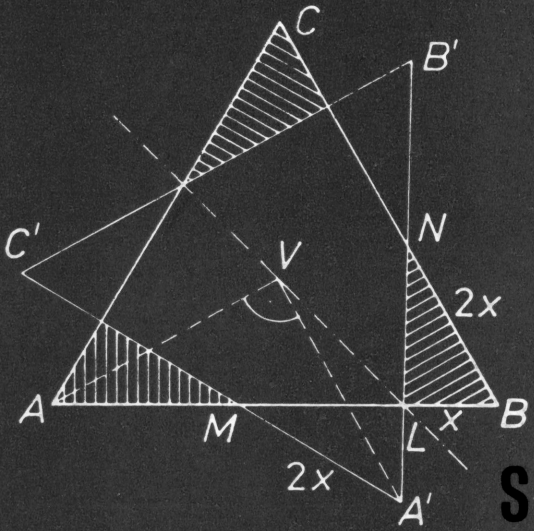
38. ročník matematické olympiády na středních školách

38. ročník matematické olympiády na středních školách



SPN

TŘICÁTÝ OSMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané
ve školním roce 1988/89

30. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Jiří Binder, CSc.,
doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc., RNDr. Karel Horák, CSc.,
RNDr. Pavel Töpfer
Lektorovali RNDr. Luboš Brim, CSc., RNDr. Vladimír Burjan,
RNDr. Libor Jelínek, RNDr. Václav Šůla

ISBN 80-04-25644-9

Obsah

Hodnocení 38. ročníku matematické olympiády

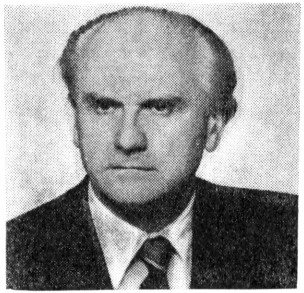
38. ročník proběhl beze změn v organizaci i bez větších výkyvů v počtech účastníků. Zúčastnilo se ho stejně jako předcházejícího ročníku asi 9 500 žáků středních škol, z nich asi 5 600 prošlo úspěšně prvním kolem. Z tohoto počtu bylo 4 600 žáků pozváno do II. kola. V něm skončilo 1 300 soutěžících s diplomem úspěšného řešitele, stejně jako v 37. ročníku. Tato čísla hodnotíme kladně. Vždyť není rozumné požadovat, aby v každém ročníku soutěžilo víc žáků než v roce předcházejícím, jak tomu často bylo při různých soutěžích.

Podstatný vliv na průběh každého ročníku MO má výběr úloh. Úlohy kategorie P připravili převážně pracovníci MO z Prahy, úlohy kategorií A, B, C vybrali členové předsednictva ÚV MO, přičemž využili úloh, které zaslali do konkursu úloh MO učitelé, vědečtí pracovníci v matematice, studenti matematiky a i někteří žáci. Zdá se, že úlohy byly vybrány vhodně, na pravidelném hodnocení výběru úloh při příležitosti celostátního kola nebyly vzneseny žádné námitky. Kladně byla hodnocena návaznost úloh jednotlivých kol, například úlohy C-II-4 na C-I-6. V některých případech však nebyl výběr úloh v souladu s osnovami, například úloha B-S-1 se týkala permutací, ty se však probírají až později. Někdy

se však dá úloha řešit prostředky, které jsou již k dispozici, i když by se dala později, po probrání další látky, řešit snadněji. Týká se to například úlohy B-I-6, která se nemusela řešit matematickou indukcí. Patří však bezesporu k těžším úlohám. Pěkné řešení úlohy B-I-2 podal žák gymnázia v Brně, řešení velmi jednoduché, elegantní. Sám autor úlohy i příslušného komentáře byl tímto pěkným řešením mile překvapen. Ačkoli ÚV MO věnuje výběru úloh velkou pozornost, přesto se občas objeví nějaký šotek. Tentokrát to bylo v textu úlohy C-I-1, kde se mluví jednou o celých číslech, jednou o přirozených číslech, správně má být na obou místech stejný pojem. V této ročence je text již opraven. Naštěstí žáci snadno chybu objevili.

V celostátním kole MO kategorie A se řeší vždy šest úloh, za každou může soutěžící získat 7 bodů. Nejtěžší byla zřejmě úloha A-III-4 o těžnicích v trojúhelníku, neboť průměr dosažených bodů za tuto úlohu byl 1,29. Nejlehčí byla úloha A-III-1, za ni dosáhli soutěžící průměru 5,12 bodu. Byla to úloha o tětivovém čtyřúhelníku a byla zařazena i jako pietní vzpomínka na jejího autora, dlouholetého předsedu ÚV MO *dr. Františka Zítka, CSc.*, z Matematického ústavu ČSAV.

Při hodnocení 38. ročníku MO není možné nevyzdvihnout úspěch našich žáků na jubilejní, 30. mezinárodní matematické olympiádě, která se konala v SRN. Každý československý účastník získal některou z medailí, z toho byly dvě zlaté a jedna stříbrná. V neoficiálním pořadí družstev se Československo umístilo na 6. místě za ČLR, Rumunskem, SSSR, NDR a USA.



RNDr. František Zítek, CSc., pracoval v matematické olympiádě od roku 1962, kdy se konala poprvé mezinárodní matematická olympiáda v Československu. Od roku 1966 byl členem ústředního výboru MO, dlouhá léta byl jeho místopředsedou a od roku 1983 zastával funkci předsedy. Staral se především o československou účast na mezinárodních matematických olympiádách, plně přitom uplatnil své bohaté jazykové znalosti. Byl předsedou mezinárodní poroty při 25. MMO v Praze a měl velkou zásluhu na jejím pěkném průběhu. Dr. Zítek byl autorem mnoha úloh i pro československou matematickou olympiádu. Ačkoli pracoval především v teorii pravděpodobnosti a v matematické statistice, většina jeho úloh byla z geometrie. A byly to úlohy náročné, dr. Zítek se vždy snažil o vysokou úroveň MO. Do edice Škola mladých matematiků přispěl svazkem Vytvořující funkce, další svazek už bohužel nedopsal. Zemřel náhle 18. listopadu 1988 ve věku 59 let. Jeho jméno bude navždy spojeno s matematickou olympiádou v Československu.

O průběhu 38. ročníku matematické olympiády

38. ročník matematické olympiády pořádalo ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR a ministerstvo školství, mládeže a tělesné výchovy SSR ve spolupráci s Jednotou československých matematiků a fyziků, Jednotou slovenských matematiků a fyziků, Matematickým ústavem ČSAV a Socialistickým svazem mládeže. Soutěž řídil ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím krajských a okresních výborů matematické olympiády (KV MO, OV MO). Členy ÚV MO jmenovala příslušná ministerstva. V průběhu 38. ročníku MO pracoval ústřední výbor MO ve stejném složení jako v předcházejícím roce: předsedou byl RNDr. František Zítek, CSc., z MÚ ČSAV v Praze, místopředsedy profesor RNDr. Miroslav Fiedler, DrSc., člen korespondent ČSAV, z téhož ústavu, a doc. RNDr. Branislav Rovan, CSc., z MFF UK v Bratislavě. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR zastupoval RNDr. Václav Šůla, ministerstvo školství, mládeže a tělesné výchovy SSR RNDr. Júlia Lukátšová. Funkci tajemníků ÚV MO vykonávali doc. RNDr. Leo Boček, CSc., z MFF UK v Praze a RNDr. Karel Horák, CSc., z MÚ ČSAV v Praze. V průběhu 38. ročníku zemřel dlouholetý předseda ÚV MO dr. František Zítek, CSc. Funkci předsedy ÚV MO pak vykonával doc. RNDr. Leo Boček, CSc., dosavadní tajemník

ÚV MO, a práci tajemníka převzal RNDr. Jiří Binder, CSc., z pedagogické fakulty UK v Praze. K další změně během 38. ročníku došlo, když RNDr. Ján Lastivka vystřídal dr. Lukátšovou ve funkci zástupce MŠMTV SSR.

V průběhu 38. ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO, první ve dnech 5.—6. prosince 1988 v Praze, druhé 24.—25. dubna 1989 v Klatovech při celostátním kole MO. Hlavním bodem obou zasedání bylo hodnocení průběhu soutěže, zabezpečení celostátních soustředění úspěšných řešitelů MO včetně soustředění pro přípravu na MMO, korespondenční seminář ÚV MO a organizace dalších kol soutěže. Byla projednávána též ediční činnost ÚV MO, především příprava dalších svazků edice Škola mladých matematiků. Byla diskutována vhodnost výběru úloh MO. Pracovní předsednictvo se scházelo jednou měsíčně a zabývalo se hlavně výběrem úloh pro všechna kola soutěže.

V organizaci MO nedošlo k žádným změnám. Kategorie A byla určena žákům 3. a 4. ročníku středních škol, kategorie B byla pro žáky 2. ročníků a v kategorii C soutěžili žáci 1. ročníků. Pro žáky všech tříd středních škol byla určena ještě kategorie P, zaměřená na úlohy z programování a matematické informatiky.

V kategoriích A, B, C má I. kolo dvě části, v první části řeší soutěžící 6 úloh doma nebo v matematických kroužcích a mohou se přitom radit se svými učiteli, vedoucími kroužků apod. Druhá část má formu klauzurní práce, v níž řeší žáci tři úlohy v omezeném čase čtyř hodin.

Řešitelé, kteří úspěšně prošli prvním kolem, jsou pozváni do druhého (krajského) kola soutěže, kde řeší čtyři úlohy opět v limitu čtyř hodin.

V kategoriích A a P se koná ještě třetí, celostátní kolo. V něm je vlastní soutěž rozdělena do dvou dnů. V kategorii A řeší soutěžící každý den tři úlohy v časovém limitu čtyři hodiny, v kategorii P ve stejném limitu vždy dvě úlohy.

Organizací celostátního kola byl ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy ČSR pověřen Západočeský kraj. Uskutečnilo se v Klatovech ve dnech 23.—25. 4. 1989 (kat. A) a 26.—29. 4. 1989 (kat. P). Bylo doprovázeno velmi pěkným kulturním a společenským programem. Z řady pracovníků, kteří se zasloužili o vzornou organizaci celostátního kola, jmenujme alespoň *RNDr. Karla Matáska*, předsedu organizačního výboru, *RNDr. Josefa Poláka, CSc.*, předsedu KV MO a *dr. Marii Ausbergerovou* z KPÚ v Plzni.

Vybraná družstva se zúčastnila mezinárodní matematické olympiády i mezinárodní soutěže v programování. Těmto soutěžím je věnována samostatná kapitola v závěru brožury.

Hlavní náplň následujících kapitol tvoří texty úloh všech kategorií včetně jejich řešení. Každá úloha je označena kategorií, římskou číslicí udávající kolo nebo písmenem S, které značí školní, klauzurní část I. kola, a číslem úlohy.

Ve všech krajích naší republiky se i ve školním roce 1988|89 pořádaly různé akce pro vyhledávání a rozvoj žáků talentovaných v matematice, převážně spojené s matematickou olympiádou Přehled akcí v jednotlivých krajích:

Praha. Jednou týdně se konaly pracovní přednášky pro řešitele úloh kategorií A, B i C, celkem se zúčastnilo 52 žáků. Pro 38 řešitelů korespondenčního semináře a MO se v lednu konalo třídenní soustředění. Soustředění pro řešitele kategorií B a C se konalo v červnu, trvalo 5 dní a zúčastnilo se ho 45 žáků.

Středočeský kraj. Týdenní soustředění pro 36 nejúspěšnějších řešitelů kategorie B a C se konalo v září. Byly provedeny instruktáže učitelů k úlohám I. kola kat. A, B, C. Pro žáky, řešitele úloh MO, proběhly instruktáže v osmi školicích střediscích.

Jihočeský kraj. Letní škola pro úspěšné řešitele MO se konala v červnu, trvala jeden týden a zúčastnilo se jí 58 řešitelů kat. A a B a 60 řešitelů kat. C. Instruktáž pro referenty MO na školách byla jednodenní, zúčastnilo se 46 učitelů. V lednu se konalo dvoudenní soustředění pro 20 řešitelů úloh kategorie A. Korespondenční seminář měl dvě série úloh.

Západočeský kraj. V Plzni, Klatovech a Karlových Varech se konalo celkem 24 přednášek k úlohám kategorie A, B a C. Úlohy korespondenčního semináře pro kategorii A řešilo 33 žáků (2 série) a pro kategorie B a C 57 žáků (3 série úloh).

Severočeský kraj. V červnu proběhlo v Krupce soustředění pro 45 řešitelů kat. A, B a C. Kromě toho se v kraji konalo v deseti městech celkem 50 seminářů pro řešitele úloh kat. A, B a C s průměrnou účastí 20 žáků.

Jihomoravský kraj. V Brně a v Jihlavě se konaly pro řešitele úloh MO semináře, zvlášť pro každou kategorii, průměrná účast 20 žáků. Jednou týdně se konal seminář pro žáky z třídy zaměřené na matematiku na gymnáziu v Brně, tř. kpt. Jaroše. Pro 10 žáků kraje, kteří byli pozváni do celostátního kola kat. A, se konalo 6 seminářů po 4 hodinách. Týdenní soustředění pro úspěšné řešitele kategorie B a C proběhlo v Jedovnicích v květnu. Zúčastnilo se ho celkem 80 žáků. Pro žáky 2. ročníků tříd gymnázií se zaměřením studijního oboru 01 — Matematika (3 žáci z každé školy, kde jsou tyto třídy zavedeny) uspořádal KV MO desetidenní soustředění.

Severomoravský kraj. V září proběhly instruktáže referentů MO, zúčastnilo se 41 učitelů. Na sobotních besedách MO byla průměrná účast 37 žáků. Na gymnáziu M. Koperníka v Bílovci se konaly jednou týdně semináře pro řešitele MO (25 účastníků). Korespondenční seminář pro kategorie A, B, C (3 série úloh) řešilo celkem 210 účastníků. Seminář byl ukončen týdenním soustředěním (duben, 50 účastníků). V červnu se konalo pro 75 úspěšných řešitelů MO desetidenní soustředění. V červnu též proběhlo týdenní soustředění žáků 3. ročníků tříd gymnázií se zaměřením na matematiku (30 účastníků).

Bratislava. Pro učitele uspořádal KV MO sedm dvouhodinových seminářů. Dále proběhlo šest kol korespondenčního semináře z matematiky a tři kola z programování. Pro nejúspěšnější řešitele MO a korespondenčních seminářů bylo uspořádáno celkem pět týdenních soustředění.

Západoslovenský kraj. Instruktáží učitelů a vedoucích kroužků MO (pro kat. A, B, C i P) se zúčastnilo 60 učitelů. Soustředění úspěšných řešitelů MO kat. B a C bylo týdenní a zúčastnilo se ho 40 žáků. V korespondenčním semináři řešilo 72 žáků úlohy pěti sérií, z toho 18 nejlepších bylo pozváno na čtyřdenní soustředění.

Středoslovenský kraj. Krajský korespondenční seminář pro kategorii A měl 5 sérií, úlohy řešilo 21 žáků. Druhý korespondenční seminář byl určen pro kategorii B a C, 4 série úloh řešilo 123 žáků. Korespondenční seminář byl organizován též pro kategorii P (4 série, 36 účastníků) a pro žáky SOU (6 sérií, 152 účastníků). Pro úspěšné řešitele MO byla uspořádána dvě týdenní soustředění (září, červenec), každé pro 40 účastníků. Pro všechny kategorie proběhly dvoudenní

instruktáže pro učitele. V Žilině byl organizován matematický kroužek, 3 žáci byli připravováni individuálně.

Východoslovenský kraj. Pro každou kategorii se uskutečnila samostatná instruktáž referentů MO a vedoucích kroužků, instruktáže byly jednodenní a zúčastnilo se jich celkem 230 učitelů. V korespondenčním semináři řešilo 150 žáků osm sérií po šesti úlohách. Pro nejlepší řešitele úloh semináře se konala dvě týdenní soustředění (září 1988 a leden 1989), každé pro 35 účastníků. V Košicích, Prešově a Kežmarku byly organizovány matematické kroužky pro řešitele úloh kategorie A, v Košicích též pro kategorii P. Kroužky navštěvovalo průměrně 20 účastníků. Při KDPaM v Košicích fungoval Klub mladých matematiků. Scházel se jednou týdně a navštěvovalo ho 15—20 žáků.

Ústřední výbor MO. Ústřední výbor MO zajišťoval tři celostátní soustředění. Pro žáky nematurujících ročníků to bylo již tradiční soustředění 80 řešitelů úloh MO a FO. Proběhlo ve dnech 15.—28. 6. v Dubnici nad Váhom. Další dvě soustředění byla věnována přípravě československého družstva na mezinárodní matematickou olympiádu. První se konalo 28. 3.—5. 4. v Píle (12 účastníků), druhé 19.—29. 6. v Pardubicích (8 účastníků). ÚV MO též zajišťoval celostátní korespondenční seminář (semináři je věnována samostatná část této brožury). V edici Škola mladých matematiků vydává ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta matematické brožury pro žáky. V průběhu 38. ročníku vyšly tři svazky: J. Tůma: Matematické hlavolamy a základy teorie grup, I. Korec: Úlohy o velkých číslech a A. Kufner: Nerovnosti a odhady (reedice).

Tabulka 1

Počty středních škol zapojených do 38. ročníku MO

Kraj	Gymnázia *)					Ostatní střední školy				
	celkem v kraji	zapojeno v kategorii				aspoň v jedné kategorii	zapojeno v kategorii				aspoň v jedné kategorii
		A	B	C	P		A	B	C	P	
Praha	21	12	14	17	11	20	0	0	0	1	1
Středočeský	23	23	20	22	12	23	0	2	9	0	9
Jihočeský	18	12	17	17	10	17	3	8	8	2	12
Západočeský	15	13	13	15	8	15	1	4	7	0	7
Severočeský	23	16	17	20	6	21	6	10	15	0	16
Východočeský	35	19	20	28	8	31	1	2	2	1	2
Jihomoravský	38	23	33	35	11	36	3	9	10	0	12
Severomoravský	39	19	38	38	15	39	2	6	15	3	16
Bratislava	11	6	7	9	4	9	0	0	2	0	2
Západoslovenský	39	27	35	39	18	39	5	14	33	3	33
Středoslovenský	38	36	37	37	28	38	23	37	67	24	70
Východoslovenský	37	25	35	37	16	37	4	14	38	7	39
ČSR	212	137	172	192	81	202	16	41	66	7	75
SSR	125	94	114	122	66	123	32	65	140	34	144
ČSSR	337	231	286	314	147	325	48	106	206	41	219

*) Bez sportovních škol.

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 38. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	138	83	119	86	166	148	72	37	495	354
Středočeský	219	48	199	111	303	178	39	17	760	354
Jihočeský	129	48	178	109	260	184	32	24	599	365
Západočeský	98	37	80	65	138	114	31	21	347	237
Severočeský	176	50	177	116	331	175	23	11	707	352
Východočeský	92	64	118	90	252	205	37	11	499	370
Jihomoravský	261	98	278	186	438	365	50	20	1 027	669
Severomoravský	240	74	356	181	529	257	60	39	1 185	551
Bratislava	183	131	191	96	211	123	25	18	610	368
Západoslovenský	151	127	183	171	486	421	60	44	880	763
Středoslovenský	229	115	196	91	257	161	63	38	745	405
Východoslovenský	315	115	501	245	1 145	439	87	27	2 048	826
ČSR	1 353	502	1 505	944	2 417	1 626	344	180	5 619	3 252
SSR	878	488	1 071	603	2 099	1 144	235	127	4 283	2 362
ČSSR	2 231	990	2 576	1 547	4 516	2 770	579	307	9 902	5 614

S ... počet všech soutěžících
U ... počet úspěšných řešitelů

Tabulka 3

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 38. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	78	16	83	50	127	78	34	18	322	162
Středočeský	42	2	95	15	128	27	16	3	281	47
Jihočeský	44	4	68	18	164	48	23	5	299	75
Západočeský	32	4	61	21	89	44	19	7	201	76
Severočeský	44	3	107	32	154	61	10	3	315	99
Východočeský	60	7	76	27	174	40	11	6	321	80
Jihomoravský	99	10	158	40	323	104	20	11	600	165
Severomoravský	71	4	178	38	252	118	39	13	540	173
Bratislava	130	17	94	55	101	48	18	9	343	129
Západoslovenský	106	10	163	17	257	72	42	3	568	102
Středoslovenský	86	7	84	22	144	49	32	12	346	90
Východoslovenský	83	4	129	21	254	99	27	4	493	128
ČSR	470	50	826	241	1 411	520	172	66	2 879	877
SSR	405	38	470	115	756	268	119	28	1 750	449
ČSSR	875	88	1 296	356	2 167	788	291	94	4 629	1 326

S ... počet všech soutěžících
U ... počet úspěšných řešitelů

Tabulka 4

Počty účastníků III. kola 38. ročníku MO kategorie A a P

Kraj	Kategorie A			Kategorie P		
	Počet účastníků	Úspěšných řešitelů	Z toho vítězů	Počet účastníků	Úspěšných řešitelů	Z toho vítězů
Praha	16	10	6	10	6	4
Středočeský	2	0	0	1	1	0
Jihočeský	2	1	0	2	1	0
Západočeský	4	3	1	3	2	2
Severočeský	1	0	0	2	1	0
Východočeský	7	4	2	3	1	0
Jihomoravský	10	3	3	5	3	1
Severomoravský	4	1	1	5	1	1
Bratislava	16	8	3	9	5	2
Západoslovenský	4	1	0	2	1	1
Středoslovenský	6	4	1	6	1	1
Východoslovenský	4	2	2	3	1	0
ČSR	46	22	13	31	16	8
SSR	30	15	6	20	8	4
ČSSR	76	37	19	51	24	12

Výsledky celostátního kola 38. ročníku MO kategorie A

Vítězové

1.	*Petr Čížek*, 4M, G W. Piecka, Praha	42 b.
2.	*Ondrej Šuch*, 3M, G A. Markuša, Bratislava	41 b.
3.	*Ilja Martišovitš*, 4MF, G J. Hronca, Bratislava	32 b.
4.	*Marek Velešík*, 4P, G, Koněvova, Brno	30 b.
5.	*Tomáš Brodský*, 4M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno	29 b.
6.—7.	*Štěpán Kasal*, 2M, G W. Piecka, Praha	28 b.
	Arnošt Kobylka, 4M, G W. Piecka, Praha	28 b.
8.—9.	*Petr Brož*, 4M, G W. Piecka, Praha	27 b.
	Štěpán Holub, 4MF, G, Trutnov	27 b.
10.	*Petr Hliněný*, 3M, G, Bílovec	26 b.
11.—12.	*Vladimír Komár*, 3M, G, Košice	25 b.
	Jan Vomlel, 3M, G J. K. Tyla, Hradec Králové	25 b.
13.	*Martin Kraus*, 3MF, G, Karlovy Vary	23 b.
14.—16.	*Martin Durdiak*, 4M, G A. Markuša, Bratislava	22 b.
	Ondřej Kalenda, 3M, G W. Piecka, Praha	22 b.
	Vladimír Skalský, 3, G, Prešov	22 b.
17.—19.	*Jaromír Javůrek*, 4M, G W. Piecka, Praha	21 b.
	Michal Konečný, 2M, G, tř. kpt. Jaroše, Brno	21 b.
	Jozef Skokan, 3M, G, Veľká Okružná, Žilina	21 b.

20.—22.	*Aleš Černý*, 4M, G, Veľká Okružná, Žilina	20 b.
	Štefan Dobrev, 4M, G A. Markuša, Bratislava	20 b.
	Stanislav Januschke, 4MF, G J. Hronca, Bratislava	20 b.
23.—27.	*Viliam Búr*, 7, ZŠ, K. Šmidkeho, Bratislava	19 b.
	Daniel Elleder, 4M, G W. Piecka, Praha	19 b.
	Jan Hannig, 2M, G W. Piecka, Praha	19 b.
	Jakub Těšínský, 2M, G W. Piecka, Praha	19 b.
	Miroslav Vicher, 4MF, G, Karlovy Vary	19 b.
28.	*Gabriel Varga*, 4P, G, Šamorín	18 b.
29.—30.	*Andrej Doboš*, 4M, G A. Markuša, Bratislava	17 b.
	Jan Macháček, 3, G, Pelhřimov	17 b.
31.—32.	*Vladimír Glasnák*, 2MF, G, V. Okružná, Žilina	16 b.
	Petr Tobiška, 2M, G J. K. Tyla, Hr. Králové	16 b.
33.—34.	*Šimon Kos*, 4M, G J. Fučíka, Plzeň	15 b.
	Zbyněk Šír, 4M, G J. K. Tyla, Hr. Králové	15 b.
35.—37.	*Peter Gvozdiak*, 4M, G A. Markuša, Bratislava	14 b.
	Robert Mitka, 4M, G, Veľká Okružná, Žilina	14 b.
	Petr Štěpán, 4M, G W. Piecka, Praha	14 b.

U tříd se zaměřením studijního oboru 01 Matematika je za ročníkem označení M, u žáků z tříd se zaměřením studijního oboru 02 Matematika a fyzika je za ročníkem označení MF. Všichni byli žáci gymnázia.

Pořadí úspěšných řešitelů z tříd,
které nejsou se zaměřením studijního oboru 01 Matematika

1. *Ilja Martišovitš*, 4, G J. Hronca, Bratislava
2. *Marek Velešík*, 4, Koněvova, Brno
3. *Štěpán Holub*, 4, Trutnov
4. *Martin Kraus*, 3, Karlovy Vary
5. *Vladimír Skalský*, 3, Prešov
6. *Stanislav Januschke*, 4, G J. Hronca, Bratislava

7.—8. *Viliam Búr*, 7, ZŠ, K. Šmidkeho, Bratislava
Miroslav Vicher, 4, Karlovy Vary

9. *Gabriel Varga*, 4, Šamorín
10. *Jan Macháček*, 3, Pelhřimov
11. *Vladimír Glasnák*, 2, Veľká Okružná, Žilina

Výsledky celostátního kola 38. ročníku MO kategorie P

Vítězové

1.	*Ilja Martišovitš*, 4, G J. Hronca, Bratislava	38 b.
2.—3.	*Petr Čížek*, 4, G W. Piecka, Praha	37 b.
	Štefan Dobrev, 4, G A. Markuša, Bratislava	37 b.
4.—5.	*Václav Bohdanecký*, 4, G W. Piecka, Praha	35 b.
	Vladimír Chvátil, 3, G, Koněvova, Brno	35 b.
6.—7.	*Petr Brož*, 4, G W. Piecka, Praha	32 b.
	Miroslav Vicher, 4, G, Karlovy Vary	32 b.
8.—9.	*Martin Čížek*, 3, G, Rožnov pod Radhoštěm	30 b.
	Jaroslav Šprongl, 2, G W. Piecka, Praha	30 b.
10.—12.	*Andrej Lúčny*, 4, G, Piešťany	29 b.
	Robert Mitka, 4, G, Veľká Okružná, Žilina	29 b.
	Pavel Vanoušek, 3, G, Cheb	29 b.

Další úspěšní řešitelé

13.—14.	*René Pázman*, 4, G J. Hronca, Bratislava	28 b.
	Vladimír Šolc, 3, G, Beroun	28 b.
15.	*Milan Mosný*, 4, G J. Hronca, Bratislava	27 b.
16.—17.	*Petr Štěpán*, 4, G W. Piecka, Praha	26 b.
	Oldřich Vojtíšek, 3, G, Partyzánská, Liberec	26 b.

18.—21.	*Jakub Čermák*, 3, G, Jírovcova, Č. Budějovice	25 b.
	Štěpán Kasal, 2, G W. Piecka, Praha	25 b.
	Vladimír Skalský, 3, G, Prešov	25 b.
	Michal Šmídek, 4, G, tř. kpt. Jaroše, Brno	25 b.
22.—24.	*Martin Dindoš*, 3, G J. Hronca, Bratislava	24 b.
	Zdeněk Pavlas, 4, G, tř. kpt. Jaroše, Brno	24 b.
	Zbyněk Štr, 4, G J. K. Tyla, Hradec Králové	24 b.

Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C, P

Z každého kraje a z každé kategorie je uvedeno nejvýše prvních deset řešitelů. Pokud není uvedena škola, byl řešitel žákem gymnázia. Označení G znamená gymnázium, M, resp. MF zaměření studijního oboru 01 Matematika, resp. 02 Matematika a fyzika.

Praha

Kategorie A

1. *Petr Čížek*, 4M, G W. Piecka, Praha
2. *Štěpán Kasal*, 2M, G W. Piecka, Praha
3. *Petr Brož*, 4M, G W. Piecka, Praha
4. *Michal Kubeček*, 1M, G W. Piecka, Praha

5.—8. *Daniel Elleder*, 4M, G W. Piecka, Praha
Jan Hannig, 2M, G W. Piecka, Praha
Ondřej Kalenda, 3M, G W. Piecka, Praha
Petr Štěpán, 4M, G W. Piecka, Praha

9. *Arnošt Kobylka*, 4M, G W. Piecka, Praha

10.—12. *Jaroslav Šprongl*, 2M, G W. Piecka, Praha
Jakub Těšínský, 2M, G W. Piecka, Praha
Jan Večeř, 3M, G W. Piecka, Praha

Kategorie B

1.—3. *Petr Mourek*, 2M, G W. Piecka, Praha
Jan Hannig, 2M, G W. Piecka, Praha
Jan Hrůza, 2M, G W. Piecka, Praha
4.—6. *Karel Janeček*, 2M, G W. Piecka, Praha
Jaroslav Šprongl, 2M, G W. Piecka, Praha
Petr Novotný, 1M, G W. Piecka, Praha
7.—8. *Roman Janík*, 2M, G W. Piecka, Praha
Jakub Těšínský, 2M, G W. Piecka, Praha
9. *Jan Holub*, 2, Voděradská, Praha
10.—11. *Veronika Hurychová*, 2M, G W. Piecka, Praha
Petr Lukšan, 2M, G W. Piecka, Praha

Kategorie C

1. *Jan Vondrák*, 1M, G W. Piecka, Praha
2. *Michal Motyčka*, 1M, G W. Piecka, Praha
3. *Pavlína Čapková*, 1, Štěpánská, Praha
4. *Petr Mitošinka*, 1, Nad alejí, Praha
5.—7. *Michal Kubeček*, 1M, G W. Piecka, Praha
Vít Novák, 8, ZŠ, Na planině, Praha
Martin Špaček, 1, U lib. zámku, Praha
8.—12. *Jan Kynčl*, 1, Sladkovského n., Praha
Karel Veselý, 1, Nad alejí, Praha
Alena Bičáková, 1M, G W. Piecka, Praha
Jan Kybic, 1M, G W. Piecka, Praha
Jiří Reiterman, 1M, G W. Piecka, Praha

Kategorie P

1. *Petr Čížek*, 1M, G W. Piecka, Praha
2. *Václav Bohdanecký*, 4M, G W. Piecka, Praha
3.—4. *Petr Brož*, 4M, G W. Piecka, Praha
Štěpán Kasal, 2M, G W. Piecka, Praha
5. *Arnošt Kobylka*, 4M, G W. Piecka, Praha
6. *Adam Holub*, 3M, G W. Piecka, Praha
7.—8. *Michal Kubeček*, 1M, G W. Piecka, Praha
Petr Štěpán, 1M, G W. Piecka, Praha
9. *Jaroslav Šprongl*, 2M, G W. Piecka, Praha
10. *Martin Schnabl*, 2M, G W. Piecka, Praha

Středočeský kraj

Kategorie A

1. *Vladimír Šolc*, 3MF, Beroun
2. *Radek Novotný*, 4MF, Mladá Boleslav

Kategorie B

1.—2. *Tomáš Vrbata*, 2MF, Kladno
Tomáš Pračka, 2, Říčany
3. *Josef Soukal*, 2MF, Ml. Boleslav
4. *Miroslav Vaic*, 2MF, Kladno
5.—7. *Roman Chaloupka*, 2MF, Kladno
Lenka Kurzveilová, 2MF, Ml. Boleslav
Jaroslava Šulcová, 2MF, Ml. Boleslav

8.—9. *Miroslav Bárta*, 2MF, Benešov
Jan Němec, 2, Nymburk
10.—11. *Jan Kala*, 2MF, Kralupy
Filip Linhart, 2, Poděbrady

Kategorie C

1. *Tomáš Němec*, 1MF, Beroun
2. *Lenka Maršíková*, 1, Říčany
3.—5. *Tomáš Hendrich*, 1MF, Beroun
Adrian Trčka, 1MF, Beroun
Jiří Sedláček, 1MF, Ml. Boleslav
6. *Jaroslav Fanfrlík*, 1, Říčany
7. *Dušan Janovský*, 1, Slaný
8. *Martin Helmich*, 1MF, Ml. Boleslav
9.—11. *Vladimír Tučan*, 1MF, Kladno
Jakub Prox, 1, Poděbrady
Petr Burian, 1, Vlašim

Kategorie P

1. *Vladimír Šolc*, 3MF, Beroun
2. *Pavel Šenkyřík*, 4, Hořovice
3. *Michal Špimr*, 2MF, Kolín

Jihočeský kraj

Kategorie A

1. *Jan Macháček*, 3, Pelhřimov
2. *David Boukal*, 4M, Jírovcova, České Budějovice

3. *Jan Balák*, 3M, Jírovcova, České Budějovice
4. *Jakub Čermák*, 3M, Jírovcova, České Budějovice

Kategorie B

1. *Jan Dvořák*, 2M, Jírovcova, České Budějovice
2. *Petr Fedra*, 2M, Jírovcova, České Budějovice
3.—4. *Pavel Kopřiva*, 2, SPŠ Písek
Milan Šimánek, 2, Pelhřimov
5. *Hana Šnajdrová*, 2, Tábor
6.—9. *Petra Dvořáková*, 2M, Jírovcova, České Budějovice
Jiří Fontán, 2M, Jírovcova, České Budějovice
Josef Lexa, 2M, Jírovcova, České Budějovice
Irena Šindelářová, 2M, Jírovcova, České Budějovice
10.—12. *Josef Šilha*, 2, Tábor
Martin Felenda, 2, Soběslav
Zdeněk Petrášek, 2MF, K. Šatala, České Budějovice

Kategorie C

1. *Dalibor Jelínek*, 1MF, K. Šatala, České Budějovice
2.—3. *Tomáš Kimmer*, 1MF, Pelhřimov
Libuše Štěpničková, 1, Písek
4. *Michael Schenk*, 1M, Jírovcova, České Budějovice
5.—9. *Stanislav Drdel*, 1, SEŠ Písek
Marcel Horváth, 1, SEŠ Písek
Petr Macháček, 1MF, Pelhřimov
Petr Ságl, 1MF, Pelhřimov
Miroslav Voborník, 1M, Jírovcova, České Budějovice
10.—11. *Jiří Čáp*, 1, Písek
Ladislav Nagy, 1M, Jírovcova, České Budějovice

Kategorie P

1. *Jan Macháček*, 3, Pelhřimov
2. *Jakub Čermák*, 3M, Jírovcova, České Budějovice
3. *Milan Předota*, 3M, Jírovcova, České Budějovice
4. *Jan Balák*, 3M, Jírovcova, České Budějovice
5. *Bednář*, 3, Soběslav

Západočeský kraj

Kategorie A

1. *Martin Kraus*, 3MF, Karlovy Vary
2. *Miroslav Vicher*, 4MF, Karlovy Vary
3. *Šimon Kos*, 4M, G J. Fučíka, Plzeň
4. *Jiří Fürst*, 4M, G J. Fučíka, Plzeň

Kategorie B

1. *Martin Čihák*, 2MF, Karlovy Vary
2. *Miroslav Černý*, 2MF, Karlovy Vary
3. *Karel Soukeník*, 2M, G J. Fučíka, Plzeň
4. *Tomáš Kadlec*, 2M, G J. Fučíka, Plzeň
5. *Petr Zeman*, 2M, G J. Fučíka, Plzeň
6. *David Faflík*, 2MF, Sokolov

