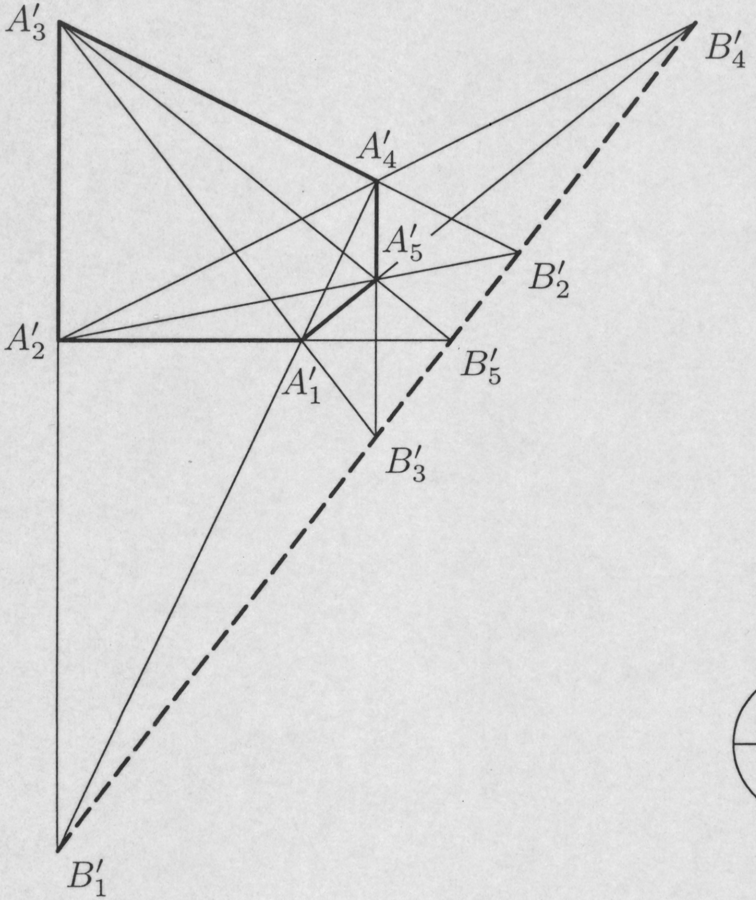
55. ročník matematické olympiády na středních školách

55. ročník matematické olympiády na středních školách



BOČKOVI

PADESÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2005/2006

47. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

18. MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ PRAHA

Vydání této publikace bylo podpořeno z projektu
NPV II „STM – Morava“, č. 2E06029.

Za přispění spolupracovníků zpracovali
RNDr. Karel Horák, CSc., Mgr. Martin Mareš, Mgr. Peter Novotný,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.

ISBN 978-80-7015-133-4

Obsah

O průběhu 55. ročníku matematické olympiády

Ve školním roce 2005/06 se uskutečnil v České republice již 55. ročník matematické olympiády. Hlavním pořadatelem soutěže bylo stejně jako v předešlých letech Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, dále Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav akademie věd ČR. Chod soutěže zajišťovala nově jmenovaná Ústřední komise MO, v níž jako staronový předseda stanul doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., a dále místopředsedové RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc. (pro kategorie A, B a C), doc. RNDr. *Pavel Tlustý*, CSc. (pro kategorie Z9–Z5), a doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc. (pro kategorii P). Funkci tajemníka ÚV MO vykonává nadále RNDr. *Karel Horák*, CSc.

Přípravou a výběrem úloh pro jednotlivé kategorie a soutěžní kola MO jsou Ústřední komisí MO pověřeny dvě úlohové komise (jedna pro kategorie A, B, C a druhá pro kategorie Z9–Z5). Obě komise se scházejí pravidelně dvakrát ročně (vždy v listopadu a v květnu). Ve spolupráci se slovenskými kolegy zabezpečují s ročním předstihem výběr úloh pro další ročník MO v České republice a na Slovensku. Garanty výběru úloh v kategoriích A, B, C byli v tomto ročníku soutěže RNDr. *Karel Horák*, CSc., doc. RNDr. *Pavel Novotný*, CSc., a doc. RNDr. *Leo Boček*, CSc.

Při přípravě soutěžních úloh MO kategorie P se pravidelně střídají pracovníci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě. Tentokrát byli na řadě kolegové ze Slovenska, kteří připravili úlohy pro všechna soutěžní kola 55. ročníku. Pracovníci a studenti z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze se pak jako každoročně postarali o opravování a vyhodnocení odevzdaných řešení.

Letáky s úlohami I. kola 55. ročníku MO byly do škol včas rozeslány, s malým zpožděním pak byly distribuovány komentáře k řešením úloh I. kola.

Ústřední (III.) kola 55. ročníku matematické olympiády v kategoriích A a P se uskutečnila v termínu 26. 3.–1. 4. 2006 v Litoměřicích. Organizací obou závěrečných kol soutěže bylo Ústřední komisí MO pověřeno Gymnázium Josefa Jungmanna v Litoměřicích, které ve spolupráci s Krajskou komisí MO Ústeckého kraje, pobočkou JČMF v Ústí nad Labem a městem Litoměřice vytvořilo pod záštitou hejtmana Ústeckého kraje pro soutěž velmi dobré podmínky. Za zdařilý průběh ústředního kola patří poděkování především Mgr. *Pavle Hofmanové*, předsedkyni Krajské komise MO v Ústeckém kraji, a Mgr. *Jitce Putnarové* z Gymnázia Josefa Jungmanna v Litoměřicích.

Na základě jednotné koordinace úloh II. (krajského) kola bylo pozváno k účasti ve III. (ústředním) kole kategorie A 42 nejlepších řešitelů (jeden se však pro nemoc omluvil), v kategorii P pak 20 nejlepších řešitelů z celé České republiky. Soutěžními dny pro kategorii A byly 27. a 28. březen 2006, kdy žáci řešili tradičně vždy tři soutěžní úlohy. Na řešení každé trojice úloh měli vyhrazeny 4,5 hodiny čistého času a přitom každá úloha byla hodnocena maximálně 7 body. Soutěžními dny III. kola v kategorii P byly 30. a 31. březen 2006. První soutěžní den řešili soutěžící tři úlohy teoretické, celý druhý soutěžní den byl vyhrazen řešení dvou praktických úloh. Za každou teoretickou úlohu mohli soutěžící získat maximálně 10 bodů a za řešení každé praktické úlohy pak maximálně 15 bodů — celkově tedy maximálně 60 bodů. Při přípravě soutěžních úloh v kategorii P se pravidelně střídají pracovníci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě. Pro tento ročník soutěže všechny úlohy v kategorii P připravili slovenští kolegové.

Slavnostní zahájení III. kola v kategorii A se konalo v neděli 26. března v aule III. ZŠ v Litoměřicích za účasti PaedDr. *Jaroslava Müllnera*, náměstka ministryně školství, mládeže a tělovýchovy ČR, RNDr. *Antonína Sochora*, DrSc., ředitele Matematického ústavu AV ČR, zástupců města Litoměřice a dalších významných představitelů společenského života v Ústeckém kraji. Vlastní soutěž v obou kategoriích se uskutečnila v prostorách litoměřického gymnázia J. Jungmanna.

Pořadatelé III. kola zajistili pro soutěžící rovněž velmi pěkný doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dni absolvovali všichni soutěžící prohlídku historických památek města Litoměřice, kdy navštívili mj. věž Kalich, Máchovu světničku a na závěr také prostory biskupství v Litoměřicích. Poté se soutěžící odebrali do budovy gymnázia, kde zhlédli prezentaci softwaru *MATHEMATICA*, kterou garantovali pracovníci firmy Elkan. Odpoledne po druhém soutěžním dnu absolvovali účastníci ústředního kola autobusový zájezd do blízkého okolí, který byl spojen s výstupem na horu Říp a prohlídkou města Terezín.

Vyhlášení výsledků soutěže proběhlo pro kategorii A ve středu

29. března 2006 a pro kategorii P v sobotu 1. dubna 2006 opět v aule III. ZŠ v Litoměřicích. Především díky sponzorům si nejlepší soutěžící odvezli domů hodnotné ceny.

Všichni vítězové v kategorii A byli pozváni k výběrovému soustředění, které se uskutečnilo v termínu 10.–14. 4. 2006 v Kostelci nad Černými lesy v prostorách tamní Lesnické fakulty Zemědělské Univerzity. Závěrem tohoto soustředění bylo na podkladě dosažených výsledků vybráno šestičlenné družstvo, které reprezentovalo naši republiku na 47. mezinárodní matematické olympiádě ve Slovinsku. Podrobnou informaci o ní stejně jako o 18. mezinárodní olympiádě v informatice najdete na konci této ročenky.

Ústřední komise MO se během tohoto soutěžního ročníku sešla na dvou pravidelných jednáních, a to 9. prosince 2005 na Pedagogické fakultě UK v Praze a dále 27. března 2006 v Litoměřicích u příležitosti konání ústředního kola MO.

Pro nejlepší řešitele krajských kol v kategoriích B a C uspořádala Ústřední komise MO v termínu 30. 5.–6. 6. 2006 tradiční soustředění, jehož se zúčastnilo 40 žáků vybraných ze všech krajů republiky. Lektorsky se na tomto soustředění podíleli doc. Boček, doc. Calda, doc. Šimša, dr. Dula, dr. Leischner, dr. Švrček a dr. Hrubý. Podobně pro nejlepší řešitele kategorie A (všichni nematurující řešitelé, kteří se kvalifikovali do III. kola kategorie A) uspořádala ÚK MO přípravné soustředění v Janských Lázních (10.–16. 9. 2006), kterého se zúčastnilo celkem 22 pozvaných soutěžících. Zaměstnání a přednášky zde vedli členové ÚK MO — doc. Šimša, dr. Švrček, dr. Horák, doc. Tlustý a dr. Zhouf.

K přípravě našich i slovenských olympioniků se rozhodla každoročně přispívat Společnost Otakara Borůvky (SOB), která ve spolupráci s Gymnáziem Uherské Hradiště (GUH) uspořádala poprvé ve dnech 19.–23. června 2006 v Hluku u Uherského Hradiště česko-slovenské soustředění před MMO. Největší uznání patří řediteli GUH doc. Botkovi a členům SOB dr. Kaňovskému a doc. Půžovi. Protože šlo o první akci svého druhu, popišme ji v této ročence podrobněji.

Tato společná pětidenní příprava reprezentačních družstev České a Slovenské republiky byla plně financována z nestátních prostředků, které SOB zajistila u sponzorů podporujících rozvoj mladých matematických talentů. Profesor Otakar Borůvka, jeden z největších brněnských matematiků 20. století, po celý svůj aktivní život podporoval spolupráci českých a slovenských vědců v matematickém výzkumu. Moravské Slovácko, kde se podle záměru SOB bude česko-slovenské soustředění před

MMO konat pravidelně, bylo vybráno pro blízkost česko-slovenské hranice, ale též jako rodný kraj profesora Borůvky (který v letech 1911–1914 uherskohradišťské gymnázium absolvoval). Přednášky v Hluku vedli dr. Horák, dr. Kaňovský ml., dr. Panák, doc. Šimša a dr. Švrček. Během soustředění proběhla též půldenní soutěž a slavnostní odpoledne na GUH u příležitosti 80. výročí vyřešení tzv. *dopravního problému* (v ohodnoceném grafu) O. Borůvkou. Problém byl motivován úkolem projektu elektrifikace jižní Moravy (1926).

Závěrem této stručné zprávy o průběhu celého 55. ročníku MO se patří poděkovat všem zainteresovaným učitelům matematiky a informatiky na středních i základních školách za jejich neocenitelnou pomoc při práci s mladými matematickými a informatickými talenty v České republice. Bez jejich pomoci si zdárný chod nejstarší předmětové soutěže nelze představit.

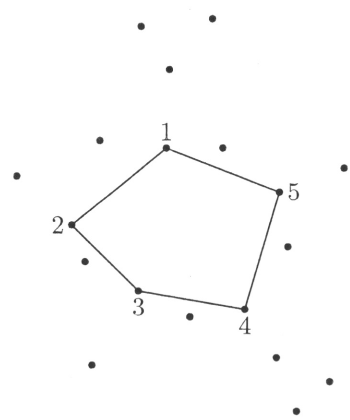
Projev předsedy Ústřední komise MO při slavnostním zahájení ústředního kola 55. ročníku MO v Litoměřicích

Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,

ke zpestření programu tohoto slavnostního shromáždění chci přispět vyprávěním o jednom zajímavém matematickém výsledku z uplynulého roku 2005. Byl to objev, který sice unikl pozornosti sdělovacích prostředků, mohu o něm však tady krátce — a věřím, že docela srozumitelně — promluvit.

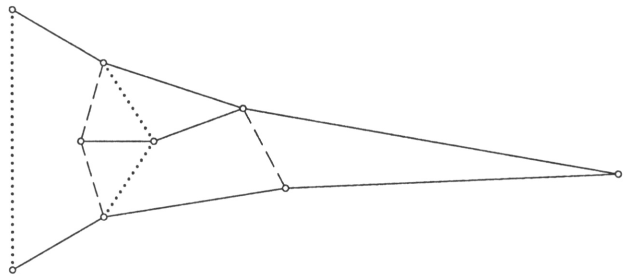
Začnu jedním přirovnáním: Současné fyziky i širokou laickou veřejnost přitahují podivná seskupení hmoty ve vesmíru, kterým říkáme *černé díry*. Některé matematiky zase vzrušují tzv. *mnohoúhelníkové díry* v konečných množinách bodů v rovině.

Tento pojem si přiblížíme pomocí obr. 1, na kterém vidíte množinu několika bodů roviny vyznačených puntíky. Body s čísly 1, 2, 3, 4 a 5 tvoří červeně vyznačenou pětiúhelníkovou díru. Proč díru? Uvnitř červené hranice totiž neleží žádný puntík. Upřesním, že obecně hranice díry musí být *konvexní* mnohoúhelník a že všechny body zkoumaných množin musí být *v obecné poloze*, tedy žádné tři z nich nesmějí ležet v přímce.



Obr. 1

Od roku 1978 odborníky zajímá otázka, kterou položil světoznámý matematik *Paul Erdös* (1913–1996): Kolik nejméně bodů musí mít množina, aby v ní zaručeně existovala k-úhelníková díra s daným počtem vrcholů k? Na obr. 2 vidíte příklad množiny devíti bodů bez pětiúhelníkové díry. Podíváte-li se pozorně, objevíte, že puntíky vytvářejí pouze dva konvexní pětiúhelníky. Nejedná se však o díry, neboť uvnitř každého

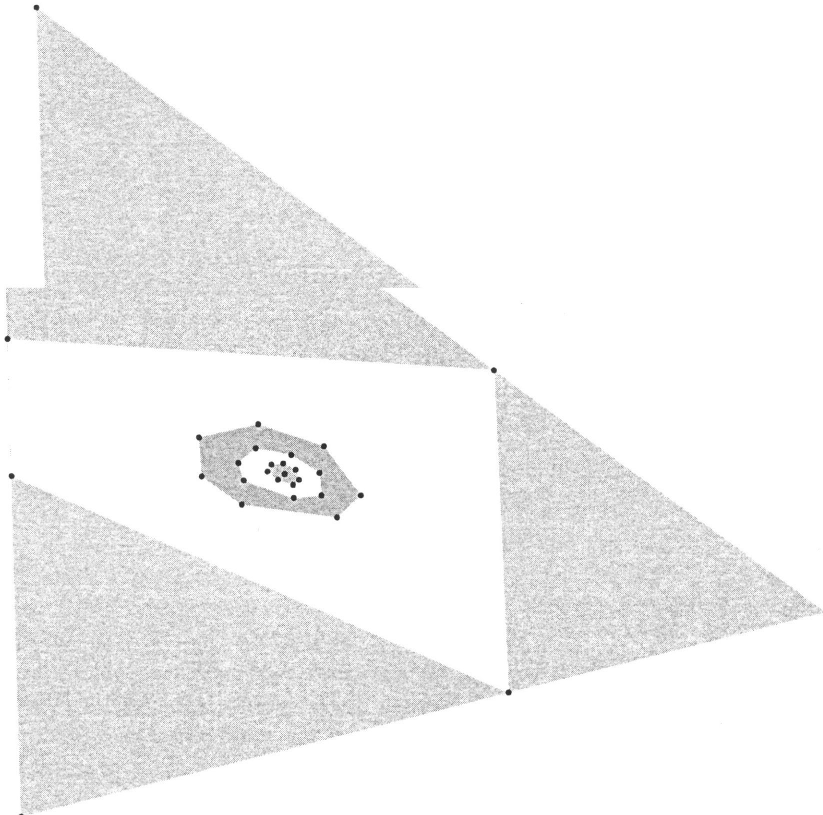


Obr. 2

z obou pětiúhelníků leží jeden puntík. Všech puntíků na obrázku je devět, kdyby jich bylo více, tedy alespoň deset, pětiúhelníková díra už by se určitě našla. To by přítomní soutěžící (doufám alespoň někteří) patrně dokázali, na programu olympiády to však zítra ani pozítří nebude.

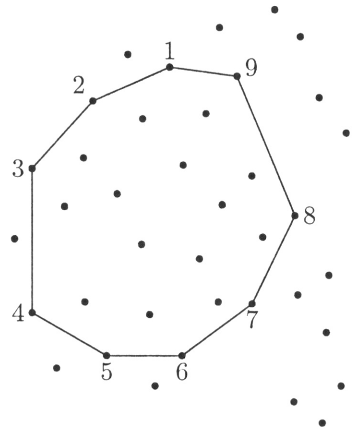
Teď prozradím jedno velké překvapení z roku 1983: Kanaďan *Joseph D. Horton* sestrojil příklady množin s libovolně velkým počtem bodů, které nemají žádnou sedmiúhelníkovou díru. Přeskočil jsem však tím výsledkem otázku šestiúhelníkových děr, jak je to s nimi? Už v roce 1980 byla objevena množina 20 bodů bez šestiúhelníkové díry, v roce 1989 množina téže vlastnosti o 26 bodech. V roce 2003 Holanďan *Mark Overmars* objevil pomocí počítače různé množiny 29 bodů bez šestiúhelníkové díry. Jednu z nich vám přiblížím na následujícím obr. 3, můžete se přiblížit i vy, budete-li špatně vidět. Kdyby puntíky měly mít kvůli rozlišení celočíselné souřadnice, potřebovali bychom k nakreslení čtverec o straně 1 260 jednotek.

Overmars ve svém článku napsal: program s náhodnými prvky běžel na počítači Pentium III 500 MHz nepřetržitě několik měsíců. Vždy po několika dnech počítač ohlásil nalezení další maximální množiny bez šestiúhelníkové díry. Byly to množiny různé, ale všechny měly 29 bodů, nikdy více. Navíc tyto množiny měly společnou strukturu, jakou vidíte na obrázku: vnější slupkou byl vždy trojúhelník, další slupkou směrem dovnitř byl čtyřúhelník, následovaly tři sedmiúhelníky a poslední byl jediný bod uprostřed. Já ten obrázek schovám, stejně bychom museli testovat desítky šestiúhelníků, jejichž vrcholy leží ne na jedné, ale několika slupkách, abychom prokázali, že žádná šestiúhelníková díra tady neexistuje.



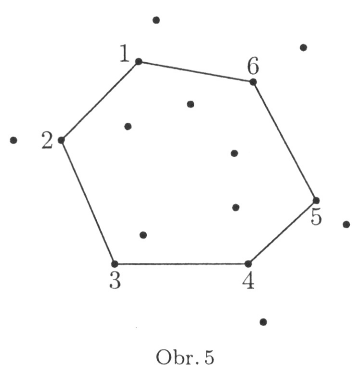
Obr. 3

Vraťme se od počítačových experimentů k původní Erdösově teoretické otázce a vysvětleme, proč je rok 2005 mezníkem v její historii. Podařilo se totiž alespoň principiálně vyřešit otázku existence šestiúhelníkových děr. Německý matematik *Tobias Gerken* dokázal, že šestiúhelníkovou díru má každá taková množina bodů, která obsahuje konvexní devítiúhelník, i když netvoří díru (obr. 4). A to už bylo vyhráno, neboť od roku 1935 je známo, že pro libovolné číslo k se v libovolné dostatečně početné množině najde konvexní k-úhelník. Konkrétně pro $k = 9$ stačí, aby množina měla 1 717 bodů. Pravděpodobně stačí mnohem méně, totiž 129 bodů, ale to je zase jedna z jiných dosud nedokázaných Erdösových hypotéz. Dnes už tedy s jistotou víme, že šestiúhelníkovou díru má každá množina o alespoň 1 717 bodech.



Obr. 4

Gerken své tvrzení dokázal zcela elementárními prostředky, důkaz však zabírá 39 časopiseckých stran. Jednodušší, čtyřstránkový důkaz existence šestiúhelníkových děr vymyslel zcela nedávno Čech *Pavel Valtr*, docent pražské Univerzity Karlovy. „Nevýhodou" Valtrova postupu je, že jeho algoritmus hledání šestiúhelníkové díry vede k horšímu odhadu pro minimální počet bodů, než je Gerkenových 1 717. To však tolik nevadí, když tento minimální počet bude nejspíše řádově v desítkách (třeba přesně 3 desítky, jak věří Mark Overmars). Nalezení tohoto čísla je v současné době patrně beznadějně složitý problém. Pro srovnání uvedu mnohem jednodušší otázku z téhož soudku geometrie, na kterou neznáme odpověď až podezřele dlouhou dobu: kolik nejméně bodů musí mít množina, aby v ní existoval konvexní šestiúhelník, když to nyní nemusí být díra (obr. 5)? Ví se pouze, že hledané číslo je nejméně 17 a nejvíce 37.



Obr. 5

Tím mé vyprávění o mnohoúhelníkových dírách končí. V návaznosti na ně popřeji vám, milí soutěžící, ať zítra a pozítří sepíšete jen taková řešení zadaných úloh, která žádné díry (tedy místa postrádající logiku) obsahovat nebudou. Prohlašuji ústřední kolo 55. ročníku Matematické olympiády za zahájené.

Tabulka 1

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 55. ročníku MO

Kraj	Kategorie A S	A U	B S	B U	C S	C U	P S	P U	Celkem S	Celkem U
Praha	99	59	98	41	125	68	8	8	330	176
Středočeský	77	39	58	27	81	29	12	8	228	103
Jihočeský	62	54	42	34	69	48	3	3	176	139
Plzeňský	36	18	37	23	82	36	0	0	155	77
Karlovarský	10	5	19	14	17	11	0	0	46	30
Ústecký	36	31	46	20	69	25	0	0	151	76
Liberecký	64	21	41	14	49	10	7	5	161	50
Královéhradecký	38	23	48	26	37	20	6	4	129	73
Pardubický	44	20	41	23	28	17	12	7	125	67
Vysočina	61	43	54	31	69	42	6	3	190	119
Jihomoravský	150	89	123	70	131	79	5	5	409	243
Zlínský	93	42	87	30	98	41	16	10	294	123
Olomoucký	31	19	42	18	49	18	1	1	123	56
Moravskoslezský	65	40	78	41	87	44	22	21	252	146
ČR	866	503	814	412	991	488	98	75	2 769	1 478

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 55. ročníku MO

Kraj	Kategorie A S	A U	B S	B U	C S	C U	P S	P U	Celkem S	Celkem U
Praha	57	16	37	29	59	17	7	2	160	64
Středočeský	38	7	22	7	20	3	7	1	87	18
Jihočeský	51	4	33	12	40	8	3	1	127	25
Plzeňský	18	1	21	3	30	8	0	0	69	12
Karlovarský	5	0	14	1	11	3	0	0	30	4
Ústecký	31	0	20	2	22	5	0	0	73	7
Liberecký	20	4	12	5	10	3	5	3	47	15
Královéhradecký	23	6	26	16	20	9	4	2	73	33
Pardubický	20	5	23	14	17	2	7	5	67	26
Vysočina	39	7	27	10	26	6	3	2	95	25
Jihomoravský	85	18	61	15	73	22	5	2	224	57
Zlínský	42	5	29	9	37	4	10	4	118	22
Olomoucký	19	5	18	9	17	4	1	0	55	18
Moravskoslezský	39	6	37	10	39	13	21	4	136	33
ČR	487	84	380	142	421	107	73	26	1 361	359

S ... počet všech soutěžících U ... počet úspěšných řešitelů

Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO
v kategoriích A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie jsou dle dostupných výsledků uvedeni všichni úspěšní řešitelé, kteří skončili do desátého místa. Označení G znamená gymnázium.

