

38. ročník matematické olympiády na základních školách

Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 38. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404883>

Terms of use:

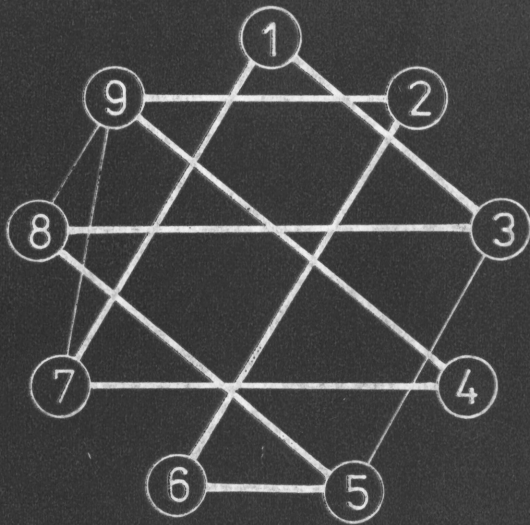
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

38. ročník matematické olympiády na základních školách



SPN

TŘICÁTÝ OSMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/1989

ÚLOHY A JEJICH ŘEŠENÍ

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ PRAHA

Zpracovali

doc. RNDr. Milan Koman, CSc., RNDr. Vladimír Repáš

Lektorovali

RNDr. Libuše Hozová, RNDr. Jitka Kučerová, RNDr. Václav Šůla

© Milan Koman, Vladimír Repáš, 1991

ISBN 80-04-25645-7

Obsah

Předmluva	5
Zpráva o průběhu 38. ročníku (1988/89) matematické olympiády na základních školách	8
Úspěšní řešitelé III. kola kategorie Z8	17
Kategorie Z8	27
Úlohy I. kola	27
Úlohy II. kola	33
Úlohy III. kola	35
Řešení úloh I. kola	37
Řešení úloh II. kola	51
Řešení úloh III. kola	58
Kategorie Z7	65
Úlohy I. kola	65
Úlohy II. kola	67
Řešení úloh I. kola	68
Řešení úloh II. kola	78
Kategória Z6	82
Úlohy I. kola	82
Úlohy II. kola	84
Riešenia úloh I. kola	86
Riešenia úloh II. kola	98
Kategória Z5	102
Úlohy I. kola	102
Úlohy II. kola	105
Riešenia úloh I. kola	107
Riešenia úloh II. kola	125

Kategória Z4	129
Úlohy I. kola	129
Úlohy II. kola	131
Riešenia úloh I. kola	132
Riešenia úloh II. kola	136
 Vybrané úlohy z korespondenčných seminárov a ďalších soutěží	 138

Předmluva

Milí mladí přátelé,

ústřední výbor matematické olympiády už tradičně po ukončení každého ročníku matematické olympiády vydává ročenku o průběhu soutěže. V ní se může čtenář seznámit s organizací soutěže, se soutěžními úlohami všech kol a s jejich řešeními. Od 35. ročníku (1985/86) se vydávají dvě ročenky. První je věnována matematické olympiádě na středních školách, tedy kategoriím A, B, C a P, druhá je věnována matematické olympiádě na základních školách, tedy všem kategoriím Z.

V kategoriích A, B, C soutěží žáci středních škol od začátku soutěže v roce 1951. Na základní školy se rozšířila matematická olympiáda v roce 1953. V 35. ročníku vznikla kategorie P, ve které mohou soutěžit všichni žáci středních i základních škol v programování. Až do 33. ročníku (1983/84) soutěžili celostátně žáci základních škol v jediné kategorii Z určené žákům 8. ročníků. Kategorie Z7 určená pro žáky 7. ročníků ZŠ byla celostátně experimentálně zavedena ve školním roce 1984/85, tj. ve 34. ročníku MO. Od školního roku 1986/87 se tento experiment celostátně rozšířil i do 6. ročníků ZŠ.

Nyní dostáváte do rukou ročenku matematické olympiády

na základních školách za školní rok 1988/89. Věříme, že tato útlá knížka bude pro vás dobrou pomůckou pro přípravu na MO v dalších ročnících soutěže.

Co vám můžeme doporučit, jak ročenku využívat? Nejdříve si pozorně přečtete zadání úloh. Potom se snažte sami tyto úlohy řešit. Až potom se podívejte na uvedené řešení. (U zadání úloh jsou uvedeny stránky, kde najdete jejich řešení.) Budete-li se tím řídit, nepřipravíte se o krásný pocit, který má každý, když se mu něco podaří. Čím déle se budete s příkladem trápit, tím větší budete mít radost z jeho vyřešení.

Jestliže se vám podaří vyřešit úlohy i jiným způsobem, možná i jednodušším, než je řešení otištěné v ročence, můžete být o to více spokojenější. Jestliže si myslíte, že jste našli zvláště pěkné řešení, poraďte se se svým učitelem matematiky a potom pošlete takové řešení ÚV MO.

Ročenku nemusíte studovat najednou. Zaměřte se zejména na úlohy, které mají podobnou tematiku jako soutěžní úlohy, které právě řešíte. Přitom se vám vyplatí podívat se na úlohy i jiných kategorií, zejména nižších, ale i vyšších, než ve kterých právě soutěžíte. U některých úloh uvádíme i více způsobů řešení. V některých případech i taková, která jsou vázána i na vědomosti či dovednosti z vyšších ročníků, zejména je-li takové řešení z jistého hlediska elegantnější. Rozhodli jsme se k tomu proto, abychom vám ukázali i jiné možnosti řešení, ale zejména proto, abyste mohli tyto nové způsoby řešení použít u nových úloh.

Přejeme vám při řešení úloh, ale i při studiu řešení úloh z naší ročenky, na která jste sami nepřišli, mnoho úspěchů. Považovali bychom za úspěch zejména to, kdybyste při řešení úloh této knížky zažili aspoň jednou krásný pocit z úspěchu.

Bude nás těšit, jestliže vám brožurka pomůže při řešení úloh soutěžních kol, popřípadě i vyšších kategorií.

Bude-li se vám naše brožurka líbit, mají na tom zásluhu i obě lektorky RNDr. Libuše Hozová a RNDr. Jitka Kučerová, které svými cennými připomínkami přispěly na mnoha místech ke zlepšení a větší srozumitelnosti textu. Autoři brožurky jim proto vyslovují touto cestou své poděkování.

V prosinci 1989

Milan Koman a Vladimír Repáš

Zpráva o průběhu 38. ročníku (1988/89) matematické olympiády na základních školách

1. Pořadatelé

38. ročník matematické olympiády pořádalo ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR a ministerstvo školství, mládeže a tělesné výchovy SSR ve spolupráci s Jednotou československých matematiků a fyziků (JČSMF), Jednotou slovenských matematiků a fyziků (JSMF), Matematickým ústavem ČSAV v Praze a Ústředním domem pionierov a mládeže v Bratislavě.

Soutěž řídil ústřední výbor matematické olympiády (ÚV MO) prostřednictvím krajských a okresních výborů matematické olympiády (KV MO a OV MO). Organizačně pomáhají soutěž zajišťovat krajské pedagogické ústavy, pobočky JČSMF a JSMF a mnoho dobrovolných pracovníků, zejména učitelů ZŠ.

Členy ÚV MO jmenovalo na tříleté období ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR a ministerstvo školství, mládeže a tělesné výchovy SSR, členy KV MO a OV MO příslušné odbory školství KNV a ONV. V průběhu 38. ročníku MO byl předsedou ÚV MO RNDr. František Zítek, CSc., z MÚ ČSAV, který však 18. listopadu 1988 náhle zemřel. Po jeho odchodu řídil činnost ÚV MO dosavadní

jednatel doc. RNDr. Leo Boček, CSc., z MFF UK Praha. Místopředsedy byli prof. RNDr. Miroslav Fiedler, DrSc., člen korespondent ČSAV, z MÚ ČSAV Praha, doc. RNDr. Branislav Rován, CSc., z MFF UK Bratislava a doc. RNDr. Milan Koman, CSc., z MÚ ČSAV Praha. Jednateli ÚV MO byli doc. RNDr. Leo Boček, CSc., z MFF UK Praha a RNDr. Karel Horák, CSc., z MÚ ČSAV Praha.

Komisi pro kategorii Z v ÚV MO vedli doc. RNDr. Milan Koman, CSc., z MÚ ČSAV Praha a RNDr. Vladimír Repáš z EF SVŠT Bratislava.

2. Soutěžní kategorie

Žáci základních škol celostátně soutěžili ve třech kategoriích Z. Kategorie Z8 byla určena žákům 8. ročníků, kategorie Z7 žákům 7. ročníků a kategorie Z6 žákům 6. ročníků základních škol. Se souhlasem svého učitele mohli však nadaní žáci soutěžit ve vyšší kategorii, dokonce ti nejlepší i v některé z kategorií A, B, C nebo P, které jsou určeny žákům středních škol.

Ve Slovenské republice probíhala matematická olympiáda i pro mladší žáky. Pro žáky 5. ročníků to byla kategorie Z5 a pro žáky 4. ročníků kategorie Z4. Obě soutěže v těchto kategoriích mají na Slovensku již delší tradici. Kategorie Z5 vznikla ve školním roce 1980/81 a kategorie Z4 ve školním roce 1983/84.

V České republice organizuje matematickou olympiádu v kategoriích Z4 a Z5 již několik let samostatně Západočeský kraj. Další podrobnosti o těchto soutěžích v Západočeském kraji jsou uvedeny v příloze na str. 152.

Soutěže matematické olympiády pro mladší žáky ZŠ (4. až 7. roč.) vznikly z podnětu slovenské komise MO Jednoty slovenských matematiků a fyziků v roce 1980, kterou v té době vedl prof. RNDr. Jozef Moravčík, DrSc., z VŠDS Žilina.

3. *Průběh soutěže*

V kategorii Z8 soutěžili žáci ve třech kolech, v kategoriích Z7 a Z6 a na Slovensku též v kategorii Z5 soutěžili žáci ve dvou kolech. V kategorii Z4 soutěžili slovenští žáci v jednom kole, které však mělo dvě části: domácí a školní. Některé odlišnosti soutěže v kategoriích Z5 a Z4 v Západočeském kraji jsou uvedeny v příloze, str. 152.

V I. kole, které se organizovalo na školách, bylo zadáno pro každou kategorii 6 soutěžních úloh. Úlohy řešili žáci doma a na jejich řešení měli dostatek času, v kategorii Z8 např. 4 měsíce, v ostatních kategoriích ještě více. Úlohy žákům opravili jejich učitelé a ohodnotili je podle stupnice: 1 — výborně, 2 — dobře, 3 — nevyhovuje.

Soutěžící, kteří měli aspoň 4 řešení úloh ohodnocena výborně nebo dobře, se stali úspěšnými řešiteli 1. kola.

Úspěšní řešitelé v kategorii Z4 postoupili do celoškolského kola. Na rozdíl od první části soutěže řešili žáci v tomto kole úlohy ve škole. Byly jim zadány 3 úlohy, na jejichž řešení měli vymezen čas v délce 60 minut. V naší ročence najdete tyto úlohy pod označením Z4 — II — 1, 2, 3. Soutěž se uskutečnila 15. 2. 1989. Úlohy byly podle stanoveného klíče bodovány a žák, který získal aspoň polovinu možných bodů, se stal úspěšným řešitelem celoškolského kola.

Z úspěšných řešitelů I. kola kategorií Z6 až Z8, na Slovensku též kategorie Z5, vybraly OV MO nejlepší řešitele a pozvaly je do II. kola soutěže. To se uskutečnilo zpravidla v okresním městě, pro kategorii Z8 1. února 1989 a pro kategorie Z5 až Z7 19. dubna 1989.

Pozvaní žáci kategorie Z8 řešili samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z5 až Z7 řešili samostatně 3 úlohy v průběhu 2 hodin. V kategoriích Z5 až Z7 se tak počet soutěžních úloh oproti předcházejícím ročníkům MO snížil ze čtyř na tři.

Ve všech čtyřech kategoriích pro žáky 5. až 8. ročníků se úlohy v II. kole obodovaly a podle součtu získaných bodů se sestavilo pořadí účastníků II. kola. Účastníci, kteří získali aspoň polovinu z celkového počtu dosažitelných bodů, se stali úspěšnými řešiteli II. kola. Nejlepší z nich se stali vítězi II. kola.

Pro kategorii Z8 se uskutečnilo ještě 10. dubna 1989 v krajských městech III. kolo. Pravidla soutěže byla stejná jako pro II. kolo. Vítězové III. kola, kteří se umístili na 1. až 10. místě v každém kraji, jsou uvedeni na str. 17 až 23.

K výsledkům II. a III. kola se přihlíželo při přijímacím řízení na střední školy.

Soutěžní úlohy I. kola byly spolu s pokyny pro soutěžící uveřejněny v českém a slovenském letáku MO dodávaném přímo na školy. Kromě toho uveřejnily znění úloh časopisy Matematika a fyzika ve škole, Rozhledy matematicko-fyzikální a Sedmička pionýrů. Úlohy ostatních soutěžních kol byly tajné a byly zasílány organizátorům v zapečetěných obálkách těsně před soutěží.

4. Příprava soutěžních úloh

Soutěžní úlohy 38. ročníku všech kategorií připravovala 14členná pracovní skupina. Bylo v ní 9 členů ze SSR a 5 členů z ČSR. Slovenskou část tvořili členové subkomise pro ZŠ při slovenské komisi MO, kterou vede doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc., z MFF UK Bratislava. Byli to RNDr. Vladimír Repáš z EF SVŠT Bratislava (předseda subkomise), RNDr. Anna Pribišová, SZŠ Bratislava, RNDr. Vladimír Burjan, gymnázium Bratislava, dr. Pavol Černek, CSc., StF SVŠT Bratislava, Jozef Gallo, ZŠ Nové Zámky, dr. Gabriela Monoszová, PF Banská Bystrica, Dagmar Vongrejová, ZŠ Žilina, RNDr. Juraj Vantuch, CSc., ÚEP SAV Bratislava, Miroslav Žákovič, ZŠ Nové Mesto nad Váhom. Českou část tvořili: RNDr. Milan Koman, CSc., MÚ ČSAV Praha, RNDr. Vladimír Dřízal, PF Praha, dr. Marta Volfová, CSc., PF Hradec Králové, dr. Jiří Hájek, PF Brno, Marie Tichá CSc., MÚ ČSAV Praha.

Autory soutěžních úloh jsou však nejen členové uvedené pracovní skupiny, ale i další pracovníci. Do soutěže se každoročně zařazují i úlohy zasílané do konkursu na soutěžní úlohy, který vyhlašuje ÚV MO. V tomto ročníku to byly úlohy dr. Josefa Trejbalu z Chlumce nad Cidlinou a dr. Květy Sovíkové z Prahy.

Všechny vybrané úlohy nakonec schvaluje předsednictvo ÚV MO.

5. Akce na pomoc organizátorům soutěže a soutěžícím

Na pomoc referentům MO byly jako každý rok vypracovány komentáře k soutěžním úlohám a pokyny pro jejich hodnocení.

Ve všech krajích proběhly také instruktáže určené učitelům matematiky a referentům MO.

Pro úspěšné řešitele MO, řešitele korespondenčních seminářů, řešitele pythagoriád, ale i pro jiné talentované žáky pořádali různí organizátoři na mnoha místech republiky zimní a letní školy, soustředění a tábory mladých matematiků. Mnoho žáků od čtvrtých až do osmých tříd základních škol mělo příležitost zúčastnit se korespondenčních seminářů organizovaných jednotlivými okresy nebo kraji. Jejich vzorem byly často dva slovenské korespondenční semináře známé pod názvy PIKOMAT a KOMINÁR. První z nich je určen žákům 7. a 8. ročníků, druhý žákům 4., 5 a 6. ročníků.

Z krajských výborů MO byly ústřednímu výboru MO ohlášeny tyto akce pro žáky základních škol:

Praha: V šesti obvodech proběhly přípravné semináře pro žáky 8. ročníků. Byla uspořádána dvě soustředění, letní škola matematiky a matematická škola v přírodě. Pro žáky 6. tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů byla uspořádána týmová soutěž, které se zúčastnilo 26 družstev z Prahy a Středočeského kraje. Byly organizovány i další matematické soutěže s menší náročností, a to: pythagoriáda a pro 4. ročníky soutěž Ukaž, co umíš.

Středočeský kraj: Pro vítěze III. kola kategorie Z8 bylo zorganizováno krajské soustředění.

Jihočeský kraj: Byla organizována letní škola MO kategorie Z, krajský korespondenční seminář Pikomat a krajská pythagoriáda pro žáky 5. a 6. ročníků ZŠ. Ve spolupráci s kabinety matematiky OPS byly uspořádány 4 letní pionýrské tábory se zaměřením na matematiku a letní škola matematiky ve spolupráci s KV MO.

Západočeský kraj: Pro 25 nejlepších řešitelů MO bylo uspořádáno týdenní soustředění. Jako v jediném kraji v ČSSR bylo uspořádáno samostatné III. kolo MO v kategoriích Z5 až Z7. V kategorii Z4 bylo uspořádáno I. a II. kolo MO.

Severočeský kraj: Pro řešitele kategorie Z8 bylo uspořádáno několik seminářů a týdenní letní škola. Pro žáky 4. a 5. ročníků byla pořádána krajská soutěž MO v kategoriích Z4 a Z5.

Východočeský kraj: V kraji organizovali korespondenční seminář a k němu dvě týdenní soustředění. Dále organizovali korespondenční seminář se dvěma soustředěními. O prázdninách byl uspořádán tábor mladých pythagorejců a další tábor mladých matematiků v Polsku.

Jihomoravský kraj: Byl zorganizován zimní matematický tábor pro žáky 7. ročníků.

Severomoravský kraj: Zorganizováno krajské soustředění řešitelů MO a FO. Byly uspořádány dva korespondenční semináře, jeden pro žáky 4. ročníků a druhý pro žáky 6. až 8. ročníků. V Opavě uspořádali už 23. ročník Klubu mladých matematiků, jeho součástí byla i týmová soutěž pro žáky 6. ročníků Dejte hlavy dohromady.

Bratislava: Jako v předešlých letech byly uspořádány dva korespondenční semináře: Pikomat pro kategorii Z7 a Z8 a Kominár pro kategorie Z4 až Z6. Kominár byl organizován pro žáky z celého Slovenska. Pikomatu se zúčastnilo 150 řešitelů, pro nejlepší z nich bylo připraveno týdenní soustředění. Pro řešitele MO v kategorii Z8 bylo uspořádáno v červnu týdenní soustředění, kterého se zúčastnilo 30 účastníků.

Západoslovenský kraj: Pro nejlepší účastníky III. kola kategorie Z8 bylo uspořádáno pětidenní soustředění.

Středoslovenský kraj: Pro účastníky okresního kola se konaly instruktáže a pro účastníky III. kola Z8 se uskutečnilo krajské soustředění. Pod vedením dr. B. Siváka, CSc., se konaly okresní a krajské korespondenční semináře z matematiky a programování. V kraji se uskutečnily tři okresní tábory mladých matematiků a krajské soustředění korespondenčního semináře.

Východoslovenský kraj: Krajský výbor MO připravil pro nejvyšší ročníky ZŠ korespondenční seminář a pro nejlepší účastníky zimní a letní soustředění.

O některých z uvedených akcí lze najít podrobnější informace v příloze. Autoři děkují všem, kteří se na zpracování přílohy podíleli. Za poskytnutí úloh z krajských korespondenčních seminářů nebo jiných akcí a za laskavé svolení k otištění vybraných úloh děkují autoři těmto spolupracovníkům: dr. J. Zhoufovi z Prahy, dr. Sokolovi z Českých Budějovic, dr. M. Volfové, CSc., z Hradce Králové, dr. Z. Bachelové z Frýdku-Místku, dr. P. Černekovi, CSc., z Bratislavy, dr. L. Hozové z Opavy, dr. M. Ausbergerové z Plzně a J. Trejbalovi z Chlumce n. Cidlinou.

6. *Stručné zhodnocení soutěže*

38. ročník matematické olympiády na základních školách proběhl bez větších problémů. Krajské výbory MO hodnotily soutěžní úlohy jako průměrně náročné. Úspěšnost v jednotlivých kolech byla o něco vyšší než v minulém ročníku. Ústřední výbor MO nedostal k jednotlivým úlohám žádné připomínky. Kladně byla hodnocena návaznost úloh na předcházející kola. Uplynulý ročník můžeme proto považovat za úspěšný

nejen ve výběru úloh, ale i v úspěšnosti jejich řešení soutěžícími.

6. *Konkurs na soutěžní úlohy MO*

Již v roce 1966 vyhlásily JČSMF a JSMF konkurs na soutěžní úlohy pro MO. Návrhy úloh může podat každý občan ČSFR. Návrhy úloh spolu s řešeními ve dvou vyhotoveních může každý poslat na adresu ÚV MO, Žitná 25, Praha 1, PSČ 115 67. Ústřední výbor MO má právo přijaté úlohy upravit a autor má povinnost je utajit. Každá přijatá úloha je bez ohledu na kategorii honorována částkou Kčs 50.

Ústřední výbor MO

Úspěšní řešitelé III. kola kategorie Z8

V každém kraji uvádíme seznam deseti nejúspěšnějších řešitelů a adresy jejich základních škol. Pokud se na 10. místě umístilo více řešitelů, uvádíme všechny. Údaj (7) znamená, že soutěžící byl žákem 7. ročníku. Ostatní soutěžící jsou z 8. ročníků.

