli hľadané telefónne čísla. Povedali sme, že musia začínať číslicami 9 a 8 a že na druhých miestach stoja číslice 7 a 6. Na treťom mieste zľava sú číslice 5, 4 a tak ďalej. Tieto vlastnosti sme brali z názoru. Hlbavejší čitateľ by si však mal položiť otázku, či to tak naozaj musí byť. Uvedieme preto ešte jedno riešenie, kde na túto otázku odpovieme. Riešenie je určené hlavne starším žiakom.

2. riešenie. Aby sme nemuseli rozlišovať, ktoré číslo je päťciferné a ktoré štvorciferné, úlohu trochu pozmeníme. Budeme hľadať dve päťciferné čísla, v ktorých sa každá z číslic 0, 1, 2, ..., 9 použije práve raz a ktorých súčin je čo najväčší. Číslica 0 musí byť na konci jedného z týchto čísel. Po prečiarknutí tejto nuly zrejme dostaneme z nádejných päťciferných čísel hľadané telefónne čísla.

Ukážeme, že jedno z päťciferných čísel začína 9 a druhé 8. Ak by totiž obidve číslice 9, 8 patrili tomu istému číslu, dostali by sme menší súčin. Odhadneme súčin $98_ .7_ .$

$$98_ .7_ \leq 99\,000.80\,000 = 7\,920\,000\,000 \quad (1)$$

Podobne odhadneme súčin $9_ .8_ .$. Pritom sú dve možnosti, podľa toho či je 7 v 1. čísle, alebo v druhom čísle. Číslo, ktoré neobsahuje 7, musí mať na 2. mieste aspoň číslicu 3.

$$9_ .8_ \geq 97\,000.83\,000 = 8\,051\,000\,000$$

$$9_ .8_ \geq 93\,000.87\,000 = 8\,091\,000\,000$$

Porovnaním s nerovnosťou (1) vidíme, že skutočne je

$$9_ .8_ > 98_ .7_ .$$

Hľadané čísla majú teda na prvých miestach číslice 9, 8. Podobne by sme mohli ukázať, že na druhých miestach majú číslice 7, 6, na tretích miestach číslice 5, 4 atď. Ostáva dokázať, že súčin 96 420.87 531 je zo všetkých súčinov najväčší. Všimnite si, že všetky dvojice čísel s uvedeným rozmiestnením číslíc (napr. dvojica 96 420, 87 531, alebo 97 531, 86 420 apod.) majú rovnaký súčet, ktorý je rovný

$$S = (90\,000 + 80\,000) + (7\,000 + 6\,000) + (500 + 400) + (30 + 20) + (1 + 0).$$

Teraz použijeme túto matematickú vetu: Zo všetkých dvojíc A, B ($A \geq B$), pre ktoré platí $A + B = S$, má najväčší súčin tá dvojica, pre ktorú je rozdiel $A - B$ najmenší.

Takouto dvojicou je zrejme dvojica čísel $A = 96\,420$ a $B = 87\,531$. Uvedenú vetu ľahko dokážeme. Čísla A, B , pre ktoré platí $A + B = S$, môžeme napísať v tvare

$$A = \frac{1}{2} S + x = n + x$$

$$B = \frac{1}{2} S - x = n - x,$$

$$\text{kde } n = \frac{1}{2} S.$$

Vypočítame ich súčin

$$A \cdot B = (n + x) \cdot (n - x) = n^2 - x^2.$$

Tento súčin je najväčší, keď je x čo najmenšie.

Z6 - I - 6

Určte zloženie, poradie a bodové hodnotenie prvých troch dvojčlenných hliadok v branných pretekoch podľa týchto údajov: Jožo získal o 10 bodov viac ako Dušan, Dušan o 20 viac ako Peter. Rudo získal o 5 bodov menej ako druhý člen jeho hliadky. Emil stratil na každom stanovišti o 5 bodov viac ako druhý člen jeho hliadky. Karol stratil na dvoch stanovištiach po 5 bodov a na ostatných piatich stanovištiach po 10 bodov, zatiaľ čo jeho partner získal na všetkých stanovištiach plný počet bodov. Úspešnejší pretekári z týchto troch hliadok získali dovedna 380 bodov. Hliadka, ktorá sa umiestnila na druhom mieste, získala 220 bodov.

