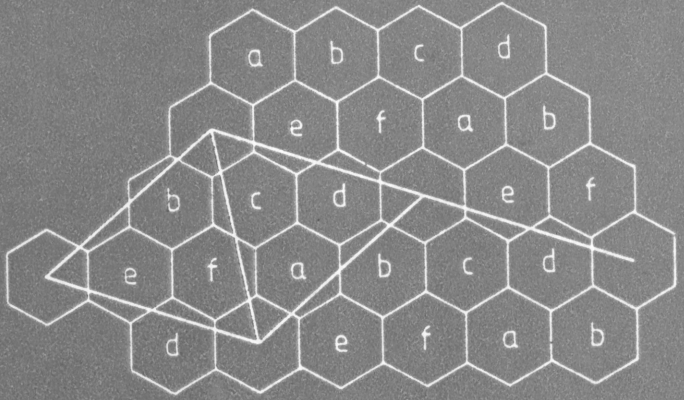
36. ročník matematické olympiády na středních školách

MO

36. ročník matematické olympiády na středních školách



SPN

TŘICÁTÝ ŠESTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87

28. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
RNDr. František Zítek, CSc., doc. RNDr. Leo Boček, CSc.,
RNDr. Karel Horák, CSc., RNDr. Pavel Töpfer

Lektorovali RNDr. Luboš Brim, CSc., RNDr. Vladimír Burjan,
RNDr. Libor Jelínek, RNDr. Václav Šůla

ISBN 80-04-23727-4

Obsah

O průběhu 36. ročníku matematické olympiády

Soutěž Matematická olympiáda pořádají pro žáky středních a základních škol ministerstva školství ČSR a SSR ve spolupráci s Jednotou československých matematiků a fyziků, Jednotou slovenských matematiků a fyziků, Matematickým ústavem ČSAV a Socialistickým svazem mládeže. Soutěž řídí ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím krajských a okresních výborů matematické olympiády (KV MO, OV MO). Členy KV MO a OV MO jmenují odbory školství krajských a okresních národních výborů, členy ÚV MO jmenují ministerstva školství. Na začátku školního roku 1986/87 určila ministerstva školství ČSR a SSR na návrh hlavních výborů JČSMF a JSMF toto složení ÚV MO na další tříleté období:

Předsednictvo ÚV MO

předseda:	*RNDr. František Zítek, CSc.*, MÚ ČSAV, Praha
místopředsedové:	*prof. RNDr. Miroslav Fiedler, DrSc., člen korespondent ČSAV*, MÚ ČSAV, Praha
	doc. RNDr. Branislav Rovan, CSc., MFF UK, Bratislava

zástupce
MŠ ČSR: *RNDr. Václav Šůla*

zástupkyně
MŠ SSR: *RNDr. Júlia Lukátšová*

tajemníci: *doc. RNDr. Leo Boček, CSc.*, MFF UK, Praha
RNDr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV, Praha

další členové
předsednictva: *RNDr. Tomáš Hecht, CSc.*, MFF UK, Bratislava
RNDr. Milan Koman, CSc., MÚ ČSAV, Praha
RNDr. Milan Maxian, gymnázium A. Markuša, Bratislava
doc. RNDr. Radko Mesiar, CSc., SF SVŠT, Bratislava
RNDr. Oliver Ralík, Pedagogická fakulta Nitra
RNDr. Vladimír Repáš, FE SVŠT, Bratislava
RNDr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV, Praha

Další členové ÚV MO

PhDr. Ľudovít Bálint, CSc., Výzkumný ústav pedagogický, Bratislava

PaedDr. František Běloun, Praha
RNDr. Luboš Brim, CSc., přírodovědecká fakulta UJEP, Brno
prof. RNDr. Lev Bukovský, DrSc., přírodovědecká fakulta UPJŠ, Košice
RNDr. Ivan Bušek, Pedagogický ústav hl. m. Prahy
RNDr. Milan Cirjak, Krajský pedagogický ústav, Prešov
RNDr. Vladimír Dřízal, pedagogická fakulta UK, Praha
Ing. Peter Gabčo, CSc., ministerstvo školství SSR, Bratislava
doc. RNDr. Jozef Hvorecký, CSc., MFF UK, Bratislava
RNDr. Vladimír Jodas, gymnázium J. Hronca, Bratislava
RNDr. Jan Kratochvíl, MFF UK, Praha
Doc. PhDr. Karol Križalkovič, CSc., Pedagogická fakulta Nitra
PhDr. Libuše Kršková, základní škola, Praha 4, Na planině
prof. RNDr. Alois Kufner, DrSc., MÚ ČSAV, Praha
PhDr. Helena Ladrová, ministerstvo školství ČSR, Praha
Olga Maříková, Národní výbor hl. m. Prahy
RNDr. Jiří Mída, CSc., pedagogická fakulta UK, Praha

Vlasta Michálková, Stanice mladých přírodovědců, Bratislava
Sylvia Michalovičová, Krajský pedagogický ústav, Bratislava
PhDr. Jana Müllerová, CSc., Výzkumný ústav pedagogický, Praha
Stanislav Rypáček, gymnázium, Praha 9
RNDr. Bohuslav Sivák, CSc., Pedagogická fakulta Banská Bystrica
Ing. Oldřich Skopal, gymnázium, Brno, tř. kpt. Jaroše
PhDr. Květa Sovíková, Pedagogický ústav hl. m. Prahy
Ing. Zdeněk Strakoš, CSc., Středisko výpočtové techniky ČSAV, Praha
RNDr. Bohumil Šmarda, CSc., přírodovědecká fakulta UJEP, Brno
RNDr. Jaroslav Švrček, přírodovědecká fakulta UP, Olomouc
RNDr. Pavel Töpfer, MFF UK, Praha
PhDr. Pavel Valent, CSc., gymnázium, Levice
RNDr. Juraj Vantuch, Výzkumný ústav experimentální pedagogiky SAV, Bratislava
RNDr. Cyril Vavřík, ministerstvo školství SSR, Bratislava
PhDr. Marta Volfová, CSc., Pedagogická fakulta Hradec Králové

Členy ÚV MO jsou také předsedové KV MO

prof. RNDr. Karel Drbohlav, DrSc., MFF UK, Praha
František Šturc, gymnázium, Benešov
doc. RNDr. Ing. Lada Vaňatová, Pedagogická fakulta České Budějovice
RNDr. Josef Polák, CSc., VŠSE, Plzeň
prof. RNDr. Jan Melichar, CSc., Pedagogická fakulta Ústí n. L.
RNDr. Josef Kubát, gymnázium, Pardubice
doc. RNDr. Jaroslav Bayer, CSc., FE VUT, Brno
RNDr. Vladimír Vlček, CSc., přírodovědecká fakulta UP, Olomouc
RNDr. Pavol Černek, CSc., SF SVŠT, Bratislava
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., Pedagogická fakulta Nitra
prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc., VVŠ ČSSP, Liptovský Mikuláš
doc. RNDr. Ján Ohriska, CSc., přírodovědecká fakulta UPJŠ, Košice

V organizaci MO nedošlo v průběhu jejího 36. ročníku k žádným změnám. Kategorie A byla určena žákům 3. a 4. ročníků středních škol, kategorie B byla pro žáky 2. ročníků a v kategorii C soutěžili žáci 1. ročníků. Pro žáky všech tříd středních škol byla určena ještě kategorie P, zaměřená na úlohy z programování a matematické informatiky. O kate-

gorii P včetně mezinárodní soutěže v programování se dočtete v poslední části této brožurky. Informace o matematické olympiádě na základních školách jsou obsaženy v samostatné brožurce, tato je věnována pouze MO na školách středních.

V kategoriích A, B, C má I. kolo dvě části, v první části řeší soutěžící 6 úloh doma nebo v matematických kroužcích a mohou se přitom radit se svými učiteli, vedoucími kroužků apod. Druhá část má formu klauzurní práce, v níž řeší žáci během 4 hodin tři úlohy. Také v II., krajském kole, řeší žáci úlohy v omezeném čase 4 hodin. V kategoriích A a P se koná ještě III. kolo, celostátní. V celostátním kole je vlastní soutěž rozdělena do dvou dnů, každý den řeší soutěžící tři (dvě) úlohy v časovém limitu 4 hodin. Každá úloha je označena kategorií, římskou číslicí udávající kolo nebo písmenem S, které značí školní klauzurní část I. kola, a číslem úlohy. Pokud jsou některé úlohy označeny 3a a 3b, měl soutěžící možnost volby mezi těmito dvěma úlohami.

Celostátní kolo 36. ročníku MO kategorie A se konalo v Ústí n. L. ve dnech 7.—10. května 1987. Slavnostní zahájení se konalo v aule Pedagogické fakulty, kde účastníky přivítal děkan fakulty profesor RNDr. Jan Melichar, CSc. Vedoucí ideologického oddělení KV KSČ dr. J. Bušek, CSc. seznámil účastníky shromáždění s historií i současností Severočeského kraje. Připomněl místa kraje, jež jsou spojena s dávnou historií našeho lidu (Stadice, Říp), města Rumburk, Most a další svědčí o bohaté revoluční tradici Severočeského kraje. V kulturní části programu vystoupil dívčí komorní sbor Domu kultury ROH a posluchači Pedagogické fakulty. Účastníci celostátního kola a členové ÚV MO navštívili také

zámek Libochovice a na národním hřbitově v Terezíně se poklonili obětem koncentračního tábora. Vzornou organizaci celostátního kola a velmi pěkný kulturně společenský program zajistil organizační výbor v čele s RNDr. Miroslavem Červinkou, CSc., vedoucím katedry matematiky Pedagogické fakulty. Kromě něho se o zdárný průběh akce nesmírně zasloužili doc. dr. M. Svoboda, CSc., z ústavu marxismu-leninismu téže fakulty, s. Jan Slavík z krajského pedagogického ústavu a pracovníci katedry matematiky dr. Y. Krčíková, dr. V. Blažek a dr. V. Čech.

Ve všech krajích naší republiky se i ve školním roce 1986/87 pořádaly různé akce pro rozvoj a vyhledávání žáků talentovaných v matematice, převážně spojené právě s matematickou olympiádou. Naše společnost vynakládá na tuto činnost nemalé prostředky. Podle požadavku ministerstva školství ČSR uvádíme přehled akcí v jednotlivých krajích.

Praha. Pracovní přednášky pro řešitele úloh kategorie A (8 hodin), kategorie B (20 hodin) a kategorie C (58 hodin); celkem se zúčastnilo 31 žáků. Pro 18 žáků se konalo v únoru třídenní soustředění v Jevanech, pětidenní soustředění pro 45 žáků se uskutečnilo v červnu.

Středočeský kraj. Týdenní soustředění pro 30 žáků se konalo v září v Telnici. Instruktáže učitelů se zúčastnilo 38 vyučujících, byla jednodenní. Pro žáky, řešitele úloh MO, proběhly instruktáže v 8 školicích střediscích, vždy dvě hodiny dvakrát nebo třikrát v roce.

Jihočeský kraj. Letní škola pro úspěšné řešitele MO se konala v červnu 1986, trvala jeden týden a zúčastnilo se jí 38 žáků. Instruktáž pro referenty MO na školách byla jednodenní, zúčastnilo se 32 učitelů. V lednu se konalo týdenní

zimní soustředění pro 15 řešitelů úloh kategorie A. Pro úspěšné řešitele kategorie P se konalo jednodenní soustředění. Korespondenční seminář pro středoškoláky měl tři série úloh.

Západočeský kraj. V kraji se konalo celkem 18 dvouhodinových přednášek k úlohám MO kategorií A, B, C, průměrná účast byla 55 žáků. Soustředění úspěšných řešitelů MO, FO a korespondenčních seminářů se konalo jeden týden a bylo na něm 44 žáků. Korespondenčního semináře pro žáky 1. a 2. ročníků středních škol se zúčastnilo 78 řešitelů, v případě semináře pro 3. a 4. ročníky to bylo 29 řešitelů. Každý z těchto seminářů se skládal ze tří sérií úloh.

Severočeský kraj. Korespondenční seminář byl zaměřen na kategorii B, zúčastnilo se ho 40 žáků, měl dvě série úloh. Soustředění se konalo v Krupce, trvalo 7 dní a zúčastnilo se 60 žáků. Kromě toho se v kraji konalo v šesti městech 12 tříhodinových přednášek pro řešitele úloh MO kategorie A, B, C s průměrnou účastí 24 žáků.

Východočeský kraj. Před krajskými koly kategorií A a B se konala jednodenní soustředění vybraných řešitelů, zúčastnilo se 37 a 39 žáků. Pro stejné kategorie se pořádal korespondenční seminář. V červnu proběhlo týdenní soustředění pro nejlepší řešitele úloh MO a FO, žáky 1. ročníků, v Novém Městě n. M., zúčastnilo se 32 řešitelů. Organizačně se KV MO podílel na celostátním soustředění MO a FO v Jevíčku.

Jihomoravský kraj. Semináře pro řešitele úloh MO se konaly ve čtyřech městech kraje, zvlášť pro každou kategorii, průměrná účast 40 žáků. Pro 10 žáků se konal třikrát seminář na katedře matematiky přírodovědecké fakulty UJEP

v Brně, jednou týdně se konal seminář pro žáky z třídy zaměřené na matematiku na gymnáziu v Brně, tř. kpt. Jaroše. Zúčastnilo se ho 15 žáků. Pro 6 žáků kraje, kteří byli pozváni do celostátního kola kategorie A, se konal dvoudenní seminář před III. kolem.

Severomoravský kraj. V září proběhly instruktáže referentů MO, zúčastnilo se 42 učitelů. Na sobotních besedách MO byla průměrná účast 40 žáků každý týden. Na gymnáziu M. Koperníka v Bílovci se konaly jednou týdně semináře pro vybrané řešitele úloh MO, v kategorii A bylo 12, v kategorii B 15 a v kategorii C 25 účastníků. Zajímavá byla setkání účastníků mezinárodních matematických olympiád s řešiteli úloh MO. Korespondenční seminář byl společný pro všechny kategorie, 3 série úloh řešilo 40 žáků. Seminář byl ukončen týdenním soustředěním všech jeho účastníků. V červenci 1987 se konalo pro 80 úspěšných řešitelů MO a FO třítýdenní soustředění v Bruntále.

Bratislava. 79 žáků řešilo 6 sérií úloh korespondenčního semináře, na seminář navázala dvě týdenní soustředění, jedno v únoru, druhé v červnu, každé pro 30 žáků. Kromě toho pořádal KV MO celoslovenský korespondenční seminář, v němž dvě série úloh řešilo 53 žáků. V prosinci se konalo týdenní soustředění pro 20 řešitelů úloh kategorie P, v červnu týdenní soustředění pro 30 řešitelů úloh kategorií B a C. KV MO uspořádal celkem 7 instruktáží pro vedoucí matematických kroužků a pro opravovatele úloh MO.

Západoslovenský kraj. V červnu se konala dvoudenní instruktáž pro profesory středních škol, obsahem instruktáže byl rozbor úloh všech kategorií, zúčastnilo se 48 učitelů. Na tomtéž místě, v Budmericích, se konalo též týdenní

soustředění 40 úspěšných řešitelů úloh MO kategorií B, C. V korespondenčním semináři řešilo 73 žáků úlohy pěti sérií, z toho 20 nejlepších bylo pozváno na čtyřdenní soustředění, jež se konalo v dubnu 1987.

Středoslovenský kraj. Krajský korespondenční seminář pro kategorii A měl 4 série po 5 úlohách, úlohy řešilo 21 žáků. Druhý korespondenční seminář byl určen pro kategorie B a C, 5 sérií úloh řešilo 67 žáků. Pro úspěšné řešitele MO a krajských korespondenčních seminářů byla uspořádána dvě týdenní soustředění, každé pro 40 účastníků, konala se v Terchové a v Lučatíně. Největší účast, 113 žáků, měl korespondenční seminář pro střední odborná učiliště. Instruktáže pro referenty MO a učitele byly rozděleny na kategorie A a P (46 účastníků) a na kategorie B a C (85 účastníků).

Východoslovenský kraj. Pro každou kategorii se uskutečnila samostatná instruktáž referentů MO a vedoucích kroužků, instruktáže byly jednodenní a zúčastnilo se jich celkem 195 učitelů. V korespondenčním semináři řešilo 100 žáků osm sérií úloh. Pro nejlepší řešitele úloh semináře i úloh MO se konala tří týdenní soustředění, každé pro 35 účastníků. Pro žáky košických škol byly organizovány dva matematické kroužky, které se scházely jednou týdně. V kroužku pro kategorii A pracovalo 10 žáků, v kroužku pro kategorii B 12 žáků.

Ústřední výbor MO zajišťoval po odborné stránce tři celostátní soustředění. Pro žáky nematurujících ročníků to bylo již tradiční soustředění 90 řešitelů úloh MO a FO v Jevíčku, konalo se ve dnech 14.—27. června 1987. Další dvě soustředění byla věnována přípravě československého družstva na mezinárodní matematickou olympiádu. První se konalo

v posledním březnovém týdnu v Modré-Pieskoch u Bratislavy pro 15 žáků, druhé se konalo v červnu v Piešťanech, trvalo tři týdny a bylo na ně pozváno 10 žáků. Po organizační stránce byla tato dvě soustředění připravena Ústředním domem pionýrů a mládeže KG v Bratislavě. ÚV MO zajišťoval též celostátní korespondenční seminář, kterému je věnována samostatná část této brožury. V edici Škola mladých matematiků vydává ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta matematické brožurky pro žáky. V průběhu 36. ročníku MO vyšly dva svazky: H. Kästner, P. Göthner - Algebra, každý začátek je lehký a J. Morávek, M. Vlach - Oddělitelnost množin (reedice dřívějšího vydání). Celkem vyšlo již 59 svazků edice ŠMM. Jsou dobrými pomocníky soutěžícím v MO a vhodnými publikacemi pro školní knihovny.

Tabulka 1

Počty středních škol zapojených do 36. ročníku MO

Kraj	Gymnázia					Ostatní střední školy			
	celkem v kraji	zapojeno v kategorii			aspoň v jedné kategorii	zapojeno v kategorii			aspoň v jedné kategorii
		A	B	C		A	B	C	
Praha	21	9	16	14	18	2	1	2	4
Středočeský	23	23	23	23	23	2	5	15	15
Jihočeský	18	9	10	14	16	2	7	8	12
Západočeský	15	13	15	15	15	1	3	6	6
Severočeský	21	20	19	20	21	4	8	10	10
Východočeský	35	14	17	29	31	0	1	2	3
Jihomoravský	38	26	28	37	38	4	6	13	14
Severomoravský	39	15	19	37	39	1	1	9	11
Bratislava	11	10	10	10	10	0	0	1	1
Západoslovenský	38	34	31	38	38	7	15	30	33
Středoslovenský	38	33	34	35	35	13	25	52	52
Východoslovenský	39	23	29	36	38	3	18	43	44
ČSR	210	129	147	189	201	16	32	65	75
SSR	126	100	104	119	121	23	58	126	130
ČSSR	336	229	251	308	322	39	90	191	205

Tabuľka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 36. ročníku MO

Kraj	Kategorie						Celkem	
	A		B		C			
	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	110	58	116	63	204	142	430	263
Středočeský	153	31	193	41	318	130	664	202
Jihočeský	106	50	81	60	212	128	399	238
Západočeský	98	29	100	47	224	77	422	153
Severočeský	157	48	201	52	371	174	729	274
Východočeský	68	44	108	84	223	185	399	313
Jihomoravský	243	135	258	130	604	360	1 105	625
Severomoravský	192	67	251	89	558	271	1 001	427
Bratislava	161	139	138	51	180	85	479	275
Západoslovenský	192	157	188	168	439	365	819	690
Středoslovenský	106	62	193	88	213	97	512	247
Východoslovenský	277	113	513	136	1 186	385	1 976	634
ČSR	1 127	462	1 308	566	2 714	1 467	5 149	2 495
SSR	736	471	1 032	443	2 018	932	3 786	1 846
ČSSR	1 863	933	2 340	1 009	4 732	2 399	8 935	4 341

S ... počet všech soutěžících
U ... počet úspěšných řešitelů

Tabulka 3

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 36. ročníku MO

Kraj	Kategorie						Celkem	
	A		B		C			
	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	57	8	61	10	135	54	253	72
Středočeský	29	1	39	1	128	8	196	10
Jihočeský	48	5	52	7	109	11	209	23
Západočeský	29	2	47	3	77	22	153	27
Severočeský	46	3	49	2	163	22	258	27
Východočeský	41	7	75	3	168	11	284	21
Jihomoravský	122	5	125	13	250	25	497	43
Severomoravský	64	8	87	11	270	47	421	66
Bratislava	137	20	44	24	76	24	257	68
Západoslovenský	130	13	157	8	313	17	600	38
Středoslovenský	54	8	61	1	96	26	211	35
Východoslovenský	110	7	128	2	241	20	479	29
ČSR	436	39	535	50	1 300	200	2 271	289
SSR	431	48	390	35	726	87	1 547	170
ČSSR	867	87	925	85	2 026	287	3 818	459

S ... počet všech soutěžících
U ... počet úspěšných řešitelů

Tabulka 4

Počty účastníků III. kola 36. ročníku MO - kategorie A

Kraj	Počet všech účastníků	Počet úspěšných řešitelů	Z toho vítězů
Praha	10	3	2
Středočeský	1	0	0
Jihočeský	4	0	0
Západočeský	2	2	0
Severočeský	1	0	0
Východočeský	7	5	2
Jihomoravský	6	2	0
Severomoravský	9	4	2
Bratislava	19	12	7
Západoslovenský	7	3	2
Středoslovenský	8	3	0
Východoslovenský	8	4	2
ČSR	40	16	6
SSR	42	22	11
ČSSR	82	38	17

VÝSLEDKY CELOSTÁTNÍHO KOLA MO KATEGORIE A

Vítězové

1. *Pavol Gvozdjak*, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
2. *Vladan Majerech*, 4 MF, Pardubice
3. *Roman Soták*, 4 M, Košice, Šmeralova
4. *Petr Čížek*, 2 M, G W. Piecka, Praha
5. *Robert Babilon*, 4 M, Bílovec

6.— 7. *Stanislav Krajči*, 3 M, Košice, Šmeralova
Marián Lukáč, 4, Bánovce n. B.

8.—10. *Peter Klein*, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
Ilja Martišovitš, 2 MF, G J. Hronca, Bratislava
Tomáš Trégl, 4 M, G W. Piecka, Praha

11. *Marcel Polakovič*, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
12. *Anton Belan*, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
13. *Stanislav Januschke*, 2 MF, G J. Hronca, Bratislava

14.—15. *František Komora*, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
Radomír Měch, 3 M, Bílovec

16.—17. *Petr Fencl*, 4 MF, Pardubice
Pavol Kolník, 4, Nové Mesto n. V.

Další úspěšní řešitelé

18.—21. *Štěpán Holub*, 2, Trutnov

Ondrej Šuch, 1 M, Žilina, V. Okružná
Vladimír Veselý, 4 MF, G J. Hronca, Bratislava
Jiří Zatloukal, 3 M, Bílovec

22.—23. *Tibor Bartoš*, 3 M, G A. Markuša, Bratislava
Dalibor Procházka, 3 MF, Karlovy Vary

24. *Vladimír Šošovička*, 3 M, Žilina, V. Okružná

25.—26. *Mário Drosc*, 4, Michalovce
Jana Ježková, 4 MF, Hradec Králové, Šimkova

27.—28. *Peter Eliáš*, 3 MF, Prešov, Konštantínova
Martin Kučera, 2 M, Bílovec

29.—30. *František Klein*, 4 MF, Brno, Koněvova
Ildikó Vázsonyiová, 4 MF, mad. G, Komárno

31.—33. *Ladislav Fekete*, 2 M, G A. Markuša, Bratislava
Pavel Nýč, 4, Tachov
Zbyněk Šír, 2 M, G J. K. Tyla, Hradec Králové

34.—35. *Andrej Doboš*, 2 M, G A. Markuša, Bratislava
Miroslav Laššák, 4 M, Žilina, V. Okružná

36.—38. *Lenka Bočková*, 4 MF, Praha, Sladkovského
Róbert Krídl, 4 M, G A. Markuša, Bratislava
Tomáš Kukosa, 3 MF, Brno. tř. kpt. Jaroše

U žáků z tříd se zaměřením studijního oboru 01 Matematika je za ročníkem označení M, u žáků z tříd se zaměřením studijního oboru 02 Matematika a fyzika je za ročníkem označení MF. Všichni byli žáky gymnázia - G.

Pořadí úspěšných řešitelů z tříd, které nejsou se zaměřením studijního oboru 01 *Matematika*

1. *Vladan Majerech*, 4, Pardubice
2. *Marián Lukáč*, 4, Bánovce n. B.
3. *Ilja Martišovitš*, 2, G J. Hronca, Bratislava
4. *Stanislav Januschke*, 2, G J. Hronca, Bratislava

5.— 6. *Petr Fencl*, 4, Pardubice
Pavol Kolník, 4, Nové Mesto n. V.

7.— 8. *Štěpán Holub*, 2, Trutnov
Vladimír Veselý, 4, G J. Hronca, Bratislava

9. *Dalibor Procházka*, 3, Karlovy Vary

10.—11. *Mário Drosc*, 4, Michalovce
Jana Ježková, 4, Hradec Králové, Šimkova

12. *Peter Eliáš*, 3, Prešov, Konštantínova

13.—14. *František Klein*, 4, Brno, Koněvova
Ildikó Vázsonyiová, 4, maď. G, Komárno

15. *Pavel Nýč*, 4, Tachov

16.—17. *Lenka Bočková*, 4, Praha, Sladkovského
Tomáš Kukosa, 3, Brno, tř. kpt. Jaroše

NEJÚSPĚŠNĚJŠÍ ŘEŠITELÉ II. KOLA MO V KATEGORIÍCH A, B, C

Z každého kraje a každé kategorie je uvedeno nejvýše prvních deset nejúspěšnějších řešitelů. Pokud není uvedeno jinak, byli všichni uvedení žáci v kategorii B žáky 2. ročníku, v kategorii C žáky 1. ročníku. Není-li uvedena škola, byl řešitel žákem gymnázia - G. Označení M, resp. MF, znamená zaměření studijního oboru 01 Matematika, resp. 02 Matematika a fyzika.

Praha

Kategorie A

1. *Tomáš Trégl*, 4 M, G W. Piecka, Praha
2. *Petr Čížek*, 2 M, G W. Piecka, Praha
3.— 4. *Jan Sochor*, 4 M, G W. Piecka, Praha
Petr Knobloch, 3 MF, Praha, Voděradská
5. *Martin Barhoň*, 4 M, G W. Piecka, Praha
6. *Daniel Kunz*, 4 M, G W. Piecka, Praha
7.— 8. *Lenka Bočková*, 4 MF, Praha, Sladkovského
Michal Dostál, 4 M, G W. Piecka, Praha

Kategorie B

1. *Petr Brož*, M, G W. Piecka, Praha
2. *Petr Čížek*, M, G W. Piecka, Praha
3. *Jan Lang*, M, G W. Piecka, Praha

4.— 5. *Václav Bohdanecký*, M, G W. Piecka, Praha
Daniel Elleder, M, G W. Piecka, Praha

6. *Arnošt Kobylka*, M, G W. Piecka, Praha

7.—10. *Filip Kadlec*, Praha, U libeňského zámku
Martin Kraus, 1 M, G W. Piecka, Praha
Pavel Pospíšil, Praha, Sladkovského
Kamil Vlček, Praha, Litoměřická

Kategorie C

1. *Ondřej Kalenda*, M, G W. Piecka, Praha
2. *Štěpán Kasal*, 8. třída základní školy Praha 1, Uhelný trh
3. *Martin Cinegr*, Praha, Voděradská
4. *Petr Toman*, M, G W. Piecka, Praha
5. *Jakub Cvach*, M, G W. Piecka, Praha
6. *Tereza Saxlová*, M, G W. Piecka, Praha
7. *Rudolf Rázek*, Praha, Litoměřická

8.—10. *František Gemperle*, M, G W. Piecka, Praha
Irena Houbová, Praha, Budějovická
Petr Paidar, M, G. W. Piecka, Praha

Středočeský kraj

Kategorie A

1. *Karel Chmel*, 4, Benešov

Kategorie B

1. *Radek Novotný,* Mladá Boleslav

Kategorie C

1. *Jan Šraml,* Příbram
2. *Jan Soubusta,* Benešov

3.— 5. *Petr Doňar,* Kralupy
Michal Gruncl, SPŠ Kutná Hora
Vladimír Šolc, Beroun

6. *Hana Křížová,* Beroun
7. *Josef Lebeda,* Čáslav
8. *Petra Hloušková,* Mladá Boleslav

Jihočeský kraj

Kategorie A

1. *David Boukal,* 2 M, České Budějovice, Jírovcova
2. *Jiří Otta,* 4, Pelhřimov

3.— 5. *Jiří Veselý,* 4, Strakonice
Jindřich Zapletal, 4, Tábor
Lubomír Žák, 3 MF, G K. Šatala, Č. Budějovice

Kategorie B

1. *Jana Sonnbergerová,* M, České Budějovice, Jírovcova
2. *Lenka Pulzová,* M, České Budějovice, Jírovcova
3. *David Boukal,* M, České Budějovice, Jírovcova

4.— 7. *Zdeněk Kudrna,* Pelhřimov
Karel Liška, M, České Budějovice, Jírovcova

Pavel Pešek, MF, G K. Šatala, České Budějovice
David Votýpka, SEŠ Písek

Kategorie C

1. *Jan Balák*, M, České Budějovice, Jírovcova
2. *Martin Řehout*, M, České Budějovice, Jírovcova
3. *Jakub Čermák*, M, České Budějovice, Jírovcova
4. *Milan Předota*, M, České Budějovice, Jírovcova
5. *Kateřina Trčková*, MF, Strakonice
6. *Alena Hybšová*, M, České Budějovice, Jírovcova
7. *Miloš Plachý*, Jindřichův Hradec
8. *Bohdana Holánková*, Pelhřimov

Západočeský kraj

Kategorie A

1. *Dalibor Procházka*, 3 MF, Karlovy Vary
2. *Pavel Nýč*, 4, Tachov

Kategorie B

1. *Vítězslav Babický*, M, G J. Fučíka, Plzeň
2. *Pavla Maříková*, M, G J. Fučíka, Plzeň
3. *Miroslav Vicher*, MF, Karlovy Vary

Kategorie C

1. *Martin Bureš*, M, G J. Fučíka, Plzeň
2. *Martin Müller*, M, G J. Fučíka, Plzeň
3. *Michal Friesel*, MF, Plzeň, ul. Pionýrů

4. *Jiří Šmejc*, MF, Karlovy Vary
5. *Hana Pajerová*, MF, Cheb
6. *Josef Daněk*, M, G J. Fučíka, Plzeň
7. *Pavel Vanoušek*, MF, Cheb
8. *Martin Pitterman*, M, G J. Fučíka, Plzeň
9. *Jan Štrunc*, M, G J. Fučíka, Plzeň
10. *Miloš Brejcha*, MF, G J. Fučíka, Plzeň

Severočeský kraj

Kategorie A

1. *Daniel Šuta*, 3, Chomutov
2. *Jaromír Krejčí*, 3 M, Liberec
3. *Petr Bartoš*, 3 M, Liberec

Kategorie B

1. *Štěpánka Lazarová*, Děčín
2. *Michal Štěpán*, M, Liberec

Kategorie C

1. *Vladislav Oslej*, SPŠ stav., Děčín
2.— 3. *Kateřina Jágrová*, M, Liberec
Marie Kovářová, M, Liberec
4. *Pavel Šimek*, M, Liberec
5. *Jan Folprecht*, M, Liberec
6.— 7. *Tomáš Doležal*, M, Liberec
Patrik Spannbauer, SPŠ Chomutov
8. *Petr Horčík*, M, Liberec

9. *Monika Axamitová,* M, Liberec
10. *Klára Kovářová,* M, Liberec

Východočeský kraj

Kategorie A

1. *René Levínský,* 3 M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Vladan Majerech,* 4 MF, Pardubice
3. *Petr Fencl,* 4 MF, Pardubice
4. *Jana Ježková,* 4 MF, Hradec Králové, Šimkova
5. *Jiří Nerad,* 3 M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
6. *Štěpán Holub,* 2 MF, Trutnov
7. *Zbyněk Šír,* 2 M, G J. K. Tyla, Hradec Králové

Kategorie B

1. *Zbyněk Vašata,* M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Petr Duczynski,* Nová Paka
3. *Štěpán Holub,* MF, Trutnov

Kategorie C

1. *Jan Vomlel,* M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Aleš Dryák,* Nový Bydžov
3. *Jitka Grégrová,* Trutnov
4. *Tomáš Pospíchal,* M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
5. *Radek Štěpán,* M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
6. *Tomáš Klazar,* M, G J. K. Tyla, Hradec Králové

Kategorie A

1. *Martin Žufan*, 2 M, Brno, tř. kpt. Jaroše
2. *František Klein*, 4 MF, Brno, Koněvova
3. *Jaroslav Hora*, 4 MF, Brno, tř. kpt. Jaroše

4.— 5. *Tomáš Kukosa*, 3 MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
Radek Vystavěl, 3, Prostějov

Kategorie B

1.— 3. *Rostislav Caha*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
David Karkoška, MF, Gottwaldov
Vít Urbanec, MF, Gottwaldov

4.— 8. *Tomáš Brodský*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
David Klíma, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
Michal Mühlpachr, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
Martin Ryšánek, MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
Martin Žufan, M, Brno, tř. kpt. Jaroše

Kategorie C

1. *Vladimír Chvátil*, MF, Brno, Koněvova
2. *David Krásenský*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
3. *Pavel Horák*, MF, Gottwaldov
4. *Josef Pojsl*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše

5.— 6. *Jiří Fabin*, MF, Brno, tř. kpt. Jaroše
Jan Velešík, Brno, Koněvova

7.—10. *Aleš Křenek*, M, Brno, tř. kpt. Jaroše
Martin Pejchal, MF, Jihlava

Zdeněk Salvet, MF, Uherský Brod
Pavel Smrž, M, Brno, tř. kpt. Jaroše

Severomoravský kraj

Kategorie A

1. *Robert Babilon*, 4 M, Bílovec
2. *Pavel Calábek*, 4 M, Bílovec
3. *Jiří Zatloukal*, 3 M, Bílovec
4. *Radomír Měch*, 3 M, Bílovec
5. *Martin Kučera*, 2 M, Bílovec

6.— 8. *Tomáš Novotný*, 4, Frýdek-Místek
Monika Poloková, 3 M, Bílovec
Radek Porazil, 3 M, Bílovec

Kategorie B

1. *Libor Němeček*, M, Bílovec
2. *Martin Kučera*, M, Bílovec
3. *Tomáš Schiffauer*, M, Bílovec

4.— 5. *Martin Slíva*, M, Bílovec
Petr Trčálek, M, Bílovec

6. *Libor Krkoška*, M, Bílovec
7. *Martina Rusková*, Valašské Meziříčí
8. *Aleš Drábek*, M, Bílovec

Kategorie C

1. *Martin Čížek*, Rožnov p. R.
2. *Petr Hliněný*, M, Bílovec

3. *Zdeněk Korčák,* SPŠE Frenštát p. R.

4.— 7. *Karel Hrubčík,* Vsetín
David Karásek, M, Olomouc, tř. J. z Poděbrad
Jan Šmíd, Ostrava, Šmeralova
Petr Urbančík, Ostrava-Poruba

8. *Tomáš Rosinský,* SPŠE Frenštát p. R.