Kraj Praha

Kategorie A

1. *Hoang Vo Viet*, G Praha 4, Na Vítězné pláni
2. *Adam Přenosil*, G Praha 3, Sladkovského

3.–5. *Lukáš Malina*, G Ch. Dopplera, Praha 5
Roman Smrž, G E. Krásnohorské, Praha 4
Radek Žlebčík, G Ch. Dopplera, Praha 5

6. *Miroslav Kolář*, G Praha 4, Na Vítězné pláni
7. *Ondřej Liška*, G J. Heyrovského, Praha 5

8.–9. *Tran Minh Hoang*, G Ch. Dopplera, Praha 5
Matěj Korvas, G J. Seiferta, Praha 9

10. *Vojtěch Horký*, G Praha 6, Nad Alejí

Kategorie B

1. *Hoang Vo Viet*, G Praha 4, Na Vítězné pláni
2. *Jan Smejkal*, G Praha 6, Arabská
3. *Alena Skálová*, G Praha 4, Na Vítězné pláni

4.–7. *Lukáš Drápal*, G Ch. Dopplera, Praha 5
Jan Hajič, AG Praha 2, Korunní
Jakub Marian, G Praha 9, Litoměřická
Markéta Palovská, G Praha 5, Pod Žvahovem

8. *František Navrátil*, G Praha 9, Litoměřická
9. *Zuzana Dortová*, G Praha 8, U libeňského zámku

10.–13. *Matěj Peterka*, G Praha 6, Nad Alejí
Jakub Marčiny, G Praha 4, Konstantinova
Roman Smrž, G E. Krásnohorské, Praha 4
Pavla Markupová, G J. Nerudy, Praha 1

Kategorie C

1. *Jakub Töpfer*, G J. Keplera, Praha 6
2.–3. *Karolína Rezková*, G Praha 10, Voděradská
Matěj Veselský, G J. Keplera, Praha 6
4. *Miroslav Olšák*, G Praha 5, Pod Žvahovem
5.–7. *Vojtěch Kovařík*, G J. Nerudy, Praha 1
Karel Pajskr, G J. Keplera, Praha 6
Josef Tkadlec, G J. Keplera, Praha 6
8.–10. *Mirka Dřínková*, G J. Keplera, Praha 6
Jan Jirků, G Praha 7, Nad Štolou
Jan Strnad, G J. Keplera, Praha 6

Kategorie P

1. *Daniel Marek*, G Ch. Dopplera, Praha 5
2. *Roman Smrž*, G E. Krásnohorské Praha 4

Středočeský kraj

Kategorie A

1. *Lenka Slavíková*, G Mnichovo Hradiště
2. *Tomáš Sixta*, G Kolín
3.–5. *Lukáš Hermann*, GJP Mladá Boleslav
Petr Jakovec, G Kladno, nám. E. Beneše
Ondřej Žižka, G Benešov
6.–7. *Václav Gergelits*, G Benešov
Vitalij Chalupník, G Slaný

Kategorie B

1. *Tomáš Gergelits*, G Benešov

2. *Lukáš Beran*, G Benešov
3. *Matouš Macháček*, G Říčany
4. *Josef Muller*, G Dr. Josefa Pekaře, Mladá Boleslav

5.–6. *Martin Beneš*, G Mělník
Ota Kukral, G Dr. Josefa Pekaře, Mladá Boleslav

7. *Václava Sedlmajerová*, G Čáslav

Kategorie C

1. *Barbora Musilová*, G Dobříš
2. *Martin Jedlička*, G Benešov
3. *Miroslav Mrázek*, G Vlašim

Kategorie P

1. *Lukáš Beran*, G Benešov

Jihočeský kraj

Kategorie A

1. *Eliška Lehečková*, G České Budějovice, Česká
2. *Michal Pavelka*, G Strakonice
3. *Jan Záloha*, G Písek
4. *Jiří Kníže*, G Strakonice

Kategorie B

1. *Martina Vaváčková*, G P. de Coubertina, Tábor
2. *Martin Pecka*, G V. Nováka, Jindřichův Hradec
3. *Libor Peltan*, G České Budějovice, Česká
4. *Luděk Míka*, G Strakonice

5.–7. *František Batysta*, G J. V. Jirsíka, České Budějovice
Jakub Reitmajer, G P. de Coubertina, Tábor
Miroslav Vacek, G České Budějovice, Jírovcova

8.–9. *Matyáš Kopp*, G České Budějovice, Jírovcova
Petr Petrouš, G České Budějovice, Jírovcova

10.–12. *Kamil Pekárek*, G V. Nováka, Jindřichův Hradec

Ondřej Soukup, G České Budějovice, Jírovcova
Ondřej Vlk, G České Budějovice, Jírovcova

Kategorie C

1. *Jan Matějka*, G České Budějovice, Jírovcova
2. *Helena Pučelíková*, G Milevsko
3. *Pavel Veselý*, G Strakonice

4.–5. *Jan Kubů*, G Strakonice
Tereza Nedvědová, G České Budějovice, Jírovcova

6.–8. *Šárka Bohoňková*, Česko-anglické G, České Budějovice
Jan Čanda, Biskupské G J. N. Neumanna České Budějovice
Kamil Stuchlík, G České Budějovice, Jírovcova

Kategorie P

1. *Josef Pihera*, G Strakonice

Plzeňský kraj

Kategorie A

1. *Tomáš Jirotka OkB*, G J. Vrchlického, Klatovy

Kategorie B

1. *Jindřich Havlík*, G Plzeň, Mikulášské nám.
2. *Vladislav Richter*, G Plzeň, Mikulášské nám.
3. *Jiří Kubeš*, G L. Pika, Plzeň

Kategorie C

1.–2. *Diana Marková*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Nguyen Van Minh, G Tachov

3. *Jakub Krauz*, Masarykovo G, Plzeň

4.–5. *Kateřina Nová*, SPŠE Plzeň
Dalibor Pátek, G Plzeň, Mikulášské nám.

6.–7. *Michal Bugoš*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Petr Nedvěd, G J. Vrchlického, Klatovy
8. *Jana Vavřičková*, G Plzeň, Mikulášské nám.

Karlovarský kraj

Kategorie A

1. *Eva Černohorská*, První české G, Karlovy Vary

Kategorie B

1. *Marek Pospíšil*, G Cheb

Kategorie C

1. *Viktor Löffelmann*, G Mariánské Lázně
2.–3. *Tomáš Nguyen*, SCHŠ Cheb
Jakub Papež, SCHŠ Cheb

Ústecký kraj

Kategorie B

1. *Tomáš Pajma*, G Most, Čs. armády
2. *Michal Neubauer*, G Ústí nad Labem, Jateční

Kategorie C

1. *Marcela Höferová*, G V. Hlavatého, Louny
2.–3. *Li Wang*, G Roudnice nad Labem
Václav Palík, G Ústí nad Labem, Jateční
4.–5. *Tuan Le Sy*, SPŠ Teplice
Libor Vytlačil, G Roudnice nad Labem

Liberecký kraj

Kategorie A

1. *Hana Bendová*, G Česká Lípa
2. *Jan Hrnčíř*, G F. X. Šaldy, Liberec
3. *Tomáš Kobrle*, G Jilemnice

Kategorie B

1. *Bohumil Vybíralík*, G F. X. Šaldy, Liberec
2. *Tomáš Nácovský*, G a SPeŠ Liberec, Jeronýmova

3.–5. *Pavel Beran*, G Jablonec n. N., U Balvanu
Jan Pešek, G Česká Lípa
Jakub Škoda, G F. X. Šaldy, Liberec

Kategorie C

1. *Jan Indráček*, G Tanvald

2.–4. *Michaela Dedeciusová*, G a SPeŠ Liberec, Jeronýmova
Klára Holková, G F. X. Šaldy, Liberec
Iveta Jeschkeová, G Tanvald

Kategorie P

1. *Michal Vaner*, G Turnov
2. *Jan Hrnčíř*, G F. X. Šaldy, Liberec
3. *Petr Zadražil*, G Turnov

Královéhradecký kraj

Kategorie A

1. *Jan Voltr*, G J. K. Tyla, Hradec Králové

2.–5. *Martin Berger*, G a SOŠ Úpice
Pavel Kuchyňa, G B. Němcové, Hradec Králové
Libor Šimůnek, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Vendula Uchytilová, G J. K. Tyla, Hradec Králové

6. *Václav Zatloukal*, G F. M. Pelcla, Rychnov nad Kněžnou

Kategorie B

1. *Lukáš Lánský*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Alena Peterová*, G Dobruška
3. *Jakub Zajíc*, G J. K. Tyla, Hradec Králové

4.–5. *Petr Polák*, JG Náchod
Adriana Šmídová, G J. K. Tyla, Hradec Králové

6. *Jiří Maršík*, G J. K. Tyla, Hradec Králové

7.–8. *Jiří Řičař*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Pavel Vydra, Jiráskovo G, Náchod

9.–10. *Jan Borna*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Jakub Kaplan, G J. K. Tyla, Hradec Králové

Kategorie C

1. *Vít Hanousek*, G Trutnov
2. *Martin Šubr*, G Nový Bydžov
3. *Tomáš Zelenka*, G B. Němcové, Hradec Králové

4.–5. *Miroslav Miletín*, G B. Němcové, Hradec Králové
Jaroslav Stárek, Jiráskovo G, Náchod

6.–7. *Jan Lochman*, G Nový Bydžov
Hana Šustková, G Trutnov

8.–9. *Daniel Dvořák*, G Hostinné
Jakub Vlček, Jiráskovo G, Náchod

Kategorie P

1. *Jakub Kaplan*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Lukáš Lánský*, G J. K. Tyla, Hradec Králové

Pardubický kraj

Kategorie A

1. *Tereza Klimošová*, G Lanškroun
2. *Marek Scholle*, G Pardubice, Dašická

3.–5. *Jakub Klečka*, G Přelouč
Helena Šediváková, G Pardubice, Dašická
Lubomír Štěpánek, G Pardubice, Dašická

Kategorie B

1. *František Kalibán*, G Litomyšl
2. *Matěj Soukup*, G Česká Třebová
3.–4. *Jiří Novák*, G Lanškroun
Petra Širůčková, G Polička
5. *Gabriela Šilarová*, G Ústí nad Orlicí
6. *Lukáš Najman*, G Česká Třebová
7.–9. *Tomáš Jakl*, G Moravská Třebová
Marie Kolářová, G Ústí nad Orlicí
Martin Schmidt, G Česká Třebová
10.–11. *Martin Basovník*, G Polička
Tomáš Kotlant, G Pardubice, Dašická

Kategorie C

1. *Filip Petrásek*, G Polička
2. *Edita Dvořáková*, G Ústí nad Orlicí

Kategorie P

1. *Tereza Klimošová*, G Lanškroun
2. *Marek Scholle*, G Pardubice, Dašická

Kraj Vysočina

Kategorie A

1.–2. *Ondřej Hoferek*, G Žďár nad Sázavou
Marie Kolářová, Biskupské G Žďár nad Sázavou
3. *Jan Korbel*, G Jihlava
4. *Mirek Dočekal*, G Jihlava
5.–7. *Milan Dvořák*, G V. Makovského, Nové Město n. M.
Jakub Filipský, G Moravské Budějovice

Iveta Selingerová, G Jihlava

Kategorie B

1. *Michal Kozák*, G Jihlava
2. *Marek Nečada*, G Jihlava
3. *Jan Švíka*, G Jihlava
4. *Jan Máca*, G Třebíč

5.–7. *David Chaloupka*, G Moravské Budějovice
Matěj Klusáček, G Třebíč
Zuzana Matějů, G Pelhřimov

8.–10. *Vojtěch Caha*, G Jihlava
Ondřej Mařík, G Moravské Budějovice
Tomáš Pejchal, G Žďár nad Sázavou

Kategorie C

1.–2. *Michal Koutný*, G Třebíč
Jan Nevoral, G Jihlava

3. *Martin Stehno*, Havlíčkovo G, Havlíčkův Brod

4.–5. *Petr Glajc*, G Žďár nad Sázavou
Adam Růžička, G Třebíč

6. *Ondřej Pelech*, G O. Březiny a SOŠ, Telč

Jihomoravský kraj

Kategorie A

1.–2. *Jakub Opršal*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jan Uhlík, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

3. *Jaromír Kuben*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Vojtěch Říha*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
5. *Alexandr Pícha*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
6. *Zbyněk Konečný*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
7. *Jiří Zelinka*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
8. *Martin Křivánek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
9. *Jan Rygl*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
10. *Aleš Podolník*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie B

1.–2. *Petr Fiala*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Martin Frodl, Biskupské G Brno, Barvičova
3.–4. *Jan Brandejs*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Petr Zábrodský, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
5. *Jan Kovář*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
6.–8. *Ondřej Malach*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jaroslav Novotný, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Lucie Pospíšilová, G Brno, Žižkova
9.–11. *Jaromír Bačovský*, G Brno, T. Novákové
Vojtěch Robotka, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jaroslav Šmíd, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie C

1. *Hana Šormová*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Mojmír Vinkler*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Peter Novák*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Helena Paschkeová*, G Brno, T. Novákové
5.–8. *Zuzana Komárková*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Antonín Povolný, Biskupské G Brno, Barvičova
Alexander Slávik, G Brno, T. Novákové
Jana Štrosová, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
9.–11. *Lenka Franců*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Ondřej Hlouša, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jan Kvarda, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie P

1. *Martin Veškrna*, G Brno, Vídeňská
2. *Martin Křivánek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Zlínský kraj

Kategorie A

1. *Marek Pechal*, G Zlín, Lesní čtvrť

2. *Pavel Šalom*, G Rožnov pod Radhoštěm
3. *Jan Váňa*, G Zlín, Lesní čtvrť
4. *Ondřej Bílka*, G Zlín, Lesní čtvrť
5. *Jan Doleček*, G Kroměříž

Kategorie B

1. *Martina Rosíková*, G Zlín, Lesní čtvrť
2. *Martin Zapletal*, G L. Jaroše, Holešov
3. *Petr Sokola*, SPŠ Zlín

4.–5. *Radim Sviták*, G L. Jaroše, Holešov
Jiří Václavík, Masarykovo G, Vsetín
6.–9. *Tomáš Grísa*, SPŠS Vsetín
Petra Papežíková, G Holešov
Rostislav Pečeňa, G Zlín, Lesní čtvrť
Alžběta Pechová, SPŠS Vsetín

Kategorie C

1. *Jan Vaňhara*, G L. Jaroše, Holešov
2. *Jakub Ivanovský*, G Zlín, Lesní čtvrť
3. *Jan Vala*, G Valašské Meziříčí
4. *Veronika Smělá*, Masarykovo G, Vsetín

Kategorie P

1. *Ondřej Bílka*, G Zlín, Lesní čtvrť
2. *Jan Pelc*, G J. A. Komenského, Uherský Brod

3.–4. *Michal Čudrnák*, G L. Jaroše, Holešov
David Němeček, G Rožnov pod Radhoštěm

Olomoucký kraj

Kategorie A

1.–2. *Tomáš Javůrek*, G Jeseník
Anežka Faltýnková, G J. Škody, Přerov
3. *Martin Přemyslovský*, G J. Škody, Přerov

4.–5. *Lukáš Bednařík*, Slovanské G, Olomouc
Jozef Cmar, reálné G, Prostějov

Kategorie B

1. *Petr Kunc*, G Uničov
2. *Jan Havlíček*, G Zábřeh
3. *Pavla Kosová*, G Šternberk
4.–6. *Lucie Kadrmanová*, G Jeseník
Hana Ryšánková, G Šternberk
Lukáš Bednařík, Slovanské G, Olomouc
7.–9. *Jakub Tejchman*, G Jeseník
Martin Šefl, G Uničov
David Mička, VOŠ a SPŠ Šumperk

Kategorie C

1. *Tomáš Kašpárek*, G J. Škody, Přerov
2. *Vít Musil*, G Šumperk
3. *Tomáš Matuška*, G Kojetín
4. *Jiří Horčička*, G Jeseník

Moravskoslezský kraj

Kategorie A

1. *Jaroslav Hančl*, G M. Koperníka, Bílovec
2.–3. *Pavel Motloch*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Tomáš Princ, G Ostrava-Poruba, Čs. exilu
4.–5. *Tomáš Jeziorský*, G M. Koperníka, Bílovec
Michael Kučera, G M. Koperníka, Bílovec
6. *Adam Kubetta*, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie B

1. *Martin Hrtoň*, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Sirui Cheng*, Matiční G, Ostrava

3.–4. *Lukáš Holík*, G M. Koperníka, Bílovec
Tomáš Toufar, G M. Koperníka, Bílovec
5. *Tomáš Raček*, G M. Koperníka, Bílovec
6.–10. *Michael Čermák*, Mendelovo G, Opava
Vojtěch Kozák, G M. Koperníka, Bílovec
Tomáš Matera, G Ostrava-Poruba
Kristina Pindejová, G Český Těšín
Jana Szewieczková, G J. Kainara, Hlučín

Kategorie C

1. *Vojtěch Zwardon*, G Karviná
2.–4. *Hana Bílková*, G Frenštát p. R.
Miroslav Klimoš, G M. Koperníka, Bílovec
Tomáš Miketa, G J. Kainara, Hlučín
5.–6. *Jan Bajer*, G Frýdek-Místek
Jan Kusý, G M. Koperníka, Bílovec
7.–8. *Vojtěch Kaluža*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Jitka Novotná, G M. Koperníka, Bílovec
9. *Lenka Krupová*, G Příbor
10.–13. *Tomáš Horák*, G Ostrava-Poruba, Čs. exilu
Petr Kaděra, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Lukáš Kotlorz, G Karviná
Lenka Turoňová, G Třinec

Kategorie P

1. *Miroslav Klimoš*, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Pavel Motloch*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
3. *Martin Kupec*, Mendelovo G, Opava
4. *Zbyněk Sopuch*, Masarykovo G, Příbor

Výsledky ústředního kola 55. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	Jaromír Kuben, 4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	39 b.
2.	Marek Pechal, 8/8, G Zlín, Lesní čtvrť	38 b.
3.–4.	Jaroslav Hančl, 4/4, G M. Koperníka, Bílovec	36 b.
	Zbyněk Konečný, 3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	36 b.
5.	Jakub Opršal, 4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	27 b.
6.	Pavel Motloch, 5/6, G P. Bezruče, Frýdek-Místek	26 b.
7.	Anežka Faltýnková, 3/4, G J. Škody, Přerov	20 b.
8.	Marek Scholle, 7/8, G Pardubice	19 b.
9.–10.	Tomáš Jeziorský, 3/4, G M. Koperníka, Bílovec	18 b.
	Vojtěch Říha, 4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	18 b.

Další úspěšní řešitelé

11.–12.	Pavel Šalom, 8/8, G Rožnov pod Radhoštěm	17 b.
	Jan Uhlík, 4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	17 b.
13.–15.	Tereza Klimošová, 8/8, G Lanškroun	15 b.
	Adam Přenosil, 8/8, G Praha 3, Sladkovského nám.	15 b.
	Lenka Slavíková, 3/4, G Mnichovo Hradiště	15 b.
16.	Ondřej Hoferek, 8/8, G Žďár n. S.	14 b.
17.–18.	Tomáš Javůrek, 7/8, G Jeseník	13 b.
	Martin Křivánek, 4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	13 b.
19.–22.	Michael Kučera, 4/4, G M. Koperníka, Bílovec	12 b.
	Lukáš Malina, 3/4, G Ch. Dopplera, Praha 5	12 b.
	Jiří Řihák, 3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	12 b.
	Hoang Vo Viet, 3/6, G Praha 4, Na Vítězné pláni	12 b.

Výsledky ústředního kola 55. ročníku MO kategorie P

Vítězové

1.	*Daniel Marek*, 4/4, G Ch. Dopplera, Praha 5	55,0 b.
2.	*Ondřej Bílka*, 4/4, G Zlín, Lesní čtvrť	37,0 b.
3.	*Michal Vaner*, 8/8, G Turnov	36,8 b.
4.	*Josef Pihera*, 7/8, G Strakonice	34,7 b.
5.	*Jan Hrnčíř*, 4/4, G F. X. Šaldy, Liberec	32,0 b.

Další úspěšní řešitelé

6.	*Lukáš Lánský*, 2/4, G J. K. Tyla, Hradec Králové	30,9 b.
7.	*Zbyněk Sopuch*, 8/8, G Příbor	30,8 b.
8.	*Martin Křivánek*, 4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	29,8 b.
9.	*Roman Smrž*, 6/8, G E. Krásnohorské, Praha 4	29,6 b.
10.	*Pavel Motloch*, 5/6, G P. Bezruče, Frýdek-Místek	28,9 b.
11.	*Miroslav Klimoš*, 1/4, G M. Koperníka, Bílovec	25,2 b.

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo m je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 60.

b) Určete všechna přirozená čísla m, pro která je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 120. *(J. Moravčík)*

C – I – 2

Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtěte poloměr kružnice m. Najděte všechna řešení. *(L. Boček)*

C – I – 3

Určete počet všech trojic navzájem různých trojmístných přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým ze tří sčítaných čísel. *(J. Šimša)*

C – I – 4

Je dáno přirozené číslo n ($n \geqq 2$) a reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pro která platí

$$x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1.$$

Dokažte, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqq n.$$

(J. Švrček)

C – I – 5

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu C a P, Q odpovídající paty kolmic vedených bodem D na strany AC a BC. Obsahy trojúhelníků ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočtěte $S_1 : S_3$, jestliže $S_1 : S_2 = 2 : 3$, $S_3 : S_4 = 3 : 8$.

(*P. Novotný*)

C – I – 6

Rozhodněte, které z čísel

$$\sqrt{p+\sqrt{q}}+\sqrt{q+\sqrt{p}}, \qquad \sqrt{p+\sqrt{p}}+\sqrt{q+\sqrt{q}}$$

je větší, jsou-li p a q různá kladná čísla. (*J. Moravčík*)

C – S – 1

Hokejového turnaje se zúčastnila čtyři družstva, přičemž každé sehrálo s každým právě jedno utkání. Počet branek vstřelených v každém utkání dělí celkový počet branek vstřelených v turnaji, přitom v žádných dvou utkáních jich nepadl stejný počet. Kolik nejméně mohlo v turnaji padnout branek?

(*M. Panák*)

C – S – 2

Vrchol C čtverců $ABCD$ a $CJKL$ je vnitřním bodem úsečky AK i úsečky DJ, body E, F, G a H jsou po řadě středy úseček BC, BK, DK a DC. Určete obsah čtyřúhelníku $EFGH$ pomocí obsahů S a T čtverců $ABCD$ a $CJKL$.

(*P. Leischner*)

C – S – 3

Kružnice k, l, m se dotýkají společné tečny ve třech různých bodech a jejich středy leží v přímce. Kružnice k a l stejně jako kružnice l a m mají vnější dotyk. Určete poloměr kružnice l, jestliže poloměry kružnic k a m jsou 3 cm a 12 cm.

(*L. Boček*)

C – II – 1

Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD. Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$.

(*Pavel Novotný*)

C – II – 2

Splňují-li reálná čísla a, b, c, d rovnosti

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1,$$

platí nerovnost

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leqq 3.$$

Dokažte a zjistěte, kdy přitom nastane rovnost. (*J. Švrček*)

C – II – 3

Kružnice k, l s vnějším dotykem leží obě v obdélníku $ABCD$, jehož obsah je $72\,\mathrm{cm}^2$. Kružnice k se přitom dotýká stran CD, DA a AB, zatímco kružnice l se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry kružnic k a l, jestliže poloměr kružnice k je v centimetrech vyjádřen celým číslem.

(*J. Švrček*)

C – II – 4

Najděte všechny dvojice prvočísel p a q, pro které platí

$$p + q^2 = q + 145p^2.$$

(*J. Moravčík*)

Řešení úloh

C – I – 1

a) Číslo $n = m^6 - m^2 = m^2(m^2-1)(m^2+1)$ je vždy dělitelné čtyřmi, protože při sudém m je m^2 dělitelné čtyřmi a při lichém m jsou čísla m^2-1, m^2+1 obě sudá, jedno z nich je dokonce dělitelné čtyřmi a jejich součin je tedy dělitelný osmi. Ze tří po sobě jdoucích přirozených čísel m^2-1, m^2, m^2+1 je právě jedno dělitelné třemi, a proto je i číslo n dělitelné třemi. Je-li m dělitelné pěti, je m^2 dělitelné pěti, dokonce dvaceti pěti. V opačném případě je m tvaru $5k+r$, kde r je rovno některému z čísel 1, 2, 3, 4 a k je přirozené nebo 0. Pak je $m^2 = 25k^2 + 10kr + r^2$ a r^2 se rovná některému z čísel 1, 4, 9, 16. V prvním a v posledním případě je číslo m^2-1 dělitelné pěti, v ostatních dvou případech je číslo m^2+1 dělitelné pěti. Je tedy číslo n vždy dělitelné nesoudělnými čísly 4, 3 a 5, a tedy i jejich součinem 60.

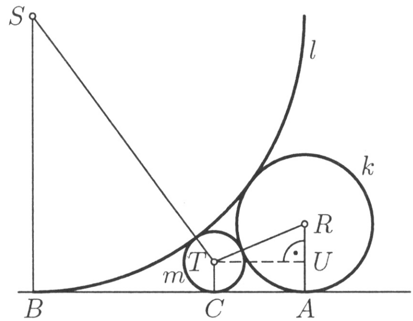
b) Už jsme ukázali, že v případě lichého m je součin $(m^2-1)(m^2+1)$ dělitelný osmi, a číslo $n = m^6 - m^2$ je tedy dělitelné číslem $120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$. Je-li však číslo m sudé, jsou čísla m^2-1, m^2+1 lichá, žádné není dělitelné dvěma. Číslo n je pak dělitelné osmi pouze v případě, že m^2 je dělitelné osmi, tedy m je dělitelné čtyřmi. Číslo n je pak dělitelné šestnácti, třemi a pěti, a proto dokonce číslem 240.

Naše výsledky můžeme shrnout: Číslo $n = m^6 - m^2$ je dělitelné číslem 120, právě když m je liché nebo dělitelné čtyřmi.

C – I – 2

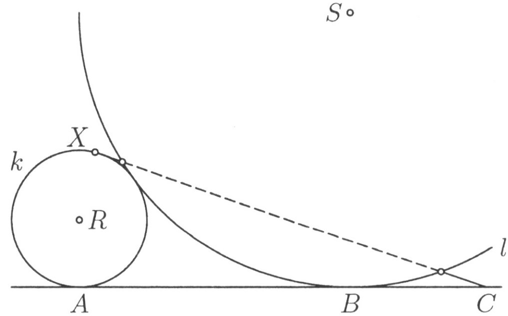
Označme po řadě R, S, T středy a A, B, C body dotyku kružnic k, l, m na společné tečně a $r = 3$, $s = 12$ a t jejich poloměry (délky a obsahy budeme počítat bez jednotek kvůli jednoduššímu dosazování). V lichoběžníku (který v případě rovnosti $r = t$ je ovšem obdélníkem) $ARTC$ (obr. 6) je $|RT| = r + t$. Označíme-li U průsečík přímky AR a přímky vedené bodem T rovnoběžně s AC, je $|RU| = |r - t|$. Z pravoúhlého trojúhelníku RUT plyne $|UT| = |AC| = \sqrt{(r+t)^2 - (r-t)^2} = 2\sqrt{rt} = 2\sqrt{3t}$. Analogicky bychom z lichoběžníků $CTSB$ a $ARSB$ dostali vztahy $|BC| = 2\sqrt{st} = 4\sqrt{3t}$ a $|AB| = 2\sqrt{rs} = 2\sqrt{3 \cdot 12} = 12$.

Uvažujme nejdříve případ, kdy bod C leží mezi body A a B. Je pak $2\sqrt{3t} + 4\sqrt{3t} = 12$, odkud $t = \frac{4}{3}$. Jestliže bod A leží mezi body C a B, dostaneme obdobně rovnici $2\sqrt{3t} + 12 = 4\sqrt{3t}$, odkud $t = 12$.