Riešenie. Označíme počty bodov, ktoré získali chlapci, začiatočnými písmenami ich mien. Čiarkou označíme počet bodov získaných druhým členom hliadky. Potom zo zadania:

$$J = D + 10$$

$$D = P + 20$$

$$R = R' - 5$$

$$E = E' - 7.5 = E' - 35$$

$$K = K' - 2.5 - 5 \cdot 10 = K' - 60$$

Ďalej vieme, že $R' + E' + K' = P + D + J = 380$ (lepší z dvojice).

$$P + D + J = P + P + 20 + P + 30 = 3P + 50 = 380$$
$$P = 110$$

Teda Peter získal 110 bodov, Dušan 130, Jožo 140. Najlepší bol Jožo, a teda bol v hliadke s Karolom, potom Karol získal $140 - 60 = 80$ bodov.

Dalej môžeme uvažovať:

a) Emilov partner je Dušan, potom Emil získal $130 - 35 = 95$ bodov a Rudov partner je Peter, Rudo získal $110 - 5 = 105$ bodov, alebo

b) Emilov partner je Peter, Emil získal $110 - 35 = 75$ bodov, Rudov partner je Dušan, Rudo získal $130 - 5 = 125$ bodov.

Úloha má dve riešenia:

- a) I. miesto Dušan, Emil získali $130 + 95 = 225$ bodov.
II. miesto Jožo, Karol získali $140 + 80 = 220$ bodov.
III. miesto Peter, Rudo získali $110 + 105 = 215$ bodov.
b) I. miesto Dušan, Rudo získali $130 + 125 = 255$ bodov.
II. miesto Jožo, Karol získali $140 + 80 = 220$ bodov.
III. miesto Peter, Emil získali $110 + 75 = 185$ bodov.

ÚLOHY II. KOLA

Z6 - II - 1

Názov mesta sa píše štyrmi písmenami. Ak sa každé písmeno nahradí poradovým číslom abecedy A B C D E F G H

CH I J K L M N O P R S T U V X Y Z (je CH, nie je Q),
získané 4 čísla budú mať tieto vlastnosti:

1. Prvé číslo sa rovná jednej osmine štvrtého čísla.
2. Tretie číslo je o 13 väčšie ako prvé, o 3 menšie ako druhé
a o 1 menšie ako štvrté.

Aký je názov mesta?

(4 body)

Riešenie. Tretie číslo označíme x , prvé číslo je potom $x - 13$, druhé číslo $x + 3$, štvrté číslo $x + 1$ a súčasne prvé číslo je osmina štvrtého čísla. Teda

$$x - 13 = \frac{1}{8}(x + 1)$$

$$x = 15.$$

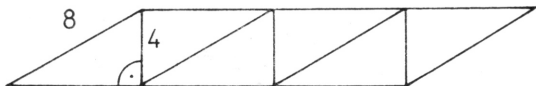
Čísla v poradí sú 2, 18, 15, 16 a mesto im prislúchajúce
BRNO.

Z6 - II - 2

Daný je pravouhlý trojuholník s preponou dĺžky 8 cm
a odvesnou dĺžky 4 cm. Zistíte, či sa zo šiestich takýchto
neprekrývajúcich sa trojuholníkov dá zložiť rovnobežník,
ktorého jeden vnútorný uhol je 30° . Nájdite všetky mož-
nosti.

(5 bodov)

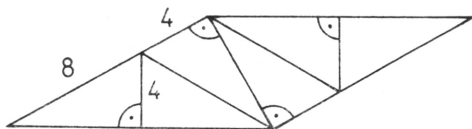
Riešenie. Sú tri možnosti rovnobežníkov s danou vlast-
nosťou (obr. 29a, b, c). Rovnobežník môžeme síce dostať
aj iným priložením trojuholníkov medzi »dvomi krajnými«,
ale vždy vytvoria ten istý rovnobežník - teda ich nebudeme
považovať za rôzne riešenia.