9. *Anna Chlupatá,* Ostrava-Hrabůvka

Bratislava

Kategorie A

1. *Marcel Polakovič,* 4 M, G A. Markuša, Bratislava

2. *Peter Klein,* 4 M, G A. Markuša, Bratislava

3.— 4. *František Komora,* 3 M, G A. Markuša, Bratislava
Ilja Martišovitš, 2 MF, G J. Hronca, Bratislava

5. *Stanislav Januschke,* 2 MF, G J. Hronca, Bratislava

6. *Tibor Bartoš,* 3 M, G A. Markuša, Bratislava

7. *Vladimír Veselý,* 4 M, G J. Hronca, Bratislava

8.— 9. *Andrej Kráľ,* 4 MF, G J. Hronca, Bratislava
Rastislav Tamaškovič, 2 MF, G J. Hronca, Bratislava

Kategorie B

1. *Ilja Martišovitš,* MF, G J. Hronca, Bratislava

2. *Rastislav Tamaškovič,* MF, G J. Hronca, Bratislava

3.— 4. *Štefan Dobrev,* M, G A. Markuša, Bratislava
Stanislav Januschke, MF, G J. Hronca, Bratislava

5. *Andrej Doboš,* M, G A. Markuša, Bratislava

6.— 7. *Mária Jašeková,* M, G A. Markuša, Bratislava

Radoslav Tomek, MF, G J. Hronca, Bratislava
8. *Tibor Novosad*, M, G A. Markuša, Bratislava
9. *Milan Mosný*, MF, G J. Hronca, Bratislava
10. *Hana Krajňáková*, M, G A. Markuša, Bratislava

Kategorie C

1. *Ján Bajcsy*, M, G A. Markuša, Bratislava
2. *Peter Hudec*, M, G. A. Markuša, Bratislava
3. *Peter Šabo*, Bratislava, Makarenkova
4. *Tomáš Szalay*, M, G A. Markuša, Bratislava
5. *Martin Dindoš*, MF, G J. Hronca, Bratislava
6. *Natalie Matyášová*, M, G A. Markuša, Bratislava
7. *Martin Kollár*, M, G A. Markuša, Bratislava
8. *Miloš Medvecký*, M, G A. Markuša, Bratislava
9.—10. *Branislav Ďurajka*, MF, G J. Hronca, Bratislava
Katarína Slobodová, M, G A. Markuša, Bratislava

Západoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Marián Lukáč*, 4, Bánovce n. B.
2. *Pavol Kolník*, 4, Nové Mesto n. V.
3. *Oliver Ralík*, 4, G E. Gudernu, Nitra
4. *Ildikó Vázsonyiová*, 4, mad. G, Komárno
5. *Rudolf Burcl*, 4, Trnava
6. *Imrich Lozsi*, 4, mad. G, Galanta
7. *Juraj Šimko*, 3, Nitra, Párovská
8. *Andrea Szabóová*, 4, mad. G, Komárno

9. *Zoltán Básti*, 3, mad. G, Komárno
10. *Ján Trojan*, 3, Nitra, Párovská

Kategorie B

1. *Arnold Pompoš*, Levice
2. *Miklós Gyetven*, SPŠ Komárno
3. *Gabriel Varga*, mad. G, Šamorín
4. *Nóra Veghová*, mad. G, Komárno
5. *Daniel Mládek*, Nitra, Párovská
6. *Marián Valach*, Levice
7. *Róbert Foltán*, Partizánske
8. *Róbert Krištof*, SPŠE Piešťany

Kategorie C

1. *Ondrej Šedivý*, Nitra, Párovská
2. *Jozef Mičuch*, SPŠE Piešťany
3. *Daniel Bršel*, Hlohovec
4. *Vladimír Králik*, Zlaté Moravce
5. *Magdaléna Molnárová*, mad. G, Dunajská Streda
6. *Martin Nehez*, Levice
7. *Viera Chorvátová*, SPŠ Nové Mesto n. V.
8. *Milada Mikesková*, Trenčín
9. *Renáta Cedulová*, mad. G, Komárno
10. *Petra Sušinová*, Trenčín

Kategorie A

1. *Ondrej Šuch,* 1 M, Žilina, V. Okružná
2. *Miroslav Laššák,* 4 M, Žilina, V. Okružná
3.— 6. *Dušan Hanes,* 4 MF, Prievidza
Dalibor Jakuš, 3 M, Žilina, V. Okružná
Štefan Rakučák, 4 M, Žilina, V. Okružná
Marcel Zanechal, 3, Žilina, V. Okružná
7.— 8. *Jozef Saniga,* 3 M, Žilina, V. Okružná
Jozef Radler, 3 MF, Zvolen

Kategorie B

1. *Róbert Mitka,* M, Žilina, V. Okružná

Kategorie C

1.— 2. *Ondrej Šuch,* M, Žilina, V. Okružná
Jozef Skokan, M, Žilina, V. Okružná
3. *Eduard Omasta,* Ružomberok
4. *Martin Pavlenda,* MF, Banská Bystrica, Tajovského
5. *Ivana Čierná,* Martin
6. *Elena Šerešová,* MF, Zvolen
7.— 8. *Juraj Kodýnek,* MF, Banská Bystrica, Tajovského
Dušan Slivka, SPŠ Banská Bystrica
9. *Stanislav Ťažiar,* MF, Prievidza
10. *Ivan Marčák,* M, Žilina, V. Okružná

Kategorie A

1. *Roman Soták,* 4 M, Košice, Šmeralova
2. *Ján Paralič,* 4, Košice, Šrobárova
3. *Mário Drosc,* 4, Michalovce
4. *Peter Eliáš,* 3 MF, Prešov, Konštantínova
5. *Stanislav Krajči,* 3 M, Košice, Šmeralova

6.— 7. *Maroš Rusňák,* 2 M, Košice, Šmeralova
Roman Vodička, 3 M, Košice, Šmeralova

Kategorie B

1. *Maroš Rusňák,* M, Košice, Šmeralova
2. *Ján Franek,* M, Košice, Šmeralova

Kategorie C

1.— 2. *Vladimír Komár,* M, Košice, Šmeralova
Vladimír Skalský, Prešov, T. Ševčenka
3. *Roman Krištof,* M, Košice, Šmeralova

4.— 5. *Peter Haluška,* M, Košice, Šmeralova
Vladimír Vodila, M, Košice, Šmeralova

6.— 7. *Marta Šlachtovská,* SPŠE Michalovce
Martin Tomko, Košice, Šrobárova

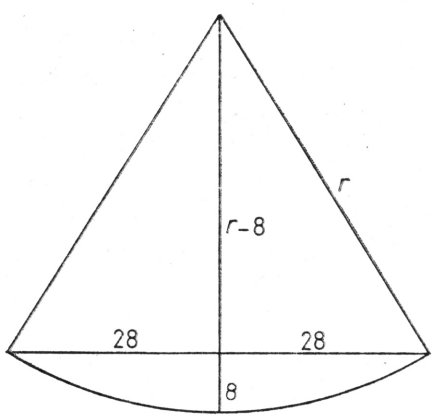
8.— 9. *Marian Stach,* SPŠ stroj., Prešov
Milan Vaľko, Poprad, Leninovo nábr.
10. *Rastislav Hagovský,* Spišská Nová Ves

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

C - I - 1

Na nitěném závěsu se kýve závaží. Šířka rozkmitu je 56 cm, výškový rozdíl nejnižší a nejvyšší polohy závaží je 8 cm. Vypočtěte délku závěsu.

Řešení. Závaží se pohybuje po kružnici o poloměru r,



Obr. 1

který se rovná délce závěsu. Je to velikost přepony pravoúhlého trojúhelníku (obr. 1), jehož jedna odvěsna se rovná polovině rozkmitu a druhá odvěsna má délku $r - 8$. Podle Pythagorovy věty je tedy $r^2 = (r - 8)^2 + 28^2$, odkud $r = 53$ cm.

C - I - 2

Určete čísla a, b, c tak, aby byla řešeními rovnice

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

Řešení. Čísla a, b, c jsou právě tehdy řešeními dané rovnice, platí-li současně vztahy

$$\begin{aligned} a^3 - a^3 + ab - c &= 0 \\ b^3 - ab^2 + b^2 - c &= 0 \\ c^3 - ac^2 + bc - c &= 0. \end{aligned}$$

Musí tedy být $c = ab$ a současně $b(b - a)(b + 1) = 0$ a $ab(b - 1)(a^2b + 1) = 0$. Je tedy nutně $b = 0$ nebo $b = a$ nebo $b = -1$. Je-li $b = 0$, je $c = 0$, a libovolné. Je-li $b = -1$, musí být $c = -a$ a současně $a(a^2 - 1) = 0$, takže $a = c = 0$, $b = -1$, nebo $a = 1$, $b = c = -1$, nebo $a = b = -1$, $c = 1$. Je-li $b = a$, musí být $a^2(a - 1)(a^3 + 1) = 0$ a $c = a^2$, takže je buď $a = b = c = 0$, nebo $a = b = c = 1$, nebo $a = b = -1$, $c = 1$. Zkouškou se můžeme ještě přesvědčit, že všechny obdržené výsledky vyhovují požadavku úlohy. Přehledně jsou uvedeny v tabulce.

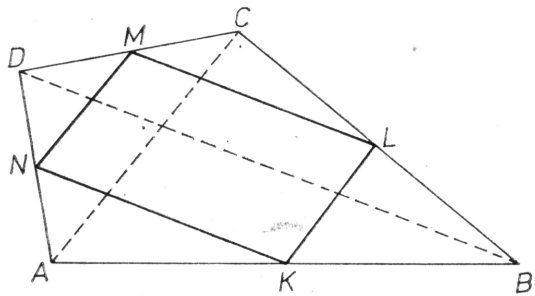
a	b	c	Rovnice	Kořeny
libovolné	0	0	$x^2(x-a) = 0$	$0,\ 0,\ a$
0	-1	0	$x(x-1)(x+1) = 0$	$0,\ 1,\ -1$
1	-1	-1	$(x+1)(x-1)^2 = 0$	$-1,\ 1,\ 1$
-1	-1	1	$(x+1)^2(x-1) = 0$	$-1,\ -1,\ 1$
1	1	1	$(x-1)(x^2+1) = 0$	1

Text úlohy nepožaduje, aby se každý kořen rovnal některému z čísel a, b, c, například v případě $a = c = 0$, $b = -1$ má rovnice kromě 0 a -1 ještě kořen $+1$. V případě $a = 1$, $b = c = -1$ má sice příslušná rovnice kořeny 1 a -1, ale číslo 1 je tzv. kořenem dvojnásobným, zatímco mezi čísly a, b, c se vyskytuje číslo 1 jen jednou. Pokud by se v úloze požadovalo, aby každé z čísel a, b, c bylo tolikanásobným kořenem dané rovnice, kolikrát se vyskytuje mezi čísly a, b, c, vyhovovala by jen řešení v prvním a čtvrtém řádku uvedené tabulky. Dostali bychom je také jako ty trojice (a, b, c), pro které se rovnají mnohočleny $x^3 - ax^2 + bx - c$ a $(x-a)(x-b)(x-c)$, tj. ty trojice, pro které platí současně rovnosti $a + b + c = a$, $ab + bc + ca = b$, $abc = c$.

C - I - 3

V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, středy jeho stran AB, BC, CD, DA označíme po řadě K, L, M, N. Dokažte, že přímky AC, BD jsou navzájem kolmé právě tehdy, když je $|KM| = |NL|$. Dokažte, že přímky KM, NL jsou navzájem kolmé právě tehdy, když je $|AC| = |BD|$.

Řešení. Úsečka KL je střední příčkou v trojúhelníku ABC (obr. 2), úsečka MN je střední příčkou v trojúhelníku ADC.

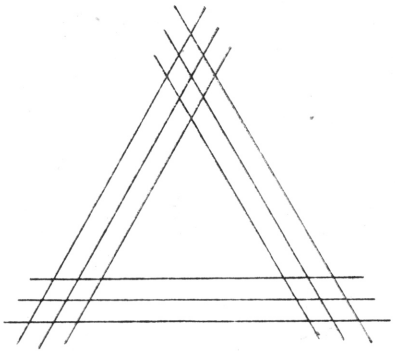


Obr. 2

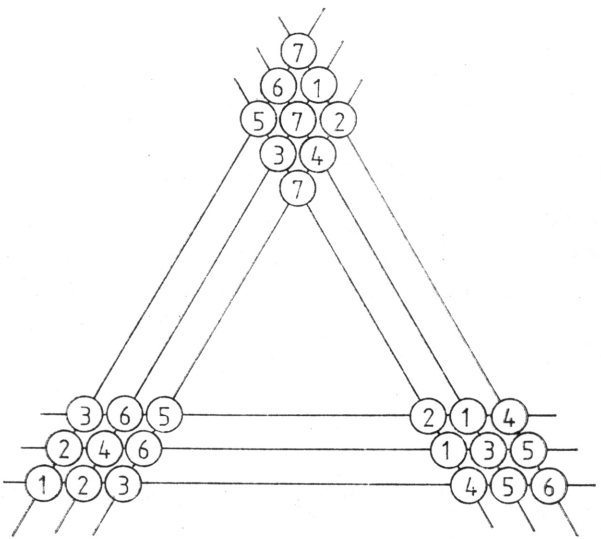
Je $|KL| = |MN| = \frac{1}{2}|AC|$, $KL \| MN \| AC$. Podobně je $|NK| = |ML| = \frac{1}{2}|BD|$, $NK \| ML \| BD$. Úhlopříčky KM a LN jsou v rovnoběžníku $KLMN$ právě tehdy stejně dlouhé, když je to pravoúhelník, tedy když je $KL \perp NK$, tj. $AC \perp BD$. Úhlopříčky KM, NL rovnoběžníku $KLMN$ jsou právě tehdy navzájem kolmé, když je rovnoběžník kosočtverec, tj. $|KL| = |NK|$, tedy $|AC| = |BD|$.

C - I - 4

Jakým nejmenším počtem barev je možno obarvit průsečíky devíti přímek na obr. 3a tak, aby na žádné této přímce neležely dva body téže barvy?



Obr. 3a



Obr. 3b

Řešení. Každá z daných přímek protíná šest dalších, je tedy třeba nejméně šesti barev. Ukážeme však, že šest barev nestačí. Při šesti barvách by muselo být jednou barvou obarveno aspoň pět z uvažovaných 27 bodů. Ale každý bod obarvený touto barvou je průsečíkem dvou daných přímek, na kterých už nemůže ležet další bod téže barvy. Takže pět bodů téže barvy by muselo ležet na deseti přímkách, máme však k dispozici jen devět přímek. Sedm barev však už stačí, důkazem je rozložení barev znázorněné na obr. 3b (různé barvy jsou označeny různými číslicemi). Každá barva musí být zastoupena čtyřikrát, pouze jedna třikrát (je označena číslicí 7).

C - I - 5

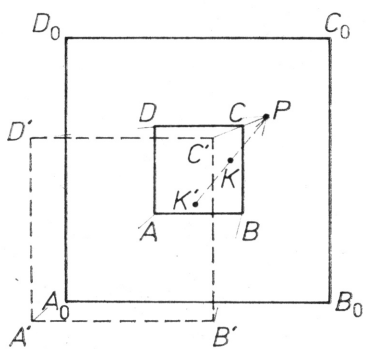
Nechť m, n jsou libovolná přirozená čísla a platí, že číslo 5 nedělí číslo $mn(m + n)$. Potom číslo 5^2 nedělí číslo $(m + n)^5 - m^5 - n^5$. Dokažte.

Řešení. Podle předpokladu nedělí číslo 5 žádné z čísel m, n, $m + n$. Je $(m + n)^5 - m^5 - n^5 = 5mn(m + n)(m^2 + mn + n^2)$. Máme tedy dokázat, že číslo 5 nedělí součet $m^2 + mn + n^2$. Každé z čísel m, n dává při dělení pěti zbytek 1, 2, 3 nebo 4. Dává-li jedno z nich zbytek 1, nemůže dát druhé zbytek 4, protože by pak byl jejich součet dělitelný pěti. Podobně je to se zbytky 2 a 3. Mohou být tedy zbytky při dělení čísel m, n číslem 5 pouze tyto dvojice: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4). V prvním případě je $m = 5r + 1$, $n = 5s + 1$, r, s jsou přirozená čísla. Pak je $m^2 + mn + n^2 = 5(5r^2 + 5s^2 + 5rs + 3r + 3s) + 3$. Vidíme, že toto číslo není dělitelné pěti, jeho

zbytek při dělení pěti je 3. Podobně se to dokáže ve zbývajících sedmi případech. Důvtipnější, i když trochu vykonstruovaný je tento postup: Číslo $m^2 + mn + n^2$ je právě tehdy dělitelné pěti, když je dělitelný pěti jeho dvojnásobek $2(m^2 + mn + n^2) = m^2 + (m + n)^2 + n^2$. Žádné z čísel m, $m + n$, n není dělitelné pěti, každé dává při dělení pěti zbytek 1, 2, 3 nebo 4, proto jeho druhá mocnina dává při dělení pěti vždy zbytek 1 nebo 4. Pak však není nikdy součet tří takových druhých mocnin dělitelný pěti.

C - I - 6

Je dán čtverec $ABCD$. Zvolme libovolně v rovině čtverce bod P a označme A', B', C', D' obrazy bodu P v středových souměrnostech se středy v bodech A, B, C, D. Dokažte, že $A'B'C'D'$ je čtverec. Určete množinu všech bodů P, pro které je průnik čtverců $ABCD$, $A'B'C'D'$ neprázdný.



Obr. 4

Řešení. Úsečka AB je střední příčkou v trojúhelníku $A'B'P$ (obr. 4) rovnoběžnou s $A'B'$, proto je $A'B' \parallel AB$, $|A'B'| = 2|AB|$. Obdobně to platí pro úsečky $B'C'$, $C'D'$ a $D'A'$. Je tedy $A'B'C'D'$čtverec, je to obraz čtverce $ABCD$ v stejnolehlosti se středem v bodě P a koeficientem 2. Předpokládejme, že některý bod K' čtverce $A'B'C'D'$leží současně ve čtverci $ABCD$. Pak leží ve čtverci $ABCD$ také střed K úsečky $K'P$, je tedy bod P bodem souměrně sdruženým k bodu K' podle bodu K, přičemž oba body K, K' leží v čtverci $ABCD$. Má-li obráceně bod P tuto vlastnost, tj. pro některý bod K' čtverce $ABCD$ leží střed K úsečky $K'P$ také ve čtverci $ABCD$, mají čtverce $ABCD$, $A'B'C'D'$ neprázdný průnik, do průniku patří bod K'. Body P popsané vlastnosti vytvoří čtverec $A_0B_0C_0D_0$, který má s čtvercem $ABCD$ společný střed a rovnoběžné strany, přičemž $|A_0B_0| = 3|AB|$.

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

C - S - 1

Určete všechna přirozená čísla n, pro která je číslo $2^n + 1$ druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení. Nechť pro přirozené číslo n platí $2^n + 1 = m^2$, kde m je také přirozené číslo. Pak je $2^n = (m - 1)(m + 1)$. Jsou tedy čísla $m - 1$, $m + 1$ mocninou čísla 2 s celým nezáporným exponentem. Vzhledem k tomu, že se jejich rozdíl rovná dvěma, je nutně $m - 1 = 2$, $m + 1 = 4$. Proto je $n = 3$ jediné řešení úlohy.

C - S - 2

Prvky dané množiny M jsou nenulová celá čísla. Množina M obsahuje aspoň jedno sudé, aspoň jedno liché, aspoň jedno kladné a aspoň jedno záporné číslo. Dokažte, že v množině M existují dvě čísla, jejichž součet je číslo liché a součin je číslo záporné.

Poznámka. Čísla $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$ jsou sudá, čísla $\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots$ jsou lichá.

Řešení. Nechť $a \in \mathsf{M}$, $b \in \mathsf{M}$, číslo a nechť je sudé, číslo b liché. Mají-li čísla a, b opačná znaménka, splňují podmínky úlohy. Mají-li čísla a, b stejné znaménko, existuje v M číslo c opačného znaménka. Je-li číslo c sudé, splňují podmínku úlohy čísla b, c, v opačném případě můžeme vzít dvojici a, c.

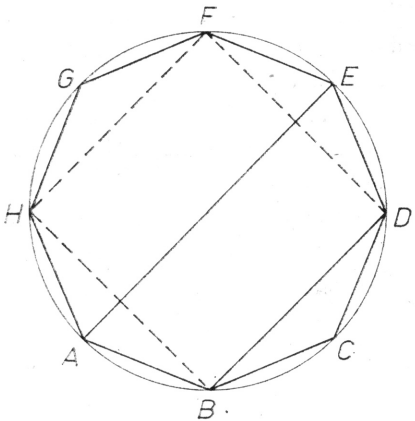
C - S - 3a

Do kružnice o poloměru $r = 10$ je vepsán pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Vypočtěte obsah lichoběžníku $ABDE$.

Řešení. Je $|AE| = 20$ (obr. 5), $|BD|$ je délka a strany čtverce vepsaného kružnici o poloměru $r = 10$, tedy $a = 10\sqrt{2}$. Výška lichoběžníku se rovná polovině strany čtverce $BDFH$, takže hledaný obsah je $50(\sqrt{2} + 1)$.

C - S - 3b

Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky, pro které je délka jedné odvěsny aritmetickým průměrem délek druhé odvěsny a přepony.



Obr. 5

Řešení. Označíme-li c délku přepony a a, b délky odvěsen, má platit $2a = b + c$ a současně $a^2 + b^2 = c^2$. Vyloučením c dostaneme $3a^2 - 4ab = 0$. Jelikož $a \neq 0$, je $a = \frac{4}{3}b$, $c = \frac{5}{3}b$. Úloze vyhovují právě všechny trojúhelníky o stranách $3d$, $4d$, $5d$, tedy trojúhelníky podobné trojúhelníku o stranách 3, 4, 5.

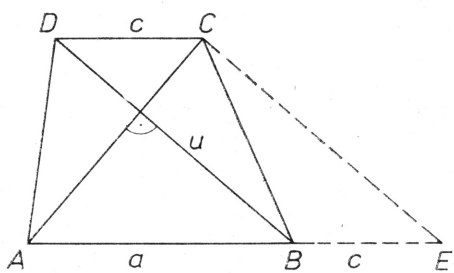
ÚLOHY II. KOLA

C - II - 1

Určete obsah lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD, jsou-li dány délky stran $a = |AB|$, $c = |CD|$ a délka úhlo-

příčky $u = |BD|$, přičemž víte, že úhlopříčky AC, BD jsou navzájem kolmé.

Řešení. Bodem C (obr. 6) veďme přímku rovnoběžnou s přímkou BD, její průsečík s přímkou AB označíme E. Trojúhelníky CDA, BEC mají stejné obsahy, neboť $|CD| = |BE|$ a příslušné výšky se rovnají výšce lichoběžníku. Proto se obsah S lichoběžníku $ABCD$ rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníku ACE, který má přeponu $a + c$, jedna jeho odvěsna má délku u. Je tedy nutně $a + c > u$ a $S = \frac{u}{2}\sqrt{(a + c)^2 - u^2}$.



Obr. 6

C - II - 2

Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n, pro které je číslo $(m + n)^5 - m^5 - n^5$ dělitelné číslem 5^6.

Řešení. Podle úlohy C - I - 5 se výraz $s = (m + n)^5 - m^5 - n^5$ rovná $5mn(m + n)r$, $r = m^2 - mn + n^2$, a pokud číslo 5 nedělí součin $mn(m + n)$, nedělí číslo 5 číslo r

a tedy není číslo s dělitelné číslem 5^6. Jsou-li čísla m, n obě dělitelná pěti, je číslo s zřejmě dělitelné číslem 5^6. Je-li právě jedno z čísel m, n dělitelné pěti, není pěti dělitelné žádné z čísel $m + n$, r a číslo s je dělitelné číslem 5^6 právě tehdy, když jedno z čísel m, n je dělitelné číslem 5^5. Není-li žádné z čísel m, n dělitelné pěti, ale jejich součet ano, dávají při dělení pěti zbytky 1 a 4 nebo 2 a 3. V žádném z těchto případů není číslo r násobkem pěti. Aby číslo s bylo dělitelné číslem 5^6, je nutné a stačí, aby byl součet $m + n$ násobkem čísla 5^5. Takže číslo s je dělitelné číslem 5^6, jestliže jsou čísla m i n dělitelná pěti, nebo je jedno z nich dělitelné číslem 5^5, nebo je jejich součet dělitelný číslem 5^5, v žádném dalším případně není s dělitelné číslem 5^6.

C - II - 3a

Zjistěte, kolik řešení má soustava rovnic

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_6 + x_7 + x_8,$$

$$|x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_7\, x_8| = 1$$

v oboru celých čísel.

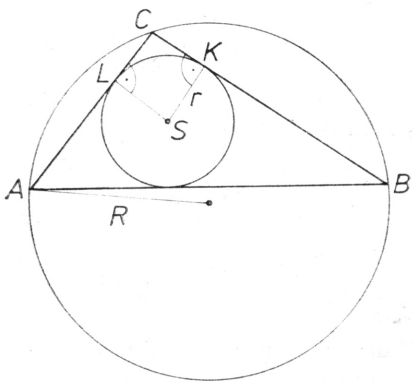
Řešení. Z druhé rovnice plyne, že každé z čísel x_i se může rovnat pouze 1 nebo -1. Je-li $x_6 = x_7 = x_8 = 1$, musí se jedno z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_5$ rovnat -1, ostatní $+1$, to je 5 možností. Jestliže se jedno z čísel x_6, x_7, x_8 rovná -1 a zbývající dvě se rovnají $+1$ (to jsou tři možnosti), musí se dvě z čísel $x_1, \ldots, x_5$ rovnat -1 a tři $+1$, to je $\binom{5}{2} = 10$

možností, celkem tedy $3.10 = 30$ možností. Obdobně je tomu v případě $x_6 + x_7 + x_8 = -1$ (30 možností) a v případě $x_6 = x_7 = x_8 = -1$ (5 možností). Celkem má soustava 70 řešení.

C - II - 3b

V trojúhelníku ABC označme R poloměr opsané a r poloměr vepsané kružnice. Dokažte, že $|BC| + |AC| - |AB| = 2r$ právě tehdy, když platí $|AB| = 2R$.

Řešení. Označme S střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC (obr. 7) a K, L její body dotyku se stranami BC, AC.



Obr. 7

Je pak $|BC| + |AC| - |AB| = 2|CK| = 2|CL|$. Je tedy $|BC| + |AC| - |AB| = 2r$ právě tehdy, když je $|CK| = r$, což znamená, že $CLSK$ je čtverec a trojúhelník ABC je

pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Je-li trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, splývá střed přepony AB se středem kružnice trojúhelníku opsané a je tedy $|AB| = 2R$. Je-li obráceně $|AB| = 2R$, je úsečka AB průměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC, který je pak podle Thaletovy věty pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Tím je celé tvrzení úlohy dokázané.

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

B - I - 1

Najděte všechny dvojice (p, k), kde p je prvočíslo a k přirozené číslo, pro něž má rovnice $x^2 - 2(p^k + 2)x + p^{2k} = 0$ řešení v oboru celých čísel.

Řešení. Rovnici upravíme na tvar $(x - p^k - 2)^2 = 4(p^k + 1)$. Vidíme, že rovnice má právě tehdy řešení v oboru celých čísel, když je číslo $\sqrt{p^k + 1}$ celé, tedy $p^k = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$, pro některé celé číslo m. Pak musí existovat celá nezáporná čísla a, b tak, že $p^a = m - 1$, $p^b = m + 1$, $k = a + b$. Odečtením prvních dvou rovností dostaneme $p^a(p^{b-a} - 1) = 2$, a tedy

$$p^a = 2 \qquad p^a = 1$$

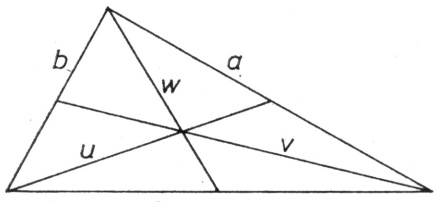
nebo

$$p^{b-a} - 1 = 1 \qquad p^{b-a} - 1 = 2.$$

V prvním případě je $p = 2$, $k = 3$, v druhém případě je $p = 3$, $k = 1$. Jsou to jediná dvě řešení úlohy.

B - I - 2

V každém pravoúhlém trojúhelníku o přeponě c a odvěsnách a, b platí $2(au^2 + bv^2) \leqq 5cw^2\sqrt{2}$, kde u, v, w jsou po řadě délky těžnic k stranám a, b, c. Dokažte.



Obr. 8

Řešení. Vyjádříme si nejdříve u, v, w pomocí a, b, přičemž víme, že $c^2 = a^2 + b^2$. Je (obr. 8) $u = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$, $v = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2}$, $w = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Máme tedy dokázat nerovnost

$$2\left(ab^2 + \frac{a^3}{4} + a^2b + \frac{b^3}{4}\right) \leqq 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4}\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^3,$$

kterou upravíme na ekvivalentní tvar

$$2(a + b)(a^2 + 3ab + b^2) \leqq 5\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}.(a^2 + b^2).$$

Je $a + b \leqq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, neboť $a^2 + 2ab + b^2 \leqq 2(a^2 + b^2)$.

Dále je $2(a^2 + 3ab + b^2) \leqq 5(a^2 + b^2)$, neboť $0 \leqq 3(a^2 - 2ab + b^2)$. Vynásobením těchto dvou nerovností dostaneme nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

B - I - 3

Jestliže pro kladná čísla a, b, c, p, q, r platí $ac \geqq b^2, pr \geqq q^2$, tak platí také $(a + p)(c + r) \geqq (b + q)^2$. Dokažte. Ukažte dále, kdy platí v posledním vztahu rovnost.

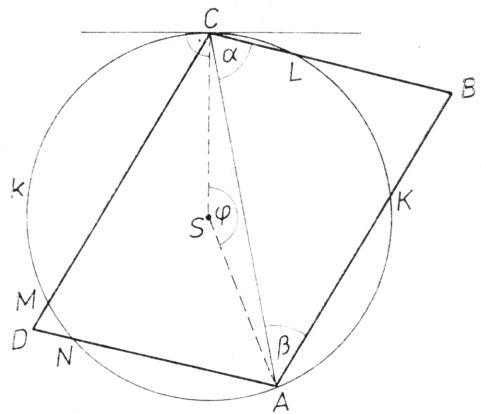
Řešení. Sečtením obou nerovností z předpokladu dostaneme $ac + pr \geqq b^2 + q^2$, jejich vynásobením a odmocněním dostaneme nerovnost $\sqrt{acpr} \geqq bq$. Pro nezáporná čísla u, v platí $u + v \geqq 2\sqrt{uv}$. Položíme-li $u = ar$, $v = cp$, máme $ar + cp \geqq 2\sqrt{arcp} \geqq 2bq$. Sečtením s první odvozenou nerovností dostaneme dokazovanou nerovnost. Rovnost bude platit právě tehdy, když bude platit $ac = b^2$, $pr = q^2$ a $ar = cp$. Z těchto rovností plyne $acpr = b^2q^2$, dosadíme-li za ar výraz cp, dostaneme $cp = bq = ar$, takže $a : b : c = p : q : r$ a $ac = b^2$. Platí-li obráceně tyto vztahy, platí rovnost

$$(a + p)(c + r) = (b + q)^2.$$

B - I - 4

Je dána kružnice k se středem S a na ní dva body A, C $(A \neq C)$. Jaká je nutná a postačující podmínka pro velikost úhlu ASC, aby existoval rovnoběžník $ABCD$, jehož obvod má s kružnicí k šest společných bodů?

Řešení. Předpokládejme, že existuje rovnoběžník $ABCD$ splňující podmínku úlohy. Označme φ velikost konvexního



Obr. 9

úhlu ASC (obr. 9). Označení bodů B, D můžeme zvolit tak, aby body D a S ležely v téže polorovině s hraniční přímkou AC. Označme K, L, M, N ty vnitřní body stran AB, BC, CD, DA rovnoběžníku $ABCD$, které leží na kružnici k, dále označme $\alpha = |\sphericalangle NAC| = |\sphericalangle LCA|$, $\beta = |\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle MCA|$. Přímka AC svírá s tečnou kružnice k v bodě C úhel $\frac{\varphi}{2}$, proto je $\alpha < \frac{\varphi}{2}$, $\beta < \frac{\varphi}{2}$. Také úhel ADC je menší než $\frac{\varphi}{2}$, protože bod D leží ve vnější oblasti kružnice k. Přitom je $|\sphericalangle ADC| = 180° - \alpha - \beta < \frac{\varphi}{2}$. Sečtením posledních tří nerovností dostaneme $120° < \varphi$. Je-li obráceně

tato nerovnost splněna, můžeme zvolit α tak, aby $90° - \frac{\varphi}{4} < \alpha < \frac{\varphi}{2}$. Rovnoběžník $ABCD$, pro který je pak $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$, splňuje podmínky úlohy. Je pak totiž $|\sphericalangle ADC| = 180° - 2\alpha < \frac{\varphi}{2}$, takže jsou body D, B body vnější oblasti kružnice k.

B - I - 5

Najděte všechny uspořádané dvojice (p, q) prvočísel p, q, pro které platí $3p^2 + 6p = 2q^2 + 7q$.

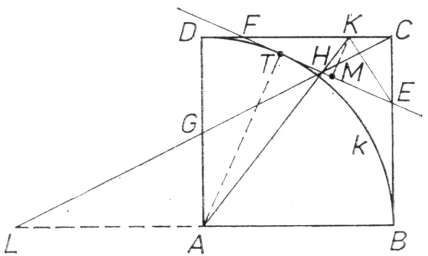
Řešení. Rovnici upravíme na tvar

$$3p(p + 2) = q(2q + 7).$$

Je vidět, že prvočíslo q dělí součin $3p(p + 2)$, takže musí dělit jedno z čísel 3, p, $p + 2$. Jestliže q dělí číslo 3, je nutně $q = 3$, jestliže dělí číslo p, rovná se číslu p. Snadno zjistíme, že $q = 3$ ani $q = p$ nevyhovuje. Musí tedy být $p + 2$ násobkem čísla q, položme $p + 2 = kq$, k přirozené číslo. Dosadíme-li do dané rovnice $p = kq - 2$, dostaneme $q(3k^2 - 2) = 6k + 7$. Jelikož je $q > 1$, je nutně $3k^2 - 2 < 6k + 7$, po úpravě $(k - 1)^2 < 4$. Přicházejí tedy v úvahu pouze hodnoty $k = 1, 2$. Vyhovuje však pouze $k = 1$, pro které je $q = 13$, $p = 11$. Dvojice (11, 13) je jediné řešení úlohy.

K danému čtverci $ABCD$ sestrojíme kružnici k se středem A a poloměrem $|AB|$. Na straně BC zvolíme bod E, na straně CD bod F tak, aby přímka EF byla tečnou kružnice k. Označme G střed úsečky AD, H průsečík přímek CG, EF a K průsečík přímek AH, CD. Dokažte, že přímka EK je osou úhlu CEF.

Řešení. Označme L průsečík přímek CG a AB (obr. 10), T bod dotyku přímky EF a kružnice k a M patu kolmice vedené bodem K k přímce EF. Protože bod G je středem



Obr. 10

úsečky AD, je $|AL| = |AB| = |AT|$. Trojúhelníky ALH a KCH jsou stejnolehlé, středem stejnolehlosti je bod H. V téže stejnolehlosti si odpovídají trojúhelníky ATH a KMH. Jelikož je $|AL| = |AT|$, je také $|KC| = |KM|$. Pak jsou ovšem trojúhelníky ECK a EMK shodné, neboť jsou pravoúhlé, mají společnou přeponu EK a stejně dlouhé odvěsny KH, KC. Shodují se proto i v úhlech proti těmto odvěsnám, tj. $|\sphericalangle KEM| = |\sphericalangle KEC|$, což jsme měli dokázat.

B - S - 1

Najděte všechna celá kladná čísla n, pro která je číslo $2^n - 1$ druhou mocninou celého kladného čísla.

Řešení. Je-li pro přirozená čísla n, m splněna rovnost $2^n - 1 = m^2$, musí být číslo m^2 a tudíž i číslo m liché. Položme $m = 2k - 1$, k přirozené. Pak je $2^n = 4k^2 - 4k + 2$. Pravá strana je dělitelná dvěma, není však dělitelná čtyřmi. Proto je nutně $n = 1$, je to jediné řešení úlohy.

B - S - 2

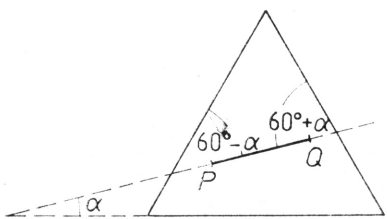
Je dáno n reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takových, že $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 1$. Dokažte, že $\sum_{i=1}^{n} x_i^7 = 1$.

Řešení. Jelikož se součet druhých mocnin daných čísel rovná jedné, rovná se každé z nich v absolutní hodnotě nejvýše jedné, tj. $|x_i| \leqq 1$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak je ovšem $x_i^3 \leqq |x_i^3| \leqq x_i^2$, přičemž $x_i^3 = x_i^2$ pouze tehdy, je-li $x_i = 0$ nebo $x_i = 1$. Podle předpokladu se součet třetích mocnin daných čísel rovná součtu jejich druhých mocnin, proto se každé z nich rovná nule nebo jedné. Jelikož se každý z těchto součtů rovná jedné, rovná se jedné právě jedno z daných čísel, ostatní se rovnají nule. Pak je ovšem roven jedné i součet jejich sedmých mocnin.

B - S - 3a

Uvnitř rovnostranného trojúhelníku leží úsečka PQ délky 10. Úsečku PQ promítneme kolmo na všechny tři strany trojúhelníku. Při jaké poloze úsečky PQ je součet délek všech tří průmětů největší?