7.—8. *Radan Slavík*, 2MF, Cheb
Zdeněk Valečko, 2M, G J. Fučíka, Plzeň

9. *Radek Cibulka*, 2, Sokolov

Kategorie C

1. *Jan Smolík*, 1M, G J. Fučíka, Plzeň
2. *Marek Pathy*, 1M, G J. Fučíka, Plzeň
3.—4. *Martin Marx*, 1MF, Cheb
Bohumil Nováček, 1M, G J. Fučíka, Plzeň
5. *Pavel Loskot*, 1M, G J. Fučíka, Plzeň
6. *Petr Chrastina*, 1MF, Karlovy Vary
7. *Jan Kotas*, 1M, G J. Fučíka, Plzeň
8. *Luboš Motl*, 1MF, Opavská, Plzeň

Kategorie P

1. *Pavel Vanoušek*, 3MF, Cheb
2.—3. *Vítězslav Babický*, 4M, G J. Fučíka, Plzeň
Miroslav Vicher, 4MF, Karlovy Vary
4. *Martin Bureš*, 3M, G J. Fučíka, Plzeň
5. *Jakub Vosáhlo*, 4MF, Karlovy Vary
6.—7. *Petr Mazanec*, 2, Klatovy
Jan Štrunc, 3M, G J. Fučíka, Plzeň

Severočeský kraj

Kategorie A

1. *Oldřich Vojtíšek*, 4M, Liberec
2. *Tomáš Brázda*, 4MF, Teplice
3. *Štěpána Lazarová*, 4, Děčín

Kategorie B

1.—2. *Ladislav Šimek*, 2MF, Ústí n. L.
Aleš Hácha, 2M, Liberec
3. *Radek Škoda*, 2M, Liberec
4. *Filip Bartl*, 2M, Liberec
5. *Stanislav Dunaj*, 2MF, Ústí n. L.
6.—14. *Zdeněk Slavík*, 2, Děčín
Jiří Fiala, 2M, Liberec
Petra Hájková, 2M, Liberec
Stanislav Lála, 2M, Liberec
Štěpánka Zitková, 2M, Liberec
Milan Cáder, 2M, Liberec
Marta Minářová, 2M, Liberec
Jana Kopalová, 2M, Liberec
Milan Klouček, 2M, Liberec

Kategorie C

1. *Petr Jiřička*, 1M, Liberec
2. *Tomáš Zellerin*, 1MF, Ústí n. L.
3. *Jaromír Kohout*, 1, Žatec
4. *Radek Lopušník*, 1MF, Ústí n. L.
5. *Hans Ginzel*, 1M, Liberec
6. *Martin Stianko*, 1M, Liberec
7. *Petr Hudský*, 1, SPŠ stroj. a el., Ústí n. L.
8.—9. *Jaroslav Svoboda*, 1M, Liberec
Pavel Křečan, 1M, Liberec

Kategorie P

1. *Oldřich Vojtíšek*, 4M, Liberec
2. *Petr Jäger*, 4P, Litoměřice
3. *Dan Lukeš*, 4M, Liberec

Východočeský kraj

Kategorie A

1. *Petr Merta*, 4M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Petr Duczynski*, 4, Nová Paka

3.—4. *Zbyněk Šír*, 4M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Jan Vomlel, 3M, G J. K. Tyla, Hradec Králové

5.—7. *Štěpán Holub*, 4MF, Trutnov
Petr Tobiška, 2M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Zbyněk Vašata, 4M, G J. K. Tyla, Hradec Králové

Kategorie B

1.—2. *Daniela Loskotová*, 2, Havlíčkův Brod
Pavel Fiala, 2MF, Pardubice

3. *Petr Tobiška*, 2M, G J. K. Tyla, Hradec Králové

4.—5. *Jiří Komárek*, 2M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Lenka Elsnerová, 2, SPŠE 1, Pardubice

6.—8. *Martin Jirman*, 2MF, Náchod
Dalimil Keršláger, 2M, G J. K. Tyla, Hradec Král.
Čeněk Honsa, 2MF, Pardubice

9.—10. *Jiří Formánek*, 2MF, Pardubice
Daniel Beneš, 2MF, Pardubice

Kategorie C

1. *Bohumila Píšová*, 1MF, Pardubice
2. *Rostislav Benák*, 1MF, Pardubice
3.—4. *Jiří Holfeuer*, 1, Hlinsko
Jarmil Škop, 1MF, Šimkova, Hradec Králové
5.—8. *Pavlína Kubátová*, 1MF, Pardubice
Tomáš Láska, 1, Turnov
Martina Oppltová, 1MF, Trutnov
Otto Severýn, 1, Jilemnice
9.—11. *Rudolf Mareš*, 1M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Petr Sezemský, 1, Polička
Aleš Slabý, 1MF, Pardubice

Kategorie P

1. *Zbyněk Šír*, 4M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Martin Horký*, 3P, Pardubice
3. *Petr Merta*, 4M, G J. K. Tyla, Hradec Králové
4. *Tomáš Jindra*, 4MF, Pardubice
5. *Štěpán Holub*, 4MF, Trutnov
6. *Martin Červený*, 4, G Šimkova, Hradec Králové

Jihomoravský kraj

Kategorie A

1. *Tomáš Brodský*, 4M, tř. kpt. Jaroše, Brno
2. *Marek Velešík*, 4P, Koněvova, Brno
3. *Michal Konečný*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno

4.—5. *Michal Bulant*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Rostislav Caha, 4M, tř. kpt. Jaroše, Brno
6. *Martin Holla*, 4MF, Kořenová, Brno
7.—10. *Pavel Horský*, 4, Elgartova, Brno
Jan Kasprzak, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Jiří Medveď, 3MF, Zlín
Zdeněk Pavlas, 4MF, tř. kpt. Jaroše, Brno

Kategorie B

1.—2. *Tomáš Tyc*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Milan Zamazal, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
3.—4. *Oldřich Auda*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Milan Konečný, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
5.—7. *Lucie Douškova*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Michal Hejč, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Zdeněk Pezlar, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
8.—10. *Jiří Kalvoda*, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Martin Panák, 2M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Jan Stránský, 2, Boskovice

Kategorie C

1. *Pavel Růžička*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno
2.—4. *Josef Menšík*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Michal Stehlík, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Pavel Vrbacký, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno
5.—6. *Jiří Buráň*, 1, Uherský Brod
Jan Štambera, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno
7.—9. *Markéta Bauchnerová*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Jiří Mucha, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno

Irena Přibylová, 1, Jihlava
10.—13. *Jan Fikar*, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Miroslav Kovář, 1P, Koněvova, Brno
Filip Münz, 1M, tř. kpt. Jaroše, Brno
Eva Nováková, 1, Jihlava

Kategorie P

1.—2. *Zdeněk Pavlas*, 4MF, tř. kpt. Jaroše, Brno
Marek Velešík, 4P, Koněvova, Brno
3. *Michal Šmídek*, 4, tř. kpt. Jaroše, Brno
4.—5. *Vladimír Chvátil*, 3, Koněvova, Brno
David Krásenský, 3M, tř. kpt. Jaroše, Brno
6. *David Mahdal*, 4, Zlín
7. *Martin Ryšánek*, 4, tř. kpt. Jaroše, Brno
8.—9. *Dušan Chromý*, 3, tř. kpt. Jaroše, Brno
Michal Kadaňka, 3, tř. kpt. Jaroše, Brno
10. *Miroslav Padalík*, 4M, tř. kpt. Jaroše, Brno

Severomoravský kraj

Kategorie A

1. *Petr Hliněný*, 3M, G M. Koperníka, Bílovec
2.—3. *Martin Kučera*, 4M, G M. Koperníka, Bílovec
Libor Němeček, 4M, G M. Koperníka, Bílovec
4. *Aleš Kuběna*, 2M, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie B

1.—2. *Lukáš Buček*, 2, G M. Koperníka, Bílovec

Pavel Rychlý, 2, tř. Jiřího z Poděbrad, Olomouc

3.—5. *David Habrnál*, 2, G M. Koperníka, Bílovec
Aleš Kuběna, 2, G M. Koperníka, Bílovec
Petr Waclawek, 2, Karviná

6.—7. *Radim Moric*, 2M, G M. Koperníka, Bílovec
Oldřich Doseděl, 2M, G M. Koperníka, Bílovec

8.—9. *Jiří Skotnica*, 2M, G M. Koperníka, Bílovec
Radek Horenský, 2, tř. Jiřího z Poděbrad, Olomouc

10.—15. *Václav Diviš*, 2M, G M. Koperníka, Bílovec
Radim Kubacki, 2M, G M. Koperníka, Bílovec
Petr Šindýlek, 2M, G M. Koperníka, Bílovec
Jan Moškoř, 2M, G M. Koperníka, Bílovec
Petr Poměnka, 2M, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie C

1. *Ivo Šlosarčík*, 1, dr. Šmerala, Ostrava

2.—3. *Aleš Kolenovský*, 1M, G M. Koperníka, Bílovec
Marta Janebová, 1, Valašské Meziříčí

4.—8. *Marek Blahuta*, 1M, G M. Koperníka, Bílovec
Radomír Nosek, 1M, G M. Koperníka, Bílovec
Tomáš Přeček, 1, F. Hajdy, Ostrava-Hrabůvka
Jan Jančura, 1, Thälmannova, Ostrava-Poruba
Jana Slívová, 1, M. Majerové, Ostrava-Poruba

9.—15. *Ondřej Prusek*, 1M, G. M. Koperníka, Bílovec
Roman Koch, 1M, G. M. Koperníka, Bílovec
Alan Bulava, 1M, G. M. Koperníka, Bílovec
Roman Charvot, 1, Karviná
Jan Kovář, 1, Karviná
René Gemel, 1, Karviná
Libor Míša, 1, SPŠ strojní, Přerov

Kategorie P

1. *Robert Myška*, 4, tř. Jiřího z Poděbrad, Olomouc
2. *Richard Vlach*, 4, Rožnov p. Radh.

3.—5. *Jiří Suchomel*, 3, Zábřeh na Moravě
Martin Čížek, 3, Rožnov p. Radh.
Jiří Rojíček, 4, G. M. Koperníka, Bílovec

6.—8. *Roman Liszka*, 4, G. M. Koperníka, Bílovec
Hana Jonášová, 4, Rožnov p. Radh.
Mojmír Němeček, 3, Havířov-Bludovice

9.—10. *Radek Lučan*, 3, Frýdek-Místek
Tomáš Sobek, 2, Opava

Bratislava

Kategorie A

1.—2. *Ilja Martišovitš*, 4MF, G J. Hronca, Bratislava
Ondrej Šuch, 3M, G A. Markuša, Bratislava

3. *Martin Dindoš*, 3MF, G J. Hronca, Bratislava
4. *Andrej Doboš*, 4M, G A. Markuša, Bratislava

5.—7. *Štefan Dobrev*, 4M, G A. Markuša, Bratislava
Viliam Búr, 7. tř., ZŠ, Medzilaborecká, Bratislava
Igor Baník, 4MF, G J. Hronca, Bratislava

8.—9. *Jana Zdražilová*, 4M, G A. Markuša, Bratislava
Milan Mosný, 4MF, G J. Hronca, Bratislava

10. *Stanislav Januschke*, 4MF, G J. Hronca, Bratislava

Kategorie B

1.—6. *Martin Fedor*, 2M, G A. Markuša, Bratislava

Ján Richter, 2M, G A. Markuša, Bratislava
Vladimír Špitálský, 2M, G A. Markuša, Bratislava
Ivan Červenka, 2, Metodova, Bratislava
Igor Malý, 2MF, G J. Hronca, Bratislava
Martin Vojtko, 2MF, G J. Hronca, Bratislava
7.—10. *Juraj Džubas*, 3M, G A. Markuša, Bratislava
Ivan Mavalda, 2M, G A. Markuša, Bratislava
Andrea Šlesárová, 2M, G A. Markuša, Bratislava
Martin Uher, 2M, G A. Markuša, Bratislava

Kategorie C

1.—3. *Ladislav Kis*, 1M, G A. Markuša, Bratislava
Juraj Lanyi, 1, G A. Markuša, Bratislava
Pavol Mederly, 1M, G A. Markuša, Bratislava
4.—8. *Richard Kollár*, 1M, G A. Markuša, Bratislava
Matej Kordoš, 1, G J. Hronca, Bratislava
Mariana Makarová, 1, G J. Hronca, Bratislava
Matej Ondrušek, 8 tř., ZŠ, Košická, Bratislava
Miloš Volauf, 8 tř., ZŠ, Košická, Bratislava
9. *Michal Kopčok*, 1M, G A. Markuša, Bratislava
10.—12. *Miroslav Čik*, 1, Tomašíkova, Bratislava
Michal Suchoba, 1, G J. Hronca, Bratislava
Martin Vršanský, 1, G J. Hronca, Bratislava

Kategorie P

1. *Ilja Martišovitš*, 4MF, G J. Hronca, Bratislava
2. *Martin Dindoš*, 3MF, G J. Hronca, Bratislava
3. *Štefan Dobrev*, 4M, G A. Markuša, Bratislava
4. *René Pázmán*, 4MF, G J. Hronca, Bratislava

5. *Peter Gvozdiak*, 4M, G A. Markuša, Bratislava
6.—8. *Vladimír Ďuračka*, 3MF, G J. Hronca, Bratislava
Stanislav Januschke, 4MF, G J. Hronca, Bratislava
Milan Mosný, 4MF, G J. Hronca, Bratislava
9. *Ondrej Šuch*, 3M, G A. Markuša, Bratislava

Západoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Gabriel Varga*, 4, Šamorín
2. *Ondrej Šedivý*, 3MF, Párovská, Nitra
3. *Eva Fašangová*, 4, Želiezovce
4. *Zuzana Miškolciová*, 4, G E. Gudernu, Nitra
5. *Karol Zimmer*, 4, G E. Gudernu, Nitra
6. *Ján Obrcian*, 4MF, Párovská, Nitra
7. *Vladimír Králik*, 3, Zlaté Moravce
8. *Tibor Rapant*, 3, Trnava
9. *Ivo Kluvanec*, 3MF, Párovská, Nitra
10. *Radovan Dermišek*, 3, Skalica

Kategorie B

1. *Michal Slezák*, 2, G E. Gudernu, Nitra
2. *Ladislav Nagy*, 2, Komárno
3. *Jaromír Živna*, 2, Skalica
4. *Peter Šedík*, 2, Trenčín
5. *Daniel Vidovič*, 2, Partizánske
6. *Robert Kadlec*, 2MF, Párovská, Nitra
7. *Monika Bolebruchová*, 2, Nové Mesto n. Váhom
8. *Alexander Tomík*, 2P, Piešťany

Kategorie C

1. *Tibor Drinka*, 1, Galanta
2. *Pavol Maľa*, 1, Šala
3. *Peter Básti*, 1, Komárno
4. *Zsolt Csandal*, 1, Komárno
5. *Jaroslav Porubčanský*, 1, SPŠ, Nitra
6. *Lubomír Salanci*, 1MF, Párovská, Nitra
7. *Jozef Tilandy*, 1, Trenčín
8. *Norbert Futó*, 1, Galanta
9. *Štefan Klbik*, 1MF, Párovská, Nitra

Kategorie P

1. *Andrej Lúčny*, 4P, Piešťany
2. *Jozef Gerhát*, 4, Topoľčany
3. *Roland Baranovič*, 4, G, E. Gudernu, Nitra

Středoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Jozef Skokan*, 3M, Veľká Okr., Žilina
2.—3. *Róbert Mitka*, 4M, Veľká Okr., Žilina
Juraj Lörinc, 2M, Banská Bystrica
4. *Eduard Omasta*, 3, Ružomberok
5. *Ľuboš Ciklamíni*, 4M, Veľká Okr., Žilina
6. *Aleš Černý*, 4M, Veľká Okr., Žilina
7. *Blažej Štrba*, 4M, Nová Baňa
8. *Vladimír Glasnák*, 2MF, Veľká Okr., Žilina

Kategorie B

1. *Juraj Lörinc*, 2M, Tajovského, Banská Bystrica
2. *Šimon Malý*, 2MF, Žiar nad Hronom
3. *Radoslav Harman*, 2MF, Liptovský Hrádok
4. *Vladimír Glasnák*, 2MF, Veľká Okr., Žilina
5. *Peter Malčovský*, 2MF, Prievidza
6. *Vojtech Goceliak*, 2M, Tajovského, Banská Bystrica
7. *Valerián Valášek*, 2M, Tajovského, Banská Bystrica
8. *Roman Tlsták*, 2MF, Liptovský Mikuláš
9. *Ružena Zimanová*, 2MF, Prievidza
10. *Rastislav Ilko*, 2MF, Považská Bystrica

Kategorie C

1. *Lubomír Macek*, 1MF, Liptovský Mikuláš
2. *Jaroslava Kuciariková*, 1M, Veľká Okr., Žilina
3. *Marián Kučera*, 1, Liptovský Hrádok
4. *Roman Mackovčák*, 1M, Veľká Okr., Žilina
5. *Peter Nemec*, 1M, Tajovského, Banská Bystrica
6. *Tomáš Neuberg*, 1M, Tajovského, Banská Bystrica
7. *Miroslav Škultéty*, 1, Brezno
8. *Adrian Kováč*, 1MF, VPT, Martin
9. *Branislav Kušnierik*, 1MF, VPT, Martin
10. *Pavel Kyčina*, 1, Liptovský Mikuláš

Kategorie P

1. *Gregor Rayman*, 4, Banská Štiavnica
2. *Róbert Mitka*, 4M, Veľká Okr., Žilina
3. *Eduard Omasta*, 3, Ružomberok

4. *Vladimír Glasnák*, 2MF, Veľká Okr., Žilina
5. *Michal Hrabovec*, 3MF, Wolkerova, Žilina
6. *Roman Grolmus*, 4, Banská Štiavnica

Východoslovenský kraj

Kategorie A

1. *Vladimír Komár*, 3M, Šmeralova, Košice
2. *Maroš Rusňák*, 4M, Šmeralova, Košice
3. *Ján Franek*, 4M, Šmeralova, Košice
4. *Vladimír Skalský*, 3, G T. Ševčenka, Prešov

Kategorie B

1. *Radovan Teleki*, 2, Spišská Nová Ves
2. *Peter Varga*, 2, Šrobárova, Košice
3. *Marianna Lechmanová*, 2, Trebišovská, Košice
4.—6. *Ondrej Pajtáč*, 2, Michalovce
Helena Petrovičová, 2M, Šmeralova, Košice
Stanislav Novák, 2M, Šmeralova, Košice
7. *Marcel Presalovič*, 2, Stropkov
8.—11. *Marek Mikita*, 2M, Šmeralova, Košice
Lubor Kušnír, 2, G T. Ševčenka, Prešov
Slavomír Hrinko, 2, Konštantínova, Prešov
Peter Paštéka, 2M, Šmeralova, Košice

Kategorie C

1. *Miroslav Chladný*, 1M, Šmeralova, Košice
2. *Herbert Vojčík*, 1M, Šmeralova, Košice

3. *Marek Gura*, 1, Leninovo nábr., Poprad
4. *Imrich Kováč*, 1, SPŠ strojní, Spišská Nová Ves
5.—8. *Dalibor Michalák*, 1, Záp. ulica, Poprad
Luboš Pástor, 1M, Šmeralova, Košice
Marek Soták, 1, Humenné
Marcel Telka, 1, SPŠE, Prešov
9.—11. *Gregor Bánó*, 1, Kuzmányho, Košice
Ján Maňuch, 1M, Šmeralova, Košice
Jana Višňovská, 1M, Šmeralova, Košice

Kategorie P

1. *Vladimír Skalský*, 3P, G T. Ševčenka, Prešov
2. *Slavomír Gmitro*, 3, Konštantínova, Prešov
3. *Miroslav Bobovský*, 3, SPŠ, Poprad
4. *Peter Haluska*, 3M, Šmeralova, Košice

Kategorie C

Texty úloh

C - I - 1

V magickém čtverci 3×3 jsou vepsána přirozená čísla tak, že všechny součiny tří čísel v řádcích, sloupcích i úhlopříčkách jsou stejné. Dokažte, že je pak součin všech devíti vepsaných čísel devátou mocninou přirozeného čísla.

C - I - 2

Rovnostranný trojúhelník ABC o délce strany 4 cm otočíme kolem jeho průsečíku výšek o 90°, dostaneme tak trojúhelník $A'B'C'$. Určete obsah průniku trojúhelníků ABC a $A'B'C'$.

C - I - 3

Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} 9x + y + z &= 83 \\ x + 9y + z &= 99 \\ x + y + 9z &= 69, \end{aligned}$$

která má při změně jednoho čísla na pravé straně na jiné dvoj-

ciferné číslo celočíselné řešení. Najděte toto číslo a příslušné řešení soustavy.

C - I - 4

Vrcholem C trojúhelníku ABC veďte přímku p tak, aby součet vzdáleností bodů A, B od přímky p byl největší.

C - I - 5

Dokažte, že existuje přirozené číslo k, pro které existuje právě 1 988 různých pythagorejských trojúhelníků s odvěsnou délky k. (Pythagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran.)

C - I - 6

Jaký největší počet čísel je možné vybrat z čísel 1, 2, ..., 1 989, aby žádné z nich se nerovnalo součtu jiných dvou vybraných čísel?

C - S - 1

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky 12 cm, D je střed strany BC. Vypočtěte obsah průniku čtverců $ADKL$, $ABMN$, které neobsahují bod C.

C - S - 2

Opravte pravou stranu právě jedné z rovnic $x + 2y = 43$,

$2x + y = 50$, $x + y = 30$, $x - y = 4$ tak, aby opravená soustava měla řešení v oboru reálných čísel. Napište opravenou soustavu a její řešení.

C - S - 3

Ve třídě je 30 žáků, každému je přiřazeno pořadové číslo podle abecedního seznamu. Učitel vyvolává žáky podle tohoto pravidla: Sečte pořadová čísla dvou posledně vyvolaných žáků, a jestliže je součet větší než 30, odečte číslo 30. Výsledek je pořadové číslo žáka, který bude vyvolán. Dokažte, že nemohou být bezprostředně po sobě vyvoláni Horáček, Šebestová a Mach v tomto pořadí.

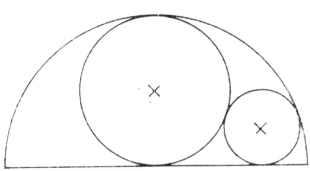
C - II - 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + xy + xz &= 80 \\ xy + y^2 + yz &= 48 \\ xz + yz + z^2 &= -64. \end{aligned}$$

C - II - 2

Do půlkruhu s poloměrem 4 jsou vepsány dva kruhy s průměry 4 a d, které se dotýkají (obr. 1). Vypočtěte d.



Obr. 1

C - II - 3

Je dán pravidelný dvanáctiúhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ vepsaný kružnici s poloměrem 10. Vypočtěte obsah lichoběžníku $A_1A_2A_4A_5$.

C - II - 4

Množina M se skládá z $n + 1$ celých kladných čísel menších než $2n$. Dokažte, že některé z nich se rovná součtu nejmenšího čísla z množiny M a některého dalšího čísla z této množiny.

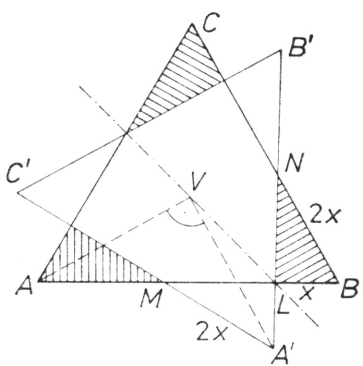
Řešení úloh

C - I - 1

Označme po řadě a, b, c čísla vepsaná do prvního řádku, podobně d, e, f čísla v druhém a g, h, i čísla v třetím řádku magického čtverce. Označme dále s součin čísel v řádku, sloupci nebo na diagonále. Je tedy $s = abc = def = ghi = adg = beh = cfi = aei = gec$. Proto je $s^4 = (def).(beh).(aei).(gec) = (abc).(def).(ghi).e^3 = s^3e^3$, odkud plyne $s = e^3$. Pro součin všech devíti vepsaných čísel pak platí $(abc).(def).(ghi) = s^3 = e^9$, je to tedy devátá mocnina toho čísla, které stojí uprostřed čtverce.

C - I - 2

Označme M průsečík přímek AB a $C'A'$, N průsečík přímek BC a $A'B'$ (obr. 2), průsečík výšek trojúhelníku ABC označíme V. Otočení kolem bodu V o pravý úhel složíme ještě s osovou souměrností podle osy úsečky $A'B'$. Výsledné zobrazení zobrazuje bod A na bod B', bod B na bod A', bod C na bod C', bod V je samodružný, zobrazí se na sebe. Toto složené zobrazení je tudíž osová souměrnost, neboť zobrazuje trojúhelník AVB na trojúhelník $B'VA'$. Průsečík L přímky AB a jejího obrazu $B'A'$ je tedy také samodružný, bod M se zobrazí na bod N a bod N na bod M. Označíme-li $x = |LB| = |A'L|$, je $|LN| = |ML| = x\sqrt{3}$ a $|BN| = |MA'| = 2x$, neboť trojúhelník LBN je pravoúhlý a jeho vnitřní úhel při vrcholu B je 60°. Je ovšem též $|AM| = 2x$, protože při otočení kolem bodu V o 120°, při kterém se bod A zobrazí na bod B a bod B na bod C, zobrazí se bod C'



Obr. 2

na bod A' a bod A' na bod B', takže se bod M zobrazí na bod N. Je $|AB| = 4 = |AM| + |ML| + |LB| = 2x + x\sqrt{3} + x = x(3 + \sqrt{3})$, odkud $x = \frac{2(3 - \sqrt{3})}{3}$.

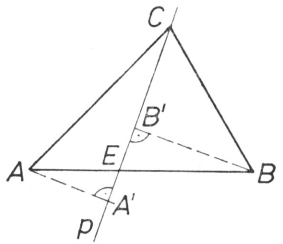
Obsah průniku trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ dostaneme, když od obsahu trojúhelníku ABC odečteme obsah vyšrafované části, tj. trojnásobek obsahu trojúhelníku BLN. Výsledek je $4(3 - \sqrt{3})$.

C - I - 3

Jsou-li čísla x, y, z řešením dané soustavy, je $8(y - x) = 16$, $8(y - z) = 30$ a $8(x - z) = 14$. Poslední dvě rovnice, které jsme dostali odečtením třetí rovnice od prvních dvou rovnic soustavy, ukazují, že x, y, z nemohou být celá čísla. Jelikož máme změnit pravou stranu jen jedné z daných rovnic, musí to být rovnice třetí, číslo 69 nahradíme zatím neznámým číslem a. Z prvních dvou rovnic plyne $y = x + 2$, dosazením do první a třetí rovnice dostaneme $10x + z = 81, 2x + 9z = a - 2$, odkud $88x = 731 - a = 88.7 + 115 - a$. Má-li být x celé číslo, musí být číslo $115 - a$ dělitelné číslem 88. Jelikož má být číslo a dvojciferné, musí být $a = 27$. Je pak $x = 8$, $y = 10$, z vychází rovněž celočíselné, $z = 1$.

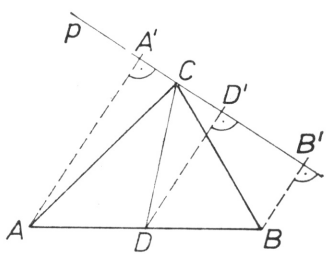
C - I - 4

Uvažujme nejdříve jen ty přímky, které procházejí bodem C a protínají úsečku AB (obr. 3). Označme E společný bod přímky p (procházející bodem C) a úsečky AB, paty



Obr. 3

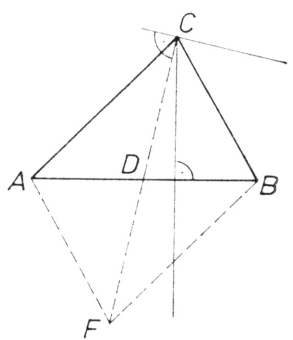
kolmic vedených body A, B na přímku p označíme A', B'. Je pak $|AA'| + |BB'| \leqq |AE| + |BE| = |AB|$, přičemž $|AA'| + |BB'| = |AB|$ právě tehdy, když je přímka p kolmá k přímce AB a body A', B', E splynou. Uvažujme nyní přímku p, která nemá společný bod s úsečkou AB (obr. 4)



Obr. 4

a prochází samozřejmě bodem C. Opět označíme A', B' paty kolmic vedených body A, B k přímce p, dále označíme D' patu kolmice vedené k přímce p středem D úsečky AB. Úsečka DD' je střední příčkou v lichoběžníku $AA'B'B$ (je-li přímka p rovnoběžná s přímkou AB, je to ovšem obdélník), proto je $|AA'| + |BB'| = 2.|DD'| \leqq 2.|CD|$. Přitom $|AA'| + |BB'| = 2.|CD|$ právě tehdy, když je přímka p

kolmá k přímce CD. Doplňme trojúhelník ABC na rovnoběžník $AFBC$ (obr. 5). Je-li $|CF| = 2.|CD| > |AB|$, je hledanou přímkou přímka p procházející bodem C kolmo k přímce CF, neboť z $|CF| > |AB|$ plyne, že přímka p neprotíná úsečku AB. Je-li $|CF| < |AB|$, je hledanou přímkou p přímka procházející bodem C a kolmá k přímce AB. Přímka p pak úsečku AB protíná. Je-li $|CF| = |AB|$, má úloha dvě řešení, kolmici vedenou bodem C ke straně AB (ta úsečku AB protíná) a dále kolmici vedenou bodem C k úhlopříčce CF obdélníku $AFBC$ (ta úsečku AB neprotíná).



Obr. 5

C - I - 5

Označme a a c délky druhé odvěsny a přepony pythagorejského trojúhelníku, jehož první odvěsna má délku k. Je tedy $k^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$. Čísla $c - a$, $c + a$ musejí být obě lichá nebo obě sudá a první je menší než druhé. Naše úloha bude vyřešena, najdeme-li takové číslo k, jehož druhá

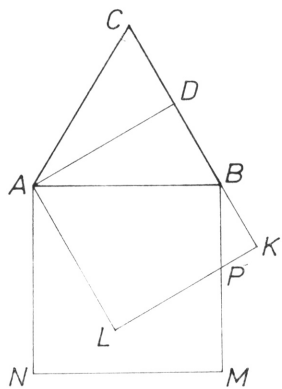
mocnina se dá právě 1 988 způsoby napsat jako součin dvou přirozených čísel stejné parity, přičemž první z nich je menší než druhé. Nejlépe je zkusit vzít nějakou mocninu prvočísla. Vyhovuje například $k = 3^{1988}$, tedy $k^2 = 3^{3976}$. Toto číslo můžeme právě 1 988 způsoby napsat jako součin dvou přirozených čísel tak, aby byly splněny výše uvedené podmínky. Jde o rozklady $k^2 = 3^a . 3^{3976-a}$, kde a probíhá čísla 0, 1, 2, ..., 1 987. Mohli jsme též zvolit $k = 2^{1989}$, tedy $k^2 = 2^{3978}$. Jediné rozklady splňující požadavky úlohy jsou $k^2 = 2^b . 2^{3978-b}$, b nabývá hodnot 1, 2, ..., 1 988.

C - I - 6

Vybereme-li z daných čísel všechna lichá čísla, těch je 995, pak se žádné z vybraných čísel nerovná součtu dvou jiných vybraných, neboť součet každých dvou lichých čísel je číslo sudé. Ukážeme ještě, že více než 995 vybrat nelze. Předpokládejme, že jsme vybrali 996 čísel, od každého z nich odečteme nejmenší vybrané číslo. Dostaneme tak 995 čísel menších než 1 989. Spolu s vybranými 996 čísly je jich dohromady 1 991. Všechna jsou menší než 1 990. Nutně tedy existují mezi vybranými 996 čísly aspoň dvě různá čísla x_1, x_2 tak, že se každé z nich rovná jinému vybranému číslu zmenšenému o nejmenší vybrané číslo z, tj. $x_1 = y_1 - z$, $x_2 = y_2 - z$. Je zřejmě $x_1 \neq y_1 \neq z$, $x_2 \neq y_2 \neq z$. Je-li $x_1 = z$, je $x_2 \neq z$, takže buď čísla x_1, y_1, z, nebo čísla x_2, y_2, z jsou navzájem různá a $x_1 + z = y_1$, $x_2 + z = y_2$. Tím jsme ukázali, že mezi každými 996 přirozenými čísly menšími než 1 990 existují tři navzájem různá čísla tak, že jedno z nich je součtem zbývajících dvou. Odpověď na otázku úlohy je 995.

C-S-1

Je $|AD| = 6\sqrt{3}$ cm, $|BD| = 6$ cm, tedy $|BK| = 6(\sqrt{3} - 1)$ cm (obr. 6). Označme P průsečík úseček KL a BM. Je $|\sphericalangle PBK| = 30°$, takže $|PK| = |BK| : \sqrt{3}$ cm $= (6 - 2\sqrt{3})$ cm. Hledaný obsah dostaneme, když od obsahu čtverce $ADKL$ odečteme obsah trojúhelníku ADB a obsah trojúhelníku PBK, výsledek je $(6\sqrt{3})^2 - 18\sqrt{3} - 12(2\sqrt{3} - 3) = (144 - 42\sqrt{3})$ cm^2.



Obr. 6

C-S-2

Z prvních dvou rovnic plyne $x = 19$, $y = 12$. Tyto hodnoty nevyhovují žádné z dalších dvou rovnic. Z toho plyne,

že je třeba opravit jednu z prvních dvou rovnic. Poslední dvě rovnice mají řešení $x = 17, y = 13$. Tyto hodnoty vyhovují první rovnici, druhou rovnici je třeba opravit na $2x + y = 47$, řešení je $x = 17, y = 13$.

C-S-3

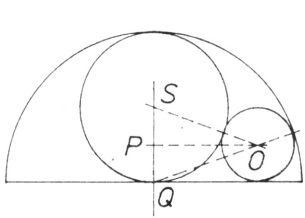
Označme h, $š$, m pořadová čísla Horáčka, Šebestové a Macha, je tedy $h < m < š$. Kdyby byli bezprostředně za sebou vyvoláni Horáček, Šebestová a Mach v tomto pořadí, muselo by platit $h + š = m$ nebo $h + š - 30 = m$. Avšak $h + š$ se nerovná m, protože $š > m$. Druhá rovnost také nemůže platit, neboť $š - 30$ se rovná nule nebo je to číslo záporné, takže $h + š - 30 \leqq h < m$.

C-II-1

Je-li trojice x, y, z řešením dané soustavy, je $x(x + y + z) = 80, y(x + y + z) = 48, z(x + y + z) = -64$, takže $x : y : z = 5 : 3 : (-4)$. Položíme-li tudíž $x = 5k$, $y = 3k$, $z = -4k$, dostaneme $k^2 = 4$, takže $k = 2$ nebo $k = -2$. Soustava má dvě řešení: $x = 10, y = 6, z = -8$ a $x = -10$, $y = -6$, $z = 8$.

C-II-2

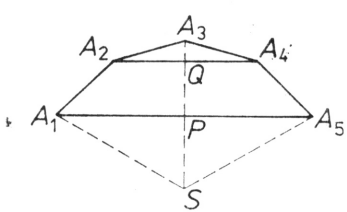
Z pravoúhlých trojúhelníků SOP, OPQ (obr. 7) plyne $|SO|^2 - |SP|^2 = |OQ|^2 - |PQ|^2$, tj. $(2 + r)^2 - (2 - r)^2 = (4 - r)^2 - r^2$, kde r je poloměr menšího kruhu. Odtud $r = 1$, $d = 2$.



Obr. 7

C - II - 3

Označme S střed kružnice opsané dvanáctiúhelníku (obr. 8) a P, Q paty kolmice vedené bodem S k úsečkám A_1A_5, A_2A_4. Je $|A_2A_4| = 10$, $|SQ| = 5\sqrt{3}$. Protože $|\sphericalangle PSA_5| = 60°$, je $|PS| = 5$ a $|A_1A_5| = 2|PA_5| = 2.5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$, tedy $|PQ| = 5\sqrt{3} - 5$. Obsah lichoběžníku je $25(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 50$.



Obr. 8

C - II - 4

Označme a nejmenší číslo z množiny M, nechť $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$ jsou všechna další čísla z množiny M. Přirozená čísla

$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1 - a, a_2 - a, \ldots, a_n - a$ jsou vesměs menší než $2n$ a je jich právě $2n$. Proto nemohou být navzájem různá, pro některé i a některé j $(j \neq i)$ musí platit $a_i = a_j - a$, tj. $a_j = a_i + a$, což jsme měli dokázat.