Obr. 6

Rovnice $12 + 4\sqrt{3t} = 2\sqrt{3t}$, kterou dostaneme pro polohu bodu B mezi body A a C, nemá zjevně žádné řešení. Že takový případ není možný, je vidět i z obr. 7, protože každá kružnice, která se dotýká kružnice k v bodě X různém od A a přitom obsahuje bod C polopřímky opačné k polopřímce BA, musí ve svém vnitřku obsahovat i tětivu kružnice l (vyznačenou na obrázku), takže se jí nemůže dotýkat.



Obr. 7

Poloměr kružnice m je tedy $\frac{4}{3}$ cm nebo 12 cm.

C – I – 3

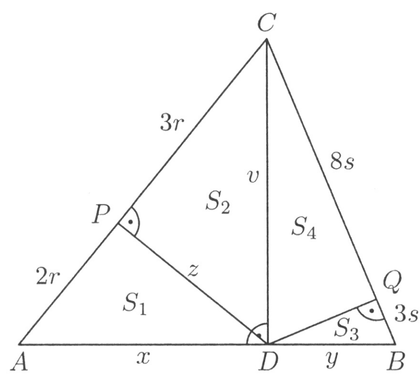
Nechť x, y, z je taková trojice navzájem různých přirozených čísel, pro kterou platí: Každé z nich dělí jejich součet $x+y+z$, takže x dělí $y+z$, y dělí $x+z$ a z dělí $x+y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $x < y < z$. Je tedy $x+y = kz$ pro vhodné přirozené k. Protože je zároveň $x+y < 2z$, je nutně $k = 1$, $x+y = z$. Dále y dělí $x+z = 2x+y < 3y$, takže $2x+y = 2y$, $y = 2x$. Tři přirozená čísla daných vlastností mají tedy tvar x, $y = 2x$, $z = 3x$, kde x je přirozené. Protože mají být trojmístná, musí být $x \geqq 100$, $3x \leqq 999$, takže $100 \leqq x \leqq 333$. Hledaný počet trojic je $333 - 99 = 234$.

C – I – 4

Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou podle podmínek úlohy nenulová a všechna s lichými indexy jsou si rovna, rovnají se nenulovému číslu a; všechna čísla se sudými indexy jsou si také rovna, rovnají se $1/a$, převrácené hodnotě a. Je-li n liché, plyne z rovnice $x_1x_2 = x_nx_1$ rovnost $x_n = x_2$, takže všechna x_i jsou stejná, rovnají se 1 nebo -1, neboť to jsou jediné hodnoty a, pro něž $a = 1/a$, takže součet jejich druhých mocnin je n. Je-li n sudé, rovná se součet druhých mocnin všech hodnot x_i součtu $n/2$ hodnot a^2 a $n/2$ hodnot $1/a^2$. Avšak $a^2 + 1/a^2 \geqq 2$ pro každé nenulové číslo a, což plyne z nerovnosti $(a^2 - 1)^2 \geqq 0$. Proto je součet druhých mocnin všech čísel x_i větší nebo roven n.

C – I – 5

Označme $x = |AD|$, $y = |BD|$, $v = |CD|$ (obr. 8). Z podobnosti trojúhelníků ADP a DCP plyne $x^2 : v^2 = S_1 : S_2 = 2 : 3$. Podobně z podobnosti trojúhelníků DBQ, CDQ plyne $y^2 : v^2 = S_3 : S_4 = 3 : 8$. Odtud $x^2 : y^2 = (2 \cdot 8) : (3 \cdot 3) = 16 : 9$, $x : y = 4 : 3$. Trojúhelníky ADC, DBC mají společnou výšku, proto $(S_1 + S_2) : (S_3 + S_4) = x : y = 4 : 3$. Za S_2 sem dosadíme $\frac{3}{2}S_1$, za S_4 dosadíme $\frac{8}{3}S_3$ a po úpravě dostaneme $S_1 : S_3 = 88 : 45$.



Obr. 8

Jiné řešení. Z poměru obsahů trojúhelníku ADP a trojúhelníku CDP se společnou výškou DP plyne, že je $|AP| : |CP| = 2 : 3$, takže můžeme psát $|AP| = 2r$, $|CP| = 3r$, podobně $|BQ| = 3s$, $|CQ| = 8s$. Označme $x = |AD|$, $y = |BD|$, $v = |CD|$ a $z = |PD|$ (obr. 8). Z pravoúhlých trojúhelníků ADP, ADC, PDC plyne $x^2 = 4r^2 + z^2$, $z^2 + 9r^2 = v^2 = 25r^2 - x^2$. Odtud $z^2 = 16r^2 - x^2 = 16r^2 - (4r^2 + z^2)$, neboli $2z^2 = 12r^2$, $z = r\sqrt{6}$, $x = r\sqrt{10}$, $v = r\sqrt{15}$, $S_1 = r^2\sqrt{6}$. Analogicky bychom dostali z trojúhelníků BDQ, BDC, QDC, že $v = 2s\sqrt{22}$, $y = s\sqrt{33}$, $S_3 = 3s^2\sqrt{6}$, tedy užitím vztahu $v^2 = 15r^2 = 88s^2$ dostaneme výsledek $S_1 : S_3 = 88 : 45$.

C – I – 6

Daná čísla, která označíme po řadě A a B, nebudeme porovnávat přímo. Místo toho porovnáme jejich druhé mocniny a využijeme poznatku, že pro libovolná kladná čísla u, v platí $u > v$, právě když platí $u^2 > v^2$. Pro daná čísla máme

$$A^2 = p + \sqrt{q} + 2\sqrt{(p + \sqrt{q})\,(q + \sqrt{p})} + q + \sqrt{p},$$
$$B^2 = p + \sqrt{p} + 2\sqrt{(p + \sqrt{p})\,(q + \sqrt{q})} + q + \sqrt{q}$$

a vidíme, že mimo „dlouhých" odmocnin jsou na pravých stranách obou vyjádření čtyři stejní sčítanci (v odlišných pořadích). Proto nerovnost $A^2 > B^2$ platí, právě když je „dlouhá odmocnina" v prvním řádku větší než ve druhém řádku, neboli když pro odmocňované součiny platí nerovnost

$$(p + \sqrt{q})\,(q + \sqrt{p}) > (p + \sqrt{p})\,(q + \sqrt{q})\,.$$

Roznásobením a dalšími algebraickými úpravami dostaneme postupně ekvivalentní nerovnosti

$$pq + \sqrt{pq} + p\sqrt{p} + q\sqrt{q} > pq + \sqrt{pq} + p\sqrt{q} + q\sqrt{p},$$
$$(p - q)\sqrt{p} - (p - q)\sqrt{q} > 0,$$
$$(p - q)(\sqrt{p} - \sqrt{q}) > 0.$$

Vysvětlíme, proč poslední nerovnost (a tedy i výchozí nerovnost $A > B$) v případě $p \neq q$ vždy platí. Je-li totiž $p > q$, je i $\sqrt{p} > \sqrt{q}$, takže oba činitelé součinu $(p - q)(\sqrt{p} - \sqrt{q})$ jsou kladní; je-li $p < q$, jsou oba činitelé naopak záporní, v obou případech je proto daný součin kladný.

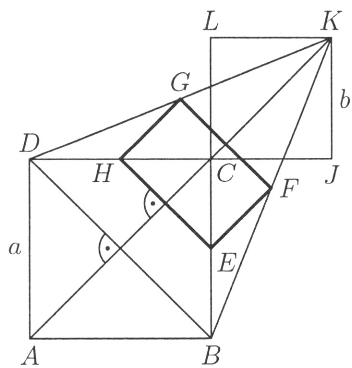
Odpověď: Větší je první z daných dvou čísel.

C – S – 1

Jestliže každé družstvo sehraje s každým jedno utkání, sehraje každé družstvo v turnaji celkem tři utkání a počet všech utkání bude $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$. Máme tedy najít šest různých přirozených čísel (nula nedělí žádné číslo) s nejmenším možným součtem tak, aby byl tento součet dělitelný každým z šesti sčítanců. Nejmenší součet šesti různých přirozených čísel je $1+2+3+4+5+6 = 21$, ten však není dělitelný např. dvěma nebo šesti. Další možností je nahradit číslo 6 číslem 7, součet bude 22. Ten však není dělitelný např. třemi. Součet 23 nemůže vyhovovat, protože číslo 23 je prvočíslo, je dělitelné pouze dvěma přirozenými čísly. Konečně číslo 24 je součtem čísel 1, 2, 3, 4, 6 a 8, přitom je číslo 24 dělitelné každým z čísel 1, 2, 3, 4, 6, 8. V turnaji proto mohlo padnout 24 branek, ne však méně.

C – S – 2

Označme $a = \sqrt{S}$, $b = \sqrt{T}$ strany čtverců $ABCD$, $CJKL$. Úsečka EH je střední příčkou trojúhelníku BCD (obr. 9), úsečka FG je střední příčkou



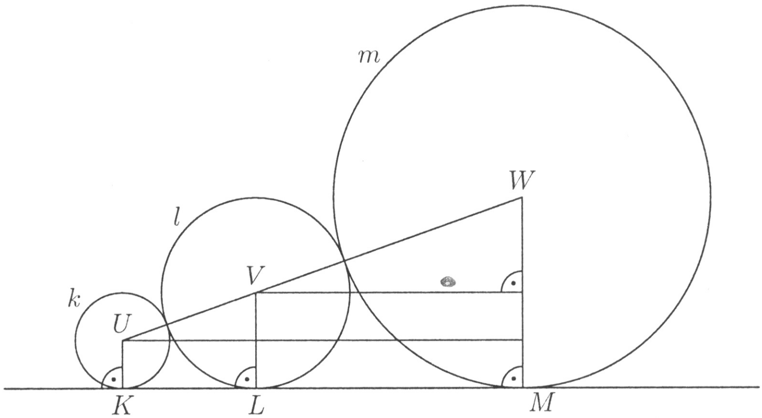
Obr. 9

v trojúhelníku BKD, proto je $2|EH| = 2|FG| = |BD|$ a úsečky EH, FG jsou rovnoběžné s BD. Podobně je úsečka HG střední příčkou v trojúhelníku DCK a úsečka EF je střední příčkou v trojúhelníku BCK. Proto je $2|HG| = 2|EF| = |CK|$ a úsečky HG, EF jsou rovnoběžné s CK, a tedy kolmé na JL a BD. Rovnoběžník $EFGH$ je tudíž obdélník s obsahem

$$|EF| \cdot |FG| = a\,\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot b\,\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{ST}.$$

C – S – 3

Vzájemná poloha kružnic a jejich společné tečny musejí vypadat jako na obr. 10, kde jsme písmeny K, L, M označili body dotyku kružnic k,



Obr. 10

l, m na společné tečně, U, V, W jejich středy a r poloměr kružnice l (v centimetrech). Z pravoúhlých lichoběžníků $KLVU$, $LMWV$, $KMWU$ plyne podle Pythagorovy věty

$$|KL|^2 = (r+3)^2 - (r-3)^2 = 12r,$$
$$|LM|^2 = (12+r)^2 - (12-r)^2 = 48r$$

a

$$|KM|^2 = (3+2r+12)^2 - (12-3)^2 = 4r^2 + 60r + 144.$$

Jelikož $|KL| + |LM| = |KM|$, dostaneme z prvních dvou vztahů

$$|KM|^2 = (|KL| + |LM|)^2 = |KL|^2 + 2|KL||LM| + |LM|^2 = \\ = 60r + 2\sqrt{12 \cdot 48}\, r,$$

což spolu s třetím vztahem dává po úpravě pro r rovnici

$$4r^2 - 48r + 144 = 0.$$

Protože $4r^2 - 48r + 144 = 4(r^2 - 12r + 36) = 4(r-6)^2$, má tato rovnice jediné řešení $r = 6$ a poloměr kružnice l je tedy 6 cm.

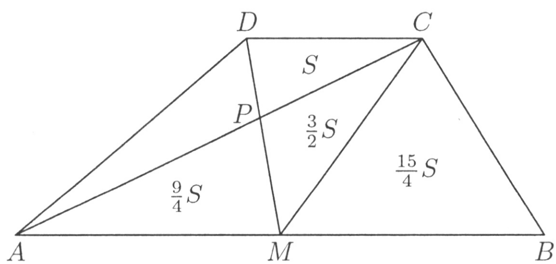
C – II – 1

Výpočet založíme na dvou známých pravidlech:

(1) Jsou-li dva trojúhelníky podobné s koeficientem podobnosti k, je poměr jejich obsahů roven k^2.

(2) Leží-li nějaké tři body X, Y, Z v jedné přímce a bod V mimo ni, je poměr obsahů trojúhelníků XYV a YZV roven poměru $|XY| : |YZ|$.

Ze shodnosti střídavých úhlů mezi rovnoběžkami AB a CD plyne, že trojúhelníky AMP a CDP jsou podle věty *uu* podobné, a to s koeficientem $|AM| : |CD| = \frac{3}{2}$. Označíme-li S obsah trojúhelníku CDP, je obsah trojúhelníku AMP roven $\left(\frac{3}{2}\right)^2 S = \frac{9}{4}S$ a z rovností $|AP| : |CP| = |MP| : |DP| = \frac{3}{2}$ plyne, že obsah každého z trojúhelníků APD a MPC je roven $\frac{3}{2}$ obsahu trojúhelníku CDP, tedy $\frac{3}{2}S$. Obsahy trojúhelníků AMC a BMC jsou stejné, a rovnají se tedy $\frac{9}{4}S + \frac{3}{2}S = \frac{15}{4}S$ (obr. 11). Odtud plyne, že obsah čtyřúhelníku $MBCP$ je $\frac{3}{2}S + \frac{15}{4}S = \frac{21}{4}S$, hledaný poměr je proto 4 : 21.



Obr. 11

C – II – 2

Z předpokladů plyne $c^2 = a^2$, $d^2 = b^2$, tedy $|c| = |a|$, $|d| = |b|$.

Je-li $c = a$ a současně $d = b$, dostaneme postupně pro levou stranu L dokazované nerovnosti

$$\begin{aligned} L &= ab + ac + ad + bc + bd + cd = \\ &= ab + a^2 + ab + ab + b^2 + ab = 1 + 4ab \leqq \\ &\leqq 1 + 2(a^2 + b^2) = 3, \end{aligned}$$

neboť pro libovolná dvě čísla a, b je $2ab \leqq a^2 + b^2$, což plyne ze zřejmé nerovnosti $(a - b)^2 \geqq 0$. Rovnost pak nastane pouze pro dvě čtveřice

$a = b = c = d = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, neboť z podmínky $a = b$ a rovnosti $a^2 + b^2 = 1$ plyne $a^2 = \frac{1}{2}$, tj. $a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Je-li $c = -a$, $d = b$, je $L = -a^2 + b^2 \leqq a^2 + b^2 = 1 < 3$. Podobně v případě $c = a$, $d = -b$ vyjde $L = a^2 - b^2 \leqq 1$, v případě $c = -a$, $d = -b$ dokonce $L = -a^2 - b^2 \leqq 0$.

Jiné řešení. Hodnota součtu

$$S = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$$

je zřejmě nezáporná. Pro dvojnásobek levé strany L dokazované nerovnosti proto platí

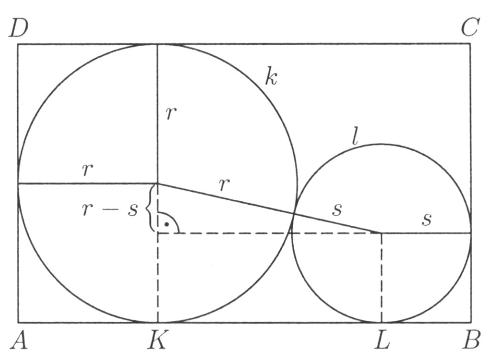
$$2L = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - S \leqq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 6,$$

odkud $L \leqq 3$. Rovnost $L = 3$ pak nastane, právě když $S = 0$, tedy právě když čísla a, b, c, d mají tutéž hodnotu, která se ovšem musí rovnat $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (viz původní řešení).

C – II – 3

Označme r, s poloměry kružnic k, l (v centimetrech) a K, L jejich body dotyku se stranou AB (obr. 12). Je pak $|AK| = r$, $|LB| = s$, a jak snadno spočteme z Pythagorovy věty (viz též úlohu C–S–3)

$$|KL| = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2} = 2\sqrt{rs}.$$



Obr. 12

Pro délky stran obdélníku $ABCD$ platí $|AD| = 2r$, $|AB| = r+2\sqrt{rs}+$ $+ s = (\sqrt{r} + \sqrt{s})^2$. Podle předpokladu má být

$$2r\left(\sqrt{r} + \sqrt{s}\right)^2 = 72,$$

neboli po zkrácení dvěma a odmocnění

$$r + \sqrt{rs} = 6.$$

Odtud plyne, že $r < 6$, a pro velikost poloměru s dostáváme vyjádření

$$rs = (6 - r)^2,$$

$$s = \frac{(6 - r)^2}{r}. \qquad (1)$$

Z podmínek úlohy dále plyne, že s nemůže být větší než r, protože jinak by kružnice l neležela v daném obdélníku, a protože i kružnice k musí ležet v daném obdélníku, musí být $|AB| \geqq |AD| = 2r$. Z nerovnosti $s \leqq r$ podle (1) dostaneme podmínku $36 - 12r + r^2 \leqq r^2$, tj. $r \geqq 3$. Z nerovnosti $|AB| \geqq 2r$ pak plyne $72 = |AB|\cdot|AD| \geqq 4r^2$, neboli $r^2 \leqq 18$, což pro celočíselné r znamená, že $r \leqq 4$. Pro poloměr r nám tak vycházejí jen dvě možnosti, $r \in \{3, 4\}$, odpovídající hodnoty poloměru s vypočteme ze vztahu (1).

Úloha má právě dvě řešení: $r = s = 3\,\mathrm{cm}$ a $r = 4\,\mathrm{cm}$, $s = 1\,\mathrm{cm}$.

C – II – 4

Pro prvočísla p, q má platit $q(q-1) = p(145p-1)$, takže prvočíslo p dělí $q(q-1)$. Prvočíslo p nemůže dělit prvočíslo q, protože to by znamenalo, že $p = q$, a tedy $145p = p$, což nejde. Proto p dělí $q-1$, tj. $q-1 = kp$ pro nějaké k přirozené. Po dosazení do daného vztahu dostaneme podmínku

$$p = \frac{k+1}{145 - k^2}.$$

Vidíme, že jmenovatel zlomku na pravé straně je kladný jedině pro $k \leqq$ $\leqq 12$, zároveň však pro $k \leqq 11$ je jeho čitatel menší než jmenovatel: $k + 1 \leqq 12 < 24 \leqq 145 - k^2$. Pouze pro $k = 12$ tak vyjde p přirozené a prvočíslo, $p = 13$. Je pak $q = 157$, což je také prvočíslo. Úloha má jediné řešení.

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Určete všechny hodnoty celočíselného parametru a, pro něž má rovnice

$$(x+a)(x+2a)=3a$$

aspoň jeden celočíselný kořen. (*J. Zhouf*)

B – I – 2

V daném trojúhelníku ABC označme D ten bod polopřímky CA, pro který platí $|CD|=|CB|$. Dále označme po řadě E, F středy úseček AD a BC. Dokažte, že $|\sphericalangle BAC|=2|\sphericalangle CEF|$, právě když $|AB|=|BC|$.
(*P. Leischner*)

B – I – 3

Rozhodněte, zda nerovnost

$$a(b+1)+b(c+1)+c(d+1)+d(a+1)\geqq \tfrac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

platí pro libovolná kladná čísla a, b, c, d, která vyhovují podmínce
a) $ab=cd=1$; b) $ac=bd=1$. (*J. Šimša*)

B – I – 4

Každou z hvězdiček v zápisech dvanáctimístných čísel

$$A=*88\,888\,888\,888,\qquad B=*11\,111\,111\,111$$

nahraďte nějakou číslicí tak, aby výraz $|14A-13B|$ měl co nejmenší hodnotu. (*J. Šimša*)

B – I – 5

Kruh o středu S a poloměru r je rozdělen na čtyři části dvěma tětivami, z nichž jedna má délku r a druhá má od středu S vzdálenost $\frac{1}{2}r$. Dokažte, že absolutní hodnota rozdílu obsahů těch dvou částí, které mají společný právě jeden bod, a přitom žádná z nich neobsahuje střed S, je rovna jedné šestině obsahu kruhu. (*P. Leischner*)

B – I – 6

Určete nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: Zvolíme-li n různých přirozených čísel menších než 2 006, jsou mezi nimi dvě taková, že podíl součtu a rozdílu jejich druhých mocnin je větší než tři.

(*J. Zhouf*)

B – S – 1

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b a c platí nerovnost

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq 8.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. (*J. Šimša*)

B – S – 2

Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC uvažujme body P a Q takové, že $|AP| = |AC|$ a $|BQ| = |BC|$. Označme M průsečík kolmice z vrcholu A na přímku CP a kolmice z vrcholu B na přímku CQ. Dokažte, že přímky PM a QM jsou navzájem kolmé. (*J. Švrček*)

B – S – 3

Najděte všechny dvojice celých čísel a a b, pro něž žádná z rovnic

$$x^2 + ax + b = 0, \quad y^2 + by + a = 0$$

nemá dva různé reálné kořeny. (*E. Kováč*)

B – II – 1

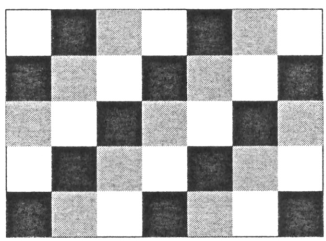
Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí

$$p + q^2 = q + p^3.$$

(J. Švrček)

B – II – 2

Obdélník $ABCD$ se stranami délek $|AB| = 2\,008$ a $|BC| = 2\,006$ je rozdělen na $2\,008 \times 2\,006$ jednotkových čtverců a ty jsou střídavě obarveny černou, šedou a bílou barvou podobně jako obdélník na obrázku: čtverce při vrcholech A a B jsou černé, čtverce při vrcholech C a D jsou bílé. Určete obsah té části trojúhelníku ABC, která je šedá.



(Pavel Novotný)

B – II – 3

V lichoběžníku $ABCD$, jehož základna AB má dvakrát větší délku než základna CD, označme E střed ramene BC. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází středem úhlopříčky AC, právě když strany AB a BC jsou navzájem kolmé. *(P. Leischner)*

B – II – 4

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí

$$1 \leqq a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leqq 9.$$

(J. Šimša)

Řešení úloh

B – I – 1

Po roznásobení levé strany a převedení členu $3a$ z pravé strany na levou dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 + 3ax + 2a^2 - 3a = 0.$$

Její kořeny (pokud existují) mají podle známého vzorce tvar

$$x_{1,2} = \frac{-3a + \sqrt{a^2 + 12a}}{2}.$$

Hodnota takového výrazu je celé číslo jen tehdy, je-li číslo a^2+12a druhou mocninou nějakého celého čísla b, o němž můžeme předpokládat, že je nezáporné. Rovnost $b = \sqrt{a^2 + 12a}$ upravíme umocněním a doplněním na čtverec do tvaru

$$(a + 6)^2 = b^2 + 36, \quad \text{neboli} \quad (a + 6 + b)(a + 6 - b) = 36.$$

Dostali jsme rozklad čísla 36 na součin dvou celočíselných činitelů, které proto musejí mít stejné znaménko. Protože jejich rozdíl

$$(a + 6 + b) - (a + 6 - b) = 2b$$

je sudé nezáporné číslo (připomínáme, že $b \geqq 0$), mají oba činitelé stejnou paritu (jsou zároveň sudá nebo lichá) a druhý činitel není větší než první činitel. To vše dohromady znamená, že jsou jen čtyři možnosti:

(1) $a+6+b = 18$ a $a+6-b = 2$. Tato soustava rovnic má jediné řešení $a = 4$ a $b = 8$. Zkouška: rovnice $(x + 4)(x + 8) = 12$ má kořeny -10 a -2.

(2) $a+6+b = 6$ a $a+6-b = 6$. V tomto případě $a = 0$ a $b = 0$. Zkouška: rovnice $(x + 0)(x + 0) = 0$ má dvojnásobný kořen 0.

(3) $a+6+b = -2$ a $a+6-b = -18$. V tomto případě $a = -16$ a $b = 8$. Zkouška: rovnice $(x - 16)(x - 32) = -48$ má kořeny 20 a 28.

(4) $a+6+b = -6$ a $a+6-b = -6$. V tomto případě $a = -12$ a $b = 0$. Zkouška: rovnice $(x - 12)(x - 24) = -36$ má dvojnásobný kořen 18.

Odpověď: Hledané hodnoty parametru a jsou čtyři, a to čísla 4, 0, -16 a -12.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení upravíme rovnici do tvaru

$$x^2 + 3ax + 2a^2 - 3a = 0$$

a pokusíme se mnohočlen na levé straně zapsat ve tvaru součinu dvou lineárních činitelů tvaru $\alpha x + \beta a + \gamma$. I když takový rozklad neexistuje, experimentováním zjistíme, že „téměř vyhovuje" součin

$$(x + 2a + 3)(x + a - 3),$$

který se liší od daného mnohočlenu $x^2 + 3ax + 2a^2 - 3a$ pouze v konstantním členu; přesvědčete se o tom roznásobením. Zkoumanou rovnici tak lze zapsat ve tvaru

$$(x + 2a + 3)(x + a - 3) = -9.$$

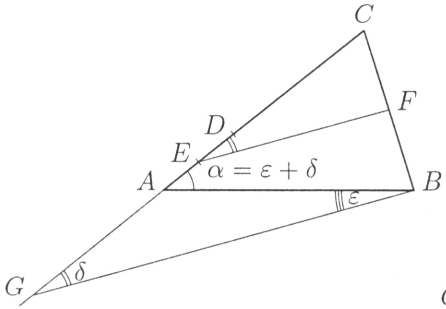
I když na pravé straně není nula, pro řešení v oboru celých čísel je každý podobný rozklad cenný, neboť existuje pouze konečný počet rozkladů příslušného čísla (v našem případě -9) na součin dvou celočíselných činitelů. Vypišme je:

(1) $x + 2a + 3 = 9$ a $x + a - 3 = -1$, neboli $a = 4$ a $x = -2$,
(2) $x + 2a + 3 = 3$ a $x + a - 3 = -3$, neboli $a = 0$ a $x = 0$,
(3) $x + 2a + 3 = 1$ a $x + a - 3 = -9$, neboli $a = 4$ a $x = -10$,
(4) $x + 2a + 3 = -1$ a $x + a - 3 = 9$, neboli $a = -16$ a $x = 28$,
(5) $x + 2a + 3 = -3$ a $x + a - 3 = 3$, neboli $a = -12$ a $x = 18$,
(6) $x + 2a + 3 = -9$ a $x + a - 3 = 1$, neboli $a = -16$ a $x = 20$.