Obr. 29a



Obr. 29b



Obr. 29c

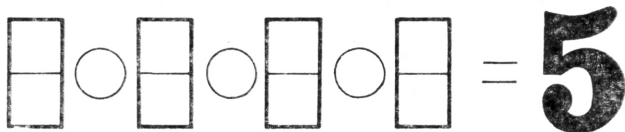
Z6 - II - 3

Dominové kocky môžeme chápať ako zápisy zlomkov. Pritom jedna kocka môže vyjadrovať dva zlomky, napr. prvá z kociek na obrázku 30 vyjadruje, podľa toho, ako ju po-



Obr. 30

stavíme, zlomky $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{1}$. Do krúžkov v obrázku 31 vpište znamienka »plus« alebo »mínus« a na miesta prázdnych domín umiestnite domíná z obrázku 30 tak, aby výsledok bol rovný 5. (4 body)



Obr. 31

Riešenie. Jediné riešenie, až na poradie sčítancov, je $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{4}{1} - \frac{1}{2} = 5$.

Z6 - II - 4

Myslím si štvorciferné číslo. Viem o ňom povedať:

1. Jeho ciferný súčet je stotina z čísla, ktoré dostanem zaokrúhlením mysleného čísla na stovky.
2. Jeho posledná číslica je o 1 väčšia ako predposledná číslica a súčet jeho posledných dvoch číslic sa rovná jeho druhej číslici.

Aké je to číslo?

(5 bodov)

Riešenie. Myslené číslo môžeme písať ako $1000a + 100b + 10c + d$, kde a, b, c, d sú celé nezáporné čísla menšie ako 10, $a \neq 0$. Potom z podmienky 1 vyplýva

$$a + b + c + d = 10a + b, \quad \text{ak } c < 5 \quad (1)$$

alebo

$$a + b + c + d = 10a + b + 1, \quad \text{ak } c \geq 5. \quad (2)$$

Z (1) určíme: $9a = c + d$, potom $a = 1$, pretože ak $a = 2$, potom $c + d = 18$, z toho $c = d = 9 \dots$ odporuje podmienkam úlohy, ak $a > 2 \dots$ podobne.

Teda $a = 1$, potom $c + d = 9$ a z podmienok úlohy $c = 4$, $d = 5$. Druhá číslica b je súčtom posledných dvoch, teda $b = 9$. Hľadané číslo je 1945.

Z (2) nenájdeme také c , d , aby vyhovovali podmienkam úlohy.

ÚLOHY I. KOLA

Z5 - I - 1

Nájdite najmenšie číslo s týmito vlastnosťami:

- a) Po delení číslom 51 dáva zvyšok 33.
- b) Po delení číslom 54 dáva zvyšok 0.

Z5 - I - 2

Matematická križovka (obr. 32). Do každého štvorčeka vpište jednu z číslic 0, 1, ..., 9. V riadkoch a stĺpcoch sú zapísané trojciferné čísla.

	1	2	3
a			
b			
c			

Obr. 32

VODOROVNE

V riadku:

- a - polovica čísla ako v stĺpci 1, ale odzadu,
- b - číslo, ktoré pri delení desiatimi dáva zvyšok nula,
- c - číslo, ktoré je rozdielom najväčšieho a najmenšieho trojciferného čísla.

ZVISLE

V stĺpci:

- 1 - ak by tu bolo zapísané číslo o 400 väčšie, malo by všetky číslice rovnaké,
- 2 - tretia číslica tohto čísla sa rovná súčtu prvých dvoch číslic,
- 3 - TAJNIČKA.

Ak od čísla, ktoré zistíte z TAJNIČKY, odčítate 174, dostanete, koľký ročník matematickej olympiády sa koná v tomto školskom roku.

Z5 - I - 3

V čase krádeže bolo v hoteli 96 ľudí. 61 z nich je mimo podozrenia. Zo 47 zamestnancov, ktorí vtedy boli v hoteli, je 23 mimo podozrenia. Koľko hostí nie je mimo podozrenia?