Kategorie B

Texty úloh

B - I - 1

Dokažte, že v lichoběžníku $ABCD$ neexistuje bod X, pro který by měly trojúhelníky ABX, BCX, CDX, DAX stejný obsah.

B - I - 2

Označme $S(n)$ ciferný součet přirozeného čísla n. Dokažte, že rovnice $S(x + p) = S(x)$ má alespoň jedno řešení, právě když je p dělitelné devíti.

B - I - 3

Z šachovnice $n \times n$, kde n není dělitelné třemi, odstřihneme jedno rohové pole. Dokažte, že zbytek je možné pokrýt deskami tvaru L složenými ze tří čtverců shodných s polem šachovnice tak, že se desky nepřekrývají.

B - I - 4

Najděte nejmenší liché prvočíslo n, které dělí součet

$$2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + n.2^n.$$

B - I - 5

V trojúhelníku ABC označme C_0 střed strany AB a C_1, C_2 průsečíky přímky AB s osami úhlů přímek AC, BC. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány délky úseček CC_0, CC_1, CC_2.

B - I - 6

Nechť t je přirozené číslo a $n = (3^t - 1)|2$. Dokažte, že množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ lze rozdělit na t disjunktních podmnožin $A_1, A_2, \ldots, A_t$ tak, že žádná množina A_i neobsahuje čísla x, y, z s vlastností $x + y = z$.

B - S - 1

Je dáno přirozené číslo n. Určete počet permutací $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$, pro které je součin

$$(a_1 - 1) . (a_2 - 2) . \ldots . (a_n - n)$$

číslo liché.

B - S - 2

Opravte pravou stranu jedné a jen jedné z rovnic $x + y = 41$, $y + z = 13$, $z + x = 16$, $2x + y + z = 55$, $x + 2y + z = 52$ tak, aby opravená soustava rovnic měla řešení v oboru reálných čísel. Napište opravenou rovnici a řešení výsledné soustavy.

B - S - 3

Pro každé přirozené číslo n nechť je $f(n)$ jednociferné číslo, které vznikne z čísla n konečným počtem opakování operace tvoření ciferného součtu (např. $f(78569) = f(35) = 8$). Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je $f(n) = f(3n)$ a $0 < n < 1\,000$.

B - II - 1

Je dáno přirozené číslo n. Najděte celé číslo P tak, aby existovalo právě n navzájem neshodných obdélníků s celočíselnými délkami stran, které mají obsah P.

B - II - 2

Devět judistů se rozhodlo uspořádat vylučovací turnaj následujícím způsobem: V každém kole se z dosud neporažených judistů určí losem dvojice zápasníků, která se utká. Vítěz posledního (osmého) zápasu se stává vítězem turnaje. Zjistěte počet všech možných průběhů takovéto soutěže.

B - II - 3

Určete přirozené číslo, které v číselné soustavě při základu n má zápis $xyz0_n$ a v soustavě při základu $2n$ zápis $yz5_{2n}$. (Zápis $abcd_n$ značí číslo $an^3 + bn^2 + cn + d$, kde $0 \leqq a, b, c, d < n$.)

B - II - 4

Zjistěte, kolik celočíselných řešení má rovnice

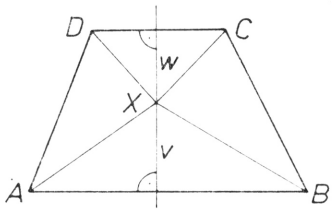
$$\left[\sqrt[1989]{n}\right]+\left[\sqrt[1989]{\frac{n+1}{2}}\right]+\ldots+\left[\sqrt[1989]{\frac{n+1988}{1989}}\right]=$$
$$=1990.$$

([x] značí celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které není větší než číslo x.)

Řešení úloh

B - I - 1

Předpokládejme, že v lichoběžníku $ABCD$ existuje bod X tak, že jsou si rovny obsahy trojúhelníků ABX, BCX, CDX a DAX (obr. 9). Označme S obsah lichoběžníku a v, w vzdálenosti bodu X od přímek AB, CD. Z trojúhelníku ABX plyne $\frac{|AB| \,.\, v}{2} = \frac{S}{4}$, takže $v = \frac{S}{2\,.\,|AB|}$, podobně dostaneme $w = \frac{S}{2\,.\,|CD|}$. Jelikož výška lichoběžníku je $v + w$, je $S = \frac{|AB| + |CD|}{2} \,.\, (v + w) = \frac{S}{4} \cdot \frac{(|AB| + |CD|)^2}{|AB| \,.\, |CD|}$, odkud plyne $(|AB| - |CD|)^2 = 0$, tedy $|AB| = |CD|$. To je však ve sporu s tím, že $ABCD$ je lichoběžník.



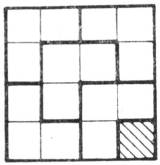
Obr. 9

B - I - 2

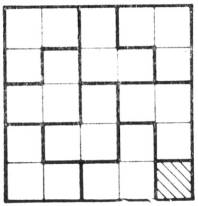
Velmi pěkné řešení této úlohy, které zde uvádíme, podal žák 2. ročníku gymnázia v Brně, tř. kpt. Jaroše *Tomáš Tütz.* Předpokládejme nejdříve, že pro přirozené číslo p existuje přirozené číslo x tak, že $S(x + p) = S(x)$. Jelikož čísla n a $S(n)$ dávají stejný zbytek při dělení devíti (platí pro každé přirozené číslo n), dávají stejný zbytek při dělení devíti i čísla $x + p$ a x, je tedy jejich rozdíl p dělitelný devíti. Nechť je obráceně číslo p dělitelné devíti, tj. $p = 9k$, k přirozené číslo. Pak je číslo k řešením rovnice $S(x + p) = S(x)$, neboť čísla k a $k + p = 10k$ mají stejný ciferný součet.

B - I - 3

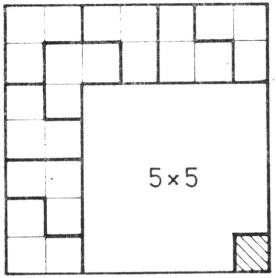
Pro $n = 1$ je úloha triviální, není vlastně co pokrýt. Úloha je též lehce řešitelná pro $n = 2$ a $n = 4$ (obr. 10). Při $n = 5$ musíme chvíli zkoušet, než najdeme nějaké řešení, třeba to, jež je znázorněno na obr. 11. V případě $n = 7$ oddělíme od čtverce 7×7 čtverec 5×5 (obr. 12), od něho odstřihneme jedno rohové pole. Ten pak dovedeme deskami tvaru L



Obr. 10



Obr. 11

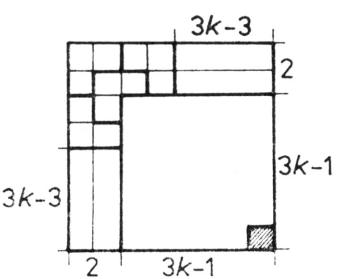


Obr. 12

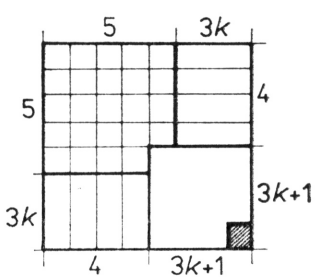
pokrýt, zbytek pokryjeme tak, jak je vidět na obr. 12. Zároveň vidíme, že obdélník 2×3 můžeme pokrýt právě dvěma deskami tvaru L. Z toho však ihned plyne, že můžeme požadovaným způsobem pokrýt každý obdélník o rozměrech $2k$, $3l$, kde k, l jsou přirozená čísla, zvláště tedy čtverec o straně $6m$, m přirozené číslo. Každý takový obdélník se totiž skládá z kl nepřekrývajících se obdélníků o rozměrech 2 a 3. Každé přirozené číslo n větší než 7, jež není dělitelné třemi, se dá právě jedním způsobem napsat ve tvaru $6m + 2$, $6m + 4$, $6m + 5$ nebo $6m + 7$, kde m je přirozené číslo. Čtverec o straně n, z něhož vynecháme jedno rohové pole, se pak skládá z čtverce o straně $6m$, dvou obdélníků, jejichž jedna strana je $6m$ a druhá 2, 4, 5 nebo 7, a čtverce o straně 2, 4, 5 nebo 7, od něhož je odstřiženo jedno rohové pole. Každý z těchto útvarů dovedeme požadovaným způsobem pokrýt. Stačí si uvědomit, že obdélník 6×5 můžeme rozdělit na obdélníky 6×2 a 6×3, podobně obdélník 6×7.

Jiný důkaz: Pro $n = 1$, $n = 2$ a $n = 5$ tvrzení úlohy platí, viz předcházející postup. Nyní dokážeme, že když je tvrzení úlohy pravdivé pro číslo $n = 3k - 1$, je pravdivé též pro

$n = 3k + 1$. Čtverec o straně $3k + 1$ dostaneme totiž z čtverce o straně $3k - 1$ přidáním dvou obdélníků o stranách 2, $3k - 3$ a obrazce složeného ze tří čtverců o straně 2 (obr. 13). Tento obrazec pokryjeme tak, jak je vidět na obr. 13, obdélník $2 \times 3(k - 1)$ dovedeme také pokrýt. Dále dokážeme, že z platnosti tvrzení úlohy pro $n = 3k + 1$ plyne i platnost pro $n = 3k + 5$. Čtverec o straně $3k + 5$ dostaneme z čtverce o straně $3k + 1$ přidáním dvou obdélníků o stranách 4 a $3k$ a čtverce o straně 5, z něhož je vynecháno jedno rohové pole (obr. 14). Opět vidíme, že každou z těchto částí lze požadovaným způsobem pokrýt. Přičteme-li k číslu 2 střídavě číslo 2 a 4, dostaneme všechna sudá přirozená čísla, která nejsou dělitelná třemi. Pro všechna tato čísla tvrzení úlohy na základě předcházejících úvah platí. Přičteme-li k číslu 5 střídavě číslo 2 a 4, dostaneme všechna lichá přirozená čísla, jež nejsou dělitelná třemi. Tvrzení úlohy platí tedy i pro tato čísla.



Obr. 13



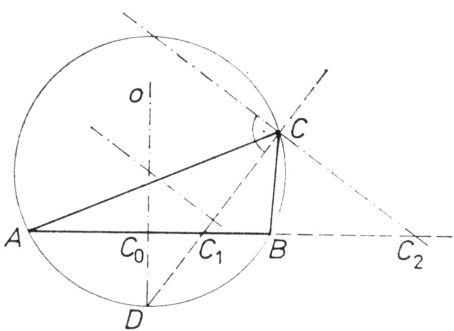
Obr. 14

B - I - 4

Je $2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + n.2^n = 2(2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n) + (2^3 + \ldots + 2^n) + (2^4 + \ldots + 2^n) + \ldots + (2^{n-1} + 2^n) + (2^n) = 2^{n+1}(n - 1)$. Stačí několikrát použít vzorec pro součet prvních členů geometrické posloupnosti. Je-li n liché prvočíslo, pak nemůže dělit číslo 2^{n+1}. Žádné přirozené číslo n nedělí číslo $n - 1$. Neexistuje tedy žádné liché prvočíslo, které by dělilo daný součet. A že se tento součet rovná $(n - 1) . 2^{n+1}$, to se dá dokázat též matematickou indukcí.

B - I - 5

Předpokládejme, že jsme trojúhelník ABC již sestrojili. Označme k kružnici mu opsanou, C_0 střed strany AB, C_1 a C_2 průsečíky os přímek AC, BC s přímkou AB (obr. 15). Ozna-



Obr. 15

čení bodů C_1, C_2 zvolíme tak, aby bod C_1 ležel blíž k bodu C_0 než bod C_2. Bod C_1 pak leží na úsečce AB a přímka CC_1 protíná kružnici k v bodě D, který leží na ose úsečky AB. To vyplývá z věty o obvodových úhlech. Provedený rozbor nám již ukazuje postup konstrukce. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník C_1CC_2 (délky jeho odvěsen jsou dány) a na přímce C_1C_2 sestrojíme bod C_0 tak, aby úsečka CC_0 měla danou délku. Průsečík přímky CC_1 s přímkou o procházející bodem C_0 a kolmou k přímce C_1C_2 označíme D. Přitom musíme označení bodů C_1, C_2 zvolit tak, aby byl bod C_1 blíže k bodu C_0 než bod C_2. Kružnice k se středem na přímce o a procházející body C, D protíná přímku C_1C_2 v bodech A, B. Úloha má tolik řešení, kolik existuje na přímce C_1C_2 bodů C_0 s danou vzdáleností $|CC_0|$ od bodu C, které leží mimo úsečku C_1C_2. Je-li však trojúhelník C_1CC_2 rovnoramenný a existují-li řešení úlohy, jsou to dvě řešení souměrně sdružená podle osy úsečky C_1C_2, takže jde vlastně jen o jedno řešení.

B - I - 6

Pro malá čísla t můžeme taková rozdělení ihned napsat, např. $t = 1 : \{1\}$
$t = 2$: $\{2, 3\}$, $\{1, 4\}$
$t = 3$: $\{1, 4, 10, 13\}$, $\{2, 3, 11, 12\}$, $\{5, 6, 7, 8, 9\}$.
Pro $t = 3$ bychom mohli vzít též rozklad $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$ a $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. V každé množině tohoto rozkladu jsou čísla jdoucí za sebou. Tento postup však už selže při $t = 4$. Hledáním rozkladu při $t = 4$ dojdeme k závěru, že důležitou roli při zařazení čísla do množiny rozkladu hraje jeho zbytek při dělení třemi, devíti nebo další mocninou tří.

Například v množině A_1 všech čísel, jež při dělení třemi dávají zbytek 1, určitě nejsou tři čísla x, y, z s vlastností $x + y = z$. Číslo $x + y$ dává totiž při dělení třemi zbytek 2. Podobně je tomu u množiny A_2 všech čísel, která dávají při dělení číslem $3^2 = 9$ zbytek 2 nebo 3. Množina A_3 nechť je tvořena všemi čísly, jež při dělení číslem $3^3 = 27$ dávají zbytek 5, 6, 7, 8 nebo 9. Takto pokračujeme, množina A_r nechť obsahuje všechna přirozená čísla, jež při dělení číslem 3^r dávají zbytek větší než $\frac{3^{r-1} - 1}{2}$, nejvýše však 3^{r-1}. Součet žádných dvou čísel množiny A_r nepatří do A_r, protože při dělení tohoto součtu číslem 3^r je zbytek větší než 3^{r-1}. Označme ještě B_r, resp. C_r množinu všech čísel, jež při dělení číslem 3^r dávají zbytek 1 až 3^{r-1}, resp. 1 až $\frac{3^{r-1} - 1}{2}$. Je pak $B_r = A_r \cup C_r$, $A_r \cap C_r = \emptyset$. Ukážeme ještě, že C_r je částí sjednocení množin $B_1, B_2, \ldots, B_{r-1}$ pro každé $r \geqq 2$. Je-li $n \in C_r$, je $n = m.3^r + k$, $k \leqq 3^{r-2} + 3^{r-3} + \ldots + 3 + 1$. Je tedy $k = 3^{r-2} + 3^{r-3} + \ldots + 3^{s-1}$ pro některé s, $1 \leqq s \leqq r - 1$, nebo je $k = 3^{r-2} + \ldots + 3^s + 0.3^{s-1} + a.3^{s-2} + \ldots + b.3 + c$, kde $a, \ldots, b, c$ jsou z množiny $\{0, 1, 2\}$ a číslo $z = a.3^{s-2} + \ldots + b.3 + c$ je nenulové. V prvním případě je $n \in A_s$, neboť při dělení číslem 3^s dává zbytek 3^{s-1}. V druhém případě se zbytek čísla n při dělení číslem 3^s rovná z, $1 \leqq z \leqq 3^{s-1}$, takže $n \in B_s$. Nepatří-li do A_s, patří do C_s a můžeme celý proces opakovat. Vzhledem k tomu, že $C_1 = \emptyset$, patří každý prvek množiny C_r do některé z množin $A_1, \ldots, A_{r-1}$, což jsme chtěli dokázat. Zvláště je tedy $C_{t+1} \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t$. Poznamenej-

me ještě, že zavedené množiny $A_1, A_2, \ldots$ nejsou disjunktní, například $7 \in A_1 \cap A_3$. Můžeme se však dohodnout, že do množiny A_r již nedáme ta čísla, která jsou obsažena v některé z množin $A_1, \ldots, A_{r-1}$, $r = 2, 3, \ldots$. Pak budou množiny A_i disjunktní. Množina $M = \left\{1, 2, \ldots, \frac{3^t - 1}{2}\right\}$ je částí množiny C_{t+1}. Tím je vlastně celé tvrzení úlohy dokázáno. Stačí vzít za množinu A_i průnik výše zavedené množiny A_i s množinou M, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Jiný postup využívá matematickou indukci. Pro $t = 1$ tvrzení úlohy platí, nechť $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ je požadovaný rozklad množiny $\{1, 2, \ldots, m\}$, $m = \frac{3^k - 1}{2}$. Definujme rozklad množiny $\left\{1, 2, \ldots, \frac{3^{k+1} - 1}{2}\right\} = \{1, 2, \ldots, 3m + 1\}$ takto:
$A_i' = A_i \cup \{j + 2m + 1 \mid j \in A_i\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$,
$A_{k+1}' = \{m + 1, m + 2, \ldots, 2m + 1\}$. O těchto množinách pak dokážeme, že tvoří požadovaný rozklad v případě $t = k + 1$. Přitom je množina A_i' sjednocením množiny A_i a množiny, kterou dostaneme z množiny A_i »posunutím«.

Byla to úloha obtížná. Vyžadovala od těch žáků, kteří ji chtěli řešit samostatně, hodně trpělivosti při hledání rozkladu pro malá t, aby se tak dopracovali k obecnému řešení. Ukázala jim však, jak se i v matematice uplatní induktivní postup, jak se odhadne obecné řešení, známe-li některá dílčí řešení.

B - S - 1

Daný součin je číslo liché právě tehdy, když pro liché k je číslo a_k sudé a obráceně. To je možné pouze při sudém n, kdy je mezi čísly 1, 2, ..., n stejný počet lichých čísel jako sudých. Čísla $a_2, a_4, \ldots, a_n$ pak musí být lichá, to dává $(n/2)!$ možností. Je to počet permutací čísel $1, 3, \ldots, n-1$. Čísla $a_1, a_3, \ldots, a_{n-1}$ jsou sudá, jde opět o $(n/2)!$ permutací čísel 2, 4, ..., n. Celkem dostáváme $((n/2)!)^2$ permutací požadované vlastnosti při sudém n. Při lichém n je výsledek 0.

B - S - 2

Součet prvních dvou rovnic je ve sporu s pátou rovnicí, jednu z těchto tří rovnic je tedy třeba opravit. Součet první a třetí rovnice je ve sporu s čtvrtou, opět je třeba opravit jednu z těchto tří. Jelikož máme opravit jen jednu, musí to být rovnice první. Soustava zbývajících rovnic má řešení $x = 21$, $y = 18$, $z = -5$. První rovnici je třeba opravit na rovnici $x + y = 39$.

B - S - 3

Číslo $f(n)$ je zbytek při dělení čísla n číslem 9. Pokud bychom však nulu nepovažovali za jednociferné číslo, bylo by $f(n) = 9$ pro všechna čísla n dělitelná devíti, další postup by byl stejný. Je-li $f(n) = f(3n)$, dávají čísla n a $3n$ stejný zbytek při dělení devíti, takže $3n - n = 2n$ je násobek devíti, takže i číslo n je násobek devíti. Je-li obráceně číslo n násob-

kem devíti, je i číslo $3n$ násobek devíti, a tudíž $f(n) = f(3n) = 0$. Hledaná čísla jsou všechny násobky devíti, které jsou menší než 1000.

B - II - 1

Rovnice $P = xy$ má mít právě n různých řešení (x, y) s vlastností $x \leqq y$. Číslo P musí tedy mít právě $2n$ různých dělitelů nebo $2n - 1$ různých dělitelů, bude-li jedno řešení mít vlastnost $x = y$. V tomto případě je P druhou mocninou přirozeného čísla x. Poznamenejme, že dělitelem rozumíme v této úloze vždy jen číslo přirozené, ne celé číslo záporné. Podle výše uvedeného stačí volit například $P = p^{2n-1}$ nebo $P = p^{2n-2}$, kde p je prvočíslo, nebo $P = pq^{n-1}$, kde p, q jsou různá prvočísla.

B - II - 2

Nejdříve je třeba losem určit první dvojici zápasníků. To dává $\binom{9}{2}$ možností. Vzhledem k tomu, že může vyhrát první, nebo druhý, máme pro průběh prvního kola $2.\binom{9}{2}$ možností. Dál postupujeme již podobně, abychom dostali celkový počet, musíme počty možností pro průběh jednotlivých kol mezi sebou násobit.

Výsledek je tedy $2.\binom{9}{2}.2.\binom{8}{2}.2.\binom{7}{2}\ldots 2.\binom{3}{2}.2.\binom{2}{2} =$
$= 9.8.8.7.7. \ldots . 3.3.2.2.1 = 9.(8!)^2$.

B - II - 3

Podle předpokladu má pro x, y, z, n platit

$$xn^3 + yn^2 + zn = y.(2n)^2 + z.2n + 5, \text{ tedy}$$
$$n(xn^2 - 3yn - z) = 5.$$

Protože $n \neq 1$ (číslo 1 nemůže být základem číselné soustavy), je nutně $n = 5$, a tedy $25x - 15y - z = 1$. Proto je číslo $z + 1$ dělitelné pěti, takže $z = 4$ (v číselné soustavě se základem 5 jsou všechny číslice nejvýše rovny 4). Pro x, y pak máme vztah $5x - 3y = 1$. Z celých nezáporných čísel menších než 5 vyhovuje pouze $x = 2$, $y = 3$. Úloha má jediné řešení, je to číslo 345 (v desítkové soustavě), v pětkové soustavě 2 340.

B - II - 4

Číslo 0 nevyhovuje, rovněž $n = 1$ nevyhovuje, neboť by se pak každý z 1989 sčítanců na levé straně rovnice rovnal jedné, jejich součet by nedal 1990. Pro $n > 1$ je

$$n > \frac{n+1}{2} > \ldots > \frac{n+1988}{1989} > 1.$$

Sčítanci na levé straně tedy tvoří nerostoucí posloupnost, každý z nich se rovná aspoň jedné. Jelikož se jejich součet má rovnat 1990, musí se první rovnat dvěma, všechny ostatní se musí rovnat jedné. Je tedy nutné a stačí, aby pro n platilo $3 > \sqrt[1989]{n} \geqq 2$ a $\sqrt[1989]{\frac{n+1}{2}} < 2$, takže $2^{1989} \leqq n < 2^{1990} - 1$. To je celkem $2^{1989} - 1$ možností pro n, tedy tolik řešení má daná rovnice.

Kategorie A

Texty úloh

A - I - 1

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho kvádrů tak, že žádné dva nejsou podobné a jejich hrany a tělesové úhlopříčky mají celočíselnou velikost.

A - I - 2

Najděte nejmenší přirozené číslo r, pro něž existují podmnožiny A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 množiny $\{1, 2, \ldots, r\}$ takové, že pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ platí

$$|A_i| = 5, \qquad |A_i \cup A_{i+1}| = 10 \qquad (A_6 = A_1).$$

A - I - 3

Pro každé přirozené číslo n je dána nekonečná množina A_n, přičemž každé dvě z nich mají konečný průnik. Dokažte, že existuje množina B, pro kterou $B \cap A_n$ je nekonečná, právě když n je sudé.

A - I - 4

Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P. Vedeme-li bodem P rovnoběžky se stranami daného trojúhelníku, dostaneme tři trojúhelníky a tři rovnoběžníky. Dokažte, že součet obsahů těchto tří trojúhelníků je roven aspoň jedné třetině obsahu trojúhelníku ABC.

A - I - 5

Pro nesoudělná celá čísla $p > q > 0$ označme

$$\mathsf{A} = \left\{\left[n\frac{p}{q}\right]; n \in \{1, 2, \ldots, q\}\right\},$$

$$\mathsf{B} = \left\{\left[n\frac{p}{p-q}\right]; n \in \{1, 2, \ldots, p-q\}\right\}.$$

Najděte všechna čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, p\}$, jež nepatří do $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

A - I - 6

Na přímce jsou dány tři různé body A, B, C. Sestrojte kružnici procházející body A, B tak, aby její tečny z bodu C byly navzájem kolmé.

A - S - 1

Množina M má právě n prvků. Kolik existuje dvojic množin (B, C) takových, že $B \subset C \subset M$? (Prázdná množina a množina X jsou podmnožiny množiny X.)

A - S - 2

Je dán trojúhelník ABC, $|AB| < |AC|$. Popište konstrukci bodu B' na straně AB a bodu C' na straně AC, pro které platí, že $B'C' \parallel BC$ a kružnice opsaná trojúhelníku $BB'C'$ se dotýká přímky AC.

A - S - 3

Dokažte, že neexistuje kvádr, jehož rozměry tvoří tříčlennou aritmetickou posloupnost přirozených čísel, jestliže jeho tělesová úhlopříčka má mít také celočíselnou délku.

A - II - 1

Je dán tětivový lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD. Označme E průsečík jeho úhlopříček a F průsečík tečen sestrojených k opsané kružnici v bodech B a C. Dokažte, že přímky EF a AB jsou rovnoběžné.

A - II - 2

Určete nutnou a postačující podmínku pro délky a, b, c stran trojúhelníku ABC, aby byl podobný trojúhelníku PQR

se stranami $|QR| = t_c$, $|RP| = t_b$, $|PQ| = t_a$, což jsou délky těžnic trojúhelníku ABC.

A - II - 3

Najděte všechny neprázdné disjunktní množiny A, B, jejichž sjednocení je množina N všech přirozených čísel a pro které platí: $1989 \in \mathsf{A}$,

$$x \in \mathsf{A}, y \in \mathsf{A} \Rightarrow x + y \in \mathsf{A},$$
$$x \in \mathsf{B}, y \in \mathsf{B} \Rightarrow xy \in \mathsf{B}.$$

A - II - 4

Je dáno n bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Každá přímka, která neprochází žádným z daných bodů, určuje rozklad daných bodů na dvě disjunktní podmnožiny. Kolik různých rozkladů lze takto dostat? (Rozklady porovnáváme jako neuspořádané dvojice množin.)

A - III - 1

V rovině jsou dány tři různé body A, B, C ležící na kružnici se středem S a přímka p kolmá na AS. Průsečíky přímky p s přímkami AB, AC označme D a E. Dokažte, že body B, C, D, E leží na jedné kružnici.

A - III - 2

V rovině je dáno mn úseček, které spojují n daných bodů.

Dokažte, že z nich lze vybrat posloupnost $V_0, V_1, \ldots, V_m$ různých bodů tak, že V_{i-1} a V_i jsou spojeny úsečkou $(1 \leqq i \leqq m)$.

A - III - 3

Pro daná nesoudělná čísla $p > q > 0$ najděte všechny dvojice reálných čísel c, d tak, aby pro množiny

$$\mathsf{A} = \left\{\left[n\frac{p}{q}\right]; n \in \mathsf{N}\right\} \quad \text{a} \quad \mathsf{B} = \{[cn + d]; n \in \mathsf{N}\}$$

platilo $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{N}$, kde $\mathsf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ je množina všech přirozených čísel.

A - III - 4

Délky stran trojúhelníku T' se rovnají délkám těžnic trojúhelníku T. Shodují-li se trojúhelníky T a T' v jednom úhlu, jsou podobné. Dokažte.

A - III - 5

Uvažujme obdélníkový pás $2 \times n$ a označme P_n počet všech takových obarvení některých jeho polí, že žádný čtverec 2×2 v něm nebude celý obarven. Dokažte, že číslo $P_{1\,989}$ je dělitelné třemi, a najděte největší mocninu trojky, která je dělí.

A - III - 6

Uvažujme konečnou posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejíž členy jsou přirozená čísla nejvýše rovná n. Určete maximální počet členů takové posloupnosti, když víte, že každé dva její sousední členy jsou různé a přitom v ní neexistuje čtveřice členů taková, že $a_p = a_r \neq a_q = a_s$ pro $p < q < r < s$.

Řešení úloh

A - I - 1

Úloha souvisí s řešením diofantické rovnice (tj. hledáme jen její celočíselná, resp. přirozená řešení)

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2. \tag{1}$$

Každému jejímu řešení (a, b, c, d) totiž podle Pythagorovy věty odpovídá kvádr, jehož tři navzájem kolmé hrany mají délky a, b, c a jehož tělesová úhlopříčka má délku d.

Rovnice (1) však zřejmě souvisí s jinou, poměrně dobře známou diofantickou rovnicí

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{2}$$

(její řešení v přirozených číslech dává tzv. pythagorejské trojúhelníky, tj. pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnou délkou

stran). Najdeme-li např. nějaké její řešení (x, y, z) takové, že i rovnice $a^2 + b^2 = x^2$ má celočíselné řešení, vidíme hned, že čísla $a, b, c = y, d = z$ jsou řešením původní rovnice (1).

Rovnice (2) však má nekonečně mnoho řešení, která umíme dobře popsat. Její podrobné řešení můžeme kromě jiného najít i v ročence 26. ročníku MO (A – P – 1). Každé primitivní řešení rovnice (2), tj. takové řešení, že čísla x, y, z jsou navzájem nesoudělná, můžeme vyjádřit jako

$$x = 2uv,\ y = u^2 - v^2,\ z = u^2 + v^2,$$

kde u, v jsou nesoudělná přirozená čísla taková, že $u > v$ a součin uv je sudý. Přitom podmínka sudosti součinu uv jenom zaručuje, že získaná čísla x, y, z nebudou všechna sudá, tedy soudělná.

Ale i řešení rovnice $a^2 + b^2 = x^2$ můžeme analogicky vyjádřit ve tvaru

$$a = 2UV,\ b = U^2 - V^2,\ x = U^2 + V^2$$

pro vhodná $U > V$, která zřejmě stačí volit tak, aby $U^2 + V^2 = 2uv$ bylo sudé číslo.

Vidíme, že vhodnou volbou parametrů u, v, U, V nyní snadno najdeme nekonečnou množinu řešení rovnice (1)

$$a = 2UV,\ b = U^2 - V^2,\ c = u^2 - v^2,\ d = u^2 + v^2.$$

My však ještě potřebujeme, aby žádné dva z odpovídajících kvádrů nebyly podobné. Na to stačí, abychom vybrali jen taková řešení (a, b, c, d), v nichž jsou čísla a, b, c, d nesoudělná.

Z rovnosti $U^2 + V^2 = 2uv$ plyne, že čísla U, V musí mít stejnou paritu. Vezmeme-li však U, V lichá, snadno zjistíme, že všechna čísla a, b, c, d vyjdou sudá. Zkusme proto volit $U > V$ sudá a $v = 1$. Pak určitě vyjde $uv = u$ sudé, $u \geqq 2 > v$, což už zaručuje nesoudělnost řešení rovnice (2), a tedy i čísel $c = y$, $d = z$.

Poznámka. I při volbě lichých čísel $U > V$ dostaneme nekonečně mnoho navzájem nepodobných kvádrů: stačí uvážit, že množina odpovídajících poměrů

$$\frac{b}{a} = \frac{U^2 - V^2}{2UV}$$

je nekonečná.

A - I - 2

Předpokládejme nejprve, že máme dáno číslo r a podmnožiny A_i ($1 \leqq i \leqq 5$), které vyhovují úloze. Protože každé dvě množiny A_i, A_{i+1} jsou podle předpokladu disjunktní, může libovolný prvek $x \in \mathsf{A} = \mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_5$ ležet nejvýše ve dvou z množin $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_5$.

Uvažujme množinu B všech uspořádaných dvojic (x, i) takových, že $x \in \mathsf{A}_i$. Protože každá z množin A_i má právě pět prvků, je množina B pětadvacetiprvková. Na druhé straně se množina A skládá ze dvou disjunktních částí podle toho, zda prvek $x \in \mathsf{A}$ leží v jedné či ve dvou různých množinách A_i. Označíme-li tedy příslušné počty n_1 a n_2, je $|\mathsf{A}| = n_1 + n_2$ a

$$|\mathsf{B}| = n_1 + 2n_2 \leqq 2(n_1 + n_2) = 2|\mathsf{A}|,$$

takže $|A| \geqq |B|/2 = 25/2$, neboli $|A| \geqq 13$. Protože pro $r = 13$ lze takové množiny A_i sestrojit, jak ukazuje následující příklad, je $r = 13$ hledané nejmenší r s požadovanou vlastností:
$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A_3 = \{4, 5, 11, 12, 13\}$, $A_4 = \{1, 2, 6, 7, 8\}$,
$A_5 = \{9, 10, 11, 12, 13\}$.

Jiné řešení. Je-li k přirozené číslo, označme r_k nejmenší přirozené číslo r takové, že existují množiny $A_1, \ldots, A_5 \subset \{1, 2, \ldots, r\}$ takové, že pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ platí

$$|A_i| = k, \quad A_i \cap A_{i+1} = \emptyset \quad (A_6 = A_1).$$

Položíme-li

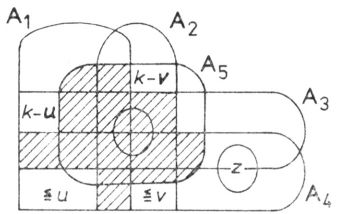
$$A_1 = A_3 = \{1, \ldots, k\}, \quad A_2 = A_4 = \{k + 1, \ldots, 2k\},$$
$$A_5 = \{2k + 1, \ldots, 3k\},$$

vidíme, že $r_k \leqq 3k$. Naopak z toho, že $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ a $|A_1| = |A_2| = k$, plyne nerovnost $2k \leqq r_k$.

Předpokládejme, že množiny $A_1, \ldots, A_5$ splňují uvedené podmínky. Navíc můžeme předpokládat, že $A_1 = \{1, \ldots, k\}$, $A_2 = \{k + 1, \ldots, 2k\}$. Položme proto (vyšrafované části Vennova diagramu na obr. 16 označují prázdné podmnožiny)

$$u = |A_3 \cap A_1' \cap A_2'|, \quad v = |A_5 \cap A_1' \cap A_2'|,$$
$$z = |A_4 \cap A_1' \cap A_2'|,$$

kde čárka označuje doplněk příslušné množiny ve sjednocení



Obr. 16

$A_1 \cup \ldots \cup A_5$. Je tedy $|A_3 \cap A_1| = k - u$, takže $|A_4 \cap A_1| \leqq u$, a analogicky $|A_5 \cap A_2| = k - v$, takže $|A_4 \cap A_2| \leqq v$, a platí

$$k = |A_4| \leqq |A_4 \cap A_1| + |A_4 \cap A_2| + |A_4 \cap A_1' \cap A_2'| \leqq \\ \leqq u + v + z.$$

Zároveň je zřejmé, že $u + z \leqq r - 2k$, $v + z \leqq r - 2k$, takže

$$k \leqq u + v + z \leqq 2(r - 2k) - z, \text{ neboli } r \geqq \frac{5k + z}{2},$$

což dává odhady

$$r_k \geqq \frac{5k}{2} \qquad \text{pro } k \text{ sudé},$$

$$r_k \geqq \frac{5k + 1}{2} \qquad \text{pro } k \text{ liché}.$$

Snadno zjistíme, že pro $z = 0$, resp. $z = 1$ nastane rovnost. Pro $k = 5$ tak vychází $r_5 = 13$.

Uvedeme jednu z možných konstrukcí. Její motivace je následující.

Vezměme nejprve $B = A_2 \cup A_4 \cup \ldots$, pak je zřejmě každá z množin $B \cap A_{2k} = A_{2k}$ nekonečná. Pro liché indexy l můžeme psát

$$B \cap A_l = (A_2 \cap A_l) \cup (A_4 \cap A_l) \cup \ldots, \qquad (1)$$

přičemž každá z množin v závorce má jen konečně mnoho prvků. Protože se však jedná o sjednocení nekonečného počtu množin, nemůžeme o jeho počtu prvků nic tvrdit. Změníme-li ale definici množiny B tak, že od každé z množin A_{2k} odečteme všechny množiny s lichými indexy $l < 2k$, bude v rovnosti (1) vystupovat jen konečný počet neprázdných množin. Proveďme tuto úvahu podrobněji:

Položme nyní $B = (A_2 \setminus C_2) \cup (A_4 \setminus C_4) \cup \ldots$, kde C_{2k} je sjednocení všech množin A_l s lichými indexy $l < 2k$. Je tedy

$$B \cap A_{2k} \subset B \cap (A_{2k} \setminus C_{2k}) = A_{2k} \setminus C_{2k} = \\ = A_{2k} \setminus (A_{2k} \cap C_{2k}),$$

což je nekonečná množina, neboť jsme z nekonečné množiny A_{2k} odstranili jen konečně mnoho prvků.