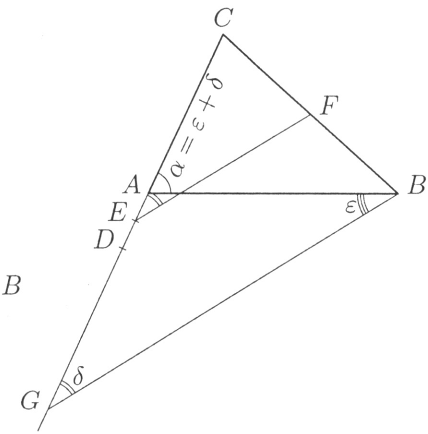
Docházíme tak ke stejné odpovědi jako v prvním řešení: vyhovující hodnoty parametru a jsou čísla 4, 0, -12 a -16.

B – I – 2

Označme G ten bod polopřímky opačné k polopřímce AC, pro který platí $|AG| = |BC| = |CD|$ (obr. 13 pro situaci, kdy $|AC| > |BC|$, a obr. 14 pro situaci, kdy $|AC| < |BC|$ — sami nakreslete a rozmyslete situaci, kdy $|AC| = |BC|$). V trojúhelníku ABG označme ještě $\varepsilon = |\sphericalangle ABG|$ a $\delta = |\sphericalangle BGA|$. Protože $|EA| = |ED|$ a $|AG| = |CD|$, je bod E střed úsečky CG, tudíž úsečka EF je střední příčka trojúhelníku BCG. Platí proto $EF \parallel GB$ a z rovnosti souhlasných úhlů BGA a FEC dostáváme $|\sphericalangle FEC| = \delta$. Protože úhel BAC je vnějším úhlem trojúhelníku ABG, pro jeho velikost $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ platí $\alpha = \varepsilon + \delta$. To znamená, že rovnost



Obr. 13



Obr. 14

$\alpha = 2\delta$ ze zadání úlohy nastane, právě když $\varepsilon + \delta = 2\delta$, neboli $\varepsilon = \delta$. Z trojúhelníku ABG ovšem plyne, že rovnost $\varepsilon = \delta$ je splněna, právě když $|AB| = |AG|$, neboli $|AB| = |BC|$. Tím je ekvivalence rovností $\alpha = 2\delta$ a $|AB| = |BC|$ dokázána.

Jiné řešení. Místo „chytře" zvoleného pomocného bodu G z prvního řešení sestrojíme osu o vnitřního úhlu BAC daného trojúhelníku ABC a její průsečík se stranou BC označíme H (obr. 15 a obr. 16 pro situace $|AC| > |BC|$, resp. $|AC| < |BC|$). Význam osy o pro řešení naší úlohy je zřejmý: podle souhlasných úhlů CEF a CAH usoudíme, že rovnost $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$ ze zadání úlohy nastane, právě když budou úsečky AH a EF rovnoběžné, neboli trojúhelníky CAH a CEF podobné. Podle věty *sus* jsou trojúhelníky CAH a CEF podobné, právě když je splněna úměra

$$|AC| : |HC| = |EC| : |FC|. \qquad (1)$$

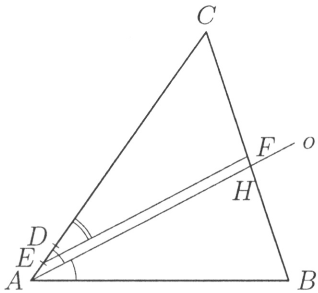
Rovnost $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$ je tedy ekvivalentní s podmínkou (1), kterou nyní prozkoumáme.

Délky úseček zastoupených v (1) nejprve vyjádříme pomocí délek

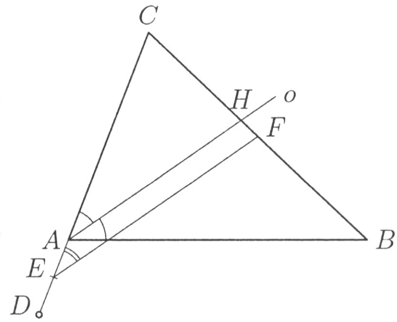
$$a = |BC|, \quad b = |AC|, \quad c = |AB|$$

stran výchozího trojúhelníku ABC. Protože bod F je střed úsečky BC a bod E střed úsečky AD, platí $|FC| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}a$ a

$$|EC| = \frac{|AC| + |DC|}{2} = \frac{|AC| + |BC|}{2} = \frac{b + a}{2}.$$



Obr. 15



Obr. 16

Zbývá vyjádřit délku úsečky HC. Z rovností

$$|HC| + |HB| = a, \qquad |HC| : |HB| = b : c$$

(první z nich je triviální, druhá vyjadřuje známý fakt o poměru, ve kterém osa vnitřního úhlu dělí protější stranu trojúhelníku) dostaneme po snadném výpočtu vyjádření

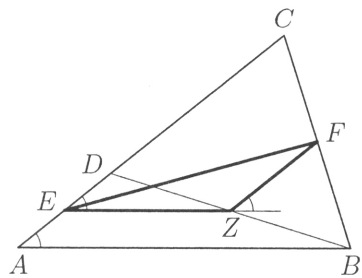
$$|HC| = \frac{ab}{b+c}.$$

Dosaďme nyní všechny určené délky do rovnosti (1) a pak ji dále ekvivalentně upravujme:

$$\begin{aligned} b : \frac{ab}{b+c} &= \frac{a+b}{2} : \frac{a}{2}, \\ \frac{b+c}{a} &= \frac{a+b}{a}, \\ b+c &= a+b, \\ c &= a. \end{aligned}$$

Dokázali jsme potřebné: podmínka (1) platí, právě když $c = a$, neboli $|AB| = |BC|$.

Jiné řešení. Označme Z střed úsečky BD a α velikost úhlu BAC. Úsečka EZ je střední příčka trojúhelníku ADB a úsečka ZF je střední příčka trojúhelníku CDB (obr. 17). Z vlastností středních příček plyne $EZ \parallel AB, ZF \parallel AC, |EZ| = \frac{1}{2}|AB|, |FZ| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}|BC|, |\sphericalangle CEZ| =$ $= \alpha$ a $|\sphericalangle EZF| = 180° - \alpha$.



Obr. 17

Protože velikost vnějšího úhlu při vrcholu Z trojúhelníku EZF je α, bude mít úhel FEZ velikost $\frac{1}{2}\alpha$, právě když bude trojúhelník FEZ rovnoramenný (se základnou FE), tj. právě když $|EZ| = |ZF|$, neboli právě když $|AB| = |BC|$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

B – I – 3

a) Danou nerovnost budeme ekvivalentně upravovat postupným roznásobováním; jakmile se přitom někde objeví součin ab nebo cd, nahradíme ho číslem 1:

$$\begin{aligned}
2(ab + a + bc + b + cd + c + da + d) &\geqq \\
&\geqq (ab + a + b + 1)(cd + c + d + 1), \\
2(ad + bc + a + b + c + d + 2) &\geqq \\
&\geqq (a + b + 2)(c + d + 2), \\
2(ad + bc) + 2(a + b + c + d) + 4 &\geqq \\
&\geqq ac + ad + bc + bd + 2(a + b + c + d) + 4, \\
ad + bc &\geqq ac + bd, \\
(a - b)(c - d) &\leqq 0.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost obecně neplatí, jak ukazuje příklad $a = c = 2$ a $b = d = \frac{1}{2}$ (hodnoty jsou zvoleny tak, aby byly splněn předpoklad $ab = cd = 1$).

b) Danou nerovnost budeme upravovat s podobnou strategií jako v části a). Protože však tentokrát můžeme číslem 1 nahrazovat součiny ac a bd, vynásobíme na pravé straně nerovnosti nejprve první činitel s třetím a druhý činitel se čtvrtým:

$$\begin{aligned}
2(ab + a + bc + b + cd + c + da + d) &\geqq \\
&\geqq (ac + a + c + 1)(bd + b + d + 1), \\
2(ab + bc + cd + ad + a + b + c + d) &\geqq \\
&\geqq (a + c + 2)(b + d + 2), \\
2(ab + bc + cd + ad) + 2(a + b + c + d) &\geqq \\
&\geqq ab + ad + bc + cd + 2(a + b + c + d) + 4, \\
ab + bc + cd + da &\geqq 4, \\
(a + c)(b + d) &\geqq 4.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost platí pro všechny čtveřice kladných čísel a, b, c, d splňující předpoklad $ac = bd = 1$, protože každý z obou činitelů $a + c$ a $b + d$, jsa součtem kladného čísla a čísla k němu převráceného, je větší nebo roven číslu 2. Tento známý výsledek

$$u > 0 \quad \Longrightarrow \quad u + \frac{1}{u} \geqq 2 \qquad (*)$$

plyne přímo z identické rovnosti

$$u + \frac{1}{u} = \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 + 2$$

a poznatku, že druhá mocnina libovolného reálného čísla je nezáporná. Odhad $(*)$ lze rovněž získat ze známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

libovolných nezáporných čísel a_i, když zvolíme $n = 2$, $a_1 = u$ a $a_2 = 1/u$.

Odpověď: Zkoumaná nerovnost za podmínky a) obecně neplatí, za podmínky b) platí.

Jiné řešení. a) Použijeme „dosazovací strategii“: z dané podmínky $ab = cd = 1$ vypočteme $b = 1/a$, $d = 1/c$ a takto vyjádřená čísla b a d dosadíme do zkoumané nerovnosti. Dostaneme nerovnost s dvěma (již nezávislými) proměnnými a a c; naší úlohou bude zjistit, zda platí pro libovolné hodnoty $a > 0$ a $c > 0$:

$$\begin{aligned}
a\Big(\frac{1}{a}+1\Big)+\frac{1}{a}(c+1)+c\Big(\frac{1}{c}+1\Big)+\frac{1}{c}(a+1) &\geqq \\
\geqq \frac{1}{2}(a+1)\Big(\frac{1}{a}+1\Big)&(c+1)\Big(\frac{1}{c}+1\Big),\\
2+a+c+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c} &\geqq \frac{1}{2}\Big(2+a+\frac{1}{a}\Big)\Big(2+c+\frac{1}{c}\Big),\\
2+a+c+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c} &\geqq 2+a+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\Big(ac+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{ac}\Big),\\
\frac{c}{a}+\frac{a}{c} &\geqq ac+\frac{1}{ac},\\
c^2+a^2 &\geqq a^2c^2+1,\\
0 &\geqq (a^2-1)(c^2-1).
\end{aligned}$$

Vidíme, že poslední nerovnost pro kladná čísla a, c obecně neplatí, stačí zvolit např. hodnoty $a = c = 2$, kterým odpovídají hodnoty $b = d = \frac{1}{2}$.

b) Podobně jako v části a) z dané podmínky $ac = bd = 1$ vypočteme tentokrát $c = 1/a$, $d = 1/b$ a po dosazení za c, d do zkoumané nerovnosti dostaneme nerovnost s nezávislými proměnnými $a > 0$ a $b > 0$:

$$\begin{aligned}
a(b+1)+b\Big(\frac{1}{a}+1\Big)+\frac{1}{a}\Big(\frac{1}{b}+1\Big)+\frac{1}{b}(a+1) &\geqq \\
\geqq \frac{1}{2}(a+1)(b+1)\Big(\frac{1}{a}+1\Big)&\Big(\frac{1}{b}+1\Big),\\
ab+a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} &\geqq \frac{1}{2}\Big(2+a+\frac{1}{a}\Big)\Big(2+b+\frac{1}{b}\Big),\\
ab+a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} &\geqq \\
\geqq \frac{1}{2}\Big(4+2a+2b+ab+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}&+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}\Big),\\
ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} &\geqq 4.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost ovšem zřejmě platí pro libovolná kladná čísla a a b, neboť je součtem dvou nerovností

$$ab+\frac{1}{ab} \geqq 2 \quad \text{a} \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2$$

typu $(*)$ z prvního řešení, a to pro hodnoty $u = ab$, resp. $u = a/b$.

B – I – 4

Hvězdičku v čísle A nahradíme číslicí a, hvězdičku v čísle B číslicí b a vyjádříme výraz $14A - 13B$ algebraicky jako lineární funkci (neznámých) číslic a a b. Protože platí

$$11\,111\,111\,111\,111 = \frac{99\,999\,999\,999\,999}{9} = \frac{10^{11}-1}{9},$$

mají čísla A a B vyjádření

$$A = a \cdot 10^{11} + \frac{8}{9} \cdot (10^{11} - 1) \quad \text{a} \quad B = b \cdot 10^{11} + \frac{1}{9} \cdot (10^{11} - 1),$$

odkud dostáváme

$$\begin{aligned} 14A - 13B &= (14a - 13b) \cdot 10^{11} + \frac{(14 \cdot 8 - 13)}{9} \cdot (10^{11} - 1) = \\ &= (14a - 13b + 11) \cdot 10^{11} - 11. \end{aligned} \qquad (*)$$

Jistě si uvědomíme, že absolutní hodnota takového výrazu je minimální, právě když je minimální absolutní hodnota výrazu $14a-13b+11$. Precizně to zdůvodníme nerovnostmi až poté, co zjistíme, zda pro některé číslice a, b dokonce neplatí rovnost $14a - 13b + 11 = 0$. Vyjádříme-li z takové rovnice neznámou b,

$$b = \frac{14a + 11}{13} = a + 1 + \frac{a-2}{13},$$

a všimneme si, že pro libovolnou číslici a platí $-2 \leqq a - 2 \leqq 7$, vidíme, že hodnota b daná posledním vzorcem je celočíselná jedině v případě $a - 2 = 0$, kdy $a = 2$ a $b = 3$. Jedině pro takové číslice a, b platí $14a - 13b + 11 = 0$, takže podle $(*)$ pak máme $|14A - 13B| = 11$. Pro libovolnou jinou dvojici číslic a, b ovšem platí $14a - 13b + 11 \neq 0$, takže tentokrát podle $(*)$ usoudíme, že

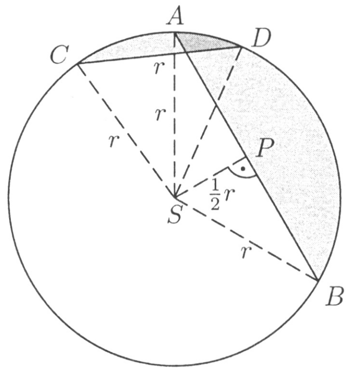
$$\begin{aligned} &\text{buď} \quad 14a - 13b + 11 \geqq 1, \quad \text{a tedy} \quad 14A - 13B \geqq 10^{11} - 11 > 11, \\ &\text{nebo} \quad 14a - 13b + 11 \leqq -1, \quad \text{a tedy} \quad 14A - 13B \leqq -10^{11} - 11 < -11, \end{aligned}$$

v obou případech tedy $|14A - 13B| > 11$.

Odpověď: Výraz $|14A - 13B|$ má nejmenší možnou hodnotu jedině tehdy, když hvězdičky v číslech A, B nahradíme po řadě číslicemi 2 a 3.

B – I – 5

Označme dané tětivy AB a CD jako na obr. 18, kde je rovněž vyznačen střed P tětivy AB, takže podle zadání platí $|SP| = \frac{1}{2}r$ a $|CD| = r$.



Obr. 18

Zkoumaný rozdíl obsahů dvou světle vybarvených částí kruhu se nezmění, když ke každé z nich připojíme tutéž (třetí) část kruhu, jež má s jeho hraniční kružnicí společný oblouk AC a je na obr. 18 vybarvena tmavě. Tak vzniknou dvě kruhové úseče, jedna nad tětivou AB, druhá nad tětivou CD. Jejich obsahy jsou určeny velikostmi úhlů ASB a CSD. Z rovnostranného trojúhelníku CSD ihned máme $|\sphericalangle CSD| = 60°$, takže obsah S_1 úseče nad tětivou CD je roven

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku APS platí $|AS| : |SP| = 2 : 1$, tudíž $|\sphericalangle ASP| = 60°$, $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle ASP| = 120°$, $|AB| = r\sqrt{3}$ a obsah S_2 úseče nad tětivou AB je roven

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Nyní již snadno určíme rozdíl $S_2 - S_1$:

$$S_2 - S_1 = \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi r^2}{6},$$

což je právě šestina obsahu celého kruhu.

B – I – 6

Zjistíme nejdříve, pro která přirozená čísla a, b platí zmíněná nerovnost

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} > 3. \tag{1}$$

Aby byl zlomek na levé straně kladný, musí platit $a^2 > b^2$, neboli $a > b$. Je-li tato nutná podmínka splněna, vynásobíme obě strany zkoumané nerovnosti kladným číslem $a^2 - b^2$ a dalšími úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &> 3(a^2-b^2),\\ 4b^2 &> 2a^2,\\ b\sqrt{2} &> a. \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že dvě přirozená čísla a, b vyhovují podmínce (1), právě když platí nerovnosti $1 < a/b < \sqrt{2}$.

Přirozená čísla od 1 do 2 005 nyní rozdělíme do skupin tak, aby v nich bylo co nejvíce čísel a aby podíl největšího a nejmenšího čísla každé skupiny byl menší než $\sqrt{2}$. Provedeme to tak, že do skupin budeme postupně zařazovat čísla 1,2,... a k nové skupině vždy přejdeme, až to bude nezbytné.[1] Dostaneme tak těchto dvacet skupin:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1\}, & A_2 &= \{2\},\\
A_3 &= \{3,4\}, & A_4 &= \{5,6,7\},\\
A_5 &= \{8,\dots,11\}, & A_6 &= \{12,\dots,16\},\\
A_7 &= \{17,\dots,24\}, & A_8 &= \{25,\dots,35\},\\
A_9 &= \{36,\dots,50\}, & A_{10} &= \{51,\dots,72\},\\
A_{11} &= \{73,\dots,103\}, & A_{12} &= \{104,\dots,147\},\\
A_{13} &= \{148,\dots,209\}, & A_{14} &= \{210,\dots,296\},\\
A_{15} &= \{297,\dots,420\}, & A_{16} &= \{421,\dots,595\},\\
A_{17} &= \{596,\dots,842\}, & A_{18} &= \{843,\dots,1\,192\},\\
A_{19} &= \{1\,193,\dots,1\,687\}, & A_{20} &= \{1\,688,\dots,2\,005\}.
\end{aligned}$$

Vysvětlíme například, jak vznikla skupina A_{11}. Číslo 73 jsme již nemohli zařadit do skupiny A_{10}, neboť pro jeho podíl s nejmenším číslem 53 této skupiny platí

$$\frac{73}{51} = 1{,}431\ldots > 1{,}414\ldots = \sqrt{2};$$

[1] K porovnávání podílů a/b s číslem $\sqrt{2}$ výhodně využijeme třeba kalkulačku.

Číslo 103 jsme ještě mohli do skupiny A_{11} zařadit, neboť

$$\frac{103}{73} = 1{,}410\ldots < 1{,}414\ldots = \sqrt{2}.$$

Jaké má sestrojené rozdělení význam pro řešení zadané úlohy? Pro libovolná dvě čísla a, b z téže skupiny A_i nerovnost (1) platí. Skupin A_i je dohromady 20; vybereme-li proto libovolně 21 čísel z množiny $A_1 \cup \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20}$, budou některá dvě z nich patřit do téže skupiny A_i,[2] tudíž budou splňovat (1). Proto číslo $n = 21$ má vlastnost ze zadání úlohy. Číslo $n = 20$ ji ovšem nemá: vybereme-li z každé ze skupin A_i její nejmenší prvek, dostaneme dvacet čísel

$$\begin{gathered} 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 12,\ 17,\ 25,\ 36,\ 51, \\ 73,\ 104,\ 148,\ 210,\ 297,\ 421,\ 596,\ 843,\ 1\,193,\ 1\,688, \end{gathered} \tag{2}$$

mezi nimiž nejsou žádná dvě čísla a, b splňující (1), neboť podle naší konstrukce je podíl následujícího čísla k číslu předchozímu vždy větší než $\sqrt{2}$.

Poznamenejme, že pouhé uvedení dvaceti čísel (2) z posledního odstavce nelze považovat za úplné řešení úlohy, i když prohlásíme, že jsme tuto dvacetici vybrali „co nejlépe“, tj. aby měla co nejvíce prvků a aby žádné dva z nich nesplňovaly (1).[3] Nemožnost výběru podobné skupiny 21 čísel je třeba nezpochybnitelně zdůvodnit; k tomu nám posloužil přihrádkový princip uplatněný k sestrojeným skupinám A_i.

Odpověď: Nejmenší přirozené číslo s požadovanou vlastností je $n = = 21$.

B – S – 1

Levou stranu L dokazované nerovnosti nejprve upravíme roznásobením a vzniklé členy sdružíme do dvojic navzájem převrácených výrazů:

$$\begin{aligned} L &= \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = \left(ab + 1 + \frac{a}{c} + \frac{1}{bc}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = \\ &= \left(abc + \frac{1}{abc}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right). \end{aligned}$$

---

[2] Tomuto zřejmému poznatku se říká *přihrádkový* nebo též *Dirichletův* princip. Obecněji zní takto: Je-li $mk + 1$ předmětů umístěno do m skupin, leží v některé z nich aspoň $k + 1$ z těchto předmětů. V našem případě je $m = 20$ a $k = 1$.

[3] K ověření poznatku, že číslo $n = 20$ zkoumanou vlastnost nemá, mohou posloužit i mnohé jiné dvacetice čísel. Například číslo 1 688 v (2) můžeme zaměnit kterýmkoliv jiným číslem ze skupiny A_{20} apod.

V každé z posledních závorek je tedy součet tvaru $u + 1/u$, kde $u > 0$, který má, jak víme, hodnotu aspoň 2, přičemž rovnost číslu 2 nastane jedině pro $u = 1$. Podle tohoto známého tvrzení, které lze dokázat například úpravou

$$\left(u + \frac{1}{u}\right) - 2 = \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 \geqq 0,$$

pro výraz L platí $L \geqq 2 + 2 + 2 + 2 = 8$, což jsme měli dokázat. Rovnost $L = 8$ ovšem nastane, právě když platí

$$abc + \frac{1}{abc} = a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c} = 2,$$

tedy jak jsme už vzpomenuli, právě když $abc = a = b = c = 1$, tj. právě když $a = b = c = 1$.

Poznámka. Dodejme, že upravená nerovnost

$$abc + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \geqq 8$$

plyne okamžitě z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem osmi čísel

$$abc,\ a,\ b,\ c,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{abc},$$

neboť jejich součin (a tedy i geometrický průměr) je roven číslu 1, takže jejich aritmetický průměr má hodnotu aspoň 1.

Jiné řešení. V dokazované nerovnosti se nejprve zbavíme zlomků, a to tak, že obě její strany vynásobíme kladným číslem abc. Dostaneme tak ekvivalentní nerovnost

$$(ab + 1)(bc + 1)(ac + 1) \geqq 8abc,$$

která má po roznásobení levé strany tvar

$$a^2b^2c^2 + a^2bc + ab^2c + abc^2 + ab + ac + bc + 1 \geqq 8abc.$$

Poslední nerovnost lze upravit do tvaru

$$(abc - 1)^2 + ab(c - 1)^2 + ac(b - 1)^2 + bc(a - 1)^2 \geqq 0.$$

Tato nerovnost již zřejmě platí, neboť na levé straně stojí součet čtyř nezáporných výrazů, přitom rovnost nastane, právě když má každý ze čtyř těchto výrazů nulovou hodnotu, tedy právě když

$$abc - 1 = c - 1 = b - 1 = a - 1 = 0$$

neboli $a = b = c = 1$.

Další řešení. Danou nerovnost lze dokázat i bez roznásobování její levé strany. Stačí zapsat tři nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem:

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{b}\right) \geqq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{c}\right) \geqq \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{a}\right) \geqq \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Jejich vynásobením dostaneme

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{a}\right) \geqq \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} = 1,$$

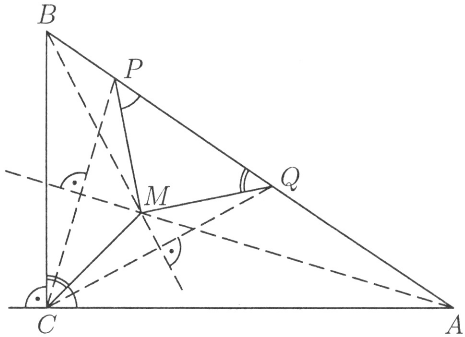
odkud po násobení osmi obdržíme dokazovanou nerovnost. Rovnost v ní nastane, právě když nastane rovnost v každé ze tří použitých AG-nerovností, tedy právě když se čísla v každé průměrované dvojici rovnají:

$$a = \frac{1}{b}, \ b = \frac{1}{c}, \ c = \frac{1}{a}.$$

Z prvních dvou rovností plyne $a = c$, po dosazení do třetí rovnosti pak vychází $a = c = 1$, tudíž i $b = 1$.

B – S – 2

Podle zadání je trojúhelník APC rovnoramenný, přímka AM prochází jeho hlavním vrcholem A kolmo k základně CP, je tudíž osou vnitřního úhlu CAP (obr. 19). Body C a P jsou proto souměrně sdružené podle přímky AM, takže úhly APM a ACM jsou shodné. (Jinými slovy trojúhelníky APM a ACM jsou shodné podle věty *sus*: odpovídající si strany AC a AP svírají se společnou stranou AM týž úhel díky tomu, že AM je osou úhlu CAP.) Podobně z rovnoramenného trojúhelníku BQC odvodíme, že BM je osou úhlu CBQ, takže i úhly BQM a BCM jsou shodné.