Praha

- | | | |
|-----------|---------------------------|--------------------------|
| 1. — 4. | <i>Vít Novák</i> | Praha 4, Na planině |
| | <i>Tomáš Petrán</i> | Praha 4, Horáčkova |
| | <i>Ludmila Palounková</i> | Praha 4, Kvasnicova |
| | <i> Jiří Vaníček</i> | Praha 8, Rudé armády |
| 5. | <i>Petr Puš</i> | Praha 2, Kladská |
| 6. — 9. | <i> Jiří Hanika</i> | Praha 1, Uhelný trh |
| | <i>Václav Hrabák</i> | Praha 3, Chelčického |
| | <i>Petr Křen</i> | Praha 4, Zárubova |
| | <i>Tomáš Milsimer</i> | Praha 5, Kořenského |
| 10. — 16. | <i>Markéta Přikrylová</i> | Praha 1, Uhelný trh |
| | <i>Jan Tichý</i> | Praha 1, Uhelný trh |
| | <i>Tomáš Solar</i> | Praha 1, Uhelný trh |
| | <i>Vít Soupal</i> | Praha 1, Uhelný trh |
| | <i> Jiří Veselý</i> | Praha 3, Čapajevovo nám. |

Marek Havránek
Jan Fryščák

Praha 4, Horáčkova
Praha 8, Ústavní II

Středočeský kraj

- | | | |
|----------|-------------------------|-------------------|
| 1. — 7. | <i>Robert Pešta</i> | Kladno, 10. ZŠ |
| | <i>Radek Duchoslav</i> | Mělník, Fučíkova |
| | <i>Petr Procházka</i> | Neratovice, 3. ZŠ |
| | <i>Martin Fér</i> | Lysá nad Labem |
| | <i>Jan Snášel</i> | Mníšek pod Brdy |
| | <i>Martin Mastný</i> | Řevnice |
| 8. — 11. | <i>Petr Vrzák</i> | Hořovice, 2. ZŠ |
| | <i>Radan Hanzl</i> | Kolín, 7. ZŠ |
| | <i>Helena Nešporová</i> | Mělník, 3. ZŠ |
| | <i>Martin Smrž</i> | Čelákovice, 1. ZŠ |

Jihočeský kraj

- | | | |
|-----------|-------------------------|---------------------------|
| 1. | <i>Pavla Kozáková</i> | Milevsko, 2. ZŠ |
| 2. — 4. | <i>Miloš Beran</i> | Humpolec, ZŠ Hálkova |
| | <i>Marek Jaroš</i> | Milevsko, 1. ZŠ |
| | <i>Marko Solmoši</i> | Tábor, 5. ZŠ |
| 5. — 9. | <i>Zdeněk Vandrovec</i> | Strakonice, ZŠ Dukelská |
| | <i>Jana Hölzllová</i> | ZŠ Velešín |
| | <i>Pavel Juruš</i> | ZŠ Volary |
| | <i>Oleg Hanzal</i> | Dačice, ZŠ Boženy Němcové |
| | <i>Libor Štáfl</i> | Humpolec, ZŠ Hálkova |
| 10. — 11. | <i>Jan Medek</i> | Vimperk, 2. ZŠ |
| | <i>Martin Mora</i> | Kaplice, ZŠ Fantova |

Západočeský kraj

- | | | |
|---------|--------------------|-----------------------|
| 1. — 5. | <i> Jiří Černý</i> | Plzeň, ZŠ Na Dlouhých |
|---------|--------------------|-----------------------|

- | | | |
|-----------|--------------------------|--------------------------|
| | <i>Žitka Drábková</i> | Zbiroh |
| | <i>Aleš Janka</i> | Plzeň, ZŠ Sokolovská |
| | <i>Ľindřich Kňourek</i> | Plzeň, ZŠ Sokolovská |
| | <i>Lenka Syrovátková</i> | Cheb, 3. ZŠ |
| 6. — 9. | <i>Helena Nyklová</i> | Karlovy Vary, ZŠ Tuhnice |
| | <i>Petr Písek (7)</i> | Cheb, 3. ZŠ |
| | <i>Věra Kubiřtová</i> | Karlovy Vary, ZŠ Tuhnice |
| | <i>Petra Medová</i> | Plzeň, ZŠ Na Dlouhých |
| 10. — 12. | <i>Vlastimil Bláha</i> | ZŠ Teplá |
| | <i>Ľirí Škoda</i> | ZŠ Teplá |
| | <i>Ladislav Němec</i> | Sokolov, 8. ZŠ |

Severočeský kraj

- | | | |
|-----------|------------------------|------------------------|
| 1. — 7. | <i>Michal Neřvara</i> | Litoměřice, 6. ZŠ |
| | <i>Rostislav Šuma</i> | Ústí nad Labem, 12. ZŠ |
| | <i>Martin Kačer</i> | Jablonec, 6. ZŠ |
| | <i>Tomáš Marek</i> | Liberec, 7. ZŠ |
| | <i>Ľirí Lahvička</i> | Liberec, 5. ZŠ |
| | <i>Karel Ľohn</i> | Liberec, 6. ZŠ |
| | <i>Tomáš Pácl</i> | Česká Lípa, Sovova |
| 8. | <i>Sylva Rydvalová</i> | Teplice, Buzulucká |
| 9. | <i>Daniela Pechová</i> | Ústí nad Labem, 12. ZŠ |
| 10. — 12. | <i>Michal Gust</i> | Most, 10. ZŠ |
| | <i>Lukáš Fogl</i> | Jablonec, 5. ZŠ |
| | <i>Radek Bím</i> | Liberec, 5. ZŠ |

Východočeský kraj

- | | | |
|---------|----------------------|----------------------------|
| 1. | <i>Rudolf Čejka</i> | Svitavy, nám. Míru |
| 2. — 4. | <i>Pavel Čermák</i> | Nová Paka, Komenského |
| | <i>Eva Petrasová</i> | Polička, nábřeží J. Fučíka |

Petr Vágnr
 5. — 10. *Michal Dočekal*
Jan Ježek
Petr Kmet'
Robert Šedivec
Jan Zeithaml
Tomáš Zuščák

Úpice, Lány
 Pardubice, Hakenova
 Moravská Třebová
 Heřmanův Městec
 Náchod, Komenského
 Chrudim, Husova
 Police n. Metují

Jihomoravský kraj

1. — 2. *Martin Ander*
David Kruml
 3. *Markéta Kyloušková*
 4. — 8. *Martin Dostál*
Pavel Kasal
Radek Matoušek
Petr Matula
Marek Smrž
 9. — 13. *Marek Beran*
Ondřej Klíma
Petr Špatka
Marie Tesařová
Marek Zemánek

Vyškov, Purkyňova
 Třebíč, Komenského
 Brno, Laštůvkova
 Brno, nám. 28. října
 Brno, Hakenova
 Třebíč, Komenského
 Ostrovačice
 Třebíč, Komenského
 Zlín, Mikoláše Alše
 Blansko, Erbenova
 Brno, Křídlovická
 Lysice
 Boskovice, nám. 9. května

Severomoravský kraj

1. — 8. *Petr Masopust* (7)
Radim Wystyrk (7)
Ondřej Heřman
Zbyněk Vlk
Radovan Pekař
Jiří Štolba

Frýdek-Místek, R. armády
 Frýdek-Místek, R. armády
 Frýdek-Místek, R. armády
 Frýdek-Místek, R. armády
 Studénka, Sjednocení
 Havířov, 1. máje

	<i>Antonín Sedláček</i>	Olomouc, 8. května
	<i>Miloslav Šimek</i>	Nový Malín
9. — 10.	<i>Petra Bálková</i>	Klimovice
	<i>Vladimír Marek</i>	Kopřivnice, náměstí

Bratislava

1. — 5.	<i>Kamil Budinský</i>	Bratislava, Košická
	<i>Andrea Juráková</i>	Bratislava, Košická
	<i>Vladimír Krno</i>	Bratislava, Košická
	<i>Miloš Volauf</i>	Bratislava, Košická
	<i>Martin Niepel</i>	Bratislava, Ho Či Minova
6.	<i>Andrej Škoviera</i>	Bratislava, Batkova
7. — 20.	<i>Pavol Marton</i>	Bratislava, Jesenského
	<i>Martin Berek</i>	Bratislava, Palackého
	<i>Viliam Búr</i>	Bratislava, Medzilaborecká
	<i>Ladislav Ľombík</i>	Bratislava, Košická
	<i>Branislav Štěpánek</i>	Bratislava, Košická
	<i>Boris Bartl</i>	Bratislava, Nevädzová
	<i>Michal Kovár (6)</i>	Bratislava, gymn. Č. armády
	<i>Radoslav Volný</i>	Bratislava, Nejedlého
	<i>Michal Hollý</i>	Bratislava, Nejedlého
	<i>Marcel Mojžes</i>	Bratislava, Batkova
	<i>Daniel Štefankovič</i>	Bratislava, Lumumbova
	<i>Richard Kováč</i>	Bratislava, Buďonného
	<i>Daniel Pastor</i>	Bratislava, Buďonného
	<i>Marek Mačuha</i>	Bratislava, Ho Či Minova

Západoslovenský kraj

1.	<i>František Gabriš (7)</i>	Hlohovec, Leninova
2. — 8.	<i>Martin Plavec</i>	Komárno, Slobody

	<i>Martin Vagasky</i> (7)	Trenčín, Pionierská
	<i>Zuzana Ralíková</i>	Nitra, Topoľová
	<i>Gabriel Rácz</i>	Dunajská Str., Komenského
	<i>Vladimír Rumanovský</i>	Nitra, Nábrežie mládeže
	<i>Darina Kozová</i>	Bratislava-vidiek, Dunajská Lužná
	<i>Rasto Graus</i>	Nitra, Nábrežie mládeže
9. — 15.	<i>Michaela Džupinková</i>	Trenčín, Pionierská
	<i>Metod Špaček</i>	Galanta, Fučíkova
	<i>Marek Mészáros</i>	Nitra, Febr. víťazstva
	<i>Michal Santai</i>	Šala, Pionierská
	<i>Peter Cyén</i>	Nové Zámky, Veľké Lovce
	<i>Eva Tomášová</i>	Nové Mesto n. V., kpt. Nál.
	<i>Peter Maco</i>	Partizánske, SNP

Stredoslovenský kraj

1. — 2.	<i>Peter Duda</i>	Banská Bystrica, Radvaň
	<i>Ivan Muška</i>	Banská Bystrica, Radvaň
3. — 4.	<i>František Mala</i>	Dolný Kubín, Nemocničná
	<i>Martina Čelestiaková</i>	Martin, Tomášikova
5. — 6.	<i>Miriám Čopíková</i>	Kremnica, 1. ZŠ
	<i>Zuzana Ľurčáková</i>	Lokca, okr. Dolný Kubín

Východoslovenský kraj

1. — 2.	<i>Peter Guľváš</i>	Košice, Dneperská
	<i>Peter Katuščák</i>	Košice, Tomášikova
3.	<i>Ján Šoltis</i>	Poprad, Svit, Mieru
4. — 6.	<i>Ondrej Azor</i>	Košice, Marxova
	<i>Juraj Macko</i>	Košice, Požiarnická
	<i>Barbora Nováková</i>	Stará Lubovňa, Svajlovská

7. — 8. *Marek Ilčín*
Vladimír Vajda
9. — 13. *Peter Chymčák*
Roman Klein
Marek Knapčík
Martin Ondáš

Revúca, Hviezdoslavova
Vranov nad Topľou
Košice, Maurerova
Krompachy, Maurerova
Prešov-Solivar, gen. Petrova
Košice, L. Novomeského

Počty základních škol v ČSFR, které se zúčastnily 38. ročníku MO
Kategorie Z8, Z7, Z6

Kraj	Účast ZŠ						
	v I. kole			ve II. kole			ve III. kole
	Z8	Z7	Z6	Z8	Z7	Z6	Z8
Praha 	188	173	163	153	151	131	28
Středočeský	192	213	202	141	145	157	32
Jihočeský	169	157	156	142	131	127	32
Západočeský	179	164	162	143	130	133	24
Severočeský	212	204	208	118	141	154	30
Východočeský	215	221	209	156	188	175	34
Jihomoravský	337	442	443	285	294	309	39
Severomoravský	397	410	404	276	341	335	70
Bratislava	72	72	72	72	72	72	15
Západoslovenský	382	354	368	314	298	305	42
Středoslovenský	326	328	345	288	296	318	29
Východoslovenský	344	367	377	297	333	355	56
ČR	1 889	1 984	1 947	1 414	1 521	1 521	289
SR	1 124	1 121	1 162	971	999	1 050	142
ČSFR	3 013	3 105	3 109	2 385	2 520	2 571	431

Počty žáků soutěžících v ČSFR v 38. ročníku MO
Kategorie Z8

Kraj	I. kolo		II. kolo		III. kolo	
	soutěžících úspěšných		soutěžících úspěšných		soutěžících úspěšných	
Praha	1 213	629	426	239	44	38
Středočeský	1 146	447	335	118	38	31
Jihočeský	935	381	277	124	50	40
Západočeský	1 083	399	292	129	74	54
Severočeský	1 414	460	315	157	52	41
Východočeský	1 179	467	320	159	41	35
Jihomoravský	2 126	952	695	342	53	46
Severomoravský	3 155	1 076	686	344	115	95
Bratislava	1 115	985	780	267	47	37
Západoslovenský	2 413	1 026	936	423	52	45
Středoslovenský	1 439	679	577	177	40	37
Východoslovenský	2 596	1 246	638	322	58	38
ČR	12 251	4 811	3 346	1 612	467	380
úspěšnost	39,3 %		48,2 %		81,4 %	
SR	7 563	3 936	2 931	1 189	187	157
úspěšnost	52,0 %		40,6 %		84,0 %	
ČSFR	19 814	8 747	6 277	2 801	654	537
úspěšnost	44,1 %		44,6 %		82,1 %	

Počty žáků soutěžících v ČSFR v 38. ročníku MO
Kategorie Z7 a Z6

Kraj	Kategorie Z7				Kategorie Z6			
	I. kolo		II. kolo		I. kolo		II. kolo	
	soutěž.	úspěš.	soutěž.	úspěš.	soutěž.	úspěš.	soutěž.	úspěš.
Praha	1 071	671	440	252	1 142	704	419	194
Středočeský	1 286	613	522	154	1 372	581	545	162
Jihočeský	1 190	422	350	124	1 353	591	437	179
Západočeský	1 137	448	348	187	1 382	578	362	166
Severočeský	1 660	742	463	174	1 819	896	539	233
Východočeský	1 493	680	466	229	1 585	823	515	265
Jihomoravský	2 162	1 165	780	326	2 582	1 534	930	373
Severomoravský	3 851	1 526	911	348	4 310	1 914	976	390
Bratislava	537	395	365	175	580	455	438	165
Západoslovenský	2 516	1 019	738	268	3 292	1 538	783	284
Středoslovenský	1 894	898	685	230	2 238	1 170	817	297
Východoslovenský	3 105	1 468	677	401	3 437	1 750	680	333
ČR	13 850	6 267	4 280	1 794	15 545	7 621	4 723	1 962
úspěšnost	45,2 %		41,9 %		49,0 %		41,5 %	
SR	8 012	3 780	2 465	1 074	9 547	4 913	2 718	1 079
úspěšnost	47,2 %		43,6 %		51,5 %		39,7 %	
ČSFR	21 862	10 047	6 745	2 868	25 092	12 534	7 441	3 041
úspěšnost	46,0 %		42,5 %		50,0 %		40,6 %	

Kategorie Z8

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 37 až 50)

Z8 - I - 1

Je dán trojúhelník ABC . Body R_1, R_2 , které dělí stranu BC na třetiny, vedte rovnoběžky se stranou AC . Jejich průsečíky se stranou AB označte postupně S_1, S_2 a sestrojte úsečky S_1C a S_2C . Tímto způsobem rozdělíte trojúhelník ABC na 6 částí. Určete jejich obsahy, jestliže víte, že obsah trojúhelníku ABC je 18 cm^2 .

Z8 - I - 2

V kleci tvaru krychle $ABCDEFGH$ s délkou strany 48 cm jsou umístěny dvě dřevěné příčky BG a KE (K je střed hrany HD). Z jedné z nich vzlétl kanárek a přeletěl nejkratší cestou na druhou, z ní se vrátil zase nejkratší cestou na první a z ní opět na druhou atd.

Popište, jak sestrojíte bod X_3 , do kterého se dostal kanárek z výchozího bodu X po třetím přeletu.

Najděte na úsečce BG takový bod X , ze kterého musí kanárek vzlétnout, aby se do něho po několika přeletech zase vrátil.

Určete vzdálenost bodu X od přímky CG .

Z8 - I - 3

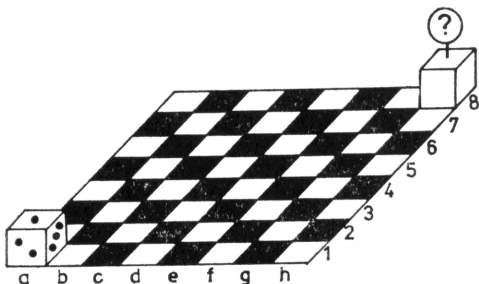
Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC ($AB > BC$). Na straně AB je vyznačen bod X , pro který platí $AX \cong CX$. Dokažte, že střed O kružnice vepsané trojúhelníku XCB leží na přímce p , která je rovnoběžná se stranou AC a prochází bodem X .

Z8 - I - 4

Pythagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran. Ukažte, že každý pythagorejský trojúhelník má obsah dělitelný číslem 3.

Z8 - I - 5

Na šachovnici na poli a1 (obr. 1) stojí hrací kostka. Překlápěním převedte kostku na pole h8. Můžete měnit dráhy putující kostky tak, aby se na poli h8 vystřídaly všechny její stěny (tj. všechny počty ok)? Udejte pro každou možnost příslušnou dráhu kostky.



Obr. 1

Z8 - I - 6

Jsou dány dva body A, B . Sestrojte pravidelný osmiúhelník, který má v bodech A, B středy některých dvou stran. Vyšetřte všechny možnosti.

Dvě poznámky k úlohám I. kola:

Poznámka 1. Při řešení úlohy Z8-I-2 je možno použít následující větu 1, která byla v soutěžním letáku též uvedena.

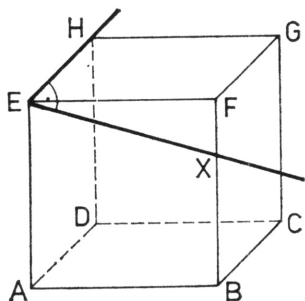
Věta 1. *Nechť je dán pravý úhel, jehož jedno rameno je rovnoběžné s rovinou podstavy krychle a druhé k ní není kolmé. Potom při pohledu směrem kolmým k podstavě vidíme tento pravý úhel jako pravý úhel. Jestliže jsou obě ramena tohoto úhlu různoběžná s rovinou podstavy, pak to neplatí.*

Větu 1 zde nebudeme dokazovat, ale ověříme ji na dvou příkladech:

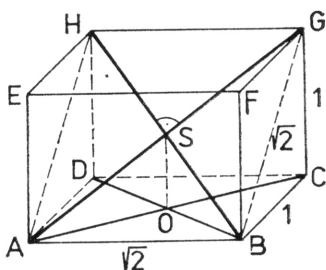
a) Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$ (obr. 2a). Za jedno rameno pravého úhlu zvolme polopřímku EH . Pak druhé rameno musí ležet v rovině boční stěny $ABFE$. Při pohledu shora splyne tento pravý úhel s úhlem BAD (nebo s úhlem vedlejším k úhlu BAD), který je pravý.

b) Nechť je dán čtyřboký hranol $ABCDEFGH$ (obr. 2b), pro který platí

$$|AB| = \sqrt{2}, \quad |BC| = |CG| = 1.$$



Obr. 2a



Obr. 2b

Potom jeho úhlopříčný řez $ABGH$ je čtverec, takže jeho úhlopříčky AG a BH jsou navzájem kolmé. Při pohledu shora splynou tyto úhlopříčky s úhlopříčkami AC a BD , které zřejmě nejsou kolmé. Při tomto pohledu vidíme pravý úhel ASB jako tupý úhel a pravý úhel BSG jako ostrý úhel.

Poznámka 2. Při řešení úlohy Z8-I-4 je možné — i když ne

nutné — použít následující věty 2 a 3, které byly rovněž v sou-
těžním letáku uvedeny.

Věta 2. *Zvolíme-li dvě přirozená čísla k, l ($k > l$) a vypo-
čítáme čísla*

$$(R) \quad a = 2kl, \quad b = k^2 - l^2, \quad c = k^2 + l^2,$$

*pak a, b, c jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníku. Také
jejich přirozené násobky an, bn, cn (pro libovolné přirozené
číslo n) jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníku.*

Věta 3. *Jestliže má pravoúhlý trojúhelník celočíselné délky
stran, můžeme je vypočítat podle věty 2. (Můžeme najít přiro-
zená čísla k, l tak, že čísla a, b, c daná rovnicemi (R) nebo
jejich násobky an, bn, cn jsou délky stran daného trojúhelníku.)*

Větu 2 sami snadno dokážete. Důkaz věty 3 uvedeme až
po řešení úlohy Z8 - I - 4 na str. 44. Zde uvedeme dvě ukázky
výpočtu čísel k, l .

a) Trojúhelník o stranách 8 cm, 15 cm, 17 cm je pravoúhlý,
neboť

$$8^2 + 15^2 = 17^2.$$

Pokusíme se najít čísla k, l tak, aby

$$8 = 2kl, \quad 15 = k^2 - l^2, \quad 17 = k^2 + l^2.$$

Sečtením druhé a třetí rovnice dostaneme $2k^2 = 32$. Odtud
vypočítáme $k = 4, l = 1$.

b) Také trojúhelník o stranách 5 cm, 12 cm a 13 cm je pravoúhlý, neboť

$$5^2 + 12^2 = 13^2.$$

Snadno však zjistíte, že soustava

$$5 = 2kl, \quad 12 = k^2 - l^2, \quad 13 = k^2 + l^2$$

nemá celočíselné řešení. Zato má celočíselné řešení soustava

$$5 = k^2 - l^2, \quad 12 = 2kl, \quad 13 = k^2 + l^2.$$

Najděte sami toto řešení.

ÚLOHY II. KOLA

(Řešení úloh na str. 51 až 57)

Z8 - II - 1

V kleci tvaru krychle $ABCDEFGH$ o straně $a = 30$ cm sedí 2 kanárce, modrý uprostřed stěny $ADHE$, zelený uprostřed stěny $DCGH$. V bodě K na hraně AB ve vzdálenosti $v = 10$ cm od B je krmítko. Který kanárek má k němu blíže a o kolik centimetrů?

Z8 - II - 2

V obdélníku $ABCD$ jsou E, F po řadě středy stran AB, CD . Obdélník je rozdělen úsečkami AF, CE, BD na 6 částí, z nichž dvě nejmenší mají stejný obsah 24 cm². Vypočtěte obsah celého obdélníku.

Z8 - II - 3

Vypočtěte délky stran všech pythagorejských trojúhelníků, jejichž jedna odvěsna je dlouhá 12 cm.

Na stole jsou 3 hromady stejných mincí. Z první z nich přemístíme na zbylé dvě tolik mincí, aby se v každé z nich počet mincí zdvojnásobil. Pak uděláme totéž s druhou a na konec s třetí hromadou. Zůstanou 3 hromady se stejným počtem mincí. Mincí je dohromady víc než 150, ale méně než 190. Kolik bylo původně na hromadách mincí?

ÚLOHY III. KOLA

(Řešení úloh na str. 58 až 64)

Z8 - III - 1

V kleci tvaru krychle $ABCDEFGH$ jsou dvě tyčky CF a AH a krmítko ve středu K hrany AB délky 40 cm. Bílý kanárek letěl z K nejkratší cestou na tyčku AH , odtud nejkratší cestou na tyčku CF a zpět do bodu K . Zelený kanárek letěl obráceně z K nejkratší cestou na CF , pak nejkratší cestou na AH a zpět do K . Vypočtěte, který kanárek uletěl kratší dráhu a o kolik centimetrů.

Z8 - III - 2

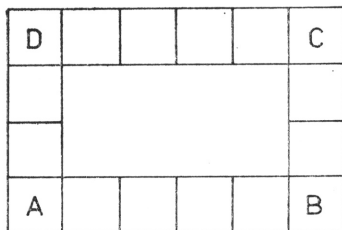
Pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ o straně $a = 6$ cm byl rozdělen úsečkami AM a DN (kde M , N jsou středy stran DE a AB) na 3 části. Porovnejte obsahy všech tří částí.

Z8 - III - 3

Vypočtěte délky stran všech pythagorejských trojúhelníků, jejichž přepona je o 8 cm kratší než součet jejich odvěsen.

Z8 - III - 4

Hrací kostka se překlápí po obdélníkovém pásu (obr. 3), který je složen ze čtverců shodných se stěnami krychle. Ve výchozím místě A je na horní stěně kostky šestka. Kde bude šestka, když kostka oběhne stokrát obdélníkový pás a zůstane v místě A (nahore, vpravo, vlevo, vpředu, vzadu nebo dole)?

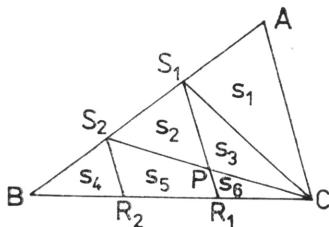


Obr. 3

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z8 - I - 1 (str. 27)

Obsahy částí trojúhelníku ABC označíme podle obrázku 4. Obsah celého trojúhelníku označíme S ; $S = 18 \text{ cm}^2$.



Obr. 4

Protože body R_1, R_2 dělí stranu BC na třetiny a příčky S_1R_1, S_2R_2 jsou rovnoběžné se stranou AC , dělí body S_1, S_2 stranu AB také na třetiny.*)

Úsečky CS_1 a CS_2 dělí tedy trojúhelník ABC na tři trojúhelníky stejného obsahu, proto

*) Můžete to odvodit ze stejnosti se středem ve vrcholu B , ale i bez stejnosti, jen z vlastnosti střední příčky trojúhelníku a lichoběžníku.

$$s_1 = s_2 + s_3 = s_4 + s_5 + s_6 = \frac{1}{3} s = 6 \text{ cm}^2.$$

Úsečka S_2R_2 rozdělí trojúhelník BCS_2 na dvě části o obsahích s_4 a $s_5 + s_6$. Protože R_2 je ve třetině strany BC , je obsah trojúhelníku BR_2S_2 roven třetině obsahu trojúhelníku BS_2C :

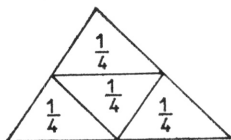
$$s_4 = \frac{1}{3} (s_4 + s_5 + s_6) = \frac{1}{3} \cdot 6 \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2$$

$$s_5 + s_6 = 4 \text{ cm}^2$$

Úsečka PR_1 je střední příčka trojúhelníku S_2R_2C a zároveň PS_1 je těžnice trojúhelníku S_1S_2C . Proto je obsah s_6 roven čtvrtině obsahu trojúhelníku $S_2R_2C^{**}$) a obsahy s_2, s_3 se sobě rovnají.

$$s_6 = \frac{1}{4} (s_5 + s_6) = \frac{1}{4} \cdot 4 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm}^2$$

$$s_5 = 3 \text{ cm}^2$$

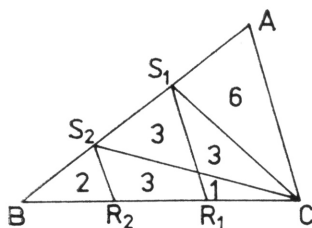


Obr. 5

****)** Neboť střední příčky dělí každý trojúhelník na 4 navzájem shodné trojúhelníky. Ověřte sami podle obrázku 5.

$$s_2 = s_3 = \frac{1}{2} (s_2 + s_3) = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm}^2 = 3 \text{ cm}^2.$$

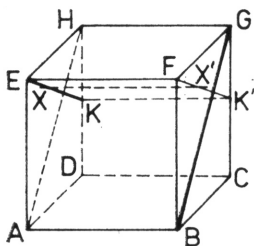
Celkový výsledek znázorňuje obrázek 6.