Řešení. Svírá-li přímka PQ s některou stranou trojúhelníku úhel $\alpha \leqq 30°$, svírá s jednou další stranou úhel $60° - \alpha$ a s třetí stranou úhel $60° + \alpha$ (obr. 11). Součet délek všech



Obr. 11

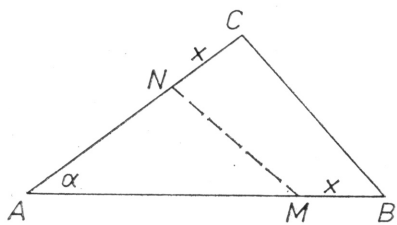
tří průmětů je $10[\cos \alpha + \cos (60° + \alpha) + \cos (60° - \alpha)] = 20 \cos \alpha$. Tento součet je největší při $\alpha = 0°$. Svírá-li přímka PQ s některou stranou trojúhelníku úhel větší než 30°, svírá s některou jinou stranou úhel menší než 30° a můžeme tento případ převést na předcházející. Je tedy součet délek všech tří průmětů největší, právě když je úsečka PQ rovnoběžná s některou stranou trojúhelníku.

B - S - 3b

Na stranách AB, AC trojúhelníku ABC jsou po řadě zvoleny body M, N tak, že $|MB| = |NC|$ a obsah trojúhelníku

AMN se rovná jedné polovině obsahu trojúhelníku ABC. Vyjádřete velikosti úseček AM, AN pomocí $b = |AC|$, $c = |AB|$. Zjistěte, kdy mají trojúhelníky AMC, BMC stejný obvod.

Řešení. Označme $|MB| = |NC| = x$, obr. 12. Obsah trojúhelníku ABC je $\frac{1}{2}\, bc \sin \alpha$, obsah trojúhelníku AMN



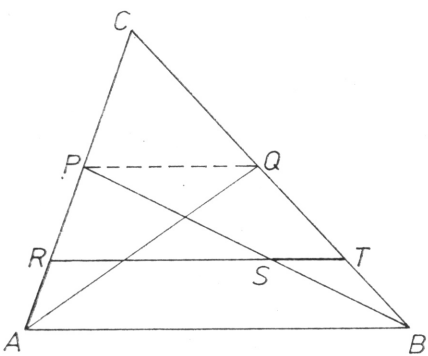
Obr. 12

je $\frac{1}{2}(b - x)(c - x) \sin \alpha$. Z podmínek úlohy plyne pro x rovnice $2(b - x)(c - x) = bc$. Protože musí být $x < b$, $x < c$, dostaneme $x = \frac{1}{2}(b + c - \sqrt{b^2 + c^2})$. Je pak $|AN| = \frac{1}{2}(b + c - \sqrt{b^2 + c^2})$, $|AM| = \frac{1}{2}(c + b - \sqrt{b^2 + c^2})$. Obvody trojúhelníků AMC, BMC jsou právě tehdy stejné, když je $|AC| + |AM| = |BC| + |BM|$, tj. $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, tedy když je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A.

B - II - 1

V trojúhelníku ABC určete na straně AC bod P tak, aby platilo: Jestliže přímka rovnoběžná se stranou AB protne úsečky AP, PB, BC po řadě v bodech R, S, T, je $|AR| = |ST|$.

Řešení. Nechť P splňuje podmínku úlohy a nechť R, S, T jsou průsečíky úseček AP, BP, BC s přímkou rovnoběžnou s přímkou AB. Označme Q průsečík úsečky BC a přímky vedené bodem P rovnoběžně s AB (obr. 13). Z podobnosti



Obr. 13

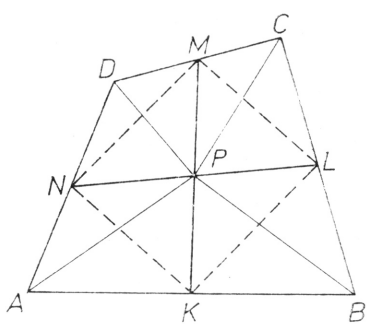
trojúhelníků ABP, RSP a z podobnosti trojúhelníků PBQ, SBT plyne $|AR| : |AP| = |BS| : |BP| = |ST| : |PQ|$. Z rovnosti $|AR| = |ST|$ plyne $|AP| = |PQ|$ a obráceně. Přitom je $|AP| = |PQ|$ právě tehdy, když je trojúhelník APQ rovnoramenný se základnou AQ. To nastane zase právě tehdy,

když je $|\sphericalangle PAQ| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CAB|$. Bod P tedy určíme takto: Osa úhlu CAB protne stranu BC v bodě Q, bodem Q vedeme rovnoběžku s přímkou AB, její průsečík se stranou AC je bod P, který splňuje podmínku úlohy.

B - II - 2

Spojnice středů protilehlých stran konvexního čtyřúhelníku rozdělí čtyřúhelník na čtyři čtyřúhelníky. Obsahy tří z nich jsou 8, 16, 20. Určete obsah čtvrtého.

Řešení. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník (obr. 14), K, L, M, N nechť jsou po řadě středy úseček AB, BC, CD, DA

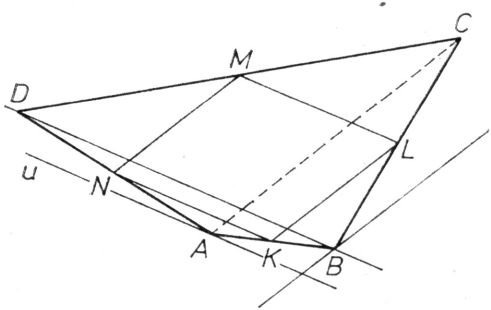


Obr. 14

a P průsečík úhlopříček KM, LN rovnoběžníku $KLMN$. Trojúhelníky AKP a BKP mají stejný obsah, neboť K je střed úsečky AB. Totéž platí pro dvojice trojúhelníků BLP a CLP, CMP a DMP, DNP a ANP. Z toho plyne, že součet

obsahů čtyřúhelníků *AKPN*, *CLPM* se rovná součtu obsahů zbývajících dvou čtyřúhelníků *BKPL* a *DMPN*. Každý z těchto dvou součtů se rovná $\frac{S}{2}$, kde S značí obsah celého čtyřúhelníku *ABCD*. Kromě toho je *KL* střední příčka trojúhelníku *ABC*, proto se obsah trojúhelníku *KLB* rovná jedné čtvrtině obsahu trojúhelníku *ACB*. Obdobně to platí pro trojúhelníky *DMN* a *DCA* a rovněž pro dvojice trojúhelníků *AKN*, *ABD* a *CML*, *CDB*. Jelikož se součet obsahů trojúhelníků *KLB* a *DMN* rovná $\frac{S}{4}$ a součet obsahů čtyřúhelníků *PKBL* a *PMDN* je roven $\frac{S}{2}$, rovná se obsah každého z trojúhelníků *PKL* a *PMN* a také trojúhelníků *PNK* a *PLM* hodnotě $\frac{S}{8}$. Na začátku řešení úlohy jsme si odvodili, že součet obsahů dvou protějších čtyřúhelníků se rovná součtu obsahů zbývajících dvou protějších čtyřúhelníků a každý z těchto součtů se rovná $\frac{S}{2}$. Jestliže obsahy tří z čtyřúhelníků jsou 8, 16 a 20, musí se obsah čtvrtého nutně rovnat 4 nebo 12 nebo 28, obsah S se pak v uvedených případech rovná 48 nebo 56 nebo 72. Kdyby se obsah třeba čtyřúhelníku *PKBL* rovnal 4, byl by jeho obsah menší než obsah trojúhelníku *PKL*, který by se rovnal $\frac{S}{8} = 6$, což není možné. Stejně tak nevyhovuje hodnota 28, protože jeden z čtyřúhelníků by měl obsah 8 a $\frac{S}{8}$ by bylo 9. Má

tedy daný čtyřúhelník obsah $S = 56$ a obsah čtvrtého čtyřúhelníku je 12. Ukážeme si ještě konstrukci takového čtyřúhelníku. Zvolíme k tomu libovolný rovnoběžník $KLMN$ o obsahu $\frac{S}{2} = 28$. V polorovině opačné k polorovině KNM vedeme s KN rovnoběžku u tak, aby pro každý její bod A (obr. 15) se obsah trojúhelníku AKN rovnal $8 - \frac{S}{8} = 1$.



Obr. 15

Stejně tak musí bod B ležet na rovnoběžce s přímkou KL tak, aby se obsah trojúhelníku BKL rovnal $12 - \frac{S}{8} = 5$. Protože K musí být středem úsečky AB, leží bod B také na přímce souměrně sdružené k přímce u podle bodu K. K bodům B, A již pak sestrojíme body C, D. Čtyřúhelník $ABCD$ má požadované vlastnosti.

Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ v radiánech měřené velikosti vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku a $n \geqq 4$, pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \geqq \frac{1}{2}(n-2)\pi^2.$$

Dokažte a určete, kdy platí znaménko rovnosti.

Řešení. Sečtením nerovností $(\alpha_i - \alpha_j)^2 \geqq 0$ pro $i > j$ dostaneme

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \geqq 2\sum_{i>j}^{n} \alpha_i \alpha_j,$$

tedy $n\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2$. Poslední nerovnost plyne též přímo z tzv. Cauchyovy nerovnosti. Pro součet vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\,\pi,$$

tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \geqq \frac{1}{n}(n-2)^2\pi^2.$$

Podle předpokladu je $n \geqq 4$, takže $\frac{1}{n}(n-2)^2 \geqq \frac{1}{2}(n-2)$, čímž je nerovnost úlohy dokázána. Rovnost nastane, právě

když je $n = 4$ a všechny vnitřní úhly čtyřúhelníku jsou si rovny, tedy když je mnohoúhelník obdélník nebo čtverec.

B - II - 3b

Najděte všechna řešení rovnice $xyz = 3(x + y + z)$ v oboru celých kladných čísel. Řešení, která se liší jen pořadím, nepovažujeme za různá.

Řešení. Je-li trojice x, y, z řešením dané rovnice v oboru přirozených čísel, je aspoň jedno z čísel x, y, z dělitelné třemi; nechť je to například x, $x = 3k$, k přirozené číslo. Pro čísla k, y, z pak platí $kyz = 3k + y + z$, takže $k(yz - 3) = y + z$. Musí tedy být nutně $yz - 3 \leqq y + z$, tj. $(y - 1)(z - 1) \leqq 4$. Bez újmy obecnosti můžeme ještě předpokládat $y \leqq z$. Pro $y = 1$ je $k = 1 + \frac{4}{z - 3}$, takže jsou možnosti $z = 4$, $k = 5$, $x = 15$ nebo $z = 5$, $k = 3$, $x = 9$ nebo $z = 7$, $k = 2$, $x = 6$. Je-li $y = 2$, je $z \leqq 5$, $k = \frac{z + 2}{2z - 3}$, takže $z = 2$, $k = 4$, $x = 12$ nebo $z = 5$, $k = 1$, $x = 3$. Pro $y = 3$ je $z \leqq 3$, $k = \frac{z + 3}{3z - 3}$, tedy $z = 3$, $k = 1$, $x = 3$. Pro $y \geqq 4$ je $z \leqq 2$, což už nemusíme uvažovat.

Úloha má 6 řešení: (1, 4, 15), (1, 5, 9), (1, 6, 7), (2, 2, 12), (2, 3, 5) a (3, 3, 3).

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

A - I - 1

Reálná funkce f je definována na množině všech uspořádaných dvojic (n, x), kde $n \geq 1$ je přirozené číslo, x je reálné číslo. Funkce f splňuje podmínky

$$f(1, x) = x, \tag{1}$$

$$f(2n, x) = n + f(n, x + 1), \tag{2}$$

$$f(2n + 1, x) = n + f(n + 1, x + 1). \tag{3}$$

Dokažte, že pro $n \geq 2$ a každé reálné číslo x platí

$$f(n, x) = n + x + [\log_2(n - 1)]. \tag{4}$$

(Symbol $[x]$ značí celou část čísla x.)

Řešení. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Dosazením $n = 1$ do rovnosti (2) a použitím (1) postupně dostaneme

$$f(2, x) = 1 + f(1, x + 1) = 1 + x + 1 = 2 + x =$$

$$= 2 + x + [\log_2 1],$$

vztah (4) tedy platí pro $n = 2$ a libovolné reálné x.

Předpokládejme, že rovnost (4) platí pro každé přirozené $k < n$ a pro všechna reálná x, a dokážeme, že pak platí i pro $k = n$ a libovolné reálné x.

Je-li $n = 2k$, je podle (2) a podle indukčního předpokladu $(k < n)$

$$f(n, x) = f(2k, x) = k + f(k, x + 1) =$$

$$= k + (k + x + 1 + [\log_2(k - 1)]) =$$

$$= 2k + x + [1 + \log_2(k - 1)] =$$

$$= 2k + x + [\log_2(2k - 2)] =$$

$$= 2k + x + [\log_2(2k - 1)] = n + x + [\log_2(n - 1)].$$

Zde jsme využili toho, že $[\log_2 m] = a$, právě když $2^a \leqq m < 2^{a+1}$. Pro $m = 2k - 2$ odtud plyne

$$2^a \leqq 2k - 2 < 2k - 1 \leqq 2^{a+1},$$

ale $2k - 1$ je liché, takže $2^a \leqq 2k - 1 < 2^{a+1}$, a tudíž

$$[\log_2(2k - 1)] = a = [\log_2(2k - 2)].$$

Je-li $n = 2k + 1$, je podle (3) a podle indukčního předpokladu

$$f(n, x) = f(2k + 1, x) = k + f(k + 1, x + 1) =$$

$$= k + (k + 1 + x + 1 + [\log_2 k]) =$$

$$= 2k + 1 + x + [\log_2 2k] =$$

$$= n + x + [\log_2(n - 1)].$$

A - I - 2

Funkce f zobrazuje interval $I = (-c, c)$, $c > 0$, do množiny komplexních čísel tak, že pro každé $t \in I$ platí

$$|f(t)| = f(t)(\cos t + \mathrm{i} \sin t),$$

$$|f(t)| - 1 = |f(t) - 3|$$

a ke každému $t \in I$ lze nalézt $s \in I$ tak, že

$$2|f(t)| < |f(s)|.$$

Vypočtěte c (na tři platné číslice) a vypočtěte $f(t_0)$, víte-li, že $|f(t_0)| = 5$.

Řešení. Funkce f je komplexní funkce reálné proměnné. Z podmínky $|f(t)| = f(t)(\cos t + \mathrm{i} \sin t)$ je však vidět, že $f(t) = |f(t)|\,(\cos t - \mathrm{i} \sin t)$, k určení f proto stačí určit reálnou funkci g, $g(t) = |f(t)|$.

Umocněním druhé podmínky dostaneme

$$(g(t) - 1)^2 = |g(t) \cos t - 3 - \mathrm{i}\, g(t) \sin t|^2,$$

$$g^2(t) - 2g(t) + 1 = (g(t) \cos t - 3)^2 + (g(t) \sin t)^2 =$$

$$= g^2(t)(\cos^2 t + \sin^2 t) - 6g(t) \cos t + 9,$$

$$g(t) = \frac{4}{3\cos t - 1}. \tag{1}$$

Aby funkce f byla dobře definována, musí být $g(t) > 0$ pro všechna t z definičního oboru $\mathrm{I} = (-c, c)$, takže $\cos t > \frac{1}{3}$. Proto je $(-c, c) \subset \left(-\arccos \frac{1}{3}, \arccos \frac{1}{3}\right)$, tj. $c \leqq \arccos \frac{1}{3}$.

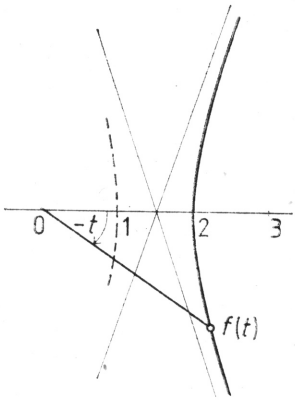
Protože pro každé $t \in (-c, c)$ existuje $s \in (-c, c)$ tak, že $g(s) > 2g(t)$, musí být funkce g neomezená. Odtud plyne, že je $c = \arccos \frac{1}{3} \doteq 1{,}23$ (hodnotu určíme pomocí tabulek nebo počítačky).

Je-li $|f(t_0)| = 5$, je podle (1) $\cos t_0 = \frac{3}{5}$, a tedy $|\sin t_0| = \frac{4}{5}$. Odtud plyne, že je $f(t_0) = |f(t_0)|(\cos t_0 - \mathrm{i} \sin t_0) = 5\left(\frac{3}{5} \pm \mathrm{i}\frac{4}{5}\right) = 3 \pm 4\mathrm{i}$.

Jiné řešení. Hodnoty funkce f leží na větvi hyperboly určené (v komplexní rovině) rovnicí

$$|z| - |z - 3| = 1$$

s ohnisky v bodech (s komplexními souřadnicemi) 0 a 3 (obr. 16).



Obr. 16

Přitom podle první podmínky je

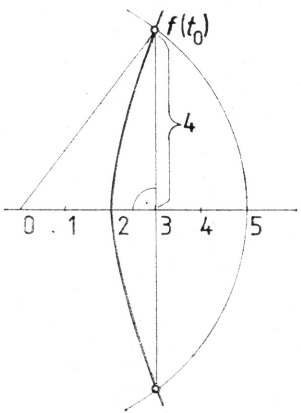
$$f(t) = |f(t)|(\cos t - \mathrm{i} \sin t) = |f(t)|\,(\cos(-t) + \mathrm{i} \sin(-t)),$$

takže pro $t \in (-c, c)$ dostaneme hodnotu $f(t)$ jako průsečík dané větve hyperboly s polopřímkou s počátkem v 0 a svírající s reálnou osou úhel $-t$ (v obloukové míře). Podle třetí podmínky úlohy je funkce f neomezená, takže pro $|t| = c$ uvedené polopřímky už danou větev hyperboly neprotínají, tj. polopřímky

$$z = |z|e^{-ic}, \quad z = |z|e^{ic}$$

jsou rovnoběžné s jejími asymptotami. Jak snadno zjistíme, má daná hyperbola hlavní poloosu $a = \frac{1}{2}$ a excentricitu $e = \frac{3}{2}$, takže pro hodnotu c platí $\cos c = \frac{a}{e} = \frac{1}{3}$.

Je-li $|f(t_0)| = 5$, plyne z rovnice hyperboly $|f(t_0) - 3| = 4$, trojúhelník s vrcholy 0, 3, $f(t_0)$ je tedy, jak snadno zjistíme, pravoúhlý (obr. 17), a proto $f(t_0) = 3 \pm 4i$.



Obr. 17

A - I - 3

Nechť n je přirozené číslo, $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jsou reálná čísla. Kolik řešení má soustava rovnic

$$a_1x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b_1$$

$$x_1 + a_2x_2 + \ldots + x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + a_nx_n = b_n?$$

Proveďte diskusi.

Řešení. Případ $n = 1$ je triviální, budeme předpokládat, že $n \geqq 2$. Je-li $a_1 = 1$, má první rovnice tvar

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b_1, \tag{1}$$

dosadíme-li tedy do zbylých rovnic soustavy, dostaneme soustavu

$$(a_i - 1)x_i + b_1 = b_i, \quad 2 \leqq i \leqq n.$$

Odtud je vidět, že pro $1 = a_1 = \ldots = a_k$ má soustava řešení, jen když $b_1 = b_2 = \ldots = b_k$. Pak dostaneme $k \geqq 1$ stejných rovnic (1), a pokud $k < n$ a $a_{k+1} > 1$, je

$$x_j = \frac{b_j - b_1}{a_j - 1}, \qquad k + 1 \leqq j \leqq n. \tag{2}$$

Pro $a_2 > 1$ má tedy daná soustava vždy jediné řešení

$$x_1 = b_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{b_i - b_1}{a_i - 1},$$

$$x_j = \frac{b_j - b_1}{a_j - 1} \qquad (2 \leqq j \leqq n).$$

Pro $1 = a_1 = \ldots = a_k$ $(k > 2)$ má soustava řešení, právě když $b_1 = b_2 = \ldots = b_k$. V tomto případě má soustava nekonečně mnoho řešení, neboť neznámé $x_{k+1}, \ldots, x_n$ jsou jednoznačně určeny vztahem (2), ale pro neznámé $x_1, \ldots, x_k$ máme jedinou podmínku

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = b_1 - \sum_{j=k+1}^{n} x_j.$$

Je-li $a_1 > 1$, tj. $1 < a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$, dosadíme z první rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = b_1 - (a_1 - 1)x_1$$

do ostatních rovnic soustavy

$$(a_j - 1)x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i = b_j \qquad 2 \leqq j \leqq n,$$

takže dostaneme

$$x_j = \frac{b_j - b_1 + (a_1 - 1)x_1}{a_j - 1}.$$

Z první rovnice pak plyne

$$(a_1 - 1)x_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i - b_1}{a_i - 1} + (a_1 - 1)\, x_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i - 1} = b_1.$$

Vidíme, že v tomto případě má soustava jediné řešení

$$x_1 = \frac{b_1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i - b_1}{a_i - 1}}{(a_1 - 1)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i - 1}\right)},$$

$$x_j = \frac{b_j - b_1 + (a_i - 1)x_1}{a_j - 1} \qquad (2 \leqq j \leqq n).$$

Závěr. Pro $n \geqq 2$ má daná soustava jediné řešení, právě když $a_2 > 1$. Pokud $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$ $(k > 2)$, má soustava nekonečně mnoho řešení, právě když $b_1 = b_2 = \ldots = b_k$; jinak nemá žádné řešení.

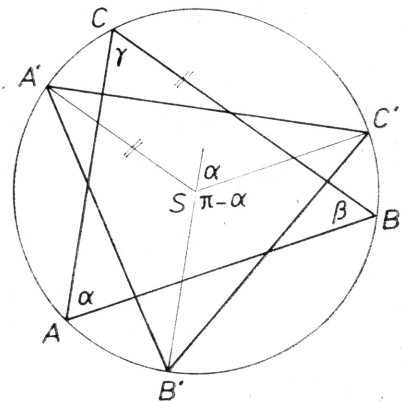
A - I - 4

Nechť body A', B', C' leží na jednotkové kružnici se středem S opsané trojúhelníku ABC tak, že dvojice vektorů SA' a BC, SB' a CA, SC' a AB jsou souhlasně rovnoběžné. Jsou-li P a P' obsahy trojúhelníků ABC a $A'B'C'$, pak platí

$$P' \geqq \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{P}{2}}.$$

Dokažte.

Řešení. Jsou-li α, β, γ úhly daného trojúhelníku ABC, platí pro úhly trojúhelníků $SB'C'$, $SC'A'$, $SA'B'$, jak snadno plyne z konstrukce bodů A', B', C' (obr. 18),



Obr. 18

$$|\sphericalangle B'SC'| = \pi - \alpha, \quad |\sphericalangle C'SA'| = \pi - \beta,$$
$$|\sphericalangle A'SB'| = \pi - \gamma.$$

Označme R poloměr kružnice opsané oběma trojúhelníkům ABC, $A'B'C'$, pro obsah P' trojúhelníku $A'B'C'$ pak platí

$$P' = \frac{1}{2} R^2(\sin(\pi - \alpha) + \sin(\pi - \beta) + \sin(\pi - \gamma)) =$$

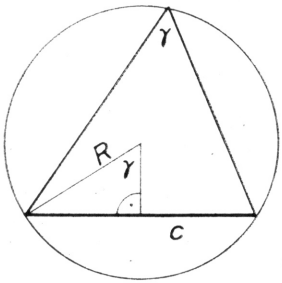
(1)

$$= \frac{1}{2} R^2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).$$

Obsah P trojúhelníku ABC můžeme vypočítat různě. Tak je např.

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{abc}{4R},$$

neboť pro tětivu délky c s obvodovým úhlem γ platí (obr. 19) $c = 2R \sin \gamma$. Tak dostaneme i vztah



Obr. 19

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \tag{2}$$

Ze známé nerovnosti

$$\frac{x + y + z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}, \tag{3}$$

která platí pro libovolná tři nezáporná čísla x, y, z, a z rovností (1) a (2) tak plyne nerovnost

$$\frac{2P'}{3R^2} \geqq \sqrt[3]{\frac{P}{2R^2}},$$

neboli ($R = 1$)

$$P' \geqq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{P}{2}},$$

což je nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

Rovnost nastane, právě když nastane rovnost v nerovnosti (3), tj. právě když $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$, tedy právě když daný trojúhelník ABC je rovnostranný (trojúhelník $A'B'C'$ pak bude také rovnostranný).

A - I - 5

Nechť funkce f je pro $s > 0$, $t > 0$ definována předpisem

$$f(s, t) = \frac{st(1 - st)}{(1 + s^2)(1 + t^2)}.$$

Dokažte, že tato funkce nabývá svého maxima právě v jednom bodě. Nalezněte tento bod a maximum funkce.

Řešení. Podle známé nerovnosti $s^2 + t^2 \geqq 2st$ $(s, t > 0)$ pro funkci f platí

$$f(s, t) = \frac{st(1 - st)}{1 + s^2 + t^2 + s^2t^2} \leqq \frac{st(1 - st)}{1 + s^2t^2 + 2st} = \frac{st(1 - st)}{(1 + st)^2},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $s = t$.

Funkce f tedy nabývá maxima na některé hyperbole $st = u$ pro $s = t = \sqrt{u}$ (přičemž stačí uvažovat $0 < u < 1$, kdy je $f(s, t) > 0$). Funkce

$$h(u) = \frac{u(1-u)}{(1+u)^2}$$

má derivaci

$$h'(u) = \frac{(1+u)^2(-2u+1) - 2(1+u)(u-u^2)}{(1+u)^4} = \frac{-3u+1}{(1+u)^3},$$

takže funkce h je na intervalu $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ rostoucí a na intervalu $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ klesající. Odtud plyne, že funkce f nabývá svého maxima v jediném bodě (s, t), $s = t = \sqrt{\frac{1}{3}}$, a je

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{8}.$$

Poznámka. Vhodnou úpravou můžeme využít nerovnosti $xy \leqq \frac{(x+y)^2}{4}$. Je totiž

$$h(u) = \frac{u(1-u)}{(1+u)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2u(1-u)}{(1+u)^2} \leqq \frac{1}{2(1+u)^2} \cdot \frac{1}{4}(1+u)^2 = \frac{1}{8}.$$

Odtud plyne, že funkce h nabývá svého maxima pro $2u = 1 - u$, tj. $u = \frac{1}{3}$, takže $f(s, t) \leqq \frac{1}{8}$ s rovností pro $s = t = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

A - I - 6

Šachovnice se skládá z 8×8 polí vytvářejících čtverec. Věž je jedna z figur, jimiž se hraje šach. Řekneme, že daná věž je neohrožena, jestliže v řádku a sloupci, ve kterém se nalézá, už není jiná věž.

a) Určete počet takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je každá z nich neohrožena.

b) Určete počet takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je aspoň jedna z nich neohrožena.

c) Určete počet takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je aspoň jedna z nich neohrožena a žádné dvě nejsou v témže řádku.

d) Řešte úlohy b) a c) pro čtvercovou šachovnici skládající se z $n \times n$ polí, přičemž rozmísťujeme k věží ($1 \leqq k \leqq n$).

Řešení. Máme-li na šachovnici 8×8 rozmístit 8 věží tak, aby se žádné dvě neohrožovaly, musí stát v každém sloupci a v každém řádku právě jedna věž.

Pro umístění věže v prvním sloupci máme 8 možností. Pro každou z těchto možností máme 7 možností, jak umístit věž ve druhém sloupci (jeden řádek je blokován věží z prvního sloupce), pro umístění věží v prvním a druhém sloupci je tedy $8.7 = 56$ možností. Pro každou z nich máme 6 mož-

ností, jak umístit věž ve třetím sloupci, atd. Celkem je tedy $8.7.6. \ldots .2.1 = 8!$ možností, jak věže rozmístit. (Ke stejnému výsledku lze dospět také takto: každému rozmístění věží přiřadíme posloupnost osmi čísel $a_1, a_2, \ldots, a_8$ tak, že v daném rozmístění stojí v i-tém sloupci věž v a_i-tém řádku. Jelikož se věže neohrožují, je posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_8$ pořadím čísel $1, 2, \ldots, 8$; a naopak každé pořadí dává popsaným způsobem rozmístění neohrožujících se věží. Hledaný počet rozmístění je tedy roven počtu pořadí osmiprvkové množiny, tj. $8!$.)

Dále vyřešíme rovnou obecnou úlohu pro k věží a šachovnici $n \times n$. V tomto případě je vhodné nejprve uvažovat věže rozlišené očíslováním $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Označme A_i množinu všech rozmístění, ve kterých je věž v_i neohrožena, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Chceme určit počet rozmístění, ve kterých aspoň jedna věž není ohrožována, tj. počet prvků množiny $\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_k$. Podle principu inkluze a exkluze (viz např. Vrba, A.: Kombinatorika. 1. vyd. Praha, Mladá fronta 1980. ŠMM, sv. 45) je

$$(1)\ |\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_k| = |\mathsf{A}_1| + |\mathsf{A}_2| + \ldots + |\mathsf{A}_k| - |\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2| - |\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_3| - \ldots - |\mathsf{A}_{k-1} \cap \mathsf{A}_k| + |\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \mathsf{A}_3| + \ldots + |\mathsf{A}_{k-2} \cap \mathsf{A}_{k-1} \cap \mathsf{A}_k| - \ldots + (-1)^{k-1}|\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \ldots \cap \mathsf{A}_k|.$$

Nechť $1 \leqq j \leqq k$. Je-li ω j-prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$, pak $|\bigcap_{i \in \omega} \mathsf{A}_i| = |\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \ldots \cap \mathsf{A}_j|$. Stačí proto určit číslo $|\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \ldots \cap \mathsf{A}_j|$, tj. počet rozmístění, ve kterých jsou věže $v_1, v_2, \ldots, v_j$ neohroženy. Věž v_1 mů-

žeme umístit n^2 způsoby (do kteréhokoli políčka), pro v_2 zbývá $(n-1)^2$ možností (jeden řádek a jeden sloupec jsou blokovány věží v_1), atd. až v_j můžeme umístit $(n-j+1)^2$ způsoby. Věže $v_{j+1}, \ldots, v_k$ již můžeme umístit libovolně ve zbylých $(n-j)^2$ polích (nesmíme vstoupit do řádků a sloupců použitých pro věže $v_1, \ldots, v_j$). Takových rozmístění je $\binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)!$ (počet variací $k-j$ prvků z $(n-j)^2$-prvkové množiny). Je tedy

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_j| =$$
$$= n^2(n-1)^2 \ldots (n-j+1)^2 \binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)!.$$

Po dosazení do (1) dostáváme

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} n^2(n-1)^2 \ldots (n-j+1)^2 \binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)! =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^2 (j!)^2 \binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)!.$$

Jestliže nyní zapomeneme na rozlišení jednotlivých věží, bude vždy $k!$ rozmístění stejných, takže hledaný počet je

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^2 (j!)^2 \binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)!.$$

Druhou část úlohy d) vyřešíme obdobně. Označme B_i množinu všech rozmístění, ve kterých není věž v_i ohrožena a přitom žádné dvě věže nestojí ve stejném řádku. Podle principu inkluze a exkluze pak je

$$|B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k| = |B_1| + |B_2| + \ldots + |B_k| -$$

$$- |B_1 \cap B_2| - \ldots - |B_{k-1} \cap B_k| + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-1}|B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k|.$$

Protože

$$|B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_j| =$$

$$= n^2(n-1)^2 \ldots (n-j+1)^2(n-j)^{k-j}(n-j)(n-j-1)\ldots$$

$$\ldots (n-k+1),$$

je

$$|B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k| =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^2 (j!)^2 (n-j)^{k-j} \binom{n-j}{k-j} (k-j)!.$$

Stejně jako v předešlém případě (zapomeneme-li na rozlišení věží) dostaneme hledaný počet rozmístění jako

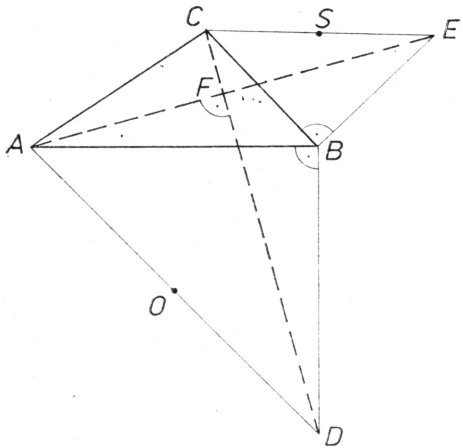
$$\frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^2 (j!)^2 (n-j)^{k-j} \binom{n-j}{k-j} (k-j)!.$$

Přitom ve všech součtech klademe $0^0 = 1$ (např. pro $j = k = n$).

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

A - S - 1

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na kolmici k přeponě AB procházející bodem B sestrojíme v polorovině opačné k polorovině ABC bod D tak, aby platilo $|BD| = |AB|$. Na kolmici k BC bodem B sestrojíme v polorovině opačné k polorovině BCA bod E tak, aby $|BE| = |BC|$. Označme S



Obr. 20

střed úsečky CE, O střed úsečky AD a F průsečík přímek AE, CD. Dokažte, že čtyřúhelník $OBSF$ je deltoid.

Řešení. Trojúhelník DBC vznikne z trojúhelníku ABE otočením o pravý úhel kolem bodu B (obr. 20), takže odpovídající si strany CD a EA jsou navzájem kolmé. Body B a F proto leží jednak na Thaletově kružnici nad průměrem AD, jednak na Thaletově kružnici nad průměrem CE. Osa společné tětivy BF obou těchto kružnic prochází jejich středy O a S a čtyřúhelník $OBSF$ je tedy osově souměrný podle osy úhlopříčky BF. Protože $|BS| = \frac{|BE|}{\sqrt{2}} < \frac{|BD|}{\sqrt{2}} = |BO|$, není $OBSF$ kosočtverec, ale deltoid. Jak je vidět z uvedeného řešení, $OBSF$ bude kosočtverec, právě když $|BC| = |AB|$, jinak vznikne deltoid. Tvrzení pak plyne nejen pro pravoúhlé trojúhelníky, ale obecně pro libovolný $\triangle ABC$, v němž $|AB| \neq |BC|$.

A - S - 2

a) Každé pole čtvercové tabulky 5×5 je obarveno právě jednou z barev bílá, černá. Dokažte, že v tabulce existují čtyři pole stejné barvy, jež jsou rohovými poli některého pravoúhelníku.

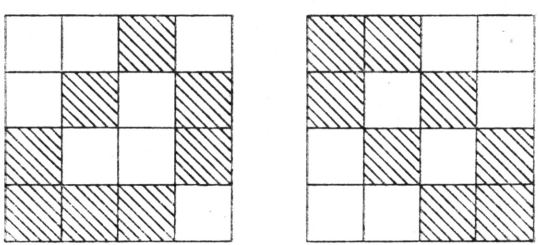
b) Ukažte, že v případě tabulky 4×4 existuje takové obarvení, při kterém žádná čtyři pole stejné barvy nejsou rohovými poli pravoúhelníku.

Řešení. Tabulka má 25 polí. Jednou z barev, řekněme bílou, je obarveno aspoň 13 polí. Je-li všech pět polí některého sloupce obarveno bíle, jsou v aspoň jednom dalším

sloupci aspoň dvě bílá pole. Ta tvoří spolu s dvěma bílými poli bílého sloupce čtyři rohová pole pravoúhelníku.

Jestliže jsou v některém sloupci 4 bílá pole, obsahuje některý další sloupec aspoň 3 bílá pole. Protože řádků je pět, musí být v uvažovaných sloupcích dvě bílá pole ve stejných řádcích.

Neobsahuje-li žádný sloupec 4 bílá pole, je rozložení 13 bílých polí do sloupců buď 3, 3, 3, 2, 2, nebo 3, 3, 3, 3, 1. V prvním případě z nich můžeme utvořit 11 dvojic polí téhož sloupce, ve druhém případě takových dvojic existuje dokonce 12. Jelikož v jednom sloupci je jen $\binom{5}{2} = 10$ dvojic, musí mezi uvedenými 11 či 12 dvojicemi být aspoň dvě, jejichž pole leží ve stejných řádcích. Pole těchto dvojic jsou opět rohovými poli pravoúhelníku. Tím je vyřešena část a) úlohy. Dva příklady tabulky 4×4 s požadovaným vybarvením dvěma barvami ukazuje obr. 21.



Obr. 21

Jiné řešení. V každém sloupci obarvené tabulky převládá jedna barva. Stejná barva musí převládat aspoň ve třech

sloupcích, takže bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že bílá barva převládá v prvních třech sloupcích a že v prvním sloupci jsou první tři pole bílá. Ve druhém sloupci pak musí být bílá pole ve 4. a 5. řádku, jinak dostaneme bílý pravoúhelník. Ve třetím sloupci pak už ale nelze umístit tři bílá pole tak, aby nevznikl bílý pravoúhelník. Tím je tvrzení dokázáno.