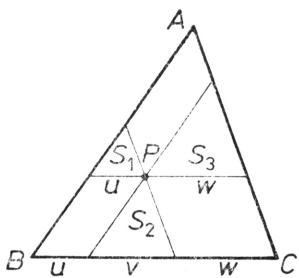
Na druhé straně je pro liché l

$$B \cap A_l = ((A_2 \setminus C_2) \cap A_l) \cup ((A_4 \setminus C_4) \cap A_l) \cup \ldots \\ \ldots \cup ((A_{2k} \setminus C_{2k}) \cap A_l) \cup \ldots,$$

přičemž pro $2k > l$ je $(A_{2k} \setminus C_{2k}) \cap A_l = \emptyset$. Poslední sjednocení tedy obsahuje jen konečný počet neprázdných (konečných) množin. Tím je úloha vyřešena.

A - I - 4

Při důkazu využijeme následující známé vlastnosti podobných zobrazení: Je-li f podobnost v rovině, existuje kladné číslo k takové, že pro libovolné dva body X, Y platí $|f(X)f(Y)| = k|XY|$. Pro obsah útvaru U v rovině pak platí $S(f(U)) = k^2 S(U)$.



Obr. 17

Označme S obsah daného trojúhelníku ABC a S_1, S_2, S_3 obsahy uvažovaných trojúhelníků (obr. 17). Délky úseků, které sestrojené přímky vytnou na straně BC daného trojúhelníku, označme u, v, w. Z podobnosti uvažovaných trojúhelníků danému trojúhelníku plynou následující rovnosti

$$S_1 = \left(\frac{u}{a}\right)^2 S,$$

$$S_2 = \left(\frac{v}{a}\right)^2 S,$$

$$S_3 = \left(\frac{w}{a}\right)^2 S.$$

Jejich sečtením a dosazením $a = u + v + w$ dostaneme

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{(u + v + w)^2} S.$$

Máme tedy pro kladná reálná čísla u, v, w dokázat nerovnost

$$u^2 + v^2 + w^2 \geqq \frac{1}{3}(u + v + w)^2, \qquad (1)$$

která je, jak zjistíme jednoduchými úpravami, ekvivalentní nerovnosti

$$(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2 \geqq 0.$$

Odtud také plyne, že rovnost nastane právě tehdy, je-li $u = v = w = \frac{1}{3}|AB|$, tj. právě když je bod P těžištěm trojúhelníku ABC.

Poznámka. Nerovnost (1) je speciálním případem známé Cauchyovy nerovnosti

$$(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

pro $n = 3$, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$, $v_1 = v_2 = v_3 = 1$.

A - I - 5

Z definice obou množin A, B plyne, že je $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \subset \subset \{1, 2, \ldots, p\}$. Uvažujme $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ takové, že $k \notin \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. Protože $k \notin \mathsf{A}$, je pro nějaké $n \geqq 0$

$$np < kq < (k + 1)q \leqq (n + 1)p. \qquad (1)$$

Podobně ze vztahu $k \notin \mathsf{B}$ plyne, že pro nějaké $m \geqq 0$ je

$$mp < k(p - q) < (k + 1)(p - q) \leqq (m + 1)p,$$

odkud odečtením kp dostaneme nerovnosti

$$(k - m - 1)p \leqq (k + 1)q - p < kq < (k - m)p. \qquad (2)$$

Z obou nerovností (1) a (2) je vidět, že $np = (k - m - 1)p$ je největší celé číslo menší než kq. Navíc odtud plyne, že mezi čísly $np = (k - m - 1)p$ a $(n + 1)p = (k - m)p$, jejichž rozdíl je p, leží čísla $(k + 1)q - p$ a $(k + 1)q$, jejichž rozdíl je rovněž p. Musí tedy být $(k + 1)q = (n + 1)p$, a protože čísla p, q jsou nesoudělná, musí p dělit číslo $k + 1$. Odtud vychází, že je $k = p - 1$.

Číslo $p-1$ v množině $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ skutečně neleží, protože je

$$(q-1)\frac{p}{q} < p-1 \qquad \text{a} \qquad (p-q-1)\frac{p}{p-q} < p-1,$$

neboť $q < p$.

Jiné řešení. Zřejmě je $p \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$. Ukážeme, že je dokonce $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{p\}$. Kdyby pro nějaké $m \in \{1, 2, \ldots, q\}$, $n \in \{1, 2, \ldots, p-q\}$ bylo

$$\left[m\frac{p}{q}\right] = \left[n\frac{p}{p-q}\right] = a,$$

bylo by

$$\frac{mp}{q} = a + \frac{\alpha}{q} \qquad \text{pro} \quad 0 < \alpha < q, \quad \alpha \text{ celé},$$

$$\frac{np}{p-q} = a + \frac{\beta}{p-q} \quad \text{pro} \quad 0 < \beta < p-q, \ \beta \text{ celé},$$

takže

$$mp = qa + \alpha, \qquad np = (p-q)a + \beta,$$

$$(m+n)p = pa + \alpha + \beta,$$

$$m + n = a + \frac{\alpha + \beta}{p}.$$

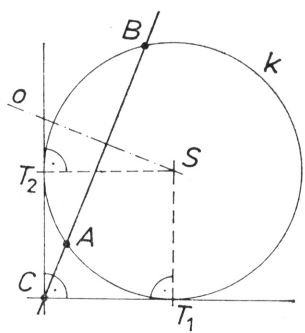
Protože ale je $0 < \alpha + \beta < p$, nemůže poslední rovnost nastat pro celá čísla m, n, a. Sjednocení $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ má tedy celkem $p - 1$ prvků z množiny $\{1, 2, \ldots, p\}$. Jediné číslo, které z ní neobsahuje, je $p - 1$, neboť $(p > q, p > p - q)$

$$\left[(q-1)\frac{p}{q}\right] = \left[p - \frac{p}{q}\right] < p - 1$$

$$\left[(p-q-1)\frac{p}{p-q}\right] = \left[p - \frac{p}{p-q}\right] < p - 1.$$

A - I - 6

Je zřejmé, že úloha má řešení jen tehdy, neleží-li bod C mezi body A, B. Předpokládejme, že hledaná kružnice k existuje, a označme S její střed a T_1, T_2 dotykové body jejích tečen z bodu C (obr. 18). Body C, T_1, S, T_2 jsou vrcholy

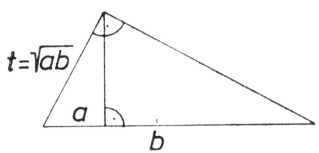


Obr. 18

čtverce. Pro délku t jeho strany, jež je zároveň poloměrem hledané kružnice, z mocnosti bodu C ke kružnici k plyne rovnost $t^2 = ab$, kde $a = |CA|$, $b = |CB|$. Střed S hledané kružnice tedy leží na ose úsečky AB a zároveň na kružnici $l(A, t)$ se středem A a poloměrem t.

Z uvedeného rozboru je zřejmé, že úloha bude mít jedno řešení pro $t = \frac{1}{2}|AB|$ a dvě řešení, pokud $t > \frac{1}{2}|AB|$. Jinak úloha řešení nemá. Protože $|AB| = |b - a|$, z podmínky $t^2 = ab$ plyne, že úloha má řešení, právě když $a^2 - 6ab + b^2 \leqq 0$.

Postup konstrukce rovněž plyne z rozboru. Délku $t = \sqrt{ab}$ přitom sestrojíme pro dané délky a, b pomocí jedné z Euklidových vět (obr. 19).



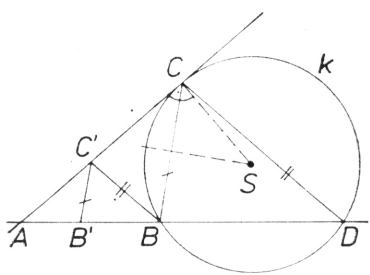
Obr. 19

A - S - 1

Množina M má $\binom{n}{k}$ k-prvkových podmnožin C. Každá z těchto množin má zas 2^k podmnožin B. Podle binomické věty je tedy počet všech dvojic (B, C) takových, že $\mathsf{B} \subset \mathsf{C} \subset \mathsf{M}$, roven součtu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (1 + 2)^n = 3^n.$$

Sestrojme kružnici k, která se dotýká přímky AC v bodě C a prochází bodem B (střed S takové kružnice leží na kolmici k AC v bodě C a na ose úsečky BC, obr. 20). Kružnice k protne polopřímku AB ještě v bodě D, pro který platí $|AD| > |AB|$, neboť z mocnosti bodu A ke kružnici k plyne, že je $|AD| \cdot |AB| = |AC|^2$.



Obr. 20

Uvažujme stejnolehlost se středem A, která zobrazí bod D do bodu B. Obrazem kružnice k v této stejnolehlosti bude kružnice k', která se dotýká přímky AC v bodě C' a stranu AB trojúhelníku ABC protíná v bodě B'.

Z předchozího rozboru je zřejmé, že bod C' dostaneme jako průsečík přímky AC s rovnoběžkou vedenou bodem B k přímce CD. Protože body B', C' jsou obrazy bodů B, C v uvedené stejnolehlosti, je také $B'C' \parallel BC$.

Protože bod B neleží na přímce AC, kružnice k vždy existuje a úloha má jediné řešení.

A - S - 3

Předpokládejme, že takový kvádr existuje, a označme a, b, c délky jeho hran a u délku jeho tělesové úhlopříčky. Protože délky jeho hran mají tvořit tříčlennou aritmetickou posloupnost, můžeme položit

$$a = b - d, \qquad c = b + d,$$

kde d je příslušná diference.

Z Pythagorovy věty pak pro tělesovou úhlopříčku dostáváme vztah

$$u^2 = 3b^2 + 2d^2. \tag{1}$$

Můžeme ovšem předpokládat, že čísla b, d, u jsou nesoudělná, protože jinak bychom je vydělili jejich největším společným dělitelem a příslušné podíly by splňovaly tutéž rovnici. Z rovnice (1) ale dostaneme, že $u^2 - 2d^2$ je dělitelné třemi, což může být pravda jen v případě, že obě čísla u, d jsou dělitelná třemi (stačí probrat všech 9 možných dvojic zbytků mod 3, všeobecně je však známo, že čtverec celého čísla dá při dělení třemi jen zbytek 0 nebo 1). To ale znamená, že $3b^2$ je dělitelné devíti, a tedy i b musí být dělitelné třemi. Došli jsme tak ke sporu, neboť o číslech b, d, u jsme předpokládali, že jsou nesoudělná.

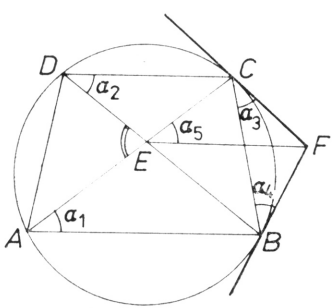
Poznámka. Ze vztahu (1) také plyne, že čísla u, b jsou buď obě lichá, nebo obě sudá. Využijeme-li dělitelnosti dvěma, resp. čtyřmi, dojdeme v obou případech rychle ke sporu podobně jako v uvedeném řešení.

A - II - 1

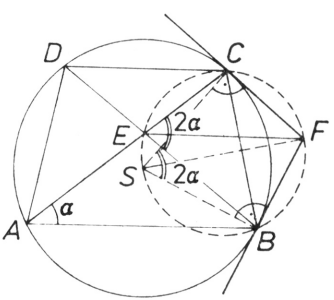
Označme úhly jako na obr. 21. Úhly α_1, α_2 jsou obvodové a α_3 je úsekový úhel příslušný tětivě BC, uvedené úhly jsou proto shodné. Protože $|CF| = |BF|$, je $\alpha_3 = \alpha_4$. Zároveň ale je (protože základny AB a CD jsou rovnoběžné)

$$|\sphericalangle AED| = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 = 180° - |\sphericalangle BFC|,$$

takže čtyřúhelník $EBFC$ je tětivový. Odtud plyne, že $\alpha_5 = \alpha_4 = \alpha_1$, přímky EF a CD jsou tedy rovnoběžné.



Obr. 21



Obr. 22

Jiné řešení (podle Petra Lindaského, 3.d G M. Koperníka v Bílovci). Thaletova kružnice nad průměrem SF obsahuje vrcholy B, C daného lichoběžníku. Označíme-li α velikost úhlu BAC (obr. 22), bude zřejmě $|\sphericalangle BSC| = 2\alpha$ (odpovídající středový úhel) a také $|\sphericalangle BEC| = 2\alpha$ (jde o vnější úhel k rovnoramennému trojúhelníku ABE). Odtud plyne, že body B, C, S, E, F leží na kružnici, a pokud $S \neq E$, je podle Thaletovy věty $|\sphericalangle SEF| = 90°$, neboli $EF \parallel AB$.

Pokud je $S = E$, je uvažovaný lichoběžník obdélník a snadno se přesvědčíme, že uvedené tvrzení platí ($SF = EF$ je osou souměrnosti obdélníku $ABCD$).

A - II - 2

Podle kosinové věty je

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

$$t_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 - ab \cos \gamma,$$

takže pro délku těžnice t_a dostaneme známý vztah

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

a cyklickou záměnou získáme další dva vztahy

$$t_b^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}, \qquad t_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Aby byly zmíněné trojúhelníky podobné, musí platit $a : b : c = t_c : t_b : t_a$, neboli $b^2 t_a^2 = c^2 t_b^2$ a $b^2 t_c^2 = a^2 t_b^2$. Odtud dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} b^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) &= c^2(2c^2 + 2a^2 - b^2), \\ b^2(2a^2 + 2b^2 - c^2) &= a^2(2c^2 + 2a^2 - b^2). \end{aligned} \tag{1}$$

Jejich odečtením vyjde

$$(c^2 - a^2)(2b^2 - a^2 - c^2) = 0.$$

Protože a, b, c jsou kladná čísla, je buď $c = a$, anebo $a^2 + c^2 = 2b^2$.

Pro $a = c$ dosazením do (1) vyjde

$$b^4 - 2a^4 + a^2b^2 = (b^2 - a^2)(2a^2 + b^2) = 0,$$

tj. $a = b = c$. Rovnostranný trojúhelník samozřejmě má požadované vlastnosti.

Je-li $a^2 + c^2 = 2b^2$, dosazením do (1) zjistíme, že obě rovnosti platí, což znamená, že oba trojúhelníky jsou podobné.

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby uvedené trojúhelníky byly podobné, je tedy rovnost $a^2 + c^2 = 2b^2$ (což je zřejmě splněno i pro rovnostranný trojúhelník).

A - II - 3

Označme m nejmenší prvek množiny A. Zřejmě je $m > 1$, protože jinak by vyšlo $\mathsf{A} = \mathsf{N}$, $\mathsf{B} = \emptyset$. Číslo m nemůže být

složené, protože kdyby bylo $m = ab$, kde $1 < a < m$, $1 < b < m$, bylo by nutně $a \in \mathsf{B}$, $b \in \mathsf{B}$, a tedy i $m = ab \in \mathsf{B}$. Proto je m prvočíslo a množina A obsahuje i všechny jeho kladné násobky, $\mathsf{A} \supset \{km; k \in \mathsf{N}\}$.

Dejme tomu, že množina A kromě násobků čísla m obsahuje i nějaké číslo n nesoudělné s m. Pak A obsahuje všechny lineární kombinace $mx + ny$ s přirozenými čísly x a y, tedy všechna dostatečně velká přirozená čísla. Skutečně: protože m a n jsou nesoudělná, dávají čísla $N - n$, $N - 2n$, ..., $N - mn$ při dělení číslem m vesměs různé zbytky. Proto pro každé $N > mn$ mezi těmito m čísly existuje jedno, které je dělitelné m, tj. existují přirozená čísla i a j, $1 \leqq i \leqq m$, taková, že $N - in = jm$, neboli $N = jm + in \in \mathsf{A}$. V tom případě ale je množina B konečná, a nemůže tedy obsahovat žádné číslo $k > 1$, protože jinak by obsahovala nekonečně mnoho různých čísel tvaru k, k^2, k^3, ... Může být jen $\mathsf{B} = \{1\}$ a $\mathsf{A} = \{2, 3, 4, \ldots\}$. Tyto dvě množiny zřejmě vyhovují podmínkám úlohy.

V opačném případě je $\mathsf{A} = \{km; k \in \mathsf{N}\}$ a $\mathsf{B} = \{n \in \mathsf{N}; m \nmid n\}$ pro vhodné prvočíslo m. Protože $1989 = 9.13.17$, je $1989 \in \mathsf{A}$ pro $m \in \{3, 13, 17\}$.

Poznámka. Pro nesoudělná čísla m, n vždycky existují celá čísla x, y taková, že $mx + ny = 1$, přitom nejvýše jedno z čísel x, y může být záporné. V případě, že je to např. číslo y, můžeme pro libovolná přirozená čísla k, t psát

$$k = k(mx + ny) + mnt - mnt = m(kx - nt) + n(ky + mt).$$

Přitom čísla $kx - nt$ a $ky + mt$ budou přirozená, když bude

$$kx - nt \geqq 1, \qquad ky + mt \geqq 1,$$

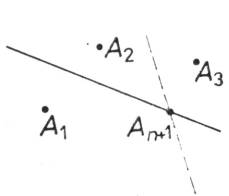
tedy pro $0 < \dfrac{1 - ky}{m} \leqq t \leqq \dfrac{kx - 1}{n}$. Stačí proto, aby bylo

$$\frac{kx - 1}{n} - \frac{1 - ky}{m} \geqq 1, \quad \text{neboli} \quad k \geqq mn + m + n.$$

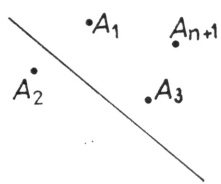
A - II - 4

Dokážeme matematickou indukcí, že hledaný počet je $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$.

Pro $n = 1$ to zřejmě platí. Přidejme k daným bodům $A_1, A_2, \ldots, A_n$ další bod A_{n+1} a uvažujme jednak ty rozklady množiny $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, které lze realizovat pomocí přímky procházející bodem A_{n+1} (obr. 23), a jednak rozklady, které takto dostat nelze (obr. 24).



Obr. 23



Obr. 24

V prvním případě dostaneme z každého rozkladu původní množiny $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ dva různé rozklady množiny

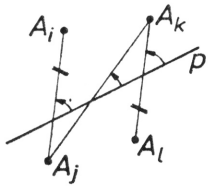
$\{A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}\}$ tak, že polohu uvedené přímky nepatrně změníme, aby i nadále neobsahovala žádný z daných bodů, přičemž bod A_{n+1} padne buď do jedné, či do druhé množiny rozkladu.

V druhém případě už je jednoznačně určeno, do které z množin uvažovaného rozkladu množiny $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ bod A_{n+1} padne. Vidíme tedy, že přidáním jednoho bodu k n-prvkové množině bodů se počet možných rozkladů zvětší o počet rozkladů, které lze realizovat přímkou procházející bodem A_{n+1}. Postupným otáčením přímky od 0 do 180° zjistíme, že takových rozkladů je právě n. Pro počet $p(n)$ rozkladů proto platí

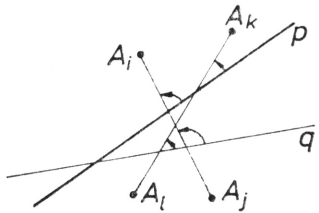
$$p(n+1) = p(n) + n, \qquad p(1) = 1,$$

$$p(n) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

Jiné řešení. Budeme uvažovat jen rozklady na dvě neprázdné podmnožiny (triviální rozklad obsahující prázdnou množinu je jediný). Každý takový rozklad je určen nějakou přímkou neprocházející žádným z daných bodů. Přiřaďme nyní rozkladu ϱ určenému přímkou p dvojici bodů A_i, A_j takovou, že oba body leží v opačných polorovinách určených přímkou p a orientovaný úhel, který svírá přímka p s přímkou A_iA_j, je nejmenší možný. Tato dvojice je vždy určena jednoznačně: daných bodů je jen konečný počet a nemůže se stát, že by existovaly dvě dvojice $A_iA_j \parallel A_kA_l$ s nejmenším orientovaným úhlem (obr. 25), protože orientovaný úhel jedné z úhlopříček odpovídajícího lichoběžníku musí být menší.



Obr. 25

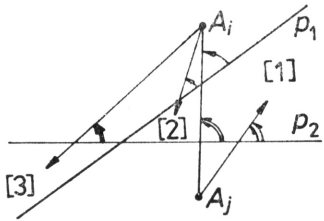


Obr. 26

Dále si uvědomíme, že je to dobrá definice v tom smyslu, že dvojice bodů A_i, A_j je určena pouze daným rozkladem a nezávisí na volbě přímky, která jej realizuje (obr. 26). Kdyby totiž existovala jiná dvojice bodů A_k, A_l, s níž by např. přímka q svírala menší orientovaný úhel než s dvojicí A_i, A_j, snadno zjistíme, že by pak i přímka p s ní svírala menší orientovaný úhel.

Abychom zjistili požadovaný počet rozkladů, stačí nyní dokázat, že uvedené zobrazení „rozklad $\mapsto$ dvojice bodů“ je vzájemně jednoznačné (tj. je prosté a je na), protože počet dvojic dobře známe — těch je $\binom{n}{2}$.

Uvažujme dva rozklady ϱ_1 a ϱ_2, určené přímkami p_1 a p_2 kterým v popsaném zobrazení odpovídá stejná dvojice bodů A_i, A_j. Přesvědčíme se, že obě přímky p_1, p_2 určují tentýž rozklad, tj. $\varrho_1 = \varrho_2$, neboli jinými slovy, že v úhlu mezi oběma přímkami p_1, p_2, v němž neleží žádný z bodů A_i, A_j, neleží ani žádný další z daných bodů. Protože však každá z přímek p_1, p_2 svírá s přímkou A_iA_j nejmenší možný orientovaný úhel, nemůže žádný bod ležet (obr. 27) ani v části [1], ani v části [2] nebo [3] uvedeného úhlu. Uvedené zobrazení je tedy prosté.



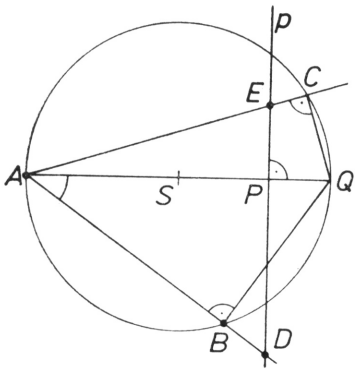
Obr. 27

Abychom ukázali, že každá dvojice bodů A_i, A_j odpovídá nějakému rozkladu, vezměme přímku p, která prochází středem úsečky A_iA_j a svírá s ní orientovaný úhel tak malý, že v něm už neleží žádný další z daných bodů (to jde, protože žádné tři body neleží v přímce a daných bodů je jen konečný počet).

Dokázali jsme tedy, že celkový počet rozkladů je $\binom{n}{2} + 1$.

A - III - 1

Označme P patu kolmice p na přímku AS a Q další průsečík přímky AS s danou kružnicí (obr. 28). Podle Thaletovy věty je $|\sphericalangle ABQ| = 90°$, takže pokud $P \neq A$, jsou trojúhelníky APD a ABQ podobné, tj. $|AP| \,.\, |AQ| = |AB| \,.\, |AD|$. Podobně dostaneme pro bod E rovnost $|AP| \,.\, |AQ| = |AC| \,.\, |AE|$, takže pro body A, B, C, D, E vychází rovnost $|AC| \,.\, |AE| = |AB| \,.\, |AD|$. Z mocnosti bodu A ke kružnici procházející body B, C, D podle poslední rovnosti dostaneme, že na stejné kružnici leží i bod E.



Obr. 28

Pokud je bod A zároveň i patou kolmice p, je $P = A = D = E$ a tvrzení úlohy triviálně platí.

Poznámka. Tvrzení úlohy lze samozřejmě snadno dokázat pomocí věty o obvodových úhlech, uvedené řešení však má tu podstatnou výhodu, že v něm není potřeba diskutovat polohu přímky p.

A - III - 2

Předpokládejme, že pro nějaké m přirozené je n nejmenší přirozené číslo takové, že tvrzení úlohy neplatí. Kdyby z každého bodu vycházelo aspoň m úseček, snadno sestrojíme požadovanou posloupnost (začneme libovolným bodem a v každém kroku pak máme vždy možnost z m bodů, jež jsou se zvoleným bodem spojeny úsečkou, vybrat ten, který se dosud v posloupnosti nevyskytuje).

Můžeme tedy předpokládat, že existuje bod, z něhož vychází nejvýše $m - 1$ daných úseček. Odstraníme-li tento bod spolu se všemi úsečkami, jež z něho vycházejí, dostaneme aspoň $mn - (m - 1) > m(n - 1)$ úseček spojujících nejvýše $n - 1$ bodů. Pro tyto úsečky ovšem uvedené tvrzení rovněž nemůže platit, což je ve sporu s volbou n. Tím je tvrzení dokázáno.

Jiné řešení (podle P. Brože, 4. ročník G W. Piecka v Praze). Máme dokázat, že v libovolném (neorientovaném) grafu G s n vrcholy a mn hranami existuje cesta délky m (tj. posloupnost různých vrcholů $V_0, V_1, \ldots, V_m$ grafu G, jež jsou spojeny hranou).

Přiřaďme každému vrcholu grafu G délku nejdelší cesty, která jím prochází, a označme $e(G)$ součet těchto hodnot pro všechny vrcholy daného grafu G. Dokážeme, že pro každý graf G s n vrcholy a h hranami platí

$$e(G) \geqq h - n + 1. \tag{1}$$

Pro $n = 1$ nerovnost platí, neboť v tomto případě je $e(G) = h = 0$. Předpokládejme, že uvedená nerovnost platí pro každé $n \leqq m - 1$, a uvažujme graf G s $n = m$ vrcholy. Vezměme v něm nejdelší možnou cestu $V_0, V_1, \ldots, V_k$. Z vrcholu V_0 mohou vést hrany jen do některých vrcholů $V_1, \ldots, V_k$, jinak by existovala delší cesta. Odstraníme-li teď z tohoto grafu vrchol V_0 se všemi hranami, jež z něj vycházejí, dostaneme graf G_0 s $m - 1$ vrcholy a aspoň $h - k$ hranami. Podle indukčního předpokladu je tedy

$$e(G_0) \geqq h - k - (m - 1) + 1;$$

přitom ale zřejmě platí $e(G_0) \leqq e(G) - k$ (délka cest vedoucích libovolným vrcholem se odebráním příslušných hran určitě nezvětší a odebranému vrcholu V_0 odpovídala cesta délky k). Dostáváme tak nerovnost

$$e(G) \geqq h - m + 2,$$

takže (1) platí i pro $n = m$. Tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

Pro graf splňující předpoklady úlohy podle (1) tedy platí

$$e(G) \geqq mn - n + 1 = n(m - 1) + 1,$$

podle Dirichletova principu tedy nutně existuje vrchol, kterým vede cesta délky aspoň m.

A - III - 3

(Podle V. Komára, 3. ročník G, Košice, Šmeralova ul.) Předpokládejme, že čísla c, d splňují podmínky úlohy. Čísla $p, 2p, 3p, \ldots$ zřejmě patří do A, a protože $\frac{p}{q} > 1$, čísla $p - 1, 2p - 1, 3p - 1, \ldots$ do A určitě nepatří, takže leží v B. Zároveň je jasné, že pro různá n_1, n_2 jsou také čísla $\left[n_1 \frac{p}{q}\right]$, $\left[n_2 \frac{p}{q}\right]$ různá. Je také vidět, že nemůže být $c < 0$, ale ani $0 \leqq c \leqq 1$ (to by B obsahovala všechna přirozená čísla aspoň

rovná $[c + d]$). Je proto $c > 1$, takže i čísla $[cn_1 + d]$, $[cn_2 + d]$ jsou pro různá n_1, n_2 různá.

Protože $kp \in \mathsf{A}$, $kp - 1 \in \mathsf{B} (k \in \mathsf{N})$, je mezi čísly $1, 2, \ldots, kp$ právě kq čísel v A a $kp - kq$ čísel v B, takže pro každé k přirozené máme

$$kp - 1 = [ck(p - q) + d],$$

neboli

$$kp - 1 \leqq k(p - q)\, c + d < kp. \tag{1}$$

Pro libovolné přirozené k tudíž platí

$$-1 - d \leqq k\,[(p - q)\, c - p] \; < -d.$$

Odtud ovšem plyne, že $(p - q)c - p = 0$, a tedy $c = \dfrac{p}{p - q}$.

Z (1) pak navíc dostáváme, že $kp - 1 \leqq kp + d < kp$, neboli $-1 \leqq d < 0$. Podle úlohy A – I – 5 víme, že pro množinu $\mathsf{B}' = \left\{ \left[n \dfrac{p}{p - q} \right]; n \in \mathsf{N} \right\}$ platí

$$\mathsf{A} \cup \mathsf{B}' = \mathsf{N} \setminus \{kp - 1;\ k \in \mathsf{N}\}, \quad \mathsf{A} \cap \mathsf{B}' = \{kp;\ k \in \mathsf{N}\}.$$

Vezmeme-li tedy $d \in \langle -1, 0)$, objeví se v množině B místo čísel $p, 2p, \ldots, kp, \ldots$ čísla $p - 1, 2p - 1, \ldots, kp - 1, \ldots$, jinak ale pro $n \neq k(p - q)$ musí čísla $\left[n \dfrac{p}{p - q} + d \right]$ zůstat

v množině B', jinými slovy (protože $d < 0$) musí pro všechna $n \neq k(p - q)$ platit

$$n\frac{p}{p-q} + d \geqq \left[n\frac{p}{p-q}\right].$$

Přitom, je-li r $(0 < r < p - q)$ zbytek čísla np při dělení číslem $p - q$, je

$$\frac{np}{p-q} = \left[\frac{np}{p-q}\right] + \frac{r}{p-q},$$

takže pro $n \neq k(p - q)$ odtud plyne nerovnost

$$d \geqq -\frac{r}{p-q}.$$

Čísla $p, 2p, \ldots, (p - q - 1)p$ dávají ovšem vesměs různé zbytky při dělení číslem $p - q$, tj. všechny možné zbytky $1, 2, \ldots, p - q - 1$, protože čísla p a $p - q$ jsou podle předpokladu nesoudělná (kdyby $p - q$ dělilo $k_2p - k_1p$ pro $k_1 < k_2 < p - q$, bylo by i číslo $k_2 - k_1 < p - q$ dělitelné $p - q$, což nejde!).

Zároveň z předchozích úvah vidíme, že pro $d \in \left\langle -\frac{1}{p-q}, 0\right)$ platí

$$\mathsf{B} = (\mathsf{B}' \cup \{kp;\ k \in \mathsf{N}\}) \setminus \{kp - 1;\ k \in \mathsf{N}\},$$

takže pro množiny A, B je $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{N}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$, jak vyžadovala úloha.

Jiné řešení (podle P. Čížka, 4. ročník G W. Piecka v Praze). Protože $\left[n\frac{p}{q}\right] \leqq m-1$, právě když $n < m\frac{q}{p}$, obsahuje množina A právě $\left\lceil m\frac{q}{p}\right\rceil - 1$ čísel menších než m a podobně množina B obsahuje právě $\left\lceil\frac{m-d}{c}\right\rceil - 1$ čísel menších než m. (Zde $[x]$ značí tzv. horní celou část čísla x, tj. nejmenší celé číslo aspoň rovné číslu x; tuto funkci můžeme definovat i pomocí známější „dolní celé části" jako $[x] = -[-x]$.)

Množiny A, B splňují požadavky úlohy, právě když pro každé přirozené m platí

$$|\mathsf{A} \cap \{1, 2, \ldots, m-1\}| + |\mathsf{B} \cap \{1, 2, \ldots, m-1\}| = m - 1,$$

tj. právě když pro každé m přirozené platí

$$\left\lceil\frac{mq}{p}\right\rceil - 1 + \left\lceil\frac{m-d}{c}\right\rceil - 1 = m - 1,$$

čili

$$\left\lceil\frac{mq}{p}\right\rceil + \left\lceil\frac{m-d}{c}\right\rceil = m + 1. \qquad (2)$$

Pro libovolná reálná čísla x, y platí, že $\frac{[mx+y]}{m} \to x$, když $m \to \infty$, jak je vidět z nerovností

$$x + \frac{y}{m} \leqq \frac{[mx + y]}{m} < x + \frac{y + 1}{m}.$$

Z (2) limitním přechodem dostaneme rovnost

$$\frac{q}{p} + \frac{1}{c} = 1,$$

což dává $c = \dfrac{p}{p - q}$. Dosazením do rovnosti (2) vychází pro každé m přirozené

$$\left\lceil \frac{mq}{p} \right\rceil + \left\lceil m\frac{p - q}{p} - d\frac{p - q}{p} \right\rceil = m + 1,$$

$$\left\lceil \frac{mq}{p} \right\rceil + \left\lceil \frac{-mq}{p} \right\rceil - d\left\lceil \frac{p - q}{p} \right\rceil = 1.$$

Pišme $\dfrac{mq}{p} = n + r$, kde n je celé a $r \in (0, 1\rangle$. Poslední rovnost tak můžeme přepsat jako

$$n + [r] + \left\lceil -n - r - d\frac{p - q}{p} \right\rceil = 1,$$

a protože $[r] = 1$, dostáváme podmínku

$$\left[-r - d\frac{p - q}{p} \right] = 0, \quad \text{neboli} \quad -1 < -r - d\frac{p - q}{p} \leqq 0,$$

což je ekvivalentní s nerovnostmi

$$-r\frac{p}{p-q} \leqq d < -(r-1)\frac{p}{p-q}.$$

Protože čísla p, q jsou nesoudělná, nabývá r pro různá m (stačí $1 \leqq m \leqq p$) všech možných hodnot $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, 1$, takže vychází, že

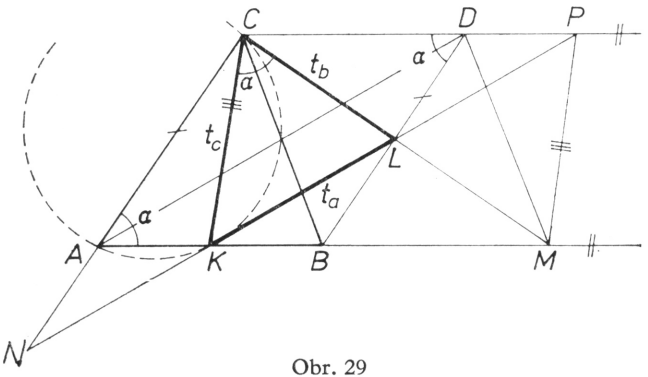
$$d \in \left\langle -\frac{1}{p-q}, 0 \right).$$

Obráceně, je-li $c = \frac{p}{p-q}$, $d \in \left\langle -\frac{1}{p-q}, 0 \right)$, dostaneme pro každé m přirozené, že platí (2), což zaručuje, že $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{N}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$.

A - III - 4

Označme A, B, C vrcholy trojúhelníku T a předpokládejme, že se trojúhelníky T, T′ shodují např. v úhlu α. Trojúhelník ABC doplňme na rovnoběžník $ABDC$ (obr. 29) a středy jeho stran AB, BD označme K, L. Pak je $\mathsf{T}' = CKL$, $|KL| = t_a$, $|LC| = t_b$, $|CK| = t_c$.

Pokud je $|\sphericalangle\, KCL| = \alpha$, je podle věty o obvodových úhlech přímka CL tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKC (úhel KCL je tzv. úsekový úhel příslušný tětivě KC). Uvažme nyní



Obr. 29

bod M, který je průsečíkem přímek AK, CL (obr. 29). Pro jeho mocnost ke kružnici AKC platí $|MK| \,.\, |MA| = |MC|^2$, a protože $|MK| = |CP| = |AB| + |AK| = \frac{3}{2}c$, $|MA| = 2c$, $|MC| = 2t_b$, plyne odtud rovnost $3c^2 = 4t_b^2$.