Obr. 6

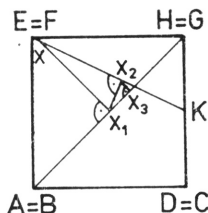
Řešení úlohy Z8 - I - 2 (str. 27)

Krychle i s příčkami je znázorněna na obrázku 7. Kanárek musí létat vždy tak, aby dráha letu byla kolmá k příčce,



Obr. 7

ke které letí. Situace při pohledu kolmém na boční stěnu $BCGF$ je podle věty 1, str. 29 znázorněna na obrázku 8. Dráha kanára se přitom zobrazuje (obr. 8) jako lomená čára $XX_1X_2X_3 \dots$, přičemž



Obr. 8

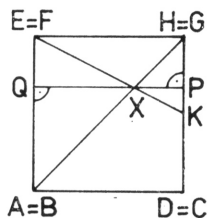
$$XX_1 \perp BG, \quad X_1X_2 \perp EK, \quad X_2X_3 \perp BG, \quad \dots$$

Má-li se kanárek vrátit do téhož místa, musí vylétnout z bodu X , který se na obrázku 9a zobrazuje do průsečíku BG a EK . Létá přitom mezi příčkami po přímce kolmé k oběma příčkám (obr. 9b). Může startovat jak z přímky BG , tak z přímky EK . Celá dráha, po které se kanárek pohybuje, se zobrazí na obr. 9a do jediného bodu X .

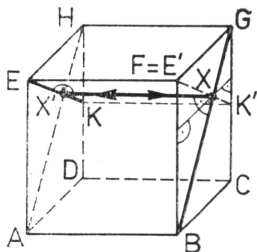
Vzdálenost bodu X od přímky CG se zobrazí na obrázku 9a ve skutečné velikosti. Využijeme toho, že trojúhelníky AEX

a GKX jsou podobné. Protože $|GK| = \frac{1}{2} |AE|$, je poměr

podobnosti roven $\frac{1}{2}$. Z toho plyne, že $|PX| = \frac{1}{2} |QX|$.



Obr. 9a



Obr. 9b

Hledaná vzdálenost

$$v = |PX| = \frac{1}{3} |QP| = \frac{1}{3} \cdot 48 \text{ cm} = 16 \text{ cm}.$$

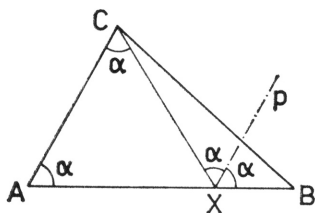
Doplňující otázky k řešení úlohy Z8 - I - 2. Jaké jsou vzdálenosti bodu X (obr. 9b) od vrcholů B , G ? Jaké jsou vzdálenosti bodu X' (obr. 9b) od bodů E , K ? Jaké jsou vzdálenosti bodů X a X' od všech vrcholů krychle?

Řešení úlohy Z8 - I - 3 (str. 28)

Situace je znázorněna na obrázku 10. Existenci bodu X na straně AB , pro který platí $AX \cong CX$, zaručuje podmínka $AB > BC$.

Trojúhelník ACX je rovnoramenný, a proto

$$\begin{aligned} \sphericalangle XCA &= \sphericalangle XAC = \alpha \\ \sphericalangle BXC &= 2\alpha \quad (\text{vnější úhel } \triangle ACX). \end{aligned}$$



Obr. 10

Osa úhlu BXC , na které leží střed kružnice vepsané trojúhelníku BXC , pólí úhel BXC (obr. 10). Protože

$$\frac{1}{2} \sphericalangle BXC = \alpha, \quad \sphericalangle XCA = \alpha, \quad (\text{střídavé úhly})$$

jsou přímky AC a p rovnoběžné.

Řešení úlohy Z8 - I - 4 (str. 28)

1. *řešení.* Nechť je dán libovolný pythagorejský trojúhelník. Podle věty 3 (str. 31) můžeme najít přirozená čísla k, l tak, že čísla

$$a = 2kl, \quad b = k^2 - l^2, \quad c = k^2 + l^2$$

nebo jejich násobky an, bn, cn jsou strany daného trojúhelníku. Přitom a, b (nebo jejich násobky) jsou délky jeho odvěsen. Proto obsah tohoto pythagorejského trojúhelníku je násobkem čísla

$$S = \frac{1}{2} ab = kl(k^2 - l^2) = kl(k + l)(k - l).$$

Stačí tedy ukázat, že číslo S je násobkem čísla 3. Je-li některé z čísel k, l násobkem tří, je i S násobkem tří. V opačném případě mohou nastat dvě možnosti:

a) Čísla k, l dávají při dělení třemi týž zbytek. Potom je rozdíl $k - l$, a tedy i S , násobkem tří.

b) Čísla k, l dávají při dělení třemi různé zbytky (jeden je 1 a druhý 2). Potom je násobkem 3 součet čísel $k + l$, a tedy i S .

2. řešení (bez použití vět 2 a 3 na str. 31). Jestliže a, b jsou odvěsny pythagorejského trojúhelníku a c je přepona, potom platí

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Obsah trojúhelníku je $S = \frac{1}{2} ab$. Aby toto číslo bylo násobkem tří, musí být součin ab násobkem šesti. Musíme dokázat, že aspoň jedno z čísel a, b je násobkem 2 a aspoň jedno násobkem 3.

Nejdříve dokážeme **pomocnou větu 1**: *V každém pythagorejském trojúhelníku je aspoň jedna odvěsna násobkem 2.*

Dokážeme to sporem. Budeme předpokládat, že obě čísla a, b jsou lichá ($a = 2m + 1, b = 2n + 1$). Potom $c^2 = a^2 + b^2$ musí být číslo sudé. Sudé číslo však může být druhou mocninou přirozeného čísla, jen když je násobkem 4. Zároveň

$$\begin{aligned} c^2 = a^2 + b^2 &= (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = \\ &= 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2. \end{aligned}$$

To však znamená, že číslo c^2 není násobkem 4. Předpoklad, že obě čísla a, b jsou lichá, vede tedy ke sporu. Proto musí být aspoň jedno z nich sudé.

Podobně dokážeme **pomocnou větu 2:** *V každém pythagorejském trojúhelníku je aspoň jedna odvěsna násobkem 3.*

Dokážeme to opět sporem. Budeme předpokládat, že ani jedno z čísel a, b není násobkem 3. Potom můžeme psát

$$a = 3m \pm 1, \quad b = 3n \pm 1.$$

Potom

$$c^2 = (3m \pm 1)^2 + (3n \pm 1)^2 = 3(3m^2 \pm 2m + 3n^2 \pm 2n) + 2.$$

Tedy číslo c^2 není násobkem 3, neboť dává při dělení třemi zbytek 2. Proto ani c není násobek 3, takže

$$c = 3k \pm 1 \quad \text{a} \quad c^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1.$$

To však znamená, že c^2 dává při dělení třemi zbytek 1, a nikoli 2. Protože jsme došli ke sporu, byl náš předpoklad, že ani jedno z čísel a, b není násobkem 3, chybný. Tím je dokázána pomocná věta 2.

Z obou pomocných vět 1 a 2 plyne naše tvrzení o obsahu pythagorejského trojúhelníku.

Dodatek. Dokážeme větu 3 uvedenou bez důkazu na str. 31. Nechť je dán pythagorejský trojúhelník, jehož délky stran a, b, c jsou nesoudělná čísla a pro něž platí $c^2 = a^2 + b^2$.

Podle pomocné věty 1 je aspoň jedno z čísel a , b sudé, nechť je to a . Potom musí být b liché číslo, jinak by bylo i c sudé a čísla a , b , c by byla soudělná. Podobně zjistíme, že je i c liché číslo.

Nyní platí

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b).$$

Čísla $c + b$ a $c - b$ jsou součet a rozdíl lichých čísel, a proto jsou sudá. Můžeme psát

$$c + b = 2u, \quad c - b = 2v,$$

kde u , v jsou vhodná přirozená čísla. Odtud dostaneme

$$(1) \quad c = u + v, \quad b = u - v.$$

Ukážeme, že čísla u , v jsou nesoudělná, tzn. nemají žádného společného prvočíselného dělitele p . V opačném případě by jejich společný prvočíselný dělitel dělil i jejich součet a rozdíl, tedy čísla b a c . Protože

$$(2) \quad a^2 = (c + b)(c - b) = 4uv,$$

dělilo by prvočíslo p i a^2 a samozřejmě i a , což je spor s tím, že a , b , c jsou nesoudělná čísla.

Protože a je sudé, můžeme psát $a = 2x$, z rovností (2) dostaneme $4x^2 = 4uv$ neboli

$$(3) \quad x^2 = uv.$$

Protože u, v nemají žádného společného prvočíselného dělitele, plyne z rovnosti (3), že u, v musí být také 2. mocniny přirozených čísel, tzn.

$$u = k^2, \quad v = l^2.$$

Z rovnosti (2) dostaneme $a^2 = 4k^2l^2$ neboli

$$a = 2kl.$$

Z rovnosti (1) dostaneme

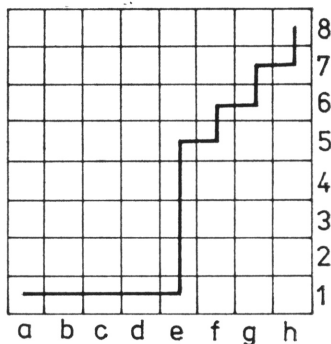
$$b = k^2 - l^2, \quad c = k^2 + l^2.$$

Tím je věta 2 (str. 31) dokázána. Navíc z důkazu plyne, že strany pythagorejského trojúhelníku jsou nesoudělná čísla, právě když k, l jsou nesoudělná čísla, z nichž jedno je liché a druhé sudé číslo.

Řešení úlohy Z8 - I - 5 (str. 28)

1. řešení. Ukážeme, že můžeme překlápěním přemístit kostku na pole h8 tak, že nahoře může být kterákoli její stěna.

Překlápíme-li kostku po dráze znázorněné na obrázku 11, bude na poli h8 nahoře stěna s 1 okem. Přitom po prvních osmi tazích bude kostka na poli e5 s 1 okem nahoře. Stačí tedy ověřit posledních 6 překlopení. Tento pohyb překlápění kostky zapíšeme pomocí písmen P = překlopení vpravo, N = překlopení nahoru:



Obr. 11

P P P P N N N N P N P N P N (nahore »1«)

Podobně zapíšeme další 4 pohyby kostek, přitom prvních 8 tahů (tj. na pole e5) ponecháme beze změny:

P P P P N N N N P N P N N N (nahore »2«)

P P P P N N N N N P P N N P (nahore »3«)

P P P P N N N N N P N N P P (nahore »4«)

P P P P N N N N P P P N N N (nahore »5«)

Poslední způsob přemístění zachycuje zápis

P N P N P N P N N P N N P P (nahore »6«).

Všechna tato přemístění jsou provedena pomocí 14 překlopení. Snadno si uvědomíte, že menším počtem překlopení

kostku přemístit nelze. Snadno také zjistíte, že existují i jiná řešení pomocí 14 nebo i více překlopení.

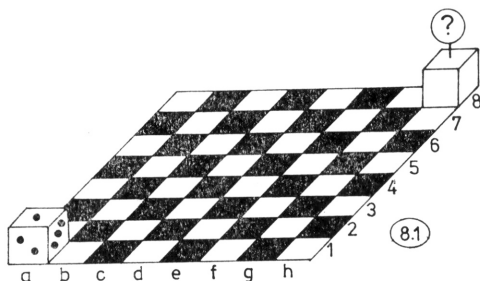
2. řešení. Dokážeme obecnější tvrzení: Kostku můžeme přemístit na libovolné pole šachovnice tak, aby nahoře byla kterákoli ze zvolených stěn.

Budeme používat čtyř druhů překlápění: vpravo (P), vlevo (L), nahoru (N), dolů (D).

Provedeme-li překlopení kostky z polohy zobrazené na obrázku 12*) takto:

N P D L,

vrátí se kostka na výchozí místo a nahoře budou 2 oka.



Obr. 12

Opakujeme-li tento postup, dostaneme po 2. oběhu nahoře 4 oka, po dalším oběhu opět 1 oko.

*) Předpokládáme, že jde o správnou kostku, na které je součet počtů ok na libovolných dvou protějších stěnách roven 7.

Provedeme-li překlopení

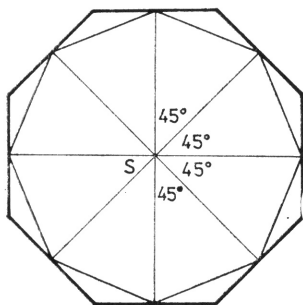
N N P D D L ,

dostaneme nahoře 6 ok. Tedy stěna s jedním okem se vymění s protilehlou. Spojením obou možností můžeme získat na horní stěně kterýkoli počet ok.

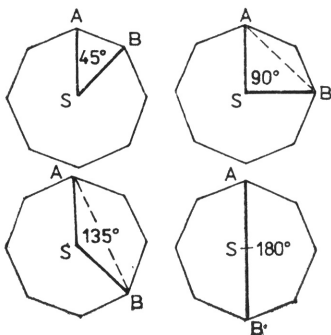
Ukázali jsme tedy obecnější tvrzení, ovšem za cenu, že počet překlápění není nejmenší (na rozdíl od 1. řešení).

Řešení úlohy Z8 - I - 6 (str. 29)

Středy stran pravidelného osmiúhelníku jsou také vrcholy pravidelného osmiúhelníku: obrázek 13. Oba osmiúhelníky mají společný střed S . Středy stran hledaného (tj. většího) osmiúhelníku V_8 jsou tedy vrcholy pomocného (menšího) osmiúhelníku M_8 .



Obr. 13



Obr. 14a—d

Úhel ASB může mít velikost $\sigma = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ nebo 180° , obr. 14a—d. Je-li $\sigma < 180^\circ$, jsou body A, B, S vrcholy rovnoramenného trojúhelníku, jehož úhly při základně mají velikost $\alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - \sigma)$, tj. v jednotlivých případech $\alpha = 67,5^\circ, 45^\circ, 22,5^\circ$.

Konstrukce pro $\sigma < 180^\circ$

1. A, B
2. $\triangle ASB$: $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = \alpha$ (*usu*); v každé polorovině určené přímkou AB jeden trojúhelník
3. $k(S, SA)$
4. M_8 ; pravidelný osmiúhelník vepsaný kružnici k s vrcholem A
5. V_8 ; pravidelný osmiúhelník, jehož strany jsou tečny kružnice k ve vrcholech M_8

Konstrukce pro $\sigma = 180^\circ$ se liší jen v bodě 2, bod S je střed úsečky AB .

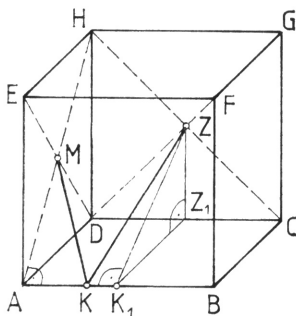
Úloha má po 2 řešeních pro úhly $\sigma = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ a jedno řešení pro úhel $\sigma = 180^\circ$. Celkem je tedy 7 pravidelných osmiúhelníků, které vyhovují úloze.

Doplňující úloha. Vypočtěte délky stran a obsahy sestavených osmiúhelníků v závislosti na vzdálenosti bodů A, B .

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z8 - II - 1 (str. 33)

Vzdálenost kanárek od krmítka určíme pomocí vhodných pravoúhlých trojúhelníků, např. podle obrázku 15.



Obr. 15

Protože AM je polovina úsečky AH , je $|AM| = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 30 = 15 \cdot \sqrt{2}$. Z pravoúhlého trojúhelníku AKM podle Pythagorovy věty

$$|MK|^2 = |AM|^2 + |AK|^2 = (15 \cdot \sqrt{2})^2 + 20^2 = 850$$

$$|MK| = \sqrt{850} \text{ cm} \doteq 29,2 \text{ cm}$$

Délku ZK vypočteme pomocí dvou pravoúhlých trojúhelníků ZZ_1K_1 a ZK_1K .*)

$$\begin{aligned} |ZK_1|^2 &= |ZZ_1|^2 + |Z_1K_1|^2 = 15^2 + 5^2 = 250 \\ |ZK|^2 &= |KK_1|^2 + |ZK_1|^2 = 30^2 + 250 = 1\,150 \\ \hline |ZK| &= \sqrt{1\,150} \text{ cm} \doteq 33,9 \text{ cm} \end{aligned}$$

Rozdíl

$$|ZK| - |MK| \doteq 33,9 \text{ cm} - 29,2 \text{ cm} = 4,7 \text{ cm}.$$

Modrý kanárek má o 4,7 cm blíže ke krmítku než zelený kanárek.

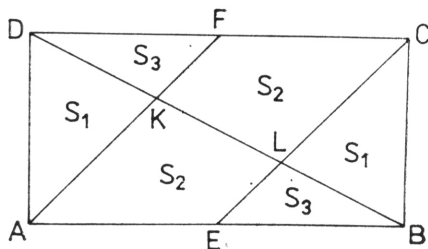
Řešení úlohy Z8 - II - 2 (str. 33)

Situaci znázorňuje obrázek 16. Protože $FC \cong AE$, je čtyřúhelník $AECF$ rovnoběžník. V trojúhelníku DLC je KF střední příčkou (neboť $DF \cong FC$ a AF je rovnoběžné s EC). Proto $DK \cong KL$. Podobně platí $KL \cong LB$.

Trojúhelníky DLC a BLC mají ve vrcholu C společnou výšku. Protože $DL = 2 \cdot BL$, je obsah trojúhelníku DLC dvakrát větší než obsah trojúhelníku BLC .

$$S_2 + S_3 = 2S_1$$

*) Jinou možností je využít pravoúhlé trojúhelníky Z_1K_1K a Z_1ZK . Výsledek tak můžete zkontrolovat.



Obr. 16

Obsah S_1 je proto třetina obsahu trojúhelníku BCD neboli šestina obsahu $S_{\square}$ celého obdélníku $ABCD$.

$$S_1 = \frac{1}{6} S_{\square}, \quad S_2 + S_3 = \frac{1}{3} S_{\square}$$

Trojúhelník DKF má strany i výšky rovné polovinám stran a výšek trojúhelníku DLC . Proto je obsah trojúhelníku DKF rovný čtvrtině obsahu trojúhelníku DLC .

$$S_3 = \frac{1}{4} (S_2 + S_3) = \frac{1}{12} S_{\square}$$

$$S_2 = \frac{3}{4} (S_2 + S_3) = \frac{3}{12} S_{\square} = \frac{1}{4} S_{\square}$$

Z obsahů S_1, S_2, S_3 je nejmenší $S_3 = \frac{1}{12} S_{\square}$. Podle zadání je $S_3 = 24 \text{ cm}^2$. Tedy obsah $S_{\square}$ daného obdélníku je 288 cm^2 .

Řešení úlohy Z8 - II - 3 (str. 33)

Označme délky odvěsen daného pythagorejského trojúhelníku a , $b = 12$ cm a délku přepony c . Pak je

$$12^2 = c^2 - a^2$$

$$144 = (c - a)(c + a).$$

Rozložíme 144 na součin dvou činitelů:

144	1	2	3	4	6	8	9	12
	144	72	48	36	24	18	16	12

Protože $c - a < c + a$, jsou v 1. řádku tabulky čísla $c - a$, ve 2. řádku čísla $c + a$. Aby byla čísla a , c celá, musí být oba činitelé $c - a$, $c + a$ sudá čísla. Dostaneme 4 soustavy rovnic:

$c - a = 2$	$c - a = 4$	$c - a = 6$	$c - a = 8$
$c + a = 72$	$c + a = 36$	$c + a = 24$	$c + a = 18$
$a = 35$	$a = 16$	$a = 9$	$a = 5$
$c = 37$	$c = 20$	$c = 15$	$c = 13$

Existují tedy celkem čtyři pythagorejské trojúhelníky, které mají jednu odvěsnu dlouhou 12 cm. Jejich délky stran jsou:

35 cm, 12 cm, 37 cm

9 cm, 12 cm, 15 cm

16 cm, 12 cm, 20 cm

5 cm, 12 cm, 13 cm

Řešení úlohy Z8 - II - 4 (str. 34)

1. *řešení.* Úlohy tohoto typu se nejlépe řeší »od konce«. Napíšeme počty mincí na hromádkách po třetím, druhém a prvním přemístění a nakonec na začátku.

Po 3. přemístění	x	x	x
Po 2. přemístění	$x/2$	$x/2$	$2x$
Po 1. přemístění	$x/4$	$7x/4$	x
Na začátku	$13x/8$	$7x/8$	$x/2$

(Výpočet kontrolujeme pomocí součtu všech tří čísel, tj. celkového počtu mincí na třech hromádkách, který musí být $3x$.)

Počet x musí být násobek osmi, jinak by $13x/8$ a $7x/8$ nebyla celá čísla. Součet

$$x + x + x = 3x$$

musí být násobkem 3 a 8, tedy násobkem 24.

Mezi čísla 150 a 190 je jediný násobek 24, je to číslo 168. Odtud dostaneme $x = 56$. Počty mincí na hromádkách na začátku udávají čísla 91, 49, 28.

Zkoušku si udělejte sami.

2. *řešení.* Úlohu je možno řešit i »od začátku«. Napíšeme si počty mincí na hromádkách:

Na začátku

x	y	z
-----	-----	-----

Po 1. přemístění

$x - y - z$	$2y$	$2z$
-------------	------	------

Po 2. přemístění

$2(x - y - z)$	$2y -$ $-(x - y - z) - 2z =$ $= 3y - x - z$	$4z$
----------------	---	------

Po 3. přemístění

$4(x - y - z)$	$2(3y - x - z)$	$4z -$ $- 2(x - y - z) -$ $-(3y - x - z) =$ $= -x - y + 7z$
----------------	-----------------	--

Odtud porovnáním dostaneme (výpočet překontrolujte sami)

$$7x = 13y, \quad 4y = 7z,$$

takže

$$y : z = 7 : 4, \quad x : y = 13 : 7.$$

Odtud zjistíme

$$x : y : z = 13 : 7 : 4$$

neboli

$$x = 13k, \quad y = 7k, \quad z = 4k \quad (k \text{ je celé číslo}).$$

Počet všech mincí je

$$N = x + y + z = 24k.$$

Podle podmínek úlohy je

$$24k = 168, \quad k = 7.$$

Odtud

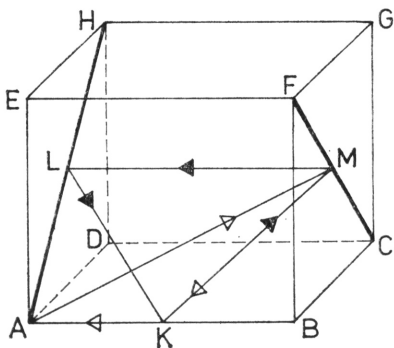
$$x = 91, \quad y = 49, \quad z = 28.$$

Zkoušku proveďte sami.

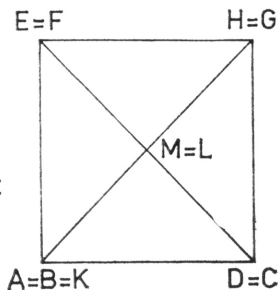
ŘEŠENÍ ÚLOH III. KOLA

Řešení úlohy Z8 - III - 1 (str. 35)

Situaci znázorňuje obrázek 17. Dráha bílého kanárka je vyznačena bílými šipkami, dráha zeleného kanárka černými šipkami.



Obr. 17



Obr. 18

Porovnáním obrázků 17 a 18 zjistíme, že bílý kanárek letěl po lomené čáře $KAMK$ a zelený po lomené čáře $KMLK$, kde M, L jsou po řadě středy úseček CF a AH .

Vypočteme délky (v centimetrech):

$$|KA| = 20, \quad |LM| = 40.$$

Dále počítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$|KL| = \sqrt{20^2 + 20^2 + 20^2} = 20 \cdot \sqrt{3} \doteq 34 \text{ *)}$$

$$|KM| = |KL| \doteq 34$$

$$|AM| = \sqrt{40^2 + 20^2 + 20^2} \doteq 49$$

Délky lomených čar jsou

$$|KAMK| \doteq 20 + 49 + 34 = 103$$

$$|KMLK| \doteq 34 + 40 + 34 = 108.$$

Dráha bílého kanárka je přibližně 103 cm, zeleného 108 cm.
Dráha bílého je asi o 5 cm kratší.