A - S - 3a

Jsou dána komplexní čísla u, v. Najděte všechna komplexní čísla w, pro něž je funkce

$$f(z) = |z - u|^2 + |z - v|^2 + |z - w|^2$$

konstantní na množině $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$.

Řešení. Je

$$f(z) = 3|z|^2 - z(\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}) - \bar{z}(u + v + w) + \\ + |u|^2 + |v|^2 + |w|^2.$$

Je-li tato funkce na množině všech komplexních čísel s absolutní hodnotou 1 konstantní, je $f(1) = f(-1) = f(i)$. Odtud postupně plyne, že $\mathrm{Re}(u + v + w) = 0$, $\mathrm{Im}(u + v + w) = 0$, tedy $u + v + w = 0$. Je-li naopak tato podmínka splněna, je f konstantní na množině všech komplexních jednotek. Úloze vyhovuje jediné komplexní číslo $w = -u - v$.

A - S - 3b

Zjistěte, pro která celá čísla b má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + bx_2 &= 3b^3 \\ 2bx_1 + x_2 + 2bx_3 &= 2b^3 \\ bx_2 + x_3 &= b^3 \end{aligned}$$

řešení v oboru celých čísel, a pro každé takové b vypište všechna tato řešení.

Řešení. Daná soustava je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned} x_1 &= 3b^3 - bx_2 \\ x_3 &= b^3 - bx_2 \\ (4b^2 - 1)x_2 &= 2b^3(4b - 1) \end{aligned}$$

a pro b celé má celočíselné řešení, právě když číslo $4b^2 - 1 = (2b - 1)(2b + 1)$ dělí číslo $2b^3(4b - 1)$. To je splněno v případě $b = 0$, pak je $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Je-li $b \neq 0$, jsou lichá čísla $2b - 1$, $2b + 1$ s číslem $2b^3$ nesoudělná, takže číslo $4b^2 - 1$ musí dělit číslo $4b - 1$. Je proto

$$|4b^2 - 1| \leqq |4b - 1|.$$

Této nerovnici vyhovují pouze celá čísla -1, 0, 1. Pro $b = -1$ není číslo x_2 celé, pro $b = 1$ vyjde $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

A - II - 1

Nechť p a q jsou prvočísla. Dokažte, že libovolné řešení (x, y, z) rovnice

$$xyz = pq(x + y + z)$$

v oboru přirozených čísel má následující vlastnost: Jedno z čísel x, y, z dělí součet ostatních dvou.

Najděte prvočísla p, q, r a takové řešení rovnice

$$xyz = pqr(x + y + z),$$

které uvedenou vlastnost nemá.

Řešení. Je-li $xyz = pq(x + y + z)$, musí být buď jedno z čísel x, y, z dělitelné součinem pq, anebo jedno dělitelné prvočíslem p a jiné dělitelné prvočíslem q. Je-li např. $x = pqx'$, je

$$x'yz = x + y + z, \quad \text{tj.} \quad z(x'y - 1) = x + y,$$

takže z dělí součet $x + y$.

Je-li $x = px', y = qy'$, je obdobně

$$x'y'z = x + y + z, \quad \text{tj.} \quad z(x'y' - 1) = x + y,$$

takže opět z dělí součet $x + y$. Tím je důkaz hotov, neboť daná rovnice je symetrická v neznámých x, y, z.

Z uvedeného řešení je vidět, že v případě rovnice $xyz = pqr(x + y + z)$ prvočísla p, q, r musí být různá, máme-li najít nějaké její řešení, které nemá uvažovanou vlastnost. Vezměme tedy $p = 2$, $q = 3$, $r = 5$. Rovnice

$$xyz = 30(x + y + z)$$

může mít řešení tvaru

$$x = 2x', y = 3y', z = 5z',$$

což vede k rovnici

$$x'y'z' = 2x' + 3y' + 5z'.$$

Volbou $z' = 1$ dostaneme jednodušší rovnici

$$x'y' = 2x' + 3y' + 5,$$

která má přirozené řešení např. pro $x' = 4$ ($y' = 13$) nebo pro $y' = 3$ ($x' = 14$). Čísla 8, 39, 5 a 28, 9, 5 jsou pak řešením rovnice $xyz = 30(x + y + z)$ a nemají uvažovanou vlastnost.

A - II - 2

Každé pole čtvercové tabulky 12×12 je obarveno jednou z třech barev. Dokažte, že v tabulce existují čtyři pole stejné barvy, jež jsou rohovými poli některého pravoúhelníku.

Řešení. Označíme-li a, b, c počty polí jednotlivých barev

v nějakém sloupci tabulky, je $a + b + c = 12$ a přitom v takovém sloupci najdeme $\binom{a}{2} + \binom{b}{2} + \binom{c}{2}$ dvojic polí stejné barvy. Z nerovnosti $(x + y + z)^2 \leqq 3(x^2 + y^2 + z^2)$, která platí pro libovolná reálná x, y, z, plyne

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} + \binom{c}{2} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 6 \geqq \frac{1}{6} 12^2 - 6 = 18.$$

V každém sloupci obarvené tabulky najdeme tedy aspoň 18 dvojic polí stejné barvy. Celkem tak existuje nejméně 12.18 dvojic řádků, které mají s některým sloupcem společná dvě pole stejné barvy. Pro alespoň třetinu z nich jsou odpovídající dvojice polí jedné barvy. Protože

$$\frac{1}{3} . 12 . 18 > \binom{12}{2},$$

existují nutně dva sloupce, v nichž se dvojice polí této barvy vyskytují ve stejné dvojici řádků, což dává tvrzení úlohy.

2. řešení. Uvažujme tu z barev, kterou je vybarveno alespoň 48 (třetina) polí dané tabulky. Uvažujme všechny možné dvojice polí této barvy v jednotlivých sloupcích, zřejmě stačí dokázat, že je jich vždy více než $\binom{12}{2}$.

Pokud jsou v některém ze sloupců méně než čtyři pole zvolené barvy, přesuneme jedno pole ze sloupce, ve kterém jsou naopak více než čtyři pole vybrané barvy (ten existuje, protože všech polí této barvy je aspoň 48). Tím počet všech

dvojic polí zvolené barvy ve sloupcích jen zmenšíme, neboť pro $a < 4$, $b > 4$ platí

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} > \binom{a+1}{2} + \binom{b-1}{2}.$$

Tak po konečném počtu kroků dostaneme tabulku, v níž jsou v každém sloupci aspoň čtyři pole vybrané barvy. Odtud plyne, že v původní tabulce bylo aspoň $12 \cdot \binom{4}{2} > \binom{12}{2}$ dvojic polí zvolené barvy ve všech sloupcích. Některá ze dvojic se bude proto opakovat, čímž je existence hledaného pravoúhelníku dokázána.

3. řešení (podle Š. Holuba, 2. roč. G Trutnov a O. Ralíka, 4. roč. G Nitra). Protože $12.12 = 3.48$, v tabulce jistě najdeme 48 polí obarvených stejnou barvou. Označme jejich počet v jednotlivých sloupcích $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{12} = 48$. V každém sloupci tedy najdeme aspoň $\binom{x_i}{2}$ dvojic polí zvolené barvy.

Podle Cauchyovy nerovnosti je

$$(\sum_{i=1}^{12} x_i)^2 \leqq 12 \sum_{i=1}^{12} x_i^2,$$

takže pro všechny nalezené dvojice platí

$$\sum_{i=1}^{12} \binom{x_i}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i^2 - \sum_{i=1}^{12} x_i\right) \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{12} x_i\right] =$$

$$= 72 > \binom{12}{2} = 66.$$

Odtud plyne, že se některá z nalezených dvojic musí opakovat aspoň ve dvou sloupcích. Existuje tedy hledaný pravoúhelník s vrcholy téže barvy.

Poznámka. Nerovnost

$$(\sum x_i)^2 \leqq n \sum x_i,$$

použitá pro $n = 3$ v 1. řešení a pro $n = 12$ ve 3. řešení, je speciálním případem Cauchyovy nerovnosti

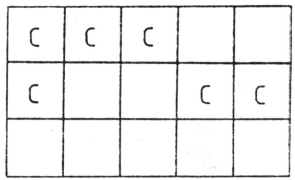
$$(\sum u_i v_i)^2 \leqq \sum u_i^2 \sum v_i^2,$$

klademe-li $u_i = 1$, $v_i = x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$.

4. řešení (podle P. Fencla, 4. roč. G Pardubice). Předpokládejme, že v některém řádku či sloupci existuje aspoň 5 polí stejné barvy (A). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je barvou A obarveno prvních pět polí prvého řádku. Dále se budeme zabývat jen prvními pěti sloupci (tj. tabulkou 12×5).

V každém dalším řádku se barva A může vyskytnout už nejvýše jednou, jinak jsme hotovi. Do pěti polí jednoho řádku můžeme umístit dvojici stejnobarevných polí $\binom{5}{2} = 10$

způsoby. Na zbývajících 11 řádcích tedy buď jednu dvojici zopakujeme (a dostaneme hledaný pravoúhelník), nebo jsou v některém řádku aspoň 3 pole jedné barvy (B). Pak nám ale zbývá jen $\binom{5}{2} - \binom{3}{2} = 7$ možností, jak umístit další dvojice polí barvy B do zbylých deseti řádků, aniž by se některá dvojice opakovala. V takovém případě by se zbylá barva (C) vyskytla ve třech řádcích aspoň třikrát. Nyní už je vidět (obr. 22), že takové tři trojice nelze umístit, aniž by vznikl požadovaný pravoúhelník.



Obr. 22

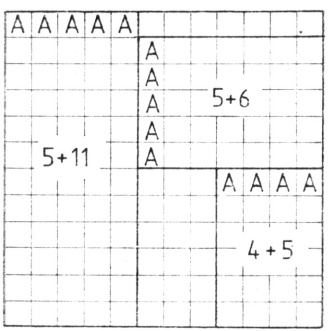
Pokud jsou v každém řádku i sloupci právě čtyři pole každé barvy, můžeme předpokládat, že barvou A jsou obarvena např. první čtyři pole prvého řádku. Kdyby v každém řádku prvých čtyř sloupců byla barva A zastoupena nejvýše jednou, dostaneme $4 + 11$ polí barvy A, což odporuje tomu, že v čtyřech sloupcích je celkem 16 polí každé barvy. Tím je tvrzení dokázáno.

5. řešení (podle M. Lukáče, 4. roč. G Bánovce nad Bebravou). Uvažujme barvu A, kterou je vybarveno aspoň 48 polí dané tabulky, takže existuje řádek, v němž jsou alespoň čtyři pole této barvy. Je zřejmé, že přehození řádků (resp.

sloupců) v tabulce nemá na existenci hledaného pravoúhelníku vliv stejně jako výměna řádků za sloupce a naopak. Dejme tomu, že v dané tabulce požadovaný pravoúhelník neexistuje. V takovém případě v každé její části, v níž je jeden řádek (resp. sloupec) obarven zvolenou barvou, obsahuje každý další řádek (resp. sloupec) už jen jedno pole této barvy.

Kdyby v některém řádku byla právě 4 pole barvy A, v odpovídajících 4 sloupcích by pak bylo celkem nejvýše $4 + 11 = 15$ polí této barvy, takže ve zbývajících 8 sloupcích by bylo aspoň 33 polí barvy A. Pak ale zase některý sloupec musí obsahovat aspoň 5 polí této barvy.

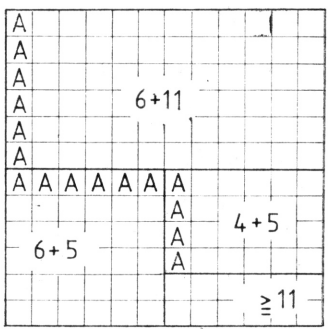
Pokud obsahuje některý řádek (či sloupec) tabulky právě 5 polí barvy A, je v odpovídajících pěti sloupcích nejvýše $5 + 11 = 16$ polí této barvy. Zbylá tabulka 12×7 obsahuje tedy nejméně 32 polí barvy A (nikoli už v prvním řádku, obr. 23). V některém jejím sloupci proto najdeme aspoň 5 polí této barvy a v odpovídajících pěti řádcích je pak nejvýše 11 polí bar-



Obr. 23

vy A. Ve zbylé tabulce 6×7 je tudíž aspoň 21 polí této barvy, což znamená, že v některém jejím řádku jsou aspoň 4 pole barvy A a v odpovídajících čtyřech sloupcích pak nejvýše 9 polí této barvy. Protože zbývajících nejméně 12 polí barvy A nemůže ležet jen v tabulce 6×2 (obr. 23), vidíme, že v označeném sloupci je aspoň 6 polí zvolené barvy.

Obsahuje-li však některý sloupec (či řádek) aspoň 6 polí barvy A, dojdeme analogickým postupem (obr. 24) k tabulce



Obr. 24

2×6, která by musela obsahovat nejméně 11 polí této barvy. To je zřejmě ve sporu s naším předpokladem, takže hledaný pravoúhelník vždy existuje.

A - II - 3a

Je dáno zobrazení f intervalu $(0, \pi)$ do množiny komplexních čísel takové, že pro každé $t \in (0, \pi)$ současně platí

$$|f(t)| > 0,$$

$$|f(t)| + f(t)(\sin t + \mathrm{i} \cos t) = 0,$$

$$|f(t) + 1| + |f(t) + 3| = 4.$$

Vypočtěte obsah trojúhelníku, jehož vrcholy jsou komplexní čísla 0, $f\left(\frac{\pi}{3}\right), f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Řešení. Z první rovnosti plyne, že je

$$f(t) = |f(t)|\,(-\sin t + \mathrm{i} \cos t),$$

takže

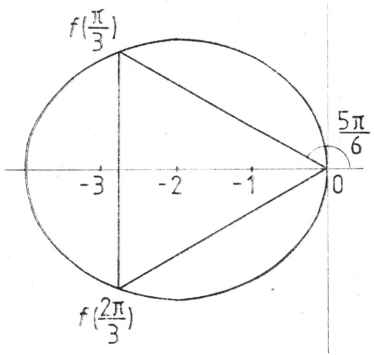
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left|f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right| \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\right).$$

Druhá rovnost znamená, že hodnoty funkce f leží na elipse s ohnisky -3, -1 (komplexní souřadnice) a hlavní poloosou velikosti 2. Protože pro argumenty $\alpha = \operatorname{Arg} f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ a $\beta = \operatorname{Arg} f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ obou funkčních hodnot platí

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

je $\alpha = -\beta = \frac{5}{6}\pi$, a protože $|f(t)| > 0$, leží body $0, f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku (obr. 25). Stačí tedy vypočítat jeho výšku $|x|$, kde $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = x + iy$, $\frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Obr. 25

Dosazením do dané rovnice elipsy dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4x^2 + 6x + 3} + \sqrt{4x^2 + 18x + 27}\right) = 4,$$

takže po dvojím umocnění postupně vyjde

$$(8x^2 + 24x - 18)^2 = 4\,(4x^2 + 6x + 3)\,(4x^2 + 18x + 27),$$

$$x(13x + 36) = 0.$$

Odtud vychází $x = -\frac{36}{13}$ (víme, že je $x \neq 0$ a že řešení existuje), obsah daného trojúhelníku je tedy

$$P = \frac{432}{169}\sqrt{3}.$$

Poznámka. Obecně vyjde

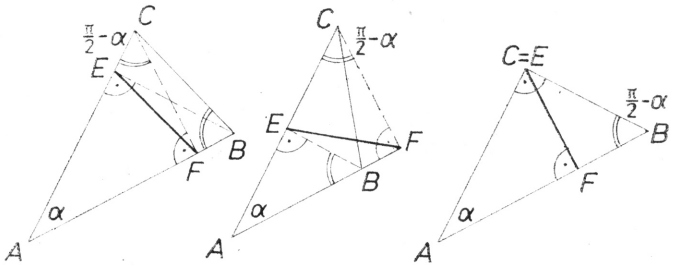
$$f(t) = \frac{12 \sin t}{4 - \sin^2 t}(-\sin t + \mathrm{i} \cos t),\ t \in (0, \pi).$$

A - II - 3b

V rovině jsou dány dva různé body E, F. Pro dané číslo $\alpha \in (0, \pi)$ určete množinu středů stran BC všech trojúhelníků ABC ležících v dané rovině, pro které $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ a body E, F jsou patami jejich výšek z vrcholů B, C.

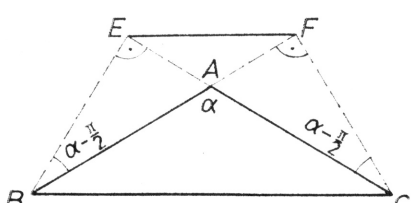
Řešení. Předpokládejme, že trojúhelník ABC splňuje uvedené podmínky. Je $A \neq E$ i $A \neq F$, protože jinak by musel být trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A, a tedy $A = E = F$, což nejde. Je tedy $|\sphericalangle EAF| = \alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Trojúhelníky BCE, BCF jsou pravoúhlé, takže podle Thaletovy věty leží body B, C, E, F na kružnici s průměrem BC.

Je-li $\alpha < \frac{\pi}{2}$, leží pata aspoň jedné z výšek příslušných vrcho-



Obr. 26

lům B, C uvnitř odpovídající strany AC, resp. AB (obr. 26), takže aspoň jeden z úhlů ECF, EBF je definován a má velikost $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Podobně pro $\alpha > \frac{\pi}{2}$ leží obě paty výšek vně stran AB, AC, takže (obr. 27)



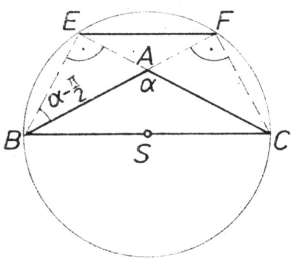
Obr. 27

$$|\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle ECF| = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

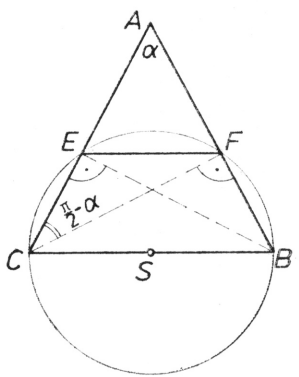
V každém případě leží jeden z vrcholů B, C trojúhelníku ABC na oblouku kružnice s tětivou EF a obvodovým úhlem

$\left|\frac{\pi}{2} - \alpha\right|$, přitom BC je průměrem této kružnice. Odtud plyne, že střed strany BC je vždy středem kružnice s tětivou EF a středovým úhlem $2\left|\frac{\pi}{2} - \alpha\right|$. Takové kružnice existují v rovině dvě, jejich středy S, S' jsou souměrně sdruženy podle osy EF.

Obráceně, pro daný úhel $\alpha \in (0, \pi)$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, ke každému z bodů S, S' najdeme trojúhelník ABC požadovaných vlastností: stačí např. vzít průměr BC sestrojené kružnice rovnoběžný s EF, přičemž pro $\alpha > \frac{\pi}{2}$ orientujeme úsečku BC souhlasně s EF (obr. 28a) a pro $\alpha < \frac{\pi}{2}$ opačně (obr. 28b). Přímky BF a CE se pak protnou v bodě A, pro který zřejmě



Obr. 28a



Obr. 28b

platí, že body E, F jsou patami výšek trojúhelníku ABC z vrcholů B, C, a $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle BEA| = \alpha$, resp. $|\sphericalangle BAC| = \frac{\pi}{2} - |\sphericalangle ECF| = \alpha$.

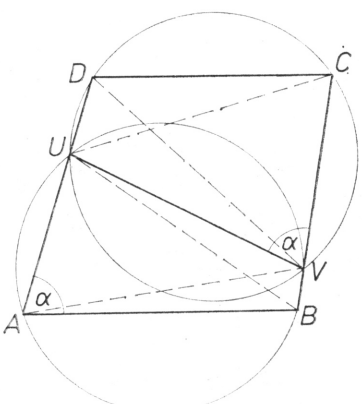
ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

Daný lichoběžník rozdělte na dva tětivové čtyřúhelníky, jejichž opsané kružnice mají stejný poloměr. Udejte podmínky řešitelnosti.

Řešení. Je-li lichoběžník $ABCD$ rozdělen na dva tětivové čtyřúhelníky přímkou protínající obě základny, z rovnosti odpovídajících úhlů vyjde, že $ABCD$ je rovnoběžník.

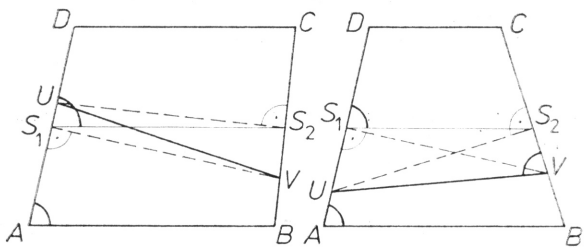
Předpokládejme tedy, že U, V jsou body na ramenech



Obr. 29

AD, BC takové, že $ABVU$, $UVCD$ jsou tětivové čtyřúhelníky (obr. 29). Pak je $|\sphericalangle\ UVC| = \pi - |\sphericalangle\ UVB| = |\sphericalangle\ UAB|$. Protože obě opsané kružnice mají stejný poloměr, plyne z rovnosti obvodových úhlů $|\sphericalangle\ UAB| = |\sphericalangle\ UVC|$ i rovnost odpovídajících tětiv $|UB| = |UC|$. Ze stejného důvodu je pak i $|AV| = |DV|$. Každý z bodů U, V tedy dostaneme jako průsečík jednoho ramene s osou protějšího ramene lichoběžníku $ABCD$.

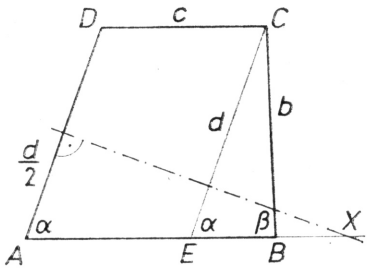
Úloha má řešení, právě když osy obou ramen procházejí vnitřkem protějšího ramene. V tom případě je podle Thaletovy věty (obr. 30) čtyřúhelník S_1VS_2U, resp. UVS_2S_1



Obr. 30

tětivový, odtud pak snadno plyne, že i čtyřúhelníky $ABVU$, $UVCD$ jsou tětivové. Z rovnosti $|UB| = |UC|$ dále plyne, že obě opsané kružnice mají stejný poloměr.

Označme strany lichoběžníku $ABCD$ tak, aby bylo $a > c$, $b \leqq d$. Z kosinové věty pro trojúhelník EBC (obr. 31) dostaneme, že lichoběžník lze rozdělit na požadované čtyřúhelníky, právě když $a < x = |AX|$, kde



Obr. 31

$$\cos \alpha = \frac{d}{2x} = \frac{(a-c)^2 + d^2 - b^2}{2d(a-c)}.$$

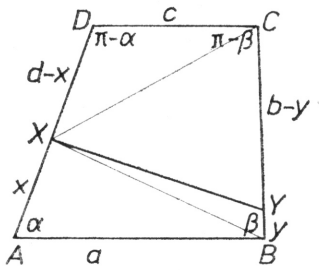
Odtud plyne jiná nutná a postačující podmínka existence hledaného rozdělení

$$ab^2 - cd^2 - a(a-c)^2 > 0.$$

(Vzhledem k předpokladu $a > c$, $b \leqq d$ je nutně $\alpha \leqq \beta < \pi - \alpha$, takže i bod U leží uvnitř AD.)

Jiné řešení (podle O. Šucha, 1. roč. G Velká Okružná, Žilina). Je-li lichoběžník $ABCD$ rozdělen příčkou XY na dva tětivové čtyřúhelníky, musí body X, Y ležet na ramenech AD, BC. Označme a, b, c, d strany lichoběžníku $ABCD$, $x = |AX|$ a $y = |BY|$ (obr. 32).

Pro poloměr r obou opsaných kružnic čtyřúhelníkům $ABYX$, $XYCD$ platí



Obr. 32

$$r = \frac{|BX|}{2 \sin \alpha} = \frac{|CX|}{2 \sin (\pi - \alpha)},$$

takže z kosinové věty pro trojúhelníky ABX, XCD dostaneme

$$\frac{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha}}{2 \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{c^2 + (d - x)^2 - 2c(d - x) \cos (\pi - \alpha)}}{2 \sin (\pi - \alpha)}.$$

Odtud vyjde velikost

$$x = \frac{c^2 + d^2 - a^2 + 2cd \cos \alpha}{(2c - 2a) \cos \alpha + 2d}.$$

Podobně z trojúhelníků ABY a YCD dostaneme

$$\frac{\sqrt{a^2 + y^2 - 2ay \cos \beta}}{2 \sin \beta} =$$

$$= \frac{\sqrt{c^2 + (b - y)^2 - 2c(b - y) \cos (\pi - \beta)}}{2 \sin (\pi - \beta)},$$

$$y = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc \cos \beta}{2b + (2c - 2a) \cos \beta}.$$

Tím jsou jednoznačně určeny oba body X, Y. Přitom je vidět, že daný lichoběžník $ABCD$ lze uvedeným způsobem rozdělit, právě když $0 < x < d$, $0 < y < b$.

A - III - 2

Dokažte, že rovnice

$$xyz = p^n(x + y + z),$$

kde $p > 3$ je prvočíslo a n liché přirozené číslo, má v oboru celých kladných čísel aspoň $3(n + 1)$ různých řešení. (Řešení, která se liší jen pořadím, nepovažujeme za různá.)

Řešení. Nejprve ukážeme, že v každém řešení (x, y, z) dané rovnice jedno z čísel x, y, z dělí součet ostatních dvou. Jsou-li $x = p^\alpha x'$, $y = p^\beta y'$, $z = p^\gamma z'$ rozklady čísel x, y, z na součin mocniny prvočísla p a čísla s p nesoudělného, můžeme vzhledem k symetrii dané rovnice předpokládat, že $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma \geqq 0$. Pak je

$$xyz' = p^n(p^{\alpha-\gamma}x' + p^{\beta-\gamma}y' + z'),$$

takže z' dělí $p^{\alpha-\gamma}x' + p^{\beta-\gamma}y'$, a tedy i z dělí $x + y$.

Předpokládejme tedy, že z dělí $x + y$, pak je

$$(1) \qquad x + y = zq, \; xy = p^n(q + 1),$$

kde q je celé číslo. Pro $q = 1$ odtud dostaneme $n + 1$ různých řešení

$$(2p^i, p^{n-i}, 2p^i + p^{n-i}), \; i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

a pro $q = 2$ dostaneme opět $n + 1$ různých řešení

$$\left(3p^j, p^{n-j}, \frac{1}{2}(3p^j + p^{n-j})\right), \; j \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Využijeme tento postup i pro jiná q: položme $x = r$, $y = s(q + 1)$, přitom musí být q dělitelem čísla $x + y = r + s + sq$. Pro $q = r + s$, $z = s + 1$ tak dostaneme dalších $n + 1$ různých řešení

$$(p^k, p^{n-k}(p^k + p^{n-k} + 1), p^{n-k} + 1), \; k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Označme uvedené tři množiny řešení P_1, P_2, P_3. Je $\mathsf{P}_1 \cap \mathsf{P}_2 = \emptyset$, neboť pro liché n nemůže být pro $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$2p^i = \frac{1}{2}(3p^j + p^{n-j})$$

neboli

$$4 = 3p^{j-i} + p^{n-j-i}.$$

Podobně $2p^i = p^{n-k} + 1$ může být jen pro $i = 0$, $k = n$, takže je $(2, p^n, p^n + 2) \in \mathsf{P}_1 \cap \mathsf{P}_3$. A $\mathsf{P}_2 \cap \mathsf{P}_3 = \emptyset$, neboť pro žádná j, k není

$$\frac{1}{2}(3p^j + p^{n-j}) = p^{n-k} + 1.$$

Pro liché n jsme tedy našli $3(n + 1) - 1$ řešení dané rovnice. Snadno ale najdeme další řešení. Položíme-li např. v (1) $x = 1$, $y = p^n(q + 1)$, vyjde $x + y = p^n q + p^n + 1$. Stačí tedy vzít $q = \frac{1}{2}(p^n + 1)$ a dostaneme řešení $\left(1, \frac{1}{2}p^n(p^n + 3), p^n + 2\right)$, které neleží v žádné z množin P_1, P_2, P_3. Celkem jsme tak nalezli $3(n + 1)$ různých řešení.

2. řešení (podle J. Hory, 4. roč. G Brno, tř. kpt. Jaroše). Pro $n = 1$ a libovolné prvočíslo $p \geqq 3$ najdeme následujících šest různých řešení dané rovnice

$$(1, p + 1, p(p + 2)), \qquad \left(1, p + 2, \frac{1}{2}p(p + 3)\right),$$

$$\left(1, \frac{1}{2}(3p + 1), 3p\right), \qquad (1, 2p + 1, 2p),$$

$$(2, p + 2, p), \qquad \left(2, \frac{1}{2}(p + 1), \frac{1}{2}p(p + 5)\right).$$

Jsou-li čísla x_0, y_0, z_0 řešením rovnice

$$xyz = p^n(x + y + z),$$

jsou čísla px_0, py_0, pz_0 zřejmě řešením rovnice

$$xyz = p^{n+2}(x + y + z).$$

Protože pro libovolné přirozené $n \geqq 3$ jsou trojice

$$(1, p^n + 1, p^n(p^n + 2)),$$

$$(1, p^n + p, p^{n-1}(p^n + p + 1)),$$

$$(1, p^n + p^3, p^{n-3}(p^n + p^3 + 1)),$$

(2)

$$\left(1, p^n + 2, \frac{1}{2}p^n(p^n + 3)\right),$$

$$(1, p^n + p^2, p^{n-2}(p^n + p^2 + 1)),$$

$$\left(2, \frac{1}{2}(p^n + 1), \frac{1}{2}p^n(p^n + 5)\right)$$

řešením dané rovnice, plyne odtud tvrzení úlohy matematickou indukcí: Jak jsme již ukázali, pro $n = 1$ tvrzení platí. Má-li daná rovnice pro $n = k$ aspoň $3(k + 1)$ různých řešení tvaru (x_i, y_i, z_i), $1 \leqq i \leqq 3(k + 1)$, má rovnice pro $n = k + 2$ kromě šesti řešení (2) i $3(k + 1)$ řešení tvaru (px_i, py_i, pz_i), která jsou vesměs různá od řešení (2), neboť

všechny prvky každé takové trojice jsou soudělné s p. Celkem má tedy pro $n = k + 2$ daná rovnice $3(k + 1) + 6 = 3(k + 3)$ různých řešení. Tím je důkaz hotov.

3. řešení (upraveno podle I. Vázsonyiové, 4. roč. G mať., Komárno). Pro $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ položme $x = p^k(y + z)$. Pak bude daná rovnice splněna, právě když

$$yz = p^{n-k}(p^k + 1). \tag{3}$$

Vidíme, že pro každé k najdeme alespoň $n - k + 1$ různých (neuspořádaných) dvojic (y, z). Máme tedy pro všechna $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ a $i \in \{0, 1, \ldots, n - k\}$ celkem

$$\sum_{k=0}^{n} (n - k + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

řešení tvaru $(p^k(p^i + p^{n-i} + p^{n-i-k}), p^i, p^{n-k-i}(p^k + 1))$. Ta jsou pro $p > 2$ vesměs různá, neboť každá taková trojice obsahuje jedinou mocninu prvočísla p kromě případu, kdy $p = 3$, $k = 0$, $i = \frac{n}{2}$. Dávají-li tedy čísla i, k, resp. i', k' dvě stejné trojice, je nutně $i = i'$, pak je ale i $k = k'$, jak se snadno přesvědčíme.

Našli jsme tak pro libovolné přirozené n a prvočíslo $p \geqq 3$ nejméně $\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$ různých řešení. Protože pro $n \geqq 4$ je

$$\frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \geqq 3(n + 1),$$

stačí najít další 3 řešení pro $n = 1$ a další 2 řešení pro $n = 3$ (případně i další 3 řešení pro $n = 2$, abychom dokázali tvrzení úlohy pro každé přirozené číslo n).

Pro $n = 1$ najdeme další tři řešení tvaru

$$\left(1, \frac{1}{2}(3p + 1), 3p\right), \quad \left(2, \frac{1}{2}(p + 1), \frac{1}{2}p(p + 5)\right),$$

$$\left(3, p, \frac{1}{2}(3 + p)\right),$$

pro $n = 2$ další tři řešení tvaru

$$(3p, 2p, p), \quad \left(\frac{1}{2}p(p^2 + p + 4), 2, \frac{1}{2}p(p + 1)\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}p^2(p^2 + 5), 2, \frac{1}{2}(p^2 + 1)\right)$$

a pro $n = 3$ další dvě řešení tvaru

$$\left(\frac{1}{2}p(p^3 + p^2 + 4), 2, \frac{1}{2}p^2(p + 1)\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}p(p^2 + 5p), 2p, \frac{1}{2}p(p + 1)\right).$$

Poznámka. Není těžké se přesvědčit, že tak dostaneme vesměs různá řešení i pro $p = 3$, takže jsme tvrzení dokázali dokonce pro libovolné přirozené číslo n a každé prvočíslo

$p \geqq 3$. Výhodou tohoto řešení je, že obecně dostáváme podstatně lepší odhad pro počet řešení. Mohli bychom ještě využít tu skutečnost, že $p^k + 1$ je sudé, takže v (3) dostaneme další rozklady tvaru

$$2p^i \cdot p^{n-k-i} \frac{p^k + 1}{2},$$

které dají pro $i \in \{1, 2, \ldots, n - k\}$ jistě i další řešení. Konečně spojením s předchozími výsledky se můžete sami pokusit o lepší odhad. S větším počtem řešení bude ale i diskuse toho, zda jsou různá, složitější.

4. řešení (upraveno podle V. Majerecha, 4. roč. G Pardubice). Položme

$$x = p^\alpha \xi, \quad y = p^\beta \eta, \quad z = p^\gamma \zeta,$$

kde α, β, γ jsou celá nezáporná čísla. Pro přirozená čísla ξ, η, ζ tak vyjde rovnice

$$p^{\alpha+\beta+\gamma}\xi\eta\zeta = p^n(p^\alpha\xi + p^\beta\eta + p^\gamma\zeta).$$

Uvažujme α, β, γ taková, že $\alpha + \beta + \gamma = n$. Pro $a = p^\alpha$, $b = p^\beta$, $c = p^\gamma$ dostaneme rovnici

$$\xi\eta\zeta = a\xi + b\eta + c\zeta. \tag{4}$$

Nyní každému řešení (ξ, η, ζ) rovnice (4) odpovídá řešení $x = a\xi, y = b\eta, z = c\zeta$ dané rovnice.

Najdeme tedy nějaká řešení rovnice (4) v přirozených číslech. Vezmeme-li $\xi = 1$, vyjde

$$\zeta = \frac{a + b\eta}{\eta - c}.$$

Odtud je vidět, že pro $\eta = c + 1$ dostaneme celočíselné řešení $(\xi, \eta, \zeta) = (1, c + 1, a + bc + b)$. Tomu odpovídá řešení $(a, b(c + 1), c(a + bc + b))$ dané rovnice.

Dále ukážeme, že pro každou uspořádanou trojici (α, β, γ) takovou, že $\alpha + \beta + \gamma = n$, dostaneme jiné řešení původní rovnice. Z čísel a, $b(c + 1)$, $c(a + bc + b)$ je jedině a mocninou prvočísla p, přičemž číslo

$$a + bc + b = p^{\alpha} + p^{\beta+\gamma} + p^{\beta} =$$

$$= p^{\alpha}(1 + p^{\beta-\alpha+\gamma} + p^{\beta-\alpha}), \quad \alpha \leqq \beta,$$

$$= p^{\beta}(p^{\alpha-\beta} + p^{\gamma} + 1), \quad \alpha \geqq \beta,$$

může být rovněž mocninou prvočísla p jen pro $p = 3$, $\alpha = \beta$, $\gamma = 0$ (v tom případě je $n = 2\alpha$ sudé). Jsou-li tedy (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ dvě uspořádané trojice, pro něž $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = n$, dostaneme stejné řešení dané rovnice, jen když $a = a'$ (tj. $\alpha = \alpha'$) a navíc $b(c + 1) = b'(c' + 1)$, tedy $b = b'$, $c = c'$, anebo

$$b(c + 1) = c'(a' + b'c' + b'),$$

(5)

$$b'(c' + 1) = c(a + bc + b).$$

V posledním případě by ale muselo být $b = c'$, $b' = c$, takže

$$c'(a' + b'c' + b') = b(a + bc + c) \geqq b(c + 2) > b(c + 1).$$

To odporuje předchozí rovnosti (5).