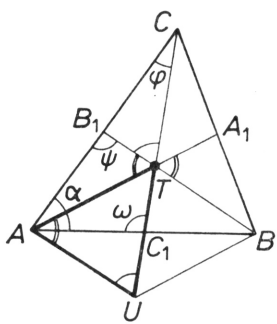
Pokud je $|\sphericalangle\, CKL| = \alpha$, je analogicky přímka KL tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKC, takže z mocnosti bodu N (obr. 29) ke kružnici AKC vyjde $3b^2 = 4t_a^2$. A podobně pro $|\sphericalangle\, KLC| = \alpha$ je zase přímka KL tečnou kružnice CLD, takže z mocnosti bodu P k této kružnici dostaneme rovnost $3c^2 = 4t_a^2$.

Vezměme např. poslední rovnost. Protože (viz např. řešení úlohy A — II — 2) $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, plyne odtud $2b^2 = a^2 + c^2$, takže dostaneme

$$3c^2 = 4t_a^2, \qquad 3b^2 = 4t_b^2, \qquad 3a^2 = 4t_c^2,$$

což znamená, že trojúhelníky T a T′ jsou podobné. Analogicky postupujeme i ve zbylých dvou případech.

Jiné řešení (podle J. Vomlela, 3. ročník G J. K. Tyla v Hradci Králové). Označme A_1, B_1, C_1 středy příslušných stran trojúhelníku $\mathsf{T} = ABC$, T jeho těžiště a U bod na těžnici CC_1 takový, že $|TU| = |CT|$ (obr. 30). Trojúhelník UTA je zřejmě podobný uvažovanému trojúhelníku T', protože délky jeho stran se rovnají dvěma třetinám délek těžnic trojúhelníku T.



Obr. 30

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že se oba trojúhelníky T, T' shodují v úhlu α. Je-li $\alpha = |\sphericalangle ATU|$, jsou trojúhelníky TC_1A, AC_1C podobné (shodují se v úhlech α a ω), takže

$$\frac{|TC_1|}{|AC_1|} = \frac{|TA|}{|AC|}, \qquad \text{neboli} \qquad \frac{t_a}{t_c} = \frac{b}{c}.$$

Trojúhelníky T a T' jsou tedy podobné (*sus*).

Pokud je $\alpha = |\sphericalangle AUT|$, jsou podobné trojúhelníky TB_1C, AC_1C (shodují se ještě v úhlu ψ), takže

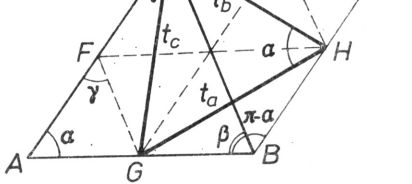
$$\frac{|TB_1|}{|AC_1|} = \frac{|TC|}{|AC|}, \quad \text{neboli} \quad \frac{t_b}{t_c} = \frac{c}{b},$$

a konečně pro $\alpha = |\sphericalangle TAU|$ zjistíme, že jsou podobné trojúhelníky TB_1A a AB_1B (mají ještě společný úhel ψ), takže vyjde

$$\frac{|TB_1|}{|AB_1|} = \frac{|TA|}{|AB|}, \quad \text{neboli} \quad \frac{t_b}{t_a} = \frac{b}{c}.$$

I v obou těchto případech tak vychází, že trojúhelníky T a T′ jsou podobné (*sus*). Tím je důkaz hotov.

Jiné řešení (podle I. Martišovitše, 4. ročník G J. Hronca v Bratislavě). Doplňme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABDC$ a označme postupně E, F, G, H středy jeho stran DC, CA, AB a BD (obr. 31). Trojúhelníky T′ a GHC jsou tedy shodné. O trojúhelnících T, T′ budeme opět předpoklá-



Obr. 31

dat, že se shodují v úhlu α, kde α, β, γ jsou příslušné úhly daného trojúhelníku $\mathsf{T} = ABC$.

Je-li $\alpha = |\sphericalangle\, GHC|$, pak podle věty o obvodových úhlech leží body G, H, E, C na kružnici, a protože body C, E leží oba v polorovině GHC, je $|\sphericalangle\, GCH| = |\sphericalangle\, GEH| = \gamma$.

Pokud je $\alpha = |\sphericalangle\, HGC|$, dostaneme symetrickou situaci, když místo trojúhelníku ABC vezmeme shodný trojúhelník DCB — analogicky vyjde, že je pak $|\sphericalangle\, GHC| = \gamma$.

A pokud $\alpha = |\sphericalangle\, GCH|$, leží body G, B, H, C na kružnici, protože $|\sphericalangle\, GBH| = 180° - \alpha$. Pak je ale $|\sphericalangle\, CHG| = \beta$. Ve všech třech případech jsme tedy dostali, že se trojúhelníky T, T' shodují ve dvou úhlech, takže jsou podobné.

A - III - 5

Zřejmě je $P_1 = 2^2 = 4$, $P_2 = 2^4 - 1 = 15$. Pokud nejsou obě poslední pole obarvena, což lze zařídit třemi způsoby, existuje P_{n-1} přípustných obarvení zbylých polí uvažovaného pásu (předpokládáme, že je $n \geqq 3$). Jsou-li obě poslední pole obarvena, jsou opět tři možnosti, jak obarvit dvě předposlední pole pásu, aniž by vznikl obarvený čtverec 2×2, a pro každou z nich máme P_{n-2} přípustných obarvení zbylých polí. Je tedy

$$P_n = 3P_{n-1} + 3P_{n-2}. \tag{1}$$

Odtud plyne, že je P_n dělitelné třemi pro $n \geqq 2$.

Dále dokážeme, že pro každé k přirozené jsou čísla P_{2k} a P_{2k+1} dělitelná mocninou 3^k, ale 3^{k+1} už nedělí P_{2k+1}. Pro $k = 1$ uvedené tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $k \leqq m$. Podle indukčního předpokladu je

$$P_{2(m+1)} = 3(P_{2m} + P_{2m+1})$$

dělitelné číslem 3^{m+1}. Podobně je i

$$P_{2m+3} = 3(P_{2m+1} + P_{2m+2})$$

dělitelné číslem 3^{m+1}, ale není dělitelné vyšší mocninou 3, protože podle indukčního předpokladu je první sčítanec dělitelný jen 3^m, zatímco druhý je dělitelný aspoň 3^{m+1}.

Nejvyšší mocninou 3, kterou je dělitelné číslo P_{1989}, je 3^{994}.

Jiné řešení (podle M. Krause, 3. ročník G v Karlových Varech). Pod každý sloupec obarveného pásu napíšeme 1, jsou-li obě políčka obarvena, a 0, je-li aspoň jedno z nich neobarveno. Obarvení pásu tedy vyhovuje úloze, právě když v získané posloupnosti nejsou dvě 1 vedle sebe.

Pro dané n přirozené označme $p_n(k)$ počet n-členných posloupností, v nichž je k jedniček a $n - k$ nul, přičemž žádné dvě jednotky nestojí vedle sebe $\left(\text{zřejmě musí být } k \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$. Protože 0 odpovídá třem možným obarvením příslušného sloupce (obr. 32), platí

$$P_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} p_n(k)\, 1^k \,.\, 3^{n-k}.$$

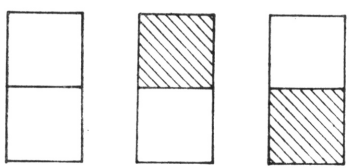
Odtud hned vidíme, že $3 \mid P_n$ pro každé $n \geqq 2\left(k \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right] < n\right)$. Navíc pro každé n liché platí

$$p_n\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) = 1$$

(jediná možná posloupnost je $\underbrace{1010\ldots01}_{n}$. Speciálně je tedy $p_{1\,989}(995) = 1$, takže

$$P_{1\,989} = \sum_{k=0}^{995} p_n(k)\, 3^{1\,999-k}$$

je dělitelné právě mocninou 3^{994}, ale ne už 3^{995}.



Obr. 32

Jiné řešení (podle J. Vomlela, 3. ročník G J. K. Tyla v Hradci Králové). Stejně jako v prvním řešení ze vzorce (1) zjistíme, že P_n je dělitelné třemi pro každé $n \geqq 2$. Opakovaným použitím vztahu (1) pak dostáváme

$$P_{1\,989} = 3(P_{1\,988} + P_{1\,987}) = 3^2(P_{1\,987} + 2P_{1\,986} + P_{1\,985}) =$$
$$= \ldots = 3^{994}(P_{995} + a_1 P_{994} + \ldots + a_{993} P_2 + P_1),$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_{993}$ jsou přirozená čísla. Protože $P_{995}, P_{994}, \ldots$ $\ldots, P_2$ jsou dělitelná třemi, ale P_1 ne, je 3^{994} nejvyšší mocnina trojky, která dělí číslo $P_{1\,989}$.

Poznámka. Řešením příslušné diferenční rovnice dostane-

me pro přirozená n vzorec

$$P_n = \left(2 + \frac{3}{7}\sqrt{21}\right)\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^{n-1} + \\ + \left(2 - \frac{3}{7}\sqrt{21}\right)\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^{n-1}.$$

A - III - 6

Příklad posloupnosti $n, n-1, \ldots, 3, 2, 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ ukazuje, že pro každé n přirozené existuje posloupnost délky $2n-1$. Dokážeme matematickou indukcí, že delší taková posloupnost neexistuje.

Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Uvažujme tedy posloupnost splňující dané podmínky pro $n \geqq 2$. Pokud se v ní žádný člen neopakuje, má nejvýše $n \leqq 2n-1$ členů. Předpokládejme tedy, že $a_k = a_{k+m}$ je první opakující se člen uvažované posloupnosti. Protože každé dva její sousední členy jsou různé, je $m > 1$ a navíc podle druhého požadavku se žádný z členů $a_{k+1}, \ldots, a_{k+m-1}$ již nikde jinde před a_k ani po a_{k+m} nevyskytuje! Vyřazením členů $a_{k+1}, \ldots, a_{k+m-1}, a_{k+m}$ proto dostaneme posloupnost, která splňuje dané podmínky (je $a_{k+m+1} \neq a_{k+m} = a_k$); přitom ale i posloupnost $a_{k+1}, \ldots, \ldots, a_{k+m-1}$, kterou jsme vyřadili, uvedené podmínky rovněž splňuje a její délka je $m-1$. Její členy mohou nabývat r různých hodnot, které se už v nové posloupnosti nevyskytnou, přičemž podle indukčního předpokladu $m - 1 \leqq 2r - 1$.

Délka nové posloupnosti je podle indukčního předpokladu

nejvýše $2(n - r) - 1$, původní posloupnost tedy měla délku nejvýše

$$2(n - r) + m - 1 \leqq 2(n - r) + 2r - 1 = 2n - 1.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení (podle P. Hliněného, 3. ročník G M. Koperníka v Bílovci). Pro dané přirozené n označme $d(n)$ délku nejdelší posloupnosti splňující podmínky úlohy. V každé takové posloupnosti existuje číslo, které se tam vyskytuje jen jednou: Vezmeme-li totiž dvojici členů $a_p = a_q$ $(p < q)$ takovou, že $q - p > 1$ je nejmenší, leží mezi nimi aspoň jeden další člen uvažované posloupnosti ($a_p \neq a_{p+1}$, $a_{q-1} \neq a_q$), který se však už nemůže opakovat mezi a_p a a_q a nemůže se vyskytovat před a_p ani za a_q (jinak by nebyla splněna druhá podmínka).

Uvažujme $n \geqq 2$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_p = n$ je to číslo, které se v uvažované posloupnosti vyskytuje jen jednou.

Pokud je $a_{p-1} \neq a_{p+1}$, vynecháme z uvažované posloupnosti člen a_p, pokud $a_{p-1} = a_{p+1}$, vynecháme oba členy a_p, a_{p+1}. V obou případech dostaneme posloupnost složenou z čísel nejvýše rovných $n - 1$, která bude splňovat podmínky úlohy. Je tedy

$$d(n) \geqq d(n - 1) + 2.$$

Protože $d(1) = 1$, snadno zjistíme, že $d(n) \leqq 2n - 1$. Příklad posloupnosti $n, n - 1, \ldots, 3, 2, 1, 2, 3, \ldots, n - 1, n$ ukazuje, že pro každé n přirozené je $d(n) = 2n - 1$.

Kategorie P

Texty úloh

P - I - 1

Ve státě K je N měst $A(1), \ldots, A(N)$. Velké povodně zničily řadu mostů. Z tohoto důvodu bylo mezi mnoha městy přerušeno spojení. Je dáno pole $B[1..N, 1..N]$, jehož prvky mají hodnotu 0 nebo 1. Prvek $B[i,j]$ bude mít hodnotu *1*, jestliže vede přímá cesta z města $A(i)$ do města $A(j)$, a hodnotu 0, pokud se z města $A(i)$ do města $A(j)$ přímo nedá dostat. Uvědomte si, že $B[i,j] = B[j,i]$. Nalezněte a zdůvodněte algoritmus, který pro daná i, j zjistí, zda je možné dostat se z města $A(i)$ do města $A(j)$.

P - I - 2

Na kružnici leží N různých bodů $A(1), A(2), \ldots, A(N)$ $(N \geqq 4)$ v tomto pořadí ve směru hodinových ručiček. Pro každé dva body X a Y na kružnici označíme $/XY/$ délku oblouku z X do Y ve směru hodinových ručiček.

Je dáno pole $D[1], D[2], \ldots, D[N]$ přirozených čísel, ve kterém

$D[I] = /A(I)A(I+1)/$ pro $1 \leqq I < N$,
$D[N] = /A(N)A(1)/$.

Nalezněte algoritmus, který zjistí, zda existují indexy p, q, r, s takové, že

$$p < q < r < s$$

a současně

$/A(p)A(q)/ = /A(q)A(r)/ = /A(r)A(s)/ = /A(s)A(p)/$.

Při výpočtech, které budete v algoritmu provádět, musí být všechny výsledky i mezivýsledky celá čísla.

P-I-3

Je dán následující program

V PASCALU	V BASICU
var *I*, *J*: integer;	
A: **array** [1..100]	10 DIM A(100)
of integer;	
begin	
for *I*:=1 **to** 100 **do**	20 FOR I=1 TO 100
read (*A*[*I*]);	30 INPUT A(I)
	40 NEXT I
I:=1;	50 LET I=1
J:=1;	60 LET J=1

```
while I+J ≦ 100 do
  if A[I] = A[I+J]
    then J:=J+1
    else I:=I+1;
write(J)
end
```

```
70 IF I+J>100 THEN GOTO 100
80 IF A(I)=A(I+J) THEN
       LET J=J+1 : GOTO 70
90 LET I=I+1 : GOTO 70
100 PRINT J
```

Vstupem programu je uspořádané pole (ne nutně různých) přirozených čísel. Určete a zdůvodněte, co je výsledkem práce programu (tj. jak souvisí výsledná hodnota J s hodnotami pole A a proč).

P - I - 4

Nejprve zavedeme některé pojmy, které budeme potřebovat ve čtvrté úloze. Úlohy podobného charakteru budou i v krajském a celostátním kole.

Mnohoúhelník je část roviny ohraničená jednou lomenou čárou, která sama sebe v žádném bodě neprotíná. Body této lomené čáry patří také do mnohoúhelníku. Mnohoúhelník je zadán posloupností svých vrcholů uspořádaných proti směru hodinových ručiček.

Mnohoúhelník je *konvexní,* jestliže s každými dvěma svými body obsahuje také úsečku, která je spojuje.

Konvexním obalem N bodů v rovině budeme rozumět nejmenší konvexní mnohoúhelník, který je všechny obsahuje. (Nejmenší ve smyslu množinové inkluze.)

Při řešení úloh budete moci kromě příkazů programovacího jazyka (Pascalu nebo Basicu) využívat také tři funkce: VPRAVO, VNITR a UHEL:

VPRAVO (*X1*, *Y1*, *X2*, *Y2*, *X3*, *Y3*) — výsledkem bude logická hodnota »pravda«, jestliže body *P1* = (*X1*, *Y1*) a *P2* = (*X2*, *Y2*) jsou různé a bod *P3* = (*X3*, *Y3*) leží na přímce procházející body *P1* a *P2* nebo vpravo od ní při pohledu z bodu *P1* směrem k bodu *P2*. Jinak bude výsledkem »nepravda«.

VNITR (*X*, *Y*, *X1*, *Y1*, *X2*, *Y2*, *X3*, *Y3*) — výsledkem bude logická hodnota »pravda«, jestliže body *P1* = (*X1*, *Y1*), *P2* = (*X2*, *Y2*) a *P3* = (*X3*, *Y3*) neleží na jedné přímce a bod *P* = (*X*, *Y*) je bodem trojúhelníku *P1 P2 P3*. Jinak je výsledkem »nepravda«.

UHEL (*X1*, *Y1*, *X2*, *Y2*, *X3*, *Y3*) — jestliže *P1* = (*X1*, *Y1*), *P2* = (*X2*, *Y2*) a *P3* = (*X3*, *Y3*) jsou tři různé body, potom výsledkem bude velikost úhlu *P1 P2 P3* ve stupních od 0 stupňů do 360 stupňů měřená proti směru hodinových ručiček.

Soutěžní úloha

a) Nalezněte (co nejlepší) algoritmus, který zjistí, zda daný mnohoúhelník je konvexní, a zdůvodněte jeho správnost.

b) Nalezněte (co nejlepší) algoritmus, který pro *N* zadaných bodů (*N* > = 4) v rovině najde jejich konvexní obal, a zdůvodněte jeho správnost. Souřadnice konvexního obalu uložte do pole *KONOBALX* a *KONOBALY* a počet bodů obalu do proměnné *POCET*.

P - II - 1

Nalezněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který pro nezáporné celé číslo *n* vypočítá celočíselnou hodnotu *f*(*n*), pro kterou platí:

$f(0) = 1, f(1) = 1, f(2n) = 2f(n), f(2n + 1) = 2f(n + 1) - f(n)$
Nepoužívejte rekurzi a minimalizujte spotřebu paměti!

P - II - 2

Je dáno dvojrozměrné pole A (matice) rozměru $N \times M$, jehož prvky obsahují pouze čísla 0 nebo 1. Nalezněte a dokažte co nejlepší algoritmus, který v daném poli A nalezne maximální »obdélník« obsahující samé jedničky (maximální ve smyslu »obsahující nejvíc jedniček«). Výsledkem práce algoritmu bude čtveřice čísel I, J, K, L takových, že $A[I, J]$ je prvek v levém horním rohu a $A[K, L]$ prvek v pravém dolním rohu nalezeného maximálního obdélníku.

P - II - 3

Je dán algoritmus

P: **for** $i := 1$ **to** $N - 1$ **do**
  if $A[i] > A[i + 1]$ **then**
    $A[i] := : A[i + 1]$; (výměna dvou sousedních prvků pole)

Napište a dokažte (co nejlepší) program, který pro dané celočíselné N-prvkové pole A zjistí, zda by výše uvedený algoritmus P toto pole vzestupně uspořádal. Výsledný program nesmí modifikovat pole A ani používat jiné pomocné pole.

P - II - 4

Nalezněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který zjistí, zda se daný bod nachází uvnitř daného mnohoúhelníku.

Poznámka. Definice základních pojmů a pomocných funkcí, které je možné při řešení použít, jsou uvedeny u zadání úlohy P — I — 4.

P - III - 1

Nalezněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který pro dva soubory konečných po dvou disjunktních množin přirozených čísel $P = \{P1, P2, \ldots, Pm\}$ a $Q = \{Q1, Q2, \ldots, \ldots, Qn\}$ takové, že $P1 \cup P2 \cup \ldots \cup Pm = Q1 \cup Q2 \cup \cup \ldots \cup Qn$, najde nejmenší počet K operací sjednocení a rozdělení množin, jimiž se P převede na Q. Operací sjednocení se nahradí dvě množiny v souboru jejich sjednocením. Operací rozdělení se jedna množina souboru rozdělí na dvě disjunktní části.

P - III - 2

Řekneme, že matice $M \times N$ s prvky 0 a 1 obsahuje »čárový vzorek«, jestliže každý jedničkový prvek (případně s výjimkou těch, které leží na okraji matice) má právě dva jedničkové sousední prvky (soused může být vlevo, vpravo, nahoru nebo dolů, ne ve směru úhlopříčky).

Nalezněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který pro danou matici $M \times N$ obsahující čárový vzorek a její daný nulový prvek $A[I, J]$ »vybarví« (tj. přepíše nuly například na dvojky) plochu ohraničenou »čarou« z jedničkových prvků a okraji matice a obsahující prvek $A[I, J]$.

P - III - 3

Je dán algoritmus P:

for $\check{y} := 1$ **to** K **do**
  for $I := 1$ **to** $N - 1$ **do**
    if $A[I] > A[I + 1]$ **then**
      $A[I] := : A[I + 1]$; (výměna dvou sousedních prvků)

Napište a dokažte (co nejlepší) program, který pro dané celočíselné N-prvkové pole A najde nejmenší číslo K takové, aby výše uvedený algoritmus P vzestupně uspořádal toto pole. Výsledný program nesmí modifikovat pole A ani používat jiné pomocné pole.

P - III - 4

a) Nalezněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který rozdělí daný (ne nutně konvexní) mnohoúhelník na neprotínající se trojúhelníky s vrcholy ve vrcholech mnohoúhelníku. Výstupem algoritmu je množina dvojic vrcholů, jejichž pospojováním dostaneme takové rozdělení. (Stačí najít jedno řešení.)

b) Nalezněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který zjistí, zda lomená čára zadaná posloupností bodů $P(1), \ldots,$ $\ldots, P(N), P(1)$ tvoří mnohoúhelník.

Poznámka. Definice základních pojmů a pomocných funkcí, které je možné při řešení použít, jsou uvedeny u zadání úlohy P — I — 4.

P-I-1

Úlohu lze řešit více různými způsoby. Ukážeme jeden z těch možných algoritmů, které jsou časově nejefektivnější. Algoritmus postupně vytváří seznam čísel měst, do nichž se lze dostat z výchozího města $A(i)$. Na začátku práce algoritmu je v seznamu uloženo pouze číslo i. V každém kroku algoritmu vyjmeme ze seznamu jedno (libovolné) číslo K a místo něj do seznamu zařadíme čísla těch měst, která jsou přímo spojena s městem $A(K)$. Každé číslo města přitom bude do seznamu vloženo celkem nejvýše jednou. Vytváření seznamu ukončíme v okamžiku, kdy do něj zařadíme číslo j označující cílové město $A(j)$, nebo když již není možné zařadit do seznamu žádné další číslo města. Výsledek práce algoritmu je určen tím, zda bylo číslo cílového města zařazeno do seznamu.

Programová realizace uvedeného algoritmu vyžaduje především zvolit vhodnou datovou strukturu pro ukládání vytvářeného seznamu. Vzhledem k tomu, že počet měst N je předem znám a že do seznamu bude číslo každého města zařazeno nejvýše jednou, zvolíme pro reprezentaci seznamu jednorozměrné pole $S[1..N]$ a jednu pomocnou proměnnou P, která udává momentální délku seznamu ($S[P]$ je vždy poslední prvek seznamu). Na začátku práce algoritmu je tedy $P = 1$ a $S[1] = i$.

Nyní je třeba vyřešit způsob volby čísla K. Na jeho výběru výsledek práce algoritmu nezávisí, v principu je možné

zvolit libovolné z čísel uložených momentálně v seznamu. Z hlediska efektivní programové realizace jsou vhodné dva způsoby:

1. Za K zvolíme číslo naposledy zařazené do seznamu, tzn. číslo $S[P]$. Odstranění tohoto čísla ze seznamu se provede snadno snížením hodnoty proměnné P o jedničku. Se seznamem v tomto případě pracujeme jako se zásobníkem, což odpovídá prohledávání stromu všech možných cest z počátečního města $A(i)$ do cílového města $A(j)$ tzv. »do hloubky«.

2. Za K zvolíme číslo ze začátku seznamu. K tomu je vhodné zavést pomocnou proměnnou Z, která bude v každém okamžiku udávat momentální začátek platného vytvářeného seznamu v poli S, takže $S[Z]$ je vždy první prvek seznamu. Na začátku práce algoritmu je $Z = 1$. Za K potom vezmeme číslo $S[Z]$ a odstranění tohoto čísla ze seznamu dosáhneme zvýšením hodnoty proměnné Z o jedničku. Vybrané číslo tedy z pole S ve skutečnosti neodstraníme, pouze vyznačíme, že již nepatří do seznamu. Se seznamem v tomto případě pracujeme jako s frontou, což odpovídá prohledávání stromu všech možných cest z počátečního města $A(i)$ do cílového měst $A(j)$ tzv. »do šířky«.

Obě uvedené strategie jsou stejně dobré a řeší zadanou úlohu. V našem programu zvolíme například druhou z nich. Uvedeme ještě dvě poznámky k zavedení pomocné proměnné Z. Tato proměnná vyznačující začátek seznamu v poli S není nutná, bylo by možné vybrané číslo vždy skutečně odstranit z pole S a všechna ostatní čísla náležející do seznamu posunout v poli S o jedno místo. Takové řešení by ovšem bylo značně pracnější a pomalejší. Postup využívající pomocnou

proměnnou Z navíc udržuje v poli S čísla všech měst, o nichž již víme, že jsou dosažitelná z města $A(i)$.

Zbývá provést poslední akci — pro zvolené město s číslem K zařadit do seznamu čísla těch měst, která mají přímé spojení s městem $A(K)$ a která do seznamu dosud nebyla zařazena. Čísla měst s přímým spojením s městem $A(K)$ získáme snadno přímo ze zadané matice B. Stačí projít K-tý řádek této matice a vyhledat indexy těch sloupců, v nichž je na K-tém řádku uložena hodnota 1. Z nalezených čísel měst máme do seznamu zařadit pouze ta, která do něj dosud zařazena nebyla. Pro tento účel je výhodné zavést pomocné pole $R[1..N]$, ve kterém se bude o každém z měst evidovat informace, zda již bylo jeho číslo zařazeno do seznamu. Údaj $R[L] = 1$ znamená, že číslo L již bylo do vytvářeného seznamu zařazeno, $R[L] = 0$ znamená opak. Na začátku práce algoritmu budou všechny hodnoty pole R nastaveny na 0, pouze $R[i] = 1$. Můžeme opět poznamenat, že ve variantě řešení, kterou jsme zvolili pro naši realizaci (prohledávání »do šířky«, se seznamem se pracuje jako s frontou, užívá se pomocné proměnné Z k vyznačení začátku seznamu), není zavedení pole R nezbytné, neboť v poli S se udržují čísla všech měst zařazených někdy během výpočtu do seznamu. Čísla měst, která již byla ze seznamu vybrána, zůstala uložena na místech $S[1], \ldots, S[Z - 1]$. Prohledávání celého pole S před zařazením každého nového čísla do seznamu by ovšem bylo značně pracnější než pouhé testování příznaku v poli R.

Následující program přesně realizuje popsaný algoritmus. Pro jednoduchost je v něm počet měst N zadán přímo jako

konstanta (není obtížné změnit). Pole B vstupních hodnot je programem čteno po řádcích.

```
program MESTA (input, output);

const N = 10;                    (počet měst)

var B: array [1..N, 1..N] of integer; (zadaná matice cest)
    S, R: array [1..N] of integer;
        {S — vytvářený seznam měst, R — příznaky}
  Z, P: integer;                 {indexy seznamu v poli S}
  I, J: integer;                 {začátek a cíl cesty}
  K, U, V: integer;              {pomocné proměnné}

begin

{Načtení vstupních hodnot:}
for U := 1 to N do
  for V := 1 to N do
      read (B[U, V]);
read (I, J);
{Inicializace proměnných:}
P := 1;
Z := 1;
S[1] := I;
for U := 1 to N do
  R[U] := 0;
R[I] := 1;
```

```
{Vlastní výpočet:}
repeat
K : = S[Z];                    {vybráno číslo K ze seznamu}
Z : = Z + 1;
for U : = 1 to N do
  if (B[K, U] = 1) and (R[U] = 0) then
      begin                    {zařazení čísla U do seznamu}
      P : = P + 1;
      S[P] : = U;
      R[U] : = 1
      end
until (Z > P) or (R[ℱ] = 1);

if R[ℱ] = 1 then
  writeln ('Cesta je možná.')
else
  writeln ('Cesta není možná.')

end.
```

Výpočet podle uvedeného algoritmu je konečný, neboť do vytvářeného seznamu je každé z N čísel měst zařazeno nejvýše jednou a při každém kroku algoritmu je ze seznamu vyřazeno právě jedno číslo. Výpočet skončí nejpozději po vyprázdnění celého seznamu, tzn. nejvýše po N krocích.

Popsaný algoritmus má kvadratickou časovou složitost. Již jsme ukázali, že výpočet vyžaduje provedení nejvýše N kroků, tj. N průchodů cyklu repeat-until v programu. V každém kroku se přitom provádí jeden for-cyklus o N průchodech. Celkově tedy výpočet vyžaduje provedení řádově $N * N$ operací. Z hlediska časové složitosti lepší algoritmus

než kvadratický není možný, neboť již jenom vstupní data mají velikost úměrnou hodnotě $N * N$ (velikost zadané matice B) a pro výsledek úlohy jsou všechny vstupní údaje významné.

Správnost uvedeného řešení vyplývá přímo z popisu algoritmu. Do vytvářeného seznamu jsou postupně zařazována čísla měst, která jsou dosažitelná z výchozího města i. Pokud je tedy do seznamu zařazeno také číslo cílového města j a výpočet skončí s hodnotou $R[j] = 1$, je správně ohlášeno, že cesta z města $A(i)$ do města $A(j)$ je možná. Jestliže výpočet skončí v situaci, že se celý seznam vyprázdnil, byla již do seznamu postupně zařazena (a opět z něj odstraněna) čísla všech měst, která mají spojení s městem $A(i)$. Je-li tedy $R[j] = 0$, je správně ohlášeno, že cesta z města $A(i)$ do města $A(j)$ není možná.

P-1-2

Úlohu je možné řešit více různými způsoby. Ukážeme zde algoritmus, který je z hlediska časové efektivity optimální, neboť je lineární.

Součet zadaných vzdáleností $D[1], \ldots, D[N]$ sousedních bodů na kružnici určuje délku kružnice. Mají-li existovat body dělící kružnici na čtyři stejně velké úseky celočíselné velikosti, musí být délka kružnice násobkem čtyř. Nejprve proto zjistíme, zda platí tato základní nutná podmínka. Jestliže ano, spočítáme délku čtvrtkružnice a označíme ji *CTVRT*. V opačném případě indexy požadovaných vlastností neexistují a úloha nemá řešení.

Zavedeme pomocné pole $E[0..N]$, které bude obsahovat $N + 1$ hodnot splňujících následující podmínky:

1. $E[0] = 0$
2. pro $i = 1, \ldots, N$:
   $E[i] = j$ jestliže existuje index j takový, že $j > i$ a zároveň $/A(i)\ A(j)/ = CTVRT$
   $E[i] = 0$ jinak

S využitím tohoto pole E je již řešení zadané úlohy snadné. Stačí ověřit, zda pro nějakou hodnotu indexu $p = 1, \ldots, N$ platí $E[E[E[p]]] <> 0$. Platnost této nerovnosti pro nějakou hodnotu p je nutnou i postačující podmínkou existence požadovaného dělení kružnice na čtyři stejné části. Hledanými indexy p, q, r, s jsou potom po řadě hodnoty p, $E[p]$, $E[E[p]]$, $E[E[E[p]]]$.

Platnost uvedeného tvrzení ihned dokážeme:

a) Jestliže existují indexy p, q, r, s takové, že platí $p < q < r < s$ a zároveň $/A(p)\ A(q)/ = /A(q)\ A(r)/ = /A(r)\ A(s)/ = /A(s)\ A(p)/$, pak podle definice pole E bude $E[p] = q$, $E[q] = r$, $E[r] = s$, a tedy $E[E[E[p]]] = s$. Pro hodnotu indexu p tudíž platí nerovnost $E[E[E[p]]] <> 0$.

b) Nechť naopak pro nějakou hodnotu indexu p platí nerovnost $E[E[E[p]]] <> 0$. Označme $q = E[p]$, $r = E[E[p]]$, $s = E[E[E[p]]]$. Z předpokladu $s <> 0$ vyplývá i $q <> 0$, $r <> 0$, neboť $E[0] = 0$. Přímo z definice pole E nyní dostáváme:

$p < q$ $/A(p)\ A(q)/ = CTVRT$
$q < r$ $/A(q)\ A(r)/ = CTVRT$
$r < s$ $/A(r)\ A(s)/ = CTVRT$

Jistě je také $/A(s)\ A(p)/ = CTVRT$, neboť

$/A(p)\ A(q)/ + /A(q)\ A(r)/ + /A(r)\ A(s)/ + /A(s)\ A(p)/ = 4 * CTVRT.$

Indexy p, q, r, s mají tudíž všechny požadované vlastnosti ze zadání úlohy.

Dokázali jsme, že algoritmus řešící zadanou úlohu pomocí hodnot pole E je správný. Výpočet podle tohoto algoritmu je jistě konečný, nevyžaduje provést více než N porovnání. Algoritmus je zřejmě lineární, jeho časové nároky jsou úměrné hodnotě N.

Při ověřování nerovnosti $E[E[E[p]]] <> 0$ v algoritmu navíc není nutné procházet indexem p všechny hodnoty od 1 do N. Stačí prověřovat hodnoty p od 1 do takového čísla M, pro které $/A(1)\ A(M)/ < CTVRT$ a $/A(1)\ A(M+1)/ >= CTVRT$. Pro $p > M$ by totiž nemohla být splněna podmínka $p < q < r < s$ ze zadání úlohy a vzhledem k definici pole E by jistě platilo $E[E[E[p]]] = 0$.

Zbývá navrhnout algoritmus na vytvoření pole E. Snadno bychom sestrojili kvadratický algoritmus, který postupně pro všechny hodnoty $i = 1, \ldots, N$ připočítáváním délek jednotlivých elementárních úseků zjišťuje, zda existuje odpovídající index j, pro nějž platí podmínka z definice pole E. Ukážeme zde lepší, lineární algoritmus.

Budeme používat tři pomocné proměnné charakterizující v každém okamžiku jistý sledovaný úsek kružnice (úsek je pro nás potenciální čtvrtkružnicí): proměnná *DELKA* udává délku úseku, *DOLNI* je index počátečního bodu a *HORNI* index koncového bodu tohoto úseku. Stále tedy platí: */A(DOLNI) A(HORNI)/ = DELKA*. Vždy bude *DOLNI* $<=$ *HORNI*. Jestliže najdeme dvojici hodnot *DOLNI*, *HORNI*, pro kterou je *DELKA* = *CTVRT*, uložíme do pole E hodnotu $E[DOLNI] = HORNI$. Pokud pro zvolené

DOLNI takové *HORNI* neexistuje, bude $E[DOLNI] = 0$. Toto přesně odpovídá definici pole *E*.

Výpočet začíná pro $DOLNI = 1, HORNI = 1, DELKA = 0$. Dokud je $DELKA < CTVRT$, postupně prodlužujeme sledovaný úsek zvyšováním hodnoty proměnné *HORNI* (a zároveň počítáme délku úseku v proměnné *DELKA*). Poté uložíme do pole *E* správnou hodnotu $E[DOLNI]$. Optimalizace výpočtu spočívá v tom, že pro další hodnotu indexu *DOLNI* nebudeme počítat délku úseku opět od nuly, ale využijeme předchozí hodnoty. Zvětšíme hodnotu proměnné *DOLNI* o 1 a upravíme hodnotu proměnné *DELKA* odečtením délky příslušného elementárního úseku, který jsme ze sledovaného úseku tímto vynechali. Výpočet se nyní bude opakovat. Celý výpočet skončí, jakmile hodnota proměnné *HORNI* překročí hodnotu *N*. Zbývající dosud nespočtené hodnoty pole *E* budou rovny 0, jak vyplývá přímo z definice pole *E*.