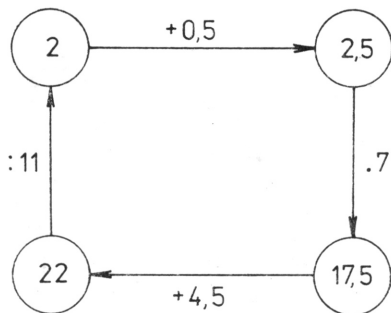
Z5 - I - 4

Dosaďte za jednotlivé písmená číslice tak, aby platil naznačený súčet. Za rôzne písmená dosaďte rôzne číslice, za rovnaké písmená, rovnaké číslice.

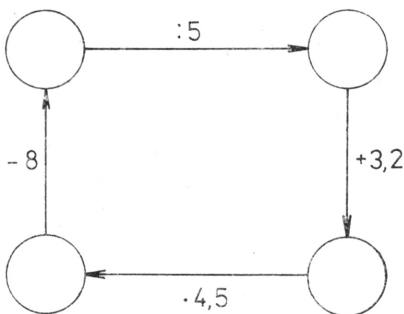
$$\begin{array}{r} J \\ J A \\ J A N \\ J A N O \\ \hline 4 3 2 1 \end{array}$$

Z5 - I - 5

V krúžkoch na obrázku 33a sú čísla, ktoré zodpovedajú vyznačeným počtovým výkonom (napr. $2 + 0,5 = 2,5$; $2,5 \cdot 7 = 17,5$). Aj do krúžkov na obrázku 33b vpište také čísla, aby zodpovedali uvedeným počtovým výkonom.



Obr. 33a



Obr. 33b

Z5 - I - 6

Z mesta A do mesta B je 36 km. Z mesta A vyrazili súčasne cyklista rýchlosťou 12 km/h a osobné auto Š 100. Akou rýchlosťou išiel vodič Š 100, ak v meste B sa zdržal nákupmi 50 minút a pri ceste späť stretol cyklistu v polovici vzdialenosti medzi mestami A, B? (Uvažujte, že cyklista aj auto išli stálou rýchlosťou.)

ÚLOHY II. KOLA

Z5 - II - 1

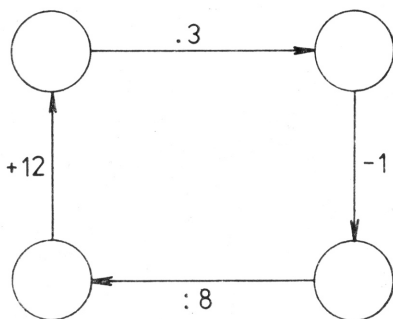
Myslím si číslo. Keby som ho vydělil číslom 72, dostal by som zvyšok 50. Keby som ho vydělil číslom 74, dostal by som zvyšok 0. Je to najmenšie číslo z tých, ktoré majú tieto vlastnosti. Nájdi číslo, na ktoré myslím. (5 bodov)

Z5 - II - 2

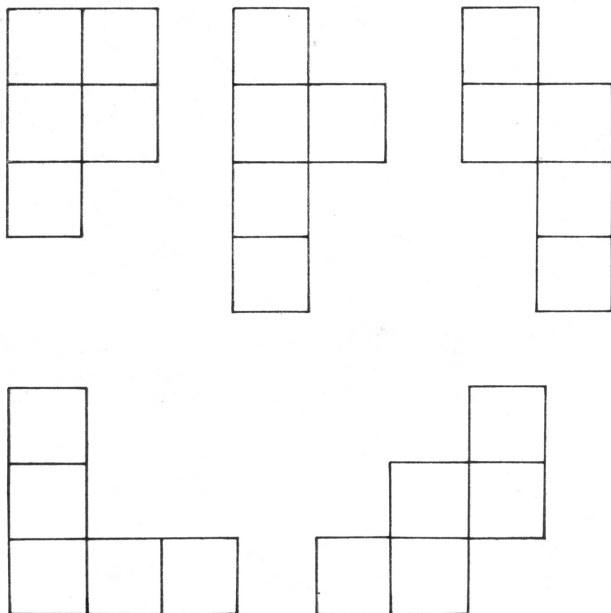
V triede je 35 žiakov. Odoberajú časopisy Kamarát a ABC. ABC-éčko neodoberá 20 žiakov a Kamaráta neodoberá 15 žiakov triedy. Aspoň jeden z týchto časopisov odoberá 30 žiakov triedy. Koľko žiakov triedy odoberá obidva časopisy? (4 body)