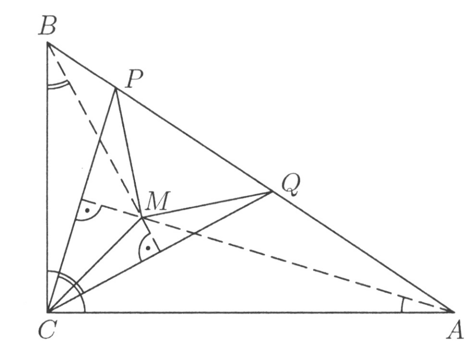
Obr. 19

Rovnosti $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle ACM|$ a $|\sphericalangle BQM| = |\sphericalangle BCM|$ znamenají, že pro vnitřní úhly trojúhelníku PQM při vrcholech P, Q platí

$$|\sphericalangle QPM| + |\sphericalangle PQM| = |\sphericalangle APM| + |\sphericalangle BQM| = \\ = |\sphericalangle ACM| + |\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle ACB| = 90^\circ,$$

tudíž vnitřní úhel u třetího vrcholu M je pravý.

Jiný postup. Ze souměrnosti bodů P a C podle přímky AM plyne $|PM| = |CM|$, ze souměrnosti bodů Q a C podle BM plyne $|QM| = |CM|$ (obr. 20). Je tudíž $|PM| = |QM| = |CM|$ a bod M je tak středem kružnice opsané trojúhelníku PQC. Přitom označíme-li α a β



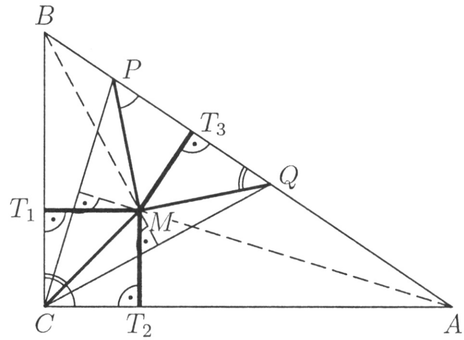
Obr. 20

úhly při vrcholech A a B, je $\alpha + \beta = 90^\circ$ a

$$(90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) + (90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) - |\sphericalangle PCQ| = 90^\circ,$$

takže $|\sphericalangle PCQ| = 45°$. To je velikost obvodového úhlu nad tětivou PQ zmíněné kružnice. Velikost odpovídajícího středového úhlu PMQ je tudíž $90°$.

Jiný postup. Bod M jako průsečík os úhlů CAB a CBA je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, vidíme tedy (obr. 21), že pravoúhlé trojúhelníky $PMT_3 \cong CMT_1$ a $QMT_3 \cong CMT_2$ jsou vesměs shodné. Odtud plyne, že trojúhelník PQM je rovnoramenný pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu M.



Obr. 21

Jiný postup. Bod M jako průsečík os úhlů CAB a CBA leží i na ose pravého úhlu ACB. Proto úhly ACM a BCM mají oba velikost $45°$, takže $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle ACM| = 45°$, $|\sphericalangle BQM| = |\sphericalangle BCM| = 45°$ a trojúhelník PQM je rovnoramenný pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu M.

B – S – 3

Jak víme, kvadratická rovnice *má* dva různé reálné kořeny, právě když je její diskriminant kladný. Proto rovnice ze zadání úlohy tuto vlastnost *nemají*, právě když jsou jejich diskriminanty

$$D_1 = a^2 - 4b, \quad D_2 = b^2 - 4a$$

nekladné, tedy právě když platí

$$a^2 \leqq 4b \quad \text{a} \quad b^2 \leqq 4a. \tag{1}$$

Odtud předně plyne, že obě čísla b i a jsou nezáporná (protože jsou nezáporná obě čísla a^2 a b^2). Nyní na (1) pohlédneme jako na soustavu nerovnic s neznámou b a nezáporným parametrem a a snadno ji v oboru nezáporných čísel vyřešíme:

$$\frac{a^2}{4} \leqq b \leqq 2\sqrt{a}. \tag{2}$$

Nalezený interval je neprázdný, právě když pro nezáporný parametr a platí nerovnost

$$\frac{a^2}{4} \leqq 2\sqrt{a}, \quad \text{neboli} \quad a \leqq 4.$$

Protože čísla a, b jsou podle zadání celá, z odvozených nerovností $0 \leqq a \leqq 4$ plyne, že číslo a leží v množině $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Každé takové a jednotlivě do krajních výrazů v (2) dosadíme a vypíšeme, která celá b v příslušném intervalu leží:

$$\begin{array}{lll}
a = 0\colon & 0 \leqq b \leqq 0 & \iff b \in \{0\}, \\
a = 1\colon & \frac{1}{4} \leqq b \leqq 2 & \iff b \in \{1, 2\}, \\
a = 2\colon & 1 \leqq b \leqq 2\sqrt{2} & \iff b \in \{1, 2\}, \\
a = 3\colon & \frac{9}{4} \leqq b \leqq 2\sqrt{3} & \iff b \in \{3\}, \\
a = 4\colon & 4 \leqq b \leqq 4 & \iff b \in \{4\}.
\end{array}$$

Odpověď: Vyhovuje právě sedm dvojic (a, b):

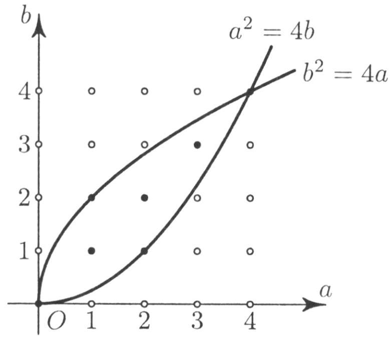
$$(0,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3) \text{ a } (4,4).$$

Poznámka. Z nerovností (1) lze odvodit nejen $0 \leqq a \leqq 4$, ale z důvodu symetrie rovněž $0 \leqq b \leqq 4$. Proto místo námi popsaného řešení úpravou na soustavu (2) stačí jednotlivě otestovat 25 dvojic (a, b), kde $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, zda vyhovují soustavě nerovností (1). Takovou úlohu lze rovněž interpretovat geometricky: v prvním kvadrantu souřadnicového systému Oab hledáme ty body s celočíselnými souřadnicemi, které leží uvnitř nebo na hranici oblasti omezené parabolami o rovnicích $4a = b^2$ a $4b = a^2$ (obr. 22).

B – II – 1

Danou rovnici upravíme na tvar

$$q(q-1) = p(p-1)(p+1);$$



Obr. 22

odtud plyne nerovnost $p < q$ (kdyby totiž bylo $p \geqq q$, potom i $p - 1 \geqq q - 1 > 0$, a protože $p + 1 > 1$, bylo by $p(p-1)(p+1) > q(q-1)$) a také to, že q dělí součin $p(p-1)(p+1)$. Protože q je prvočíslo, musí platit aspoň jeden ze vztahů $q \mid p$, $q \mid (p-1)$, $q \mid (p+1)$. Vzhledem k podmínkám $p < q$ a $p > 1$ nemůže q dělit ani p, ani $p - 1$, a proto $q \mid (p+1)$. Musí tedy platit $q \leqq p + 1$, a to spolu s $p < q$ dává $q = p + 1$.

Jediná dvě prvočísla lišící se o 1 jsou 2 a 3. Proto $p = 2$ a $q = 3$. Zkouškou ověříme, že skutečně platí $2 + 3^2 = 3 + 2^3$.

Poznámka. Nerovnost $p < q$ se dá dokázat i následující úvahou: Zřejmě $p \neq q$. Prvočísla p a q jsou tedy nesoudělná, a protože $p \mid q(q-1)$, musí platit $p \mid (q-1)$ a odtud $p \leqq q - 1$.

B – II – 2

Šedá část obdélníku $ABCD$ se stranami délek $3n + 1$ a $3n - 1$, který má jednotkové čtverce při dvou vrcholech obarveny černou barvou a jednotkové čtverce při dalších dvou vrcholech bílou barvou, je souměrná podle středu obdélníku (stačí si uvědomit souměrnou sdruženost šedých čtverců nejbližších souměrně sdruženým vrcholům A a C, resp. B a D, symetrie na celém obdélníku pak plyne z toho, ze šedé čtverce se v každém řádku i sloupci opakují s periodou 3). Proto je šedá část trojúhelníku ABC shodná se šedou částí trojúhelníku CDA, a tedy obsah šedé části trojúhelníku ABC je roven polovině obsahu šedé části obdélníku $ABCD$.

Obdélník $ABCD$ rozdělme na obdélník se stranami délek $3n$ a $3n - 1$ a pás $3n - 1$ jednotkových čtverců, v němž jeden koncový čtverec je černý a druhý bílý. V obdélníku $3n \times (3n - 1)$ je počet černých, bílých i šedých jednotkových čtverců stejný, takže šedých je $n(3n-1)$. Kdybychom k pásu délky $3n-1$ přidali jeden šedý čtverec, byl by tam rovněž stejný počet n černých, bílých a šedých čtverců; v páse délky $3n-1$ je tedy $n-1$ šedých čtverců. Šedých čtverců v obdélníku $ABCD$ je $n(3n-1)+(n-1) = 3n^2-1$ a šedá část trojúhelníku ABC má obsah $S = \frac{1}{2}(3n^2-1)$; pro obdélník $2\,008 \times 2\,006$ je $n = 669$, takže

$$S = \frac{1}{2}\cdot(3\cdot 669^2 - 1) = \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{3}\cdot 2\,007^2 - 1\Big) = \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{4\,028\,049}{3} - 1\Big) = \\ = \frac{4\,028\,046}{6} = 671\,341.$$

Poznámka. Obsah šedé části trojúhelníku ABC můžeme určit i tak, že po diagonálách postupně spočítáme šedé čtverce, jež jsou celé obsaženy v trojúhelníku ABC, a připočteme polovinu počtu čtverců v prostřední šedé diagonále obdélníku $ABCD$, která je souměrná podle středu obdélníku, takže její část ležící v trojúhelníku ABC je shodná s částí ležící v trojúhelníku CDA:

$$S = 3 + 6 + \ldots + 2\,004 + \frac{1}{2}\cdot 2\,006 = 334\cdot 2\,007 + 1\,003 = 671\,341.$$

B – II – 3

Označme S střed úhlopříčky AC. Úsečka SE je střední příčka trojúhelníku ABC, takže $|SE| = \frac{1}{2}|AB| = |DC|$. Navíc je $SE \parallel AB \parallel DC$. Úsečky SE a DC jsou rovnoběžné a shodné, proto je $SECD$ rovnoběžník.

Kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází bodem S právě tehdy, je-li rovnoběžník $SECD$ tětivový. Čtyřúhelník je tětivový, právě když je součet velikostí jeho protilehlých úhlů $180°$. V rovnoběžníku jsou ale protilehlé úhly shodné, takže je tětivový, právě když to je pravoúhelník, neboli když úhel ECD, a tedy i úhel ABC je pravý.

B – II – 4

Nadále předpokládejme, že $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$. Označme

$$V = a + b + c + 2(ab + ac + bc) + 3(1-a)(1-b)(1-c)$$

a nejprve místo nerovnosti $V \geqq 1$ dokažme silnější nerovnost

$$a+b+c+(1-a)(1-b)(1-c) \geqq 1.$$

Roznásobením a úpravou levé strany dostaneme

$$\begin{aligned}(a+b+c)+(1-a)(1-b)(1-c) &= \\ = 1+ab+ac+bc-abc &= 1+ab(1-c)+ac+bc \geqq 1,\end{aligned}$$

protože v posledním součtu za jedničkou následují vesměs nezáporné sčítance.

K důkazu nerovnosti $V \leqq 9$ stačí vzhledem k tomu, že

$$2(ab+ac+bc) \leqq 6,$$

ověřit nerovnost

$$a+b+c+3(1-a)(1-b)(1-c) \leqq 3.$$

Uděláme to tak, že zřejmé nerovnosti

$$(1-a)(1-b) \leqq 1, \quad (1-a)(1-c) \leqq 1, \quad (1-b)(1-c) \leqq 1$$

vynásobíme po řadě (nezápornými) čísly $1-c$, $1-b$, $1-a$; po sečtení všech tří získaných nerovností obdržíme

$$3(1-a)(1-b)(1-c) \leqq (1-a)+(1-b)+(1-c),$$

odkud již snadnou úpravou plyne kýžená nerovnost.

Jiné řešení. Zaměňme písmena a, b, c obvyklejšími písmeny x, y, z k označení proměnných (v našem případě z intervalu $\langle 0,1\rangle$). Daný výraz $V = V(x,y,z)$ je při pevných hodnotách y, z lineární funkcí $Ax+B$ proměnné x s koeficienty

$$\begin{aligned}A &= 1+2(y+z)-3(1-y)(1-z),\\ B &= y+z+2yz+3(1-y)(1-z).\end{aligned}$$

Protože grafem každé lineární funkce na uzavřeném intervalu je úsečka, budou nerovnosti $1 \leqq V(x,y,z) \leqq 9$ platit pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$, právě když budou platit pro obě krajní hodnoty $x = 0$ a $x = 1$, neboli $1 \leqq V(0, y, z) \leqq 9$ a $1 \leqq V(1, y, z) \leqq 9$. Protože pro libovolná $y, z \in \langle 0, 1 \rangle$ máme

$$V(0, y, z) = y + z + 2yz + 3(1 - y)(1 - z) \leqq 1 + 1 + 2 + 3,$$
$$V(1, y, z) = 1 + y + z + 2(y + z + yz) \leqq 1 + 1 + 1 + 2 \cdot 3,$$

jsou nerovnosti $V(0, y, z) \leqq 9$ a $1 \leqq V(1, y, z) \leqq 9$ zřejmé. K důkazu zbylé nerovnosti $V(0, y, z) \geqq 1$ si opět povšimneme, že při pevném z je výraz $V(0, y, z)$ lineární funkcí $Cy + D$ proměnné y. Stačí proto pouze ověřit, že $V(0, 0, z) \geqq 1$ a zároveň $V(0, 1, z) \geqq 1$. To je ale zřejmé, neboť pro $z \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$V(0, 0, z) = 3 - 2z \geqq 1 \quad \text{a} \quad V(0, 1, z) = 1 + 3z \geqq 1.$$

Tím je úloha vyřešena. Dodejme ještě, že ze zmíněné linearity výrazu V v *každé* z proměnných x, y, z vyplývá, že jak největší, tak i nejmenší hodnota V na množině všech trojic (x, y, z) čísel z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ musí být rovna jednomu z osmi čísel

$$V(0,0,0),\ V(0,0,1),\ V(0,1,0),\ V(0,1,1),$$
$$V(1,0,0),\ V(1,0,1),\ V(1,1,0),\ V(1,1,1);$$

s ohledem na symetrii výrazu V stačí vyčíslit pouze hodnoty $V(0, 0, 0) = 3$, $V(0, 0, 1) = 1$, $V(0, 1, 1) = 4$ a $V(1, 1, 1) = 9$.

Jiné řešení. Představme si krychli $1 \times 1 \times 1$ a tři navzájem kolmé roviny (rovnoběžné se stěnami krychle), které rozdělují hrany vycházející z každého vrcholu krychle na dvojice úseček délek a a $1 - a$, b a $1 - b$, resp. c a $1 - c$. Vidíme, že celou krychli lze pokrýt soustavou čtyř kvádrů o rozměrech

$$a \times 1 \times 1, \quad 1 \times b \times 1, \quad 1 \times 1 \times c, \quad (1 - a) \times (1 - b) \times (1 - c),$$

což vyjádřeno jejich objemy dává geometrický důkaz nerovnosti

$$a \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot b \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot c + (1 - a)(1 - b)(1 - c) \geqq 1,$$

ze které jsme odvodili závěr $V \geqq 1$ v prvním řešení. K druhému závěru $V \leqq 9$ nás tam přivedla nerovnost

$$a \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot b \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot c + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leqq 3,$$

která má rovněž jasné „objemové“ zdůvodnění: v součtu na levé straně je každá část objemu celé krychle započítána nejvýše třikrát. Tím je celé geometrické řešení úlohy hotovo.

K předchozímu dodejme, že pokud přidáme k uvedeným čtyřem kvádrům ještě dva exempláře čtvrtého z nich a po dvou exemplářích každého ze tří kvádrů

$$a \times b \times 1, \ a \times 1 \times c, \ 1 \times b \times c,$$

bude hodnota V součtem objemů těchto 12 kvádrů, kterými lze „několikanásobně“ zaplnit celou krychli. Přitom každá z osmi částí krychle (rozdělené zmíněnými třemi rovinami) je součástí devíti, tří, čtyř nebo jednoho z 12 uložených kvádrů. Přesněji to zapíšeme rovností

$$\begin{aligned} V = {} & 9abc + 3(1-a)(1-b)(1-c) + \\ & + 4ab(1-c) + 4ac(1-b) + 4bc(1-a) + \\ & + a(1-b)(1-c) + b(1-a)(1-c) + c(1-a)(1-b). \end{aligned}$$

Vzhledem k počtu použitých částí tak pro objem V nutně platí $1 \leqq V \leqq 9$.

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

(*J. Švrček*)

A – I – 2

Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec. (*E. Kováč*)

A – I – 3

Posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *nenulových* celých čísel má tu vlastnost, že pro každé $n \geqq 0$ platí $a_{n+1} = a_n - b_n$, kde b_n je číslo, které má stejné znaménko jako číslo a_n, ale opačné pořadí číslic (zápis čísla b_n může narozdíl od zápisu čísla a_n začínat jednou nebo více nulami). Například pro $a_0 = 1\,210$ je $a_1 = 1\,089$, $a_2 = -8\,712$, $a_3 = -6\,534$, ...

a) Dokažte, že posloupnost (a_n) je periodická.

b) Zjistěte, jaké nejmenší přirozené číslo může být a_0. (*T. Jurík*)

A – I – 4

Najděte všechny kubické rovnice $P(x) = 0$, které mají aspoň dva různé reálné kořeny, z nichž jeden je číslo 7, a které pro každé reálné číslo t splňují podmínku: Jestliže $P(t) = 0$, pak $P(t + 1) = 1$.

(*Pavel Novotný*)

A – I – 5

Jsou dány úsečky délek a, b, c, d. Dokažte, že konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ se stranami délek a, b, c, d (při obvyklém značení) existují a přitom úhlopříčky každého z nich svírají jeden a týž úhel, právě když platí rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. *(J. Šimša)*

A – I – 6

Najděte všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 2\,005(x - y).$$

(J. Moravčík)

A – S – 1

Najděte všechny dvojice celých čísel x a y, pro něž platí

$$\sqrt{x\sqrt{5}} - \sqrt{y\sqrt{5}} = \sqrt{6\sqrt{5} - 10}.$$

(J. Moravčík)

A – S – 2

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o obsahu S a jeho vnitřní bod M. Označme po řadě A_1, B_1, C_1 ty body stran BC, CA a AB, pro něž platí $MA_1 \parallel AB$, $MB_1 \parallel BC$ a $MC_1 \parallel CA$. Průsečíky os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 tvoří vrcholy trojúhelníku o obsahu T. Dokažte, že platí $S = 3T$. *(J. Švrček)*

A – S – 3

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$1 + \sin\frac{x + \pi}{5} \cdot \sin\frac{x - \pi}{11} = 0.$$

(J. Šimša)

A – II – 1

Najděte všechny dvojice celých čísel a, b takových, že součet $a + b$ je kořenem rovnice $x^2 + ax + b = 0$. *(E. Kováč)*

A - II - 2

Posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje pro každé $n \geqq 1$ rovnost

$$\frac{a_{n+3}-a_{n+2}}{a_n-a_{n+1}}=\frac{a_{n+3}+a_{n+2}}{a_n+a_{n+1}}$$

a navíc platí $a_{11}=4$, $a_{22}=2$, $a_{33}=1$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo k je součet

$$a_1^k+a_2^k+\ldots+a_{100}^k$$

druhou mocninou přirozeného čísla. (*J. Zhouf*)

A - II - 3

Je dán trojúhelník ABC a uvnitř něho bod P. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že čtyřúhelník $ABXY$ je tětivový, právě když druhý průsečík (různý od bodu C) kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY leží na přímce CP. (*E. Kováč*)

A - II - 4

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sin^2 x+\cos^2 y=y^2,$$
$$\sin^2 y+\cos^2 x=x^2.$$

(*J. Švrček*)

A - III - 1

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel má tu vlastnost, že pro každé $n \geqq 1$ platí $a_{n+1}=a_n+b_n$, kde b_n je číslo, které má opačné pořadí číslic než číslo a_n (zápis čísla b_n může na rozdíl od zápisu čísla a_n začínat jednou nebo více nulami). Například pro $a_1=170$ platí $a_2=241$, $a_3=383$, $a_4=766$, ... Rozhodněte, zda a_7 může být prvočíslo. (*Peter Novotný*)

A - III - 2

Nechť m a n jsou přirozená čísla taková, že rovnice

$$(x+m)(x+n)=x+m+n$$

má aspoň jedno celočíselné řešení. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 2.$$

(*J. Šimša*)

A – III – 3

V trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme K průsečík osy vnitřního úhlu BAC se stranou BC a L průsečík osy vnitřního úhlu ABC se stranou AC. Dále označme S střed kružnice vepsané, O střed kružnice opsané a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

a) Přímka KL se dotýká kružnic opsaných trojúhelníkům ALS, BVS a BKS.

b) Body A, B, K, L a O leží na jedné kružnici. (*T. Jurík*)

A – III – 4

V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík výšek V a střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici.

(*J. Švrček*)

A – III – 5

Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňující následující podmínky:

$$p \mid q + r, \quad q \mid r + 2p, \quad r \mid p + 3q.$$

(*M. Panák*)

A – III – 6

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{cotg}^2 2y &= 1,\\
\operatorname{tg}^2 y + 2\operatorname{cotg}^2 2z &= 1,\\
\operatorname{tg}^2 z + 2\operatorname{cotg}^2 2x &= 1.
\end{aligned}$$

(*J. Švrček, P. Calábek*)

A – I – 1

Z vlastností funkcí tangens a cotangens vyplývá, že $t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Označme dále

$$L = \sqrt{2}(\sin t + \cos t) \qquad \text{a} \qquad P = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

S ohledem na periodičnost funkcí sin, cos, tg, cotg stačí rozlišit následující případy.

▷ $t \in (0; \frac{1}{2}\pi)$: Pro každé takové t platí nerovnosti

$$\sin t + \cos t \leqq \sqrt{2} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t = \operatorname{tg}^3 t + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 t} \geqq 2.$$

Rovnost v každé z nich nastává, právě když $t = \frac{1}{4}\pi$. Dostáváme tak odhad

$$L \leqq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \leqq P.$$

Rovnice $L = P$ je tedy splněna pouze v případě $L = P = 2$ a jediné reálné číslo t z uvažovaného intervalu $(0; \frac{1}{2}\pi)$, které dané rovnici vyhovuje, je $t = \frac{1}{4}\pi$.

▷ $t \in (\frac{1}{2}\pi; \pi)$: Pro každé takové t platí nerovnosti

$$\sin t + \cos t > \cos t > -1$$

a

$$\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t = -\left((-\operatorname{tg} t)^3 + \frac{1}{(-\operatorname{tg} t)^3}\right) \leqq -2.$$

Pro libovolné t z uvažovaného intervalu pak platí odhady

$$L > -\sqrt{2} > -2 \geqq P,$$

což znamená, že na tomto intervalu daná rovnice nemá žádné řešení.

▷ $t \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$: Pro libovolné t z uvažovaného intervalu jsou obě hodnoty $\sin t$, $\cos t$ záporné (a hodnoty $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{cotg} t$ kladné), takže platí nerovnosti

$$\sin t + \cos t < 0 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t > 0.$$

Odtud $L < 0 < P$, a tudíž ani na tomto intervalu daná rovnice nemá žádné řešení.

▷ $t \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$: Podobně jako v druhém případě odvodíme, že pro libovolné t z uvažovaného intervalu platí nerovnosti

$$\sin t + \cos t > -1 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t \leqq -2.$$

Proto

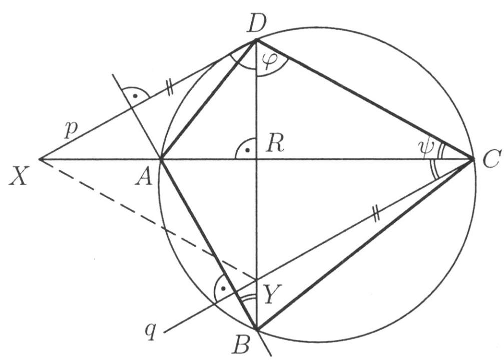
$$L > -\sqrt{2} > -2 \geqq P,$$

což znamená, že ani v tomto případě nemá daná rovnice žádné řešení.

Závěr. Vzhledem k periodičnosti uvažovaných goniometrických funkcí jsou řešením dané rovnice všechna reálná čísla t tvaru $t = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

A – I – 2

Označme R průsečík úhlopříček daného čtyřúhelníku a pro jednoduchost také φ, ψ velikosti úhlů CDR a DCR (obr. 23). Protože úhlopříčky jsou na sebe kolmé, je $\varphi + \psi = 90°$. Vzhledem k tomu, že oba vrcholy B, C



Obr. 23

leží ve stejné polorovině určené tětivou AD, plyne z rovnosti příslušných obvodových úhlů, že $|\sphericalangle ABD| = \psi$. A protože DX je kolmá na AB, je rovněž $|\sphericalangle XDB| = \varphi$. To znamená, že trojúhelník XCD je rovnoramenný se základnou XC. Úplně stejně ovšem zjistíme, že i trojúhelník YCD je rovnoramenný se základnou YD. Platí tedy $|XD| = |CD| = |CY|$, takže DX a CY jsou shodné a rovnoběžné úsečky. To znamená, že $XYCD$ je rovnoběžník, který jak víme, má tři strany shodné, tudíž je to kosočtverec nebo čtverec.

Jiné řešení. Využijeme ne zcela běžně známý poznatek, že bod souměrně sdružený s průsečíkem výšek daného trojúhelníku podle jeho libovolné strany leží na kružnici trojúhelníku opsané.

Označme R průsečík úhlopříček daného čtyřúhelníku. Podle podmínek úlohy je X průsečík výšek trojúhelníku ABD a Y průsečík výšek trojúhelníku ABC. Podle předchozího tvrzení je bod C obrazem bodu X v osové souměrnosti podle přímky BD, takže R je střed úsečky XC. Analogicky je R střed úsečky YD. Protože úsečky XC a YD jsou na sebe kolmé, je $XYCD$ kosočtverec nebo čtverec.