Správnost uvedeného postupu pro výpočet hodnot pole *E* není třeba zvlášť zdůvodňovat, jedná se o konstrukci hodnot pole *E* přímo podle definice. Výpočet podle uvedeného algoritmu je jistě konečný, neboť v každém jeho kroku dochází buď ke zvýšení hodnoty proměnné *HORNI* nebo proměnné *DOLNI* o 1. Přitom na začátku výpočtu je $HORNI = DOLNI = 1$, stále platí $DOLNI <= HORNI$ a výpočet končí ihned, jakmile hodnota proměnné *HORNI* překročí *N*. Vykoná se tedy méně než $2 * N$ kroků algoritmu. Odtud také plyne, že i algoritmus na sestrojení pole *E* je lineární.

```
program KRUZNICE (input, output);

const N = 10;                    {počet zadaných bodů}
```

```
var  D: array [1..N] of integer;      {vstupní data}
     E: array [0..N] of integer;      {pole E podle rozboru}
     CTVRT, M, DELKA, DOLNI, HORNI:   integer;
                                      {proměnné z rozboru úlohy}
     I, J: integer;                   {pomocné proměnné}


begin
J := 0;
for I := 1 to N do
  begin
  read (D[I]);                        {načtení vstupních dat}
  J := J + D[I]                       {výpočet délky kružnice}
  end;
I := 0;                  {pro ukončení v případě J mod 4 <> 0}
if J mod 4 = 0 then {základní nutná podmínka ex. řešení}
  begin
  CTVRT := J div 4;   {velikost čtvrtkružnice}
  {Výpočet hodnot pole E:}
  E[0] := 0;
  DOLNI := 1;
  HORNI := 1;
  DELKA := 0;
  while HORNI <= N do
    if DELKA < CTVRT then
      begin            {prodloužit sledovaný úsek}
      DELKA := DELKA + D[HORNI];
      HORNI := HORNI + 1
      end
    else
```

```
      begin                {definovat hodnotu pole E ...}
      if DELKA = CTVRT then
          E[DOLNI] : = HORNI
      else
        E[DOLNI] : = 0;
      DELKA : = DELKA - D[DOLNI];
                           {... a zkrátit sledovaný úsek}
      DOLNI : = DOLNI + 1
      end;
for I : = DOLNI to N do
  E[I] : = 0;
{Výpočet maximálního indexu M:}
M : = 0;
ƒ : = 0;
while ƒ < = CTVRT do
  begin
  M : = M + 1;
  ƒ : = ƒ + D[M]
  end;
{Vlastní výpočet řešení úlohy:}
I : = 1;
while (E[E[E[I]]] = 0) and (I < M) do
  I : = I + 1
end;
{Výsledek výpočtu:}
if E[E[E[I]]] = 0 then
  writeln ('Indexy požadovaných vlastností neexistují.')
else
  begin
  writeln ('Indexy požadovaných vlastností existují.');
```

```
    writeln ('Vyhovuje například čtveřice indexů:');
    writeln (I : 10, E[I] : 10, E[E[I]] : 10, E[E[E[I]]] : 10)
  end
end.
```

P - I - 3

Výsledkem práce zadaného programu je hodnota proměnné *J*. Ukážeme, že na konci programu proměnná *J* udává délku maximálního úseku stejných čísel ve vstupních datech.

Vzhledem k uspořádání pole A musí shodné prvky tvořit souvislý úsek. Označme délku nejdelšího takového úseku jako D a výstupní hodnotu proměnné *J* symbolem V. Dokážeme, že výpočet programu je vždy konečný a že $V = D$.

1. Program obsahuje jediný cyklus typu while, a to s podmínkou $I + J <= 100$. Na začátku výpočtu má výraz $I + J$ hodnotu 2 a při každém průchodu cyklem jeho hodnota vzroste o 1. Cyklus se tedy provede 99krát a skončí, jakmile součet $I + J$ dosáhne hodnoty 101. Výpočet je tudíž konečný.

2. $V <= D$

Jistě $V >= 1$, neboť proměnná *J* má na začátku výpočtu hodnotu 1 a nikdy se nezmenšuje. Jestliže $V = 1$, pak dokazovaná nerovnost $V <= D$ zřejmě platí, neboť $D >= 1$. Pokud $V > 1$, musela proměnná *J* nabýt hodnoty V zvětšením o 1 z hodnoty $V - 1$ při splnění podmínky $A[I] = A[I + V - 1]$ pro nějaké I. Protože je pole A setříděné, musí se sobě rovnat také všechny prvky ležící mezi $A[I]$ a $A[I + V - 1]$, tzn. platí $A[I] = A[I + 1] = \ldots = A[I + V - 1]$. Existuje tedy úsek stejných čísel v poli A

délky V a tudíž $V <= D$. Nerovnost $V <= D$ je tak dokázána.

3. $V = D$

Nechť úsek stejných čísel délky D v poli A začíná prvkem s indexem M, tj. platí $A[M] = A[M + 1] = \ldots = A[M + D - 1]$ pro $M + D - 1 <= 100$. Proměnná I musí během výpočtu nabýt hodnoty M. Po ukončení výpočtu je totiž $I + J = 101$, a kdyby bylo $I < M$, muselo by platit $J > 101 - M$ neboli také $V > 101 - M$. Z nerovností $M + D - 1 <= 100$ a $V > 101 - M$ dostáváme $V > D$, což je ve sporu s již dokázanou nerovností $V <= D$. Jestliže tedy proměnná I nabude hodnoty M, bude se při dalších průchodech cyklem zvětšovat hodnota proměnné J, dokud bude platit $A[M] = A[M + J]$. Vzhledem k rovnosti $A[M] = A[M + D - 1]$ získá proměnná J hodnotu D. Již jsme dokázali, že $V <= D$, takže J nemůže nabýt hodnoty větší. Je tedy $V = D$, což jsme měli dokázat.

P-I-4

a) Při řešení úlohy využijeme skutečnosti, že mnohoúhelník je konvexní právě tehdy, jestliže všechny jeho vnitřní úhly jsou menší nebo rovny 180 stupňů. Toto tvrzení lze snadno dokázat jednoduchou geometrickou úvahou. V algoritmu proto stačí zkontrolovat velikost všech vnitřních úhlů zadaného mnohoúhelníku. To lze velice pohodlně provést pomocí předdefinované funkce *UHEL*.

Předpokládejme, že v proměnné N je uložen počet vrcholů zadaného mnohoúhelníku a v polích X, Y souřadnice jeho

vrcholů v pořadí $(X[1], Y[1]), (X[2], Y[2]), \ldots, (X[N], Y[N])$. Algoritmus řešící zadanou úlohu potom můžeme zapsat v Pascalu takto:

```
X[N + 1] : = X[1]; Y[N + 1] : = Y[1];
X[N + 2] : = X[2]; Y[N + 2] : = Y[2];
I : = 1;
while (I < = N)
  and (UHEL (X[I + 2], Y[I + 2], X[I + 1], Y[I + 1],
  X[I], Y[I]) < = 180) do
    I : = I + 1;
if I > N then writeln ('Mnohoúhelník je konvexní.')
         else writeln ('Mnohoúhelník není konvexní.');
```

Abychom nemuseli zvlášť řešit situaci pro první a poslední vrchol mnohoúhelníku (tj. vrcholy s indexy 1 a N), přiřadili jsme před zahájením vlastního výpočtu souřadnice vrcholů $(X[1], Y[1])$ a $(X[2], Y[2])$ do polí X, Y ještě jednou do položek s indexy $N + 1$, $N + 2$.

Správnost algoritmu přímo vyplývá z uvedeného rozboru. Je třeba si uvědomit, že podle definice mnohoúhelníku jsou jeho vrcholy zadány v pořadí proti směru hodinových ručiček a že funkce UHEL dává jako svůj výsledek velikost úhlu měřeného také proti směru hodinových ručiček. Pro vyjádření velikosti vnitřního úhlu mnohoúhelníku při vrcholu s indexem $I + 1$ je proto v zápisu algoritmu užito správného pořadí vrcholů ve volání funkce UHEL.

Algoritmus má lineární časovou složitost a výpočet podle něj je konečný, neboť každý vnitřní úhel je kontrolován nejvýše jednou. Vykoná se proto maximálně N kroků výpočtu,

popřípadě při nalezení nějakého vnitřního úhlu většího než 180 stupňů končí výpočet ještě dříve.

b) Popíšeme neformálně činnost algoritmu řešícího zadanou úlohu. Algoritmus nejprve zjistí jeden bod z konvexního obalu. Za tento bod zvolíme například ten ze zadaných bodů, který má největší x-ovou souřadnici. Je-li takových bodů více, vybereme z nich ten, který má největší y-ovou souřadnici. Takto získaný bod jistě náleží do konvexního obalu.

Známe-li již několik (třeba jen jeden) bodů konvexního obalu, další bod získáme následujícím výpočtem: Nechť P je bod naposledy zařazený do vytvářeného konvexního obalu a bod A libovolný jiný bod, který dosud do obalu nebyl zařazen (za »nezařazený« do konvexního obalu považujeme i počáteční bod s největší x-ovou souřadnicí). Pro všechny ostatní body nezařazené do konvexního obalu nyní budeme zjišťovat, zda některý z nich leží vpravo od přímky PA při pohledu z bodu P k bodu A. Pokud najdeme takový bod B, budeme nadále totéž zjišťovat pro bod B a přímku PB. Nemusíme ale již uvažovat body, které leží vlevo od přímky PA, neboť ty jistě leží vlevo i od přímky PB. Po otestování všech bodů nezařazených do konvexního obalu tedy získáme bod C takový, že žádný jiný z bodů nezařazených dosud do konvexního obalu neleží vpravo od přímky PC při pohledu z bodu P k bodu C. Tento bod C nyní zařadíme jako další bod do konvexního obalu. Je-li bod C shodný s počátečním bodem, algoritmus již nalezl celý konvexní obal. Jinak se výpočet dalšího bodu konvexního obalu opakuje.

Opět budeme předpokládat, že proměnná N udává počet zadaných bodů. Souřadnice těchto bodů jsou uloženy v polích X, Y v položkách s indexy $1, 2, \ldots, N$. Podle požadavků

úlohy budeme souřadnice bodů nalezeného konvexního obalu ukládat do polí *KONOBALX*, *KONOBALY* a počet bodů tohoto konvexního obalu do proměnné *POCET*.

Program bude využívat pomocné pole *OBAL*[1..*N*], ve kterém bude pro každý ze zadaných bodů zaznamenáno, zda byl zařazen do konvexního obalu. Pokud *OBAL*[*K*] = 0, bod (*X*[*K*], *Y*[*K*]) do konvexního obalu dosud nebyl zařazen, jestliže *OBAL*[*K*] = 1, uvedený bod do konvexního obalu zařazen byl. U počátečního (a tedy také koncového) bodu vytvářeného konvexního obalu je udržována v poli *OBAL* hodnota 0 a index tohoto bodu je zaznamenán ve zvláštní proměnné *PB*. Souřadnice tohoto bodu jsou vloženy do polí *KONOBALX*, *KONOBALY* až jako poslední.

```
program KONOBAL (input, output);
const MAX = 50;  {maximální přípustný počet všech bodů}

var X, Y: array [1..MAX] of real; {souřadnice zadaných
      bodů}
  KONOBALX, KONOBALY: array [1..MAX] of real;
                        {souřadnice bodů konvexního obalu}
  OBAL: array [1..MAX] of integer;
                        {indikace zařazení bodu do konvex. obalu}
  N, POCET, PB: integer;  {počet všech bodů, počet bodů
                           v konv. obalu, počáteční bod}
  I, K, B: integer;  {pomocné proměnné — indexy bodů}
begin
{Načtení vstupních dat:}
read (N);
for I := 1 to N do read (X[I], Y[I]);
```

```
{Hledání počátečního bodu:}
PB : = 1;
for I : = 2 to N do
  if X[I] > X[PB] then PB : = I
  else if (X[I] = X[PB] and (Y[I] > Y[PB]) then PB : = I


{Inicializace proměnných:}
for I : = 1 to N + 1 do OBAL[I] : = 0;
POCET : = 0;
K : = PB;


{Vlastní výpočet:}
repeat
  {K je zatím poslední bod konvexního obalu}
  B : = 1;
  while (OBAL[B] = 1) or (B = K) do B : = B + 1;
  {B označuje bod s nejmenším indexem nezařazený do obalu}
  I : = B + 1;
  while (OBAL[I] = 1) or (I = K) do I : = I + 1;
  {I je další adept na zařazení do konv. obalu}
  while I < = N do
    begin
    if VPRAVO (X[K], Y[K], X[B], Y[B], X[I], Y[I])
      then B : = I;
    repeat I : = I + 1
    until (OBAL[I] < > 1) and (I < > K);
    end;
  {B zde označuje další bod konvexního obalu}
  K : = B;
```

```
    POCET : = POCET + 1;
    KONOBALX [POCET] : = X[K];
    KONOBALY[POCET] : = Y[K];
    OBAL[K] : = 1
until K = PB;
{Vypsání výsledného konvexního obalu:}
writeln ('Konvexní obal je tvořen', POCET : 1,' body.');
writeln ('Souřadnice bodů konvexního obalu:');
for I : = 1 to POCET do
    writeln (KONOBALX[I] : 10, KONOBALY[I] : 10)
end.
```

Správnost popsaného algoritmu vyplývá přímo z výše uvedeného rozboru. Algoritmus je popsán induktivně, po krocích, a je ho také možné matematickou indukcí formálně dokázat. Z rozboru je zřejmá i konečnost výpočtu podle našeho algoritmu. V každém kroku výpočtu je přidán jeden bod do postupně vytvářeného konvexního obalu, konvexní obal N bodů je tvořen nejvýše těmito N body, takže výpočet skončí nejpozději po N krocích.

Popsaný algoritmus má kvadratickou časovou složitost. Vyžaduje provedení nejvýše N kroků, jak jsme právě ukázali. Přitom v každém kroku je každý z N zadaných bodů právě jednou testován, zda není prodloužením dosud nalezené části konvexního obalu. Celkový počet operací nezbytný k vyřešení úlohy je tedy úměrný hodnotě $N * N$.

Poznámka. V případě, že na hraně konvexního obalu leží tři body (nebo více bodů), zde uvedený algoritmus je všechny může ale nemusí zařadit do konvexního obalu. Protože oba

případy vyhovují definici konvexního obalu ze zadání úlohy, hlouběji se tímto případem nezabýváme.

P - II - 1

Hodnotu $f(k)$ pro nějaké pevně zvolené číslo $k > 1$ snadno vyjádříme pomocí dvou jiných hodnot funkce f. Přitom argumenty funkce f odpovídající těmto hodnotám jsou dvě po sobě následující čísla menší než k. Pokud je totiž k sudé, je $f(k) = 2.f(k/2)$, což můžeme zapsat také jako $f(k) = 2.f(k/2) + 0.f(k/2 + 1)$. Je-li k liché, potom platí rovnost $f(k) = 2.f((k + 1)/2) - f((k - 1)/2)$. Tyto vztahy jsme získali jednoduchou úpravou přímo z definice funkce f.

Nyní si všimneme, jak je možné vyjádřit hodnoty $f(k)$, $f(k + 1)$ pro dvě po sobě jdoucí celá čísla k, $k + 1$. Rozlišíme tři případy:

1. $k = 0 \ldots f(k) = f(k + 1) = 1$ přímo podle definice funkce f.
2. k sudé, $k > 0 \ldots f(k) = 2.f(k/2)$ podle definice funkce f, číslo $k + 1$ je liché, a proto $f(k + 1) = 2.f(k/2 + 1) - f(k/2)$.
3. k liché $\ldots f(k) = 2.f((k + 1)/2) - f((k - 1)/2)$ podle definice, číslo $k + 1$ je sudé, a proto $f(k + 1) = 2.f((k + 1)/2)$.

Tedy pro $k = 0$ jsou hodnoty $f(k), f(k + 1)$ známy a pro $k > 0$ je možné vyjádřit obě hodnoty $f(k), f(k + 1)$ opět jako vhodnou kombinaci hodnot funkce f odpovídajících dvěma menším po sobě jdoucím číslům v roli argumentů (a to konkrétně číslům k div 2, k div 2 + 1).

Z uvedeného rozboru vyplývá, že k výpočtu hodnoty $f(n)$ pro zadané číslo n nám budou stačit tři proměnné. V jedné proměnné K bude stále uložena postupně se zmenšující

hodnota argumentu — od počáteční vstupní hodnoty n až k nule, v každém kroku výpočtu celočíselně dělena dvěma. V dalších dvou proměnných A a B se budou počítat koeficienty, jimiž je třeba vynásobit hodnoty $f(K)$, $f(K + 1)$, abychom získali správný výsledek. Na začátku výpočtu bude $K = n, A = 1, B = 0$. Hodnota výrazu $A.f(K) + B.f(K + 1)$ bude během celého výpočtu udržována konstantní. Na začátku výpočtu má tento výraz hodnotu $1.f(n) + 0.f(n + 1) = f(n)$, po ukončení při $K = 0$ bude mít tvar $A.f(0) + B.f(1) = A + B$. Výslednou hodnotu $f(n)$ lze tedy získat jako součet hodnot proměnných A a B po ukončení výpočtu.

Zbývá ukázat, jak musí vypadat přepočet hodnot proměnných K, A, B v každém kroku výpočtu, aby se zachovala konstantní hodnota výrazu $A.f(K) + B.f(K + 1)$. Využijeme k tomu dříve odvozené vztahy pro vyjádření hodnot $f(k)$, $f(k + 1)$:

a) je-li hodnota proměnné K sudá kladná:

$A.f(K) + B.f(K + 1) = A.2.f(K/2) + B.2.f(K/2 + 1) -$
$- B.f(K/2) = (2A - B).f(K/2) + 2B.f(K/2 + 1)$

— tedy hodnota K se zmenší na polovinu, proměnná A získá hodnotu $2A - B$ a hodnota proměnné B se zdvojnásobí;

b) je-li hodnota proměnné K lichá:

$A.f(K) + B.f(K + 1) = A.2.f((K + 1)/2) -$
$- A.f((K - 1)/2) + B.2.f((K + 1)/2) =$
$= -A.f((K - 1)/2) + 2.(A + B).f((K + 1)/2)$

— tedy hodnota proměnné K se zmenší na $(K - 1)/2$ neboli K div 2, hodnota proměnné A změní znaménko a proměnná B získá hodnotu $2(A + B)$.

Na základě uvedeného rozboru snadno zapíšeme hledaný algoritmus na výpočet hodnoty funkce f pro daný argument n.

Algoritmus vyjádříme ve tvaru funkce v programovacím jazyce Pascal:

```
function F (K : integer): integer;

var A, B: integer;

begin
A : = 1;
B : = 0;
while K > 0 do
  begin
  if K mod 2 = 0 then
    begin
    A : = 2 * A — B;
    B : = 2 * B
    end
  else
    begin
    B : = 2*(A + B);
    A : = —A
    end;
  K : = K div 2
  end;
F : = A + B
end;
```

Správnost uvedeného algoritmu vyplývá z rozboru úlohy. Během celého výpočtu se udržuje neměnná hodnota výrazu $A.f(K) + B.f(K + 1)$, přičemž při vyvolání funkce s argumentem n vyjadřuje tento výraz hledanou hodnotu $f(n)$. Po

ukončení výpočtu while-cyklu v programu je $K = 0$ a podle definice funkce f je $f(0) = f(1) = 1$, takže hodnotu uvedeného výrazu vyjadřuje součet hodnot proměnných $A + B$. Tento součet je proto správným výsledkem algoritmu.

Výpočet probíhající podle našeho algoritmu je jistě konečný, neboť v každém kroku výpočtu se hodnota proměnné K celočíselně dělí dvěma a celý výpočet končí, jakmile K dosáhne nulové hodnoty.

Algoritmus splňuje požadavek ze zadání úlohy na minimální paměťovou náročnost. K celému výpočtu stačí použít pouze tři proměnné. Algoritmus má logaritmickou časovou složitost a konstantní paměťovou složitost.

P - II - 2

Navrhnout nějaký, byť pomalý a neefektivní algoritmus řešící zadanou úlohu je velmi snadné. Stačí zkoumat postupně všechny obdélníky v dané matici, zda jsou tvořeny samými jedničkami. Obdélník vždy vymezíme volbou jeho levého horního a pravého dolního rohu. Takovéto řešení má ovšem časovou složitost $N^3 \cdot M^3$, neboť pro volbu levého horního rohu máme $N.M$ možností, pro volbu pravého dolního rohu také (při již zvoleném levém horním rohu je zde možností o něco méně, ale z hlediska časové složitosti algoritmu to není podstatná úspora) a průchod zvoleným obdélníkem v matici o rozměrech $N \times M$ představuje také řádově $N.M$ operací.

Krátký program řešící úlohu tímto neefektivním způsobem může vypadat následovně:

program *OBDEL* (input, output);

```
const N = 20;              {počet řádků matice A}
      M = 15;              {počet sloupců matice A}

var A : array [1..N, 1..M] of integer;
    I, J, K, L, P, Q : integer; {pracovní indexy}
    MI, MJ, MK, ML : integer; {souřadnice max. obdél.}
    C: integer;          {pro kontrolu obdélníku}
    VEL: integer;        {velikost zkoumaného obdélníku}
    MAX: integer;        {maximální velikost obdélníku}

begin
MAX := 0;
for I := 1 to N do {načtení hodnot matice A}
  for J := 1 to M do read(A[I, J]);
for I := 1 to N do
  for J := 1 to M do {levý horní roh obdélníku A[I, J]}
    for K := I to N do
      for L := J to M do          {pravý dolní roh A[K, L]}
        begin
        VEL := (K - I + 1) * (L - J + 1);
        if VEL > MAX then
          begin          {obdélník je větší než maximální}
          C := 1;
          for P := I to K do
            for Q := J to L do
              C := C * A[P, Q];     {kontrola obdélníku}
          if C = 1 then
            begin          {obdélník je tvořen jedničkami}
            MAX := VEL;
```

```
            MI := I; Mj := j; MK := K; ML := L
          end
        end
      end;

if MAX = 0 then
  writeln ('Zadaná matice neobsahuje žádnou jedničku.')
else
  begin
  writeln ('Maximální obdélník tvořený jedničkami má');
  writeln ('souřadnice levého horního rohu:', MI:7, Mj:6);
  writeln ('souřadnice pravého dolního rohu:', MK:6, ML:6)
  end
end.
```

Ukažme si nyní jiný algoritmus, který řeší zadanou úlohu výrazně rychleji. V první fázi řešení provedeme pomocný výpočet, při kterém určíme délky souvislých sloupců jedniček v dané matici A. Výsledky tohoto výpočtu si uložíme přímo do pole A tak, že položíme $A[i,j] = k$, jestliže prvek $A[i,j]$ sám a dalších přesně $k - 1$ prvků pod ním mělo původně hodnotu 1, tzn. jestliže v původní matici A platilo $A[p,j] = 1$ pro $p = i, i + 1, \ldots, i + k - 1$ a navíc buď $i + k - 1 = N$ nebo $i + k - 1 < N$ a přitom $A[i + k, j] = 0$ (kde N je počet řádků matice A). Údaje v zadaném poli A tím pozměníme, ale pouze tak, že v případě potřeby by bylo snadné zrekonstruovat původní podobu pole A (neboť žádná nula v poli A neubyla ani nepřibyla, nenulová čísla jsou uložena

na místech původních jedniček). Výsledek první pomocné fáze výpočtu si ukážeme na příkladu:

ze zadané matice:					dostaneme upravenou matici:				
1	1	0	1	0	3	4	0	1	0
1	1	1	0	1	2	3	2	0	3
1	1	1	1	1	1	2	1	1	2
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1

Ve druhé fázi výpočtu již budeme hledat v poli A maximální obdélník tvořený jedničkami (nyní po úpravě nenulovými čísly). Postupně budeme zkoumat všechny možné pozice levého horního rohu takového obdélníku. Pro zvolený levý horní roh $A[i,j] > 0$ musíme vyzkoušet všechny přípustné polohy pravého horního rohu $A[i,l]$. Prvek $A[i,l]$ může být pravým horním rohem obdélníku s levým horním rohem $A[i,j]$, jestliže všechna čísla $A[i,q]$ pro $q = j, j+1, \ldots, l$ jsou nenulová.

Velikost maximálního obdélníku, který je v původní matici A tvořen samými jedničkami a jehož levý a pravý horní roh mají souřadnice $[i,j]$, resp. $[i,l]$, nyní již snadno určíme pomocí hodnot, které jsme si předem připravili v první fázi výpočtu. Takový obdélník má totiž šířku $(l - j + 1)$ a jeho výška je rovna minimu z hodnot $A[i,q]$ pro $q = j, j+1, \ldots, \ldots, l-1, l$.

Uvedený výpočet je možné opakovat pro všechny možné volby levého horního rohu obdélníku a přitom si v pomocné proměnné udržovat velikost maximálního již nalezeného obdélníku tvořeného v zadané matici samými jedničkami.

V dalších čtyřech pomocných proměnných si musíme zaznamenávat souřadnice levého horního a pravého dolního rohu nalezeného maximálního obdélníku. Tyto proměnné budou po ukončení výpočtu udávat požadovaný výsledek úlohy.

```
program OBDELNIK (input, output);

const N = 20;     {počet řádků matice A}
      M = 15;     {počet sloupců matice A}
var   A: array [1..N, 1..M] of integer;
      I, J, L: integer;        {pracovní indexy v poli A}
      K: integer;              {výška zkoumaného obdélníku}
      MI, MJ, MK, ML: integer; {souřadnice rohů max.
                                obdélníku}
      MAX: integer;            {velikost maximálního obdélníku}
      VEL: integer;            {velikost zkoumaného obdélníku}

begin
{Načtení matice A:}
for I := 1 to N do
  for J := 1 to M do read (A[I,J]);

{První fáze výpočtu — modifikace pole A:}
for J := 1 to M do
  for I := N - 1 downto 1 do
    if A[I,J] = 1 then A[I,J] := A[I,J] + A[I + 1,J];

{Druhá fáze výpočtu — hledání maximálního obdélníku:}
MAX := 0;
```

```
for I := 1 to N do
  for J := 1 to M do
    begin                    {levý horní roh A[I,J]}
    L := J;                  {pravý horní roh A[I,L]}
    K := A[I,L];
    while K > 0 do
      begin
      VEL := (L - J + 1) * K;   {velikost zkoumaného
                                 obdélníku}
      if VEL > MAX then
        begin                {je větší než dosud maximální}
        MAX := VEL; {- > zaznamenat jeho velikost}
        MI := I; MJ := J; MK := I + K - 1; ML := L
                        {- > zaznamenat jeho souřadnice}
        end;
      L := L + 1;            {nová poloha prav. horního rohu}
      if L > M then
        K := 0               {už jsme vně matice A}
      else if A[I,L] < K then
        K := A[I,L]          {snížení výšky obdélníku z »1«}
      end
    end;


{Vypsání výsledku výpočtu:}
if MAX = 0 then
  writeln ('Zadaná matice neobsahuje žádnou jedničku.')
else
  begin
  writeln ('Maximální obdélník tvořený jedničkami má');
```

```
    writeln ('souřadnice levého horního rohu:', MI : 7, Mj : 6);
    writeln ('souřadnice pravého dolního rohu:',MK : 6, ML : 6)
  end
end.
```

Správnost algoritmu plyne z uvedeného rozboru. Pokud zadaná matice obsahuje samé nuly, zůstane ve druhé fázi výpočtu proměnná *MAX* s počáteční hodnotou 0 nezměněna a na základě toho je vypsáno příslušné hlášení. Jestliže matice obsahuje alespoň jednu jedničku, musí obsahovat také nějaký maximální obdélník tvořený jedničkami. Dvojice proměnných *I*, *J* během výpočtu nabude hodnot odpovídajících souřadnicím levého horního rohu tohoto maximálního obdélníku, neboť pomocí indexů *I*, *J* algoritmus postupně prochází všechny prvky pole *A*. Proměnná *L* potom jistě nabude také hodnoty sloupcového indexu pravého horního rohu maximálního obdélníku z jedniček a přitom bude proměnná *K* udávat výšku tohoto obdélníku. Za této situace získá proměnná *MAX* hodnotu udávající velikost maximálního obdélníku tvořeného jedničkami (pokud této hodnoty nenabyla již dříve při zkoumání jiného obdélníku stejné velikosti tvořeného samými jedničkami). Zároveň jsou do proměnných *MI*, *MJ*, *MK*, *ML* zaznamenány souřadnice levého horního a pravého dolního rohu nalezeného maximálního obdélníku. Vzhledem k maximalitě velikosti tohoto obdélníku již nemůže být nalezen žádný větší obdélník tvořený samými jedničkami a hodnoty proměnných *MAX*, *MI*, *MJ*, *MK*, *ML* proto zůstanou až do ukončení výpočtu nezměněny. Při ukončení výpočtu jsou proto [*MI*, *MJ*] a [*MK*, *ML*] souřadnice levého horního a pravého dolního rohu maximálního obdélníku

tvořeného samými jedničkami. Jestliže lze v zadané matici A nalézt více různých obdélníků ze samých jedniček této maximální velikosti, budou proměnné MI, MJ, MK, ML udávat souřadnice rohů jednoho z nich (toho, který byl nalezen jako první).

Výpočet podle uvedeného algoritmu je jistě konečný, neboť počet průchodů každým z cyklů v programu je předem omezen některým z rozměrů zadané matice. Načtení hodnot matice A ze vstupu a modifikace obsahu pole A v první fázi výpočtu vyžadují provedení $N.M$ operací. Ve druhé fázi výpočtu se $N.M$ způsoby volí levý horní roh zkoumaného obdélníku a pro každou takovou volbu se provádí nejvýše M průchodů vnitřním while-cyklem s vlastním vyhodnocením obdélníků. Počet operací potřebných k provedení celého výpočtu je proto úměrný hodnotě $N.M.M$.

Celý výpočet je možné provádět také symetricky tak, že se v první fázi určí délky souvislých vodorovných řad jedniček v poli A. Ve druhé fázi výpočtu by se potom pro každou volbu polohy levého horního rohu zkoumaného obdélníku zkoušely všechny možné polohy jeho levého dolního rohu. V tomto případě by celý výpočet vyžadoval provedení řádově $N.N.M$ operací. Pokud bychom se tedy snažili o maximální možnou optimalizaci časových nároků navrženého algoritmu, bylo by možné volit uvnitř algoritmu až na základě znalosti konkrétních rozměrů N, M pole A tu variantu řešení, která by byla výhodnější (varianta, kterou jsme zde podrobně rozebrali, je výhodnější pro $N > M$).

Rozborem zadaného algoritmu *P* snadno zjistíme, že činnost algoritmu můžeme popsat následovně: Zadané pole *A* se prochází sekvenčně zleva doprava. Při tomto průchodu se zapamatuje a odstraní z pole *A* nejprve první prvek. Tento prvek bude »přenesen« bezprostředně za souvislý úsek po něm následujících čísel menších, než je on sám. Celý tento úsek čísel se v poli *A* posune o jednu pozici doleva. Jakmile se při průchodu polem narazí na nějaké číslo větší, než je právě zapamatovaný a přenášený prvek, tento přenášený prvek se umístí do pole *A*. Místo něj se zapamatuje nalezené větší číslo, odstraní se z pole *A* a opět se bude přenášet stejným způsobem dál. Tento postup se opakuje tak dlouho, dokud se algoritmus nedostane k pravému okraji pole *A*. Tam je pak umístěn naposledy přenášený prvek a tím je celý výpočet ukončen.

Z rozboru je zřejmé, že každý prvek je umístěn na své výsledné místo v poli *A*, jestliže

— buď je posunut o jedno místo doleva a přes něj je přeneseno právě zapamatované větší číslo;
— nebo byl přenášen směrem doprava přes úsek menších čísel (tento úsek může být i prázdný) a nyní je umisťován za tento úsek, neboť algoritmus narazil na větší číslo uložené v poli *A* nebo na pravý okraj pole *A*.

V průběhu výpočtu jsou umisťovány na svá výsledná místa prvky pole *A* v takovém pořadí, že jsou postupně obsazována jednotlivá místa v poli *A* zleva doprava. Po ukončení práce algoritmu bude tedy pole *A* vzestupně uspořádáno právě teh-

dy, jestliže jsou čísla umisťována na svá výsledná místa v poli A v neklesajícím pořadí.

Na základě rozboru zadaného algoritmu a s využitím právě uvedeného tvrzení nyní již můžeme zapsat program řešící danou úlohu. Program »modeluje« výpočet algoritmu P, ale do pole A nezasahuje a pouze si udržuje informaci o hodnotě právě zapamatovaného a přenášeného prvku a o dosud největším již umístěném prvku pole A. Zároveň s napodobováním výpočtu algoritmu P bude náš program sledovat, zda čísla umisťovaná do pole A následují po sobě v neklesajícím pořadí.

```
program TRIDENI (input, output);

const N = 100;                          {velikost pole A}
var A: array [1..N] of integer;         {zadané pole A}
    PREN: integer;                      {přenášený prvek}
    MAX: integer;          {maximální již umístěný prvek}
    CH: Boolean;           {příznak chybného uspořádání}
    I: integer;            {pomocná proměnná — index v A}
begin
for I: = 1 to N do read (A[I]);         {načteni pole A}
CH: = false;                            {zatím chyba není}
PREN: = A[1];                  {první přenášený prvek}
I: = 2;                        {průchod od prvku A[I]}
MAX: = —maxint;                {inicializace maxima}

while (not CH) and (I < = N) do
  begin
  if A[I] < PREN then          {přenést PREN přes A[I]}
```

```
    if A[I] < MAX then
        CH: = true                {chyba v uspořádání!}
    else
      MAX: = A[I]                 {nová hodnota maxima}
  else
    begin                         {narazil na větší číslo než PREN}
      MAX: = PREN;                {dosud přenášený prvek PREN bude umístěn do pole A a stane se tak novým maximem z umístěných čísel}
    PREN: = A[I]                  {zapamatuje se následující číslo a stane se tak novým přenášeným prvkem PREN}
    end;
  I: = I + 1                      {bude zkoumat další prvek A}
  end;

if CH then
  writeln ('Algoritmus zadané pole neuspořádá.')
else
  writeln ('Algoritmus zadané pole uspořádá.')
end.
```

Správnost programu vyplývá z provedeného rozboru úlohy. Náš program provádí zcela obdobný výpočet jako algoritmus P uvedený v zadání úlohy, pouze namísto vlastních výměn prvků uložených v poli *A* si v pomocných proměnných *PREN* a *MAX* udržuje potřebné řídicí informace. Pomocí proměnné *MAX* je zároveň kontrolováno, zda bude po ukončení výpočtu pole *A* vzestupně uspořádáno.

Výpočet programu je jistě konečný, neboť je tvořen maximálně N kroky (kde N je počet prvků pole A). Pokud se během výpočtu zjistí, že by pole A nebylo po ukončení výpočtu uspořádáno, je výpočet předčasně ukončen ještě dříve. Program má stejně jako zadaný algoritmus P lineární časovou složitost.

P - II - 4

Existuje celá řada v principu zcela odlišných algoritmů, které řeší tuto úlohu. Nejlepší z nich mají lineární časovou složitost, tzn. počet operací nezbytných k vyřešení úlohy je úměrný počtu vrcholů zadaného mnohoúhelníku. Namísto jednoho detailního vzorového řešení úlohy si proto raději ukážeme hlavní myšlenky tří různých algoritmů (s lineární časovou složitostí) a možnou programovou realizaci jednoho z nich.

1. Protože známe souřadnice všech vrcholů daného mnohoúhelníku i souřadnice zkoumaného bodu (označme ho B), můžeme snadno spočítat vzdálenosti bodu B od jednotlivých stran mnohoúhelníku. Zároveň můžeme zjistit, od které strany mnohoúhelníku má bod B nejmenší vzdálenost — nechť je to strana $A(k)\,A(k+1)$. Nejkratší spojnici bodu B se stranou mnohoúhelníku nemůže protínat (ani se jí dotýkat) žádná jiná strana mnohoúhelníku, která by bod B od strany $A(k)\,A(k+1)$ geometricky »oddělila«. K vyřešení úlohy proto stačí zjistit, zda bod B leží napravo nebo nalevo od úsečky $A(k)\,A(k+1)$. Přesněji řečeno, bod B leží uvnitř daného mnohoúhelníku právě tehdy, jestliže pomocná funkce VPRAVO zavolaná se souřadnicemi bodů $A(k+1)$, $A(k)$, B

na místě parametrů (v tomto pořadí) dává hodnotu »pravda«. Záměna pořadí bodů $A(k)$, $A(k+1)$ při vyvolání funkce VPRAVO je nutná z toho důvodu, že bod ležící na straně mnohoúhelníku musí být označen jako ležící uvnitř.