Zbývá tedy zjistit, kolik existuje uspořádaných rozkladů čísla na tři nezáporné sčítance. To je známá kombinatorická úloha ekvivalentní tomu, kolika způsoby lze rozdělit $n + 3$ předmětů v řadě na tři neprázdné skupiny (ke každému sčítanci přidáváme 1, abychom dostali nenulové číslo). To jde právě $\binom{n+2}{2}$ způsoby (vložením dvou přepážek do $n + 2$ mezer).

Dokázali jsme tudíž, že daná rovnice má alespoň $\binom{n+2}{2}$ řešení. (Pro n sudé a $p = 3$ bez dalšího rozboru dostaneme ovšem číslo o 1 menší.) Protože $\binom{n+2}{2} \geqq 3(n + 1)$ pro $n \geqq 4$, plyne odtud tvrzení úlohy pro všechna lichá $n \geqq 5$ a prvočísla $p \geqq 3$. Zbývající případy $n = 1$ a $n = 3$ je třeba opět vyšetřit zvlášť (jak jsme již učinili v předchozím řešení).

I v tomto řešení lze bez velkých obtíží získaný odhad zlepšit, všimneme-li si, že $a + bc$ je pro liché p sudé číslo, takže rovnice (4) má také řešení $\xi = 1$, $\eta = c + 2$, $\zeta = \dfrac{a + bc + 2b}{2}$. Analogicky zjistíme, že kromě případu $p^n = 3$ dostaneme dalších $\binom{n+2}{2}$ řešení původní rovnice. Přitom $2\binom{n+2}{2} \geqq 3(n + 1)$ pro všechna přirozená n.

Zobrazení f množiny všech kladných reálných čísel do sebe splňuje pro každá dvě kladná čísla x, y rovnost

$$f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy.$$

Dokažte, že $f(x) = x$ pro každé kladné x.

Řešení. Pro $x = y$ z dané rovnosti vyjde

$$f(xf(x)) = x^2, \tag{1}$$

což pro $x = 1$ dává $f(f(1)) = 1$, a pro $x = f(1)$ pak dostaneme $f(1)^2 = f(f(1)) = 1$, takže $f(1) = 1$. Pro $y = 1$ zase z původního vztahu plyne rovnost

$$f(x) + f(f(x)) = 2x.$$

Odtud je vidět, že zobrazení f je prosté.

Položme nyní pro libovolné r kladné $x = rf(r), y = \frac{1}{r}$, dostaneme tak rovnost

$$f\left(rf(r)f\left(\frac{1}{r}\right)\right) + f\left(\frac{1}{r}f(rf(r))\right) = 2f(r),$$

takže podle (1) je $f(r) = f\left(rf(r)f\left(\frac{1}{r}\right)\right)$. Protože f je prosté, je pro každé r kladné

(2) $$f(r)f\left(\frac{1}{r}\right) = 1.$$

Podobně pro $y = \frac{1}{x}$ dostaneme dosazením do dané rovnosti

$$f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) + f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) = 2,$$

což podle (2) můžeme psát jako

$$f\left(\frac{x}{f(x)}\right) + f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 2,$$

přičemž podle (2) pro libovolné x kladné současně platí

$$f\left(\frac{x}{f(x)}\right) f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1.$$

Soustava rovnic $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = 1$ má jediné řešení $\alpha = \beta = 1$, plyne tedy odtud $f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) = 1$, tj. $f(x) = x$ pro každé kladné x.

2. řešení (podle R. Sotáka, 4. roč. G Košice, Šmeralova ul.). Stejně jako v předchozím řešení odvodíme vztah (1), z kterého pro $x = 1$ plyne $f(1) = 1$.

Pro libovolné z kladné označme $f(z) = a$, $f\left(\frac{1}{z}\right) = b$. Z rovnosti (1) pak plyne

$$f(az) = z^2, \quad f\left(\frac{b}{z}\right) = \frac{1}{z^2}.$$

Dosadíme-li nyní do původní rovnosti $x = az$, $y = \frac{b}{z}$, vyjde

$$f\left(\frac{a}{z}\right) + f(bz) = 2ab$$

a pro $x = \frac{1}{z}$, $y = z$ zase dostaneme

$$f\left(\frac{a}{z}\right) + f(bz) = 2. \tag{3}$$

Porovnáním obou získaných rovností vidíme, že $ab = 1$, takže jednak pro každé kladné x platí

$$f(x)\, f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

a speciálně je tedy

$$f\left(\frac{a}{z}\right) f\left(\frac{z}{a}\right) = 1, \tag{4}$$

jednak můžeme rovnost (3) přepsat jako

$$f\left(\frac{a}{z}\right) + f\left(\frac{z}{a}\right) = 2. \tag{5}$$

Z obou rovností (4), (5) plyne, že je $f\left(\frac{a}{z}\right) = f\left(\frac{z}{a}\right) = 1$

a pro $x = \frac{z}{a}$, $y = 1$ z původní rovnosti dostáváme, že

$$\frac{2z}{a} = f\left(\frac{z}{a}\right) + f\left(f\left(\frac{z}{a}\right)\right) = 2,$$

takže $a = z$. Pro libovolné z kladné je tedy $f(z) = z$.

3. řešení (podle J. Sochora, 4. roč. G W. Piecka, Praha). Označíme-li $f(1) = a$, plyne z daného vztahu pro $x = y = 1$ rovnost $f(a) = 1$ a pro $x = y = a$ dostaneme $f(a) = a^2$, tj. $a^2 = 1$. Protože $f(1) > 0$, je $f(1) = a = 1$.

Pro $y = 1$ a pro libovolné kladné x z původního vztahu dostaneme rovnost

$$f(x) + f(f(x)) = 2x, \tag{6}$$

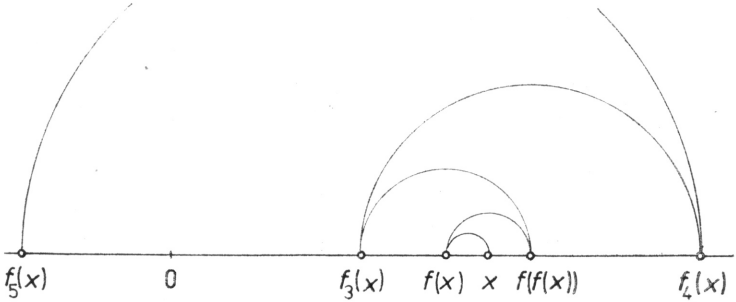
tj. x je aritmetickým průměrem čísel $f(x), f(f(x))$,

$$x = \frac{f(x) + f(f(x))}{2}. \tag{7}$$

Je tedy také

$$f(x) = \frac{f(f(x)) + f(f(f(x)))}{2}, \quad f(f(x)) = \ldots, \ldots .$$

Položme $f_0(x) = x$ a $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ pro $n \geqq 0$ celé. Z názoru je zřejmé (obr. 33), že pro $f(x) \neq x$ a $k \to \infty$ vyjde



Obr. 33

$$f_{2k+1}(x) \to -\infty \text{ pro } f(x) < x,$$

$$f_{2k}(x) \to -\infty \text{ pro } f(x) > x.$$

To odporuje tomu, že oborem hodnot funkce f je podmnožina kladných reálných čísel, musí tedy být $f(x) = x$ pro každé x.

Dokažme naše heuristické tvrzení podrobněji: Z rovnosti (7) plyne matematickou indukcí pro každé $k \geqq 0$ rovnost

$$f_k(x) = \frac{f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x)}{2},$$

což přepíšeme jako

$$f_{k+2}(x) - f_{k+1}(x) = 2(f_k(x) - f_{k+1}(x)).$$

Matematickou indukcí odtud dostaneme vztah

$$f_{k+2}(x) - f_{k+1}(x) = (-2)^{k+1}(f(x) - x),$$

takže je také

$$f_{k+2}(x) - f_k(x) = f_k(x) - f_{k+1}(x) = (-2)^k(x - f(x)).$$

Postupně tak dostaneme rovnosti

$$f_{2k}(x) = 2^{2k-2}(x - f(x)) + f_{2k-2}(x) = \ldots =$$

$$= x + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2i}(x - f(x)) = x + \frac{4^k - 1}{3}(x - f(x)),$$

$$f_{2k+1}(x) = -2^{2k-1}(x - f(x)) + f_{2k-1}(x) = \ldots =$$

$$= f(x) - \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2i+1}(x - f(x)) =$$

$$= x - \frac{2.4^k + 1}{3}(x - f(x)).$$

Je vidět, že pro $x < f(x)$ je $f_{2k}(x) < 0$ pro dost velké k a pro $x > f(x)$ zase $f_{2k+1}(x) < 0$ pro dostatečně velké k.

4. řešení (podle P. Čížka, 2. roč. G W. Piecka, Praha). Předpokládejme, že pro nějaké x kladné je $f(x) \neq x$ a uvažujme kladnou posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definovanou rekurentně

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_0 = x.$$

Stejně jako v předchozím řešení odvodíme rovnost (6), ze které nyní pro $x = a_k$ plyne

$$f(a_k) + f(a_{k+1}) = 2a_k,$$

neboli

$$a_{k+1} + a_{k+2} = 2a_k.$$

Protože příslušná charakteristická rovnice $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, vyhovují uvedené diferenční rovnici právě všechny posloupnosti tvaru

$$a_n = \alpha + \beta(-2)^n.$$

Z počátečních podmínek $a_0 = x$, $a_1 = f(x)$ vyjde $\alpha + \beta = x$, $\alpha - 2\beta = f(x)$, takže

$$\alpha = \frac{2x + f(x)}{3} > 0 \quad \text{a} \quad \beta = \frac{x - f(x)}{3} \neq 0.$$

Pro $\beta > 0$ vyjde ovšem pro lichá $n \to \infty$

$$a_n = \alpha - 2^n\beta = \beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - 2^n\right) \to -\infty,$$

pro $\beta < 0$ zase pro sudá $n \to \infty$

$$a_n = \alpha + 2^n\beta = -\beta\left(-\frac{\alpha}{\beta} - 2^n\right) \to -\infty.$$

To odporuje tomu, že posloupnost (a_n) je kladná.

Poznámka. Obě předchozí řešení podstatně využívají toho, že oborem hodnot funkce f je množina kladných reálných čísel. Bez tohoto předpokladu bude mít daná funkcionální rovnice dvě řešení $f(x) = x$ a $f(x) = -x$.

A - III - 4

Je dáno přirozené číslo $n \geqq 3$ a přirozená čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taková, že

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 2x_1. \tag{1}$$

Je-li p prvočíslo a r přirozené číslo takové, že p^r dělí součin $x_1 x_2 \ldots x_n$, pak platí

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{p^r} > n!. \tag{2}$$

Dokažte.

Řešení. Označme $a_p(x)$ tu část rozkladu čísla x na prvočinitele, která neobsahuje prvočíslo p. Zřejmě $a_p(xy) = a_p(x)a_p(y)$. Je-li p^r dělitelem čísla x, pak ovšem $a_p(x) \leqq \frac{x}{p^r}$. Kdyby nyní existovala $i < j$ tak, že $a_p(x_i) = a_p(x_j)$, pak by bylo $x_j \geqq p x_i \geqq 2x_i$, tedy $x_n \geqq 2x_1$, což odporuje předpokladu. Je tudíž $a_p(x_i) \neq a_p(x_j)$ pro $i \neq j$ a platí $a_p(x_1 x_2 \ldots x_n) \geqq n!$. Rovnost ale může nastat jen tehdy, jsou-li čísla $a_p(x_i)$ permutací čísel 1, 2, ..., n, a navíc musí být $p > n$ (p nedělí žádné $a_p(x_i)$, nemůže tedy dělit ani $n!$), takže $p \geqq 5$.

Je-li $a_p(x_i) = 1$, $a_p(x_j) = 2$, tj. $x_i = p^s$, $x_j = 2p^t$, pak je buď $s \leqq t$ čili $x_n \geqq 2p^t \geqq 2p^s \geqq 2x_1$, nebo $s > t$ a $x_n \geqq p^s \geqq p^{t+1} > 4p^t \geqq 2x_1$. Oba tyto případy odporují předpokladu úlohy a rovnost proto nemůže nastat. Tím je důkaz hotov.

Jiné řešení. Z nerovnosti (1) především plyne $2x_1 > x_n \geqq x_{n-1} + 1 \geqq \ldots \geqq x_1 + n - 1$, tedy $x_1 \geqq n$.

Bude stačit, když požadovanou nerovnost dokážeme jen pro nesoudělná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geqq 3$) taková, že $x_1 x_2 \ldots\ldots x_n / p^r$ je celé číslo (pro $r \leqq 0$ platí tvrzení tím spíš). Je-li totiž $d = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ největší společný dělitel čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $d = p^\alpha d_0$, kde $p \nmid d_0$, pak pro nesoudělná čísla $x_i' = x_i/d$ rovněž platí $x_1' < x_2' < \ldots < x_n' < 2x_1'$ a je

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{p^r} = \frac{p^{n\alpha} d_0^n x_1' x_2' \ldots x_n'}{p^r} = d_0^n \frac{x_1' x_2' \ldots x_n'}{p^{r-n\alpha}},$$

takže pro $x_1' x_2' \ldots x_n' / p^{r-n\alpha} > n!$ je tím spíš $x_1 x_2 \ldots x_n / p^r > n!$.

Pro nesoudělná čísla dokážeme tvrzení úlohy matematickou indukcí. Pro $n = 2$ a $(x_1, x_2) = 1$ zřejmě platí

$$\frac{x_1 x_2}{p^r} \geqq 2! = 2,$$

protože součin $x_1 x_2$ obsahuje aspoň dva prvočinitele (je $x_2 > x_1 \geqq 2$).

Pro $n = 3$ je buď $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5 < 2x_1 = 6$ a

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{p^r} \geqq 12 > 3!,$$

anebo $x_1 > 3$ a

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{p^r} = x_i \frac{x_j x_k}{p^r} \geqq 2! x_i \geqq 2x_1 > 3!.$$

Předpokládejme, že tvrzení úlohy platí pro $n - 1 \geqq 3$, a uvažujme nesoudělná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ splňující naše předpoklady. Protože některé x_j, $1 \leqq j \leqq n$, je nesoudělné s p, je podle indukčního předpokladu

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{p^r} = x_j \frac{x_1 \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_n}{p^r} > x_1 (n-1)! \geqq n!,$$

neboť čísla $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ rovněž splňují předpoklady úlohy. Tím je tvrzení dokázáno.

Poznámka. Snadno zjistíme, že pro $n = 2$ nastane rovnost, právě když $p = 3$, $x_1 = 2.3^s$, $x_2 = 3^{s+1}$, $s \geqq 0$, $r = 2s + 1$.

A - III - 5

V tabulce 3×11 je na začátku prvního řádku a na konci druhého řádku napsána nula. Určete nejmenší číslo α, pro které je možno tabulku vyplnit nezápornými reálnými čísly tak, aby současně platilo:

a) součet čísel v každém sloupci je 1,

b) součet každých dvou sousedních čísel v 1. i 2. řádku je nejvýše 1,

c) součet každých dvou sousedních čísel ve 3. řádku je nejvýše α.

Řešení. Uvažujme tabulku $3\times n$, kde n je liché. Z podmínek úlohy plyne, že součet čísel jak v 1., tak i v 2. řádku je nejvýše $\frac{n-1}{2}$. Jsou-li $c_1, c_2, \ldots, c_n$ čísla ve 3. řádku tabulky, dostaneme ze sloupcových součtů nerovnost

$$n \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i + n - 1.$$

Pro součet čísel ve 3. řádku navíc platí

$$2\sum_{i=1}^{n} c_i = c_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (c_i + c_{i+1}) + c_n \leqq 2\alpha + (n-1)\alpha =$$

$$= (n+1)\alpha,$$

takže dohromady je

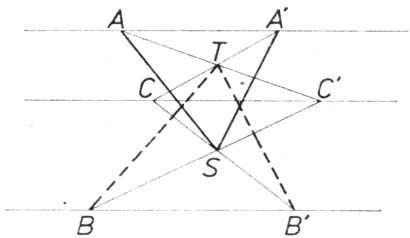
$$1 \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i \leqq \frac{(n+1)\alpha}{2}, \quad \text{neboli} \quad \alpha \geqq \frac{2}{n+1}.$$

Snadno se přesvědčíme, že následující tabulka 3×11 pro $\alpha = \frac{1}{6}$ vyhovuje podmínkám úlohy:

0	1—α	α	1—2α	2α	1—3α	3α	1—4α	4α	1—5α	5α
1—α	α	1—2α	2α	1—3α	3α	1—4α	4α	1—5α	5α	0
α	0	α	0	α	0	α	0	α	0	α

Jsou dány tři rovnoběžné přímky AA', BB', CC', které neleží v jedné rovině. Je-li U průsečík rovin $A'BC$, $AB'C$, ABC' a V průsečík rovin $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, pak je přímka UV rovnoběžná s AA'. Dokažte.

Řešení. Označme S průsečík přímek $B'C$, BC' (obr. 34).



Obr. 34

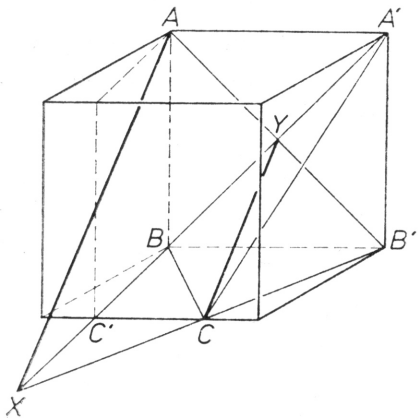
Potom je $U \in AS = ABC' \cap AB'C$ a $V \in A'S = A'BC' \cap \cap A'B'C$. Odtud plyne, že přímka UV leží v rovině $AA'S$, která je rovnoběžná s přímkou BB'. To ovšem platí, i když jsou přímky $B'C$, BC' rovnoběžné: za bod S pak vezmeme takový bod, pro který $AS \parallel B'C \parallel BC'$.

Podobně zjistíme, že přímka UV leží i v rovině $BB'T \parallel AA'$, kde T je průsečík přímek $A'C$, AC', resp. bod, pro který $BT \parallel A'C \parallel AC'$. Průsečnice rovin $AA'S$, $BB'T$ je přímka UV, a protože AA' je rovnoběžná s oběma rovinami, je rovnoběžná i s jejich průsečnicí.

Jiné řešení (podle P. Kolníka, 4. roč. G Nové Mesto nad Váhom). Označme S_A, S_B, S_C středy úseček AA', BB', CC'.

Zavedeme kosoúhlou soustavu souřadnic s počátkem v bodě S_A a s osami $x = AA'$, $y = S_AS_B$, $z = S_AS_C$. V této souřadné soustavě jsou dvojice bodů A, A'; B, B'; C, C' symetrické podle roviny $S_AS_BS_C$. Proto i dvojice rovin $A'BC$, $AB'C'$; $AB'C$, $A'BC'$ a ABC', $A'B'C$ jsou symetrické podle roviny $S_AS_BS_C$, a tedy i průsečík U rovin $A'BC$, $AB'C$, ABC' a průsečík V rovin $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ jsou symetrické podle roviny $S_AS_BS_C$. To znamená, že přímka UV má směr osy x, tj. $UV \parallel AA'$.

Poznámka. Obecně uvedené trojice rovin nemusí mít společný bod, jak je vidět na obr. 35, kde $AX = ABC' \cap \cap AB'C$, $CY = A'BC \cap AB'C$ a $AX \parallel CY$.



Obr. 35

Korespondenční seminář ÚV MO

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří nemají možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. Tyto úkoly však již plní i krajské korespondenční semináře, které postupně vznikly ve všech krajích. Navíc speciální školy se zaměřením na matematiku už dávno nejsou výsadou jen »hlavních měst« Prahy a Bratislavy, ale najdeme je teď v každém kraji. Neúčast žáků speciálních škol se tak v poslední době stala jistým anachronismem. Z toho plynula i poměrně malá korelace mezi umístěním v korespondenčním semináři a výsledky celostátního kola kategorie A. PÚV MO se proto rozhodl zaměřit korespondenční seminář výrazněji na přípravu reprezentantů pro mezinárodní matematickou olympiádu.

K účasti v korespondenčním semináři jsme tentokrát pozvali všechny špičkové řešitele kategorie A bez ohledu na jejich školní příslušnost spolu s těmi studenty, kteří nějak vynikli v krajských kolech kategorie B či C předchozího ročníku MO. Vybrali jsme tak téměř 50 studentů, z nichž se přihlásilo 37 řešitelů ze všech krajů republiky.

Kraj	Pha	Stč	Jč	Zč	Sč	Vč	Jm	Sm	Bva	Zsl	Ssl	Vsl
Počet řešitelů	1	2	2	2	4	7	4	3	6	1	2	3

V průběhu 35. ročníku MO jim bylo postupně zasláno 5 sérií poměrně náročných úloh. Jednotlivé série tentokrát nebyly monotematické, naopak jsme se snažili pokrýt celou problematiku olympiádních úloh. Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Všechna kola semináře absolvovalo 12 řešitelů, nejlepšími v celkovém hodnocení byli

1. *Ilja Martišovitš,* G J. Hronca, Bratislava,
2. *Vladan Majerech,* G Pardubice,
3. *Marian Lukáč,* G Bánovce n. Bebravou,
4. *Zdeněk Tryner,* G J. Fučíka, Plzeň,
5. *Stanislav Krajči,* G Košice, Šmeralova,
6. *Petr Čížek,* G W. Piecka, Praha,
7. *Ondrej Šuch,* G Žilina, Veľká Okružná.

O náročnosti zadaných úloh svědčí i to, že pouze prvních pět řešitelů dosáhlo aspoň 50 % možných bodů.

Korespondenční seminář byl řízen tajemníkem ÚV MO RNDr. Karlem Horákem, který se staral o výběr a přípravu úloh a prováděl i redakci komentářů. Opravu pak zajišťovalo několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK Praha (všichni jsou bývalí olympionici). Uvádíme znění všech zadaných úloh.

1.1 Na povrchu jednotkové koule leží kružnice $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ poloměru r ($n \geqq 3$). Kružnice γ_0 se dotýká všech kružnic $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ a rovněž dvojice kružnic γ_1 a γ_2, γ_2 a γ_3, $\ldots$, γ_n a γ_1 se dotýkají. Pro jaká n je to možné? Spočtěte příslušný poloměr r.

1.2 Je dán konvexní čtyřúhelník a čtyři kruhy se středy v jeho vrcholech takové, že ho celý pokrývají. Dokažte, že z daných kruhů můžeme vybrat tři tak, že pokrývají trojúhelník určený jejich středy.

1.3 Některé stěny bílého konvexního mnohostěnu jsou obarveny černě, přičemž žádné dvě černé stěny nemají společnou hranu. Dokažte, že mnohostěnu nelze vepsat kulovou plochu, je-li splněna aspoň jedna z následujících podmínek:

a) černých stěn je více než polovina;

b) obsah černých stěn tvoří více než polovinu povrchu mnohostěnu.

1.4 Je možné rozložit rovnostranný trojúhelník na milión konvexních mnohoúhelníků tak, aby jich libovolná přímka protínala nejvýše čtyřicet? (Říkáme, že přímka protíná mnohoúhelník, jestliže s ním má společný aspoň jeden bod.)

1.5 Označme $s(n)$ ciferný součet přirozeného čísla n. Pro jaká přirozená čísla k existuje kladné číslo c_k takové, že pro všechna přirozená N platí

$$\frac{s(kN)}{s(N)} \geqq c_k ?$$

Pro dané k najděte největší takové c_k $\left(\text{např. pro } k = 8 \text{ je } c_k = \frac{1}{8}\right)$.

1.6 Body P, Q se pohybují po dvou různoběžných přímkách stejnou konstantní rychlostí. Dokažte, že v rovině různoběžek existuje bod A, od něhož mají body P, Q vždy stejnou vzdálenost.

1.7 Dokažte, že čísla 1, 2, ..., n nelze rozdělit na dvě skupiny tak, aby se součin čísel v jedné skupině rovnal součinu čísel ve druhé skupině.

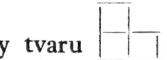
2.1 V jedné zemi, kde vládne prezident Miraflores, mají být nové prezidentské volby. V zemi je právě 20 miliónů voličů; z nichž pouze 1 procento (pravidelná armáda) podporuje Miraflorese. Miraflores přirozeně chce být opět zvolen, ale chce také, aby volby proběhly »demokraticky«, tj. všichni voliči jsou rozděleni do několika stejně velkých skupin, každá ze skupin je znovu rozdělena na stejně velké skupiny, atd.; v těch posledních, nejmenších skupinách si její členové zvolí zástupce, pak si zvolení zástupci zvolí svého zástupce ve větší skupině, atd. Nakonec zvolení zástupci prvních (největších) skupin zvolí nového prezidenta. Miraflores sám dělí voliče do skupin a instruuje své zastánce, jak mají hlasovat. Může zorganizovat »demokratické volby« tak, aby byl opět zvolen prezidentem? (Při rovnosti hlasů vítězí opozice.)

2.2 Dva hráči hrají následující hru: Z hromádky 25 zápalek každý postupně odebere jednu, dvě nebo tři zápalky. Vyhrává ten, který bude mít nakonec (když hromádku rozeberou) sudý počet zápalek. Kdo vyhraje při správné hře — začínající hráč, nebo jeho soupeř? Jak má hrát, aby vyhrál? Jak se změní odpověď, jestliže vítězem bude ten, který získá lichý počet zápalek?

2.3 Je dána úsečka AB. Najděte množinu bodů C v rovině takových, že v trojúhelníku ABC je délka těžnice z vrcholu A rovna výšce z vrcholu B.

2.4 Ve čtvercové tabulce $n \times n$ jsou zapsána nezáporná čísla tak, že součet čísel v každém řádku a v každém sloupci je 1. Dokažte, že můžeme v tabulce najít n kladných čísel, z nichž žádná dvě nejsou v témže sloupci, ani v témže řádku.

2.5 Dno obdélníkové krabičky je pokryto destičkami rozměrů 2×2 a 1×4. Po vysypání destiček se jedna destička 2×2 ztratila. Místo ní se podařilo opatřit destičku 1×4. Je možno pokrýt opět celé dno krabičky?

Řešte analogickou úlohu pro destičky tvaru  a destičky 1×3.

2.6 Dokažte, že v tabulce

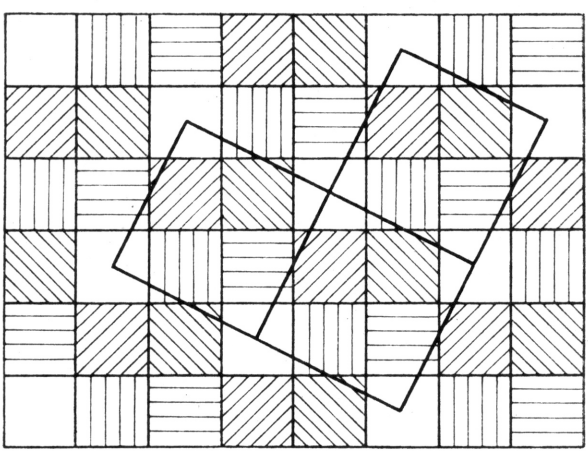
1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
. . . . . .

(kde každé číslo je rovno součtu tří čísel v řádku nad ním) je v každém řádku počínaje třetím aspoň jedno sudé číslo. Obsahuje každý řádek číslo dělitelné třemi?

2.7 Nechť tři kružnice stejného poloměru procházejí jedním bodem. Pak tři další průsečíky jednotlivých kružnic leží na kružnici téhož poloměru. Dokažte.

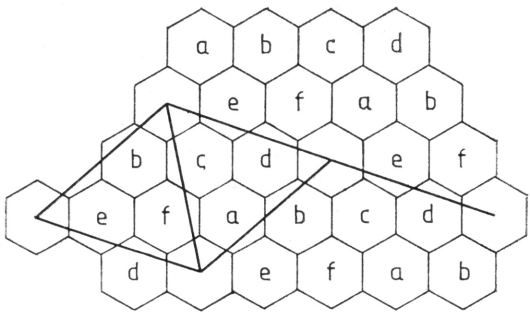
3.1 Na obr. 36 je rovina pokryta čtverci pěti barev. Středy čtverců téže barvy leží ve vrcholech čtvercové sítě, přičemž příslušné čtvercové sítě dostaneme vzájemným posunutím. S jakým počtem barev lze takového pokrytí dosáhnout?

Na obr. 37 je rovina pokryta pravidelnými šestiúhelníky



Obr. 36

sedmi barev tak, že středy šestiúhelníků stejné barvy leží ve vrcholech previdelné trojúhelníkové sítě. Přitom jednotlivé sítě dostaneme vzájemným posunutím. S jakým počtem barev lzetakového pokrytí dosáhnout?



Obr. 37

3.2 Jsou-li $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nenulová celá čísla a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ navzájem různá přirozená čísla, která nejsou dělitelná druhou mocninou žádného celého čísla různého od 1, pak

$$b_1\sqrt{a_1} + b_2\sqrt{a_2} + \ldots + b_n\sqrt{a_n} \neq 0.$$

Dokažte.

3.3 Je dána kružnice k a přímka p. Označme A patu kolmice spuštěné ze středu kružnice k na přímku p. Zvolme na přímce p dva různé body B, C tak, že $|AB| = |AC|$, a veďme body B a C přímky, které protnou kružnici k v bodech P, Q a M, N. Předpokládejme, že přímky PM a QN

protnou přímku p v bodech R, S, pak je $|AR| = |AS|$. Dokažte.

3.4 Nechť pro každé dva body A, B konečné množiny M bodů v rovině existuje bod $C \in \mathsf{M}$ takový, že trojúhelník ABC je rovnostranný. Kolik bodů může obsahovat množina M?

3.5 Zjistěte, kolik řešení má soustava rovnic

$$x^2 + y^2 + xy = a$$

$$x^2 - y^2 = b$$

pro reálná čísla a, b.

3.6 Na nekonečném listu čtverečkovaného papíru je n čtverečků obarveno černě. Dokažte, že existuje konečný počet čtverců, pro něž současně platí:

a) vybrané čtverce obsahují všechny černé čtverečky,

b) v libovolném z vybraných čtverců zaujímají černé čtverečky alespoň $\frac{1}{5}$ a ne více než $\frac{3}{5}$ obsahu celého čtverce.

3.7 Rovinný útvar, jehož žádné dva body nemají vzdálenost 0,001, je částí jednotkového čtverce. Dokažte, že obsah tohoto útvaru je nejvýše 0,34. Pokuste se najít přesnější odhad a dokázat analogické tvrzení v prostoru.

4.1 Na 44 stromech zasázených na hranici kruhu sedí 44 ptáčků zpěváčků (na každém stromě jeden). Čas od času dva z nich současně přeletí na sousední stromy v opačných směrech (jeden ve směru a druhý proti směru hodinových ručiček). Dokažte, že nikdy nebudou všichni ptáci na stejném stromě. A je-li stromů i ptáčků n?

4.2 Jsou dány tři shodné kružnice k_1, k_2, k_3, které se vzájemně dotýkají, a kružnice k, která je jim opsána. Vedeme-li bodem $M \in k$ tečny ke kružnicím k_1, k_2, k_3, pak je vzdálenost bodu M od jednoho z bodů dotyku rovna součtu vzdáleností od druhých dvou. Dokažte.

4.3 a) Rovinnému úhlu jsou vepsány dvě kružnice, které mají společnou ještě další tečnu T_1T_2 (s body dotyku T_1, T_2), která protíná ramena úhlu v bodech A_1, A_2. Dokažte, že $|A_1T_1| = |A_2T_2|$.

b) Úhlu jsou vepsány dvě kružnice, které se dotýkají jeho ramen v bodech K_1, K_2, resp. L_1, L_2. Dokažte, že přímka K_1L_2 vytíná na obou kružnicích shodné tětivy.

4.4 Jestliže n-prvková množina E má m různých vlastních podmnožin takových, že libovolné dva prvky E jsou právě v jedné z uvedených podmnožin, pak $m \geqq n$. Dokažte. V jakých případech může být $m = n$?

4.5 Jestliže

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

tak

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Dokažte.

4.6 a) Z 19 kuliček jsou 2 radioaktivní. Jedním měřením lze zjistit, obsahuje-li zvolený soubor kuliček nějakou radioaktivní či nikoli (ale nelze zjistit počet radioaktivních kuliček). Dokažte, že osmi měřeními lze určit obě radioaktivní kuličky.

b) Z 11 kuliček jsou 2 radioaktivní. Dokažte, že při méně než 7 měřeních nelze zaručit jejich nalezení.

4.7 Ve všech polích tabulky 100×100 jsou napsány plusy. Je dovoleno změnit současně všechna znaménka jednoho sloupce nebo řádku. Je možné po několika takových operacích dostat tabulku s 1 970 minusy?

5.1 Na nekonečném listu čtverečkovaného papíru je n čtverečků obarveno černě. Dokažte, že existuje konečný počet disjunktních čtverců s vrcholy v uzlech sítě, pro něž současně platí:

a) vybrané čtverce obsahují všechny černé čtverečky,

b) v libovolném z vybraných čtverců zaujímají černé čtverečky alespoň $\frac{1}{5}$ a ne více než $\frac{4}{5}$ obsahu celého čtverce.

5.2 Pro $m > 1$ přirozené řešte v oboru celých nezáporných čísel rovnici

$$x^2 - mxy + y^2 = 1.$$

5.3 Na kartičkách jsou zapsána čísla 11 111, 11 112, ..., 99 999. Ať seřadíme jednotlivé kartičky jakkoli, 444 445-ciferné číslo, které tak dostaneme, nebude nikdy mocninou dvojky. Dokažte.

5.4 V trojúhelníku ABC označme V střed kružnice vepsané a M střed strany BC. Označíme-li E průsečík výšky AH trojúhelníku ABC s přímkou MV, má úsečka AE délku poloměru kružnice vepsané. Dokažte.

5.5 V rovině jsou dány tři přímky procházející jedním bodem a další bod A na jedné z nich. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož osy úhlů jsou dané přímky.

5.6 Dva mudrci hrají následující hru s čísly 0, 1, 2, ..., 1 024. První mudrc vyškrtne 512 čísel, druhý dalších 256 čísel, pak zas první vyškrtne dalších 128 a druhý 64 čísel, atd. Pátým tahem vyškrtne druhý jedno číslo, takže zbudou právě dvě čísla, a druhý zaplatí prvnímu jejich rozdíl. Jak má hrát první hráč, aby dostal co nejvíc? A jak druhý, aby platil co nejméně? Kolik mu zaplatí, budou-li oba hrát co nejlépe?

5.7 V rovině jsou dány body P, Q ležící v téže polorovině určené přímkou p. Na přímce p najděte bod M, pro který je vzdálenost pat výšek trojúhelníku PQM ke stranám PM a QM nejmenší.

28. ročník mezinárodní matematické olympiády

Dvacátá osmá mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 5.—16. července 1987 v hlavním městě Kuby - Havaně. Účast na ní byla rekordní - v soutěži byly zastoupeny 42 země: Alžírsko, Austrálie, Belgie, Brazílie, Bulharsko, Československo, ČLR, Finsko, Francie, Írán, Island, Itálie, Jugoslávie, Kanada, Kolumbie, Kuba, Kuvajt, Kypr, Lucembursko, Maďarsko, Maroko, Mexiko, Mongolsko, NDR, Nikaragua, Nizozemí, Norsko, NSR, Panama, Peru, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, SSSR, Španělsko, Švédsko, Turecko, Uruguay, USA, Velká Británie a Vietnam. Kromě toho byli na 28. MMO přítomni dva pozorovatelé, a to z Irska a z Nového Zélandu.

Průběh 28. MMO odpovídal obvyklému standardu. Mezinárodní porota MMO složená z vedoucích jednotlivých delegací a předsedy, jímž byl prof. Miguel Jiménez Pozo z havanské univerzity, pracovala nejprve v přísné izolaci od soutěžících v Santa Maria del Mar, kde z návrhů zaslaných zúčastněnými zeměmi vybírala úlohy pro soutěž.

Porota se snažila především sestavit tematicky vyvážený soubor úloh, který by dostatečně prověřil znalosti a schopnosti soutěžících. I když se jí to vcelku podařilo, ukázaly konečné výsledky, že poněkud přecenila obtížnost soutěžních úloh.

Pro soutěž bylo vybráno těchto šest úloh z návrhů, jež zaslaly NSR (1 a 3), SSSR (2 a 6), Vietnam (4) a NDR (5).

1. Označme $p_n(k)$, $n \geqq 1$, $k \geqq 0$, počet permutací f množiny $\mathsf{S}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že rovnost $f(j) = j$ platí pro právě k hodnot $j \in \mathsf{S}_n$. Dokažte, že

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n!.$$

Poznámka. Permutací množiny S_n rozumíme vzájemě jednoznačné zobrazení množiny S_n na S_n.