A – I – 3

a) Abychom dokázali, že uvažovaná posloupnost (a_n) je periodická, stačí ukázat, že existují přirozená čísla n_0 a p taková, že $a_{n_0+p} = a_{n_0}$. Protože každý další člen posloupnosti je jednoznačně určen předcházejícím členem, bude už pro každé $n \geqq n_0$ platit $a_{n+p} = a_n$ (posloupnost bude [počínaje členem a_{n_0}] periodická s délkou periody p).

Číslo $a_{n+1} = a_n - b_n$ má ovšem nejvýše tolik číslic jako číslo a_n. To je například vidět z nerovnosti $|a - b| \leqq \max(|a|, |b|)$. Má-li tedy počáteční člen posloupnosti k číslic, budou všechny ostatní členy posloupnosti patřit do konečné množiny nejvýše $2(10^k - 1)$ nenulových celých čísel. Protože posloupnost je nekonečná, musí obsahovat aspoň dva stejné členy. Odtud plyne, že uvažovaná posloupnost je periodická.

b) Protože uvažovaná posloupnost neobsahuje žádný člen rovný nule, nemůže být jejím členem žádné *palindromické* číslo (číslo, které „přečteme" stejně odpředu i odzadu), speciálně tedy ani číslo jednomístné.

Předpokládejme nejprve, že členem uvažované posloupnosti je kladné dvojmístné číslo $a_0 = \overline{ab} = 10a + b$, pro které $a_1 = 9(a - b)$. Vidíme, že všechny další členy (zejména tudíž ty, které se budou periodicky opakovat) musí být dělitelné devíti. Stačí proto probrat všechny dvojmístné násobky devíti $18, \ldots, 99$. Jak snadno zjistíme podle následujícího schématu,

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
81 \arrow[dr] & & & & \\
& 63 \arrow[dr] & & & \\
18 \arrow[ur] & & 27 \arrow[dr] & & \\
& 36 \arrow[ur] & & 45 \arrow[dr] & \\
& & 72 \arrow[ur] & & 9 \\
& & & 54 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

pro každé takové číslo se mezi členy posléze objeví jednomístná devítka. To znamená, že uvažovaná posloupnost nemůže obsahovat ani dvojmístná čísla. (Čísla ve schématu jsou v absolutní hodnotě, protože příslušná změna znaménka nemá na právě získaný výsledek vliv. Podobně nemusíme zvlášť vyšetřovat ani případ záporného dvojmístného čísla a_0.)

Předpokládejme dále, že členem uvažované posloupnosti je trojmístné číslo $a_0 = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, pro které $a_1 = 99(a - c)$. Opět stačí prozkoumat jen trojmístná čísla 99, 198, …, 990 (násobky čísla 99). Podobně jako v předchozím případě podle následujícího schématu

$$
\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small]
891 \arrow[dr] & & & & \\
& 693 \arrow[dr] & & & \\
198 \arrow[ur] & & 297 \arrow[dr] & & \\
& 396 \arrow[ur] & & 495 \arrow[dr] & \\
& & 792 \arrow[ur] & & 99 \\
& & & 594 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

zjistíme, že pro taková čísla se mezi členy posloupnosti nakonec objeví dvojmístné číslo 99. Posloupnost tedy nemůže obsahovat ani trojmístná čísla.

Protože pro čtyřmístné číslo $a_0 = \overline{abcd} = 1\,000a+100b+10c+d$ dostáváme $a_1 = 999(a-d)+90(b-c)$, zjistíme opět, že prvních deset nejmenších čtyřmístných čísel (pro něž je v příslušném desítkovém zápise $b = c = 0$, takže jako členy posloupnosti vycházejí jen násobky čísla 999) členem uvažované posloupnosti být nemůže: pro čísla 1 000 a 1 002 dostaneme rovnou $|a_1| = 999$, číslo 1 001 je palindromické a pro čísla 1 003, …, 1 009 dostaneme $|a_1| = 1\,998, 2\,997, \ldots, 8\,991$ a podle obdobného schématu

$$
\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small]
8\,991 \arrow[dr] & & & & \\
& 6\,993 \arrow[dr] & & & \\
1\,998 \arrow[ur] & & 2\,997 \arrow[dr] & & \\
& 3\,996 \arrow[ur] & & 4\,995 \arrow[dr] & \\
& & 7\,992 \arrow[ur] & & 999 \\
& & & 5\,994 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

po několika krocích trojmístné číslo 999. Pro následující čtyřmístné číslo 1 010 dostaneme trojmístné číslo 909 a pro 1 011 dokonce dvojmístné číslo −90. Teprve pro číslo 1 012 dostaneme posloupnost čtyřmístných čísel

$$-1\,089,\ 8\,712,\ 6\,534,\ 2\,178,\ -6\,534,$$

která se zřejmě po dalším členu zacyklí.

Závěr. Nejmenší možné číslo a_0 je 1 012.

A – I – 4

Podle zadání má mít kubická rovnice $P(x) = 0$ dva různé reálné kořeny, označme je $x_1 = 7$ a $x_2 \neq x_1$ (konkrétní hodnotu $x_1 = 7$ využijeme, jen když to bude vhodné, jinak budeme raději psát obecně x_1). Pro kubický mnohočlen $P(x)$, jehož koeficient u mocniny x^3 označíme a, $a \neq 0$, pak existuje ještě reálné číslo x_3 takové, že platí rozklad

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \tag{1}$$

(nejsou vyloučeny rovnosti $x_3 = x_1$ nebo $x_3 = x_2$).

Připomeňme, jak existenci třetího reálného kořene x_3 zdůvodnit: kubický mnohočlen $P(x)$ je nutně dělitelný mnohočlenem $(x - x_1)(x - x_2)$, příslušný podíl je lineární dvojčlen s vedoucím koeficientem a, tedy dvojčlen $ax + b$, který lze zapsat jako $a(x - x_3)$, zvolíme-li $x_3 = -b/a$.

Naší úlohou je najít všechny vyhovující trojice čísel $a \neq 0$, $x_2 \neq x_1$ a x_3, pro které mnohočlen (1) s danou hodnotou $x_1 = 7$ splňuje pro každé reálné t implikaci $P(t) = 0 \implies P(t + 1) = 1$. Pro rozbor takové podmínky je nezbytné vědět, pro kolik *různých* hodnot t rovnost $P(t) = 0$ (a tedy i rovnost $P(t + 1) = 1$) skutečně platí, tedy kolik je v trojici x_1, x_2, x_3 různých čísel. A priori mohou nastat pouze následující možnosti A, B a C.

A. *x_1, x_2, x_3 jsou tři navzájem různá čísla.*

Tehdy má kubická rovnice $P(x) = 1$ tři navzájem různé kořeny $x_1 + 1$, $x_2 + 1$, $x_3 + 1$, takže platí rozklad

$$P(x) - 1 = a(x - x_1 - 1)(x - x_2 - 1)(x - x_3 - 1).$$

Dosadíme-li sem rozklad (1), dostaneme rovnost mnohočlenů

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) - 1 = a(x - x_1 - 1)(x - x_2 - 1)(x - x_3 - 1). \tag{2}$$

Porovnáním koeficientů u mocniny x^2 na levé a pravé straně obdržíme rovnici

$$-a(x_1 + x_2 + x_3) = -a(x_1 + x_2 + x_3 + 3),$$

která je splněna pouze v případě $a = 0$, což odporuje předpokladu $a \neq 0$. (Navíc rovnost (2) neplatí ani pro $a = 0$, kdy má tvar $-1 = 0$.)

B. $x_1 = x_3 = 7 \neq x_2$.

Tehdy $P(x) = a(x - 7)^2(x - x_2)$ a rovnost $P(x) = 1$ musí platit pro $x = 7 + 1 = 8$ a pro $x = x_2 + 1$. Dostáváme tak soustavu dvou rovnic

$$P(8) = a(8 - x_2) = 1 \quad \text{a} \quad P(x_2 + 1) = a(x_2 - 6)^2 = 1.$$

Převrácená hodnota čísla a je tedy rovna jak číslu $8 - x_2$, tak číslu $(x_2 - 6)^2$. Z rovnice

$$8 - x_2 = (x_2 - 6)^2$$

dostaneme úpravou rovnici $x_2^2 - 11x_2 + 28 = 0$, která má dva kořeny $x_2 = 4$ a $x_2 = 7$. Druhý kořen nevyhovuje naší podmínce $x_2 \neq x_1$, takže nutně platí $x_2 = 4$, odkud $a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ a $P(x) = \frac{1}{4}(x-7)^2(x-4)$.

C. $x_1 = 7 \neq x_2 = x_3$.

Tehdy $P(x) = a(x-7)(x-x_2)^2$ a rovnost $P(x) = 1$ musí platit pro $x = 7 + 1 = 8$ a pro $x = x_2 + 1$. Dostáváme tak soustavu dvou rovnic

$$P(8) = a(8 - x_2)^2 = 1 \quad \text{a} \quad P(x_2 + 1) = a(x_2 - 6) = 1.$$

Převrácená hodnota čísla a je tedy rovna jak číslu $(8 - x_2)^2$, tak číslu $x_2 - 6$. Z rovnice

$$(8 - x_2)^2 = x_2 - 6$$

dostaneme úpravou rovnici $x_2^2 - 17x_2 + 70 = 0$, která má dva kořeny $x_2 = 10$ a $x_2 = 7$. Druhý kořen nevyhovuje naší podmínce $x_2 \neq x_1$, takže nutně platí $x_2 = 10$, odkud $a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ a $P(x) = \frac{1}{4}(x-7)(x-10)^2$.

Závěr. Podmínkám úlohy vyhovují pouze dvě kubické rovnice

$$\frac{1}{4}(x-7)^2(x-4) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{1}{4}(x-7)(x-10)^2 = 0.$$

Poznámka. Možnost A v uvedeném řešení můžeme vyloučit díky následující úvaze: Kdyby měl mnohočlen P tři různé kořeny k, l, m, měl by mnohočlen $P - 1$ dle předpokladu kořeny $k+1$, $l+1$, $m+1$. To však není možné, protože součet kořenů mnohočlenu P je stejný jako součet kořenů mnohočlenu $P - 1$.

A – I – 5

V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme S průsečík úhlopříček a kromě délek stran uvažujme ještě veličiny $e = |AC|$, $f = |BD|$, $e_1 = |AS|$, $e_2 = |CS|$, $f_1 = |BS|$, $f_2 = |DS|$ a $\varphi = |\sphericalangle ASB|$. Podle kosinové věty platí rovnosti

$$\begin{aligned}
a^2 &= e_1^2 + f_1^2 - 2e_1 f_1 \cos\varphi,\\
b^2 &= e_2^2 + f_1^2 + 2e_2 f_1 \cos\varphi,\\
c^2 &= e_2^2 + f_2^2 - 2e_2 f_2 \cos\varphi,\\
d^2 &= e_1^2 + f_2^2 + 2e_1 f_2 \cos\varphi.
\end{aligned}$$

Sečteme-li první rovnost s třetí a od výsledku odečteme součet druhé a čtvrté, dostaneme

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = -2(e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_2 f_1 + e_1 f_2) \cos\varphi,$$

neboli

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = -2ef \cos\varphi. \tag{1}$$

Odtud plyne takový závěr: platí-li rovnost $a^2+c^2 = b^2+d^2$, pak v každém uvažovaném čtyřúhelníku je $\cos\varphi = 0$, tedy úhel φ je vždy pravý a délky stran mají vyjádření

$$a^2 = e_1^2 + f_1^2,\ b^2 = e_2^2 + f_1^2,\ c^2 = e_2^2 + f_2^2,\ d^2 = e_1^2 + f_2^2. \tag{2}$$

Abychom uzavřeli první část řešení, zdůvodníme ještě, že takové čtyřúhelníky (pro jakékoliv délky a, b, c, d splňující vztah $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$) existují. Jistě můžeme předpokládat, že platí $d = \min\{a, b, c, d\}$; délku e_1 pak zvolíme v intervalu $(0, d)$ libovolně a podle (2) určíme

$$f_1 = \sqrt{a^2 - e_1^2}, \quad f_2 = \sqrt{d^2 - e_1^2},$$
$$e_2 = \sqrt{c^2 - d^2 + e_1^2} \left(= \sqrt{b^2 - a^2 + e_1^2}\right)$$

(vzhledem k učiněnému předpokladu je $c^2 - d^2 \geqq 0$). Tím je existence vyhovujících čtyřúhelníků (s navzájem kolmými úhlopříčkami) prokázána.

V druhé části řešení budeme naopak předpokládat, že aspoň jeden konvexní čtyřúhelník $A_0B_0C_0D_0$ se stranami daných délek a, b, c, d existuje; z úvahy o drátěném modelu čtyřúhelníku je jasné, že vyhovujících konvexních čtyřúhelníků $ABCD$ (tvarově blízkých $A_0B_0C_0D_0$) je pak nekonečně mnoho; jejich vnitřní úhly α, γ u vrcholů A, C jsou vázány podmínkou

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos\gamma \tag{3}$$

(porovnání délky společné strany BD trojúhelníků ABD a BCD). Připusťme, že úhlopříčky všech těchto čtyřhelníků svírají týž úhel φ a že *levá strana rovnosti* (1) *je nenulová* (podle jejího znaménka je úhel φ buď ostrý, nebo tupý, takže se nemůže stát, že pro část vyhovujících čtyřúhelníků má velikost φ_0, a pro ostatní $\pi - \varphi_0$). Pak z rovnosti (1) můžeme vypočítat součin ef, který je tudíž pro všechny vyhovující čtyřúhelníky stejný; ze vzorce pro jejich obsah $S = \frac{1}{2}ef \sin\varphi$ nakonec plyne, že i hodnota S je jedna a táž. Protože obsah S můžeme vyjádřit i vzorcem $S = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma$, docházíme k závěru: existují takové konstanty R_1 a R_2, že všechny vyhovující čtyřúhelníky splňují vztahy

$$ad\cos\alpha - bc\cos\gamma = R_1, \qquad ad\sin\alpha + bc\sin\gamma = R_2$$

(první vztah je důsledkem (3), ve druhém $R_2 = 2S > 0$). Z nich dále vyplývá

$$\begin{aligned}(bc)^2 &= (bc\cos\gamma)^2 + (bc\sin\gamma)^2 = (ad\cos\alpha - R_1)^2 + (R_2 - ad\sin\alpha)^2 = \\ &= (ad)^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2ad(R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha).\end{aligned}$$

Protože $ad \neq 0$, lze z poslední rovnosti vypočítat hodnotu výrazu

$$V = R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha,$$

která je tudíž pro všechny vyhovující čtyřúhelníky $ABCD$ stejná. To je možné jedině tehdy, když $R_1 = R_2 = 0$, a to je spor s tím, že $R_2 > 0$. Důkaz druhé části tvrzení je hotov.

Dodejme, že závěr o hodnotách výrazu V plyne ze známého vyjádření

$$V = \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}\sin(\alpha + \omega),$$

kde úhel ω je určen vztahy

$$\sin\omega = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} \quad \text{a} \quad \cos\omega = \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}.$$

Výraz $\sin(\alpha + \omega)$ není konstantní, když se úhel α mění v okolí úhlu α_0 (jenž odpovídá výchozímu čtyřúhelníku $A_0B_0C_0D_0$ z úvodu druhé části řešení).

A – I – 6

Odvodíme nejprve, jak vypadá každá dvojice (x, y) přirozených čísel, která vyhovuje rovnici

$$x^2 + y^2 = k(x - y) \tag{1}$$

s daným přirozeným číslem k (a teprve pak všechna tato řešení pro hodnotu $k = 2\,005$ sestrojíme).

Předpokládejme, že (x, y) je libovolné řešení rovnice (1), kterou obvyklým způsobem upravíme do „součinového" tvaru

$$y(y+k) = x(k-x). \tag{2}$$

Provedeme úvahu o soudělnosti zastoupených činitelů: označme d největší společný dělitel přirozených čísel x a y, takže platí $x = dm$ a $y = dn$, kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla. Po vydělení obou stran rovnosti (2) číslem d dostaneme „výhodnější" rovnost $n(y+k) = m(k-x)$. Z ní totiž vzhledem k nesoudělnosti čísel m, n plyne, že přirozené číslo $y+k$ je násobkem čísla m a číslo $k-x$ stejným násobkem čísla n. Pro vhodné přirozené q tedy platí rovnosti

$$y + k = qm \quad \text{a} \quad k - x = qn.$$

Vyjádřeme odtud dvojím způsobem číslo k a obě vyjádření porovnejme:

$$\left.\begin{aligned} k &= qm - y = qm - dn, \\ k &= qn + x = qn + dm \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ qm-dn = qn+dm \ \Rightarrow\ m(q-d) = n(q+d).$$

Odtud opět z nesoudělnosti čísel m, n plyne, že přirozené číslo $q+d$ je násobkem čísla m a číslo $q-d$ stejným násobkem čísla n. Pro vhodné přirozené r tedy platí rovnosti

$$q + d = rm \quad \text{a} \quad q - d = rn.$$

Jejich sečtením a odečtením dostaneme následující vyjádření čísel q a d pomocí r, m a n:

$$q = \frac{r(m+n)}{2} \quad \text{a} \quad d = \frac{r(m-n)}{2},$$

odkud již pro neznámé x, y dostáváme konečné vzorce

$$x = dm = \frac{r(m-n)m}{2} \quad \text{a} \quad y = dn = \frac{r(m-n)n}{2}. \tag{3}$$

Zjistěme nyní, jak souvisejí parametry r, m, n s daným koeficientem k z původní rovnice (1). Můžeme postupovat například tak, že odvozené vzorce dosadíme do rovnosti $k = qn + x$:

$$k = qn + x = \frac{r(m+n)n}{2} + \frac{r(m-n)m}{2} = \frac{r(m^2+n^2)}{2},$$

odkud po násobení dvěma dostaneme hledanou podmínku ve tvaru

$$2k = r(m^2 + n^2). \tag{4}$$

Jiný způsob odvození rovnosti (4), který je současně přímou „zkouškou“ vzorců (3), spočívá v tom, že z nich snadno plynou vyjádření

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{r^2(m-n)^2(m^2+n^2)}{4}, \\ x - y &= \frac{r(m-n)^2}{2}, \end{aligned}$$

ze kterých vidíme, že rovnice (1) je pro taková x, y splněna, právě když je splněna podmínka (4). Než zformulujeme dokázaný výsledek, dodejme ještě, že podle vzorců (3) musejí čísla m, n splňovat nerovnost $m > n$. Proto platí následující věta.

Je-li k dané přirozené číslo, pak řešeními rovnice $x^2 + y^2 = k(x - y)$ jsou právě ty dvojice přirozených čísel x a y, které jsou tvaru

$$x = \frac{r(m-n)m}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{r(m-n)n}{2},$$

kde r, m, n jsou přirozená čísla, pro něž platí rovnost $2k = r(m^2 + n^2)$, přičemž čísla m a n jsou nesoudělná a $m > n$.

Z dokázané věty plyne recept, jak všechna řešení rovnice $x^2 + y^2 = k(x - y)$ pro daný koeficient k sestrojit: uvážíme všechny možné rozklady čísla $2k$ na dva činitele, $2k = rs$, a pro každý z nich pak najdeme vyhovující čísla m, n z rovnosti $m^2 + n^2 = s$. Pak už nezbývá nic jiného, než že pro konečně mnoho čísel m, jež jsou s číslem s nesoudělná a splňují nerovnosti $m^2 < s < 2m^2$, testujeme, zda rozdíl $s - m^2$ je druhou mocninou přirozeného čísla. Pro dané $k = 2\,005 = 5 \cdot 401$ (401 je prvočíslo) existují tyto rozklady (protože $m^2 + n^2 \geqq 2^2 + 1^2 = 5$, vynecháme rovnou rozklady, v nichž je činitel $s = m^2 + n^2$ menší než 5):

(i) $r = 802$, $m^2 + n^2 = 5$. Zřejmě $m = 2$ a $n = 1$, odkud $x = 802$ a $y = 401$.

(ii) $r = 401$, $m^2 + n^2 = 10$. Zřejmě $m = 3$ a $n = 1$, odkud $x = 1\,203$ a $y = 401$.

(iii) $r = 10$, $m^2 + n^2 = 401$. Platí $15 \leqq m \leqq 20$, vyhovuje pouze $m = 20$, kdy $n = 1$, $x = 1\,900$ a $y = 95$.

(iv) $r = 5$, $m^2 + n^2 = 802$. Platí $21 \leqq m \leqq 27$, probereme pouze lichá m, vyhovuje jen $m = 21$, kdy $n = 19$, $x = 105$ a $y = 95$.

(v) $r = 2$, $m^2 + n^2 = 2\,005$. Platí $31 \leqq m \leqq 44$, probereme pouze m nesoudělná s číslem 5, vyhovuje jednak $m = 39$, kdy $n = 22$, $x = 663$ a $y = 374$, jednak $m = 41$, kdy $n = 18$, $x = 943$ a $y = 414$.

(vi) $r = 1$, $m^2 + n^2 = 4\,010$. Platí $45 \leqq m \leqq 63$, probereme pouze m nesoudělná s číslem 10, vyhovuje jednak $m = 59$, kdy $n = 23$, $x = 1\,062$ a $y = 414$, jednak $m = 61$, kdy $n = 17$, $x = 1\,342$ a $y = 374$.

Závěr. Úloha má právě osm řešení (x, y). Zapíšeme je v rostoucím pořadí podle první složky x: $(105, 95)$, $(663, 374)$, $(802, 401)$, $(943, 414)$, $(1\,062, 414)$, $(1\,203, 401)$, $(1\,342, 374)$, $(1\,900, 95)$.

Poznámky. Všimněme si, že těchto osm dvojic (x, y) má pouze čtyři různé složky y (každé y je zastoupeno ve dvou dvojicích). To lze vysvětlit takovým pozorováním: má-li pro některé přirozené y kvadratická rovnice

$$x^2 - 2\,005x + (y^2 + 2\,005y) = 0$$

aspoň jedno řešení x v oboru přirozených čísel, má v tomto oboru dvě různá řešení. Snadné vysvětlení plyne z Viètových vzorců: je-li x_1 celočíselný kořen této rovnice, je i druhý kořen $x_2 = 2\,005 - x_1$ celé číslo (různé od x_1); z rovnosti $x_1 x_2 = y^2 + 2\,005y$ plyne, že oba kořeny x_1, x_2 mají stejné znaménko, neboť $y^2 + 2\,005y > 0$.

Nechť dvojice (x, y) přirozených čísel je řešením dané rovnice, takže $x > y$. Po úpravě

$$2(x^2 + y^2) = 2 \cdot 2\,005(x - y),$$
$$(x + y)^2 + (2\,005 - x + y)^2 = 2\,005^2 \tag{1}$$

zjišťujeme, že je navíc $0 < x + y < 2\,005$ a $0 < 2\,005 - x + y < 2\,005$. Všechna řešení pythagorejské rovnice $X^2 + Y^2 = Z^2$ dovedeme popsat: trojice (X, Y, Z) *nesoudělných* přirozených čísel je řešením uvedené rovnice, právě když existují nesoudělná přirozená čísla u, v taková, že $u > v$, uv je sudé a až na případnou výměnu čísel X a Y platí rovnosti

$$X = 2uv,\ Y = u^2 - v^2,\ Z = u^2 + v^2.$$

Odtud plyne další možný postup řešení dané rovnice.

A – S – 1

Z tvaru dané rovnice ihned plyne, že $x > y \geqq 0$ (neboť $6\sqrt{5} - 10 > 0$). Pro taková x, y můžeme umocnit obě (kladné) strany rovnice na druhou a provést další ekvivalentní úpravy:

$$\begin{aligned} x\sqrt{5} - 2\sqrt{5xy} + y\sqrt{5} &= 6\sqrt{5} - 10, \\ x - 2\sqrt{xy} + y &= 6 - 2\sqrt{5}, \\ x + y - 6 &= 2\bigl(\sqrt{xy} - \sqrt{5}\bigr). \end{aligned} \tag{1}$$

Umocněním a další úpravou dostaneme, že pro hledaná celá čísla x, y musí platit

$$\begin{aligned} (x + y - 6)^2 &= 4\bigl(xy - 2\sqrt{5xy} + 5\bigr), \\ 8\sqrt{5xy} &= 4(xy + 5) - (x + y - 6)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Z poslední rovnice plyne, že hodnota $\sqrt{5xy}$ je racionální, a tedy celé číslo,[4] takže $5xy$ je druhá mocnina nezáporného celého čísla, jež je zřejmě dělitelné pěti.[5] Platí tedy $5xy = (5k)^2$ neboli $xy = 5k^2$, kde k je nezáporné celé číslo. Už teď je výhodné dosadit ne do rovnice (2), ale rovnou do rovnice (1). Dostaneme totiž rovnici

$$x + y - 6 = 2\bigl(\sqrt{5k^2} - \sqrt{5}\bigr) \quad \text{neboli} \quad x + y - 6 = 2(k - 1)\sqrt{5},$$

odkud díky iracionalitě čísla $\sqrt{5}$ vyplývá, že ke splnění rovnice (1) je nutné a stačí, aby platily obě rovnosti $k = 1$ a $x + y - 6 = 0$. Ze soustavy rovnic

$$xy = 5k = 5, \quad x + y = 6$$

snadno zjistíme, že $\{x, y\} = \{5, 1\}$, tedy $x = 5$ a $y = 1$, neboť $x > y$ podle úvodní úvahy.

Hledaná dvojice (x, y) je jediná, a to $(x, y) = (5, 1)$.

A – S – 2

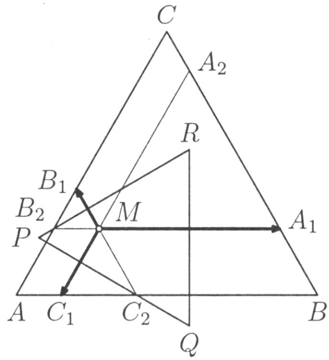
Označme P, Q, R vrcholy vzniklého trojúhelníku. Protože každá z os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 je kolmá na odpovídající stranu trojúhelníku

---

[4] Druhá odmocnina nezáporného celého čísla je buď číslo celé, nebo číslo iracionální.

[5] Je-li n celé a n^2 je dělitelné pěti, je i n dělitelné pěti.

ABC, svírají každé dvě ze stran trojúhelníku PQR úhel $60°$, takže se jedná o rovnostranný trojúhelník (obr. 24).