Z5 - II - 3

Do krúžkov v obrázku 34 napíšte celé čísla tak, aby zodpovedali uvedeným počtovým výkonom. (5 bodov)



Obr. 34

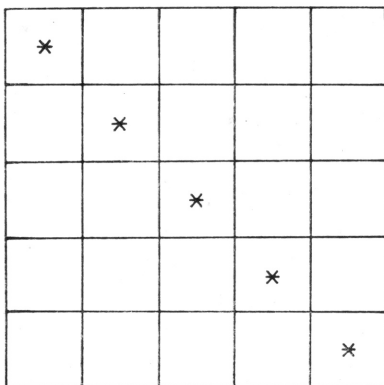


Obr. 35

Z5 - II - 4

Na obrázku 35 vidíte päť útvarov. Pokryte nimi štvorec s 5×5 štvorčekami (je na obrázku 36) tak, aby každý útvar pokryl jedinú hviezdičku.

(4 body)



Obr. 36

Kategorie Z4

ÚLOHY I. KOLA

Z4 - I - 1

Svätopluk dal každému zo svojich synov 4 paličky s dĺžkami 6 dm, 5 dm, 8 dm, 4 dm a povedal im: »Každú zo štyroch paličiek môžete najviac raz prepíliť. Urobte to tak, aby ste pílením získali paličky požadovaných dĺžok:

1. Ty, najstarší môj syn, prines paličky s dĺžkami 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5 dm.
2. Ty, stredný, prines paličky s dĺžkami 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6 dm.
3. Ty, najmladší, prines paličky s dĺžkami 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4 dm.«

Mohol každý syn splniť úlohu? Nájdite všetky riešenia.

Z4 - I - 2

Hanka a Miško sa hrali na obchod. Ich platidlami boli guľôčky a kocky. Dohodli sa, že guľôčka bude mať hodnotu 3 Kčs a kocka 5 Kčs. Ako mohla platiť Hanka, ak si chcela kúpiť

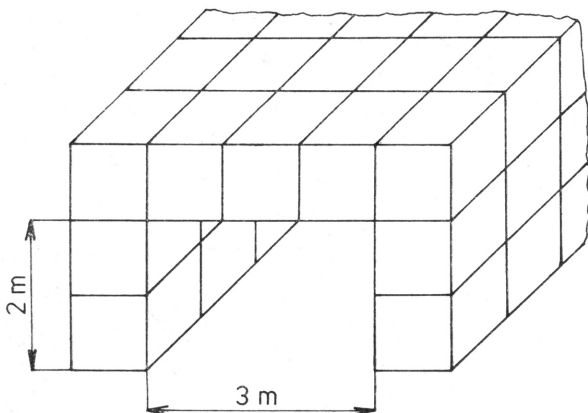
a) knižku v hodnote 13 Kčs,

b) bábiku v hodnote 49 Kčs.

(Uveďte vždy všetky možnosti.)

Z4 - I - 3

Liliputáni obdivovali veľký kamenný tunel, ktorý postavil Guliver z kameňov tvaru kvádra s rozmermi $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 2\text{ m}$. Časť tohto 500 m dlhého tunela so šírkou 3 m a výškou 2 m je vyznačená na obrázku 37 (výška a šírka sú vyznačené).



Obr. 37

Guliver chce postaviť nový, rovnako dlhý tunel, ale taký, aby mal výšku 4 m a šírku 6 m (hrúbka stien má zostať nezmenená).

Koľko takých kvádrov s rozmermi $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 2\text{ m}$ si musí na stavbu prichystať?

Z4 - I - 4

Vyplňte matematickú krížovku (obr. 38):

1. riadok: číslo, ktoré po delení 10 dáva zvyšok 3,
2. riadok: číslo, ktoré je násobkom 3,
3. riadok: dvojnásobok 1. riadku.

	A	B	C	D
1				
2				
3				

Obr. 38

- Stĺpec A: číslo, ktoré je násobkom čísla 229,
stĺpec B: najmenšie trojciferné číslo, ktoré je deliteľné 3
bezo zvyšku,
stĺpec C: číslo, ktorého stredná číslica je súčtom krajných
číslíc v jeho zápise,
stĺpec D: počet trpaslíkov, priateľov Snehulienky.