Řešení úlohy Z8 - III - 2 (str. 35)

1. řešení. Situace je znázorněna na obrázku 19. Obsahy S_1 a S_3 se sobě rovnají, protože čtyřúhelníky $AMEF$ a $DNBC$ jsou shodné (proč?).

Obsah S_2 rovnoběžníku $ANDM$ vypočteme jako součin délky AN a výšky MN ke straně AN . Délka strany AN se rovná $\frac{1}{2}a = 3$ cm a výška MN je dvojnásobek výšky rovnostranného trojúhelníku o straně $a = 6$ cm. Tedy

$$|MN| = a\sqrt{3}$$

$$|MN| \doteq 6 \cdot 1,7 \text{ cm} = 10,2 \text{ cm}.$$

*) Všimněte si také, že KL je střední příčka trojúhelníku ABH , a proto je délka KL rovna délce poloviny tělesové úhlopříčky BH (na obrázku 18 není vyznačena).

Obsah rovnoběžníku $ANDM$ je

$$S_2 = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$S_2 \doteq \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot 1,7 \text{ cm}^2 = 30,6 \text{ cm}^2.$$

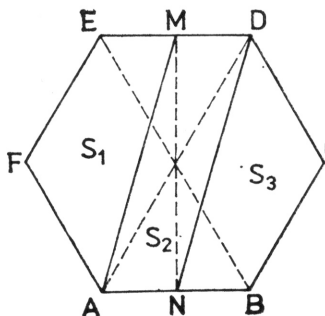
Obsah celého šestiúhelníku je

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$$

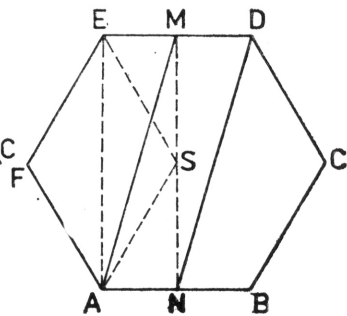
$$S \doteq \frac{3}{2} \cdot 36 \cdot 1,7 \text{ cm}^2 \doteq 91,8 \text{ cm}^2.$$

Obsahy S_1 a S_2 jsou

$$S_1 = S_3 = \frac{1}{2} (S - S_2) = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$$



Obr. 19



Obr. 20

$$S_1 = S_3 = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 1,7 \text{ cm}^2 = 30,6 \text{ cm}^2.$$

Všechny tři části mají stejný obsah

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3},$$

což je přibližně $30,6 \text{ cm}^2$. Je to třetina obsahu daného šestiúhelníku.

2. řešení. (Obr. 20) Obsah rovnoběžníku *ANDM* se rovná obsahu obdélníku *ANME*, ale ten se rovná obsahu kosočtverce *ASEF*. (Proč?) Obsah tohoto kosočtverce je roven třetině obsahu šestiúhelníku *ABCDEF*. (Proč?)

Podobně obsah čtyřúhelníku *AMEF* je roven také obsahu kosočtverce *ASEF* (obr. 20), neboť trojúhelníky *AME* a *ASE* mají společnou stranu *AE* a stejnou výšku k této straně. Je tedy obsah čtyřúhelníku *AMEF* také roven třetině obsahu šestiúhelníku *ABCDEF*.

Řešení úlohy Z8 - III - 3 (str. 35)

1. řešení. Nechť a , b ($a < b$) jsou odvěsny a c přepona pythagorejského trojúhelníku. Do rovnosti

$$c^2 = a^2 + b^2$$

dosadíme podle předpokladu $c = a + b - 8$. Vypočteme

$$(a + b - 8)^2 = a^2 + b^2.$$

Po umocnění a další jednoduché úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned}ab - 8a - 8b + 32 &= 0 \\(a - 8)(b - 8) &= 32\end{aligned}$$

Protože a, b jsou přirozená čísla ($a < b$), dostaneme rozložením čísla 32 tři možnosti:

$$\begin{aligned}a - 8 &= 1, & b - 8 &= 32, & \text{a tedy } a &= 9, & b &= 40, & c &= 41 \\a - 8 &= 2, & b - 8 &= 16, & \text{a tedy } a &= 10, & b &= 24, & c &= 26 \\a - 8 &= 4, & b - 8 &= 8, & \text{a tedy } a &= 12, & b &= 16, & c &= 20\end{aligned}$$

Existují právě tři pythagorejské trojúhelníky, jejichž přepona je o 8 cm kratší než součet jejich odvěsen.

2. řešení (podle žákyně *Pavly Kozákové* z 2. ZŠ v Milevsku).
Strany každého pythagorejského trojúhelníku můžeme napsat ve tvaru

$$(1) \quad a = 2kln, \quad b = (k^2 - l^2)n, \quad c = (k^2 + l^2)n,$$

kde k, l, n jsou vhodná přirozená čísla (viz věty 2 a 3 na str. 31).
Podle předpokladu platí

$$a + b = c + 8$$

neboli

$$2kln + (k^2 - l^2)n = (k^2 + l^2)n + 8.$$

Po úpravě dostaneme

$$(k - l)ln = 4.$$

Pro $k - l, l$ a n je 6 možností uvedených v prvních 3 sloup-

cích tabulky 1. Z prvních dvou sloupců vypočteme k a pak za k, l, n dosadíme do rovností (1). Tím vypočteme a, b, c .

Tab. 1

$k - l$	l	n	k	a	b	c
4	1	1	5	10	24	26
2	2	1	4	16	12	20
1	4	1	5	40	9	41
2	1	2	3	12	16	20
1	2	2	3	24	10	26
1	1	4	2	16	12	20

V tabulce dostaneme 6 výsledků, ale některé se liší jen výměnou a, b , nebo jsou dokonce stejné. Různé trojúhelníky jsou jen tři, jejich délky jsou:

10, 24, 26 16, 12, 20 40, 9, 41

Řešení úlohy Z8 - III - 4 (str. 36)

Jak se mění poloha šestky při prvním oběhu pásu, ukazuje obrázek 21. Na pás se díváme ve směru šipky, označení je toto:

H = nahoře

L = vlevo

Z = vzadu

D = dole

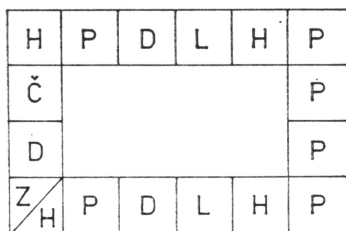
P = vpravo

Č = v čele (vpředu)

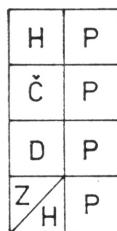
Po ukončení 1. oběhu (po 16 překlopeních) je šestka vzadu.

Podobně zjistíme, že po 2. oběhu bude šestka vlevo a po 3. oběhu opět nahoře. Situace se tedy opakuje po každých třech obězích.

Po 99 obězích bude šestka nahoře. Po stém oběhu — stejně jako po prvním — bude šestka vzadu.



Obr. 21



Obr. 22

Poznámka. Všimněte si, že střídání poloh šestka na výchozím poli daného pásu je stejné jako střídání šestka na výchozím poli A »zkráceného« pásu (obr. 22). To může usnadnit řešení.

Kategorie Z7

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 68 až 77)

Z7 - I - 1

Každý z vnitřních úhlů $\alpha = 64^\circ$, $\beta = 96^\circ$ trojúhelníku ABC je rozdělen polopřímkami s počátky ve vrcholu A nebo B na 160 shodných úhlů. Necht' O je průsečík dvou takových polopřímek s různými počátky. Kolik existuje takových bodů O , pro které je velikost úhlů AOB rovna 22° ? Kolik z nich je takových, že velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku AOB (vyjádřené ve stupních) jsou přirozená čísla?

Z7 - I - 2

Dědeček si vyšel na procházku se svými třemi vnuky. Dědečkův známý se jich zeptal, kolik jim je let.

Pavel: »Jsem mladší než Jakub a je mi více než 4 roky.«

Jakub se přidal: »Jsem o tři roky mladší než Matěj.«

Matěj dodal: »Nám třem je dohromady třikrát méně než dědečkovi, ale s dědečkem je nám dohromady 100 let.«

Kolik je jim let? (Stáří všech je vyjádřeno celými čísly.)

Z7 - I - 3

V rovině jsou dány dvě navzájem kolmé přímky p , q . Zvolte v této rovině 11 bodů tak, aby rovnoběžky s přímkami p , q vedené těmito body rozdělily spolu s přímkami p , q rovinu na a) 26 částí, b) 40 částí, c) 68 částí.

Z7 - I - 4

Jsou dány body A , B . Sestrojte pravidelný šestiúhelník, který má v bodech A , B středy dvou úhlopříček. Vyšetřete všechny možnosti.

Z7 - I - 5

Oplocená obdélníková zahrada s rozměry a metrů a b metrů se má rozdělit na tři stejně velké obdélníkové zahrádky tak, aby bylo třeba postavit co nejméně nového plotu.

Úlohu napřed řešte pro různé konkrétně zvolené hodnoty a , b . Zjistěte a popište, jak je třeba postavit nový plot pro libovolné hodnoty rozměrů a , b . Které případy musíte rozlišit?

Z7 - I - 6

Škola má 800 žáků, z toho 450 chlapců. Z chlapců je 200 modrookých, 250 světlavých, 50 chlapců nemá žádnou z těchto vlastností.

Co je větší: Procento modrookých chlapců mezi světlavými, nebo procento modrookých chlapců mezi všemi žáky?

ÚLOHY II. KOLA

(Řešení na str. 78 až 81)

Z7 - II - 1

Jsou dány body X, Y ; $|XY| = 3$ cm. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$, pro který je bod X středem strany AB , bod Y středem úhlopříčky AE . Porovnejte délku strany AB s délkou úsečky XY .

Z7 - II - 2

V rovině bylo zvoleno několik bodů. Jedním z nich byly sestrojeny dvě navzájem kolmé přímky, ostatními body byly vedeny s těmito kolmicemi rovnoběžky. Přímky, které takto vznikly, rozdělily rovinu na 130 částí, z nich je 88 pravoúhelníků. Jaký nejmenší počet bodů mohl být zvolen? Načrtněte jedno takové řešení.

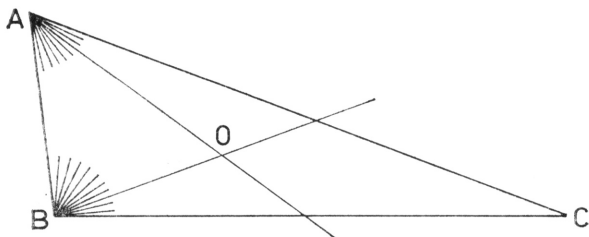
Z7 - II - 3

Sčítáme dvě dvojciferná čísla, která se liší jen pořadím číslic. Dostaneme číslo, které je součinem dvou stejných přirozených čísel. Najděte všechny tyto dvojice.

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z7 - I - 1 (str. 65)

Situace je na obrázku 23.



Obr. 23

Úhly BAO a ABO jsou po řadě

násobky úhlů $\frac{\alpha}{160}$ a $\frac{\beta}{160}$.

$$(1) \quad |\sphericalangle BAO| = m \cdot \frac{64^\circ}{160}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, 159$$

$$(2) \quad |\sphericalangle ABO| = n \cdot \frac{96^\circ}{160}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 159$$

Úhel AOB má velikost 22° . Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku ABO je roven 180° . Proto

$$m \cdot \frac{64}{160} + n \cdot \frac{96}{160} + 22 = 180.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} 2m + 3n &= 790 \\ m &= 395 - 1,5n. \end{aligned}$$

Hledáme přirozená čísla m, n od 1 do 159, která vyhovují této rovnici. Přitom n musí být sudé číslo.

$$\begin{aligned} 1 &\leq m \leq 159 \\ 1 &\leq 395 - 1,5n \leq 159. \end{aligned}$$

Řešením této nerovnice dostaneme

$$157\frac{1}{3} \leq n \leq 262\frac{2}{3}.$$

Protože n musí být nejvýše 159 a navíc sudé číslo, dostáváme pro n jediné řešení:

$$n = 158, \quad m = 158$$

Odtud vypočteme

$$|\sphericalangle BAO| = 63,2^\circ, \quad |\sphericalangle ABO| = 94,8^\circ.$$

Existuje tedy jediný bod O , pro který je velikost úhlu AOB rovna 22° . Přitom velikosti zbývajících vnitřních úhlů trojúhelníku AOB jsou desetinná, ale nikoli přirozená čísla.

Poznámka. Kdybychom připustili v rovnostech (1) a (2) i hodnoty $m = n = 160$, měla by úloha ještě jedno řešení:

$$n = 155, \quad m = 160,$$

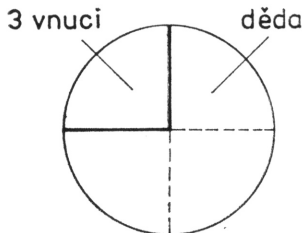
a tedy

$$|\sphericalangle BAO| = 62^\circ, \quad |\sphericalangle ABO| = 96^\circ.$$

V tomto případě má trojúhelník AOB velikosti všech vnitřních úhlů vyjádřeny přirozenými čísly. Vysvětlete sami, proč toto řešení neodpovídá podmínkám úlohy.

Řešení úlohy Z7 - I - 2 (str. 65)

Děda je třikrát starší než všichni tři vnuci dohromady (obr. 24). Protože všem čtyřem je celkem 100 let, musí být dědovi 75 let a vnukům dohromady 25 let.



Obr. 24

Označíme vnuky počátečními písmeny. Platí tedy

$$(3) \quad 4 < P < \mathfrak{J} \quad \mathfrak{J} + 3 = M \quad P + \mathfrak{J} + M = 25.$$

Dosadíme $M = \mathfrak{J} + 3$ do poslední rovnice; dostaneme

$$P + 2\mathfrak{J} + 3 = 25$$

$$P + 2\mathfrak{J} = 22.$$

Odtud je vidět, že P je sudé číslo. Protože je $P > 4$, je $P = 6$ nebo 8 nebo 10 atd. Pro $P = 6$ dostaneme $\mathfrak{J} = 8$, $M = 11$. Pro $P = 8$ dostaneme $\mathfrak{J} = 7$, ale to není možné, neboť $P < \mathfrak{J}$. Proto P nemůže být ani větší než 8.

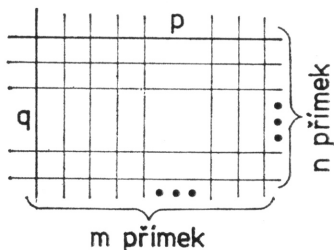
Dostáváme jediný výsledek: Pavlovi je 6 let, Jakubovi 8 let, Matějovi 11 let a dědečkovi 75 let. Zkoušku udělejte sami.

Poznámka. Druhou část řešení je možné najít bez nerovností a rovnic (3) pouhým vyexperimentováním.

Řešení úlohy Z7 - I - 3 (str. 66)

Provedeme rozbor úlohy pomocí obrázku 25. Jestliže je dáno n vodorovných přímek a m svislých přímek, pak tyto přímky rozdělí rovinu na $(m + 1)(n + 1)$ částí. Z nich obdélníků nebo čtverců je $(m - 1)(n - 1)$; ostatní části jsou nekonečné útvary.

Nyní budeme řešit tři zadané případy. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že $m \geq n$ (kdyby tomu tak nebylo, otočíme rovinu například o 90°).

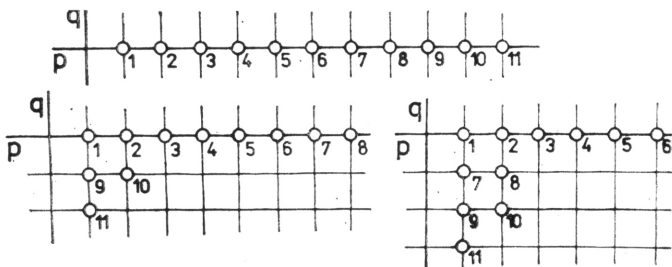


Obr. 25

a) Počet částí je 26. Tedy

$$(m + 1)(n + 1) = 26 = 13 \cdot 2.$$

Jediná možnost je, že $m = 12$, $n = 1$. Na obrázku 26a je znázorněna příslušná síť přímek a jedna z možných voleb 11 bodů.



Obr. 26a, b, c

b) Počet částí je 40. Tedy

$$(m + 1)(n + 1) = 40 = 20 \cdot 2 = 10 \cdot 4 = 8 \cdot 5.$$

Jsou tři možnosti pro síť přímek:

$$\begin{array}{lll} m = 19 & m = 9 & m = 7 \\ n = 1 & n = 3 & n = 4 \end{array}$$

V 1. případě by muselo být aspoň 18 bodů, což není možné. Vyhovují zbylé dvě sítě. Možné rozmístění bodů je na obrázcích 26b, c.

c) Počet částí je 68. Tedy

$$(m + 1)(n + 1) = 68 = 34 \cdot 2 = 17 \cdot 4.$$

Pro síť přímek jsou dvě možnosti:

$$\begin{array}{ll} m = 33 & m = 16 \\ n = 1 & n = 3 \end{array}$$

V prvním případě by bylo třeba aspoň 32 a ve druhém aspoň 15 bodů. Proto pro případ c) (68 částí) nemá úloha řešení.

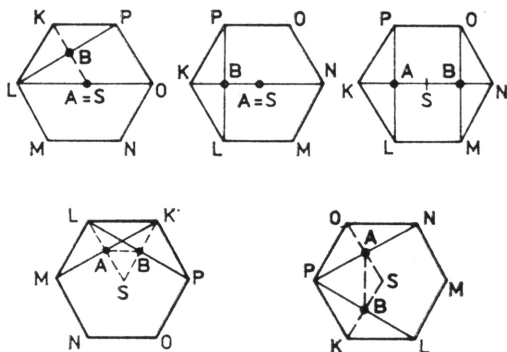
Řešení úlohy Z7 - I - 4 (str. 66)

Rozbor. Pravidelný šestiúhelník má dva typy úhlopříček. Delší, jejichž střed je zároveň středem šestiúhelníku, a kratší, jejichž střed půlí úsečka spojující střed šestiúhelníku s některým vrcholem.

Body A, B leží buď na jedné delší a jedné kratší úhlopříčce (obr. 27a, b), nebo na dvou kratších úhlopříčkách (obr. 27c, d, e). Klíčem k řešení je sestrojení středu S šestiúhelníku. Jsou čtyři možnosti:

(a) střed S je některý z bodů A, B (obr. 27a, b)

- (b) střed S je středem úsečky AB (obr. 27c)
 (c) střed S je vrcholem rovnostranného trojúhelníku ABS (obr. 27d)
 (d) střed S je vrcholem rovnoramenného trojúhelníku ABS , který má při základně AB úhly velikosti 30° (obr. 27e).



Obr. 27a, b, c, d, e

Konstrukce

Sestrojíme střed S šestiúhelníku. Je 5 možností: $S = A$, $S = B$, S je středem úsečky AB , S je třetím vrcholem rovnostranného trojúhelníku se stranou AB , S je třetím vrcholem rovnoramenného trojúhelníku se základnou AB a s úhly při základně velikosti 30° (konstrukce *usu*).

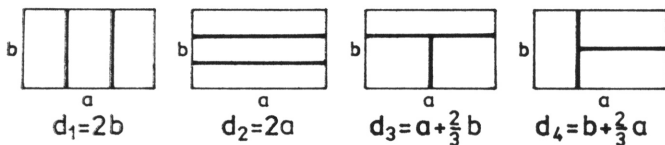
Dále sestrojíme vrchol šestiúhelníku. Sestrojíme ho jako krajní bod úsečky, která má druhý krajní bod v bodě S a střed v bodě A nebo v bodě B .

Další konstrukce je zřejmá, neboť známe střed šestiúhelníku a jeden jeho vrchol.

Úloha má 7 různých řešení. Po jednom řešení dostaneme v případech, kdy střed S je v bodě A nebo v bodě B nebo ve středu úsečky AB . Po dvou řešeních dostaneme v případech, kdy střed S je vrcholem rovnostranného nebo rovno-ramenného trojúhelníku. Tyto dvojice řešení jsou souměrně sdružené podle přímky AB .

Řešení úlohy Z7 - I - 5 (str. 66)

Rozlišíme 4 možná rozdělení znázorněná na obrázcích 28a, b, c, d, kde jsou uvedeny i délky d_1, d_2, d_3, d_4 nových plotů. Předpokládejme $a \geq b$.



Obr. 28a, b, c, d

Potom je $d_1 \leq d_2$ (rovnost jen pro $a = b$). Dále

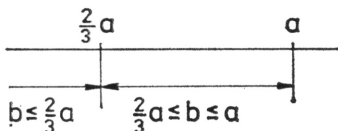
$$d_1 \leq d_4, \text{ právě když } b \leq \frac{2}{3}a$$

$$d_4 \leq d_3, \text{ právě když } b \leq a.$$

Dostáváme výsledek (obr. 29):

$b \leq \frac{2}{3}a$	$\frac{2}{3}a \leq b \leq a$
$d_1 \leq d_4 \leq d_3$	$d_4 \leq d_1 \leq d_2$
$d_1 \leq d_2 \leq d_3$	$d_4 \leq d_3 \leq d_2$

Pro $b \leq \frac{2}{3}a$ je nejkratší délka d_1 a pro $\frac{2}{3}a \leq b \leq a$ je nejkratší délka d_4 .



Obr. 29

Řešení úlohy Z7 - I - 6 (str. 66)

Znamé počty chlapců zapíšeme do tabulky 2.

CHLAPCI

	Vlasy světlé	Vlasy jiné	Celkem
Modré oči			200
Jiné oči		50	
Celkem	250		450

Tab. 2

Nyní doplníme chybějící údaje; výsledek ukazuje tabulka 3.

CHLAPCI

	Vlasy světlé	Vlasy jiné	Celkem
Modré oči	50	150	200
Jiné oči	200	50	250
Celkem	250	200	450

Tab. 3

Z tabulky 3 je vidět, že mezi 250 světlovlasými chlapci je 50 modrookých, tj. 20 %. Mezi 800 žáky je 200 modrookých chlapců, tj. 25 %. V druhém případě je procento větší.

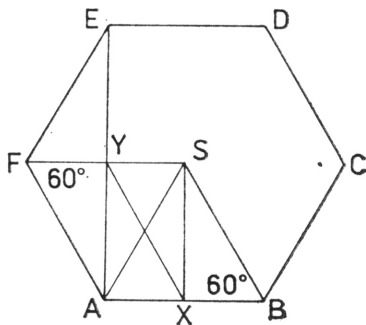
ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řešení úlohy Z7 - II - 1 (str. 67)

Rozbor (obr. 30). Čtyřúhelník $ABSF$ je kosočtverec. Úsečka XY jeho střední příčka, proto je

$$|AB| = |BS| = |XY| = 3 \text{ cm.}$$

Trojúhelník $XY S$ je pravoúhlý (pravý úhel je při vrcholu S). Úhly při vrcholech X, Y mají po řadě velikosti 30° a 60° (v rovnoběžníku $XBSY$ jsou úhly při vrcholech B, Y shodné).



Obr. 30

Konstrukce (obr. 30)

1. X, Y
2. $\triangle XYS$; (*usu*), $|\sphericalangle XYS| = 60^\circ$, $|\sphericalangle YXS| = 30^\circ$; 2 trojúhelníky souměrně sdružené podle přímky XY
3. F ; Y střed FS
4. $ABCDEF$; pravidelný šestiúhelník se středem S a jedním vrcholem F

Úloha má dvě řešení souměrně sdružená podle přímky XY .

Řešení úlohy Z7 - II - 2 (str. 67)

Rozbor. Jestliže sít přímek tvoří m svislých a n vodorovných přímek (obr. 25 na str. 72), rozdělí tyto přímky rovinu na $(m + 1)(n + 1)$ částí, z nichž je $(m - 1)(n - 1)$ pravoúhelníků (obdélníků nebo čtverců).

Tedy

$$(m + 1)(n + 1) = 130$$

$$(m - 1)(n - 1) = 88.$$

Rozložíme číslo 130 na součin dvou přirozených čísel. Vzhledem k druhé rovnici musí být oba činitele aspoň 3. Můžeme předpokládat, že $m \geq n$.

$$130 = 13 \cdot 10 = 26 \cdot 5$$

Jsou dvě možnosti:

$$m + 1 = 13 \quad n + 1 = 10; \quad m + 1 = 26 \quad n + 1 = 5$$

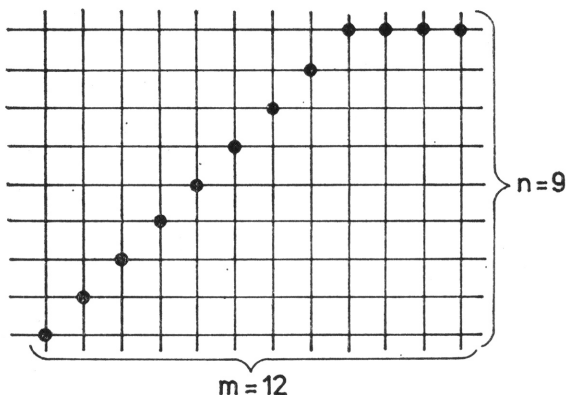
Odtud:

$$m - 1 = 11 \quad n - 1 = 8; \quad m - 1 = 24 \quad n - 1 = 3$$

Vyhovuje jen 1. možnost

$$(m - 1)(n - 1) = 11 \cdot 8 = 88.$$

Na obrázku 31 je vidět, že musíme zvolit nejméně 12 bodů.
(Méně nemůžeme, protože je 12 svislých přímk.)