Obr. 24

Ukážeme nyní, že součet délek úseček MA_1, MB_1 a MC_1 je (nezávisle na poloze bodu M) roven délce a strany výchozího trojúhelníku ABC. Označme proto po řadě B_2, C_2 a A_2 průsečíky přímek MA_1, MB_1 a MC_1 se stranami CA, AB a BC. Protože trojúhelníky MA_1A_2, MB_1B_2 a MC_1C_2 jsou rovnostranné, je

$$|MA_1| + |MB_1| + |MC_1| = |A_1A_2| + |A_2C| + |A_1B| = |BC| = a.$$

Pro libovolný (vnitřní) bod rovnostranného trojúhelníku platí, že součet jeho vzdáleností od všech stran trojúhelníku je roven příslušné výšce. To je snadno vidět např. z vyjádření obsahu takového trojúhelníku jako součtu obsahů tří trojúhelníků tvořených daným (vnitřním) bodem a dvojicí vrcholů. Protože bod M má od stran (rovnostranného) trojúhelníku PQR vzdálenosti $\frac{1}{2}|MA_1|$, $\frac{1}{2}|MB_1|$ a $\frac{1}{2}|MC_1|$, má výška t tohoto trojúhelníku velikost $t = \frac{1}{2}(|MA_1| + |MB_1| + |MC_1|) = \frac{1}{2}a$. Protože pro výšku v rovnostranného trojúhelníku ABC platí $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, je $S = \frac{1}{2}av = \frac{1}{3}v^2\sqrt{3}$. Podobně pro obsah T trojúhelníku PQR s výškou t dostáváme

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3}t^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{9}v^2 = \frac{1}{3}S,$$

neboli $S = 3T$, což jsme chtěli dokázat.

A – S – 3

Protože všechny hodnoty funkce sinus leží v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, je součin dvou hodnot sinu roven číslu -1, jen když je jedna hodnota 1 a druhá hodnota je -1. Číslo $x \in \mathbb{R}$ je tedy řešením dané rovnice, právě když existují čísla $k, l \in \mathbb{Z}$ taková, že platí dvojice rovností

$$\begin{cases} \dfrac{x+\pi}{5} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \dfrac{x-\pi}{11} = -\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi, \end{cases} \quad \text{nebo} \quad \begin{cases} \dfrac{x+\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \dfrac{x-\pi}{11} = \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi. \end{cases}$$

Vyřešíme-li tyto lineární rovnice, dostaneme vyjádření

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{2} + 10k\pi, \\ x = -\dfrac{9\pi}{2} + 22l\pi, \end{cases} \quad \text{nebo} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{7\pi}{2} + 10k\pi, \\ x = \dfrac{13\pi}{2} + 22l\pi. \end{cases}$$

Najdeme nyní všechny dvojice celých čísel (k, l), pro něž platí

$$\frac{3\pi}{2} + 10k\pi = -\frac{9\pi}{2} + 22l\pi, \quad \text{resp.} \quad -\frac{7\pi}{2} + 10k\pi = \frac{13\pi}{2} + 22l\pi.$$

Snadnou úpravou těchto rovnic (včetně krácení číslem 2π) dostaneme

$$5k + 3 = 11l, \quad \text{resp.} \quad 5k - 5 = 11l.$$

Upravíme-li první rovnici na tvar $5(k-6) = 11(l-3)$, pak úvahou o dělitelnosti nesoudělnými čísly 5 a 11 zjistíme, že všechna celočíselná řešení takové rovnice jsou tvaru $k = 6 + 11n$ a $l = 3 + 5n$, kde $n \in \mathbb{Z}$. Dosazením do příslušného vzorce pro x tak dostáváme první skupinu řešení

$$x = \frac{3\pi}{2} + 10k\pi = \frac{3\pi}{2} + 10(6 + 11n)\pi = 61{,}5\pi + 110n\pi.$$

Podobně z druhé rovnice $5k - 5 = 11l$ upravené do tvaru $5(k-1) = 11l$ zjistíme, že $k = 1 + 11n$, $l = 5n$ pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$, takže druhá skupina řešení má vyjádření

$$x = -\frac{7\pi}{2} + 10k\pi = -\frac{7\pi}{2} + 10(1 + 11n)\pi = 6{,}5\pi + 110n\pi.$$

Shrnutí: Všechna řešení dané rovnice jsou dána vzorci

$$x = 61{,}5\pi + 110n\pi \quad \text{a} \quad x = 6{,}5\pi + 110n\pi, \quad \text{kde } n \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Protože $61{,}5 - 6{,}5 = 55 = \frac{110}{2}$, lze všechna řešení zapsat jedním vzorcem

$$x = 6{,}5\pi + 55n\pi, \quad \text{kde } n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Jiné řešení. Díky goniometrickému vzorci

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$

lze rovnici $1 + \sin A \sin B = 0$ přepsat do tvaru

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = 2.$$

S ohledem na obor hodnot funkce kosinus je poslední rovnice splněna, právě když platí $\cos(A+B) = 1$ a $\cos(A-B) = -1$. Pro zlomky A, B z původní rovnice tak dostáváme soustavu rovností

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{x+\pi}{5} + \frac{x-\pi}{11} = 2k\pi, \\ A - B &= \frac{x+\pi}{5} - \frac{x-\pi}{11} = \pi + 2l\pi, \end{aligned}$$

která musí platit pro vhodná čísla $k, l \in \mathbb{Z}$. Sečtením a odečtením dostaneme

$$\frac{x+\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + (k+l)\pi \qquad \text{a} \qquad \frac{x-\pi}{11} = -\frac{\pi}{2} + (k-l)\pi,$$

odkud dvojím způsobem vyjádříme neznámou x:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 5(k+l)\pi = -\frac{9\pi}{2} + 11(k-l)\pi.$$

Snadno zjistíme, že čísla k, l jsou zde svázána podmínkou $3(k-1) = 8l$, což znamená, že $l = 3n$ a $k = 8n + 1$ pro vhodné $n \in \mathbb{Z}$. Dosazením do vzorce pro x tak dojdeme ke stejnému vyjádření

$$x = \frac{13\pi}{2} + 55n\pi = 6{,}5\pi + 55n\pi$$

jako v prvním řešení.

A – II – 1

Hledáme celá čísla a, b, pro která $(a+b)^2 + a(a+b) + b = 0$, což je pro neznámou b kvadratická rovnice $b^2 + (3a+1)b + 2a^2 = 0$ s celočíselnými koeficienty. Ta má celočíselný kořen, jedině když je její diskriminant

$$D = (3a+1)^2 - 4 \cdot 2a^2 = (a+3)^2 - 8$$

úplný čtverec. Ten je přitom o osm menší než jiný úplný čtverec $(a+3)^2$. Jak snadno zjistíme (rozdíly druhých mocnin dvou sousedních přirozených čísel postupně rostou), rozdíl 8 mají pouze úplné čtverce 9 a 1, takže $(a+3)^2 = 9$, odkud plyne $a = -6$ nebo $a = 0$. Pro $a = -6$ vychází $b = 8$ a $b = 9$, pro $a = 0$ vychází $b = 0$ a $b = -1$. Dostáváme tak čtyři řešení: (a, b) je jedna z dvojic $(-6, 8)$, $(-6, 9)$, $(0, 0)$, $(0, -1)$.

Poznámky. Zvolíme-li za neznámou a místo b, vyjde rovnice

$$2a^2 + 3ba + (b^2 + b) = 0$$

s diskriminantem $D' = 9b^2 - 8 \cdot (b^2 + b) = (b-4)^2 - 16$; úplné čtverce lišící se o 16 jsou pouze 0, 16 a 9, 25.

Úlohu nalézt dva úplné čtverce x^2 a y^2 s daným rozdílem d lze pro malé hodnoty d (jako $d = 8$ či $d = 16$ v naší úloze) vyřešit otestováním několika prvních čtverců 0, 1, 4, 9, ... Pro jakékoli přirozené d lze postupovat tak, že rovnici $x^2 - y^2 = d$ upravíme na $(x-y)(x+y) = d$ a vypíšeme všechny rozklady daného čísla d na součin $d_1 d_2$ dvou celočíselných činitelů; z rovnic $d_1 = x-y$, $d_2 = x+y$ pak vypočteme příslušná x a y.

A – II – 2

Nejdříve dokážeme, že pro členy zkoumané posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí: rovnost $a_n = 0$ je splněna pro některé přirozené n, právě když pro totéž n platí $a_{n+3} = 0$. Skutečně, je-li $a_n = 0$, pak jmenovatelé zlomků v zadané rovnosti jsou navzájem opačná (nenulová) čísla, takže takoví musí být i jejich čitatelé. Z rovnosti

$$a_{n+3} - a_{n+2} = -(a_{n+3} + a_{n+2})$$

už plyne $a_{n+3} = 0$. Obráceně, platí-li $a_{n+3} = 0$, jsou čitatelé zmíněných zlomků navzájem opačná čísla, takže takoví musí být i jejich jmenovatelé, odkud $a_n = 0$.

Dokázaná vlastnost má tento důsledek: z podmínky $a_{33} \neq 0$ plyne $a_{3k} \neq 0$ (pro každé $k \geqq 1$), z $a_{22} \neq 0$ plyne $a_{3k+1} \neq 0$ a z $a_{11} \neq 0$ plyne $a_{3k+2} \neq 0$ (vždy pro každé $k \geqq 0$). Dohromady vychází, že *žádný člen* a_n *zkoumané posloupnosti není roven nule.*

Z rovnosti ze zadání plyne rovnost

$$(a_{n+3} - a_{n+2})(a_n + a_{n+1}) = (a_{n+3} + a_{n+2})(a_n - a_{n+1}),$$

z níž po roznásobení a následném zjednodušení dostaneme (pro libovolné přirozené n)

$$a_{n+1}a_{n+3} = a_n a_{n+2}.$$

Zvětšíme-li n o 1, dostaneme analogický vztah, který platí pro libovolné nezáporné celé n:

$$a_{n+2}a_{n+4} = a_{n+1}a_{n+3}.$$

Vynásobíme-li obě rovnosti a výsledek zkrátíme (nenulovým!) číslem $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$, vyjde $a_{n+4} = a_n$, tj. daná posloupnost má periodu 4. Proto $a_1 = a_{33} = 1$, $a_2 = a_{22} = 2$, $a_3 = a_{11} = 4$, $a_4 = a_1a_3/a_2 = 2$, tudíž

$$a_1^k + a_2^k + \ldots + a_{100}^k = 25(1^k + 2^k + 4^k + 2^k) = \left(5(1 + 2^k)\right)^2.$$

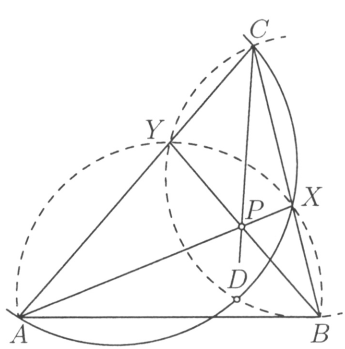
Tím je důkaz hotov.

A – II – 3

Dané čtyři body A, B, X, Y leží na kružnici (obr. 25), právě když

$$|PA| \cdot |PX| = |PB| \cdot |PY|.$$

Kružnice opsaná trojúhelníku ACX protne polopřímku opačnou k polo-



Obr. 25

přímce PC v bodě, který označíme D. Pro tento bod platí

$$|PA| \cdot |PX| = |PC| \cdot |PD|.$$

Rovnost z první věty řešení tedy nastane, právě když platí

$$|PB| \cdot |PY| = |PC| \cdot |PD|.$$

Tato rovnost je splněna, právě když bod D leží na kružnici opsané trojúhelníku BCY, tedy právě když je bod $D \neq C$ druhým průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY. Důkaz je hotov.

Poznámky. Úlohu je možné ihned vyřešit na základě poznatku o tom, jak vypadá množina všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím. Je to vždy přímka (zvaná chordála), jež je kolmá ke středné obou kružnic a prochází jejich společnými body (pokud existují). Rovnost z první věty řešení proto vyjadřuje právě to, že bod P leží na chordále kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY.

A – II – 4

Předně si uvědomme, že s každým reálným řešením (x, y) dané soustavy rovnic jsou jejími řešeními také dvojice $(x, -y)$, $(-x, y)$ a $(-x, -y)$, Stačí se proto omezit na řešení v oboru nezáporných reálných čísel. Navíc s každým řešením (x, y) je řešením dané soustavy i dvojice (y, x). Můžeme proto dále předpokládat, že $0 \leqq x \leqq y$.

Přepišme nejprve obě rovnice soustavy pomocí téhož známého vzorce $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$:

$$\sin^2 x + 1 - \sin^2 y = y^2,$$
$$\sin^2 y + 1 - \sin^2 x = x^2.$$

Sečtením obou rovnic pak dostaneme

$$x^2 + y^2 = 2. \tag{1}$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme

$$2 \sin^2 x - 2 \sin^2 y = y^2 - x^2,$$

neboli

$$2(\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y) = y^2 - x^2. \tag{2}$$

Za uvedeného předpokladu $0 \leqq x \leqq y$ ze vztahu (1) navíc plyne, že $0 \leqq x \leqq y \leqq \sqrt{2} < \frac{1}{2}\pi$, a protože funkce sinus je v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi)$ nezáporná a rostoucí, vidíme, že pro taková reálná čísla x a y je levá strana rovnice (2) nekladná, zatímco pravá strana je nezáporná. To znamená, že musí být $y^2 - x^2 = 0$, což za uvedených předpokladů dává $x = y$ a spolu s (1) tak máme $x = y = 1$.

V oboru nezáporných reálných čísel má daná soustava rovnic jediné řešení, a to $(x, y) = (1, 1)$.

Závěr. Daná soustava rovnic má právě čtyři řešení v oboru reálných čísel. Jsou jimi následující dvojice: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ a $(-1, -1)$.

A – III – 1

Dokážeme, že člen a_7 je vždy složené číslo dělitelné jedenácti. Klíčem k řešení úlohy je kritérium dělitelnosti jedenácti. Je-li $\overline{c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0}$ zápis čísla m v desítkové soustavě, dává číslo m při dělení jedenácti stejný zbytek jako střídavý součet jeho číslic:

$$\operatorname{zb}(m) = c_0 - c_1 + c_2 - \ldots + (-1)^k c_k.$$

Pro zbytek čísla b_n, které má opačné pořadí číslic než číslo a_n, tedy platí, že je $\operatorname{zb}(b_n) = \pm \operatorname{zb}(a_n)$ podle toho, je-li počet číslic čísla a_n lichý či sudý. Proto je-li některý člen uvažované posloupnosti dělitelný jedenácti, jsou jedenácti dělitelné i všechny následující členy. Navíc jakmile má nějaký člen a_n uvažované posloupnosti sudý počet číslic, je $\operatorname{zb}(a_n) = -\operatorname{zb}(b_n)$, takže $a_{n+1} = a_n + b_n$ je už dělitelné jedenácti (a stejně tak i další členy).

Posloupnost (a_n) je zřejmě rostoucí. Má-li člen a_1 sudý počet číslic, bude již člen a_2 složené číslo dělitelné jedenácti s výjimkou případu $a_1 = 10$, kdy ovšem $a_3 = 22$. Stačí tedy ukázat, že i pro čísla a_1 s lichým počtem číslic bude mezi prvními šesti členy posloupnosti vždy aspoň jeden člen se sudým počtem číslic. Dokážeme to sporem v následujícím odstavci.

Předpokládejme naopak, že všechna čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ mají lichý počet číslic. Označme c první a d poslední číslici čísla a_1, takže $1 \leqq c \leqq 9$ a $0 \leqq d \leqq 9$ (v případě jednomístného a_1 klademe $c = d$). Číslo b_1 pak bude formálně začínat číslicí d a končit číslicí c, a protože předpokládáme, že číslo $a_2 = a_1 + b_1$ má rovněž lichý, tedy stejný počet číslic, musí být $c + d < 10$. To bude tedy číslice na jeho posledním místě, zatímco na prvním místě bude stát $c + d$ nebo $c + d + 1$ (podle toho, zda při sčítání došlo na předposledním místě k přechodu přes desítku), v každém případě bude na prvním místě číslice aspoň $c+d$. Podobně postupně zjistíme, že první číslice čísla $a_3 = a_2 + b_2$ bude aspoň $2(c+d)$, první číslice čísla $a_4 = a_3 + b_3$ bude aspoň $4(c+d)$, první číslice čísla $a_5 = a_4 + b_4$ bude aspoň $8(c+d)$ a první číslice čísla $a_6 = a_5 + b_5$ bude aspoň $16(c+d)$. Protože $1 \leqq c+d < 10$, nemůže už zřejmě být $16(c+d) < 10$. Aspoň v jednom z čísel $a_2, a_3, \ldots, a_6$ se tudíž počet číslic zvýšil z lichého počtu na sudý.

Tím je úloha vyřešena. Dokázali jsme, že a_7 není nikdy prvočíslo.

Poznámka. Pro $a_1 = 10\,220$ vyjde $a_6 = 185\,767$, což je prvočíslo.

A – III – 2

Ukážeme, že z předpokladu úlohy plynou silnější odhady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqq \frac{m}{n} \leqq 2 - \frac{2}{n}. \tag{1}$$

Danou rovnici nejprve upravíme do tvaru

$$(x+m-1)(x+n) = m.$$

Je-li v této rovnosti x celé číslo, dostáváme rozklad přirozeného čísla m na součin dvou celých čísel, která tudíž leží obě buď v intervalu $\langle 1, m\rangle$, nebo v intervalu $\langle -m, -1\rangle$. V každém případě rozdíl těchto dvou čísel nepřevyšuje (společnou) délku obou intervalů:

$$(x+n) - (x+m-1) \leqq m-1, \quad \text{neboli} \quad n \leqq 2m-2,$$

odkud plyne dolní odhad (1). Vzhledem k symetrické roli čísel m a n platí rovněž nerovnost $m \leqq 2n-2$, která vede na horní odhad (1).

Jiné řešení. S ohledem na symetrii stačí uvažovat případ $m \geqq n$ a dokázat horní odhad (1) z prvního řešení, tedy nerovnost $m \leqq 2n-2$.

Daná rovnice je tvaru $x^2 + (m+n-1)x + mn - m - n = 0$ a má diskriminant

$$\begin{aligned} D &= (m+n-1)^2 - 4(mn-m-n) = \\ &= m^2 + n^2 - 2mn + 2m + 2n + 1 = (m-n+1)^2 + 4n. \end{aligned}$$

Ten musí být druhou mocninou celého čísla, má-li mít daná rovnice celočíselné řešení. Protože $4n$ je kladné sudé číslo, je číslo D větší než mocnina

$(m-n+1)^2$ a má stejnou paritu jako její základ $(m-n+1)$, který je kladný, neboť uvažujeme pouze případ $m \geqq n$. Proto musí platit $D = k^2$, kde k je celé číslo splňující podmínky $k > m-n+1 > 0$ a $k \equiv m-n+1 \pmod 2$. Znamená to, že $k \geqq m-n+3$, takže platí

$$\begin{aligned} D = (m-n+1)^2 + 4n = k^2 &\geqq \\ \geqq (m-n+3)^2 = (m-n+1+2)^2 &= \\ = (m-n+1)^2 + 4(m-n+1) + 4. & \end{aligned}$$

Odtud plyne nerovnost $4n \geqq 4(m-n+1)+4$, neboli $m \leqq 2n-2$, což jsme měli dokázat.

Poznámky. Protože dvojice tvaru $(m,n) = (2n-2, n)$ a $(m,n) = (m, 2m-2)$ vyhovují podmínce úlohy, jsou odhady (1) nejlepší možné.

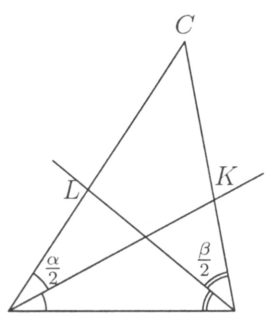
Je možné popsat všechny dvojice přirozených čísel (m,n), které vyhovují podmínce úlohy, a to způsobem uvedeným v následujícím tvrzení.

Věta. *Nechť m a n jsou celá čísla. Rovnice $(x+m)(x+n) = x+m+n$ má aspoň jedno celočíselné řešení, právě když jsou čísla m, n tvaru*

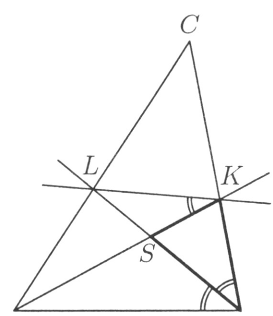
$$m = (a-1)b \quad \text{a} \quad n = a(b-1), \quad \text{kde} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

A – III – 3

Označme úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Z vlastností bodů K a L je zřejmé (obr. 26), že body A, B, K, L leží na kružnici, právě když $|\sphericalangle KAL| = |\sphericalangle KBL|$, tj. právě když $\alpha = \beta$.



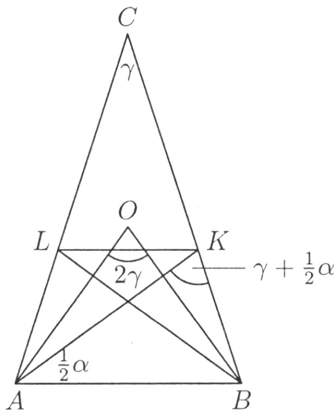
Obr. 26



Obr. 27

Přímka KL se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BKS (nutně v bodě K), právě když se rovnají úsekový a obvodový úhel příslušné tětivě KS (obr. 27): $|\sphericalangle LKA| = |\sphericalangle LBK| = \frac{1}{2}\beta = |\sphericalangle LBA|$. Poslední rovnost je ovšem ekvivalentní tomu, že body A, B, K, L leží na kružnici, což jak už víme, je právě když $\alpha = \beta$. (Jak je zřejmé ze symetrie, je to zároveň ekvivalentní tomu, že se přímka KL dotýká kružnice opsané trojúhelníku ALS.)

Z uvedených výsledků plyne, že svá další zkoumání můžeme omezit na rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB. Podívejme se nejprve, kdy kružnice opsaná čtyřúhelníku $ABKL$ obsahuje bod O. Středový úhel AOB v kružnici opsané trojúhelníku ABC má velikost 2γ, zatímco velikost úhlu AKB je $180^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \beta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ (obr. 28). Bod O přitom



Obr. 28

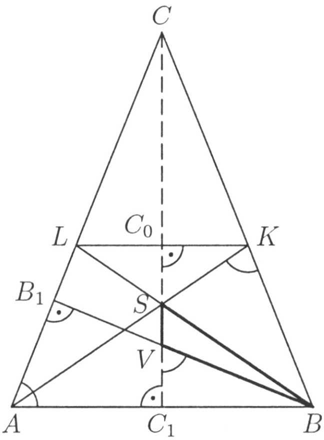
nemůže ležet na straně AB (když je úhel γ pravý) ani v polorovině opačné k ABC (když je úhel γ tupý), protože v tom případě vyjde

$$|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle AKB| = (360^\circ - 2\gamma) + (\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha) = \\ = 180^\circ + \tfrac{3}{2}\alpha + \beta > 180^\circ.$$

Body A, B, K, O tedy leží na jedné kružnici, právě když

$$2\gamma = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{neboli} \quad \alpha = \beta = 2\gamma = 72^\circ.$$

Zbývá zodpovědět otázku, kdy se kružnice opsaná trojúhelníku BVS dotýká přímky KL. V polorovině KLB existují dvě kružnice, které obsahují body B a S a dotýkají se přímky KL (Apolloniova úloha, pro bod dotyku T z mocnosti bodu L k takové kružnici platí $|LT|^2 = |LS| \cdot |LB|$). Jednu takovou kružnici už známe, je to kružnice opsaná trojúhelníku BKS, jež se přímky KL dotýká v bodě K. Druhá kružnice se tedy dotýká přímky KL v bodě K' souměrně sdruženém s K podle středu L. Má-li kružnice l opsaná trojúhelníku BVS ležet v polorovině KLB, musí v ní ležet i její bod V, který je pak nutně vnitřním bodem úsečky C_0C_1, jež je částí osy úsečky AB (obr. 29). Úhel SBV je tedy ostrý (jeho velikost



Obr. 29

je nejvýše $\frac{1}{2}\beta$), proto střed kružnice l leží v polorovině C_0C_1B a leží tam i jeho kolmý průmět (případný bod dotyku) na přímku KL. Kružnice l se tudíž dotýká přímky KL jedině v případě, když je to kružnice opsaná trojúhelníku BKS, tedy když body B, K, S, V leží na jedné kružnici. To nastane, právě když $|\sphericalangle C_1VB| = |\sphericalangle SKB|$ (to platí bez ohledu na to, zda bod V leží mezi body C_1, S, nebo mezi body C_0, S; obr. 29). Z pravoúhlých trojúhelníků ABB_1 a BVC_1 plyne $|\sphericalangle C_1VB| = \alpha$, takže rovnost $|\sphericalangle C_1VB| = |\sphericalangle SKB|$ platí, právě když

$$\alpha = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{neboli} \quad \alpha = \beta = 2\gamma = 72^\circ.$$

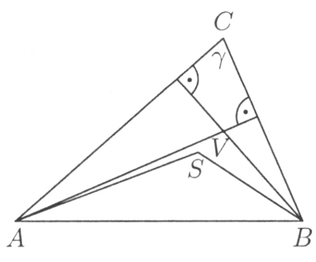
Dokázali jsme, že obě podmínky a) a b) jsou ekvivalentní tomu, že trojúhelník ABC je rovnoramenný s úhly $\alpha = \beta = 72^\circ$ a $\gamma = 36^\circ$.

A – III – 4

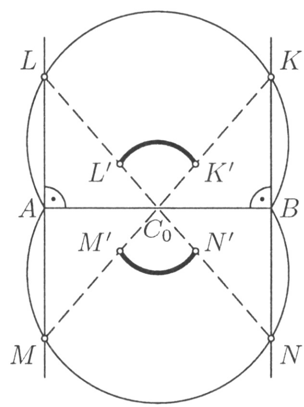
Protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží body V a S uvnitř něho. Označíme-li velikosti úhlů v daném trojúhelníku obvyklým způsobem, platí (obr. 30)

$$|\sphericalangle AVB| = 180^\circ - \gamma \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle ASB| = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Body A, B, V a S tedy leží na jedné kružnici, právě když $|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle ASB|$, což je podle uvedených vzorců ekvivalentní s rovností $\gamma = 60^\circ$. Vrchol C tak nutně leží na některém ze dvou kružnicových oblouků, z nichž je vidět úsečku AB pod úhlem 60°. Protože je trojúhelník ABC ostroúhlý, musí navíc vrchol C ležet uvnitř pásu vymezeného kolmicemi k přímce AB v bodech A a B. Vrchol C je tedy vnitřním bodem takto vymezených kružnicových oblouků KL a MN (obr. 31).