2. Osa úhlu BAC ostroúhlého trojúhelníku ABC protíná stranu BC v bodě L a kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě N, $N \neq A$. Označme K, M paty kolmic spuštěných z bodu L na strany AB, resp. AC. Dokažte, že čtyřúhelník $AKNM$ a trojúhelník ABC mají týž obsah.

3. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou reálná čísla taková, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Dokažte, že pro každé celé číslo $k > 1$ lze nalézt celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ taková, že

(i) $a_j \neq 0$ pro alespoň jedno j, $1 \leqq j \leqq n$,

(ii) $|a_j| \leqq k - 1$ pro všechna j, $1 \leqq j \leqq n$,

(iii) $|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leqq \dfrac{k-1}{k^n - 1}\sqrt{n}$.

4. Dokažte, že neexistuje funkce f zobrazující množinu $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ všech nezáporných celých čísel do N_0 taková, že

$$f(f(n)) = n + 1\,987$$

pro každé $n \in N_0$.

5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 3$ lze v rovině nalézt n bodů tak, aby platilo:

(i) vzdálenost kterýchkoli dvou z nich je iracionální číslo;

(ii) kterékoli tři z nich určují trojúhelník, jehož obsah je kladné racionální číslo.

6. Nechť n je celé číslo, $n \geqq 2$. Dokažte: Jestliže $k^2 + k + n$ je prvočíslo pro každé k, $0 \leqq k \leqq \lfloor\sqrt{n/3}\rfloor$, potom je $k^2 + k + n$ prvočíslo pro každé k, $0 \leqq k \leqq n - 2$.

I když obtížnost úloh byla různá, bylo rozhodnuto, jak je v posledních letech na MMO zvykem, ocenit správné řešení každé úlohy sedmi body. Každý soutěžící mohl tedy získat maximálně 42 body; jak se pak ukázalo, 22 žákům se to skutečně podařilo.

Práce v mezinárodní porotě spojené s výběrem, formulací a překlady soutěžních úloh probíhaly bez větších problémů a byly v náležitém termínu ukončeny. Mezitím se již v Havaně shromáždili soutěžící. Ti byli po celou dobu MMO ubytováni v internátě Leninova institutu (Instituto Preuniversitario Vocacional en Ciencias Exactas V. I. Lenin) na

okraji Havany. Zde také ve dnech 10. a 11. července proběhla vlastní soutěž včetně slavnostního zahájení (10. července dopoledne), jehož se zúčastnil mj. též kubánský ministr školství J. R. Fernández.

Mezinárodní porota, která 10. července odpoledne přesídlila do Havany, sem pak dojížděla k práci na opravě a koordinaci hodnocení žákovských řešení. Koordinace byla dobře připravena a proběhla poměrně rychle; uplatňovaná kritéria nebyla příliš přísná. Na závěrečném zasedání dne 13. července mohla tak porota již schválit definitivní výsledky soutěže a rozhodnout o rozdělení cen: na 28. MMO bylo uděleno 22 prvních cen (pouze za maximální bodový zisk - 42 bodů), 42 druhých cen (za výkony ohodnocené 32—41 body) a 56 třetích cen (za 18—31 bodů). Z celkového počtu 237 soutěžících tak bylo oceněno 120, tj. přibližně polovina (50,63 %). Speciální ceny nebyly tentokráte uděleny žádné.

Celkové výsledky jednotlivých delegací jsou patrny z připojené tabulky 1.

Slavnostní zakončení 28. MMO se konalo dopoledne 15. července v sále budovy kubánských ozbrojených sil, opět za účasti kubánského ministra školství. Vystoupil zde také zástupce Austrálie prof. P. J. O'Halloran, který pozval všechny přítomné delegace na 29. MMO, která se má konat v červenci 1988 v Canbeře. Slavnost byla doplněna vystoupením skupiny populární hudby.

Vedle odborného programu měli soutěžící žáci dostatek příležitostí využít volných chvil jak k rekreaci a sportu (přímo v areálu institutu), tak i k seznámení se s pamětihodnostmi Havany. Dne 14. července se pak mohli zúčastnit hromadného autobusového výletu na Playa Girón.

Všichni účastníci 28. MMO se sešli dne 13. července na recepci, kterou pro ně uspořádal kubánský ministr školství J. R. Fernández.

Při stále rostoucím počtu účastníků je úkol organizovat MMO velmi náročný. Je třeba konstatovat, že se ho kubánští pořadatelé zhostili úspěšně a že se 28. MMO bezesporu řadí mezi zdařilé mezinárodní akce.

Československá účast na 28. MMO

Na 28. MMO vyslalo Československo delegaci ve složení:

vedoucí delegace:	*RNDr. František Zítek, CSc.*, MÚ ČSAV, Praha, předseda ÚV MO
zástupce vedoucího:	*RNDr. Tomáš Hecht*, CSc., MFF UK, Bratislava, člen PÚV MO
soutěžící žáci:	*Robert Babilon*, 4 M, GMK, Bílovec
	Petr Čížek, 2 M, GWP, Praha
	Pavol Gvozdjak, 2 M, GAM, Bratislava
	Vladan Majerech, 4 MF, G, Pardubice
	Marcel Polakovič, 4 M, GAM, Bratislava
	Roman Soták, 4 M, G, Košice

Dále byla na 28. MMO přítomna také RNDr. Júlia Lukátšová z ministerstva školství SSR jako pozorovatelka.

Účast delegace silně poznamenaly nepříjemné problémy s dopravou na Kubu. Namísto původně plánovaného společ-

ného odletu v sobotu 4. července cestovala naše delegace ve třech skupinách 4., 6. a 9. července. Tak se také stalo, že dva naši soutěžící, M. Polakovič a R. Soták, dorazili do Havany teprve v časných ranních hodinách v pátek 10. července, tedy v první soutěžní den. Je jenom přirozené, že se tato skutečnost nepříznivě projevila na jejich výkonu v soutěži.

Výsledky našich žáků na 28. MMO jsou shrnuty v tabulce 2. Jak je z ní vidět, měli největší potíže se šestou úlohou, kterou nikdo z nich správně nevyřešil. Šestá úloha byla také skutečně nejtěžší úlohou 28. MMO a úspěch při jejím řešení rozhodoval o umístění na předních pozicích.

I přes zmíněné dopravní komplikace a neúspěch u šesté úlohy je celkový výsledek československé reprezentace na 28. MMO pozitivní. Všichni naši žáci získali ceny a v neoficiálním pořadí družstev podle součtu bodů jsme zaujali deváté místo.

Tabulka 5

Celkové výsledky 28. MMO

Země	Počet				
	žáků	bodů	I. cen	II. cen	III. cen
Alžírsko	6	29	0	0	0
Austrálie	6	143	0	3	0
Belgie	6	74	0	0	1
Brazílie	6	116	1	0	2
Bulharsko	6	210	1	3	2
Československo	6	192	0	4	2
ČLR	6	200	2	2	2
Finsko	6	69	0	0	2
Francie	6	154	0	3	2

Tabulka 5 - pokračování

Země	Počet				
	žáků	bodů	I. cen	II. cen	III. cen
Írán	6	70	0	0	1
Island	4	45	0	0	0
Itálie	4	35	0	0	1
Jugoslávie	6	132	0	1	3
Kanada	6	139	1	1	1
Kolumbie	6	68	0	0	1
Kuba	6	83	0	0	2
Kuvajt	6	28	0	0	0
Kypr	6	42	0	0	0
Lucembursko	1	27	0	0	1
Maďarsko	6	218	0	5	1
Maroko	6	88	0	0	3
Mexiko	5	17	0	0	0
Mongolsko	6	67	0	0	0
NDR	6	231	2	3	1
Nikaragua	6	13	0	0	0
Nizozemí	6	146	0	1	4
Norsko	6	69	0	0	0
NSR	6	248	4	2	0
Panama	6	7	0	0	0
Peru	6	41	0	0	0
Polsko	3	55	0	0	2
Rakousko	6	150	0	2	3
Rumunsko	6	250	5	1	0
Řecko	6	111	0	0	4
SSSR	6	235	3	3	0
Španělsko	6	91	0	0	3
Švédsko	6	134	0	2	2
Turecko	6	94	0	0	2
Uruguay	4	27	0	0	0
USA	6	220	2	3	1
Velká Británie	6	182	1	2	2
Vietnam	6	172	0	1	5
(42)	237		22	42	56 (120)

Tabulka 6

Výsledky čs. žáků na 28. MMO

Jméno	Počet bodů							Cena
	za úlohu						celkem	
	1	2	3	4	5	6		
Babilon	7	3	7	7	7	1	32	II.
Čížek	7	7	7	7	7	0	35	II.
Gvozdjak	7	7	7	7	7	3	38	II.
Majerech	7	7	7	7	7	2	37	II.
Polakovič	7	0	0	7	7	0	21	III.
Soták	7	3	0	7	7	5	29	III.
Celkem	42	27	28	42	42	11	192	

1. Všech permutací f množiny S_n je $n!$, v každé z nich je určitý počet k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) prvků j, pro něž platí

$$f(j) = j, \tag{1}$$

odtud plyne rovnost

$$\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = n!. \tag{2}$$

Z n-prvkové množiny S_n lze k prvků vybrat právě $\binom{n}{k}$ způsoby; platí-li pro těchto k vybraných prvků (1) a pro ostatní $n - k$ pak $f(j) \neq j$, dostaneme permutaci f započtenou v $p_n(k)$. Máme tak rovnost

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p_{n-k}(0) \tag{3}$$

platnou pro všechna $n \geqq 1$, $k \geqq 0$.

Jestliže je $k > 0$, pak

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1},$$

takže vidíme, že v důsledku (3) a (2) je

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = \sum_{k=1}^{n} k p_n(k) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p_{n-k}(0) =$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p_{n-k}(0) = n \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1}(k) = n(n-1)! = n!,$$

což jsme měli dokázat.

Poznámka. Rovnost

$$k p_n(k) = n p_{n-1}(k-1) \tag{4}$$

se dá odvodit i bez použití (3) přímou kombinatorickou úvahou:

Vybereme si některou z $p_n(k)$ permutací f s právě k prvky j splňujícími (1) a potom si z těchto k prvků zvlášť vyznačíme jeden (což lze učinit k způsoby); celkem máme $k.p_n(k)$ možností volby. Ke stejnému výsledku však dospějeme, jestliže nejprve vybereme jeden prvek j_0 z množiny S_n (tento výběr lze provést n způsoby) a potom určíme permutaci f tak, že položíme $f(j_0) = j_0$, kdežto pro ostatních $n-1$ prvků $j \in S_n$ definujeme f tak, aby právě $k-1$ z nich splňovalo (1). Takovýchto permutací množiny $S_n / \{j_0\}$ je cvšem $p_{n-1}(k-1)$, celkem tedy máme $n p_{n-1}(k-1)$ možností. Tím je rovnost (4) dokázána.

Jiné řešení úlohy 1 využívá známého vzorce

$$p_n(0) = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Máme pak podle (3)

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} (n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} =$$

$$= n! \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{k+i-1}{i} \frac{1}{(k+i-1)!} =$$

$$= n! \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{l}{i} = n!.$$

2. Poněvadž trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží střed S kružnice jemu opsané uvnitř něho. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $|AB| \geqq |AC|$, takže také $|\sphericalangle BAS| \leqq |\sphericalangle CAS|$, a tedy

$$|\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle BAL| - |\sphericalangle SAL|$$

a

$$|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle BAL| + |\sphericalangle SAL|.$$

Poněvadž $KL \perp AB$ a $KM \perp AL$ a $|KL| = |LM|$, je $|\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle BAL|$ a obsah trojúhelníku ABC se dá vyjádřit ve tvaru

$$|KL| \frac{|AB| + |AC|}{2}.$$

Poněvadž $KM \perp AN$, je obsah čtyřúhelníku $AKNM$ roven $\frac{1}{2}\,|AN|.|KM|$. Platí

$$|KL|\left(\frac{1}{2}\,|AB| + \frac{1}{2}\,|AC|\right) =$$

$$= |KL|.|AS|\,(\cos|\sphericalangle\, BAS| + \cos|\sphericalangle\, CAS|) =$$

$$= |AS|.|KL|\,2\cos|\sphericalangle\, BAL|.\cos|\sphericalangle\, SAL| =$$

$$= |AN|.|KL|\cos|\sphericalangle\, MKL| = \frac{1}{2}\,|AN|.|KM|;$$

trojúhelník ABC a čtyřúhelník $AKNM$ mají tedy skutečně týž obsah.

Jiné řešení druhé úlohy využívá Ptolemaiovy věty, podle níž v *tětivovém* čtyřúhelníku $ABNC$ platí

$$|AB|.|CN| + |AC|.|BN| = |AN|.|BC|. \qquad (1)$$

Z rovnosti $|\sphericalangle\, BAN| = |\sphericalangle\, CAN|$ plyne $|BN| = |CN|$, ale také $|\sphericalangle\, CBN| = |\sphericalangle\, BAN|$. V rovnoramenném trojúhelníku BCN tedy platí

$$|BC| = 2.|BN|.\cos|\sphericalangle\, BAN|.$$

Dosazením do (1) dostáváme

$$|AB| + |AC| = 2\,|AN|\cos|\sphericalangle\, BAN|$$

a odtud pro obsah S_1 trojúhelníku ABC

$$S_1 = \frac{1}{2}(|AB| + |AC|).|AL| \sin |\sphericalangle BAN| =$$

$$= |AL|.|AN| \sin |\sphericalangle BAN|.\cos |\sphericalangle BAN|.$$

Obdobně pro obsah S_2 čtyřúhelníku $AKNM$ je

$$S_2 = \frac{1}{2}(|AK| + |AM|)\,|AN| \sin |\sphericalangle BAN| =$$

$$= |AL| \cos |\sphericalangle BAN|.|AN| \sin |\sphericalangle BAN|;$$

oba obsahy jsou si tedy rovny.

3. Je zřejmé, že úlohu stačí vyřešit pro případ nezáporných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, neboť při záporném x_j platí

$$\sum_{m=1}^{n} a_m x_m = \sum_{m=1}^{j-1} a_m x_m + (-a_j)\,|x_j| + \sum_{m=j+1}^{n} a_m x_m.$$

V dalším tedy předpokládáme $x_m \geqq 0$ pro všechna $m = 1, 2, \ldots, n$.

Pro každou n-tici *nezáporných* celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vyhovující podmínkám (i) a (ii) platí

$$0 \leqq \sum_{m=1}^{n} a_m x_m \leqq (k-1) \sum_{m=1}^{n} x_m.$$

Počet všech takovýchto n-tic je $k^n - 1$, proto nutně existují dvě z nich - označme je $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ a $a_1'', a_2'', \ldots, a_n''$ - tak, že

$$0 < \left| \sum_{m=1}^{n} a_m' x_m - \sum_{m=1}^{n} a_m'' x_m \right| \leqq \frac{k-1}{k^n - 1} \sum_{m=1}^{n} x_m.$$

Položíme-li pak $a_m^* = a_m' - a_m''$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, bude n-tice celých čísel $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*$ vyhovovat podmínkám (i), (ii) i (iii), neboť podle Cauchyovy nerovnosti je

$$\sum_{m=1}^{n} x_m \leqq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{m=1}^{n} x_m^2} = \sqrt{n}.$$

4. Předpokládejme, že taková funkce f existuje; z tohoto předpokladu odvodíme spor.

Pro funkci f zřejmě platí

$$(1) \qquad f(x + 1\,987) = f(f(f(x))) = f(x) + 1\,987,$$

odtud dále indukcí snadno dokážeme platnost rovnosti

$$(2) \qquad f(x + k.1\,987) = f(x) + k.1\,987$$

pro všechna $x \in \mathsf{N}_0$, $k \in \mathsf{N}_0$. Funkce f je tedy jednoznačně určena svými hodnotami na množině $\mathsf{M} = \{0, 1, 2, \ldots, 1\,986\}$.

Na množině M definujeme novou funkci g takto: pro $x \in \mathsf{M}$ vyjádříme $f(x)$ ve tvaru

$$(3) \qquad f(x) = y + p.1\,987,$$

kde $y \in \mathsf{M}$, $p \in \mathsf{N}_0$, a pak položíme $g(x) = y$.

Poněvadž podle (2) je

$$x + 1\,987 = f(f(x)) = f(y + p.1\,987) = f(y) + p.1\,987,$$

je nutně

$$f(y) = x + (1 - p).1\,987 \in \mathsf{N}_0, \tag{4}$$

tzn. že v (3) je vždy $0 \leqq p \leqq 1$. Ze (4) pak vyplývá $g(y) = x$; je tedy g involuce na M:

$$g(g(x)) = x$$

pro každé $x \in \mathsf{M}$.

Poněvadž počet prvků množiny M je lichý, totiž 1 987, musí existovat $x_0 \in \mathsf{M}$, pro které je $g(x_0) = x_0$. To však podle definice funkce g znamená, že je buď $f(x_0) = x_0$, anebo $f(x_0) = x_0 + 1\,987$. V prvém případě je pak

$$x_0 + 1\,987 = f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0,$$

ve druhém případě je

$$x_0 + 1\,987 = f(f(x_0)) = f(x_0 + 1\,987) = x_0 + 3\,974.$$

V obou případech jsme dospěli ke sporu - funkce f požadovaných vlastností tedy nemůže existovat.

5. V rovině zavedeme kartézskou soustavu souřadnic a pro dané přirozené číslo $n \geqq 3$ v ní vezmeme body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ o souřadnicích

$$B_j = [j, j^2],\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Potom je vzdálenost dvou bodů $B_j, B_k\ (1 \leqq j < k \leqq n)$ rovna

$$\sqrt{(k-j)^2 + (k^2 - j^2)^2} = (k-j)\sqrt{(k+j)^2 + 1}.$$

Poněvadž $k + j \geqq 3$, je $(k + j + 1)^2 > (k + j)^2 + 1 > (k + j)^2$, takže číslo $\sqrt{(k+j)^2 + 1}$ je nutně iracionální (odmocnina z přirozeného čísla je buď celé číslo, anebo iracionální).

Obsah S trojúhelníku s vrcholy $B_j, B_k, B_m\ (1 \leqq j < k < m \leqq n)$ lze vyjádřit známým vzorcem

$$S = \frac{1}{2}|\triangle|,$$

kde

$$\triangle = \begin{vmatrix} j & j^2 & 1 \\ k & k^2 & 1 \\ m & m^2 & 1 \end{vmatrix},$$

což je jistě racionální číslo.

Množina bodů $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tedy vyhovuje podmínkám úlohy.

Poznámka. Racionalita obsahu trojúhelníku s vrcholy v bodech s celočíselnými souřadnicemi vyplývá rovněž ze známé Pickovy formule.

6. Nechť n je libovolné avšak pevně dané přirozené číslo; pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ pak položme

$$f(k) = k^2 + k + n. \tag{1}$$

Označme m nejmenší nezáporné celé číslo takové, že $f(m)$ není prvočíslo. Poněvadž $f(0) = n$, je $m = 0$, není-li n samo prvočíslo. Poněvadž $f(n-1) = n^2$, což není nikdy prvočíslo, je zřejmě $m \leqq n - 1$. Máme nyní dokázat, že není možné, aby platilo

$$\sqrt{\frac{n}{3}} \leqq m \leqq n - 2. \tag{2}$$

Pro $n = 1$ je toto tvrzení zřejmé, neboť pak

$$n - 2 = -1 < 0 = m.$$

Při $n \geqq 2$ je $f(m)$ nutně číslo složené; označíme p nejmenší prvočinitel čísla $f(m)$, takže $f(m) = pq$, kde q je celé číslo, $q \geqq p$.

Z definice (1) vyplývá, že

$$f(k) \equiv f(k + rp) \pmod{p} \tag{3}$$

pro každé celé nezáporné r, k.

Dokážeme si nejprve, že nemůže být $p \leqq m$. Měli bychom totiž

$$0 \leqq m - p \leqq m - 2 < m$$

a podle definice čísla m by $f(m - p)$ bylo prvočíslo. Podle (3) však zároveň

$$f(m - p) \equiv f(m) \equiv 0 \pmod{p},$$

což je možné jen tehdy, jestliže $f(m - p) = p$. Avšak potom by bylo

$$m \geqq p = f(m - p) = (m - p)^2 + (m - p) + n \geqq n,$$

což není možné.

Předpokládejme tedy, že platí $m < p \leqq 2m$. Potom je $0 \leqq p - m - 1 \leqq m - 1$ a podle definice čísla m je $f(p - m - 1)$ prvočíslo. Zároveň je

$$pq = f(m) = f(p - m - 1) + (2m - p + 1)p,$$

takže prvočíslo $f(p - m - 1)$ je dělitelné prvočíslem p, což znamená, že $f(p - m - 1) = p$. Je tedy

$$p = (p - m - 1)^2 + p - m - 1 + n,$$

takže

$$m = (n - 1) + (p - m - 1)^2 \geqq n - 1$$

a (2) neplatí. Je dokonce $m = n - 1$ a $p = n$.

Zbývá ještě vyšetřit případ, kdy $2m < p$. Zde však máme

$$m^2 + m + n = f(m) = pq \geqq p^2 \geqq (2m - 1)^2 =$$

$$= 4m^2 + 4m + 1,$$

a tedy

$$n \geqq 3m^2 + 3m + 1 > 3m^2,$$

takže (2) opět neplatí.

Ukázali jsme tedy, že (2) neplatí v žádném případě, a to pro kterékoli přirozené n.

Poznámka. Z elementární číselné teorie je znám mnohočlen

$$x^2 + x + 41,$$

který pro $x = 0, 1, \ldots, 39$ nabývá vesměs prvočíselných hodnot. Podobných mnohočlenů existuje zřejmě více; naše úloha naznačuje, že při vhodně zvoleném p (např. $p = 17$, 41, 107, ...) nabývá mnohočlen $x^2 + x + p$ prvočíselné hodnoty až pro $p - 1$ po sobě jdoucích celých hodnot x ($x = 0, 1, \ldots, p - 2$).

Kategorie P

Ve 36. ročníku matematické olympiády se již podruhé soutěžilo také v kategorii P (programování). Tato kategorie je určena všem žákům středních škol bez rozdílu věku, úlohy zde zadávané jsou zaměřené na tvorbu a analýzu algoritmů. Oproti loňskému ročníku zájem o kategorii P značně vzrostl. Zatímco ve 35. ročníku MO se do soutěže zapojilo asi 250 studentů, o rok později jich řešilo úlohy domácího kola více než 400.

Soutěž je organizována tříkolově, soutěží se v domácím, krajském a celostátním kole. Řešení úloh domácího kola museli soutěžící odevzdat do 5. 2. 1987. Úspěšní řešitelé byli pozváni do krajského kola, které se konalo ve středu 8. 4. 1987. Padesát nejlepších účastníků krajského kola se sešlo ve dnech 14.—17. 5. 1987 v Praze na celostátním kole MO kategorie P, jehož pořadatelem byl KV MO Praha.

Po odborné stránce je kategorie P matematické olympiády zajišťována odbornými centry na vysokých školách - na MFF UK Praha, PřF UJEP Brno a MFF UK Bratislava. Pracovníci těchto center opravovali řešení úloh ve všech třech kolech soutěže, podíleli se na přípravě studentů na soutěž, na zabezpečení krajských kol i kola celostátního. Odborným garantem kategorie P 36. ročníku matematické

olympiády bylo centrum na katedře kybernetiky a informatiky MFF UK Praha, ze kterého také pocházejí zadání všech úloh.

Tabulka 7

Počty žáků soutěžících v kategorii P 36. ročníku MO

Kraj	Kolo					
	domácí		krajské		celostátní	
	S	U	S	U	S	U
Praha	56	42	42	24	8	7
Středočeský	25	10	9	3	3	1
Jihočeský	26	13	13	3	3	1
Západočeský	6	0	0	0	0	0
Severočeský	21	8	8	3	3	1
Východočeský	32	15	13	6	3	3
Jihomoravský	24	17	15	7	4	3
Severomoravský	35	28	20	14	6	2
Bratislava	53	31	30	16	12	6
Západoslovenský	32	14	14	2	2	2
Středoslovenský	43	23	23	3	1	1
Východoslovenský	61	34	34	9	5	2
ČSR	225	133	120	60	30	18
SSR	189	102	101	30	20	11
ČSSR	414	235	221	90	50	29

S — počet všech soutěžících
U — počet úspěšných řešitelů

VÝSLEDKY CELOSTÁTNÍHO KOLA MO KATEGORIE P

Vítězové

1. *Pavel Kozlovský*, 3., G Jindřichův Hradec
2. *Vladan Majerech*, 4., G Pardubice
3. *Branislav Stríženec*, 3., G J. Hronca, Bratislava
4. *Vladimír Veselý*, 4., G J. Hronca, Bratislava
5. *Peter Klein*, 4., G A. Markuša, Bratislava
6. *Pavol Kolník*, 4., G Nové Mesto nad Váhom

7.—8. *Rudolf Burcl*, 4., G Trnava
Rastislav Senderák, 4., G Prešov

9.—12. *Ilja Martišovitš*, 2., G J. Hronca, Bratislava
Marcel Polakovič, 4., G A. Markuša, Bratislava
Vladimír Solnický, 3., G Opava
Petr Steinmetz, 4., G Brno, Koněvova ul.

Další úspěšní řešitelé

13.—14. *Petr Brož*, 2., G W. Piecka, Praha
Robert Hetka, 4., G Benešov

15.—18. *Tibor Bartoš*, 3., G A. Markuša, Bratislava
Petr Čížek, 2., G W. Piecka, Praha
Lucie Kárná, 4., G W. Piecka, Praha
Petr Mandík, 4., G Děčín

19. *Radek Porazil*, 3., G Bílovec

20.—22. *Václav Bohdanecký*, 2., G W. Piecka, Praha
Arnošt Kobylka, 2., G W. Piecka, Praha
Jan Sochor, 4., G W. Piecka, Praha

23.—29. *Michal Dostál*, 4., G W. Piecka, Praha
Petr Fencl, 4., G Pardubice
Jiří Jaruška, 4., G Pardubice
Pavel Kafka, 4., G Třebíč
Richard Krajčoviech, 4., G Považská Bystrica
Rado Mróz, 3., G Spišská Nová Ves
Marek Velešík, 2., G Brno, Koněvova ul.

POŘADÍ ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ KRAJSKÉHO KOLA MO KATEGORIE P

V seznamu je uvedeno nejvýše prvních deset úspěšných řešitelů z každého kraje. Typ školy není uváděn, všichni jsou studenty gymnázia.

Praha

Michal Dostál, 4., W. Piecka, Praha 2, *Jan Sochor*, 4., W. Piecka, Praha 2, *Arnošt Kobylka*, 2., W. Piecka, Praha 2, *Filip Pejša*, 4., Voděradská, Praha 10, *Petr Čížek*, 2., W. Piecka Praha 2, *Petr Brož*, 2., W. Piecka, Praha 2, *Václav Bohdanecký*, 2., W. Piecka, Praha 2, *Lucie Kárná*, 4., W. Piecka, Praha 2, *Michal Kopecký*, 4., W. Piecka, Praha 2, *Jan Dvořák*, 3., Sladkovského nám., Praha 3.

Středočeský kraj

Petr Vyhňák, 3., Mladá Boleslav, *Robert Hetka*, 4., Benešov, *Vladimír Šolc*, 1., Beroun.

Jihočeský kraj

Pavel Kozlovský, 3., Jindřichův Hradec, *Martin Zítek*, 4., Milevsko, *Jakub Čermák*, 1., Jírovcova, České Budějovice.

Severočeský kraj

Dan Lukeš, 2., Partyzánská, Liberec, *Petr Mandík*, 4., Děčín, *Jiří Martinek*, 3., Ústí nad Labem.

Východočeský kraj

Jiří Jaruška, 4., Pardubice, *Vladan Majerech*, 4., Pardubice, *Petr Fencl*, 4., Pardubice, *Petr Kousal*, 3., Tylovo náb., Hradec Králové, *Petr Krákora*, 3., Trutnov, *Radko Martínek*, 3., Jičín.

Severomoravský kraj

Radek Porazil, 3., Bílovec, *David Jedelský*, 3., Ostrava-Hrabůvka, *Vladimír Solnický*, 3., Opava, *Jan Hřebíček*, 4., Valašské Meziříčí, *Michal Heřmanský*, 4., Valašské Meziříčí, *Tomáš Látal*, 3., Olomouc-Hejčín, *Radek Vingrálek*, 4., Olomouc, *David Šindler*, 2., Bílovec, *Marek Hübner*, 3., Karviná, *Antonín Dvořák*, 3., Přerov.

Jihomoravský kraj

Pavel Kafka, 4., Třebíč, *Petr Steinmetz*, 4., Koněvova, Brno' *Miloslav Hledík*, 3., Ivančice, *Marek Velešík*, 2., Koněvova' Brno, *Jan Dvořák*, 4., Moravské Budějovice, *Radek Švenda*' 2., Uherský Brod, *Zdeněk Vonský*, 2., Ivančice, *Robert Maar*' 4., Žďár nad Sázavou, *Miroslav Minárik*, 4., Jihlava, *Petr Kolenčík*, 1., Koněvova, Brno.

Bratislava

Vladimír Veselý, 4., J. Hronca, Novohradská, Bratislava,

Branislav Stríženec, 3., J. Hronca, Bratislava, *Ilja Martišovitš*, 2., J. Hronca, Bratislava, *Stanislav Párnický*, 4., A. Markuša, Červenej armády, Bratislava, *Tibor Bartoš*, 3., A. Markuša, Bratislava, *Miroslav Šrol*, 3., J. Hronca, Bratislava, *Anton Belan*, 4., A. Markuša, Bratislava, *Martin Bujdák*, 3., A. Markuša, Bratislava, *Marcel Polakovič*, 4., A. Markuša, Bratislava, *René Pázman*, 2., J. Hronca, Bratislava.

Západoslovenský kraj

Pavol Kolník, 4., Nové Mesto nad Váhom, *Rudolf Burcl*, 4., Trnava.

Středoslovenský kraj

Richard Krajčoviech, 4., Považská Bystrica, *Silvia Badáková*, 4., Prievidza, *Jozef Gomela*, 3., Prievidza.

Východoslovenský kraj

Mário Drosc, 4., Michalovce, *Rado Mróz*, 3., Spišská Nová Ves, *Roman Soták*, 4., Šmeralova, Košice, *Martin Lieskovský*, 4., Prešov, *Rastislav Senderák*, 4., Prešov, *Peter Fekete*, 4., Michalovce, *Zdeno Kálnássy*, 3., Prešov, *Robert Mráz*, 3., Poprad, *Ladislav Šteffko*, 4., Šrobárova, Košice.

P - I - 1

Konečnou posloupnost čísel nazveme symetrickou, jestliže se nezmění, když zapíšeme její prvky v obráceném pořadí. Nalezněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který pro libovolnou konečnou posloupnost čísel určí délku jejího nejdelšího souvislého úseku, který je symetrickou posloupností.

Př.: Pro posloupnost 3, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 1 je tato délka 5 (úsek 1, 2, 3, 2, 1).

Řešení. Počet čísel v zadané konečné posloupnosti označíme N. Rychlý algoritmus vykoná při prohledávání posloupnosti délky N řádově N^2 operací. Většina řešitelů nalezla některý z dalších správných algoritmů, ovšem se složitostí N^3.

Symetrická podposloupnost maximální délky může obsahovat buď lichý, nebo sudý počet čísel. Podle toho je jejím středem buď některý z prvků zadané posloupnosti, nebo pozice mezi sousedními prvky. Budeme postupně vyšetřovat všech $2N - 1$ míst (N prvků, $N - 1$ mezer mezi nimi), kde může ležet střed maximální symetrické podposloupnosti. Pro každé z těchto míst určíme délku maximálního symetrického úseku se středem v tomto místě. Toto určení je snadné: porovnáváme postupně od zvoleného středu směrem k oběma okrajům

posloupnosti dvojice čísel tak dlouho, dokud jsou porovnávaná čísla shodná nebo dokud nenarazíme na okraj posloupnosti. Pro každý ze zvolených středů se vykoná maximálně $N/2$ porovnání. Výsledkem algoritmu je maximum z délek, které jsme získali pro jednotlivé středy symetrické podposloupnosti.

Algoritmus zapíšeme v programovacím jazyce Pascal. Budeme předpokládat, že proměnná N obsahuje délku posloupnosti a že v poli A jsou jako prvky $A[1], \ldots, A[N]$ uloženy prvky posloupnosti. Dále předpokládáme deklaraci celočíselných proměnných I a MAX. Proměnná I je pomocná, výsledná délka bude uložena v proměnné MAX.

```
procedure TEST (J, K: integer);
var OKRAJ: Boolean;
    DELKA: integer;
begin
  OKRAJ := false;
  while (A[J] = A[K]) and not OKRAJ do
    begin
    {zde vždy platí: úsek A[J],..., A[K] je symetrický}
    J := J - 1; K := K + 1;
    if (J = 0) or (K = N + 1) then OKRAJ := true
    end; {zde platí: úsek A[J + 1],..., A[K - 1] je
    symetrický, ale již ho nelze prodloužit}
  DELKA := K - J - 1;
  if DELKA > MAX then MAX := DELKA
end;
begin
  if N = 0 then MAX := 0
  else if N = 1 then MAX := 1
```

```
  else
    begin
    MAX := 0;
    for I := 1 to N - 1 do
      begin TEST (I, I); {lichá délka}
            TEST (I, I + 1) {sudá délka}
      end
    end
end
```

Uvedený algoritmus je možné ještě dále vylepšovat, ale zrychlení výpočtu již nebude příliš významné a zápis algoritmu se stane složitějším. Je možné například vybírat středy podposloupností od středu celé posloupnosti souběžně směrem k oběma okrajům a výpočet ukončit již ve chvíli, kdy momentální hodnota proměnné *MAX* dosáhne dvojnásobku vzdálenosti právě uvažovaného středu podposloupnosti od okraje posloupnosti (neboť dále už není možné hodnotu proměnné *MAX* zlepšit).

Důkaz správnosti algoritmu vyplývá přímo z jeho popisu. Výpočet podle algoritmu je konečný, neboť algoritmus je tvořen pouze cykly s pevně omezeným počtem opakování (**for**-cyklus v hlavním programu se provede přesně $N-1$krát, **while**-cyklus v proceduře *TEST* se vykoná vzhledem k omezení délky posloupnosti hodnotou N maximálně $N/2$krát). Zadaná posloupnost jistě obsahuje nějakou maximální symetrickou podposloupnost. Má-li tato podposloupnost lichý počet členů a jejím středem je prvek $A[S]$, bude nalezena při S-tém průchodu **for**-cyklem (pro $I = S$) při vyvolání *TEST*(I, I). Má-li sudý počet členů a její střed leží mezi

prvky $A[S]$ a $A[S + 1]$, bude nalezena při S-tém průchodu **for**-cyklem při vyvolání procedury $TEST(I, I + 1)$. Do proměnné MAX se ukládá maximum z délek všech nalezených symetrických podposloupností, které již nelze prodloužit. Také nejdelší z nich bude jednou nalezena a v proměnné MAX proto zůstane na závěr algoritmu její délka.

P - I - 2

Sjednocení konečné množiny uzavřených intervalů na reálné přímce je množina, která je složena z konečného počtu disjunktních souvislých úseků, z nichž každý je opět uzavřený interval.

Nalezněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který pro libovolnou konečnou množinu uzavřených intervalů zjistí počet disjunktních souvislých úseků jejich sjednocení (tj. skutečný počet intervalů). Intervaly jsou zadány výčtem dvojic čísel, které v daném pořadí určují jejich dolní a horní mez.

Řešení. Označme posloupnost dolních mezí D a horních mezí H, obě mají délku N. K řešení úlohy lze užít několika odlišných algoritmů. Základem těch nejlepších je vhodné setřídění zadaných intervalů. K tomu je třeba provést řádově $N.\log_2 N$ operací (to je časová složitost nejlepších třídících algoritmů). Tímto výrazem je pak určena i efektivita celého algoritmu, neboť po setřídění stačí jednou sekvenčně projít všechny intervaly a při tomto průchodu provést příslušné výpočty.

Algoritmus řešení popíšeme slovně:

1. Pokud $N = 1$, polož $POCET = 1$ a jdi na 8.
2. Setřiď zadané intervaly vzestupně podle hodnoty dolní

meze. Má-li více intervalů stejnou dolní mez, na jejich pořadí nezáleží. Po setřídění tedy bude platit: $D[1] \leqq D[2] \leqq \ldots \leqq D[N]$. *Pozn.:* třídíme nejen dolní meze, ale celé intervaly, tzn. souběžně se změnami pořadí v posloupnosti D přemísťujeme i hodnoty horních mezí v posloupnosti H.