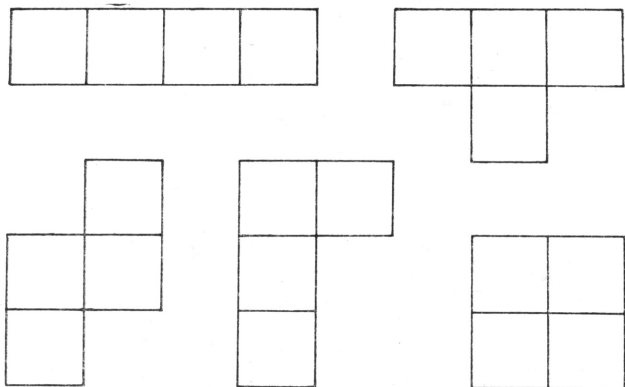
Z4 - I - 5

Utvorte najväčšie 7ciferné číslo z číslic 0, 1, 3, 4, 5, 8, 9,
ktoré má všetky tieto vlastnosti:

- a) v čísle je každá z daných číslic práve raz;
- b) číslo je menšie ako 8 000 000;
- c) číslo nie je deliteľné desiatimi.

Z4 - I - 6

Na obrázku 39a je nakreslených päť mnohoúhelníkov. Poukladajte ich do škatuľky, ktorej dno je nakreslené na obr. 39b tak, aby bolo splnené:



Obr. 39a

- a) každý z piatich mnohoúhelníkov zakryje práve jednu hviezdičku,
- b) mnohoúhelníkmi pokryjete celé dno škatuľky, okrem vymalovaného štvorčeka.

				*	*	*
*						
*						

Obr. 39b

ÚLOHY II. KOLA

Z4 - II - 1

Vytvor z číslic 0, 2, 5, 7, 8, 9 najmenšie možné párne 6ciferné číslo. Každú z daných číslic použi práve raz.

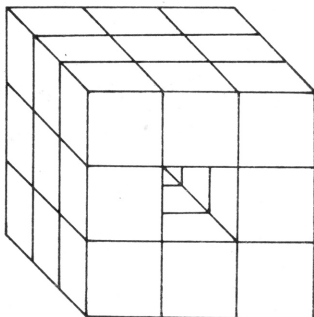
(5 bodov)

Z4 - II - 2

Samko mal 100 kusov samolepiek tvaru štvorca o strane 3 cm. Má deravú kocku (znázornenú na obrázku 40), ktorá je zložená z 24 zhodných kociek o hrane 3 cm.

Koľko samolepiek mu ostalo, ak nimi oblepil steny tejto deravej kocky (aj znútra)?

(4 body)



Obr. 40

Z4 - II - 3

Čokoláda stojí 10 korún. Mamička má v pokladničke veľa jednokorunáčok, dvojkorunáčok a päťkorunáčok. Povedala Jankovi, že si môže kúpiť toľko čokolád, koľkými rôznymi spôsobmi ich môže vyplatiť pomocou jednokorunáčok, dvojkorunáčok a päťkorunáčok. (Nemusí vždy použiť všetky druhy.) Koľko čokolád si môže kúpiť Janko? Vypíš všetky možnosti platenia. (Nie je ich viac ako 10.) (6 bodov)

RNDr. Milan Koman, CSc.
doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
RNDr. Vladimír Repáš

**TŘICÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
v Praze roku 1988 jako svou publikaci č. 5-42-32/35

Edice Pomocné knihy pro žáky

Odpovědná redaktorka RNDr. Alena Jelénková

Výtvarný redaktor Václav Hanuš

Technická redaktorka Jiřina Perglová

Z nové sazby písmem Plantin

výtiskly Moravské tiskařské závody, n. p., Olomouc

Formát papíru 70 cm × 100 cm

Počet stran 108

AA 3,56 - VA 3,95

Náklad 6 000 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/2

1. vydání

Cena brožovaného výtisku Kčs 5,50

505/21,825

matematická olympiáda



SPN

42

5-42-32/35

14-668-88

03/2

Kčs 5,50