Obr. 31

Poznámka. Úlohu lze řešit také rozkladem čísla 88. Nevýhodou je nutnost prozkoumat více možností. Úlohu můžeme řešit také tak, že určíme počet nekonečných částí:

$$2m + 2n = 130 - 88$$

Odtud

$$m + n = 21.$$

Další postup jistě najdete sami.

Řešení úlohy Z7 - II - 3 (str. 67)

Daná čísla zapíšeme ve tvaru

$$10x + y \quad \text{a} \quad 10y + x.$$

Sečtením dostaneme

$$(10x + y) + (10y + x) = 11(x + y).$$

Aby číslo $11(x + y)$ bylo součinem dvou stejných čísel, musí být $x + y = 11$ (nezapomeňte, že $x, y \leq 9$). Proto úloze vyhovují 4 dvojice čísel:

$$29, 92 \quad 38, 83 \quad 47, 74 \quad 56, 65$$

Zkoušku udělejte sami.

Kategória Z6

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia na str. 86 až 97)

Z6 - I - 1

Kráľ prijal do služby pastiera na 1 rok. Sľúbil mu za službu 120 grošov a plášť. Pastier však v službe vydržal len 7 mesiacov. Spravodlivý kráľ mu vyplatil za službu 50 grošov a plášť. Akú cenu mal plášť?

Z6 - I - 2

Nech A, B, C, D, E, F sú vrcholy pravidelného šesťuholníka.

- Koľko existuje trojuholníkov s vrcholmi v týchto bodoch?
- Keby sme tieto trojuholníky rozdelili do skupín tak, že v jednej skupine budú trojuholníky s rovnakým obsahom, koľko skupín by vzniklo?

Z6 - I - 3

Deti išli na školský výlet autobusom. Cesta späť im trvala 4-krát dlhšie ako cesta tam. Bolo to preto, že presne v $\frac{3}{4}$

splatočnej cesty sa autobus pokazil a zvyšok cesty prešli deti pešo.

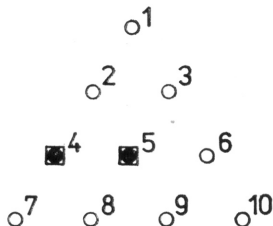
Koľkokrát bol autobus rýchlejší ako deti?

Z6 - I - 4

Koľko trojčiferných čísel deliteľných deviatimi môžeme napísať pomocou cifier 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? Cifry sa môžu opakovať.

Z6 - I - 5

Na obrázku 32 je 10 bodov. Body číslo 4 a 5 sú zafarbené na modro. Zistite, či je možné zafarbiť zvyšných 8 bodov červenou a modrou farbou tak, aby žiadne tri body jednej farby neboli vrcholmi rovnostranného trojuholníka. Zafarbiť treba všetky body.



Obr. 32

Z6 - I - 6

Nájdite tri prirodzené čísla x , y , z , ktoré splňajú obidve nasledujúce podmienky:

a) Súčin $x \cdot y \cdot z = 1\,988$.*)

b) Súčet $x + y + z$ je prvočíslo, a to aj pri čítaní odzadu. Nájdite všetky riešenia.

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenie na str. 98 až 101)

Z6 - II - 1

Koľko existuje trojciferných čísel, ktorých ciferný súčet sa rovná 8?

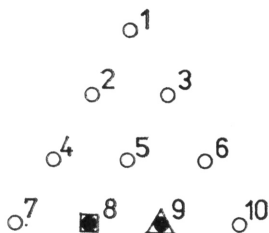
Z6 - II - 2

Kráľ prijal do služby pastiera. Za rok služby mu sľúbil 18 oviec a 4 kozy. Pastier však vydržal v službe iba 10 mesiacov. Spravodlivý kráľ mu dal 18 kôz a 4 ovce. Koľko grošov stojí koza, ak vieme, že ovca stojí 12 grošov?

*) Úloha bola zadaná roku 1988.

Z6 - II - 3

Na obrázku 33 je schéma s 10 bodmi. Bod s číslom 8 je vyfarbený modrou, bod s číslom 9 červenou farbou. Zistite, či je možné vyfarbiť ostatných 8 bodov červenou a modrou farbou tak, aby žiadne tri body tej istej farby neboli vrcholmi rovnostranného trojuholníka. (Vyfarbiť sa majú všetky body.)



Obr. 33

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z6 - I - 1 (str. 82)

I. *spôsob - úvahou*. Kráľ slúbil pastierovi dať za rok služby 120 grošov a plášť. Teda za 7 mesiacov mal pastier dostať $\frac{7}{12}$ plášťa a $\frac{7}{12}$ zo 120 (= 70) grošov. Avšak dostal celý plášť a 50 grošov. Teda dostal o $\frac{5}{12}$ plášťa viac a o 20 grošov menej. Ak bol kráľ spravodlivý, tak $\frac{5}{12}$ plášťa muselo stať práve 20 grošov.

Keď $\frac{5}{12}$ plášťa stojí 20 grošov, $\frac{1}{12}$ musí stať 4 groše a celý plášť (to je $\frac{12}{12}$) musí stať $12 \cdot 4 = 48$ grošov.

II. *spôsob - rovnicou*. Označme cenu plášťa p grošov.

Za rok mal pastier dostať..... $120 + p$

Teda za 7 mesiacov mal dostať $\frac{7}{12}(120 + p)$

Ale za 7 mesiacov dostal $50 + p$

Z toho

$$\frac{7}{12}(120 + p) = 50 + p \quad | \cdot 12$$

$$840 + 7p = 600 + 12p$$

$$240 = 5p$$

$$p = 48$$

Skúška

Za rok mal dostať $48 + 120 = 168$ grošov.

Teda za 7 mesiacov mal dostať .. $\frac{7}{12}$ zo 168 = 98 grošov.

Pastier dostal $48 + 50 = 98$ grošov.

Odpoveď

Plášť stál 48 grošov.

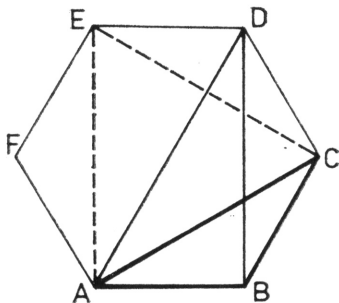
Pomocné úlohy k úlohe Z6 - I - 1

1. Dvaja robotníci dostali za dokončenú prácu spolu 2 010 Kčs. Prvý robotník na nej odpracoval 21 dní a druhý len 15 dní. Denná mzda prvého robotníka je o 10 Kčs vyššia ako denná mzda druhého. Aká je denná mzda každého z nich? (60 Kčs, 50 Kčs.)

2. Za päť kožených a tri koženkové aktovky zaplatili spolu 1 800 Kčs. Koľko stála kožená aktovka, ak viete, že cena koženkovej je tretina ceny koženej aktovky? (300 Kčs, 100 Kčs.)

Riešenie úlohy Z6 - I - 2 (str. 82)

Nájďme najskôr, aké typy trojuholníkov sa vyskytujú. Na obrázku 34 sú vyznačené tri rôzne druhy trojuholníka s vrcholmi v bodoch A, B, C, D, E, F .



Obr. 34

- I. typ sú trojuholníky, ktorých dve strany tvoria susedné strany šesťuholníka.
- II. typ sú trojuholníky, ktorých jedna strana je strana šesťuholníka a druhá strana je najdlhšia uhlopriečka (priemer) šesťuholníka.
- III. typ sú trojuholníky, ktorých strany sú kratšie uhlopriečky šesťuholníka (ich vrcholy sú »na preskáčku« po obvo-
de šesťuholníka).

Hľadáme trojuholníky I. typu. Uvažujme stranu šesťuholníka a k nej prilahlú. Dávame pozor, aby sme niektorý trojuholník nezarátali viackrát a aby sme iný nezabudli. Toho sa vyvarujeme, ak pôjdeme stále proti smeru hodinových ručičiek.

Teda sú to trojuholníky ABC , BCD , CDE , DEF , EFA , FAB .

Hľadáme teraz trojuholníky II. typu. Zvolíme stranu šesťuholníka a k nej priradíme priemer (ku každej strane sú dve možnosti).

Teda sú to trojuholníky ABD , ABE , BCE , BCF , CDF , CDA , DEA , DEB , EFB , EFC , FAC , FAD .

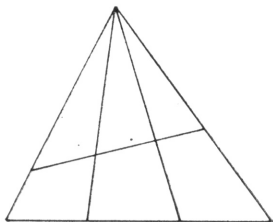
Na koniec trojuholníky III. typu. Ak uvážime, že majú vrcholy »na preskáčku«, tak sú to len trojuholníky ACE a BDF .

Odpoveď

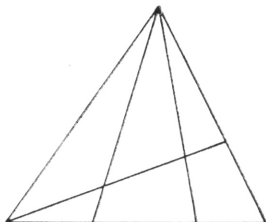
- Takých trojuholníkov existuje spolu $6 + 12 + 2 = 20$.
- Vzniknú tri skupiny trojuholníkov.

Pomocné úlohy k úlohe Z6 - I - 2

Vypíšte všetky trojuholníky z obrázku 35a. Urobte to isté pre trojuholníky z obrázku 35b. (a) 12 trojuholníkov, b) 15 trojuholníkov.)



Obr. 35a



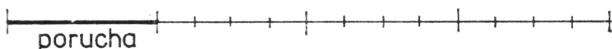
Obr. 35b

Riešenie úlohy Z6 - I - 3 (str. 82)

I. *spôsob - graficky.* Na obrázku 36 je znázornený čas jazdy autobusom jedným smerom hrubo vyznačenou úsečkou.

Autobus sa pokazil v $\frac{3}{4}$ spiatočnej cesty, teda v $\frac{3}{4}$ času, ktorý mali vyhradený na celú spiatočnú cestu, ak by bolo všetko v poriadku. Predpokladáme, že cesta späť by trvala rovnako ako cesta tam. Čas poruchy je vyznačený na obrázku 36.

Cesta späť trvala štyrikrát dlhšie ako cesta tam, teda čas spiatočnej cesty (ktorý je vyznačený celý na obrázku 36)



Obr. 36

je štyrikrát dlhší ako čas cesty vyznačený na obrázku hrubo.

Ak si dĺžku času cesty autobusom rozdelíme na štvrtiny, tak z obrázku ľahko vyčítame, že deti šli ešte 13 takých časových úsekov. Autobus by to prešiel (ak by nebol pokazený) za jeden taký časový úsek. Teda autobus išiel 13-krát rýchlejšie ako deti.

II. *spôsob - fyzikálnou úvahou.* Označme si dĺžku cesty tam (teda aj späť) s . Autobus ide rýchlosťou v_a , deti rýchlosťou v_d . Označme čas trvania cesty tam t . Potom pre dĺžku cesty tam platí

$$s = v_a \cdot t.$$

Cestou späť autobus za čas $\frac{3}{4}t$ prešiel dráhu $\frac{3}{4}t \cdot v_a$. Cesta späť trvala štyrikrát dlhšie, teda čas $4t$, z toho deti šli peši počas $4t - \frac{3}{4}t = \frac{13}{4}t$. Za ten čas prešli dráhu $\frac{13}{4}t \cdot v_d$. Spolu s autobusom cestou späť prešli dráhu

$$s = \frac{3}{4}t \cdot v_a + \frac{13}{4}t \cdot v_d.$$

Porovnaním dĺžky dráhy tam a späť dostávame:

$$t \cdot v_a = \frac{3}{4}t \cdot v_a + \frac{13}{4}t \cdot v_d \quad |:t| \cdot 4$$

$$4v_a = 3v_a + 13v_d$$

$$v_a = 13v_d$$

Autobus bol 13-krát rýchlejší ako deti.

III. *spôsob - tabuľkou*. Označenie zvolíme rovnako ako pri II. spôsobe. Úvahy však zaznamenáme do tabuľky.

	Dráha	Rýchlosť	Čas	Rovnice
Cesta tam	s	v_a	t	$s = v_a \cdot t$
Cesta späť (autobus)	$\frac{3}{4}s$	v_a	$\frac{3}{4}t$	$\frac{3}{4}s = v_a \cdot \frac{3}{4}t$
Deti	$\frac{1}{4}s$	v_d	$4t - \frac{3}{4}t$	$\frac{1}{4}s = v_d \left(4t - \frac{3}{4}t\right)$

Odtiaľ potom

$$\begin{array}{rcl} s & = & t \cdot v_a \\ s & = & 13t \cdot v_d \\ \hline t \cdot v_a & = & 13t \cdot v_d \end{array}$$

Čiže

$$v_a = 13v_d.$$

Autobus bol 13-krát rýchlejší ako deti.

Pomocné úlohy k úlohe Z6 - I - 3

1. Chodec išiel z jednej obce do druhej peši 3 hodiny a povozom 2 hodiny. Na spiatočnej ceste sa zviezol povozom 3 hodiny a peši išiel 1 hodinu. Koľkokrát rýchlejšie išiel povozom ako peši? (Dvakrát.)

2. Chlapec išiel z mesta do susednej dediny na bicykli rýchlosťou 13,2 km/h. Cestou sa mu bicykel pokazil, takže sa musel vrátiť peši rýchlosťou 4,8 km/h. Cesta tam aj späť mu trvala 2,5 hodiny. Ako ďaleko prešiel na bicykli? (8,8 km)

Riešenie úlohy Z6 - I - 4 (str. 83)

Podľa kritéria deliteľnosti deviatimi je číslo deliteľné deviatimi práve vtedy, ak je deliteľný deviatimi jeho ciferný súčet. Ciferné súčty všetkých trojciferných čísel zo zadania úlohy sú prirodzené čísla od 3 (ciferný súčet čísla 111) po 21 (ciferný súčet čísla 777). Medzi nimi sú len čísla 9, 18 deliteľné deviatimi. Určme teda všetky možné rozklady čísel

9 a 18 na tri sčítance (samozrejme len použitím 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Z rozkladu potom určíme hľadané trojčiferné čísla. Prehľadne si to zachytíme v tabuľke:

Rozklad 9	Hľadané čísla	Počet
$1 + 1 + 7$	117, 171, 711	3
$1 + 2 + 6$	126, 162, 216, 261, 612, 621	6
$1 + 3 + 5$	135, 153, 315, 351, 513, 531	6
$1 + 4 + 4$	144, 414, 441	3
$2 + 2 + 5$	225, 252, 522	3
$2 + 3 + 4$	234, 243, 324, 342, 423, 432	6
$3 + 3 + 3$	333	1
Rozklad 18		
$7 + 7 + 4$	774, 747, 477	3
$7 + 6 + 5$	765, 756, 675, 657, 576, 567	6
$6 + 6 + 6$	666	1

Spolu 38 trojčiferných čísel vyhovujúcich podmienkam úlohy.

Poznámka. Počet trojčiferných čísel určených trojicou čísel pri danom rozklade závisí len od toho, či sú tieto čísla navzájom rôzne, alebo nie.

Ak sú všetky cifry navzájom rôzne a žiadna z nich nie 0, potom na prvé miesto trojciferného čísla môžem vybrať z 3 číslic, na druhé miesto už len zo zvyšných 2 číslic a na posledné, už len tú číslicu, čo mi zostane, t. j. 1 číslicu. Teda spolu $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ rôznych trojciferných čísel.

Ak sú v danom rozklade dve čísla rovnaké, tak tá »iná« cifra môže byť na prvom, alebo druhom, alebo treťom mieste hľadaného trojciferného čísla. Teda spolu 3 možnosti.

Ak sú všetky tri cifry rovnaké, tak je len jedna možnosť zápisu trojciferného čísla pomocou nich.

Pri riešení úlohy nie je nutné vypisovať všetky možnosti, nakoľko úloha vyžaduje len počet možností. Teda 2. stĺpec tabuľky je vlastne zbytočný.

Pomocné úlohy k úlohe Z6 - I - 4

1. Rozložte číslo 12 na súčet troch sčítancov. Nájdite všetky možnosti.

2. Koľko rôznych trojciferných čísel možno zapísať pomocou cifier 1, 1, 2 a koľko pomocou cifier 1, 2, 3, 4, ak každú z napísaných cifier môžete použiť práve raz? (3, 24)

Riešenie úlohy Z6 - I - 5 (str. 83)

Uvážme, aké možnosti na vyfarbenie máme, ak je zo zadania určená modrá farba bodov 4, 5. Z rovnostranných trojuholníkov 452 a 458 (obr. 37), aby ich vrcholy boli rôznej farby, je určená farba vrcholov 2, 8 — červená.*) Ak uvážime rovno-

*) Na obrázku 37 je červená farba značená trojuholníkom, modrá štvorčekom.

stranný trojuholník 286, ktorý má dva vrcholy 2, 8 červené, tak jeho vrchol 6 musí byť modrý. Z rovnostranného trojuholníka 563 je určené, že vrchol 3 je červený. Uvážme teraz vrchol 1. Vzhľadom na rovnostranný trojuholník 123 by mal byť modrý, ale vzhľadom na trojuholník 146 by mal byť červený. Modrý aj červený súčasne byť nemôže. Takže body na obrázku 32 (str. 83) nemožno vyfarbiť tak, aby boli splnené požiadavky úlohy.

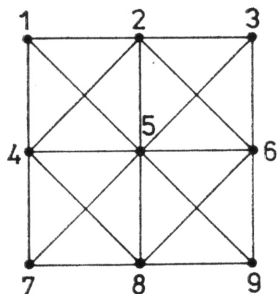


Obr. 37

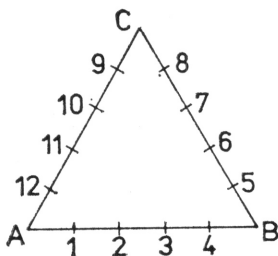
Pomocné úlohy k úlohe Z6 - I - 5

1. Body 1, 2, ..., 9 na obrázku 38 vyfarbite na modro a červeno tak, aby žiadne štyri body vyfarbené rovnakou farbou netvorili vrcholy pravouholníka. Každý bod má byť vyfarbený práve jednou farbou.

2. Trojuholník na obrázku 39 je rovnostranný. Body 1, 2, ..., 12 delia jeho strany na rovnako dlhé úsečky. Nájdite všetky rovnostranné trojuholníky určené bodmi $A, B, C, 1, 2, \dots, 12$.



Obr. 38



Obr. 39

Riešenie úlohy Z6 - I - 6 (str. 84)

Uvažujme najskôr podmienku a). To znamená hľadáme všetky trojice x, y, z , aby súčin $x \cdot y \cdot z = 1\,988$. K tomu využijeme rozklad čísla 1 988 na prvočinitele. $1\,988 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71$. Z neho teraz určíme všetky delitele čísla 1 988. Sú to: 1, 2, 4, 7, 14, 28, 71, 142, 284, 497, 994, 1 988. Hľadáme rozklad na tri činitele. Zvolíme si prvého, ako ľubovoľného deliteľa čísla 1 988 a ostatné si dourčíme z deliteľov tak, aby súčin všetkých troch bol 1 988. Aby sa nám nestalo, že niektoré trojice sa budú opakovať, budeme postupovať tak, že v súčine každé ďalšie číslo môže byť len väčšie, nanajvýš rovné predchádzajúcemu. Začneme najmenším a postupne budeme prvého činiteľa zväčšovať. Dbáme na to, aby sme na nič nezabudli.

Takto nájdené možnosti sú uvedené v prvom stĺpci tabuľky. V ďalších stĺpcoch tabuľky uvažujeme o podmienke b).

Rozklad	Ciferný súčet	Cif. súčet odzadu	Sú obe čísla prvočíslami?
1.1.1988	1 990	0 991	nie (1 990)*)
1.2.994	997	799	nie (799 = 17.47)
1.4.497	502	205	nie (502)
1.7.284	292	292	nie (292)
1.14.142	157	751	áno
1.28.71	100	001	nie (100)
2.2.497	501	105	nie (105)
2.7.142	151	151	áno
2.14.71	87	78	nie (78)
4.7.71	82	28	nie (82)

(V zátvorke je uvedené jedno z dvojice čísel, ktoré nevyhovuje podmienke prvočíselnosti.)

Až na poradie sú len dve možnosti trojíc vyhovujúce podmienkam úlohy. Sú to: 1, 14, 142 a 2, 7, 142.

Pomocné úlohy k úlohe Z6 - I - 6

1. Nájdite prvočíselný rozklad čísel 100 a 120 ($2^2 \cdot 5^2$, $2^3 \cdot 3 \cdot 5$).

2. Nájdite všetky delitele čísel 100 a 120. (9 deliteľov, 16 deliteľov)

*) Overte sami v tabulke prvočísel.

RIEŠENIE ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z6 - II - 1 (str. 84)

Úlohu vyriešime vymenovaním všetkých možností. Vypíšeme si najskôr všetky možné súčtové rozklady čísla 8 (1. stĺpec). K nim vypíšeme možné zápisy trojciferných čísel. Číslo 0 nemôže byť na začiatku.

$8 = 8 + 0 + 0$	800	1 možnosť
$= 7 + 1 + 0$	710, 701, 170, 107	4 možnosti
$= 6 + 2 + 0$	620, 602, 260, 206	4 možnosti
$= 6 + 1 + 1$	611, 161, 116	3 možnosti
$= 5 + 3 + 0$	530, 503, 350, 305	4 možnosti
$= 5 + 2 + 1$	521, 512, 251, 215, 152, 125	6 možností
$= 4 + 4 + 0$	440, 404	2 možnosti
$= 4 + 3 + 1$	431, 413, 341, 314, 143, 134	6 možností
$= 4 + 2 + 2$	422, 242, 224	3 možnosti
$= 3 + 3 + 2$	332, 323, 233	3 možnosti

Existuje 36 takých trojciferných čísel.

Poznámka. Nakoľko otázka bola na počet, úlohu možno riešiť i bez vymenúvania všetkých možností, v zmysle úvahy v poznámke k úlohe 6 - I - 4 v jej riešení (str. 93).

Riešenie úlohy Z6 - II - 2 (str. 84)

I. *spôsob - úvahou*. Pastier mal za rok služby dostať 18 oviec a 4 kozy. Dostal 4 ovce a 18 kôz, pretože si odslúžil len 10 me-

siacov, čo je $\frac{10}{12}$ roku. Teda podľa spravodlivosti mal dostať

$\frac{10}{12}$ z 18 oviec, čo je 15 oviec, a $\frac{10}{12}$ zo 4 kôz, čo je $\frac{10}{3}$ kozy.

Dostal však len 4 ovce, čo je o 11 oviec menej, avšak 18 kôz,

čo je o $\frac{44}{3}$ viac, ako mal dostať. Ak to bolo spravodlivé, tak

musí byť 11 oviec za toľko ako $\frac{44}{3}$ kozy. Takže trojnásobné

množstvo 33 oviec musí byť za toľko ako 44 kôz. Z toho nám vychádza, že 3 ovce sú rovné 4 kozám. Takže ak ovca stojí 12 grošov, tak 3 ovce stoja $12 \cdot 3 = 36$ grošov, čo je toľko, ako stoja 4 kozy. Teda 1 koza stojí $36 : 4 = 9$ grošov.

II. *spôsob - rovnicou*. Nech koza stojí k grošov. Potom pastier mal za rok dostať za ovce ... 18.12 grošov

za kozy ... $4 \cdot k$ grošov

spolu $18 \cdot 12 + 4 \cdot k$ grošov

za 10 mesiacov mal dostať $\frac{10}{12} \cdot (18 \cdot 12 + 4k) =$

$$= 180 + \frac{10k}{3} \text{ grošov}$$

za 10 mesiacov dostal za ovce ... $4 \cdot 12 = 48$ grošov

za kozy ... $18 \cdot k$ grošov

spolu $48 + 18 \cdot k$ grošov

Ak bol kráľ spravodlivý, tak musí byť rovnosť medzi tým, čo mal pastier dostať a čo dostal. Teda:

$$180 + \frac{10}{3}k = 48 + 18k \quad | \cdot 3$$

$$540 + 10k = 144 + 54k$$

$$396 = 44k$$

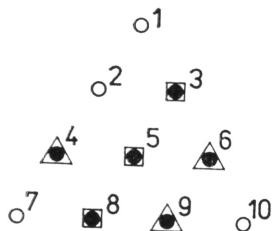
$$k = 9$$

Jedna koza stojí 9 grošov.