3. Polož $POCET = 1$, $HORMEZ = H[1]$, $I = 2$.
4. Jestliže $D[I] > HORMEZ$, zvětši $POCET$ o 1.
5. Jestliže $H[I] > HORMEZ$, polož $HORMEZ = H[I]$.
6. Zvětši I o 1.
7. Jestliže $I \leqq N$, jdi na 4.
8. Výsledný počet souvislých disjunktních intervalů je v proměnné *POCET*. Konec.

Algoritmus zvlášť řeší případ jediného intervalu na vstupu - - bod 1. Je-li na vstupu více intervalů, provede jejich setřídění podle hodnot dolních mezí - bod 2. Třídící algoritmus uvedeme na konci řešení. Potom postupně prochází všechny intervaly. Dokud intervaly patří do jednoho souvislého úseku, pouze aktualizuje horní mez jejich sjednocení (proměnná *HORMEZ*) - bod 5. Jakmile má některý interval prázdný průnik s intervaly zpracovávaného úseku, algoritmus zaregistruje ukončený souvislý úsek (proměnná *POCET*) a začne vytvářet další - bod 4.

Zbývá podat zdůvodnění správnosti algoritmu. Algoritmus jistě skončí výpočet po konečně mnoha krocích, neboť setřídění N intervalů je konečný proces a v cyklu (body algoritmu 4 až 7) roste při každém průchodu hodnota proměnné I od 2 do N, takže průchodů bude méně než N.

Je-li zadán jediný interval ($N = 1$), bude mít proměnná *POCET* správnou hodnotu 1 z bodu 1. Tvoří-li všechny za-

dané intervaly jediný souvislý úsek, bude mít proměnná *POCET* hodnotu 1 z bodu 3. Hodnota proměnné *POCET* se zvětšuje o 1 pouze v bodu 4, a to přesně tehdy, když zpracovávaný *I*-tý interval má dolní mez větší, než je maximum horních mezí všech předchozích intervalů (uložené v proměnné *HORMEZ*). Vzhledem k vzestupnému setřídění dolních mezí intervalů platí nerovnosti

$$HORMEZ < D[I] \leqq D[I + 1] \leqq \ldots \leqq D[N]$$

čili také všechny následující intervaly mají dolní mez větší, než je hodnota *HORMEZ*. Proto *I*-tým intervalem skutečně začíná další souvislý úsek.

Na závěr se vraťme k problému třídění. Máme za úkol uspořádat N čísel vzestupně podle velikosti. Třídících algoritmů existuje celá řada. Nejrychlejší z nich vyžadují provedení řádově $N.\log_2 N$ porovnání. Ukážeme si jeden z takových třídících algoritmů. Chceme setřídit čísla $D[1], D[2], \ldots, D[N]$ uložená v poli D. Rozdělíme pole D do dvou úseků $D[1], \ldots, D[(N + 1)$ **div** $2]$ a $D[(N + 1)$ **div** $2 + 1], \ldots, D[N]$. Oba úseky mají délku stejnou nebo lišící se jen o 1. Každý z těchto úseků zvlášť setřídíme rekurzívním vyvoláním téhož třídícího algoritmu. Ze setříděných úseků pak již snadno vytvoříme jedinou uspořádanou posloupnost všech čísel. Do výsledné posloupnosti vždy zařadíme to z prvních čísel v úsecích, které je menší. Toto číslo zároveň vynecháme z jeho úseku. Postup opakujeme, dokud do posloupnosti není zařazeno všech N čísel.

Popsaný algoritmus zapíšeme v Pascalu ve tvaru rekurzívní procedury *SORT*. Pro utřídění celého pole D bude tato

procedura volána s parametry *SORT*(1, *N*). Dále předpokládáme, že je deklarováno pomocné globální pole *A* stejného typu jako je pole *D*.

```
procedure SORT (J, K: integer);
var P, I, I1, I2: integer;
begin
  if J < K then
    begin
    P := (J + K) div 2;
    SORT (J, P);
    SORT (P + 1, K);
    I := J;
    I1 := J; I2 := P + 1;
      while I <= K do
        if D[I1] < D[I2] then
          begin
          A[I] := D[I1];
          I := I + 1; I1 := I1 + 1;
          if I1 > P then
            while I <= K do
              begin
              A[I] := D[I2];
              I := I + 1; I2 := I2 + 1;
              end
          end
        else
          begin
          A[I] := D[I2];
          I := I + 1; I2 := I2 + 1;
```

```
        if I2 > K then
          while I <= K do
            begin
            A[I] := D[I1];
            I := I + 1; I1 := I1 + 1
            end
        end;
    for I := J to K do D[I] := A[I]
    end
end;
```

Procedura *SORT* je rekurzívně volána vždy k setřídění úseku přibližně poloviční délky. Začínáme-li od pole délky N, znamená to, že rekurze se bude provádět do hloubky asi $\log_2 N$. Na každé úrovni hloubky rekurze vyžaduje spojení setříděných úseků čísel do úseků dvojnásobné délky nejvýše N porovnání čísel. Celkem je tedy k setřídění N čísel uvedeným algoritmem zapotřebí řádově $N.\log_2 N$ porovnání.

P - I - 3

Je dán Euklidův algoritmus pro výpočet největšího společného dělitele celých čísel A a B, kde $A > B > 0$.

PASCAL	BASIC
while B<>0 **do**	10 IF B = 0 THEN 60
begin C := A **mod** B;	20 LET C = A MOD B
A := B;	30 LET A = B
B := C	40 LET B = C
end;	50 GOTO 10
NSD := A	60 LET NSD = A

Operace A MOD B znamená zbytek po celočíselném dělení čísla A číslem B. Dokažte, že počet opakování cyklu v algoritmu je vždy menší než $2.\log_2 A$.

Řešení. Mezi správnými řešeními této úlohy se objevily v podstatě dva základní postupy. My si zde ukážeme názornější a jednodušší z nich, který je založen na úvahách o změnách hodnoty proměnné A v průběhu výpočtu. Druhý postup řešení vychází ze srovnání posloupnosti hodnot proměnné A během výpočtu s Fibonacciho posloupností a dále Fibonacciho posloupnosti s posloupností $(2^{n/2})$.

Nejprve dokážeme pomocné tvrzení: Jestliže A, B jsou libovolná přirozená čísla, $A > B > 0$, potom $A \bmod B < A/2$. Důkaz provedeme rozborem případů:

a) $B > A/2$ ... pak $A \bmod B = A - B < A - A/2 = A/2$,

b) $B = A/2$ ... pak $A \bmod B = 0$ a z předpokladu $A > 0$ plyne výsledek $A \bmod B < A/2$,

c) $B < A/2$ ... vždy platí $A \bmod B < B$, tedy pro $B < A/2$ přímo vyplývá výsledek.

Nyní již můžeme přikročit k důkazu tvrzení ze zadání úlohy. Nebudeme zde zabíhat do formálních podrobností a technických detailů, zaměříme se jen na hlavní myšlenky důkazu. Na základě našeho pomocného tvrzení je možné snadno ukázat, že vždy po dvou průchodech cyklem v Euklidově algoritmu se hodnota proměnné A zmenší na méně než polovinu své původní hodnoty. Proměnná A totiž po dvou průchodech cyklem nabude hodnoty $A \bmod B$, která je podle pomocného tvrzení vždy menší než $A/2$. Kdyby se hodnota proměnné A zmenšovala po dvou průchodech cyklem vždy jen na polovinu až do hodnoty 1 (tj. na začátku by bylo A tvaru $A = 2^k$

a pak vždy po dvou průchodech 2^{k-1}, 2^{k-2}, ..., 1), bylo by těchto dvojic průchodů cyklem třeba vykonat $k = \log_2 A$. Celkem by se tedy vykonalo $2.\log_2 A$ průchodů cyklem. Ve skutečnosti se hodnota proměnné A zmenšuje rychleji vzhledem k ostré nerovnosti A mod $B < A/2$. Navíc výpočet nemusí končit až při $A = 1$, může i dříve. Proto se při celém výpočtu provede celkem méně než $2.\log_2 A$ průchodů cyklem.

P - I - 4

Zapište ve zjednodušeném jazyce LISP definice následujících funkcí:

a) MEMBER [X;S]
   S musí být seznam
   hodnotou funkce je T, jestliže výraz X je prvkem seznamu S, jinak je hodnotou F

b) DELETE [X;S]
   S musí být seznam
   hodnotou funkce je seznam, který vznikne vypuštěním prvku X ze seznamu S (vypouští se pouze první výskyt); není-li X prvkem seznamu S, je hodnotou funkce původní seznam S.

Při řešení můžete nejprve definovat jednodušší pomocné funkce a s jejich využitím pak funkce hlavní.

Poznámka. V každém kole obdrželi soutěžící shodný krátký studijní text o zjednodušené verzi programovacího jazyka LISP. Tento text nyní uvádíme v plném znění. U úloh P-II-4 a P-III-4 zde v ročence studijní text již neopakujeme.

Zjednodušený LISP

Definujeme zjednodušenou verzi programovacího jazyka LISP. Data v tomto jazyce mají tvar tzv. symbolických výrazů. Nejjednoduššími výrazy jsou atomy, které jsou dvou typů: číselné a nečíselné. Zápis číselných atomů je stejný jako zápis celých čísel, např. −125, +3, 10. Nečíselné atomy jsou shodné s identifikátory.

Složitější symbolické výrazy nazýváme seznamy. Seznam může být prázdný nebo neprázdný. Neprázdný seznam je tvořen jedním nebo více prvky, uzavřenými v okrouhlých závorkách. Přitom záleží na pořadí prvků a stejný prvek se může v seznamu vyskytovat několikrát. Každý prvek seznamu je sám výrazem, buď je to atom, nebo opět seznam. Prázdný seznam neobsahuje žádný prvek a zapisuje se znaky ( ).

Příklady seznamů:

( )	prázdný seznam
(X)	seznam obsahující jediný prvek - atom X
(X Y Z)	tříprvkový seznam tvořený atomy X, Y a Z
((X) (Y Z))	dvouprvkový seznam tvořený dvěma prvky, z nichž první je jednoprvkový seznam obsahující atom X, a druhý je dvouprvkový seznam tvořený atomy Y a Z

Pro zpracovávání symbolických výrazů je v jazyce LISP zavedeno několik elementárních funkcí:

CAR[S]	S musí být neprázdný seznam, hodnotou funkce je první prvek seznamu S
CDR[S]	S musí být neprázdný seznam, hodnotou funk-

	ce je seznam, který vznikne z S vynecháním prvního prvku
CONS[R;S]	S musí být seznam (neprázdný nebo i prázdný); hodnotou CONS[R;S] je nově vytvořený seznam, jehož prvním prvkem je výraz R a všechny další prvky vzniknou překopírováním všech prvků seznamu S
EQ[R;S]	R, S musí být atomy; jsou-li atomy R a S identické, je hodnotou funkce atom T (true), jinak je hodnotou atom F (false)
ATOM[S]	hodnotou je T, je-li S atom, jinak je hodnotou F
NULL[S]	argumentem funkce musí být seznam; hodnotou funkce je T, když seznam je prázdný, jinak je hodnotou F

Příklady:

CAR[(A B C)] = A
CDR[(A B C)] = (B C)
CONS[A;(B C)] = (A B C)
CONS[(A B); (C D)] = ((A B) C D)
EQ[1;2] = F
EQ[X;0] = T, jestliže X = 0, F jinak
ATOM[(A)] = F
CONS[A;( )] = (A)
CAR[(A)] = A
CDR[(A)] = ( )

Z elementárních funkcí lze složit užitím podmíněného výrazu a definice funkce složitější funkce. Podmíněný výraz zapisujeme ve tvaru

$$[P1 \rightarrow E1;\ P2 \rightarrow E2;\ \ldots;\ Pn \rightarrow En],$$

kde P1, P2, ..., Pn jsou symbolické výrazy, které mají význam podmínek a které smějí nabývat pouze hodnot T a F.

Tyto podmínky jsou vyhodnocovány postupně zleva doprava tak dlouho, dokud se nenarazí na první podmínku, která má hodnotu T. Nechť je to Pk. Pak hodnotou podmíněného výrazu je hodnota Ek. To může být atom, seznam, podmíněný výraz nebo volání funkce. Aby měl podmíněný výraz smysl, musí aspoň jeden z výrazů Pk nabývat hodnoty T. K zajištění tohoto požadavku bývá zvykem na místě poslední podmínky Pn psát přímo atom T.

Novou funkci zadefinujeme tak, že napíšeme:

NÁZEV [SEZNAM PARAMETRŮ] = VÝRAZ

Parametry v seznamu oddělujeme středníky. Výraz v definici musí být podmíněný výraz nebo volání funkce. V definicích funkcí lze libovolně užívat rekurzívního volání funkcí. Je to obrat velmi častý a u řady funkcí nezbytný. Znamená to, že v definici funkce můžeme použít libovolné elementární i složitější definované funkce včetně té, kterou právě definujeme, jak to ukazuje i následující příklad.

Př.: Chceme definovat funkci EQUAL[X;Y] takovou, že její hodnotou je T, jsou-li X a Y stejné symbolické výrazy, jinak je hodnotou F.

Definice:

$$\begin{aligned} \text{EQUAL}[X;Y] = [\text{ATOM}[X] \rightarrow [\text{ATOM}[Y] \rightarrow \text{EQ}[X;Y];\\ T \rightarrow F];\\ \text{ATOM}[Y] \rightarrow F; \end{aligned}$$

NULL[X] → NULL[Y];
NULL[Y] → F;
EQUAL[CAR[X]; CAR[Y]] →
    EQUAL[CDR[X]; CDR[Y]];
T → F]

Význam jednotlivých částí definice funkce je následující:

1. Je-li X atom, pak rozlišujeme dva případy. Je-li také Y atom, pak výsledek závisí na tom, zda jsou si rovny, jinak (není-li Y atom) je hodnota F.
2. Jestliže nenastal případ 1 (není-li X atom) a přitom Y je atom, je výsledek F.
3. Víme již, že X a Y jsou seznamy. Je-li první seznam prázdný, tak výsledek závisí na tom, je-li prázdný i druhý seznam.
4. Jestliže nenastal případ 3 a druhý seznam je prázdný, pak je výsledkem F (první seznam byl neprázdný).
5. Víme již, že X a Y jsou neprázdné seznamy. Porovnáme jejich první prvky a jestliže se rovnají, je nutno porovnat i zbytky seznamů. (V obou případech využíváme rekurzívního volání právě definované funkce. Jejími argumenty jsou však kratší seznamy.)
6. Poslední případ může nastat jedině tehdy, když se první členy seznamů X a Y nerovnají, takže výsledkem je F.

Řešení soutěžní úlohy P-I-4. V řešení úlohy budeme využívat pomocnou funkci EQUAL [X;Y]. Její hodnotou je atom T, jsou-li X a Y stejné symbolické výrazy, jinak je hodnotou F. Popis této funkce je uveden jako příklad ve studijním textu, proto ho zde neopakujeme.

a) Definujeme funkci MEMBER[X;S]; předpokládáme, že S je seznam:

```
MEMBER[X;S] = [NULL[S] → F;
               EQUAL[X;CAR[S]] → T;
               T → MEMBER[X;CDR[S]]]
```

1. Je-li S prázdný seznam, neobsahuje žádný prvek, tedy ani X. Hodnotou funkce MEMBER je proto F.
2. Pokud se výraz X rovná prvnímu prvku seznamu S, pak X je v S obsažen a hodnotou funkce je T.
3. V opačném případě budeme zkoumat, jestli se X nachází ve zbytku S po vynechání prvního prvku. Funkce MEMBER je rekurzívně volána na kratší seznam.

b) Definujeme funkci DELETE[X;S], předpokládáme, že S je seznam:

```
DELETE[X;S] = [NULL[S] → S;
               EQUAL[X;CAR[S]] → CDR[S];
               T → CONS[CAR[S];
                 DELETE[X;CDR[S]]]]
```

1. Je-li S prázdný seznam, jistě X neobsahuje a hodnotou funkce je opět prázdný seznam.
2. Jestliže se výraz X rovná prvnímu prvku seznamu S, vypustíme ho. Hodnotou funkce DELETE pak bude zbytek seznamu S bez prvního prvku.
3. V opačném případě bude hodnotou funkce seznam, který vznikne spojením prvního prvku původního seznamu S a zbytku seznamu S s vypuštěným prvním výskytem výrazu X. Vypuštění prvního výskytu X ze zbytku S dosáhneme rekurzívním voláním funkce DELETE na zkrácený seznam CDR[S].

Jestliže výraz X nebude v seznamu S vůbec obsažen, bude

hodnotou funkce seznam totožný s původním seznamem S. (Nikdy se neuplatní příkaz na 2. řádku v definici funkce.)

Existuje i celá řada zcela odlišných správných řešení úlohy. Většinou jsou ale podstatně složitější na zápis i z hlediska rychlosti výpočtu, často jsou také složitější na pochopení. Nemůžeme je zde všechny rozepisovat, ale uvedeme ještě alespoň základní myšlenku, jak je také možné zapsat funkci DELETE. Můžeme využít tří pomocných funkcí následujících vlastností. První pomocná funkce na základě parametrů S a X vytvoří seznam, který vznikne jako část seznamu S od prvního prvku až do prvního výskytu výrazu X (již bez výrazu X) nebo až do konce, pokud se X v S nevyskytuje. Druhá pomocná funkce naopak z S vypustí tento počáteční úsek až do prvního výskytu X a vypustí ještě i samotný prvek X (pokud se v S vyskytuje). Jestliže se výraz X v seznamu S nevyskytuje, bude výsledkem této pomocné funkce prázdný seznam. Konečně třetí pomocná funkce provádí spojení dvou seznamů za sebe. Příklad takové funkce najdeme v řešení úlohy P-III-4. V definici funkce DELETE je pak volána tato třetí pomocná funkce tak, že za její parametry jsou dosazeny seznamy vzniklé výpočtem prvních dvou pomocných funkcí (s hodnotami parametrů X a S).

P - II - 1

Nalezněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který pro libovolnou konečnou posloupnost čísel nalezne maximální K tak, že existuje nějaká posloupnost délky K, která se v zadané posloupnosti vyskytuje alespoň na dvou různých místech jako souvislý úsek. Tyto úseky se mohou částečně překrývat.

Př.: Pro posloupnost 6, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 1, 7 je $K = 4$. (Dvakrát se opakuje posloupnost 2, 3, 2, 3.)

Řešení. Úlohu je možné řešit více různými algoritmy. Jednoduchý algoritmus (s časovou složitostí N^3) jistě napadne každého. Stačí brát postupně všechny dvojice čísel v posloupnosti a pro každou takovou dvojici zjišťovat, jak dlouhé shodné úseky těmito zvolenými čísly začínají. Ze všech takto nalezených délek se vezme maximum - a to je hledané číslo K.

Předvedeme zde jiný algoritmus, jehož zápis a popis je o trochu složitější. Z hlediska efektivity je to ale lepší algoritmus, má časovou složitost úměrnou N^2. Základní myšlenka algoritmu je následující. Předpokládejme, že zadanou posloupnost čísel máme uloženou v poli $A[1..N]$. Budeme

postupně měnit vzdálenost (tj. rozdíl indexů v poli A) mezi porovnávanými prvky, a to v cyklu od 1 do $N - 1$. Pro každou takovou pevnou vzdálenost projdeme celou posloupnost pomocí dvou souběžně zvětšovaných indexů. Při tomto průchodu stále počítáme délky souvislých shodných úseků. Maximum z takto získaných délek se ukládá do proměnné K a je výsledkem úlohy.

Algoritmus zapíšeme v programovacím jazyce Pascal. U obou příkazů while-cyklu jsou v komentářích uvedeny podmínky, kterými je možné výpočet ještě mírně zrychlit. Tyto podmínky využívají již získanou hodnotu K.

```
begin
K := 0; VZDAL := 1;
while VZDAL < N do {zde je možné drobné vylepšení:
                    VZDAL < N - K}
  begin
  I := 1; POC := 0;
  while I <= N - VZDAL do {zde je možné drobné
                           vylepšení: I <= N -
                           VZDAL - K + POC}
    begin
    if A[I] = A[I + VZDAL] then
      begin
      POC := POC + 1; {zde vždy platí: úseky délky
                       POC začínající prvky A[I]
                       a A[I + VZDAL] jsou
                       shodné}
      if POC > K then K := POC
      end
```

```
    else POC := 0;
    I := I + 1
    end;
  VZDAL := VZDAL + 1
  end
end
```

Popsaný algoritmus jistě skončí výpočet po konečně mnoha krocích. V těle vnitřního cyklu je zvyšována řídicí proměnná *I* a bez ohledu na průběh výpočtu se vzhledem k podmínce v příkazu while bude tento cyklus opakovat nejvýše *N*-krát. Obdobně ve vnějším cyklu se zvyšuje hodnota proměnné *VZDAL*, tělo vnějšího cyklu se bude provádět méně než *N*-krát. Počet průchodů jednotlivými příkazy programu je tedy předem omezen.

Hodnota proměnné *K* je měněna vždy v okamžiku, když algoritmus najde dvojí výskyt souvislého úseku délky větší než *K*. Na závěr výpočtu tedy v *K* bude skutečně délka nejdelšího souvislého úseku, který byl nalezen s dvojím výskytem v dané posloupnosti. Zbývá ukázat, že algoritmus při svém výpočtu skutečně najde dvojí výskyt podposloupnosti maximální délky, jaká se v dané posloupnosti nachází. To ale je patrné přímo z popisu algoritmu. Oba tyto výskyty musí být vůči sobě posunuty o jistý počet prvků a proměnná *VZDAL* této hodnoty při výpočtu jednou nabude (nabývá všech hodnot od 1 do $N - 1$). Pro tuto hodnotu *VZDAL* se pak ve vnitřním cyklu shodné úseky maximální délky jistě naleznou (prochází se v něm celá posloupnost).

P - II - 2

Nalezněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který pro libovolnou konečnou množinu uzavřených intervalů na reálné přímce nalezne číslo, které patří do maximálního počtu zadaných intervalů, a určí tento počet. Intervaly jsou zadány výčtem svých dolních a horních mezí.

Řešení. Stejně jako u ostatních úloh na návrh algoritmu existuje celá řada různých řešení. Nejefektivnější z nich jsou založeny, podobně jako v úloze P - I - 2, na vhodném setřídění vstupních dat a mají proto časovou složitost úměrnou $N.\log_2 N$ (= složitost nejlepších třídicích algoritmů). Je možné navrhnout jednoduché algoritmy bez třídění, ovšem s časovou složitostí přinejlepším úměrnou N^2. Stačí například brát postupně horní (nebo dolní) meze všech intervalů, každé z těchto N čísel testovat do kolika ze zadaných intervalů patří, a z takto získaných hodnot vzít maximum. My si zde ukážeme rychlejší algoritmus.

Algoritmus řešení této úlohy zapíšeme slovně:

1. Setřiď vzestupně všech $2N$ čísel ze vstupu, dolní i horní meze intervalů dohromady (kde N je počet zadaných intervalů). Přitom si u každého čísla pamatuj, zda jde o horní nebo o dolní mez nějakého intervalu. Není třeba pamatovat si, která horní mez patří ke které dolní mezi intervalu. Opakuje-li se nějaká hodnota mezi zadanými $2N$ čísly vícekrát, budou v setříděné posloupnosti dolní meze umístěny před horními.
2. Setříděnou posloupnost $2N$ čísel postupně procházej od nejmenších k největším číslům. Přitom v proměnné *POCET* eviduj počet právě otevřených intervalů. Maxi-

mální dosaženou hodnotu proměnné *POCET* udržuj v proměnné *MAX*. Vždy současně se zvětšením hodnoty proměnné *MAX* aktualizuj hodnotu proměnné *CISLO*, ve které se udržuje jedno z čísel patřících do maximálního počtu intervalů.

3. Po ukončení výpočtu jsou požadované výsledné hodnoty v proměnných *CISLO* a *MAX*.

Bod 1 představuje některý ze standardních třídicích algoritmů, bod 3 je triviální. Rozepíšeme proto podrobněji již jen bod 2. Budeme dále předpokládat, že hodnoty mezí jsou po setřídění uloženy v poli $M[1..2N]$.

2.1. Polož $POCET = 0$, $MAX = 0$, $I = 1$.
2.2. Jestliže $M[I]$ je dolní mez, polož $POCET = POCET + 1$ a jdi na 2.6.
2.3. Jestliže $POCET \leqq MAX$, jdi na 2.5.
2.4. Polož $MAX = POCET$, $CISLO = M[I]$
2.5. Polož $POCET = POCET - 1$.
2.6. Polož $I = I + 1$.
2.7. Jestliže $I \leqq 2N$, jdi na 2.2.

Algoritmus skončí výpočet po konečně mnoha krocích, neboť intervalů je konečně mnoho, třídicí algoritmus je konečný a dále se už jen sekvenčně procházejí všechny meze všech intervalů. Průchod setříděnou posloupností $2N$ čísel v bodu 2 popsaného algoritmu vlastně představuje projití celé číselné osy s vyznačenými intervaly. V proměnné *POCET* je přitom stále uložen údaj, do kolika ze zadaných intervalů patří ten bod číselné osy, ve kterém se právě nacházíme. Ke změnám tohoto údaje může dojít jedině v počátečních a koncových bodech intervalů, stačí proto průchod provádět pouze

přes tyto body. Proměnná *MAX* nabývá největší hodnoty, jakou proměnná *POCET* při průchodu získala (*MAX* se testuje a případně zvyšuje pokaždé, kdy se má snížit hodnota proměnné *POCET*). Zároveň se zvýšením hodnoty proměnné *MAX* se dosazuje nová hodnota do proměnné *CISLO*, takže po ukončení výpočtu obsahuje dvojice proměnných *CISLO* a *MAX* správné výsledky podle zadání úlohy.

Je třeba zmínit se ještě o situaci, že dolní mez nějakého intervalu I_1 je rovna horní mezi jiného intervalu I_2. Podle zadání se jedná o uzavřené intervaly, takže I_1 a I_2 mají společný bod a při průchodu přes tento jejich společný bod je třeba zvýšit hodnotu proměnné *POCET* (a hned ji zase snížit, ale mezitím to může ovlivnit hodnotu proměnných *MAX* a *CISLO*). Toto je zajištěno uspořádáním zadaných $2N$ čísel podle bodu 1 algoritmu - dolní meze jsou umístěny před horními mezemi téže hodnoty.

P - II - 3

Je dán následující úsek programu se vstupními celočíselnými proměnnými *X* a *Y*. Zjistěte, jaká hodnota bude po provedení algoritmu v proměnné *Z*, a svoje tvrzení dokažte.

PASCAL:
```
Z := 1;
while Y > 0 do
  begin
    if Y mod 2 = 1 then Z := Z*X;
    Y := Y div 2;
    X := X*X
  end
```

```
BASIC:  10 LET Z = 1
        20 IF Y < = 0 THEN 70
        30 IF Y MOD 2 = 1 THEN LET Z = Z * X
        40 LET Y = Y DIV 2
        50 LET X = X * X
        60 GO TO 20
        70 REM KONEC
```

Operace A DIV B znamená celočíselný podíl čísel A a B, operace A MOD B znamená zbytek po celočíselném dělení. Tedy platí A = (A DIV B)*B + (A MOD B)

Řešení. Pokud bude mít proměnná Y hodnotu zápornou nebo nulovou, z celého popsaného algoritmu se provede pouze dosazovací příkaz $Z := 1$ a po ukončení algoritmu bude proto $Z = 1$. Ukážeme, že pro $Y > 0$ nabude proměnná Z hodnoty X^Y.

Počáteční hodnotu proměnné Y (označme ji y) si můžeme představit zapsanou ve dvojkové soustavě:

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i . 2^i, \quad a_i = 0 \text{ nebo } 1 \text{ pro } i = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$a_n = 1.$$

K násobení $Z := Z*X$ dochází při j-tém průchodu cyklem právě tehdy, když ve dvojkovém zápisu čísla y je v řádu $j - 1$ cifra 1 (tj. když $a_{j-1} = 1$). Test Y mod 2 totiž zjišťuje hodnotu poslední cifry dvojkového zápisu momentální hodnoty proměnné Y a příkaz $Y := Y$ div 2 mění hodnotu proměnné Y tak, že odebírá z jejího dvojkového zápisu poslední cifru.

Při každém průchodu cyklem se provede příkaz $X := X^*X$. Označíme-li počáteční hodnotu proměnné X jako x, bude v proměnné X na začátku j-tého průchodu cyklem hodnota $x^{2^{j-1}}$. Dohromady to znamená, že proměnná Z s počáteční hodnotou 1 je přinásobena číslem x^{2^j} právě tehdy, když $a_j = 1$ pro $j = 0, \ldots, n$. Pro hodnotu proměnné Z po ukončení výpočtu proto platí:

$$Z = \prod_{j=0}^{n} a_j . x^{2^j}$$

Tento výraz můžeme dále upravit (připomínáme, že koeficienty a_j, $j = 0, \ldots, n$ jsou cifry dvojkové soustavy, tedy čísla 0 nebo 1):

$$Z = x^{\sum_{j=0}^{n} a_j 2^j}$$

V exponentu jsme získali výraz $\sum_{j=0}^{n} a_j . 2^j$, který je přímo roven vyjádření počáteční hodnoty y proměnné Y. Platí tedy skutečně, že po ukončení výpočtu uvedeného algoritmu je

$$Z = x^y.$$

P - II - 4

Definici zjednodušeného jazyka LISP nyní ještě doplníme. Další elementární funkce slouží k provádění aritmetických výpočtů s celými čísly:

ADD[A;B] — součet A + B
SUB[A;B] — rozdíl A − B
MUL[A;B] — součin A.B
DIV[A;B] — podíl A div B
MOD[A;B] — zbytek po dělení, tj. A mod B
GT[A;B] — porovnání $A > B$
GE[A;B] — porovnání $A \geqq B$

Argumenty A, B všech těchto funkcí musí být číselné atomy. Funkční hodnotou je číselný atom, jehož hodnota odpovídá výsledku příslušné aritmetické operace, v případě funkcí GT, GE pak atom T nebo F podle platnosti porovnání.

Zadání úlohy

Zapište ve zjednodušeném jazyce LISP definice následujících funkcí:

a) AVER[S]

S je neprázdný seznam tvořený číselnými atomy, hodnotou funkce je jejich aritmetický průměr.

b) MAX[S]

S je neprázdný seznam tvořený číselnými atomy, hodnotou funkce je hodnota největšího z nich.

c) PREVOD[X;S]

X, S jsou číselné atomy s hodnotou $X \geqq 0$, $S > 1$; hodnotou funkce je seznam cifer, který reprezentuje zápis čísla X v číselné soustavě se základem S. Prvním prvkem seznamu je cifra nejvyššího řádu.

Př.: Pro X = 11, S = 2 je hodnotou funkce seznam (1 0 1 1).

Řešení. a) Funkci AVER[S] pro výpočet aritmetického průměru číselných atomů v seznamu S nejsnáze zapíšeme pomocí dvou pomocných funkcí:

DELKA[S] — kde S je jako v zadání úlohy, hodnotou funkce je počet prvků v seznamu S:

$$\text{DELKA}[S] = [\text{NULL}[S] \rightarrow 0;\ T \rightarrow \text{ADD}[1; \text{DELKA}[\text{CDR}[S]]]]$$

SOUCET[S] — kde S je jako v zadání úlohy, hodnotou funkce je číselný atom, jehož hodnota odpovídá součtu hodnot prvků v seznamu S:

$$\text{SOUCET}[S] = [\text{NULL}[S] \rightarrow 0;\ T \rightarrow \text{ADD}[\text{CAR}[S]; \text{SOUCET}[\text{CDR}[S]]]]$$

Potom stačí napsat

$$\text{AVER}[S] = \text{DIV}[\text{SUM}[S]; \text{DELKA}[S]].$$

Upozorňujeme, že do zjednodušeného jazyka LISP jsme zavedli práci pouze s celými čísly, takže funkce AVER[S] počítá vlastně celou část z aritmetického průměru.

b) $$\text{MAX}[S] = [\text{NULL}[\text{CDR}[S]] \rightarrow \text{CAR}[S];\ \text{GT}[\text{CAR}[S]; \text{CAR}[\text{CDR}[S]]] \rightarrow \rightarrow \text{MAX}[\text{CONS}[\text{CAR}[S]; \text{CDR}[\text{CDR}[S]]]];\ T \rightarrow \text{MAX}[\text{CDR}[S]]]$$

Maximální hodnotou jednoprvkového seznamu je hodnota jeho jediného prvku. Jinak se vynechá menší z prvních dvou prvků seznamu. Tím vznikne seznam o jeden prvek kratší

(se stejným maximem hodnot prvků, jaké měl původní seznam), na který se rekurzívně zavolá funkce MAX.

c) Nejprve definujeme pomocnou funkci APPEND[S;X], kde S je seznam. Výsledkem této funkce je seznam, který vznikne přidáním výrazu X do seznamu S na konec (tj. zařazením za poslední prvek seznamu S):

```
APPEND[S;X] = [NULL[S] → CONS[X;( )];
               T → CONS[CAR[S];
                 APPEND[CDR[S]; X]]]
```

Nyní již můžeme přistoupit k řešení zadané úlohy. Poslední číslicí zápisu čísla X v soustavě se základem S získáme jako zbytek po celočíselném dělení čísla X číslem S, tedy jako X mod S. Předcházející číslice jsou rovny cifrám zápisu čísla X div S v soustavě se základem S. Postup převádění čísla X do soustavy se základem S proto vypadá následovně: Postupně číslo X celočíselně dělíme hodnotou S a zaznamenáváme zbytky po těchto celočíselných děleních. Tyto zbytky jsou odzadu jednotlivými ciframi hledaného zápisu. Uvedený postup snadno zapíšeme v programovacím jazyce LISP:

```
PREVOD[X;S] = [GT[S;X] → CONS[X;( )];
               T → APPEND[PREVOD[DIV[X;S];S];
                 MOD[X;S]]]
```

Je-li $X < S$, je číslo X v číselné soustavě se základem S reprezentováno číslicí X. Jinak uplatňujeme výše uvedený postup výpočtu. Ke skládání jednotlivých číslic do výsledného seznamu se používá pomocná funkce APPEND. Zde není možné použít standardní funkci CONS, neboť cifry je třeba do seznamu připojovat na konec.

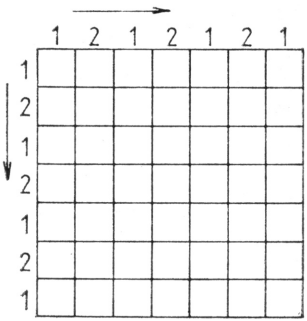
P - III - 1

Nalezněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který pro libovolnou konečnou posloupnost čísel a čísla K, L určí, zda daná posloupnost obsahuje souvislý úsek délky K, který se v ní vyskytuje alespoň L-krát. Jednotlivé výskyty se mohou částečně překrývat.

Př.: Pro posloupnost 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1 a $K = 3$, $L = 3$ je odpověď »ANO«, protože se v ní třikrát vyskytuje úsek 1, 2, 1.

Řešení. Označíme-li délku zadané posloupnosti čísel jako N, je možné úlohu vyřešit provedením řádově N^2 operací porovnání dvou čísel. Je zajímavé, že při soutěži na tento algoritmus nikdo nepřišel, všechna odevzdaná správná řešení obsahovala algoritmy pomalejší.

Nejprve vysvětlíme základní myšlenky algoritmu. Představme si čtvercovou tabulku o rozměrech $N \times N$, jejíž řádky i sloupce jsou označeny postupně jednotlivými čísly ze zadané posloupnosti (shora dolů a zleva doprava). Pro příklad ze zadání úlohy tedy bude situace vypadat podle obr. 38. Nyní tuto tabulku vyplníme čísly 0 a 1 podle jednoduchého pra-



Obr. 38

vidla. Číslo 1 bude v tabulce zapsáno v těch políčkách, která mají stejně označené řádky a sloupce. V ostatních políčkách tabulky bude nula. V našem příkladu ukazuje vyplnění tabulky obr. 39. V takto vyplněné tabulce budou jistě na hlavní diagonále samé jedničky. Dále se budeme zajímat pouze o polovinu tabulky nad hlavní diagonálou (polovina pod hlavní

	1	2	1	2	1	2	1
1	1	0	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1

Obr. 39

diagonálou je s horní polovinou symetrická podle diagonály a nepřináší proto žádnou další informaci).