2. Ze zkoumaného bodu B povedeme polopřímku libovolným směrem takovým, aby na této polopřímce neležel žádný vrchol zadaného mnohoúhelníku. Zjistíme počet průsečíků této polopřímky se stranou mnohoúhelníku. Budeme-li se po polopřímce pohybovat ve směru od bodu B, každý průsečík polopřímky se stranou mnohoúhelníku bude znamenat přechod z oblasti uvnitř mnohoúhelníku do oblasti vně mnohoúhelníku nebo naopak. Volba takového směru polopřímky, aby na ní neležel žádný vrchol mnohoúhelníku, nám odstraní všechny nežádoucí případy, že by polopřímka mnohoúhelník pouze »tečovala« (dotkla by se ho v jednom bodě nebo v celé straně, ale ke změně oblasti by nedošlo). Polopřímka samozřejmě vede do oblasti vně mnohoúhelníku, neboť je nekonečná, zatímco mnohoúhelník je konečný útvar. Počet průsečíků polopřímky se stranami mnohoúhelníku proto jednoznačně určuje, zda se výchozí bod B nachází uvnitř nebo vně mnohoúhelníku. Je-li tento počet lichý, leží bod B uvnitř, je-li sudý, leží vně zadaného mnohoúhelníku.

3. Nejprve zvlášť vyšetříme, zda zkoumaný bod B není roven přímo některému z vrcholů $A(i)$ daného mnohoúhelníku. Pokud ano, leží B uvnitř mnohoúhelníku. Jestliže tomu tak není, má smysl hovořit o velikosti úhlů $A(i)BA(i+1)$, tzn. o velikosti úhlů, pod nimiž jsou z bodu B vidět jednotlivé strany mnohoúhelníku. Velikosti těchto úhlů budeme měřit podle konvence proti směru hodinových ručiček (podobně jako v pomocné funkci UHEL) a jejich hodnotu budeme udá-

vat ve stupních v rozmezí (−180; 180⟩. Jestliže budeme procházet po obvodu mnohoúhelníku z bodu $A(1)$ postupně přes body $A(2)$, $A(3)$, ... až zpět do bodu $A(1)$, tzn. také proti směru hodinových ručiček, a budeme přitom sčítat úhly měřené výše uvedeným způsobem, bude nám tento částečný součet pro bod $A(k)$ udávat velikost úhlu $A(1)BA(k)$. Hodnota součtu úhlů po projití celým obvodem mnohoúhelníku bude jednoznačně určovat polohu bodu B vůči zadanému mnohoúhelníku. Leží-li bod B uvnitř mnohoúhelníku, má výsledný součet úhlů hodnotu 360 stupňů, v opačném případě je nulový. Volbou hodnoty +180 stupňů pro přímý úhel je zajištěno, že bod B ležící na straně mnohoúhelníku je správně vyhodnocen jako ležící uvnitř (při volbě −180 stupňů by byl označen jako ležící vně).

Na závěr předvedeme programovou realizaci jednoho z algoritmů řešících danou úlohu. Pro tento účel zvolíme algoritmus popsaný výše jako 3. v pořadí. Program očekává na vstupu nejprve počet vrcholů mnohoúhelníku, po něm následují dvojice souřadnic jeho vrcholů a nakonec dvojice souřadnic zkoumaného bodu.

```
program UVNITR (input, output);
const MAX = 50; {maximální počet vrcholů mnohoúhelníku}
var AX, AY: array [1..MAX] of real;
        {x-ová a y-ová souřadnice vrcholů mnohoúhelníku}
    N: integer;                {počet vrcholů mnohoúhelníku}
    BX, BY: real;              {souřadnice zkoumaného bodu}
    SOUCET: real;              {součet velikostí úhlů}
    VYSLEDEK: Boolean;         {výsledná poloha bodu B}
    I: integer;                {pomocná proměnná}
```

```
function UHL (X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3: real) : real;
  {předefinování pomocné funkce UHEL tak, aby dávala
  hodnoty ve stupních z rozmezí (−180; 180 > }
var U: real;
begin
U: = UHEL (X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3);
if U > 180 then U: = U − 360;
UHL: = U
end;
begin
{Načtení vstupních hodnot:}
read (N);                              {počet vrcholů mnoh. }
for I: = 1 to N do read(AX[I], AY[I]); {souřadnice vrcholů}
read (BX, BY);                         {souřadnice bodu B}

{Kontrola, zda bod B nesplývá s vrcholem mnohoúhelníku:}
VYSLEDEK: = false;
I: = 1;
while not VYSLEDEK and (I < = N) do
  begin
  if (BX = AX[I]) and (BY = AY[I]) then
    VYSLEDEK: = true;
  I: = I + 1
  end;
{Sčítání velikostí úhlů pro celý obvod mnohoúhelníku:}
if not VYSLEDEK then
  begin
  SOUCET: = UHL (AX[N], AY[N], BX, BY,
                 AX[1], AY[1]);
  for I: = 1 to N − 1 do
```

```
    SOUCET: = SOUCET + UHL (AX[I], AY[I],
                            BX, BY, AX[I + 1], AY[I + 1]);
  if SOUCET = 360 then
    VYSLEDEK: = true
  end;
{Vypsání výsledku úlohy:}
if VYSLEDEK then
  writeln ('Bod leží uvnitř mnohoúhelníku.')
else
  writeln ('Bod leží vně mnohoúhelníku.')
end.
```

K uvedenému programu je třeba poznamenat, že při skutečné praktické realizaci zvoleného algoritmu je nutné provádět jiným způsobem testování rovnosti dvou reálných čísel. Zde jsme pro zjednodušení a pro přehlednost uvedli příslušné testy ve tvaru

if $(BX = AX[I])$ **and** $(BY = AY[I])$ **then** ...

a

if $SOUCET = 360$ **then** ...

Tento tvar ovšem není vhodný pro výpočet, neboť reálná čísla jsou v počítači zobrazena přibližně. Místo přímého testu na rovnost dvou reálných čísel je proto třeba zkoumat, zda se obě čísla od sebe příliš neliší, například takto:

if $(\text{abs}(BX - AX[I]) < EPS)$ **and** $(\text{abs}(BY - AY[I]) < EPS)$ **then** ... pro vhodnou velmi malou konstantu *EPS*. Druhou z uvedených podmínek je v tomto konkrétním případě možné zapsat také jednodušeji například jako

if $SOUCET > 300$ **then** ... ,

neboť víme, že po ukončení výpočtu nabude proměnná *SOUCET* jedné z dvou možných hodnot, 360 nebo 0.

P - III - 1

Jistě existuje nějaká konečná posloupnost operací sjednocení a rozdělení, která převede P na Q. Jednou z možných cest je například nejprve sjednotit všechny množiny Pi, $i = 1, \ldots, m$, a takto vzniklou množinu potom postupně rozdělit na množiny Qj, $j = 1, \ldots, n$. Existuje proto také nějaká nejkratší posloupnost operací převádějící P na Q.

Nejprve ukážeme, že v takové nejkratší posloupnosti operací mohou být nejprve provedeny všechny operace sjednocení a potom všechny operace rozdělení. K tomu stačí dokázat následující tvrzení: Předchází-li v nejkratší možné posloupnosti operací převádějící P na Q nějaká operace rozdělení operaci sjednocení, lze pořadí těchto dvou operací zaměnit (přitom se pochopitelně mohou změnit i množiny, s nimiž se operace provádějí). Platnost tvrzení dokážeme rozborem případů. Nechť je v uvažované posloupnosti operací rozdělení množiny A na množiny $A1$, $A2$ následováno sjednocením množin B, C na množinu D.

1. Pokud se žádná z množin $A1$, $A2$ nerovná žádné z množin B, C, jsou obě operace zcela nezávislé, a můžeme proto zaměnit jejich pořadí bez vlivu na výsledek.

2. Pokud $\{A1, A2\} = \{B, C\}$, pak se provedením uvažované dvojice operací obnoví přesně stejný stav souboru množin, jaký byl před provedením těchto operací. Obě operace

je tudíž možné vynechat, což je spor s minimalitou délky naší posloupnosti operací. Tento případ tedy nemůže nastat.

3. Jestliže například množiny $A2$, C jsou shodné a množiny $A1$, B různé (obdobně pro ostatní kombinace), můžeme místo naší dvojice operací provést nejprve sjednocení množin A, B a v dalším kroku takto vzniklou množinu rozdělit na $A1$, D. Výsledný soubor množin bude stejný jako u původní posloupnosti operací.

Jiný případ nemůže nastat. Dokázali jsme tedy, že existuje nejkratší posloupnost operací převádějící P na Q, ve které se nejprve provedou všechna sjednocení a potom rozdělení množin.

Množiny $P1$, $P2$, ..., Pm budeme nejprve sjednocovat, až dostaneme soubor množin $A = \{A1, A2, \ldots, Ar\}$, $n <= r <= m$. K tomu je třeba provést $m - r$ operací sjednocení. Potom množiny tohoto souboru rozdělíme na množiny $Q1$, $Q2$, ..., Qn provedením $n - r$ operací rozdělení. Celkem se tedy provede $K = (m + n) - 2r$ operací. Hodnota $m + n$ je pevně dána zadanými soubory množin P a Q. Musíme proto hledat co největší hodnotu r. Pro další úvahy budeme zatím předpokládat, že všechny množiny $P1$, ..., Pm, $Q1$, ..., Qn jsou neprázdné. Úpravu řešení pro případ výskytu prázdných množin v zadaných souborech P a Q provedeme v závěru.

Každá množina Ai ($i = 1, 2, \ldots, r$) je sjednocením několika množin souboru P (neboť tak vznikla) a lze ji vyjádřit také jako sjednocení několika množin souboru Q (tak se bude dělit). Pokud mají množiny Pi, Pj s množinou Qh neprázdný průnik, musí být Pi, Pj spojeny v jedné z množin souboru A. Naopak, bude-li uvedená podmínka splněna, bude každá množina Qh podmnožinou nějaké množiny souboru A, a bude

tedy možné získat Q z A operacemi rozdělení. Nebudeme provádět více sjednocení, než je nezbytně nutné (tj. než uvádí tato podmínka), neboť naší snahou je minimalizovat počet všech operací neboli získat soubor A tvořený co největším počtem r množin.

Navrhneme nyní algoritmus na určení, které z množin souboru P je nutné sjednotit vždy do jedné množiny souboru A. Pro tento účel je možné převést naši úlohu na jeden standardní grafový algoritmus. Soubory množin P a Q můžeme reprezentovat grafem G o $m + n$ vrcholech odpovídajících jednotlivým množinám. Vrcholy grafu Pi a Qj jsou spojeny hranou právě tehdy, jestliže množiny Pi a Qj mají neprázdný průnik. Jiné hrany v grafu G nejsou (jedná se tedy o tzv. bipartitní graf). Podle výše uvedené podmínky na sjednocování množin souboru P je nutné spojit do jedné množiny souboru A vždy právě ty množiny, které patří do jedné komponenty souvislosti grafu G (tzn. ty množiny, které jsou v grafu G spojeny hranami). Hledaný počet množin r souboru A je proto roven počtu komponent souvislosti grafu G.

Algoritmus na nalezení komponent souvislosti daného grafu je dobře znám jako jeden ze standardních algoritmů teorie grafů, a nebudeme ho zde tudíž podrobněji rozebírat. Je vysvětlen v každé základní učebnici teorie grafů. Struktura algoritmu je velmi podobná algoritmu nalezení cesty mezi dvěma vrcholy grafu, který je uveden jako vzorové řešení úlohy P — I — 1.

Soubory množin P, Q můžeme v programu reprezentovat maticí logických hodnot $T[1..m, 1..n]$ takovou, že
$T[i,j] = 1$, jestliže Pi, Qj mají společný prvek,
$T[i,j] = 0$, jestliže Pi, Qj nemají společný prvek.

Matice T má minimální možnou velikost postačující k uložení všech informací o vzájemných vztazích množin souborů P a Q. Zároveň je vhodnou částí matice sousednosti grafu G obsahující všechny potřebné informace o grafu G. Na základě matice T určíme počet komponent souvislosti r grafu G. Výsledný minimální počet operací potřebných k převedení souboru množin P na soubor Q je potom dán výrazem $m + n - 2r$.

Zbývá dořešit případ, že se v souborech P a Q mohou vyskytovat prázdné množiny. Nechť soubor P obsahuje p prázdných množin a soubor Q obsahuje q prázdných množin. Potom platí $K = (m - p) + (n - q) - 2r + |p - q|$, kde číslo r sestrojíme výše uvedeným postupem ze systémů P', Q' vzniklých z P, Q vynecháním prázdných množin. K převedení p prázdných množin na q pak potřebujeme provést ještě $|p - q|$ operací: jestliže $p >= q$, bude to $p - q$ sjednocení, pokud $p < q$, provedeme $q - p$ rozdělení.

P - III - 2

Podle zadání úlohy má každá jednička v matici A (případně s výjimkou těch, které jsou na okraji matice) právě dva jedničkové sousední prvky, kde za sousední považujeme pouze pole ve směru vlevo, vpravo, nahoru a dolů. Tak vznikají v matici A »čáry« tvořené jedničkami, které celou plochu matice A dělí na jednotlivé oblasti tvořené nulovými prvky. Jedna z oblastí je zvolena k vybarvení tím, že je zadán jeden její prvek $A[I, J]$.

Dva nulové prvky matice A patří do téže oblasti, jestliže nejsou odděleny žádnou »čarou« z jedniček. Z toho vyplývá,

že víme-li o prvku $A[K, L] = 0$, že patří do zvolené oblasti, pak do této oblasti budou patřit také všechny nulové prvky pole A, které s $A[K, L]$ sousedí ve směru svislém, vodorovném nebo šikmém. Naopak, jestliže prvek $A[K, L] = 0$ (různý od prvku $A[I, J]$) nesousedí ve směru svislém, vodorovném ani šikmém s žádným prvkem oblasti zadané prvkem $A[I, J]$, pak $A[K, L]$ do této oblasti nepatří.

Z uvedeného rozboru plyne následující jednoduchý algoritmus. Vezmeme zadaný prvek $A[I, J]$ a obarvíme ho (tzn. dosadíme do něj 2). Potom prohlédneme všech osm prvků, s nimiž sousedí, a obarvíme ty z nich, které jsou dosud nulové. Pro každý z takto nově obarvených prvků celý postup opakujeme. Výpočet a obarvování probíhá tak dlouho, dokud je možné obarvit nějaký další prvek matice A.

Algoritmus je možné realizovat pomocí rekurzívní procedury nebo třeba pomocí zásobníku. Ukážeme si zde obě řešení. První z nich má kratší a přehlednější zápis, druhé bude pracovat o něco rychleji.

Řešení pomocí rekurze

```
program BARVENI 1 (input, output);

const M = 10;                {počet řádků matice}
      N = 10;                {počet sloupců matice}
var A: array [1..M, 1..N] of integer;
    K, L: integer;           {pomocné proměnné}
    I, J: integer;           {zadané výchozí pole}

procedure VYBARVI (X, Y: integer);
  {vybarvení prvku A[X, Y] a rekurzívní vyvolání téže procedury na všechny prvky v okolí}
```

```
var K, L: integer;          {pomocné proměnné}
begin
A[X, Y]: = 2;               {obarvení prvku A[X, Y]}
for K: = X − 1 to X + 1 do
  for L: = Y − 1 to Y + 1 do
    if (K > = 1) and (K < = M) and (L > = 1) and
    (L < = N) then
        if A[K, L] = 0 then VYBARVI (K, L)
end; {VYBARVI}

begin
for K: = 1 to M do
  for L: = 1 to N do
    read (A[K, L]);         {přečtení obsahu pole A}
read (I, J);                {přečtení výchozího prvku}
VYBARVI (I, J);             {obarvení pole od prvku A[I, J]}
for K: = 1 to M do
  begin
  writeln;
  for L: = 1 to N do
    write (A[K, L] : 2) {vytisknutí obarveného A}
  end;
writeln
end.
```

Řešení pomocí zásobníku

```
program BARVENI 2 (input, output);

const M = 10;               {počet řádků}
```

```
    N = 10;              {počet sloupců}
    MAX = 100;           {velikost zásobníku — max. M × N}

type SOUR = record X, Y: integer end;
                         {souřadnice prvku ukládané do zásobníku}
var A: array [1..M, 1..N] of integer;
    K, L: integer;       {pomocné proměnné}
    I, J: integer;       {zadání výchozího prvku}
    X, Y: integer;       {souřadnice řešeného prvku}
    STACK: array [1..MAX] of SOUR;
                         {zásobník souřadnic}
    SP: integer;         {ukazatel vrcholu zásobníku STACK}

begin
for K: = 1 to M do
  for L: = 1 to N do
    read(A[K, L]);       {přečtení obsahu pole A}
read (I, J);             {přečtení výchozího prvku}

STACK [1].X : = I;
STACK [1]. Y : = J;
SP : = 1;                {inicializace zásobníku}

while SP > 0 do
  begin
  X: = STACK [SP].X;
  Y: = STACK [SP]. Y;
  SP: = SP — 1;          {odebrán vrchní prvek ...}
  A [X, Y] : = 2;        {... a obarven na »2«}
```

```
  for K: = X − 1 to X + 1 do
    for L: = Y − 1 to Y + 1 do
      if (K >= 1) and (K <= M) and (L >= 1) and
      (L <= N) then
        if A[K, L] = 0 then
        begin                {sousední prvek je nulový}
        SP: = SP + 1;
        STACK[SP].X: = K;
        STACK[SP].Y: = L; {... uložen do zásobníku}
        end
  end;
for K: = 1 to M do

  begin
  writeln;
  for L: = 1 to N do
    write (A[K, L] : 2)  {vytisknutí obarveného A}
  end;
writeln

end.
```

Správnost navrženého algoritmu snadno ukážeme s použitím rozboru uvedeného na začátku řešení. Při práci algoritmu bude obarven prvek $A[I, J]$ a dále všechny další prvky matice A, které sousedí s některým dříve obarveným prvkem. V okamžiku, kdy již není možné obarvit žádný další prvek a kdy tedy výpočet podle algoritmu končí, bude proto obarvena právě celá oblast původně nulových prvků matice A určená prvkem $A[I, J]$. Přesně to bylo naším úkolem.

Výpočet podle algoritmu je jistě konečný, neboť v každém kroku algoritmu je obarven jeden původně nulový prvek matice A. Tato matice má konečnou velikost, a tedy také konečný počet všech nulových prvků.

Algoritmus má maximální časovou složitost úměrnou hodnotě $M.N$ neboli počtu prvků matice A. Vyžaduje totiž provedení tolika kroků výpočtu, kolik je v zadané matici A nulových prvků v oblasti určené prvkem $A[I, J]$. Řádově rychlejší algoritmus řešící zadanou úlohu nemůže existovat, neboť při libovolném postupu řešení musí být obarven každý nulový prvek zvolené oblasti a těch může být až $M.N$. V praxi se ovšem používají jiné algoritmy, které jsou sice složitější z hlediska zápisu a vysvětlení, ale mají alespoň v průměrném případě (nikoli v nejhorším) značně menší paměťové nároky a jsou i o něco rychlejší. Zde popsaný algoritmus totiž může navštívit a testovat jeden prvek matice A až devětkrát (jednou při vlastním obarvování prvku a osmkrát při obarvování jeho sousedů) a tento počet je možné vhodnou organizací výpočtu snížit.

P - III - 3

Věta: Je-li před prvkem $A[I]$, $1 < I <= N$, tzn. na místech v poli A s indexem menším než I, celkem P čísel větších, než je $A[I]$, pak se tato čísla dostanou za $A[I]$ po právě P průchodech vnějšího cyklu algoritmu.

Důkaz: Při každém průchodu se za $A[I]$ dostane právě jedno z takových čísel.

a) Nemůže jich být více, neboť s číslem $A[I]$ se provede pouze jedna výměna, kterou se číslo $A[I]$ dostane v poli A o jedno místo dopředu na pozici $A[I - 1]$. Na tomto novém místě může být naše číslo testováno opět až v dalším průchodu cyklem.

b) Jedno z P čísel (pro $P > 0$) větších než $A[I]$ se za $A[I]$ jistě dostane. Bude to číslo $A[S] = \max \{A[1], \ldots, \ldots, A[I - 1]\}$, neboť pro tento prvek $A[S]$ bude vždy splněna podmínka v programu, takže se při jednom průchodu cyklem dostane až na pozici $A[I - 1]$, a protože je větší než $A[I]$, bude ještě v témže průchodu cyklem vyměněno i s číslem $A[I]$.

Při prvním průchodu cyklem tedy zůstane v poli A před naším sledovaným číslem ještě $P - 1$ větších čísel a celý postup se bude opakovat. Přesně po P průchodech se všechna čísla větší než sledované číslo dostanou v poli A za něj, což jsme měli dokázat.

K vzestupnému setřídění celého pole A je třeba, aby se za každý prvek pole A dostala všechna větší čísla, která jsou na začátku práce algoritmu umístěna před ním. Podle dokázané věty každý prvek pole A vyžaduje, aby počet průchodů K byl větší nebo roven počtu prvků pole A s menšími indexy, které jsou větší než on sám. Pro takové K budou před každým prvkem stát pouze prvky menší nebo stejné, což je přesně vyjádření vzestupného uspořádání prvků pole A.

V hledaném algoritmu tedy stačí pro každý prvek pole A zjistit, kolik prvků pole A s menším indexem je větších než on sám, a maximum z těchto čísel vzít za hodnotu K.

```
program TRID (input, output);

const N = 10;                          {velikost pole A}
var A: array [1..N] of integer;        {tříděné pole A}
    I, J, K, L: integer;               {pomocné proměnné}

begin
for I: = 1 to N do read (A[I]);        {počáteční hodnoty pole A}
K: = 0;                                {hledaná hodnota K}
for I: = 2 to N do
  begin                                {zkoumáme prvek A[I]}
  L: = 0;                              {počet větších předchůdců}
  for J: = 1 to I - 1 do
    if A[J] > A[I] then L: = L + 1;
                                       {další větší předchůdce}
  if L > K then K: = L
  end;
writeln (K)                            {tisk výsledku}

end.
```

Správnost algoritmu plyne z provedeného rozboru. Konečnost výpočtu je zřejmá, neboť počet průchodů každým cyklem je předem omezen. Algoritmus má konstantní paměťové nároky (nepočítáme-li zadané pole A, které se nesmí měnit) a kvadratickou časovou složitost.

P - III - 4

a) Nejrychlejší známé algoritmy provádějící triangulaci (tj. rozdělení na trojúhelníky) daného mnohoúhelníku v čase $N.\log(N)$, nebo dokonce $N.\log(\log(N))$, kde N je počet

vrcholů mnohoúhelníku, jsou velmi komplikované. Ukážeme si zde proto značně jednodušší kvadratický algoritmus. Odvození algoritmu rozdělíme do několika kroků.

1. Nejprve ukážeme, že do každého mnohoúhelníku s více než třemi vrcholy lze umístit diagonálu, tj. úsečku, která leží celá uvnitř mnohoúhelníku a která spojuje dva vrcholy mnohoúhelníku, jež spolu nesousedí na obvodu. Pro konvexní mnohoúhelník je toto tvrzení triviální, stačí spojit libovolnou dvojici nesousedících vrcholů. Je-li mnohoúhelník nekonvexní, existuje v něm vrchol, u něhož leží vnitřní úhel větší než 180 stupňů. Při pohledu z tohoto vrcholu »dovnitř« mnohoúhelníku proto jistě uvidíme alespoň dvě jeho různé strany. Na předělu těchto stran musí být vrchol mnohoúhelníku, který je z našeho vrcholu také vidět a ke kterému tudíž můžeme vést diagonálu.

2. Pro libovolný mnohoúhelník (s alespoň třemi vrcholy) existuje taková jeho triangulace, v níž alespoň jeden z trojúhelníků, které rozdělením mnohoúhelníku vzniknou, má dvě své strany shodné se stranami mnohoúhelníku. O takovém trojúhelníku budeme dále říkat, že leží »na obvodu« mnohoúhelníku. Ukážeme, jak takovou triangulaci sestrojit. Podle bodu 1 lze daný mnohoúhelník rozdělit diagonálou na dva menší. Každý z nich má právě jednu svoji stranu tvořenou diagonálou a všechny zbývající jeho strany jsou stranami původního mnohoúhelníku. Zvolíme libovolný z menších mnohoúhelníků a budeme pokračovat v jeho dělení. Opět podle 1 je možné rozdělit ho diagonálou. Ze dvou vzniklých menších mnohoúhelníků jeden znovu splňuje podmínku, že jediná jeho strana je diagonálou původního mnohoúhelníku a zbývající jeho strany jsou stranami původního mnoho-

úhelníku. S tímto mnohoúhelníkem budeme pokračovat v dělení stejným způsobem. Při každém dělení se zmenšuje počet vrcholů mnohoúhelníku, s nímž právě pracujeme, takže po konečně mnoha krocích získáme trojúhelník. Ten má opět vlastnost, že pouze jedna jeho strana je diagonálou výchozího mnohoúhelníku. Jedná se tudíž o trojúhelník »na obvodu« mnohoúhelníku. Triangulaci zbývajících dílčích mnohoúhelníků, kterými jsme se dosud nezabývali, již provedeme libovolně. Existence nějaké triangulace každého mnohoúhelníku přímo plyne z 1.

3. Na základě tvrzení 2 o existenci trojúhelníku »na obvodu« mnohoúhelníku již můžeme sestrojit algoritmus řešení úlohy. Vyjdeme od prvního vrcholu mnohoúhelníku $A[1]$ a budeme postupovat po obvodu ve zvoleném směru proti pohybu hodinových ručiček (v souladu se způsobem zadání mnohoúhelníku). Přitom budeme hledat v pořadí první vrchol mnohoúhelníku $A[I]$ takový, aby trojúhelník tvořený vrcholy $A[I-1]$, $A[I]$, $A[I+1]$ byl trojúhelníkem »na obvodu« mnohoúhelníku. To bude splněno právě tehdy, jestliže vnitřní úhel mnohoúhelníku u vrcholu $A[I]$ bude konvexní (tj. menší než 180 stupňů) a jestliže do tohoto trojúhelníku nezasahuje žádný jiný vrchol mnohoúhelníku. Tvrzení 2 nám zaručuje, že takový trojúhelník existuje, a při systematickém zkoumání všech vrcholů ho tedy jistě najdeme. Po nalezení trojúhelníku »na obvodu« $A[I-1]\,A[I]\,A[I+1]$ tento trojúhelník od mnohoúhelníku oddělíme diagonálou spojující vrcholy $A[I-1]$ a $A[I+1]$ (stává se součástí hledané triangulace). Zbylý mnohoúhelník má o jeden vrchol méně — o vrchol označený $A[I]$. V triangulaci budeme pokračovat stejným způsobem počínaje od vrcholu $A[I-1]$ (ten musíme znovu

prozkoumat, neboť vnitřní úhel u něj ležící se oddělením trojúhelníku $A[I-1]A[I]A[I+1]$ zmenšil) ve stejném směru proti pohybu hodinových ručiček. Výpočet skončí v okamžiku, kdy nám zbude poslední trojúhelník.

4. Správnost uvedeného algoritmu plyne z dokázaných tvrzení a byla zdůvodněna zároveň s odvozováním algoritmu. Výpočet skončí po konečně mnoha krocích, neboť v každém kroku je od mnohoúhelníku oddělen jeden trojúhelník (je nalezena jedna diagonála náležející do výsledné triangulace), takže počet kroků výpočtu je předem znám. Do mnohoúhelníku o N vrcholech se při triangulaci umístí přesně $N-3$ diagonál.

5. Algoritmus má kvadratickou časovou složitost. Otestování jednoho vrcholu mnohoúhelníku, zda u něj leží trojúhelník »na obvodu«, vyžaduje řádově N operací (testy na náležení do trojúhelníku pro všechny zbývající vrcholy). Přitom celá triangulace se provede při jednom »obejití« po obvodu mnohoúhelníku, tzn. při provedení řádově N takových testování. Poslední tvrzení plyne ze zvoleného pořadí, v jakém vyšetřujeme jednotlivé vrcholy. Při zkoumání vrcholu $A[I]$ totiž víme, že u žádného z vrcholů $A[1], \ldots, A[I-1]$ neleží trojúhelník »na obvodu«. Jestliže nyní oddělíme trojúhelník $A[I-1]\,A[I]\,A[I+1]$, mohla se změna dotknout pouze vrcholu $A[I-1]$, u kterého se zmenšil vnitřní úhel. Od tohoto vrcholu se proto pokračuje v prohledávání.

6. Na závěr uvedeme programovou realizaci algoritmu. Na vstupu programu je očekáván nejprve počet vrcholů mnohoúhelníku a dále souřadnice všech vrcholů. Výstupem je seznam diagonál tvořících triangulaci.

```
program TRIANGULACE (input, output);
const MAX = 100;                    {maximální počet vrcholů}

var AX, AY: array [0..MAX] of real;
                                    {souřadnice vrcholů}
    N: integer;                     {skutečný počet vrcholů}
    NALEZEN: Boolean;               {příznak nalezení trojúhelníku}
    MOZNOST: Boolean;               {příznak možného trojúhelníku}
    MEZ: integer;                   {počet všech diagonál}
    I, J, K: integer;               {pomocné proměnné}

begin
read (N);
for I: = 1 to N do
  read (AX[I], AY[I]);              {přečteny souřadnice vrcholů}
AX[0]: = AX[N];                     {kopie prvního a posledního ..}
AY[0]: = AY[N];                     {... vrcholu mnohoúhelníku ...}
AX[N + 1] : = AX[1];                {... z technických důvodů — ..}
AY[N + 1] : = AY[1];                {... — pro snazší testování}

I: = 1;                             {začneme od vrcholu A[1]}
MEZ: = N — 3;                       {počet všech diagonál}
for J: = 1 to MEZ do
  begin                             {sestrojíme další diagonálu}

  NALEZEN: = false;
  while not NALEZEN do  {hledáme trojúh. »na obvodu«}
    begin
    if UHEL (AX[I + 1], AY[I + 1], AX[I], AY[I],
                    AX[I — 1], AY[I — 1]) < 180 then
```

```
      begin                {konvexní vnitřní úhel}
      K: = 1;
      MOZNOST: = true;
      while MOZNOST and (K < = N) do
        begin
        if abs (K - I) > 1 then {vrchol A[K] je různý
                    od A[I] a nesousedí s ním na obvodu}
            if VNITR (AX[K], AY[K], AX[I - 1],
              AY[I - 1], AX[I], AY[I], AX[I + 1],
              AY[I + 1]) then
                MOZNOST: = false;     {A[K] leží uvnitř}
        K: = K + 1
        end;
      if MOZNOST then NALEZEN: = true
                          {žádný jiný vrchol není uvnitř
                      trojúhelníku A[I - 1] A[I] A[I + 1]}
      else I: = I + 1                 {zkusíme další vrchol}
      end
    else I: = I + 1                   {zkusíme další vrchol}
    end;
  writeln ('Diagonála:', AX[I - 1], AY[I - 1], AX[I + 1],
            AY[I + 1]);       {diag. nalezena a vytištěna}
  for K: = I to N do
    begin
    AX[K]: = AX[K + 1]; {vynechání vrcholu A[I] ...}
    AY[K]: = AY[K + 1] {... z mnohoúhelníku}
    end;
  if I = 1 then
    begin                     {kopie nového vrcholu A[1]}
    AX[N]: = AX[1];
```

```
    AY[N]: = AY[1]
    end;
  if I = N then                {kopie nového vrcholu A[N]}
    begin
    AX[0]: = AX[N − 1];
    AY[0]: = AY[N − 1]
    end;
  N: = N − 1;                  {nový počet vrcholů}
  I: = I − 1;                  {nový zkoumaný vrchol}
  if I = 0 then I: = N
    end
end.
```

b) Lomená čára spojující po řadě body $P(1), \ldots, P(N), P(1)$ je zřejmě uzavřená. Podle definice tedy tvoří mnohoúhelník právě tehdy, jestliže sama sebe nikde neprotíná. Stačí proto ověřit, zda existuje nějaká dvojice stran mnohoúhelníku, které spolu na obvodu nesousedí a které přitom mají společný bod. Lomená čára $P(1), \ldots, P(N), P(1)$ tvoří mnohoúhelník právě tehdy, jestliže taková dvojice úseček neexistuje.

Při řešení úlohy budeme vyšetřovat vzájemnou polohu každé dvojice různých spolu nesousedících úseček ze zadané lomené čáry. Správnost tohoto řešení je zřejmá. Algoritmus je jistě konečný, neboť všech úseček je konečně mnoho a každou dvojici úseček budeme vyšetřovat pouze jednou. Z toho zároveň plyne, že algoritmus bude mít kvadratickou časovou složitost.

Zbývá ještě vyřešit otázku, jak určit, zda dvě úsečky zadané souřadnicemi svých koncových bodů mají nějaký společný bod. Existuje několik různých postupů, jak vyhledat společný

bod úseček. Jednou možností je nepoužít vůbec předdefinované funkce a celý problém vyřešit prostředky analytické geometrie pomocí parametrických rovnic obou úseček. Ukážeme si zde jiné řešení, využívající funkci VPRAVO. Označme zkoumané úsečky *AB*, *CD* a souřadnice jejich krajních bodů *XA*, *YA*, ... atd. Jestliže některý z krajních bodů jedné úsečky leží na druhé úsečce, pak úsečky jistě mají společný bod. V opačném případě stačí vyšetřit, zda oba body *A*, *B* leží ve stejné polorovině určené přímkou *CD* a zda oba body *C*, *D* leží ve stejné polorovině určené přímkou *AB*. Úsečky *AB*, *CD* mají společný bod právě tehdy, pokud ani jedna z těchto podmínek neplatí. K uvedenému vyšetřování polohy bodů použijeme přímo předdefinovanou funkci VPRAVO. Hraniční přímku již můžeme zahrnout do libovolné poloroviny, neboť případ, že některý krajní bod jedné úsečky leží na druhé úsečce, jsme již vyřešili dříve.

Uvedené řešení dílčího problému společného bodu dvou úseček nyní naprogramujeme. Pomocná lokální funkce *NAUSECCE*(*X1*, *Y1*, *X2*, *Y2*, *X3*, *Y3*) dává logickou výstupní hodnotu podle toho, zda na úsečce s krajními body *P1* = (*X1*, *Y1*) a *P2* = (*X2*, *Y2*) leží bod *P3* = (*X3*, *Y3*). Hodnota výsledné logické funkce *PRUSECIK*(*XA*, *YA*, *XB*, *YB*, *XC*, *YC*, *XD*, *YD*) je pak určena tím, zda úsečky *AB*, *CD* mají společný bod.

```
function PRUSECIK(XA, YA, XB, YB, XC, YC, XD,
                  YD : real): Boolean;

function NAUSECCE(X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3: real):
                  Boolean;
```

```
  begin
  NAUSECCE: = VPRAVO (X1, Y1, X2, Y2, X3,Y3)and
                VPRAVO (X2, Y2, X1, Y1, X3, Y3) and
                (X3 > = min (X1, X2)) and
                (X3 < = max (X1, X2)) and
                (Y3 > = min (Y1, Y2)) and
                (Y3 < = max (Y1, Y2))
  end; {NAUSECCE}
begin
if NAUSECCE (XA, YA, XB, YB, XC, YC) or
   NAUSECCE (XA, YA, XB, YB, XD, YD) or
   NAUSECCE (XC, YC, XD, YD, XA, YA) or
   NAUSECCE (XC, YC, XD, YD, XB, YB) then
     PRUSECIK: = true
else
  PRUSECIK: = not (
    (VPRAVO (XA, YA, XB, YB XC, YC) =
    VPRAVO (XA, YA, XB, YB, XD, YD))
  or
    (VPRAVO (XC, YC, XD, YD, XA, YA) =
    VPRAVO (XC, YC, XD, YD, XB, YB)))
end; {PRUSECIK}
```

Na závěr uvedeme celý program řešící naši úlohu. Program využívá výše uvedenou funkci *PRUSECIK*. Na vstupu programu je očekávána nejprve hodnota N a za ní postupně souřadnice všech vrcholů zadané lomené čáry. Výstupem je sdělení, zda tato lomená čára tvoří mnohoúhelník.

```
program MNOHOUHELNIK (input, output);
```

```
const MAX = 100;                {max. délka lomené čáry}

var PX, PY: array [1..MAX] of real; {souřadnice bodů}
    N: integer;                 {počet bodů}
    SPOLECNY: Boolean;          {příznak společ. bodu}
    I, J: integer;              {pomocné proměnné}

function PRUSECIK (XA, YA, XB, YB, XC, YC, XD,
      YD: real): Boolean;
  external;

begin
read (N);
for I: = 1 to N do read (PX[I], PY[I]); {přečteny souřad.}
PX[N + 1]: = PX[1];
PY[N + 1]: = PY[1];
SPOLECNY: = false;
I: = 1;
while (not SPOLECNY) and (I < = N - 2) do
  begin                         {testujeme úsečku P(I) P(I + 1)}
  J: = I + 2;
  while (not SPOLECNY) and
        ((J < N) or ((I > 1) and (J = N))) do
    begin                       {druhou úsečkou je P(J) P(J + 1)}
    SPOLECNY: = PRUSECIK(PX[I], PY[I], PX[I + 1],
      PY[I + 1], PX[J], PY[J], PX[J + 1], PY[J + 1]);
    J: = J + 1
    end;
  I: = I + 1
  end;
```

```
write ('Zadaná lomená čára');
if SPOLECNY then write ('ne');
writeln ('tvoří mnohoúhelník.')
end.
```

Korespondenční seminář ÚV MO

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří neměli možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. Nyní, kdy existují i krajské korespondenční semináře a kdy speciální školy s třídami zaměřenými na matematiku najdeme v každém kraji, je cílem tohoto semináře zlepšit individuální přípravu všech studentů, kteří prokázali své schopnosti a matematický talent v předchozích ročnících matematické olympiády. Korespondenční seminář tak nadále zůstává důležitou součástí přípravy na mezinárodní matematickou olympiádu.