Skúšku urobte sami.

Riešenie úlohy Z6 - II - 3 (str. 85)

Uvažujme bod 5. Ak ho vyfarbíme modrou, tak bod 4 (obr. 40) musí byť červený (z trojuholníka 4 8 5), bod 3 musí byť modrý (z trojuholníka 4 9 3), potom bod 6 musí byť červený (z trojuholníka 3 5 6). Ale potom bod 10 by musel byť zároveň modrý (z trojuholníka 9 10 6) aj červený (z trojuholníka 8 3 10) a to nemôže byť.



Obr. 40

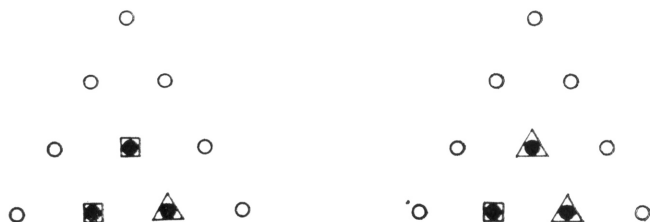


Obr. 41

Keď však vyfarbíme bod 5 červenou (obr. 41), potom bod 6 musí byť modrý (z trojuholníka 5 9 6), potom bod 2 musí byť červený (z trojuholníka 2 8 6), ale potom bod 4 musí byť modrý (z trojuholníka 4 5 2). Avšak potom bod 7 by musel byť zároveň aj modrý (z trojuholníka 7 2 9) aj červený (z trojuholníka 7 8 4), čo však nemôže byť.

Bod 5 však iný ako modrý, alebo červený nemôže byť, teda zvyšné body nemožno vyfarbiť tak, aby boli splnené podmienky úlohy.

Poznámka. Všimnite si, že úvaha pre červený bod 5 je »taká istá« ako pre modrý bod 5. Vlastne sme ju ani nemuseli robiť, stačilo si všimnúť symetriu (obr. 42).



Obr. 42

Kategória Z5

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia na str. 107 až 124)

Z5 - I - 1

V zápise

$$\begin{array}{r} 9\ 6\ 5 \\ 6\ 7\ 4 \\ 8\ 6\ 6 \\ 7\ 9\ 7 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

nahradte niektoré číslice jednotkou tak, aby súčet bol správny.
(Rovnaké číslice nemusia byť nahradené rovnako.)

Z5 - I - 2

Koľko pravouholníkov je na obrázku 43? Koľko z nich obsahuje pole C2? Ktorých je viac, tých čo obsahujú pole C2, alebo tých, čo obsahujú pole B3?

	1	2	3	4	5	6
A						
B						
C						
D						

Obr. 43

Z5 - I - 3

Máme 100 kociek $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$. Koľko rôznych kvádrov z nich možno poskladať, ak musíme vždy použiť všetky kocky?

Z5 - I - 4

Na istom ostrove je 7 miest. Spojári mali pospájať dvojice miest telefónnymi káblami tak, aby sa z každého mesta dalo telefonovať do všetkých ostatných. (Ak sa dá telefonovať z A do B, z B do C, možno telefonovať aj z A do C.) Spojári položili 15 káblov. Po nejakom čase prišla reklamácia, že úlohu nesplnili. Isté dve mestá nemôžu nadviazať spojenie. Je to možné? Svoju odpoveď zdôvodnite.

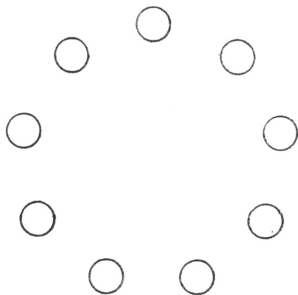
Z5 - I - 5

Súrodenci Adam, Betka, Cyril a Dana zdedili záhradu tvaru štvorca $100\text{ m} \times 100\text{ m}$. V záhrade je studňa. Záhradu

si rozdelili štyrmi priamymi plotmi, ktoré viedli vždy z rohu záhrady po studňu. Adam pritom dostal 4-krát väčšiu časť ako Dana, Betka 3-krát väčšiu ako Dana a Cyril 2-krát väčšiu ako Dana. Nakreslite polohu studne v štvorcovej záhrade. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Z5 - I - 6

Napíšte čísla 1, 2, ..., 9 do kruhu tak, aby žiadne dve susedné nemali súčet deliteľný 3, 5, 7 (v českej verzii 3, 4, 7). Nájdite jedno riešenie (obr. 44).



Obr. 44

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenia na str. 125 až 128)

Z5 - II - 1

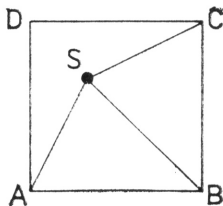
V zápise

$$\begin{array}{r} 6\ 6\ 5 \\ 7\ 5\ 4 \\ 7\ 8\ 6 \\ 4\ 9\ 8 \\ \hline 2\ 2\ 2\ 2 \end{array}$$

nahradte niektoré číslice číslicou 2 tak, aby bol zápis súčtu správny. Nájdite všetky riešenia.

Z5 - II - 2

Taja súrodenci Janka, Marienka a Anička zdedili záhradu tvaru štvorca o strane dlhej 90 m. V záhrade je studňa. Záhradu si rozdelili tromi priamymi plotmi, ktoré viedli



Obr. 45

z troch rohov záhrady priamo ku studni (obr. 45). Všetky tri dostali rovnako veľké záhrady. Zistite, koľko metrov je studňa vzdialená od jednotlivých strán štvorca.

Z5 - II - 3

Vo výraze $128 - 64 + 32 - 16 + 8$ doplňte zátvorky tak, aby ste po vypočítaní dostali a) najväčší výsledok, b) najmenší výsledok.

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z5 - I - 1 (str. 102)

Najskôr uvažujme čísllice na mieste jednotiek. Ich súčtom musí byť číslo, ktoré má na mieste jednotiek číslicu 1. Teda 1, 11, 21, 31, ... Súčet čísel na mieste jednotiek je $5 + 4 + 6 + 7 = 22$, teda musíme niektoré z nich nahradiť jednotkou tak, aby sme dostali súčet buď 21, alebo 11. Súčet 1, 31 a viac nemôžeme samozrejme dostať, pretože najmenší možný súčet je 4 (pri nahradení všetkých číslic jednotkou) a najväčší 22 (ak nenahradíme žiadnu číslicu jednotkou). Ak nahradíme jednotkou číslo 5, súčet sa zmenší o 4, ak číslo 4, súčet sa zmenší o 3, nahradením čísla 6 sa súčet zmenší o 5 a nahradením čísla 7 sa súčet zmenší o 6. Takže súčet môžeme zmenšiť o 4, 3, 5, 6, alebo ľubovoľnú kombináciu súčtu týchto čísel.

Aby na mieste jednotiek bol súčet 21, museli by sme pôvodný súčet 22 zmenšiť o 1. To, ako vidíme, nejde. Zostáva nám len úprava na súčet 11. To však musíme pôvodný súčet 22 zmenšiť o 11. Súčet 11 z čísel 4, 3, 5, 6, o ktoré môžeme zmenšovať, môžeme dosiahnuť len jediným spôsobom $5 + 6$. Teda na mieste jednotiek musíme číslicou 1 nahradiť číslice 6, 7. Zápis súčtu potom bude vyzeráť takto:

$$\begin{array}{r}
 9\ 6\ 5 \\
 6\ 7\ 4 \\
 8\ 6\ 1 \\
 7\ 9\ 1 \\
 \hline
 \dots\ 1
 \end{array}
 \quad \text{a »jedna zostala«.}$$

Prejdime na miesto desiatok. Do súčtu desiatok nesmieme zabudnúť na 1 desiatku z miesta jednotiek. Súčet na mieste desiatok je teda $6 + 7 + 6 + 9 + 1 = 29$. Musíme ho znížiť na 21, prípadne na 11. To môžeme urobiť len zámenou čísel 6, 7, 6, 9 na číslo 1, teda môžeme zmenšovať o 5, 6, 5, 8, prípadne o ľubovoľnú kombináciu súčtu týchto čísel.

Ak chceme číslo 29 znížiť na 21, musíme ho znížiť o 8. To sa dá jedine náhradou číslice 9 na číslicu 1. Ak by sme chceli číslo 29 znížiť na 11, museli by sme ho znížiť o 18 a to sa dá jedine náhradou číslic 6, 6, 9 za číslice 1. Sú teda zatiaľ dve možnosti:

$$\begin{array}{r}
 9\ 6\ 5 \\
 6\ 7\ 4 \\
 8\ 6\ 1 \\
 7\ 1\ 1 \\
 \hline
 \dots\ 1\ 1
 \end{array}
 \quad \text{a »dve zostali«}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 9\ 1\ 5 \\
 6\ 7\ 4 \\
 8\ 1\ 1 \\
 7\ 1\ 1 \\
 \hline
 \dots\ 1\ 1
 \end{array}
 \quad \text{a »jedna zostala«}$$

Uvážme teraz prvú z týchto možností a uvažujme čísla na mieste stoviek. Ich súčet, pri ktorom nezabúdame na 2 stovky z miesta desiatok, je $9 + 6 + 8 + 7 + 2 = 32$. Tento súčet 32 môžeme zmenšiť o 8, 5, 7, 6, prípadne o ľubovoľnú kombináciu súčtu týchto čísel. Podľa podmienky

úlohy musíme ho znížiť na 11, teda musíme číslo 32 znížiť o číslo 21. Číslo 21 dostaneme z našich možností jedine ako súčet $8 + 7 + 6$. Teda musíme nahradiť číslice 9, 8, 7 číslicou 1.

Uvážme druhú z možností. Uvažujeme číslice na mieste stoviek. Ich súčet s prirátaním jednej stovky z miesta desiatok je $9 + 6 + 8 + 7 + 1 = 31$. Výsledný súčet musí byť 11. Teda číslo 31 musíme zmenšiť o 20. Máme možnosť znížiť o 8, 5, 7, 6, prípadne o ľubovoľnú kombináciu súčtu týchto čísel. Jediná možnosť je $8 + 5 + 7$. Teda musíme nahradiť číslice 9, 6, 8 číslicou 1.

Zhrnutím predchádzajúcich úvah dochádzame k odpovedi: Úloha má práve dve riešenia:

1 6 5	1 1 5
6 7 4	1 7 4
1 6 1	1 1 1
1 1 1	7 1 1
1 1 1 1	1 1 1 1

Riešenie úlohy Z5 - I - 2 (str. 102)

I. *spôsob - hľadaním všetkých možností.* Hľadáme najskôr, koľko pravouholníkov je v obrázku 43 (str. 103). Uvažujme všetky typy pravouholníkov, ktoré môžeme nájsť v obrázku. Typ 1×1 (štvorček). Takých štvorčekov je tam $4 \cdot 6 = 24$. Typ 2×1 . Môžeme ho umiestniť »nastojato« alebo »naležato«. Uvažujme najskôr »nastojato«. Horné políčko môže potom byť len na miestach označených

na obrázku 46a krížikom. To je $3 \cdot 6 = 18$ možností.

Uvažujme teraz »naležato«. Potom ľavé políčko môže byť len na miestach označených krížikom (obr. 46b). To je $4 \cdot 5 = 20$ možností.

Spolu pre tento typ máme $18 + 20 = 38$ možností.

	1	2	3	4	5	6
A	X	X	X	X	X	X
B	X	X	X	X	X	X
C	X	X	X	X	X	X
D						

Obr. 46a

X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	

Obr. 46b

Typ 3×1 . Podobnou úvahou ako pre typ 2×1 .

»Nastojato« je $2 \cdot 6 = 12$ možností.

»Naležato« je $4 \cdot 4 = 16$ možností.

Spolu $12 + 16 = 28$ možností.

Typ 4×1 . »Nastojato« je $1 \cdot 6 = 6$ možností.

»Naležato« je $4 \cdot 3 = 12$ možností.

Spolu $6 + 12 = 18$ možností.

Typ 5×1 . »Nastojato« sa už nezmesť.

»Naležato« je $4 \cdot 2 = 8$ možností.

Typ 6×1 . »Naležato« sú $4 \cdot 1 = 4$ možnosti.

Typ 7×1 sa už nijako nezmesť.

Uvažujme teraz pravouholníky »šírky« 2. Typ 1×2 sme už uvažovali.

Typ 2×2 . Uvažujme ľavé horné políčko. To môže byť len na miestach vyznačených krížikom (obr. 47). To je $3.5 = 15$ možností.

X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	

Obr. 47

Typ 3×2 . »Nastojato«: Ak označíme krížikom miesta, kde môže byť ľavé horné políčko, tak vidíme (obr. 48a), že je $2.5 = 10$ možností.

»Naležato«: Ak označíme krížikom miesta, kde môže byť ľavé horné políčko (obr. 48b), tak vidíme, že je $3.4 = 12$ možností.

X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	

Obr. 48a

X	X	X	X		
X	X	X	X		
X	X	X	X		

Obr. 48b

Spolu pre tento typ teda je $10 + 12 = 22$ možností.

Ďalšie výsledky dostávame podobnou úvahou.

Typ 4×2 . »Nastojato« je $1.5 = 5$ možností.

»Naležato« je $3.3 = 9$ možností.

Spolu $5 + 9 = 14$ možností.

Typ 5×2 . »Nastojato« sa nezmestí.

»Naležato« je $3.2 = 6$ možností.

Typ 6×2 . »Naležato« sú $3.1 = 3$ možnosti.

Podobne pre pravouholníky »šírky« 3.

Typ 3×3 má $2.4 = 8$ možností.

Typ 4×3 . »Nastojato« sú $1.4 = 4$ možnosti.

»Naležato« je $2.3 = 6$ možností.

Spolu je $4 + 6 = 10$ možností.

Typ 5×3 . »Nastojato« sa už nezmestí.

»Naležato« sú $2.2 = 4$ možnosti.

Typ 6×3 . »Naležato« sú $2.1 = 2$ možnosti.

Pre »šírku« 3 sme vyčerpali všetky možnosti. Uvažujme poslednú »šírku« 4. »Širšie« typy už nevyhovujú.

Typ 4×4 má $1.3 = 3$ možnosti.

Typ 5×4 má $1.2 = 2$ možnosti.

Typ 6×4 má $1.1 = 1$ možnosť.

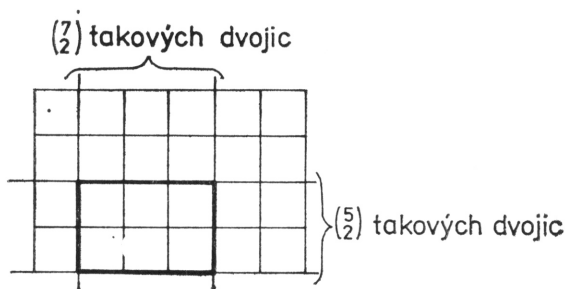
Na obrázku 43 (str. 103) je teda spolu $24 + 38 + 28 + 18 + 8 + 4 + 15 + 22 + 14 + 6 + 3 + 8 + 10 + 4 + 2 + 3 + 2 + 1 = 210$ pravouholníkov.

Podobne, podľa typov, môžeme zistiť, koľko pravouholníkov daného typu obsahuje políčko B3, prípadne C2. Výsledky sú v tabuľke.

Typ	Obsahuje B3	Obsahuje C2	Typ	Obsahuje B3	Obsahuje C2
1 × 1	1	1	2 × 5	4	4
1 × 2	4	4	2 × 6	2	2
1 × 3	5	4	3 × 3	6	4
1 × 4	4	3	3 × 4	9	6
1 × 5	2	2	3 × 5	4	4
1 × 6	1	1	3 × 6	2	2
2 × 2	4	4	4 × 4	3	2
2 × 3	10	8	4 × 5	2	2
2 × 4	8	6	4 × 6	1	1

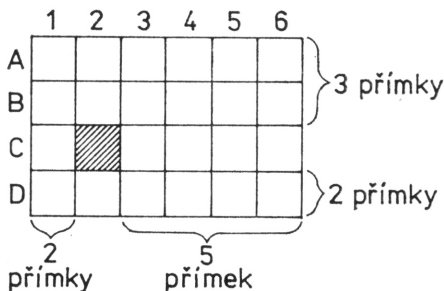
Pravouholníkov obsahujúcich pole C2 je 60, pravouholníkov obsahujúcich pole B3 je 72. Viac je pravouholníkov, ktoré obsahujú pole B3.

II. *spôsob - kombinatorickou úvahou.* Každý pravouholník je jednoznačne určený dvojicou zvislých a dvojicou vodorovných priamok, ktoré vzniknú predĺžením strán pravouholníkov. Vodorovných dvojíc priamok je $\binom{5}{2} = 10$, zvislých dvojíc je $\binom{7}{2} = 21$. (Obr. 49.) Teda všetkých pravouholníkov je $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} = 10 \cdot 21 = 210$.



Obr. 49

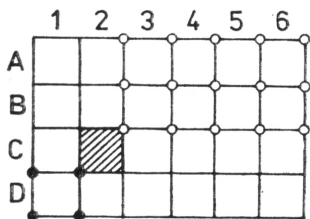
Teraz určíme pravouhelníky, které neobsahují pole C2. Levú zvislú stranu môžeme zvoliť na 2 priamkach, pravú na 5 priamkach (obr. 50). To je spolu $2 \cdot 5 = 10$ možností. Hornú vodorovnú stranu môžeme zvoliť na 3 priamkach, dolnú na 2 priamkach (obr. 50), tj. spolu $3 \cdot 2 = 6$ možností. Preto počet pravouhelníkov, ktoré obsahujú pole C2, je rovný $10 \cdot 6 = 60$.



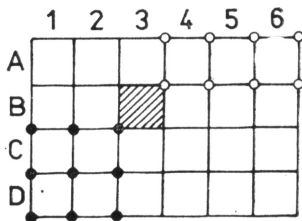
Obr. 50

Podobne určíme počet pravouholníkov, ktoré obsahujú pole B3. Ten je rovný $(3.4).(2.3) = 72$.

Poznámka. Počet pravouholníkov, ktoré obsahujú pole C2 alebo B3, môžeme zistiť aj takto: Každý pravouholník je určený ľubovoľnou dvojicou protiľahlých (t. j. nesusedných) vrcholov. Budeme uvažovať ľavý dolný a pravý horný vrchol. Možnosti pre ľavý dolný vrchol sú vyznačené na obrázkoch 51 a 52 plnými krúžkami, pravé horné vrcholy prázdny krúžkami. Z obrázku 51 je vidieť, že je práve $4.15 = 60$ pravouholníkov, ktoré obsahujú pole C2. Podobne z obrázku 52 je vidieť, že je práve $9.8 = 72$ pravouholníkov, ktoré obsahujú pole B3.



Obr. 51



Obr. 52

Teda pravouholníkov, ktoré obsahujú políčko B3, je viac ako pravouholníkov, ktoré obsahujú políčko C2.

Riešenie úlohy Z5 - I - 3 (str. 103)

Počet kociek kvádra je určený súčinom počtu kociek rozmerov kvádra. Teda pre počet kociek na hranách kvádra musí

platiť, že ich súčin je 100. Sú tieto možnosti rozkladu čísla 100 na súčin troch činiteľov (nezabúdame samozrejme na jednotku):

$$100 = 1.1.100$$

$$= 1.2.50$$

$$= 1.4.25$$

$$= 1.5.20$$

$$100 = 1.10.10$$

$$= 2.2.25$$

$$= 2.5.10$$

$$= 4.5.5$$

Iná možnosť rozkladu čísla 100 na súčin troch čísel nie je. Ak sa dohodneme, že kvádre, napríklad $1 \times 2 \times 50$, $50 \times 1 \times 2$, $2 \times 1 \times 50$ atď., sú rovnaké, tak zo 100 kociek možno poskladať 8 rôznych kvádrov.

Poznámka. Pri hľadaní rozkladov čísla 100 na súčin troch činiteľov nám môže pomôcť rozklad čísla 100 na prvočinitele: $100 = 2.2.5.5$.

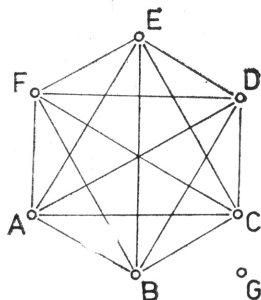
Riešenie úlohy Z5 - I - 4 (str. 103)

I. *spôsob.* Medzi 7 mestami je možné položiť 21 káblov, pretože mesto A možno spojiť so 6 mestami, potom mesto B už len s 5 nespojenými mestami, potom mesto C už len so 4 nespojenými mestami, potom mesto D už len s 3 nespojenými mestami, potom mesto E už len s 2 nespojenými mestami, potom mesto F už len s 1 nespojeným mestom, potom mesto G už je spojené so všetkými.

(Komu nie je táto úvaha celkom jasná, nech si nakreslí 7 bodov — miest a tieto v poradí, podľa našej úvahy, spája s ostat-

nými mestami.) Takže spolu je $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ káblov. Ak spojári položili 15 káblov, to znamená, že z možných 21 nepoložili 6. Každé mesto je so všetkými ostatnými pospájané 6 káblami, teda je možné, že jedno mesto nebolo pripojené.

II. *spôsob.* 6 miest možno pospájať každé s každým 15 káblami ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$), obrázok 53. Takže (pri »troche« nepozornosti) spojári mohli zabudnúť na posledné 7. mesto, keď predtým pospájali 15 káblami ostatných 6 miest, každé s každým.

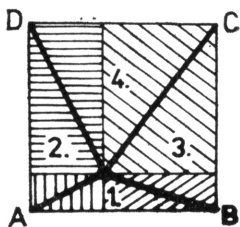


Obr. 53

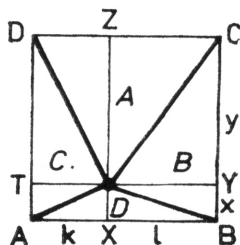
Riešenie úlohy Z5 - I - 5 (str. 103)

I. *spôsob.* Označme veľkosť Daninej záhrady d . Potom Adamova záhrada má veľkosť $4d$, Betkina záhrada má veľkosť $3d$, Cyrilova záhrada má veľkosť $2d$. Veľkosť celej záhrady je súčtom veľkostí záhrad Adama, Betky, Cyrila a Dany. Takže veľkosť celej záhrady môžeme vyjadriť ako $4d + 3d + 2d + d = 10d$. Avšak záhrada má veľkosť $100.100 \text{ m}^2 =$

$= 10\,000 \text{ m}^2$. Z toho zrejme Dana má záhradu veľkosti $1\,000 \text{ m}^2$, Cyril záhradu veľkosti $2\,000 \text{ m}^2$, Betka záhradu veľkosti $3\,000 \text{ m}^2$ a Adam záhradu veľkosti $4\,000 \text{ m}^2$. Potom výška trojuholníka Daninej záhrady (k strane AB , obr. 54) musí byť 20 m , nakoľko obsah tohto trojuholníka je $1\,000 \text{ m}^2 = \frac{20 \text{ m} \cdot 100 \text{ m}}{2}$. Podobne výška trojuholníka Cyrilovej záhrady je 40 m , Betkinej je 60 m a Adamovej je 80 m .



Obr. 54



Obr. 55

II. *spôsob*. Rovnakým spôsobom vyšrafované trojuholníky sú rovnaké (obr. 54). To znamená, že 1. a 4. záhrada (podľa označenia v obrázku 54) majú spolu rovnakú veľkosť ako 2. a 3. záhrada spolu. Označme záhrady 1, 4 a záhrady 2, 3 ako záhrady proti sebe. Ďalej označme veľkosť Daninej záhrady d . Potom Adamova záhrada má veľkosť $4d$, Betkina záhrada má veľkosť $3d$ a Cyrilova záhrada má veľkosť $2d$. Takže záhrady Adama a Dany majú spolu veľkosť $5d$, takisto ako záhrady Betky a Cyrila spolu. Teda záhrady proti sebe musia mať Adam s Danou a Betka s Cyrilom. (Obr. 55.)

Dana má záhradu, ktorej obsah je polovica obsahu obdĺžnika *ABYT*; jeho obsah je $100 \cdot x \text{ m}^2$. Adam má záhradu, ktorej obsah je polovica obsahu obdĺžnika *DCYT*; jeho obsah je $100 \cdot y \text{ m}^2$. Zrejme pre x, y platí (podľa obr. 55): $x + y = 100$ a $x : y$ je v pomere $1 : 4$, nakoľko Adam má štyrikrát väčšiu záhradu ako Dana. Z toho $x = 20 \text{ m}$ a $y = 80 \text{ m}$. Podobne pre k, l platí: $k + l = 100$, $k : l = 2 : 3$, takže $k = 40 \text{ m}$, $l = 60 \text{ m}$.