Pro řešení naší úlohy nás budou zajímat ty souvislé řady jedniček v tabulce, které mají směr rovnoběžný s hlavní diagonálou (klesají odshora dolů zleva doprava). Příklad takové řady jedniček ukazuje obr. 40. Pomocí těchto šikmých řad

	1	2	1	2	1	2	1
1	1	0	1	0	1	0	1
2		1	0	1	0	1	0
1			1	0	1	0	1
2				1	0	1	0
1					1	0	1
2						1	0
1							1

Obr. 40

jedniček v tabulce již můžeme snadno zformulovat, jak získáme výsledek řešené úlohy. Jedničkám v jednom řádku tabulky totiž odpovídají opakující se výskyty čísel v zadané posloupnosti, klesajícím souvislým šikmým řadám jedniček proto odpovídají opakující se úseky v zadané posloupnosti. Jestliže existuje takových K po sobě jdoucích řádků tabulky, že jimi prochází alespoň L souvislých šikmých řad jedniček, algoritmus má odpovědět »ANO«, jinak je výsledkem »NE«. V našem příkladu na obr. 40 pro zadané $K = 3$, $L = 3$ bude odpovědí skutečně »ANO«, prvními třemi řádky tabulky procházejí tři šikmé řady jedniček (jedna je na hlavní diagonále,

jedna je vyznačena, další leží uprostřed mezi prvními dvěma).

Další úpravy jsou již jen technického rázu, jejich cílem je usnadnit činnost algoritmu. Naši tabulku budeme vyplňovat po řádcích. Přitom můžeme do tabulky zapisovat nejen znaky 0 a 1, ale obecně celá nezáporná čísla, a tím můžeme (vždy s využitím obsahu předchozího řádku) zároveň počítat délky souvislých šikmých řad »jedniček«. Vyplněnou tabulku v našem příkladu po této úpravě ukazuje obr. 41.

	1	2	1	2	1	2	1
1	1	0	1	0	1	0	1
2		2	0	2	0	2	0
1			3	0	3	0	3
2				4	0	4	0
1					5	0	5
2						6	0
1							7

Obr. 41

Pravidlo pro vyplňování tabulky je tedy nyní následující. Vyplňujeme-li políčko $(1, j)$, $1 \leqq j \leqq N$, zapíšeme do něj 1, jestliže označení j-tého sloupce je stejné jako označení prvního řádku, jinak zapíšeme 0. Vyplňujeme-li políčko (i, j), $1 < i \leqq N$, $i \leqq j \leqq N$, zapíšeme do něj hodnotu políčka $(i - 1, j - 1)$ zvětšenou o 1, jestliže označení i-tého řádku a j-tého sloupce jsou stejné, jinak zapíšeme 0.

Určení výsledku je potom snadné. Algoritmus odpoví »ANO« právě tehdy, jestliže je v některém řádku tabulky

alespoň L čísel větších nebo rovných K. Jak je vidět, pro stanovení odpovědi není ani třeba procházet znovu celou tabulku, hodnoty větší nebo rovné K je možné na každém řádku počítat již při zaplňování tabulky (a v případě nalezení odpovědi »ANO« ani není třeba vyplňovat zbytek tabulky). Důsledkem těchto úvah je ještě jedno vylepšení algoritmu. Jestliže už nemusíme zaplněnou tabulku znovu procházet, není ani nutné celou ji ukládat. Vždy stačí pamatovat si pouze obsah předchozího řádku. Nebudeme proto vytvářet čtvercovou tabulku s velkým paměťovým nárokem N^2, stačí pracovat pouze s jedním vektorem délky N, do kterého budeme postupně počítat a ukládat jednotlivé řádky naší tabulky.

Popsaný algoritmus řešení zadané úlohy nyní ještě zapíšeme v programovacím jazyce Pascal. Budeme předpokládat, že danou posloupnost čísel délky N máme uloženou v poli $A[1..N]$ a že proměnné K, L obsahují vstupní údaje podle zadání úlohy. Jednotlivé řádky tabulky se budou vytvářet v poli $T[1..N]$. Tyto řádky jsou počítány a ukládány do T odzadu (zprava doleva) proto, abychom si hodnotami nově vytvářeného řádku nepřepsali ty hodnoty předchozího řádku, které ještě budeme potřebovat. Zároveň je v proměnné *POCET* sledován počet čísel větších nebo rovných K na řádku. Najde-li se jich L, výpočet ihned skončí. Proměnné I a J jsou pomocné, určují vždy řádkový a sloupcový index právě počítaného políčka v tabulce.

```
begin
I := 1; J := N; POCET := 0;
while (I < = N) and (POCET < L) do
  begin
```

```
    POCET := 0;
    while (J >= I) and (POCET < L) do
      begin
      if A[I]<>A[J] then T[J] := 0
      else if I = 1 then T[J] := 1
      else T[J] := T[J - 1] + 1;
      if T[J] >= K then POCET := POCET + 1;
      J := J - 1
      end;
    I := I + 1; J := N
    end;
if POCET >= L then write ('ANO') else write ('NE')
end
```

Výpočet podle algoritmu jistě skončí, neboť postupně se zaplňuje a testuje méně než N^2 políček tabulky. Každý z cyklů v uvedeném programu se bude opakovat nejvýše N-krát. Zbývá ukázat, že popsaný algoritmus skutečně najde L výskytů podposloupnosti délky K v zadané posloupnosti. Nechť tyto shodné podposloupnosti mají následující indexy v poli A:

první: $p_1, p_1 + 1, \ldots, p_1 + K - 1$
druhá: $p_2, p_2 + 1, \ldots, p_2 + K - 1$
...
L-tá: $p_L, p_L + 1, \ldots, p_L + K - 1$

přičemž všechny tyto indexy mají hodnoty mezi 1 a N (včetně) a platí $p_1 < p_2 < \ldots < p_L$ (podposloupnosti jsou vypsány v pořadí jejich výskytu).

Při vyplňování naší tabulky dojdeme k řádku p_1 (v programu $I = p_1$). Na tomto řádku se jistě objeví kladná čísla ve sloupcích $p_1, p_2, \ldots, p_L$, neboť je $A[p_1] = A[p_2] = \ldots$

$\ldots = A[p_L]$ (v programu to znamená, že hodnoty $T[p_1]$, $T[p_2]$, $\ldots$, $T[p_L]$ budou kladné). V následujícím řádku $p_1 + 1$ (v programu: pro $I = p_1 + 1$) nastane shoda $A[p_1 + 1] = A[p_2 + 1] = \ldots = A[p_L + 1]$, čísla ve sloupcích $p_1 + 1$, $p_2 + 1$, $\ldots$, $p_L + 1$ proto budou kladná a vzhledem k obsazení předchozího p_1-tého řádku budou větší nebo rovna 2 (v programu: hodnoty $T[p_1 + 1]$, $T[p_2 + 1]$, $\ldots$, $T[p_L + 1]$ budou $\geqq 2$). Tato situace se opakuje i pro další řádky tabulky až do řádku $p_1 + K - 1$ včetně. V řádku číslo $p_1 + K - 1$ budou ve sloupcích $p_1 + K - 1$, $p_2 + K - 1$, $\ldots$, $p_L + K - 1$ zapsána čísla všechna větší nebo rovna hodnotě K (v programu: $T[p_1 + K - 1]$, $T[p_2 + K - 1]$, $\ldots$, $T[p_L + K - 1]$ budou mít po vyhodnocení řádku $I = p_1 + K - 1$ hodnotu větší nebo rovnu K). V řádku $p_1 + K - 1$ tedy bude nalezeno L čísel větších nebo rovných K a algoritmus proto správně odpoví »ANO«. Stejným způsobem se ukáže, že neexistuje-li v zadané posloupnosti L výskytů podposloupnosti délky K, algoritmus nikdy v jednom řádku nenapočítá L čísel větších nebo rovných K a odpoví proto »NE«.

P - III - 2

Je dán následující úsek programu se vstupními reálnými proměnnými X a A, kde $X > 1$, $A > 1$.

```
PASCAL: Z := A;
        K := 1;
        Y := 0;
        while X > = Z do
          begin
          Z := Z*Z;
```

```
    K := 2*K
    end;
  while K > 1 do
    begin
    {X*A ↑ Y = konst. & X < Z}
    Z := SQRT(Z);
    K := K div 2;
    if X >= Z then
      begin
      X := X/Z;
      Y := Y + K
      end
    end
```

BASIC:

```
 10 LET Z = A
 20 LET K = 1
 30 LET Y = 0
 40 IF X < Z THEN 80
 50 LET Z = Z * Z
 60 LET K = 2 * K
 70 GOTO 40
 80 IF K <= 1 THEN 160
 90 REM X * A ↑ Y = KONST. & X < Z
100 LET Z = SQR (Z)
110 LET K = K / 2
120 IF X < Z THEN 150
130 LET X = X / Z
140 LET Y = Y + K
150 GOTO 80
160 REM KONEC
```

Dokažte, že výraz $X^*A \uparrow Y$ má stejnou hodnotu při všech průchodech výpočtu místem programu, kde je v komentáři zapsán, a že v tomto místě je zároveň vždy splněna podmínka $X < Z$. Na základě toho zjistěte, jaké hodnoty nabývá proměnná Y po ukončení výpočtu, a svoje tvrzení dokažte.

Řešení (upravené řešení Radka Porazila z gymnázia v Bílovci).

Nejprve ukážeme, že po úvodní inicializaci na řádku 10 a 20, po změnách na řádku 50 a 60 i na řádku 100 a 110 stále platí vztah

$$Z = A^K, \tag{1}$$

kde symboly Z, A, K označují po řadě momentální hodnoty proměnných Z, A, K. Obsah proměnné A se v programu nemění. Uvedený vztah platí vždy po změně obou proměnných Z, K (provedení dvou po sobě jdoucích přiřazovacích příkazů).

Dokážeme platnost vztahu $Z = A^K$ pro změny na řádcích 40 a 50. K tomu označme K_0, Z_0 hodnoty proměnných K, Z před prvním testováním podmínky na řádku 40. Dále označme K_n, Z_n hodnoty proměnných K, Z po n-tém průchodu řádkem 60. Dokazujeme matematickou indukcí podle n:

1. Pro výchozí hodnoty K_0, Z_0, A vztah $Z_0 = A^{K_0}$ zřejmě platí, neboť podle dosazení na řádku 10 a 20 je $Z_0 = A$, $K_0 = 1$.
2. Nechť platí $Z_n = A^{K_n}$ pro $n \geqq 0$. Chceme dokázat, že potom $Z_{n+1} = A^{K_{n+1}}$. Podle řádku 50 je $Z_{n+1} = Z_n^2$, podle řádku 60 platí $K_{n+1} = 2.K_n$. Odtud plyne:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 = (A^{K_n})^2 = A^{2 \cdot K_n} = A^{K_{n+1}}$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Obdobně bude vypadat důkaz vztahu $Z = A^K$ pro změny na řádku 100 a 110. Nyní bude značit K_0, Z_0 hodnoty proměnných K, Z před prvním testováním podmínky na řádku 80 a K_n, Z_n hodnoty proměnných K, Z po n-tém průchodu řádku 110. Opět dokazujeme matematickou indukcí:

1. Platnost vztahu pro K_0, Z_0 plyne z předchozího důkazu, neboť K_0, Z_0 jsou poslední hodnoty proměnných K, Z, které vznikly při změnách na řádku 40 a 50.
2. Indukční předpoklad: $Z_n = A^{K_n}$ pro nějaké $n \geqq 0$. Máme dokázat, že $Z_{n+1} = A^{K_{n+1}}$. Podle řádku 100 je $Z_{n+1} = Z_n^{1/2}$, podle řádku 110 je $K_{n+1} = K_n/2$. Platí:

$$Z_{n+1} = Z_n^{1/2} = (A^{K_n})^{1/2} = A^{K_n/2} = A^{K_n+1},$$

což jsme měli dokázat.

Nyní můžeme přikročit k důkazu invariantu uvedeného v zadání úlohy. Nejprve ukážeme, že $X.A^Y = \text{konst.}$ Počáteční hodnoty proměnných X, Y označíme po řadě X_0, Y_0, platí $Y_0 = 0$ (podle dosazení na ř. 30). Při prvním vyhodnocení invariantu (tj. prvním průchodu řádkem 90) mají proměnné X, Y hodnoty X_0, Y_0. Výraz $X.A^Y$ nabývá proto hodnoty $X_0.A^{Y_0} = X_0$ (neboť $Y_0 = 0$). Budeme proto dokazovat platnost tvrzení

$$X_n.A^{Y_n} = X_0, \tag{2}$$

kde X_n, Y_n označují hodnoty proměnných X, Y po n-tém průchodu tělem cyklu (řádky 100 až 150). Tvrzení dokážeme matematickou indukcí:

1. Pro X_0, Y_0 jsme platnost vztahu (2) dokázali již při jeho odvození.
2. Nechť platí $X_n . A^{Y_n} = X_0$ pro jisté $n \geqq 0$. Dokážeme, že také $X_{n+1} . A^{Y_{n+1}} = X_0$. Při $(n + 1)$-ním průchodu tělem cyklu na řádku 100 až 150 mohou nastat dvě možnosti:
   a) platí $X_n < Z'$ (kde Z' je momentální hodnota proměnné Z) ... pak se hodnoty proměnných X, Y nezmění, bude $X_{n+1} = X_n$, $Y_{n+1} = Y_n$ a platnost dokazovaného vztahu plyne přímo z indukčního předpokladu.
   b) platí $X_n \geq Z'$ ... potom podle řádku 130 bude $X_{n+1} = X_n / Z'$ a podle řádku 140 platí $Y_{n+1} = Y_n + K'$, kde K', Z' jsou hodnoty proměnných K, Z v okamžiku průchodu řádky 130 a 140. Podle (1) platí rovnost $Z' = A^{K'}$ Nyní bude s využitím uvedených rovností:

$$X_{n+1} . A^{Y_{n+1}} = (X_n / Z') . A^{Y_n + K'} = (X_n / A^{K'}) . A^{Y_n} . A^{K'} =$$

$$= X_n . A^{Y_n} = X_0$$

Tím je vztah (2) dokázán.

Dále dokážeme druhou část invariantu, totiž to, že při každém průchodu řádkem 90 platí

$$X < Z. \tag{3}$$

Symboly X_0, Z_0 budou značit hodnoty proměnných X, Z při prvním průchodu řádkem 90, symboly X_n, Z_n hodnoty X, Z

při $(n + 1)$-ním průchodu. Dokazujeme opět matematickou indukcí:

1. Jistě platí $X_0 < Z_0$, neboť na řádek 80 se výpočet dostane až po splnění této podmínky (test na řádku 40).
2. Nechť platí $X_n < Z_n$ pro jisté $n \geqq 0$. Dokážeme, že $X_{n+1} < Z_{n+1}$. Na řádku 100 se v těle cyklu nejprve určí nová hodnota proměnné Z: $Z_{n+1} = Z_n^{1/2}$. Dále mohou nastat dvě možnosti jako v předchozím důkazu:
   a) $X_n < Z_{n+1}$ ... potom bude $X_{n+1} = X_n$, a tedy jistě také $X_{n+1} < Z_{n+1}$.
   b) $X_n \geqq Z_{n+1}$ ... potom $X_{n+1} = X_n/Z_{n+1}$ (podle řádku 130). Můžeme psát:

$$X_{n+1} = X_n/Z_{n+1} = X_n/Z_n^{1/2} = X_n . Z_n^{1/2}/Z_n =$$
$$= X_n . Z_{n+1}/Z_n = (X_n/Z_n) . Z_{n+1} < Z_{n+1},$$

   což jsme měli dokázat.

Poznámka. poslední nerovnost plyne z indukčního předpokladu.

Tím je ukončena první část úlohy - důkaz platnosti invariantu. Na základě dokázaného invariantu můžeme vyslovit následující hypotézu: V proměnné Y bude po ukončení výpočtu hodnota celé části logaritmu X při základu A. Tuto hypotézu nyní dokážeme.

Při posledním průchodu řádkem 90 platí $K_{n-1} = 2$, $Z_{n-1} = A^2$ a $X_{n-1} . A^{Y_{n-1}} = X_0$, přičemž $X_{n-1} < A^2$ (vyplývá z (2) a (3)), kde X_{n-1}, Y_{n-1}, K_{n-1} Z_{n-1} jsou hodnoty proměnných X, Y, K, Z při posledním průchodu řádkem 90. Těsně před provedením řádku 120 je již $K = 1$, $Z = A$.

a) Je-li $X_{n-1} < A$, jistě také platí $\log_A X_{n-1} < 1$. V tomto případě bude $X_n = X_{n-1}$, $Y_n = Y_{n-1}$ (na základě testu na řádku 120). Platí $X_n . A^{Y_n} = X_0$, odtud po zlogaritmování dostáváme

$$\log_A X_n + Y_n = \log_A X_0.$$

Jedná se o poslední průchod tělem cyklu, takže Y_n je výsledná hodnota proměnné Y. Hodnota proměnné Y se v programu vytváří jako součet celých čísel, Y_n je tedy také celé číslo. Protože $\log_A X_n$ je nezáporné číslo menší než 1, je jistě Y_n celou částí hodnoty $\log_A X_0$, což jsme měli dokázat.

b) Jestliže $X_{n-1} \geqq A$ (a z invariantu $X_{n-1} < A^2$), dostaneme po zlogaritmování nerovnosti

$$\log_A A \leqq \log_A X_{n-1} < \log_A A^2$$

$$1 \leqq \log_A X_{n-1} < 2$$

Můžeme tedy $\log_A X_{n-1}$ zapsat ve tvaru $1 + v$, kde $0 \leqq v < 1$. Dále podle řádku 140 je $Y_n = Y_{n-1} + 1$ a zlogaritmováním vztahu $X_{n-1} . A^{Y_{n-1}} = X_0$ dostaneme

$$\log_A X_{n-1} + Y_{n-1} = \log_A X_0.$$

Dosadíme-li do této rovnosti za $\log_A X_{n-1}$ výraz $1 + v$ a za Y_{n-1} výraz $Y_n - 1$, dostaneme

$$Y_n + v = \log_A X_0.$$

Protože Y_n je celé číslo a hodnota v je nezáporná menší než 1, je hodnotou Y_n celá část z $\log_A X_0$.

Tím je hypotéza o výsledné hodnotě proměnné Y dokázána.

P - III - 3

Nalezněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který z libovolné konečné množiny uzavřených intervalů na reálné přímce vybere skupinu po dvou disjunktních invervalů, která ze všech takových skupin obsahuje největší možný počet intervalů.

Řešení (upravené řešení Pavla Kozlovského z gymnázia v Jindřichově Hradci).

Dolní a horní meze intervalů uložíme do pole $M[1..N, 1..2]$, kde N je počet intervalů a druhý index určuje druh meze invervalu (1 - dolní, 2 - horní). Potom intervaly zapsané v poli M setřídíme podle hodnot dolní meze vzestupně, tzn. bude platit $M[1,1] \leqq M[2, 1] \leqq \ldots \leqq M[N, 1]$. Další částí algoritmu je jednoprůchodové prohledání pole M. Zvlášť jsou přitom vždy uschovány hodnoty mezí »posledního« zpracovaného intervalu (na počátku výpočtu to jsou meze prvního intervalu, tj. $M[1, 1]$ a $M[1, 2]$). Při zpracování dalšího intervalu v pořadí může nastat několik možností:

1. Zpracovávaný interval je obsažen v posledním intervalu. Do výsledné skupiny bude výhodnější vybrat menší z nich (má méně společných bodů s dalšími intervaly). Poslední interval proto zapomeneme a zpracovávaný interval prohlásíme za poslední.
2. Zpracovávaný a poslední interval jsou disjunktní. Protože

pole je setříděné podle dolních mezí, jsou všechny dosud nezpracované intervaly disjunktní s posledním intervalem. Poslední interval zapíšeme do výstupu a zpracovávaný interval prohlásíme za poslední.

3. Zpracovávaný a poslední interval mají neprázdný průnik, ale zároveň neplatí inkluze z bodu 1. Do výsledné skupiny nelze vybrat oba intervaly. Vybereme proto ten, který má nižší hodnotu horní meze (vzhledem k umístění dosud nezpracovaných intervalů je to výhodnější). Tím je jistě poslední interval, jinak by nastal případ 1. Poslední interval tedy zůstává beze změn, zpracovávaný interval zapomeneme.

Po zpracování všech intervalů se ještě poslední interval zapíše do výstupu.

Rychlost výpočtu tohoto algoritmu je dána rychlostí třídění a je tedy řádově $N.\log_2 N$, další zpracování intervalů má již lineární složitost.

Algoritmus nyní zapíšeme ve tvaru úseku programu v programovacím jazyce Pascal. Předpokládejme, že N udává počet intervalů na vstupu a že máme deklarováno dvourozměrné pole $M[1..N, 1..2]$ tak, jak je uvedeno v úvodu řešení. Dále budeme předpokládat, že v poli M jsou uloženy hodnoty mezí intervalů a že tyto intervaly jsou již setříděné vzestupně podle dolních mezí. K tomuto setřídění by se použil některý ze standardních třídicích algoritmů (zde neuvádíme). Platí tedy $M[1, 1] \leqq M[2, 1] \leqq \ldots \leqq M[N, 1]$ a $M[K, 1]$, $M[K, 2]$ jsou dolní a horní mez K-tého intervalu pro celá K, $1 \leqq K \leqq N$. Pomocné proměnné L, H slouží k uložení dolní a horní meze »posledního« intervalu.

```
L := M[1, 1];
H := M[1, 2];
for I := 2 to N do
  if M[I, 2] < H then
    begin {případ 1}
    L := M[I, 1];
    H := M[I, 2];
    end
  else if M[I, 1] > H then
    begin {případ 2}
    writeln (L, H);
    L := M[I, 1];
    H := M[I, 2];
    end; {v případě 3 se nic neprovádí}
writeln (L, H);
```

Zdůvodnění správnosti algoritmu:

1. Výpočet programu skončí, neboť počet provádění jednotlivých operací je předem omezen hodnotou N (tělo cyklu se opakuje méně než N-krát).

2. Vybraná skupina obsahuje pouze po dvou disjunktní intervaly. Interval poznamenaný jako »poslední« (v proměnných L, H) je totiž zapsán na výstup právě tehdy, je-li disjunktní s právě zpracovávaným intervalem, a vzhledem k uspořádání intervalů podle hodnot dolní meze je proto disjunktní i se všemi dalšími dosud nezpracovanými intervaly. Dále platí, že interval je prohlášen za »poslední«, buď je-li disjunktní s intervalem právě zapisovaným na výstup, nebo je-li podmnožinou dosud posledního intervalu. Protože je pole intervalů setříděno, je poslední interval disjunktní i se všemi již vybranými a vytištěnými intervaly.

3. Vybraná skupina intervalů obsahuje největší možný počet intervalů. Při průchodu všemi setříděnými intervaly totiž interval do výsledné skupiny nevybereme a »zapomeneme« ho pouze ve dvou případech, kdy je to nezbytné, aby vybraná skupina obsahovala pouze po dvou disjunktní intervaly:

a) Je-li některý z intervalů částí jiného, je nutné jeden z nich vynechat. Algoritmus vynechá větší z obou intervalů, což je jistě výhodnější z hlediska možných společných bodů s dalšími intervaly.

b) Mají-li dva intervaly neprázdný průnik, ale nenastává přitom případ a), musí být jeden z nich vynechán. Algoritmus vynechá ten z obou intervalů, který má větší horní (a tudíž i dolní) mez, neboť to je výhodnější z důvodu případných společných bodů s následujícími intervaly (konflikty s předchozími intervaly jsou již vyřešeny, neboť intervaly jsou při procházení setříděné).

P - III - 4

Zapište ve zjednodušeném jazyce LISP definice následujících funkcí:

a) REVERSE [X]

X musí být seznam

hodnotou funkce je seznam tvořený stejnými prvky jako seznam X, ale v opačném pořadí.

b) DIFELEM [S]

S je seznam atomů

hodnotou funkce je seznam všech různých prvků seznamu S.

c) LINEAR [S]

S musí být seznam

hodnotou funkce je seznam všech atomů, které se vyskytují někde v S bez ohledu na úroveň vnoření seznamů a jejich pořadí.

Řešení. a) Nadefinujeme pomocnou funkci PRESUN [X; Y], kde X, Y jsou seznamy. Tato funkce přesune všechny prvky ze seznamu X v opačném pořadí na začátek seznamu Y:

$$\begin{aligned}\text{PRESUN}\,[X;\,Y] = [&\text{NULL}\,[X] \to Y;\\ &T \to \text{PRESUN}\,[\text{CDR}[X];\,\text{CONS}\\ &\qquad[\text{CAR}[X];\,Y]]]\end{aligned}$$

S využitím této funkce již snadno zapíšeme požadovanou funkci REVERSE [X]:

$$\text{REVERSE}\,[X] = \text{PRESUN}\,[X;\,()]$$

b) Pomocná funkce MEMBER [X; S] zjišťuje, zda je atom X prvkem seznamu atomů S (viz úloha P - I - 4):

$$\begin{aligned}\text{MEMBER}\,[X;\,S] = [&\text{NULL}\,[S] \to F;\\ &\text{EQ}\,[X;\,\text{CAR}[S]] \to T;\\ &T \to \text{MEMBER}\,[X;\,\text{CDR}[S]]]\end{aligned}$$

Dále definujeme pomocnou funkci DIFEL [S; Y], kde S, Y jsou seznamy atomů. Tato funkce zpracovává seznam atomů S a vytváří pomocný seznam atomů Y následujícím způsobem: do seznamu Y přesouvá ty prvky ze seznamu S, které ještě v Y nejsou. Jestliže se projde celý seznam S, vydá se vytvořený seznam Y jako výsledek funkce DIFEL:

```
DIFEL [S; Y] = [NULL [S] → Y;
                MEMBER [CAR[S]; Y] →
                → DIFEL [CDR[S]; Y];
                T → DIFEL [CDR[S];
                CONS [CAR[S]; Y]]]
```

Výslednou funkci DIFELEM[S] požadovaných vlastností nyní snadno vyjádříme jako volání funkce DIFEL s prázdným seznamem dosazeným za parametr Y:

$$\text{DIFELEM}[S] = \text{DIFEL}[S; ()]$$

Pro zajímavost uvádíme již bez podrobnějšího komentáře ještě jiné řešení úlohy, které nepoužívá pomocnou funkci DIFEL a nevyužívá triku s pomocným, na počátku prázdným seznamem. Zápis tohoto druhého řešení je kratší, ale výpočet by byl o něco pomalejší:

```
DIFELEM [S] = [NULL [S] → S;
               MEMBER [CAR[R];
               CDR[S]] → DIFELEM [CDR[S]];
               T → CONS [CAR[S];
               DIFELEM [CDR[S]]]]
```

c) Nejprve nadefinujeme pomocnou funkci CONNECT [R; S], jejíž hodnotou je seznam vzniklý spojením seznamů R a S za sebe:

```
CONNECT [R; S] = [NULL [R] → S;
                  T → CONS [CAR[R];
                  CONNECT [CDR [R] ; S]]]
```

S použitím této pomocné funkce pak již zapíšeme výslednou funkci LINEAR [S]. Postupně procházíme všechny prvky seznamu S. Je-li takový prvek seznamu S atom, je připojen přímo do vytvářeného seznamu atomů a funkce LINEAR je rekurzívně volána na zpracování zbytku seznamu S bez prvního prvku. Je-li prvním prvkem seznamu S seznam, je funkce LINEAR volána dvakrát - na první prvek seznamu S i na zbytek seznamu S - a oba takto vzniklé seznamy atomů jsou propojeny pomocí funkce CONNECT:

```
LINEAR [S] = [NULL [S] → S;
              ATOM[CAR[S]] → CONS[CAR[S];
              LINEAR[CDR[S]]];
              T → CONNECT [LINEAR[CAR[S]];
              LINEAR[CDR[S]]]]
```

Úlohu je možné řešit i mnoha jinými způsoby. Pro ilustraci uvádíme, již bez komentářů, ještě jedno řešení:

```
LINE [S; Y] = [NULL [S] → Y;
               ATOM[CAR[S]] → LINE[CDR[S];
               CONS[CAR[S]; Y]];
               T → LINE[CDR[S];
               LINE[CAR[S]; Y]]]
LINEAR [S] = LINE [S; ()]
```

MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V PROGRAMOVÁNÍ

Ve školním roce 1986/87 se uskutečnil také 1. ročník mezinárodní olympiády v programování. Tato soutěž vznikla z iniciativy slovenských organizátorů kategorie P matematické olympiády. Mezinárodní olympiády v programování se zúčastnila družstva ze SSSR (8 účastníků), z BLR (6 účastníků) a z ČSSR (7 účastníků), přitomni dále byli pozorovatelé z NDR, MLR a z PLR. Olympiáda probíhala v Bratislavě a v Modre ve dnech 23.—30. 8. 1987. Vlastní soutěž se konala po dva dny, v každém z těchto dnů měli soutěžící čtyři hodiny času na vyřešení dvou soutěžních úloh. Výběr i opravování úloh probíhaly pod vedením mezinárodní jury stejným způsobem, jaký je obvyklý u mezinárodní matematické olympiády.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY

1. Pro přirozená čísla X a Y budeme říkat, že X se vyskytuje v Y, jestliže se dá binární zápis čísla X získat z binárního zápisu Y vyškrtnutím (vyloučením) žádné, jedné nebo více cifer. (Například $X = 1010$ se vyskytuje v $Y = 1001100$.)

Vytvořte algoritmus, který pro daná dvě přirozená čísla A a B najde maximální číslo C, které se vyskytuje v A i v B.

2. Je dáno n karet, které jsou očíslovány 1, 2, ..., n (každé číslo se vyskytuje právě jednou). Vytvořte algoritmus, který pro libovolnou posloupnost $A1$, $A2$, ..., An těchto karet najde nejmenší počet K prostých výměn karet nutný na jejich uspořádání podle rostoucích hodnot jejich čísel. (Pod prostou výměnou se rozumí vzájemná záměna pozic libovolných dvou karet.)

Př.: Pro posloupnost 1, 5, 3, 2, 4 je výsledek $K = 2$, protože prostými výměnami karet s číslem 5 a 2 a pak karet s číslem 4 a 5 dostaneme uspořádanou posloupnost 1, 2, 3, 4, 5.

3. Je dáno prvních N^2 přirozených čísel $(N > 2)$ $1, 2, \ldots, N^2$. Sestavte algoritmus, který rozdělí tato čísla do N skupin tak, aby byly současně splněny následující tři podmínky:

1. každá skupina obsahuje právě N čísel,
2. každé číslo se nachází právě v jedné skupině,
3. součet čísel v každé skupině je stejný.

4. Uvažujme následující hru. Pro pevně dané přirozené číslo $N > 1$ hráč A zvolí přirozené číslo X, $1 \leqq X \leqq N$. Cílem hráče B je uhodnout toto číslo X pomocí dotazů typu »Je X větší, nebo rovno K?«, kde K je libovolné přirozené číslo. Hráč A musí odpovídat na dotazy pravdivě a nesmí během hry měnit X. Hráč B platí hráči A za každou odpověď. Za odpověď »ANO« platí 2 Kčs, za odpověď »NE« platí 1 Kčs.

Určete pro dané N nejmenší množství Kčs $P(N)$, které zaručeně stačí na uhodnutí libovolného přirozeného čísla X, $1 \leqq X \leqq N$.

Vytvořte takový algoritmus, podle kterého má hráč B klást dotazy tak, aby uhodl číslo X a zaplatil přitom nejvýše $P(N)$ Kčs (tj. algoritmus určující vhodné K v dotazech).

Řešení každé úlohy bylo hodnoceno maximálně 10 body. Následující tabulka ukazuje, kolik z 21 účastníků soutěže získalo jaký počet bodů za řešení jednotlivých úloh.

Úloha	Počet bodů										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	2	0	2	1	3	3	4	0	3	1
2	0	0	0	2	1	2	2	4	3	5	2
3	1	0	1	1	3	3	2	1	1	3	5
4	11	0	0	0	0	1	2	2	3	2	0

Průměrné bodové hodnocení jednotlivých úloh bylo následující:

Úloha	Průměrné hodnocení
1	5,24
2	7,10
3	6,48
4	3,48

Nejlepším řešitelům udělila jury celkem dvě I. ceny, tři II. ceny a pět III. cen. Naši studenti si vedli v soutěži velice dobře, získali jednu I. cenu, jednu II. cenu a dvě III. ceny.

Soutěžící ze Sovětského svazu obdrželi jednu I. cenu a tři III. ceny, bulharští studenti pak dvě II. ceny. Bodové zisky jednotlivých zúčastněných družstev jsou shrnuty do následující tabulky.

ČSSR	celkem 168 bodů	průměr 24 bodů na žáka
SSSR	celkem 176 bodů	průměr 22 bodů na žáka
BLR	celkem 126 bodů	průměr 21 bodů na žáka

SLOŽENÍ A VÝSLEDKY ČESKOSLOVENSKÉHO DRUŽSTVA

Vladan Majerech, 4., G Pardubice
— 1. místo, 38 bodů (9, 10, 10, 9), I. cena
Pavel Kozlovský, 3., G Jindřichův Hradec
— 3. místo, 33 bodů (10, 6, 10, 7), II. cena
Pavol Kolník, 4., G Nové Mesto nad Váhom
— 7. místo, 23 bodů (1, 9, 5, 8), III. cena
Rudolf Burcl, 4., G Trnava
— 10. místo, 21 bodů (4, 5, 6, 6), III. cena
Peter Klein, 4., G A. Markuša, Bratislava
— 12.—15. místo, 19 bodů (1, 5, 7, 6)
Rastislav Senderák, 4., G Prešov
— 12.—15. místo, 19 bodů (7, 3, 9, 0)
Branislav Stríženec, 3., G J. Hronca, Bratislava
— 20. místo, 15 bodů (5, 8, 2, 0)

Hodnocení 36. ročníku MO

V organizaci soutěží MO nedošlo v tomto roce k žádným převratným změnám - to spíše v konsolidaci a ustálení již zavedených forem.

To se týká především nové kategorie P, která byla ve školním roce 1986/87 v celostátním měřítku uspořádána teprve podruhé. Její průběh byl veskrze úspěšný, včetně pěkného celostátního kola, které se konalo v Praze. Kromě toho se podařilo uspořádat i první mezinárodní soutěž v tomto oboru - proběhla v srpnu 1987 v Bratislavě. Kategorie P tak plně prokázala svou oprávněnost a životaschopnost.

Potěšující je i skutečnost, že se zavedení nové a bezpochyby velice atraktivní kategorie neprojevilo nepříznivě na zájmu žáků o »klasickou« kategorii A. V seznamech úspěšných řešitelů nacházíme ovšem v A i v P často stejná jména.

Vcelku lze proto zavedení kategorie P považovat za pozitivní přínos k MO a z dosavadních zkušeností vyvozovat povzbuzení pro pokračování v nastoupené cestě.

Zájem o MO je na středních školách relativně stabilní, což lze sice ocenit kladně, zároveň však tento fakt svědčí o tom, že se MO v poslední době nedaří významně rozšiřovat své působení. Zvláště v nejvyšší kategorii A je patrná relativní převaha škol, resp. tříd se zaměřením na matematiku.

Zkušenosti z 36. ročníku MO rovněž znovu potvrdily nutnost velmi uvážlivé volby úloh pro vyšší kola soutěže, zvláště v kategoriích B a C, kde ještě nemůže převládnout ryze soutěžní přístup. Není-li výběr úloh přizpůsoben znalostem a možnostem žáků, projeví se to ihned poklesem úspěšnosti a následně pak i poklesem zájmu o MO; tomu je třeba zabránit. Pro příští ročník byly proto navrženy určité úpravy.

Zájem o MO na středních školách je ovšem silně ovlivněn také zkušenostmi, které s MO získají žáci už na základních školách. Kategorie Z se postupně rozšiřují a osamostatňují; popis jejich průběhu a hodnocení je obsaženo v samostatné ročence.

RNDr. František Zítek, CSc.
doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
RNDr. Karel Horák, CSc.
RNDr. Pavel Töpfer

TŘICÁTÝ ŠESTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, Praha roku 1989
jako svou publikaci č. 5-42-14/36
Edice Pomocné knihy pro žáky
Odpovědné redaktorky RNDr. Ilona Fořtová a Anežka Bittnerová
Výtvarný redaktor Václav Hanuš
Technická redaktorka Irena Braná
Z nové sazby písmen Plantin vytiskly Moravské tiskařské závody, n. p.,
Olomouc
Formát papíru 70 cm × 100 cm
Počet stran 216
AA 5,94 (5,49 AA textu, 0,45 AA grafiky) VA 6,40
Náklad 3 200 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/2
1. vydání
Cena brožovaného výtisku Kčs 8,00
505/21, 825

14-659-89

ISBN 80-04-23727-4

matematická olympiáda

MO

SPN 42

5-42-14/36

14-659-89
03/2 Kčs 8,00

ISBN 80-04-23727-4