K účasti v korespondenčním semináři jsme pozvali všechny špičkové řešitele kategorie A spolu s těmi studenty, kteří nějak vynikli v krajských kolech kategorií B a C předchozího ročníku MO. V průběhu 38. ročníku MO jim bylo postupně zasláno 5 sérií poměrně náročných úloh, jejichž texty najdete v úlohové části této ročenky (bez řešení). Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli:

1. *Petr Hliněný*, 3. ročník G M. Koperníka, Bílovec
2. *Ilja Martišovitš*, 4. ročník G J. Hronca, Bratislava
3. *Ondřej Kalenda*, 3. ročník G W. Piecka, Praha
4. *Ondrej Šuch*, 3. ročník G A Markuša, Bratislava
5. *Martin Dindós*, 3. ročník G J. Hronca, Bratislava
6. *Marek Velešík*, 4. ročník G, Koněvova ul., Brno
7. *Vladimír Komár*, 3. ročník G, Šmeralova ul., Košice
8. *Eduard Omasta*, 3. ročník G, Ružomberok
9. *Petr Čížek*, 4. ročník G W. Piecka, Praha
10. *Martin Čížek*, 3. ročník G, Rožnov pod Radhoštěm

Korespondenční seminář je řízen tajemníkem ÚV MO *RNDr. Karlem Horákem, CSc.*, který se staral o výběr úloh a prováděl i redakci komentářů. Opravu pak zajišťovalo několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF KU Praha (všichni jsou bývalí olympionici).

Úlohy korespondenčního semináře

1.1 Na výšce BH trojúhelníku ABC je dán bod P. Označme K a L průsečíky přímek AP, BC a přímek CP, AB. Dokažte, že úsečky KH a LH svírají s výškou BH shodný úhel.

1.2 Jsou dána kladná čísla λ, α, β a posloupnost $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ splňující následující rovnosti:

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = \lambda,$$

$$(\alpha + \beta)^n x_n = \alpha^n x_n x_0 + \alpha^{n-1} \beta x_{n-1} x_1 + \\ + \alpha^{n-2} \beta^2 x_{n-2} x_2 + \ldots + \beta^n x_0 x_n \, (n > 1).$$

Najděte x_n a zjistěte, pro které n je x_n největší.

1.3 Na přímce je dáno 50 úseček. Dokažte, že platí alespoň jedno z následujících tvrzení:
a) existuje 8 úseček se společným bodem;
b) existuje 8 úseček, z nichž každé dvě jsou disjunktní.

1.4 Je dáno několik čtverců, jejichž celkový obsah je 1. Dokažte, že je možno je umístit do čtverce s obsahem 2, aniž by se překrývaly.

1.5 Na kružnici je dána množina F oblouků, pro kterou platí, že při libovolném otočení R kolem středu dané kružnice mají množiny F a R(F) společný bod. Jaký nejmenší součet délek mohou mít oblouky z množiny F, je-li počet oblouků n?

1.6 Nechť strany trojúhelníku ABC jsou základnami rovnoramenných trojúhelníků AB_1C, BA_1C a AC_1B. Dokažte, že kolmice vedené z bodů A, B, C k odpovídajícím přímkám B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 procházejí jedním bodem.

1.7 Najděte všechna řešení rovnice

$$\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a,$$

je-li a reálné a $n > 1$ přirozené.

2.1 Zjistěte, pro která n platí: Je-li dán pravidelný n-úhelník ($n \geqq 3$), v jehož vrcholech jsou rozmístěny černé a bílé kameny, pak existují tři kameny stejné barvy ležící ve vrcholech rovnoramenného trojúhelníku.

2.2 Jezero v Kocourkově má tvar nekonvexního n-úhelníku. Dokažte, že buď z žádného jeho bodu není vidět všechny břehy, anebo množina takových bodů tvoří vnitřek konvexního m-úhelníku, kde $m \leqq n$.

2.3 Představme si nekonečnou šachovnici ve tvaru horní poloroviny: na bílých polích šachovnice jsou zapsána nějaká čísla tak, aby pro každé černé pole platilo, že součet čísel v levém a pravém sousedním poli je stejný jako součet v horním a spodním sousedním poli. Je-li dáno nějaké číslo d_n stojící v n-té řadě, kolik nejméně čísel stojících v prvních dvou řadách šachovnice musíme ještě znát, abychom mohli určit číslo stojící v $(n + 2)$. řadě nad číslem d_n?

2.4 Víme-li, že na i-tém výletě turistického oddílu ($1 \leqq i \leqq n$) bylo $\alpha_i . 100\%$ chlapců, kolik nejvýše procent chlapců je v oddíle? (Každý se zúčastnil aspoň jednoho výletu.)

2.5 Nechť K je střed hrany AB dolní podstavy pravidelného komolého jehlanu a L střed některé hrany CD jeho horní podstavy. Dokažte, že průměty obou úseček AB, CD na přímku KL mají stejnou délku.

2.6 V rovině jsou dány dva body A, B a přímka p procházející bodem A a neprocházející bodem B. Uvažujme libovolnou kružnici se středem O procházející body A, B a označme C její průsečík s přímkou p. Najděte geometrické místo středů úseček OC.

2.7 Jsou dána čísla 1, 2, 3, ..., 1000. Najděte největší m takové, že po vyškrtnutí libovolných m čísel mezi zbylými $1000 - m$ čísly existují dvě, z nichž jedno dělí druhé.

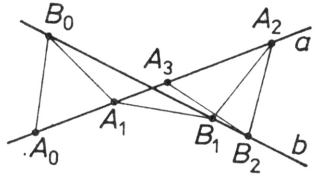
3.1 Pro přirozená čísla $k < n$ rozestavte čísla 1, 2, 3, ..., n^2 do tabulky $n \times n$ tak, aby v každém řádku čísla rostla a přitom součet čísel v k-tém sloupci byl
a) nejmenší;
b) největší.

3.2 Jsou dána přirozená čísla k a m. Mezi celočíselnými řešeními $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = m$$

vyberme N takových, že $0 \leqq x_i \leqq m\,(1 \leqq i \leqq k)$ a každé dvě z nich se liší na všech místech. Zjistěte, jaké je největší možné N.

3.3 V rovině jsou dány dvě různoběžky a, b. V bodě $A_0 \in a$ ve vzdálenosti menší než 1 od přímky b sedí blecha. Blecha postupně poskakuje do bodů $B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ podle následujících pravidel (obr. 33):



Obr. 33

1. body $A_0, A_1, \ldots$ leží na přímce a, body $B_0, B_1, \ldots$ na přímce b;
2. $|A_0B_0| = |B_0A_1| = |A_1B_1| = |B_1A_2| = \ldots = 1$;
3. $A_{n+1} = A_n$, jen když $A_nB_n \perp a$, a $B_{n+1} = B_n$, jen když $B_nA_{n+1} \perp b$.

Dokažte, že je-li velikost úhlu přímek a, b racionální (ve stupňové míře), bude cesta blechy periodická (tj. dostane se opět do bodu A_0 a pak zas bude pokračovat do bodů $B_0, A_1, \ldots$); a je-li iracionální, nedostane se blecha do žádného bodu víc než dvakrát.

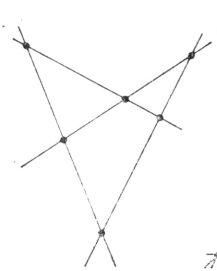
3.4 Jsou dána dvě nesoudělná přirozená čísla a, b. Jak známo, každé celé číslo lze vyjádřit jako $ax + by$ s celými x a y. Uvažujme množinu M těch celých čísel, která jsou tvaru $ax + by$ pro celá nezáporná x, y.

a) Jaké je největší celé číslo c, které nepatří do M?

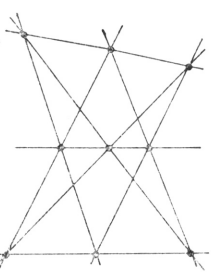
b) Dokažte, že z čísel n a $c - n$ (n je celé) jedno patří do M a druhé ne.

3.5 Je dán trojúhelník ABC. Kolik existuje bodů D takových, že čtyřúhelníky $ADBC$, $ABDC$ a $ABCD$ mají stejný obvod?

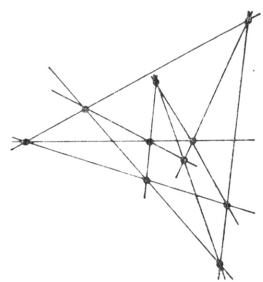
3.6 Na obr. 34 je šest bodů ležících po třech na čtyřech přímkách. Dokažte, že existuje právě 24 různých zobrazení, která převádějí uvedených šest bodů na sebe, přičemž každá trojice bodů ležících v přímce se zobrazí na trojici bodů ležících v přímce. Zjistěte, kolik takových zobrazení existuje pro konfigurace na obr. 35 a 36 (9 bodů na 9 přímkách a 10 bodů na 10 přímkách).



Obr. 34



Obr. 35



Obr. 36

3.7 Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{3\,000}$ číslic 1, 2 a operaci, která umožňuje prohodit dvě libovolné sousední trojice číslic. Všechny takové posloupnosti rozdělme do disjunktních tříd, přičemž v jedné třídě budou všechny posloupnosti, které lze na sebe převést pomocí několika uvedených operací. Kolik existuje takových tříd?

4.1 Pro libovolný nepravoúhlý trojúhelník T označme $H(T)$ trojúhelník, jehož vrcholy jsou paty výšek trojúhelníku T (tzv. úpatnicový trojúhelník). Uvažujme posloupnost trojúhelníků $T_1 = H(T)$, $T_2 = H(T_1)$, ... Jaké musí být úhly trojúhelníku T, aby

a) trojúhelník $H(T)$ byl ostroúhlý,

b) v posloupnosti $T_1, T_2, \ldots$ se vyskytl pravoúhlý trojúhelník T_n (takže T_{n+1} není definován),

c) trojúhelník $T_1 = H(T)$ byl podobný trojúhelníku T?

Pro každé n přirozené zjistěte, kolik existuje navzájem nepodobných trojúhelníků T, pro něž je trojúhelník T_n podobný trojúhelníku T.

4.2 Najděte všechna celočíselná řešení rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

taková, že žádné z čísel x, y, z není rovno 1.

4.3 V rovině jsou dány dva body A, B. Najděte množinu všech vrcholů C trojúhelníků ABC, pro něž mají stejnou délku

a) výška AA' a strana BC;

b) těžnice AA_1 a strana AC;

c) těžnice AA_1 a strana BC;

d) výška CC' a těžnice BB_1;

e) výška BB' a těžnice CC_1.

4.4 Označme α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC a položme

$$S = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}.$$

a) Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý či pravoúhlý, je $S \leqq 2$;

b) je-li trojúhelník ABC tupoúhlý s tupým úhlem aspoň $2 \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, je $S \geqq 2$;

c) mezi trojúhelníky s tupým úhlem $\gamma, \frac{\pi}{2} < \gamma < 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, existují takové, pro něž $S < 2$, i takové, pro něž $S > 2$. Dokažte.

4.5 Na nekonečném listu bílého čtverečkovaného papíru je n čtverečků obarveno černě. V jednotlivých okamžicích $t = 1, 2, \ldots$ změníme barvy všech čtverečků podle následujícího pravidla: každý čtvereček obarvíme podle převládající barvy v trojici, kterou s daným čtverečkem tvoří jeho horní a pravý soused. Dokažte, že nejpozději v čase $t = n$ černé čtverečky zmizí.

4.6 Je dán konvexní n-úhelník, jehož žádné dvě strany nejsou rovnoběžné, a uvnitř něho bod. Dokažte, že existuje nejvýše n přímek procházejících daným bodem a dělicích daný mnohoúhelník na dvě části stejného obsahu.

4.7 Ve středu čtverce stojí policajt a v jednom z vrcholů pachatel. Policajt se může pohybovat po celém čtverci rychlostí nejvýše u, zatímco pachatel se může pohybovat jen po stranách čtverce nejvýše rychostí v. Zjistěte, pro jaký poměr rychlostí u/v se policajtovi může podařit dostat se s pachatelem na stejnou stranu čtverce, přestože pachatel se tomu snaží zabránit.

5.1 Je-li O bod uvnitř trojúhelníku ABC takový, že $|\sphericalangle BOC| - |\sphericalangle BAO| = 90°$, označme M a N paty kolmic spuštěných z bodu O na strany AB a AC a P průsečík přímek BO, MN. Potom je $|\sphericalangle BPC| = 90°$. Dokažte.

5.2 V obdélníkové tabulce $m \times n$ je zapsáno mn kladných čísel. Uvažujme součiny m čísel v každém sloupci a součet S všech n takových součinů. Přerovnáme-li čísla v každém řádku podle velikosti, nebude výsledný součet S nové tabulky menší. Dokažte.

5.3 Pro libovolné přirozené n najděte součet

$$S_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n-k}{k} \frac{1}{4^k}.$$

5.4 V prostoru jsou dány čtyři body, které neleží v jedné rovině. Kolik existuje různých rovnoběžnostěnů, jejichž čtyři vrcholy tvoří dané body?

5.5 Je dána konečná množina bodů v rovině, v níž každé tři body určují tupoúhlý trojúhelník. Dokažte, že k takové množině lze vždy přidat další bod tak, aby uvedená vlastnost zůstala zachována. Platí analogické tvrzení i pro nekonečnou množinu bodů v rovině s uvedenou vlastností?

5.6 Jestliže

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^{496} = \\ = a_0 + a_1 x + \ldots + + a^{1984} x^{1984},$$

určete největší společný dělitel čísel $a_3, a_8, a_{13} \ldots, a_{1983}$. Zároveň dokažte, že platí $10^{340} < a_{992} < 10^{347}$.

5.7 Zjistěte, zda existuje 100 přímek v rovině, které mají právě 1985 různých průsečíků.

30. medzinárodná matematická olympiáda

Braunschweig (SRN) 13. — 24. júl 1989

SRN sa stala hostiteľom 30. medzinárodnej matematickej olympiády. Zúčastnilo sa jej 291 súťažiacich z 50 krajín, čo je rekordom v doterajšej histórii MMO. Každá krajina mohla vyslať 6-členné družstvo, čo prevažná väčšina štátov aj využila. Olympiáda sa konala v tichom asi 250-tisícovom Braunschweigu, v Dolnom Sasku. Mesto má matematické tradície, pôsobil tu okrem iných matematikov aj C. F. Gauss a je sídlom technickej univerzity a iných vysokých škôl.

Jury začala svoju činnosť 13. júla výberom a prekladom súťažných úloh do rodných jazykov žiakov. Medzi 32 úlohami, ktoré sa dostali do užšieho výberu, bola aj 1 československá úloha. 16. júla bolo nakoniec vybraných 6 súťažných úloh — po jednej úlohe z Austrálie, Islandu, Holandska, Filipín, Švédska, Poľska.

Súťažiaci spolu s pedagogickými vedúcimi pricestovali do Braunschweigu 16. júla. Boli ubytovaní na viacerých miestach, československé družstvo bývalo v internáte neďaleko stredu mesta. 17. júla bolo slávnostné zahájenie olympiády za účasti predstaviteľov krajinskej i spolkovej vlády. 18. a 19. júla boli súťažné dni, v rámci ktorých študenti dostali po 3 úlohy. Na riešenie každej trojice úloh mali 4,5 hodiny čistého času. Nasledujúce dni sa konala oprava a koordinácia opráv žiac-

kych riešení. 23. júla bolo slávnostné vyhlásenie výsledkov za účasti spolkového ministra pre výuku a vedu *Möllemanna*, ktorý aj odovzdával zlaté medaily, krajinského ministra *H. Horrmanna* a predsedu jury *A. Engela*. Zostávajúce dni boli pre žiakov určené na spoznávanie hostiteľskej krajiny. Hostitelia zorganizovali celodenný výlet do Hannoveru s nezabudnuteľným kultúrnym programom v Herrenhausen Garten, výlet do Gifhornu s návštevou múzea veterných mlynov, prehliadku Braunschweigu, exkurzie do výrobných podnikov. Dňa 24. júla sme sa spoločne vrátili do vlasti.

Tabuľka 5

Krajina	Počet žiakov	Body	1. cena	2. cena	3. cena	č. uzn.
Austrália	6	119		2	2	
Belgicko	6	111			3	2
Brazília	6	64			3	
Bulharsko	6	195	1	3	2	
Cyprus	6	24				1
Československo	6	202	2	1	3	
Čína	6	237	4	2		
Filipíny	6	45		1		
Fínsko	6	58				3
Francúzsko	6	156		1	5	
Grécko	6	122		1	3	2
Holandsko	6	92		1	1	2
Hong Kong	6	127		2	1	1
India	6	107			4	1
Indonézia	6	21				
Irán	6	147		2	3	1
Írsko	6	37				2
Island	4	33				2
Izrael	6	105		2	1	
Juhoslávia	6	170	1	3	1	1
Južná Kórea	6	97		1		4

(pokračovanie tabuľky 5)

Krajina	počet žiakov	body	1. cena	2. cena	3. cena	č. uzn.
Kanada	6	123		1	3	2
Kolumbie	6	119		1	2	3
Kuba	6	69			1	3
Kuwait	6	31				
Luxemburg	3	65		1	1	
Maďarsko	6	175		4	1	1
Maroko	6	63			1	3
Mexiko	6	79			1	3
NDR	6	216	3	2	1	
Nórsko	4	64			1	2
Nový Zéland	6	69			2	2
NSR	6	187	1	3	2	
Peru	6	51				3
Poľsko	6	157		3	3	
Portugalsko	6	39				4
Rakúsko	6	111		2	1	1
Rumunsko	6	223	2	4		
Singapúr	6	143			4	2
Španielsko	6	61			1	4
Švédsko	6	73			2	1
Taliansko	6	124		1	2	3
Thajsko	6	54			1	2
Tunis	6	81		1		2
Turecko	6	133		1	4	1
USA	6	207	1	4	1	
Veľká Británia	6	122		2	1	2
Venezuela	4	6				
Vietnam	6	183	2	1	3	
ZSSR	6	217	3	2	1	

Každý súťažiaci mohol získať maximálne 42 bodov. 1. cena bola udeľovaná za 38—42 bodov (20 úč.)., 2. cena za 30—37 bodov (55 úč.) a 3. cena za 18—29 bodov (72 úč.), čestné uznanie za vyriešenie aspoň jedného príkladu za 7 bodov.

Hodnotenie československej účasti:

Československé družstvo tvorili *Tomáš Brodský* zo 4. roč. Gymnázia na tr. kpt. Jaroša v Brne, *Petr Čížek* zo 4. roč. Gymnázia W. Piecka v Prahe, *Petr Hliněný* z 3. roč. Gymnázia v Bílovci, *Vladimír Komár* z 3. roč. Gymnázia na Šmeralovej ulici v Košiciach, *Ondrej Šuch* z 3. roč. Gymnázia A. Markuša v Bratislave a *Marek Velešík* zo 4. roč. Gymnázia na Konevovej v Brne. V. Komár sa zúčastnil namiesto I. Martišovitša, ktorý tesne pred odchodom ochorel.

Vedúcim delegácie bol *doc. RNDr. Leo Boček, CSc.*, z MFF UK v Prahe, zástupcom vedúceho *doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc.*, z MFF UK v Bratislave.

Výsledky jednotlivých žiakov vidno z tabuľky:

Tabuľka 6

Meno	úl. 1	úl. 2	úl. 3	úl. 4	úl. 5	úl. 6	súčet	cena
Brodský	1	7	0	7	7	7	29	3.
Čížek	7	7	7	7	7	7	42	1.
Hliněný	7	7	1	7	7	7	36	2.
Komár	7	7	0	0	7	6	27	3.
Šuch	7	7	7	7	7	6	41	1.
Velešík	6	0	0	7	7	7	27	3.

Je to náš najlepší výsledok za posledné roky. V neoficiálnom hodnotení družstiev sme skončili na peknom 6. mieste (za

Čínou, Rumunskom, ZSSR, NDR a USA). Získali sme 2 zlaté medaily, pričom P. Čížek získal plný počet bodov. Ukázali sa výsledky systematickej prípravy študentov na MMO (2 sústredenia, korešpondenčné semináre, príprava v triedach so zameraním na matematiku, rôzne pomocné akcie, široká báza olympiády). Treba však povedať, že vybrané úlohy našim žiakom »sadli«, boli to témy tradične sa vyskytujúce v domácej súťaži, resp. precvičované na sústredeniach. Dobrý výsledok je zároveň záväzkom do budúcnosti.

Texty súťažných úloh

1. Dokážte, že množina $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ sa dá napísať ako zjednotenie po dvoch disjunktných množín $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ tak, že sú splnené nasledujúce podmienky:
   (1) každá z množín A_i má práve 17 prvkov,
   (2) súčet všetkých čísel z množiny A_i je pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, 117\}$ rovnaký.
2. Osi vnútorných uhlov pri vrcholoch A, B, C ostrouhlého trojuholníka ABC pretínajú jemu opísanú kružnicu po rade v bodoch A_1, B_1, C_1. Priamka AA_1 pretína osi vonkajších uhlov pri vrcholoch B, C trojuholníka ABC v bode A_0. Analogicky sú určené body B_0, C_0. Dokážte, že
   a) $S_{A_0B_0C_0} = 2\, S_{AC_1BA_1CB_1}$,
   b) $S_{A_0B_0C_0} \geqq 4\, S_{ABC}$,
   kde $S_{A_0B_0C_0}$, $S_{AC_1BA_1CB_1}$, S_{ABC} značia obsahy trojuholníka $A_0B_0C_0$, šesťuholníka $AC_1BA_1CB_1$ a trojuholníka ABC.

3. Nech n, k sú prirodzené čísla ($n \geqq k$) a S je množina n bodov roviny s týmito vlastnosťami:
   (i) žiadne tri body množiny S neležia na priamke,
   (ii) ku každému bodu $P \in S$ existuje v S aspoň k navzájom rôznych bodov rovnako vzdialených od bodu P.

   Potom $k < 1/2 + \sqrt{2n}$. Dokážte!

4. Pre strany AB, AD a BC konvexného štvoruholníka $ABCD$ platí $|AB| = |AD| + |BC|$. Vo vnútri tohto štvoruholníka existuje bod P tak, že $|AP| = h + |AD|$ a $|BP| = h + |BC|$, kde h je vzdialenosť bodu P od priamky CD. Dokážte, že

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqq \frac{1}{\sqrt{|AD|}} + \frac{1}{\sqrt{|BC|}}.$$

5. Ku každému prirodzenému číslu n existuje n za sebou idúcich prirodzených čísel tak, že žiadne z nich nie je mocninou prvočísla s celočíselným exponentom. Dokážte!

6. Permutáciu $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ čísel $1, 2, \ldots, 2n$ nazveme peknou, ak platí $|x_i - x_{i+1}| = n$ pre aspoň jedno $i \in \{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$. Dokážte, že pre každé n je viac ako polovica permutácií pekných.

Riešenia úloh

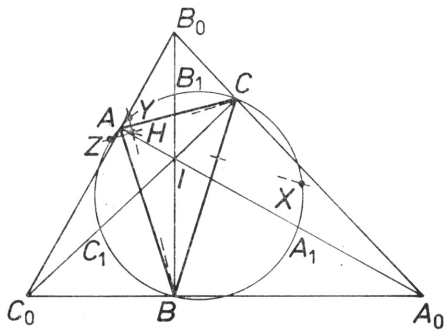
1. Problém úlohy spočíva v tom, že 17 je nepárne číslo. Nebol by napr. žiadny problém rozdeliť množinu $\{1, 2, \ldots, \ldots, 1000\}$ do 50 dvadsaťprvkových množín predpísaným

spôsobom, vytvorili by sme totiž 500 dvojčiat $\{k, 1001 - k\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, 500\}$ a do každej z 50 množín by sme dali po 10 dvojčiat. Túto myšlienku využijeme aj v riešení našej úlohy. Rozdelíme množinu $\{1, 2, \ldots, 351\}$ do 117 (disjunktných) trojprvkových množín s rovnakým súčtom. Potom rozdelíme množinu $\{352, 353, \ldots, 1989\}$ do 117 štrnásťprvkových množín s rovnakým súčtom metódou »dvojčiat« $\{k, 2341 - k\}$, $k \in \{352, 353, \ldots, 1170\}$. Zjednotením vždy jednej trojprvkovej a jednej 14-prvkovej množiny získame požadovanú 17-prvkovú množinu. Zostáva popísať rozdelenie množiny $\{1, 2, \ldots, 351\}$. To vidno z nasledujúceho predpisu:

$\{1, 176, 351\}$	$\{60, 118, 350\}$
$\{2, 177, 349\}$	$\{61, 119, 348\}$
$\{3, 178, 347\}$	$\{62, 120, 346\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\{58, 233, 237\}$	$\{116, 174, 238\}$
$\{59, 234, 235\}$	$\{117, 175, 236\}$

2. a) Označme I priesečník osí (vnútorných) uhlov (obr. 37). Potom $|IA_1| = |A_1A_0|$. Vyplýva to napr. z toho, že A_0A, B_0B, C_0C sú výšky trojuholníka $A_0B_0C_0$, teda kružnica opísaná trojuholníku ABC je kružnica deviatich bodov (Feuerbachova kružnica) pre trojuholník $A_0B_0C_0$, to znamená, že rozpoľuje úsečku IA_0. (Iný dôkaz: $|IA_1| = |A_1B|$, lebo $|\sphericalangle A_1IB| \cong$ $\cong |\sphericalangle IBA_1|$ a $|A_1B| \cong |A_1A_0|$ zo zhodnosti príslušných uhlov v trojuholníku A_0A_1B.) Z tohoto dostaneme

$$\text{obsah } \triangle IA_1B = \text{obsah } \triangle A_0A_1B.$$



Obr. 37

Ak tento argument zopakujeme postupne pre všetkých 6 trojuholníkov s vrcholom I a rovnosti sčítame, dostaneme a).

b) Označme H priesečník výšok trojuholníka ABC, X obra bodu H v osovej súmernosti podľa priamky BC, Y podľa priamky AC a Z podľa priamky AB. Potom X, Y, Z ležia na kružnici opísanej trojuholníku ABC (pretože $|\sphericalangle CXB| = |\sphericalangle CHB| = 180 - \alpha$). Pretože A_1 je stred oblúka BC, je obsah $\triangle BA_1C \geqq$ obsah $\triangle BXC$. Potom $S_{AC_1BA_1CB_1} \geqq S_{AZBXCY} = 2(S_{BHC} + S_{CHA} + S_{AHB}) = 2S_{ABC}$, čo dokazuje naše tvrdenie.

3. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme $k \geqq 1/2 + \sqrt{2n}$. Ku každému bodu $P \in S$ existuje najmenej $\binom{k}{2}$ dvojíc bodov A, B, pre ktoré $|AP| = |BP|$. Teda máme aspoň $n.(k|2)$ dvojíc bodov A, B, pre ktoré na osi úsečky AB leží aspoň jeden bod z množiny S. Počítajme:

$$n.\binom{k}{2} = n\frac{k(k-1)}{2} \geqq \frac{n}{2}\left(\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2n} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= n.\left(n - \frac{1}{8}\right) > 2\binom{n}{2}$$

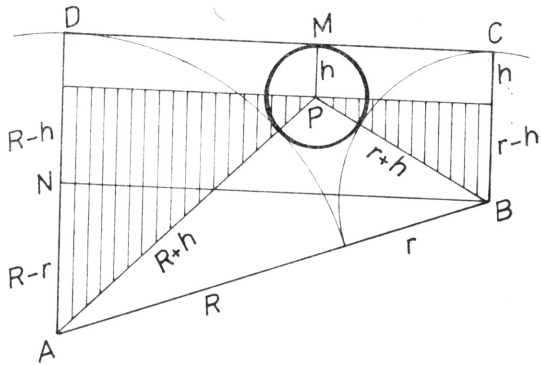
Pretože máme len $\binom{n}{2}$ rôznych dvojíc bodov A, B $(A, B \in S)$, tak musí existovať dvojica bodov A, B, ktorá je započítaná aspoň trikrát, t.j. na osi úsečky AB ležia aspoň 3 rôzne body z S. To je však spor s predpokladom.

4. Uvažujme štvoruholník $ABCD$ s vlastnosťami (i) a (ii) pre rôzne hodnoty h. Označme $|AD| = R$, $|BC| = r$. Skonštruujme trojuholník ABP so stranami $R + r$, $R + h$, $r + h$. Ďalej skonštruujme kružnice $k_1 = (A, R)$, $k_2 = (B, r)$, $k_3 = (P, h)$. Body C a D ležia po rade na kružniciach k_1, k_2 a CD je dotyčnicou ku k_3. Z toho plynie, že h nadobúda maximálnu hodnotu vtedy, keď CD je zároveň spoločnou dotyčnicou ku kružniciam k_1, k_2. Ukážeme, že v tomto prípade

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{|AD|}} + \frac{1}{\sqrt{|BC|}},$$

z čoho plynie okamžite dokazovaná nerovnosť. Označme M pätu kolmice spustenej z bodu P na priamku CD (obr. 38), N pätu kolmice spustenej z bodu B na priamku AD. Z pravouhlého trojuholníka ABN dostaneme:

$$|CD| = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$



Obr. 38

Ďalej

$$|CD| = |CM| + |MD| = \sqrt{(r+h)^2 - (r-h)^2} + \\ + \sqrt{(R+h)^2 - (R-h)^2} = 2\sqrt{rh} + 2\sqrt{Rh}$$

Odtiaľ dostaneme:

$$\sqrt{Rr} = \sqrt{rh} + \sqrt{Rh}$$

a po predelení $\sqrt{Rrh}$ požadovaný vzťah.

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}$$

5. Číslo nie je mocninou prvočísla práve vtedy, keď je deliteľné aspoň dvoma rôznymi prvočíslami. To využijeme v dôkaze. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa

n. Pre $n = 1$ tvrdenie platí, stačí napr. vziať číslo 6. Predpokladajme, že čísla $a + 1, a + 2, \ldots, a + n$ tvoria n za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých žiadne nie je mocninou prvočísla. Nech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sú všetky prvočísla, ktoré sa vyskytujú v ich rozkladoch a p_{k+1}, p_{k+2} sú prvočísla, rôzne od $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Ďalej označme $M = p_1, p_2, \ldots, p_k$. Zrejme

$$p_i \mid c \Leftrightarrow p_i \mid c + M \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, k, c \in N. \qquad (*)$$

Teraz nájdeme $s \in N$ tak, aby číslo $a + n + 1 + sM$ bolo deliteľné p_{k+1} (to ide, pretože čísla p_{k+1} a M sú nesúdeliteľné). Označme $P = M.p_{k+1}$. Nájdime ešte $t \in N$ tak, aby číslo $a + n + 1 + sM + t.P$ bolo deliteľné p_{k+2} (dá sa to, pretože čísla p_{k+2} a P sú nesúdeliteľné). Označme ešte $Q = a + sM + tP$. Potom čísla $Q + 1, Q + 2, \ldots, Q + n + 1$ tvoria $n + 1$ čísel požadovanej vlastnosti — prvých n je deliteľných aspoň dvomi prvočíslami z množiny $p_1, p_2, \ldots, p_k$ na základe indukčného predpokladu (*) a číslo $Q + n + 1$ je deliteľné $p_{k+1} . p_{k+2}$, čo dokazuje tvrdenie.

6. Nech číslo n je dané pevne. Nahraďme po rade čísla $n + 1, n + 2, \ldots, 2n$ číslami $1, 2, \ldots, n$. Potom možno úlohu preformulovať takto:

Máme n dvojičiek $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ a z týchto $2n$ čísel budeme vytvárať $2n$-členné postupnosti. Ktorých postupností je viac: tých, ktoré obsahujú vedľa seba rovnaké čísla, alebo takých, čo ich neobsahujú?

Postupnosť $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ je typu A, ak sa vedľa seba nevyskytujú rovnaké čísla, typu B, ak sa rovnaké čísla vedľa seba vyskytujú. Označme A_n počet $2n$-členných postupností

typu A a B_n počet $2n$-členných postupností typu B. Z postupnosti typu A s členmi $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ možno pridaním dvojice $n+1, n+1$ $\binom{2n+1}{2}$ spôsobmi vyrobiť postupnosť typu A (čísla vložíme do rôznych medzier medzi členmi pôvodnej postupnosti) a $2n+1$ spôsobmi postupnosť typu B (čísla $n+1, n+1$ vložíme do tej istej medzery). Z postupnosti typu B na $2n$-prvkovej množine možno vyrobiť postupnosť typu A nanajvýš $2n$ spôsobmi (jedným číslom $n+1$ oddelíme rovnaké čísla, druhé vložíme do niektorej zo zvyšných $2n$ medzier, avšak ak je vedľa seba viac dvojičiek, tak spôsobov je menej) a aspoň $2n+1+\binom{2n}{n}$ spôsobmi postupnosť typu B (čísla $n+1, n+1$ vložíme do tej istej medzery alebo do rôznych medzier, avšak neporušíme existujúcu dvojičku). Z týchto úvah vyplývajú vzťahy:

$$A_{n+1} \leqq n(2n+1)\,A_n + 2n\,B_n$$
$$B_{n+1} \geqq (2n+1)\,A_n + (2n^2+n+1)\,B_n$$

Teraz už vidíme, že ak $B_n \geqq A_n > 0$, tak $B_{n+1} > A_{n+1}$. Naozaj:

$$B_{n+1} = (2n^2+3n+2)\,B_n - (2n+1)(B_n - A_n) > \\ > (2n^2+3n)\,B_n - (2n^2+n)(B_n - A_n) = A_{n+1}$$

K dôkazu si teraz stačí uvedomiť, že $A_1 = 0$, $B_1 = 1$. Bude teda $B_n > A_n$ aj pre všetky $n \geqq 2$. Postupností typu B je teda ozaj viac ako polovica, čo sme mali dokázať.

Doc. RNDr. Leo Boček, CSc. — RNDr. Jiří Binder, CSc. —
RNDr. Tomáš Hecht, CSc. — RNDr. Karel Horák, CSc. —
RNDr. Pavel Töpfer

TŘICÁTÝ OSMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství Praha roku 1991
jako svou publikaci č. D-9B-0-0-14-0-38-0
Edice Zájmové náklady
Odpovědná redaktorka Anežka Bittnerová
Výtvarný redaktor Václav Hanuš
Technická redaktorka Dita Novotná
Vytiskly Moravské tiskárny, závod Olomouc
1. vydání

ISBN 80-04-25644-9

matematická olympiáda

MO

SPN

ISBN 80-04-25644-9