Ak vrchol A štvorca $ABCD$ je najbližšie k studni, potom studňa je od strany AB vzdialená 20 m a od strany AD 40 m (prípadne naopak). Riešenia pre studňu bližšie k bodu B (resp. C, D) sú obdobné. Sú len osovo, prípadne stredovo súmerné a považujeme ich za rovnaké.

Riešenie úlohy Z5 - I - 6 (str. 104)

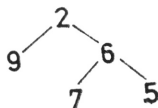
I. *spôsob*. Najskôr si vypíšeme, ktoré čísla môžu byť vedľa seba. K tomu nám pomôže, keď si uvedomíme, že možné súčty dvoch čísel vedľa seba môžu byť len: 4, 8, 11, 13, 16, 17. Potom ku každému číslu od 1 do 9 nájdeme možných susedov jednoducho ako doplnky k možným súčtom (samozrejme, že aj tie musia byť od 1 do 9). Takže

vedľa 1 môžu byť 3, 7,
vedľa 2 môžu byť 6, 9,
vedľa 3 môžu byť 1, 5, 8,
vedľa 4 môžu byť 7, 9,
vedľa 5 môžu byť 3, 6, 8,
vedľa 6 môžu byť 2, 5, 7,
vedľa 7 môžu byť 1, 4, 6, 9,
vedľa 8 môžu byť 3, 5, 9,
vedľa 9 môžu byť 2, 4, 7, 8.

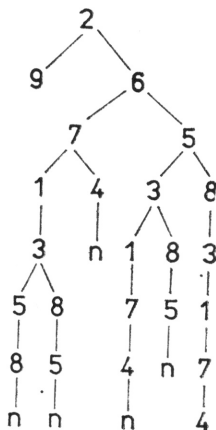
Začnime číslom, ktoré má len dvoch susedov. Vyberme si napríklad 2. Pre číslo 2 je len jedna možnosť (až na symetriu):

$$9 - 2 - 6$$

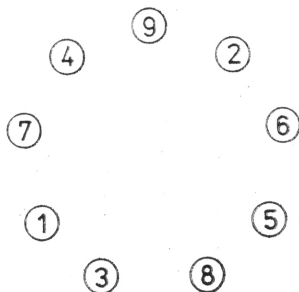
Budeme pokračovať číslom 6, číslo 9 necháme tak. K číslu 6 môžu byť (podľa nášho prehľadu možností) už len susedia čísla 5 alebo 7, pretože číslo 2 už tam je. Budeme to zapisovať prehľadne do tzv. stromu všetkých možností.



Takto postupujeme ďalej, stále dávame pozor na čísla, ktoré sme už použili, až dostaneme strom všetkých možností. (n znamená, že sme už vyčerpali všetky čísla, ktoré môžu byť susedom predchádzajúceho čísla.)



Teda existuje jediné riešenie (obr. 56) až na orientáciu a otočenie obrázku.

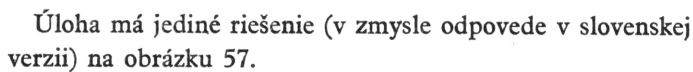


Obr. 56

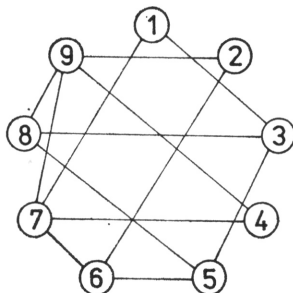
Riešenie českej verzie (zmena vznikla pravdepodobne prepisom): Vyhovujúce súčty dvoch susedných čísel sú: 5, 10, 11, 13, 17. Takže

- vedľa 1 môžu byť 4, 9,
- vedľa 2 môžu byť 3, 8, 9,
- vedľa 3 môžu byť 2, 7, 8,
- vedľa 4 môžu byť 1, 6, 7, 9,
- vedľa 5 môžu byť 6, 8,
- vedľa 6 môžu byť 4, 5, 7,
- vedľa 7 môžu byť 3, 4, 6,
- vedľa 8 môžu byť 2, 3, 5, 9,
- vedľa 9 môžu byť 1, 2, 4, 8.

Začnime napríklad číslom 5. Podobným postupom ako pre slovenskú verziu zostavíme strom všetkých možností:



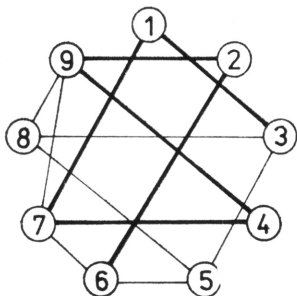
II. *spôsob*. Naznačíme len riešenie slovenskej verzie úlohy. Zapišeme čísla do pomocnej schémy v ľubovoľnom poradí, napríklad podľa veľkosti. Spojíme úsečkou tie dvojice čísel, ktoré môžu byť vedľa seba (obr. 58a).



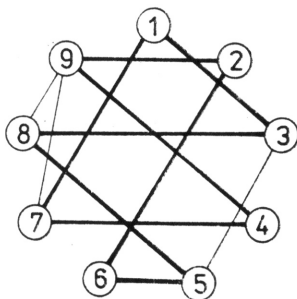
Obr. 58a

Potom v obrázku vyhľadáme uzavretú lomenú čiaru, aby prechádzala všetkými číslami. Hľadaná lomená čiara musí obsahovať spojnice $7 - 1 - 3$, $9 - 2 - 6$, $9 - 4 - 7$ (obr. 58b), vysvetlite sami prečo. Tým dostaneme lomenú čiaru $3 - 1 - 7 - 4 - 9 - 2 - 6$. Potom ju už ľahko jediným spôsobom doplníme na lomenú čiaru $3 - 1 - 7 - 4 - 9 - 2 - 6 - 5 - 8 - 3$ (obr. 58c). Teraz už len čísla prekreslíme do kruhu v tomto poradí; dostaneme znovu riešenie znázornené na obr. 56.

Poznámka. Riešenie sme mohli hľadať aj postupným náhodným vpisovaním do koliesok v obrázku tak, že by sme pripisovali vždy len vyhovujúce susedné čísla a v prípade neúspe-



Obr. 58b



Obr. 58c

chu by sme sa vracali späť. Takým spôsobom by sme však neukázali, že úloha má práve jedno riešenie.

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z5 - II - 1 (str. 105)

Uvažujme čísla na miestach jednotiek. Ich súčet je $5 + 4 + 6 + 8 = 23$. Nahradením číslic 5, 4, 6, 8 číslicou 2 sa výsledný súčet zmenší o 3, 2, 4, 6, prípadne o ľubovoľnú kombináciu súčtu týchto čísel. Nový súčet musí byť 12, prípadne 22. Súčet 22 môžeme dostať zmenšením o 1 a to sa v našom prípade nedá. Súčet 12 dostaneme zmenšením pôvodného súčtu o 11 a to môžeme dostať len ako $3 + 2 + 6$, teda nahradením číslic 5, 4, 8 číslicou 2.

Takže medzivýsledok je

$$\begin{array}{r} 6\ 6\ 2 \\ 7\ 5\ 2 \\ 7\ 8\ 6 \\ 4\ 9\ 2 \\ \hline \dots 2 \end{array} \quad \text{a »jedna zostala«.}$$

Uvažujme teraz čísla na miestach desiatok. Z miesta jednotiek zostala 1 desiatka, teda súčet na mieste desiatok je $6 + 5 + 8 + 9 + 1 = 29$. Musíme dosiahnuť súčet 22, prípadne 12. Súčet 22 dosiahneme znížením o 7, čo možno urobiť nahradením cifier 6 a 5 cifrou 2, prípadne nahradením cifry 9 cifrou 2.

Súčet 12 môžeme dosiahnuť znížením o 17, čo možno urobiť nahradením číslic 6, 8, 9 číslicou 2.

Takže máme tri možnosti ďalšieho medzivýsledku:

6 2 2	6 6 2	6 2 2
7 2 2	7 5 2	7 5 2
7 8 6	7 8 6	7 2 6
4 9 2	4 2 2	4 2 2
... 2 2 a »dve	.. 2 2 a »dve	... 2 2 a »jedna
zostali«	zostali«	zostala«

V prvých dvoch prípadoch zostávajú 2 stovky z miesta desiatok, teda spolu súčet je $6 + 7 + 7 + 4 + 2 = 26$. Musíme znížiť na 22. Jediná možnosť je zameniť cifru 6 na cifru 2.

V treťom prípade zostáva 1 stovka z miesta desiatok, teda súčet na mieste stoviek je 25. Máme ho znížiť na 22, teda o 3 a to sa v našom prípade nedá.

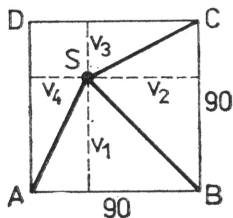
Úloha má práve dve riešenia:

2 2 2	2 6 2
7 2 2	7 5 2
7 8 6	7 8 6
4 9 2	4 2 2
2 2 2 2	2 2 2 2

Riešenie úlohy Z5 - II - 2 (str. 105)

Obsah záhrady je $90 \text{ m} \cdot 90 \text{ m} = 8\,100 \text{ m}^2$ (obr. 59). Keďže každý má rovnako veľkú záhradu, jedna z nich má obsah

$8\,100\text{ m}^2 : 3 = 2\,700\text{ m}^2$. Obsahy trojuholníkov ASB a BSC sú rovnaké, preto platí $v_1 = v_2$. Ale obsah $2\,700 = \frac{90 \cdot v_1}{2}$, takže $v_1 = \frac{5\,400}{90} = 60\text{ (m)}$. Z toho (pozri obr. 59) potom $v_3 = v_4 = 90 - 60 = 30\text{ (m)}$. Teda studňa je od dvoch susedných strán štvorca vzdialená o 60 m a od druhých dvoch susedných strán o 30 m.



Obr. 59

Riešenie úlohy Z5 - II - 3 (str. 106)

Máme vo výraze $128 - 64 + 32 - 16 + 8$ umiestniť zátvorky tak, aby výsledok bol čo najmenší (prípadne čo najväčší). Zmenu výsledku dosiahneme len zátvorkovaním, pri ktorom aspoň jedna zátvorka je »za mínuskou«.

Najmenší výsledok dostaneme, ak odčítame čo najviac. To dosiahneme, ak všetky znamienka »zmeníme zátvorkovaním na mínus«. Tak je tomu v prípade:

$$128 - (64 + 32) - (16 + 8) = 8$$

Najväčší súčet je bez zátvoriek

$$128 - 64 + 32 - 16 + 8 = 88,$$

teda ak musíme dať zátvorky, urobíme to tak, aby sa výsledok nezmenil. Napríklad:

$$128 - 64 + (32 - 16 + 8) = 88$$

Najmenší výsledok, aký môžeme zátvorkovaním dostať, je 8, najväčší je 88.

Poznámka. Úlohu bolo možné riešiť i vypísaním všetkých možností zátvorkovania (pozri riešenie úlohy Z4 - I - 6) a nájdením najmenšieho a najväčšieho výsledku spomedzi všetkých možných výsledkov.

Kategória Z4

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia na str. 132 až 136)

Z4 - I - 1

V istom mesiaci mali tri soboty párny dátum. Aký deň v týždni pripadol v tomto mesiaci na 28-eho?

Z4 - I - 2

Kváder s rozmermi 260 mm, 120 mm, 40 mm rozrezali na kocky s hranou 2 cm. Všetky kocky, ktoré takto dostali, postavili do radu. Aký dlhý rad vznikol?

Z4 - I - 3

Mám 9 paličiek. Ich dĺžky sú 1 cm, 2 cm, ..., 9 cm. Chcem z nich zostrojiť štvorcový rám. Môj mladší brat chce, aby som mu dal aspoň jednu paličku. Poradte mi, koľko a ktorých paličiek mu môžem dať. Napíšte mi všetky možnosti.

Z4 - I - 4

Pozrite si postupnosť slov: ruka, akur, karu, ... Je vytvorená podľa tohto pravidla: v poslednom napísanom slove pre-suň posledné písmeno na začiatok a potom vymeň písmená r, k.

Napríklad v slove ruka najprv dáme posledné písmeno na začiatok — dostaneme aruk — a potom ešte prehodíme r, k — dostaneme akur. Rovnako pokračujeme ďalej.

Zistite, aké slovo bude v tejto postupnosti na 99. mieste.

Z4 - I - 5

Pri lesnej škôlke pichla Miška osa. Začal bežať popri plote. Od prvého rožného*)stĺpika po 5. stĺpik prebehol za 12 sekúnd. Potom pokračoval až po 15. stĺpik, tam sa otočil a bežal späť. Pri druhom stĺpiku sa otočil a bežal až k 14. stĺpiku. A tak behal od 14. stĺpika ku 3., odtiaľ k 13., naspäť ku 4., atď. Nakoniec sa zastavil pri 8. stĺpiku. Vieme, že Miško bežal stále rovnakou rýchlosťou. Ako dlho bežal Miško popri plote?

Z4 - I - 6

Do zápisu

$$1\,988 - 183 - 512 - 411 + 102$$

vyznačte zátvorky piatimi spôsobmi tak, aby ste dostali päť rôznych výsledkov.

*) Česky »rohového«.

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenia na str. 136 až 137)

Z4 - II - 1

Z 31 rovnakých kociek treba zložiť čo najväčšiu kocku. Koľko kociek budeme potrebovať?

Z4 - II - 2

Nahraďte hviezdčky číslicami tak, aby platil nasledujúci súčet. (Hviezdčky nemusia byť nahradené rovnakou číslicou.)

$$\begin{array}{rcccccc} & * & * & * & * & * & \\ & * & * & * & * & * & \\ \hline 1 & 9 & 9 & 9 & 9 & 7 & \end{array}$$

Z4 - II - 3

Máme 7 paličiek. Sú dlhé 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm. Chceme z nich zložiť trojuholník, ktorý má všetky strany rovnako dlhé. Aký najväčší a aký najmenší takýto trojuholník možno zložiť? Uveď, z ktorých paličiek a ako ho zložíš.

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z4 - I - 1 (str. 129)

Pretože týždeň má 7 dní, čo je nepárny počet, majú soboty idúce za sebou dátumy rôznej parity (— párny — nepárny — — párny —). Keďže tri soboty boli s párnym dátumom, muselo byť v danom mesiaci aspoň 5 sobôt. Sobota s párnym, potom nepárnym, párnym, nepárnym, párnym dátumom. Teda tri soboty s párnym a medzi nimi dve soboty s nepárnym dátumom. Viac sobôt v mesiaci nemôže byť.

Rozdiel dátumov medzi piatou a prvou sobotou v mesiaci musí byť $4 \cdot 7 = 28$. Prvá párna sobota v mesiaci môže byť druhého. Teda piata sobota by potom bola 30-teho v mesiaci. Ďalšia prvá párna sobota by mohla byť 4-tého v mesiaci, ale potom piata sobota by musela byť 32-hého v mesiaci, ale žiaden mesiac nemá toľko dní.

Teda jediné riešenie je, že prvá sobota v mesiaci bola druhého, piata bola 30-teho, a teda 29-teho bol piatok a 28-ho bol štvrtok.

28. deň v mesiaci pripadol na štvrtok.

Riešenie úlohy Z4 - I - 2 (str. 129)

Uvážme najskôr, koľko kociek s hranou 2 cm môžeme položiť pozdĺž jednotlivých hrán kvádra. Vedľa 260 milimetrovej hra-

ny možno položiť 13 dvojcentimetrových kociek, pretože $13 \cdot 2 \text{ cm} = 26 \text{ cm} = 260 \text{ mm}$. Vedľa 120 milimetrovej hrany možno položiť 6 kociek, vedľa 40 milimetrovej hrany 2 kocky.

Teda z kvádra dostaneme $13 \cdot 6 \cdot 2 = 156$ dvojcentimetrových kociek.

Keď ich postavíme vedľa seba, vznikne rad dlhý $156 \cdot 2 \text{ cm} = 312 \text{ cm}$.

Riešenie úlohy Z4 - I - 3 (str. 129)

I. *spôsob*. Najskôr zistím, aké štvorcové rámy je možné z daných paličiek zostrojiť. Zrejme nemožno zostrojiť rámy so stranou 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, pretože dlhšie paličky nemožno použiť a vhodných krátkych je málo.

Rám so stranou 7 cm možno zostrojiť, ak jednotlivé strany budú zložené z paličiek $1 + 6$, $2 + 5$, $3 + 4$ a 7. Iným spôsobom to nejde. Takže mladšiemu bratovi môžem dať paličky dĺžky 8 cm a 9 cm.

Rám so stranou 8 cm možno zostrojiť, ak jednotlivé strany budú $1 + 7$, $2 + 6$, $3 + 5$, 8. Mohol by som zvážiť, že niektorú stranu zostrojím viacerými paličkami; napr. $4 + 3 + 1$, $5 + 2 + 1$, potom mi ale nezostane dosť kratších paličiek na ostatné strany. Je len jediná možnosť na získanie strán dĺžky 8 cm. Takže mladšiemu bratovi môžem dať v tomto prípade paličky dĺžky 4 cm a 9 cm.

Rám so stranou 9 cm možno zostrojiť, ak jednotlivé strany budú $1 + 8$, $2 + 7$, $3 + 6$, $4 + 5$, alebo 9. Pričom si môžem vybrať ľubovoľné štyri z piatich možností. Takže mladšiemu bratovi by som mohol dať buď paličku dĺžky 9 cm, alebo

paličky dĺžky 1 cm a 8 cm, alebo 2 cm a 7 cm, alebo 3 cm a 6 cm, alebo 4 cm a 5 cm.

Rám so stranou 10 cm môžem zostrojiť, ak jednotlivé strany budú $1 + 9$, $2 + 8$, $3 + 7$, $4 + 6$. Takže na darovanie mi zostane palička dĺžky 5 cm.

Rám so stranou 11 cm má obvod 44 cm. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Teda zostane mi palička dĺžky 1 cm. Tú môžem, v prípade, že sa z ostatných paličiek dá poskladať štvorcový rám, darovať mladšiemu bratovi. Z ostatných paličiek možno urobiť rám so stranami $2 + 9$, $3 + 8$, $4 + 7$, $5 + 6$.

Teda mladšiemu bratovi môžem dať buď paličky dĺžky 8 cm a 9 cm, alebo 4 cm a 9 cm, alebo 9 cm, alebo 1 cm a 8 cm, alebo 2 cm a 7 cm, alebo 3 cm a 6 cm, alebo 4 cm a 5 cm, alebo 5 cm, alebo 1 cm.

II. *spôsob*. Úlohu možno riešiť aj od paličiek, ktoré môžem darovať. Obvod štvorca totiž musí byť násobkom štyroch, potom zvyšok obvodu do 45 cm môžem darovať za predpokladu, že zo zostávajúcich paličiek môžem urobiť štvorcový rám. Teda podobná úvaha ako v I. spôsobe pre rám so stranou 11 cm.

Riešenie úlohy Z4 - I - 4 (str. 130)

Pokračujeme ďalej v písaní postupnosti slov: ruka, akur, karu, urak, ruka, . . . Vidíme, že postupnosť sa bude opakovať. A to tak, že na každom štvrtom mieste bude »urak«. Z toho na $4 \cdot 24 = 96$. mieste bude teda »urak«. A potom na 97. mieste bude »ruka«, na 98. »akur«, na 99. »karu«.

Na 99. mieste postupnosti slov bude slovo »karu«.

Riešenie úlohy Z4 - I - 5 (str. 130)

Zapíšme si postupne čísla stĺpov, pri ktorých sa Miško otáčal:

$1 - 15 - 2 - 14 - 3 - 13 - 4 - 12 - 5 - 11 - 6 -$
 $- 10 - 7 - 9 - 8$, medzi nimi je postupne medzier:
 $14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 +$
 $+ 3 + 2 + 1$. Čo je spolu 105 medzier.

Od 1. po 5. stĺpik, čo sú 4 medzery, prebehne za 12 sekúnd. Teda 1 medzeru prebehne za $12 : 4 = 3$ sekundy. Potom ale 105 medzier prebehne za $105 \cdot 3 = 315$ sekúnd, čo je 5 minút a 15 sekúnd, alebo 5 a štvrt minúty.

Riešenie úlohy Z4 - I - 6 (str. 130)

Zapíšme si všetky možnosti zátvorkovania a vypočítajme ich súčty. Takto nájdeme všetky riešenia. (V úlohe sa nájdenie všetkých riešení nepožaduje, stačí, ak náhodným zátvorkovaním nájdete 5 rôznych výsledkov.)

$$\begin{array}{rcl} 1\ 988 - 183 - 512 - 411 + 102 & = & 984 \\ \bullet 1\ 988 - (183 - 512) - 411 + 102 & = & 2\ 008 \\ 1\ 988 - ((183 - 512) - 411) + 102 & = & 2\ 830 \\ 1\ 988 - ((183 - 512) - 411 + 102) & = & 2\ 626 \\ 1\ 988 - (183 - 512) - (411 + 102) & = & 1\ 804 \\ 1\ 988 - ((183 - 512) - (411 + 102)) & = & 2\ 830 \\ \bullet 1\ 988 - 183 - (512 - 411) + 102 & = & 1\ 806 \\ 1\ 988 - (183 - (512 - 411)) + 102 & = & 2\ 008 \\ 1\ 988 - (183 - (512 - 411) + 102) & = & 1\ 804 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&1\,988 - 183 - ((512 - 411) + 102) = 1\,602 \\
&\bullet 1\,988 - 183 - 512 - (411 + 102) = 780 \\
&1\,988 - (183 - 512 - (411 + 102)) = 2\,830 \\
&1\,988 - 183 - (512 - (411 + 102)) = 1\,806 \\
&\bullet 1\,988 - (183 - 512 - 411) + 102 = 2\,830 \\
&1\,988 - ((183 - 512 - 411) + 102) = 2\,626 \\
&\bullet 1\,988 - 183 - (512 - 411 + 102) = 1\,602 \\
&1\,988 - (183 - (512 - 411 + 102)) = 2\,008 \\
&\bullet 1\,988 - (183 - 512 - 411 + 102) = 2\,626
\end{aligned}$$

Možnosti zátvorkovania prvých čísel v zápise sme vynechávali, nakoľko nemajú vplyv na zmenu súčtu. Ak si pozorne všimnete spôsoby zátvorkovania, pred ktorými sú bodky, a poradie, ako idú za sebou, možno vás to navedie na spôsob, akým sme to robili.

Sú tieto možnosti výsledkov: 780, 984, 1 602, 1 804, 1 806, 2 008, 2 626, 2 830.

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z4 - II - 1 (str. 131)

Ak by kocka mala na jednej hrane 2 kocky, potom by bola zložená z dvoch vrstiev, v každej po 4 kockách, teda spolu z 8 kociek.

Ak by kocka mala rozmer 3 kocky, potom by bola zložená z $3 \cdot 9 = 27$ kociek. Väčšiu kocku už nemožno z 31 kociek zložiť.

Riešenie úlohy Z4 - II - 2 (str. 131)

V číslach, ktoré sčítavame, musia byť na prvých miestach najväčšie číslice, teda deviatky. Aj tak ich súčet bude len 18 a nie 19, teda »jedna« musí zostať z predchádzajúceho medzisúčtu. Tou istou úvahou zistíme, že až po miesta desiatok musia byť namiesto hviezdičiek samé deviatky. Z miesta jednotiek musí zostať 1, teda, aby sme v súčte dostali na miesto jednotiek 7, musíme sčítať $8 + 9$.

Jediné riešenie, až na poradie sčítancov je:

$$\begin{array}{r} 9\ 9\ 9\ 9\ 8 \\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \\ \hline 1\ 9\ 9\ 9\ 9\ 7 \end{array}$$

Riešenie úlohy Z4 - II - 3 (str. 131)

Súčet dĺžok všetkých paličiek je 28 cm. Najväčší trojuholník by mohol mať stranu 9 cm, pretože $9 \cdot 3 = 27$.

Jediná možnosť zostrojenia jeho strán je z paličiek dĺžok 7 cm a 2 cm, 6 cm a 3 cm, 5 cm a 4 cm.

Najmenší trojuholník by mohol mať napríklad dĺžku strany 4 cm, ale potom by sme z daných paličiek mohli zostrojiť len dve strany 4 cm, 3 cm + 1 cm. Teda najmenší trojuholník musí mať stranu dĺžky 5 cm. Jediná možnosť zostrojenia jeho strán je z paličiek dĺžky 5 cm, 1 cm a 4 cm, 2 cm a 3 cm.

Vybrané úlohy z korespondenčních seminářů a dalších soutěží

Snad v každém kraji a často i v okresech se konaly ve školním roce 1988/89 korespondenční soutěže pro všechny zájemce o řešení zajímavých matematických úloh. Korespondenční semináře jsou dobrou školou pro všechny mladé matematiky. Pro všechny účastníky je cenné zejména to, že organizátoři jim vracejí opravené úlohy často i s komentáři, jaké udělali chyby. Nejlepší z řešitelů jsou zpravidla zváni na několikadenní soustředění.

Kromě korespondenčních seminářů se pro mladé matematiky pořádají vedle oficiální matematické olympiády i další matematické soutěže. Například v Západočeském kraji je to nástavbová soutěž — 3. kolo matematické olympiády pro kategorie Z5 až Z7. Na matematické olympiádě je naproti tomu nezávislá soutěž »Dejte hlavy dohromady« pořádaná pražskou pobočkou JČSMF pro talentované žáky 6. ročníků.

Věříme, že vybrané úlohy z těchto akcí přijmou se zájmem především ti mladí matematici, kteří nemají příležitost se podobných akcí zúčastnit. Zároveň věříme, že zveřejnění těchto úloh může inspirovat i další organizátory k pořádání podobných akcí.

V Praze pořádá KV MO spolu s gymnáziem W. Piecka (od roku 1990 gymnázium Korunní tř.) již 3. ročník Pikomatu pro žáky 8. roč. ZŠ. Hlavním organizátorem je *prof. J. Zhouf*. Přinášíme tyto vybrané úlohy:

1. Určete největšího společného dělitele čísel

$$m = 1.2.3. \dots .25.26 \text{ a } n = 10^{10}.$$

2. Kůň a mezek, oba těžce naložení, šli jeden vedle druhého. Kůň si stěžoval na svůj těžký náklad. »Na co si stěžuješ?« zeptal se ho mezek. »Vždyť kdybych si vzal jeden z tvých pytlů, byl by můj náklad dvakrát těžší než tvůj, ale kdybys ty vzal jeden pytel z mých zad, měli bychom oba stejně těžké náklady.« Kolik pytlů nesl kůň a kolik mezek?

3. Zjistěte, zda lze do čtverce o straně 1 umístit navzájem se nepronikající kruhy tak, aby součet jejich poloměrů byl větší než 1 989.

4. Nejvýše kolik čísel lze vybrat z čísel 1, 2, 3, ..., 99, 100, aby mezi nimi nebyla žádná dvě, jejichž poměr je mocnina dvou?

5. Může mít lichoběžník strany dlouhé 5 cm, 5 cm, 6 cm, 8 cm? Které z těchto hodnot jsou pak délkami jeho základů? Najděte všechna řešení.

6. Na kružnici je n bodů ($n \geq 1$, celé). Označte je postupně proti smyslu hodinových ručiček čísla 1, 2, 3, ..., $n - 1$, n . V bodě 1 sedí blecha, která začne skákat. Skočí do bodu 2,

z něj do bodu 4, pak do bodu 7 atd. Tzn. při i -tém skoku přeskočí bod $i - 1$. Dokažte, že pro lichá n vždy existuje bod, na který blecha neskočí. (Mimo soutěž: Jak je to pro sudá n ?)

B

V Jihočeském kraji se uskutečnil 3. ročník Pikomatu, který pod vedením *dr. Sokola* připravili pracovníci gymnázia v Jírovcově ul. v Českých Budějovicích a pracovníci katedry matematiky Pedagogické fakulty v Českých Budějovicích. Korespondenční seminář měl 5 kol a zúčastnilo se ho 107 žáků 6. až 8. ročníků.

Ukázky úloh

1. Šesticiferné číslo, které lze zapsat ve tvaru $1k31k4$, je dělitelné 12, ale není dělitelné 9. Určete číslici k .

2. Každý z 9 účastníků a záložníků mistrovského fotbalového celku dal v sezóně alespoň jeden gól a všichni dohromady dali 47 gólů. Dokažte, že alespoň dva z nich dali stejný počet gólů, jestliže víme, že jeden z hráčů dal 12 gólů.

3. Máme 2 000 čtverců se stranami délek 1, 2, 3, ..., 2 000 centimetrů. Dokažte, že je můžeme rozdělit do dvou skupin po 1 000 čtvercích tak, že součet obsahů čtverců v obou skupinách je stejný.

4. Najděte všechny pythagorejské trojúhelníky, jejichž jedna strana má délku 15.

5. Na tabuli byl narysován lichoběžník $ABCD$, v něm střední příčka EF . Pak sestrojili průsečík O úhlopříček a vedli jím kolmici OK k základně AB ($K \in AB$). Nakonec obrázek umazali tak, že zůstaly jen úsečky EF a OK . Navrhněte, jak je možno sestrojit původní lichoběžník. (Návod: Zkoumejte středy úseček rovnoběžných s AB , které mají krajní body na ramenech lichoběžníku.)

6. Převédeme-li výraz

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1},$$

kde p je prvočíslo větší než 2, na stejného jmenovatele, dostaneme zlomek, jehož čítec je dělitelný p . Dokažte to.

C

Ve Východočeském kraji připravili korespondenční seminář pro žáky ZŠ společně gymnázium J. K. Tyla v Hradci Králové, KPÚ v Hradci Králové a pracovníci katedry matematiky Pedagogické fakulty v Hradci Králové. Vybrali jsme pro vás tyto úlohy:

1. Je číslo $2^{10} + 5^{12}$ prvočíslo?

2. Napíšeme-li všechna přirozená čísla od 1 do 99 999 za sebou na dlouhý pás, dostaneme číslo

123456789101112...999979999899999.

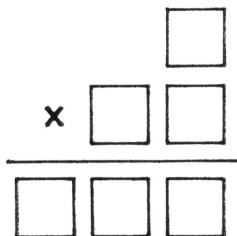
- a) Určete ciferný součet tohoto čísla.
- b) Kolikrát se v zápise čísla opakuje číslice 7?

3. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC , je-li dána přepona $c = AB$, přičemž délka těžnice t_c příslušné k přeponě je rovna geometrickému průměru obou odvěsen a, b (tzn. $t_c = \sqrt{a \cdot b}$).

D

Ze Severomoravského kraje uvedeme ukázky úloh z 3. korespondenčního semináře pro 4. ročník, který vedla *dr. Bachelová* z OPS ve Frýdku-Místku. Soutěže se zúčastnilo 1 248 žáků okresu Frýdek-Místek.

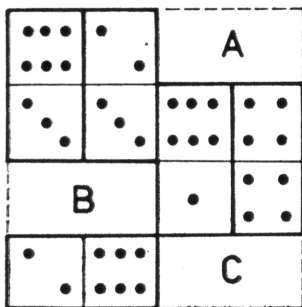
1. Do čtverců vepište číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby číslo v horním čtverci vynásobené číslem v prostředních dvou čtvercích dalo výsledek v dolních třech čtvercích (obr. 60). Napište svou úvahu.



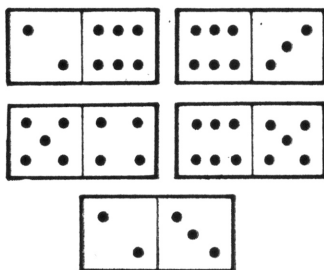
Obr. 60

2. Rozdělte čísla 3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27 do dvou skupin tak, aby pro obě skupiny platilo: Rozdíl libovolných čísel z téže skupiny už do této skupiny nesmí patřit. (Například když 9 a 3 patří do jedné skupiny, nesmí do této skupiny už patřit jejich rozdíl $9 - 3 = 6$. Tedy 6 patří do druhé skupiny.)

3. Na místa A , B , C (obr. 61a) vložte tři z pěti hracích kostek na obrázku 61b tak, abyste vodorovně, svisle i úhlopříčně dostali vždy součet 16. Zdůvodněte své řešení.



Obr. 61a



Obr. 61b

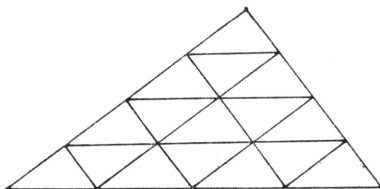
4. Stáří otce a syna je dohromady 80 let. Před 8 lety byl otec třikrát starší než syn. Kolik let je každému z nich?

E

Již dlouholetou tradici má korespondenční seminář známý pod názvem Kominár, který pod vedením *dr. P. Černeka*

organizuje skupina bratislavských matematiků. Úlohy jsou v posledních letech pravidelně otiskovány v časopise Zenit pionerov*). Úlohy jsou podle obtížnosti odstupňovány pro 4. až 6. ročníky. Přinášíme ukázky pro 6. ročník.

1. Na obrázku 62 je znázorněna deska ve tvaru trojúhelníku. Na desce je vyznačeno 16 shodných trojúhelníků o stranách 5 cm, 4 cm a 3 cm. Máte rozřezat desku na dvě části tak, aby na obarvení stran obou částí bylo potřeba stejné množství barvy. Přitom je dovoleno řezat jen po vyznačených čarách. Najděte všechny možnosti. Dvě možnosti považujeme za shodné, jestliže po rozřezání vzniknou shodné části.

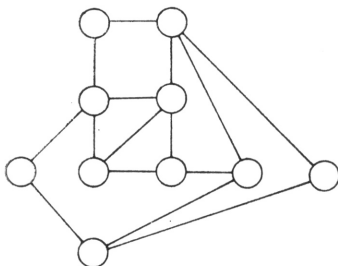


Obr. 62

2. V městě jsou tři autobusové linky. Sít těchto linek i se zastávkami je na obrázku 63. Označíme zastávky písmeny A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Autobusy zastávky nevynechávají. Autobus č. 1 stojí postupně na zastávkách H, G, A, J, B. Autobus č. 2 stojí postupně na zastávkách G, C, J, A, H, I, B. Autobus č. 3 stojí postupně na zastávkách J, F, D, E, I, A.

*) Od roku 1990 jen Zenit.

Zkuste z těchto zadání najít na obrázku 63 správné označení zastávek.



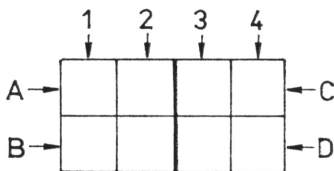
Obr. 63

3. Postupným vynásobením deseti dvojek dostaneme číslo 1 024. Kdybychom postupně vynásobili 400 dvojek, dostali bychom obrovské číslo, které má více než 100 číslic. Kdybychom postupně vynásobili 240 trojek, dostali bychom opět obrovské číslo s více než 100 číslicemi. Zjistěte, které z těchto dvou čísel je větší, aniž byste čísla vypočítali. Svůj výsledek odůvodněte.

4. Karel a Ivan si napsali několik čísel. Karel je vypsals podle pravidelnosti: 30, 60, 90, 120, 150, ... Ivan zase vypsals čísla: 1, 2, 2, 3, 4, 6, 9, 14, 22, ... Představte si, že oba napsali 99 čísel, která pak sčítali. Kdo z nich dostal větší číslo? Odpověď odůvodněte.

Pro žáky 6. tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů z Prahy a Středočeského kraje se pořádal již 4. ročník soutěže Dejte hlavy dohromady. Soutěž je určena čtyřčlenným družstvům, která řeší společně zadané úlohy. Úlohy pro tento ročník připravili *dr. V. Dřízal*, *doc. dr. M. Koman*, *CSc.*, a *dr. Jiří Mída*.

1. Křížovka: a) Řešte křížovku (obr. 64). Do každého pole se píše jen 1 číslice.



Obr. 64

Vodorovně

A: Násobek 7.

B: Prvočíslo menší než 20.

C: Součet tří jednociferných prvočísel.

D: Násobek 6.

Svisle

1. Násobek 3.

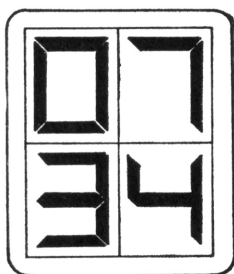
2. Prvočíslo s ciferným součtem 17.

3. Dělitel čísla 231.

4. Poslední 2 číslice nejmenšího trojčiferného násobku čísla 9.

b) V křížovce je tajenka — významné datum. Napište toto datum a uveďte jeho význam.

2. Digitální hodiny: Hančiny digitální hodinky ukazují hodiny a minuty (obr. 65).



7 hodin

34 minuty

Obr. 65

Hodiny udávají čísla 00, 01, ..., 23

Minuty udávají čísla 00, 01, ..., 59

Sečtěte všechny časové úseky jednoho dne, kdy může Hanka spatřit na hodinkách aspoň jednu 0.

3. Plán cest: V okolí našeho města vedou 4 turistické cesty značené červenou, modrou, zelenou a žlutou barvou. Cesty spojují tyto turistické zajímavosti: Borek (B), Milíře (M), Náhon (N), Rokle (R) a Viklan (V). Cesty jsou vedeny takto:

Červená: M — R — N

Zelená: B — N — L

Modrá: V — M — L

Žlutá: V — R — L

Všechny cesty se sbíhají nebo kříží jen v uvedených místech. Žádné dvě cesty nemají nikde společný úsek.

Načrtněte zjednodušený plánek těchto cest. V něm vyznačte okružní cestu (odkud vyjdete, tam se vrátíte), na které se vystřídají značky všech 4 barev. Přitom po žádném úseku nesmíte jít dvakrát. Může být na plánu více okružních cest, které se liší aspoň v jednom úseku? Svou odpověď odůvodněte.

4. Ciferný součet

- a) — Lukáš zvolil číslíce 3, 5, 7.
— Vytvořil z nich všechna možná trojciferná čísla.
— Vytvořená čísla sečetl.
— Součet dělil součtem daných číslí (3 + 5 + 7).
— Vyšlo mu číslo .

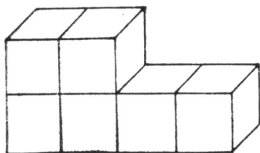
Vypočtete i vy toto číslo:

- b) Zvolte sami tři různé číslíce a postupujte jako Lukáš.
c) Pokud jste dobře počítali, dostali jste stejný výsledek jako Lukáš. Dovedete vysvětlit proč?

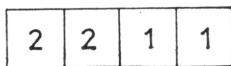
5. Povrch staveb: Ze shodných krychlí stavíme modely staveb. Povrch stavby na obrázku 66a tvoří 20 čtverců (stěny krychlí, které leží na podložce, do povrchu nepočítáme). Na obrázku 66b je plán této stavby.

Nakreslete plány všech dalších staveb, jejichž

- povrch tvoří 20 čtverců,
- plán má tvar obdélníku nebo čtverce.

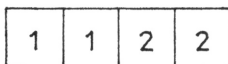
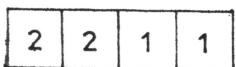


Obr. 66a



Obr. 66b

Poznámka. Stavby postavené např. podle plánů na obrázku 67 jsou shodné.



Obr. 67

6. Největší prvočíslo: V roce 1988 bylo do známé Guinnesovy (čti Ginesovy) knihy rekordů zapsáno největší v té době známé prvočíslo, které má 65 020 číslic. Je možné ho zapsat ve tvaru

$$2^{216\,091} - 1. \star)$$

Zjistěte jeho poslední číslici.

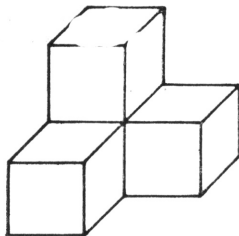
7. Síť tělesa: a) Narýsujte na čtverečkovaný papír zmenšenou síť tělesa sestaveného ze 4 shodných krychlí o hraně $a = 3$ cm (obr. 68).

*) Zápis $2^{216\,091}$ značí součin 216 091 dvojek, tzn.

$$2^{216\,091} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{216\,091 \text{ krát}}$$

Je to tzv. mocnina čísla 2 s exponentem 216 091.

b) Síť narýsujte ve skutečné velikosti na velkou čtvrtku papíru, vystříhněte a slepte z ní nakreslené těleso.



Obr. 68

8. Hrací kostka: Petr hází obyčejnou hrací kostkou. Pavel mu dal úlohu: »Tady máš další kostku, která má však ještě prázdné stěny. Doplň na jejích stěnách oka tak, aby při házení obou kostek mohl být součet ok, která padnou, libovolné číslo od 1 do 12.« Petr však Pavla překvapil: »To znám. Já to umím dokonce tak, že kterýkoli ze součtů může padnout právě třemi způsoby.«

Nakreslete síť takové neobvyklé hrací kostky.

G

Podobně jako v Praze i v Opavě se uskutečnila týmová soutěž pro žáky 6. ročníků s názvem Dejte hlavy dohromady. Soutěž připravila *dr. L. Hozová*. Na ukázkou uvedeme tři z pěti zadaných úloh.

1. Objevte princip, podle kterého jsou vytvářeny následující posloupnosti čísel. V každé posloupnosti doplňte následující dvě čísla a určete číslo, které je napsáno na padesátém místě.

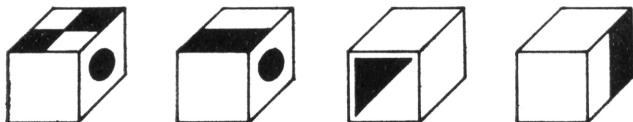
- a) 1, 6, 11, 16, 21, ...
- b) 2, 5, 10, 17, 26, ...
- c) 1, 3, 6, 10, 15, ...
- d) 1, 4, 9, 7, 7, 9, 13, 10, ...

2. Na obrázku 69 jsou tři pohledy na jedinou krychli



Obr. 69

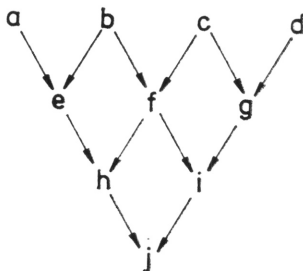
Doplňte na dalším obrázku 70 prázdné stěny tak, aby vznikly další pohledy na tuto krychli.



Obr. 70

3. Nahraďte písmena na obrázku 71 navzájem různými přirozenými čísly tak, aby každé číslo bylo součtem dvou čísel bezprostředně nad ním (šipky naznačují způsob sčítání).

Ale aby úloha nebyla tak lehká, přidáme další podmínku: nejspodnější číslo musí být co nejmenší. Kolik schémat s nejmenší hodnotou »j« dokážete vyplnit?



Obr. 71

H

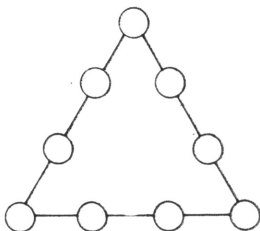
V Západočeském kraji navazuje na celostátní soutěž MO ještě krajská soutěž, kterou pořádá pod vedením *dr. M. Ausbergerové* kabinet matematiky pro ZŠ a SOU Krajského pedagogického ústavu v Plzni.

Pro kategorii Z4 pořádají podobně jako na Slovensku školní a okresní kolo. Úlohy mají však vlastní. Pro kategorie Z5 a Z7 pořádají jako v jediném kraji v ČSFR kromě školního a okresního kola ještě své vlastní krajské kolo. Ve všech krajských kolech zařazují po pěti úlohách, tj. o dvě více než v okresních kolech. Této skutečnosti přizpůsobují i obtížnost úloh. Jako ukázky uvedeme ze závěrečných kol všech čtyř kategorií Z4 až Z7 po dvou úlohách.

Okresní kolo Z4

1. Má být napsáno 10 000 adres. Stačí je napsat 5 lidí za 2 dny, trvá-li napsání jedné adresy jednu minutu? Počítáme osmihodinovou pracovní dobu.

2. Do kroužků v trojúhelníku (obr. 72) vepište čísla 1, 2, 3, ..., 9 tak, aby jejich součet na každé straně trojúhelníku byl 21.

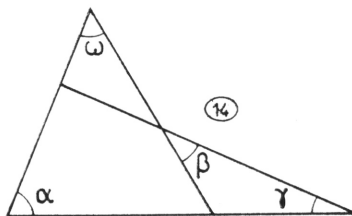


Obr. 72

Krajské kolo Z5 (27 soutěžících, z toho 22 úspěšných)

1. Silnice se klikatí mezi poli a lesy, pěšina vede přímo. Silnice je o 7,5 km delší než pěšina. Po silnici jel cyklista, po pěšině šel chodec. Cyklistova rychlost byla čtyřikrát větší než rychlost chodce, ale každému z nich trvala cesta stejně dlouho. Jak dlouhá je pěšina?

2. Určete velikost úhlu ω na obrázku 73, jestliže $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $\gamma = 30^\circ$.

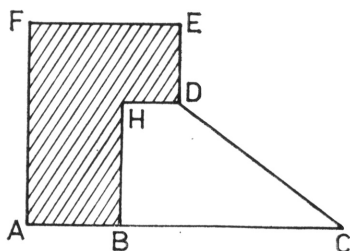


Obr. 73

Krajské kolo Z6 (31 soutěžících, z toho 19 úspěšných)

1. Jirka vynásobil čtyři za sebou jdoucí prvočísla a k součinu přičetl 266. Výsledek dělil 627 a dostal 627. Urči, která prvočísla to byla.

2. Vyšrafovaná plocha i čtyřúhelník $BCDH$ mají stejný obsah a platí $|AB| = |DE| = 3$ cm, $|EF| = 5$ cm, $|BC| = 6$ cm. (Obr. 74.) Vypočtěte délku úsečky AF .



Obr. 74

Krajské kolo Z7 (42 soutěžících, z toho 26 úspěšných)

1. V dílně zhotovují denně 125 výrobků z materiálu v ceně 17 Kčs za jeden kilogram. Zlepšovatel navrhl způsob, jak při změně použitého materiálu snížit hmotnost výrobků o 10 %, musel by se však používat materiál, který je o 1 korunu za 1 kg dražší. Celkem by se denně ušetřilo na materiálu 140 Kčs. Jakou hmotnost má jeden výrobek?

2. Objem tří nádob je v postupném poměru 3 : 2 : 1. Největší nádoba byla ze tří čtvrtin naplněna vodou. Dvě třetiny této vody byly přelity do druhých dvou nádob tak, že nejmenší nádoba byla zcela naplněna a do prostřední nádoby bylo nalito zbývajících 13 litrů vody. Kolik litrů vody zbylo v největší nádobě?

I

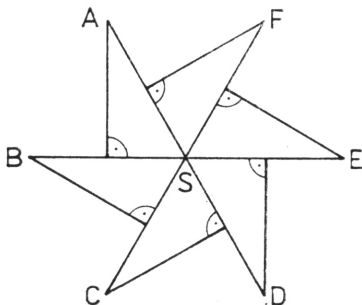
Ve Východočeském kraji organizuje *J. Trejbal* pro žáky z tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů každoroční soutěž Víkend s matematikou. V roce 1989 vydalo OPS v Hradci Králové sbírku jeho úloh pro žáky 6. tříd.

Ukázky úloh

1. Řešte algebrogram:

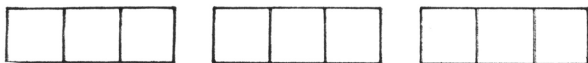
$$\begin{array}{rcccc} J & E & D & E \\ V & L & A & K \\ J & A & K & O \\ \hline D & R & A & K \end{array}$$

2. Narýsujte podle obrázku 75 větrník složený ze šesti shodných pravoúhlých trojúhelníků; $|SA| = 6$ cm. Vypočtěte jeho obsah.



Obr. 75

3. Napište do čtverečků všechny číslice od 1 do 9 tak, aby součin tří vzniklých trojčiferných čísel byl co největší. (Obr. 76.) Tento součin vypočtěte.



Obr. 76

4. Honza se vypravil na boj s drakem, který měl tři hlavy a tři ocasy. Čaroděj Dobroděj ho vyzbrojil kouzelným mečem a řekl mu: »Jednou ranou můžeš drakovi useknout jednu hlavu, nebo dvě hlavy, nebo jeden ocas, nebo dva ocasy. Nic jiného. Pamatuj však, že když usekneš hlavu jednu,

vyrostou mu hned dvě nové. Když mu usekneš jeden ocas, narostou mu hned dva nové. Když mu usekneš dva ocasy, vyroste mu hlava. Pouze když mu usekneš dvě hlavy, nic mu nenaroste.«

Kterým nejmenším počtem ran mohl Honza zabít draka, tzn. useknout mu všechny hlavy i všechny ocasy?

Doc. RNDr. Milan Koman, CSc. — RNDr. Vladimír Repáš

**TŘICÁTÝ OSMÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství Praha roku 1991

jako svou publikaci č. 5-42-11/38

Edice Pomocné knihy pro žáky

Odpovědná redaktorka Anežka Bittnerová

Výtvarný redaktor Václav Hanuš

Technická redaktorka Eliška Váchová

Vytiskly Moravské tiskárny Olomouc, provoz 11

1. vydání

ISBN 80-04-25645-7

**matematická
olympiáda**



SPN

5-42-11/38

03/2

14-558-90

Kčs 12,00

ISBN 80-04-25645-7