Obr. 30



Obr. 31

Označme dále C_0 střed úsečky AB. Protože těžiště T každého z uvažovaných trojúhelníků ABC je obrazem bodu C ve stejnolehlosti se středem C_0 a koeficientem $\frac{1}{3}$, je bod T vnitřním bodem jednoho z oblouků $K'L'$ nebo $M'N'$, jež jsou obrazy oblouků KL a MN v uvažované stejnolehlosti.

Protože zmíněná stejnolehlost je vzájemně jednoznačné zobrazení, je zřejmé, že každý vnitřní bod oblouků $K'L'$ nebo $M'N'$ má požadovanou vlastnost, tj. je těžištěm ostroúhlého trojúhelníku ABC s úhlem 60° při vrcholu C, jehož odpovídající body V a S leží na jedné kružnici s vrcholy A a B.

A – III – 5

Hledejme trojice p, q, r podle toho, které z těchto tří čísel je největší:

▷ *Největší je p.*

Pak z podmínky $p \mid q + r$ a z nerovnosti $q + r < 2p$ plyne $q + r = p$. Z druhé podmínky pak dostaneme $q \mid r + 2p = 3r + 2q$, tedy $q \mid 3r$, což vzhledem k různosti prvočísel znamená, že $q = 3$. Tedy $p = r + 3$ a poslední podmínka říká, že $r \mid r + 12$, neboli $r \mid 12$, tedy $r = 2$ (prvočísla mají být různá). Je tedy $p = 5$. Tato trojice vskutku splňuje podmínky ze zadání.

▷ *Největší je q.*

Pak podmínka $q \mid r + 2p$ a nerovnost $r + 2p < 3q$ dávají $r + 2p = q$ nebo $r + 2p = 2q$.

Je-li $2q = r + 2p$, musí být r sudé. Je tedy $r = 2$ a z rovnosti $2q = 2 + 2p$ plyne $q = p + 1$, což pro prvočísla p, q větší než $r = 2$ není možné.

Je-li $q = r + 2p$, první podmínka říká, že $p \mid 2r + 2p$, tedy $p \mid 2r$, tudíž $p = 2$. Poslední podmínka pak dává $r \mid p + 3q = 3r + 7p = 3r + 14$, tedy $r \mid 14$, takže $r = 7$. Potom je $q = r + 2p = 11$. Tato trojice rovněž vyhovuje zadání.

▷ *Největší je r.*

Pak srovnáme podmínku $r \mid p + 3q$ a nerovnost $p + 3q < 4r$.

Kdyby bylo $p + 3q = 3r$, bylo by $p = 3(r - q)$, tedy $p = 3$, $r - q = 1$, takže $r = 3$ a $q = 2$, což nejsou tři různá prvočísla.

Pokud $p + 3q = 2r$, dostáváme z první podmínky $p \mid 2(q + r) = p + 5q$, takže $p \mid 5q$ a $p = 5$. Druhá podmínka pak dává $q \mid 2(r + 2p) = 2r + 20 = 3q + 25$, tedy $q = 5$, a výslednou trojici netvoří různá prvočísla.

Konečně buď $p + 3q = r$. První podmínka pak dává $p \mid p + 4q$, takže $p \mid 4q$ a $p = 2$. Druhá podmínka pak říká, že $q \mid r + 2p = 3q + 6$, tedy $q \mid 6$ a $q = 3$, neboť $q \neq p = 2$. Potom $r = p + 3q = 11$. Tato trojice také vyhovuje zadání.

Řešením úlohy jsou tři trojice prvočísel (p, q, r), a to $(5, 3, 2)$, $(2, 11, 7)$ a $(2, 3, 11)$.

A – III – 6

Pro každé přípustné φ platí

$$2 \operatorname{cotg}^2 2\varphi = 2 \left(\frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{2 \sin \varphi \cos \varphi} \right)^2 = \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{cotg}^2 \varphi - 2).$$

Položme $\operatorname{tg}^2 x = a$, $\operatorname{tg}^2 y = b$ a $\operatorname{tg}^2 z = c$, kde a, b, c jsou kladná reálná čísla. Danou soustavu tak převedeme na tvar

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{2}\Big(b + \frac{1}{b}\Big) &= 2,\\ b + \frac{1}{2}\Big(c + \frac{1}{c}\Big) &= 2,\\ c + \frac{1}{2}\Big(a + \frac{1}{a}\Big) &= 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \geqq b \geqq c$. Při takovém uspořádání plyne z předchozí soustavy rovnic

$$b + \frac{1}{b} \leqq c + \frac{1}{c} \leqq a + \frac{1}{a}.$$

Protože pro každé kladné x platí $x + 1/x \geqq 2$, plyne ze soustavy (1) navíc $0 < a, b, c \leqq 1$. Funkce $f(x) = x + 1/x$ je ovšem na intervalu $(0; 1\rangle$ klesající, proto platí také nerovnost

$$a + \frac{1}{a} \leqq b + \frac{1}{b} \leqq c + \frac{1}{c}.$$

To spolu s předchozími nerovnostmi dává $a = b = c$.

Zbývá tak určit všechna $u \in (0; 1\rangle$, která vyhovují rovnici

$$u + \frac{1}{2}\Big(u + \frac{1}{u}\Big) = 2.$$

Po snadné úpravě obdržíme kvadratickou rovnici

$$3u^2 - 4u + 1 = 0, \quad \text{tj.} \quad (u-1)(3u-1) = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má právě dva kladné reálné kořeny $u_1 = 1$ a $u_2 = \frac{1}{3}$. S ohledem na použité substituce a periodičnost funkce tangens jsou řešením dané soustavy rovnic právě následující trojice (x, y, z) reálných čísel

$$\Big(\frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k_2\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k_3\frac{\pi}{2}\Big) \quad \text{a} \quad \Big(\pm\frac{\pi}{6} + k_1\pi, \pm\frac{\pi}{6} + k_2\pi, \pm\frac{\pi}{6} + k_3\pi\Big),$$

kde k_1, k_2, k_3 jsou libovolná celá čísla a tři znaménka v trojici druhého typu jsou vybrána libovolně, tj. navzájem nezávisle.

Kategorie P

Texty úloh

P – I – 1

Pluky

Na monitoru se právě schyluje k velké bitvě mezi armádou hráče a armádou jeho počítače. Síly jsou vyrovnané, obě armády mají stejný počet pluků, ovšem jednotlivé pluky mohou být tvořeny různým počtem vojáků. Na začátku bitvy se pluky obou armád seřadí do dvou řad tak, že proti každému hráčovu pluku stojí právě jeden pluk patřící počítači. Potom začne vlastní boj. Pluky stojící proti sobě na sebe zaútočí. A protože v množství je síla, zvítězí ten z nich, který má více vojáků. Pokud náhodou mají soupeřící pluky stejný počet vojáků, vyhraje pluk patřící počítači.

Hráčova armáda má schopné špióny, kteří před bitvou zjistili, kolik vojáků má nepřítel v kterém pluku a jak jsou jeho pluky rozmístěny. Vaším úkolem je rozmístit na základě těchto informací hráčovy pluky tak, aby co nejvíce z nich svůj souboj vyhrálo.

Soutěžní úloha. Napište program, který vám poradí, jak nejlépe rozmístit pluky, které máte k dispozici. Na vstupu dostanete počet pluků N v každé armádě a počty vojáků v každém z $2N$ pluků na bojišti. Výstupem programu bude jediné celé číslo — maximální počet pluků hráče, které mohou vyhrát svůj souboj při nějakém rozestavení.

Formát vstupu: První řádek vstupního souboru `pluky.in` obsahuje jedno celé číslo N ($1 \leqq N \leqq 10\,000$) — počet pluků v každé z armád. Na druhém řádku je mezerami odděleno N celých čísel $A_1, \ldots, A_N$ ($1 \leqq A_i \leqq 100\,000\,000$) — počty vojáků v jednotlivých plucích hráče. Na třetím řádku je mezerami odděleno N celých čísel $B_1, \ldots, B_N$ ($1 \leqq B_i \leqq 100\,000\,000$) — počty vojáků v jednotlivých plucích patřících počítači.

Formát výstupu: Jediný řádek výstupního souboru `pluky.out` bude obsahovat jedno celé číslo — maximální počet pluků hráče, které mohou najednou vyhrát svůj souboj.

Příklady:

`pluky.in`	`pluky.out`
5	3
7 12 1 7 47	*(Pokud hráč rozmístí své pluky správně, zvítězí jeho pluky velikosti 47, 12 a jeden z pluků velikosti 7.)*
7 12 1 7 47	

`pluky.in`	`pluky.out`
4	0
10 10 10 10	*(Při jakémkoliv rozestavení všechny pluky hráče prohrají.)*
10 10 10 10	

`pluky.in`	`pluky.out`
5	4
1 3 5 7 9	*(Hráč obětuje svůj nejmenší pluk, pošle ho proti pluku velikosti 10. Ostatní pluky potom lze rozmístit tak, aby vyhrály.)*
2 4 6 8 10	

P – I – 2

Teleport

Vědcům se konečně podařilo vymyslet efektivní způsob cestování v časoprostoru. Jejich testovací středisko se skládá z několika lokalit. V každé lokalitě je umístěno několik teleportů. Když vstoupíme do teleportu, přemístí nás na předem zadanou lokalitu (což bychom od teleportu očekávali), ale navíc nás přemístí také v čase o zadaný počet minut (buď dopředu, nebo dozadu). Vědci by chtěli zjistit, jak je cestování pomocí teleportů výhodné. Právě se nacházejí u centrálního počítače a chtěli by se jít nasvačit do bufetu. A protože čas jsou peníze, chtěli by být v bufetu co nejdříve. Pohybovat se v čase a prostoru samozřejmě chtějí jen pomocí již postavených teleportů.

Soutěžní úloha. Program dostane na vstupu počet lokalit N, které budeme označovat čísly $1, \ldots, N$. Centrální počítač je umístěn v lokalitě číslo 1, bufet má číslo N. Následuje celkový počet postavených teleportů M a seznam těchto teleportů. Pro každý teleport je určena počáteční lokalita, koncová lokalita a změna času v minutách, jež nastane při průchodu tímto teleportem (kladné číslo znamená posun do budoucnosti, záporné do minulosti a 0 znamená, že se v koncové lokalitě ocitneme ve stejném čase, v jakém jsme nastoupili do teleportu).

Každý teleport se může použít jen tím směrem, který je uveden na vstupu. Mezi dvěma lokalitami může být vybudováno více teleportů. Dokonce může existovat i teleport, který nás přesune pouze v čase (tedy počáteční a koncová lokalita jsou u něj totožné).

Program má určit čas, kdy nejdříve se můžeme dostat do lokality N, jestliže se v lokalitě 1 nacházíme v čase 0. Pokud tam dokážeme být libovolně brzo (tzn. můžeme pomocí teleportů cestovat neomezeně do minulosti), nebo pokud se tam vůbec nemůžeme dostat, program o tom vydá příslušnou zprávu.

Formát vstupu: První řádek vstupního souboru `teleport.in` obsahuje dvě čísla N a M ($2 \leqq N \leqq 1\,000$, $0 \leqq M \leqq 50\,000$) oddělená mezerou. Následuje M řádků, na každém z nich jsou tři čísla A_i, B_i, T_i ($1 \leqq A_i, B_i \leqq N$, $|T_i| \leqq 10\,000$) popisující teleport z lokality A_i do lokality B_i se změnou času T_i minut.

Formát výstupu: Jediný řádek výstupního souboru `teleport.out` bude obsahovat zprávu „`Vedci umrou hlady`“, jestliže se od centrálního počítače nedá dostat do bufetu, resp. zprávu „`Vedci poznaji vznik vesmiru`“, jestliže můžeme cestovat do nekonečna do minulosti. Jinak bude obsahovat jedno celé číslo představující čas v minutách, kdy nejdříve se vědci dokážou dostat do bufetu.

Příklady:

teleport.in	teleport.out
3 4	−2
1 2 5	*(Prvním teleportem se vědci dostanou do lokality 2 v čase 5, odtud druhým do lokality 3 v čase $5 + (-7) = -2$. Ostatní možnosti jsou horší.)*
2 3 −7	
1 3 −1	
1 3 16	

teleport.in	teleport.out
2 2	`Vedci poznaji vznik vesmiru`
1 1 −1	*(Dříve než se vědci druhým teleportem přesunou do bufetu, mohou prvním odcestovat libovolně daleko do minulosti.)*
1 2 0	

teleport.in	teleport.out
4 3	`Vedci umrou hlady`
1 2 −1	*(Poslední teleport nemohou vědci použít na přesun z lokality 3 do lokality 4, jedině naopak.)*
2 3 0	
4 3 10	

P – I – 3

Posádky

Žil jednou jeden starý král. Jeho království tvořilo N měst a mezi nimi vedla sem tam nějaká cesta. Jelikož králové bývají od přírody lakomí, v celém království nebylo zrovna mnoho udržovaných cest. Přesněji řečeno, cest bylo právě $N-1$ a byly vedeny tak, aby se mezi každými dvěma městy v království dalo po cestách dojet (ať už přímo, nebo přes jiná města). V řeči teorie grafů takovéto síti cest říkáme strom.

Na stará kolena krále navštívila teta Paranoia a našeptala mu, že sousedé chtějí napadnout jeho království. Proto se král rozhodl, že lakota musí jít stranou a že postaví ve městech vojenské posádky. Paranoia však šeptala dál: „Zbláznil ses? Když budou dvě posádky v sousedních městech, budou si mezi sebou posílat zprávy. A víš, jak to dopadne... Nech hodně vojáků pohromadě a vzbouří se proti tobě!"

Tři dny a tři noci král nespal, až vymyslel následující kompromis: Vybere několik měst, v nichž postaví vojenské posádky. Aby mu nehrozila vzpoura, rozhodl se, že nikdy nesmějí být pohromadě více než tři posádky. Teď sedí nad mapou a vymýšlí, jak je má jenom rozmístit, aby království bylo co nejlépe zabezpečeno.

Soutěžní úloha. Ještě jednou si formálněji zopakujme, o co královi vlastně jde.

Na vstupu máte zadán počet měst N a popis cest mezi nimi. Cest je právě $N-1$, nikde se nekřižují, jimi tvořená síť je souvislá a spojuje všechna města. Pro každé město i známe číslo b_i — toto číslo udává, kolik přidá vojenská posádka v i-tém městě k bezpečnosti království. Královým (a vaším) úkolem je vybrat množinu měst, v nichž budou umístěny posádky. Tato množina musí splňovat následující podmínky:

- ▷ Každá její souvislá podmnožina má velikost nejvýše 3. (Množinu měst nazýváme souvislou, jestliže se mezi libovolnými dvěma městy z této množiny dá dojet po cestách, aniž bychom při tom navštívili město, které do této množiny nepatří.)
- ▷ Ze všech takovýchto množin má maximální možný součet hodnot b_i — bezpečnost království.

Formát vstupu: První řádek vstupního souboru `posadky.in` obsahuje jedno číslo N ($1 \leqq N \leqq 100\,000$) — počet měst v království. Města jsou očíslována od 1 do N. Každý z následujících $N-1$ řádků obsahuje dvě čísla měst, která jsou spojena cestou. Můžete předpokládat, že síť cest je souvislá.

Poslední řádek vstupního souboru obsahuje N celých čísel $b_1, \ldots, b_N$ ($0 \leqq b_i \leqq 10\,000$), která udávají, kde je jak výhodné umístit vojenskou posádku.

Formát výstupu: První řádek výstupního souboru `posadky.out` bude obsahovat jedno celé číslo — nejlepší dosažitelnou bezpečnost království. Druhý řádek bude obsahovat několik čísel oddělených mezerami — jednu vhodnou množinu měst, pro kterou se uvedené bezpečnosti dosáhne.

Příklady:

`posadky.in`	`posadky.out`
7	6
1 2	1 2 3 5 6 7
2 3	*(Všude je zisk z posádky stejný, chceme jich umístit co nejvíce.)*
3 4	
4 5	
5 6	
6 7	
1 1 1 1 1 1 1	

`posadky.in`	`posadky.out`
5	1011
1 5	2 3 5
2 5	*(Zjevně chceme mít posádku ve městě 5. Potom už ale můžeme vybrat jen dvě z ostatních měst.)*
3 5	
4 5	
1 6 5 2 1000	

`posadky.in`	`posadky.out`
5	16
1 5	1 2 3 4
2 5	*(Ne vždy se vyplatí vybrat město s nejvyšší hodnotou b_i.)*
3 5	
4 5	
4 4 4 4 5	

P – I – 4

Paralelizátor

Za sedmero horami a sedmero řekami vymyslel vynálezce Kleofáš podivný stroj, který nazval *paralelizátor*. Na první pohled vypadal paralelizátor jako obyčejný počítač... Byl tu však jeden malý, ale o to důležitější rozdíl. Za určitých okolností dokázal paralelizátor paralelně (tj. současně) spustit více větví programu, aniž by ho to jakkoliv zpomalilo. Kleofáš rychle pochopil, že jen ze slovního popisu tohoto zázraku by nikdo nebyl moc moudrý, a tak vymyslel i programovací jazyk, v němž je možné psát programy pro jeho paralelizátor.

Programy pro paralelizátor se budou od klasických lišit mimo jiné tím, že nebudou mít žádný výstup. Budeme pouze rozlišovat, zda program skončil *úspěšně* nebo *neúspěšně*. U klasických programů by to znamenalo, že nás zajímá jen tzv. exit code (návratová hodnota) programu.

Kleofášův programovací jazyk je téměř přesnou kopií jazyka Pascal. Oproti klasickému Pascalu v něm nemáme k dispozici generátor náhodných čísel (a tedy například funkci `random`), takže je předem dáno, jak bude výpočet každého programu vypadat. Zato přibyly čtyři nové příkazy: **Accept**, **Reject**, **Both**(x) a **Some**(x) (kde x je proměnná typu integer).

Příkaz **Accept** *úspěšně* ukončí běžící program.

Příkaz **Reject** ukončí běžící program, ale *neúspěšně*. Stejný význam má i provedení standardního Pascalského příkazu **Halt** a ukončení výpočtu programu přechodem přes koncové **End.**, příkaz **Reject** definujeme jen kvůli názornosti.

V následujícím textu budeme *vytvořením kopie programu* rozumět to, že se v operační paměti vytvoří úplně přesná kopie celého programu včetně obsahu jeho proměnných — výsledek bude stejný, jako kdybychom už od začátku daný program spustili ne jednou, ale dvakrát.

Příkaz **Both**(x) zastaví aktuálně běžící program. Vytvoří se dvě jeho identické kopie. V první z nich je hodnota proměnné x nastavena na 0, v druhé na 1. Obě kopie programu jsou paralelně spuštěny, přičemž jejich výpočet pokračuje příkazem následujícím za příslušným příkazem **Both**.

Pokud obě kopie úspěšně skončí, v následujícím taktu procesoru úspěšně skončí i původní program. Jestliže jedna z kopií skončí neúspěšně (druhá přitom skončit ani nemusí), původní program v následujícím taktu skončí také neúspěšně. Ve všech ostatních případech (tj. když jedna kopie nikdy neskončí a druhá buď rovněž nikdy neskončí, nebo skončí úspěšně) původní program nikdy neskončí.

Příkaz **Some**(x) funguje podobně. Rovněž zastaví aktuálně běžící program. Opět se vytvoří dvě jeho identické kopie, v první z nich je hodnota proměnné x nastavena na 0, v druhé na 1. Obě kopie programu jsou paralelně spuštěny, přičemž jejich výpočet pokračuje příkazem následujícím za příslušným příkazem **Some**.

Jakmile některá z kopií úspěšně skončí, v následujícím taktu procesoru úspěšně skončí i původní program. Pokud obě kopie skončí neúspěšně, v následujícím taktu procesoru skončí neúspěšně také původní program. Ve všech ostatních případech (tj. když jedna kopie nikdy neskončí a druhá buď rovněž nikdy neskončí, nebo skončí neúspěšně) původní program nikdy neskončí.

Slovně můžeme tyto operace popsat následovně: Příkaz **Both** provádí „paralelní and" — ověří, zda obě větve úspěšně skončí. Příkaz **Some** provádí „paralelní or" — ověří, zda aspoň jedna z větví úspěšně skončí.

Netrvalo dlouho a Kleofáš si uvědomil, že na takovémto zázračném zařízení dokáže některé problémy řešit až neuvěřitelně rychle. Například testování prvočíselnosti je skutečně snadné.

Příklad 1: V proměnné N je přirozené číslo. Napište program pro paralelizátor, který pro každou hodnotu N skončí, přičemž *úspěšně* skončí právě tehdy, když N je prvočíslo.

ŘEŠENÍ. Pomocí volání příkazu **Both** paralelně vygenerujeme všechna čísla od 2 do $N-1$ a najednou pro každé z nich ověříme, zda dělí N. Každá větev výpočtu úspěšně skončí, jestliže „její" číslo nedělí N. Aby původní program úspěšně skončil, musí úspěšně skončit všechny větve, tedy žádné z vygenerovaných čísel nesmí dělit N. Časová složitost programu je $O(\log N)$.

```
{ VSTUP:  N : integer; }

var moc2, pocet_cifer : integer;
    cislo : integer;
    i,x : integer;

begin
   { oetme okrajov ppad }
   if N = 1 then Reject;

   { zjistme, kolik m N cifer ve dvojkov soustav }
   moc2 := 1;
   pocet_cifer := 0;
   while moc2 < N do begin
      moc2 := moc2 * 2;
      inc(pocet_cifer);
   end;

   { vygenerujeme sla od 0 do 2^pocet_cifer - 1 }
   cislo := 0;
   for i:=1 to pocet_cifer do begin
      Both(x);
      cislo := 2*cislo + x;
   end;
```

```
  { moc mal dlitele zkouet nebudeme, prohlsme za dobr }
  if cislo <= 1 then Accept;
  { ani pli velk dlitele zkouet nebudeme }
  if cislo >= N then Accept;
  { jinak zkoume, zda vygenerovan slo dl N }
  if N mod cislo <> 0 then Accept;
  Reject;
end.
```

Názorně si ukážeme, jak vypadá výpočet paralelizátoru na tomto programu pro $N = 3$ a pro $N = 6$. Kopie programu, které vznikají během výpočtu, budeme číslovat v pořadí, v jakém vznikají.

Pro $N = 3$ bude výpočet probíhat následovně:

- ▷ Spustí se kopie #1 (tedy vlastně originál).
- ▷ Spočítá, že $pocet\_cifer = 2$.
- ▷ Spustí se for-cyklus pro $i = 1$.
- ▷ Kopie #1 se zastaví, vzniknou kopie #2 a #3.
- ▷ V kopii #2 je $cislo = 0$, v kopii #3 je $cislo = 1$.
- ▷ V obou běžících kopiích pokračuje for-cyklus pro $i = 2$.
- ▷ Kopie #2 a #3 se zastaví, z #2 vzniknou #4 a #5, z #3 vzniknou #6 a #7.
- ▷ V kopiích #4 až #7 bude mít proměnná *cislo* hodnoty 0 až 3.
- ▷ Kopie #4 a #5 úspěšně skončí, neboť čísla 0 a 1 nechceme testovat jako dělitele.
- ▷ Kopie #2 úspěšně skončí, neboť už úspěšně skončily obě kopie, které z ní vznikly.
- ▷ Kopie #7 úspěšně skončí, neboť ani číslo 3 nechceme testovat.
- ▷ Kopie #6 úspěšně skončí, neboť 2 nedělí 3.
- ▷ Kopie #3 úspěšně skončí, neboť už úspěšně skončily obě kopie, které z ní vznikly.
- ▷ Kopie #1 (tedy původní program) úspěšně skončí, neboť už úspěšně skončily obě kopie, které z ní vznikly.

Pro $N = 6$ bude výpočet probíhat následovně:

- ▷ Podobně jako při $N = 3$ se dostaneme do situace, kdy běží kopie #8 až #15, proměnná *cislo* v nich má hodnoty postupně od 0 do 7.
- ▷ Kopie #8 a #9 (s příliš malým číslem) úspěšně skončí.
- ▷ Kopie #4 (z níž vznikly #8 a #9) úspěšně skončí.
- ▷ Kopie #14 a #15 (s příliš velkým číslem) úspěšně skončí.
- ▷ Kopie #7 (z níž vznikly #14 a #15) úspěšně skončí.
- ▷ Kopie #10 až #13 skončí — a to: #12 a #13 úspěšně (4 ani 5 nedělí 6), #10 a #11 neúspěšně (2 a 3 dělí 6).

▷ Kopie #5 skončí neúspěšně (obě její „děti“ skončily neúspěšně), kopie #6 skončí úspěšně.

▷ Kopie #2 skončí neúspěšně (neboť kopie #5 skončila neúspěšně), kopie #3 skončí úspěšně.

▷ Kopie #1 (tedy původní program) skončí neúspěšně.

Příklad 2: V proměnných N a K jsou přirozená čísla. Napište program pro paralelizátor, který pro každé N skončí, přičemž *úspěšně* skončí právě tehdy, když N má nějakého dělitele z množiny $M = \{2, 3, \ldots, 2^K - 1\}$.

ŘEŠENÍ. Pomocí volání příkazu **Some** paralelně projdeme všechna čísla $m \in M$, stačí nám, když libovolné jedno z nich dělí N.

(Jiný pohled na totéž řešení: Pomocí volání příkazu **Some** „uhodneme“ dělitele $m \in M$ a ověříme, zda jsme ho uhodli správně. Na náš program se můžeme dívat tak, že se nevětví, ale každé volání **Some** „uhodne“ a do x dosadí „správnou“ hodnotu. Jestliže tedy N má v množině M dělitele, najdeme ho, jinak skončíme s nějakým číslem, které N nedělí.)

Časová složitost programu je $O(K)$.

```
{ VSTUP:  N, K : integer; }

var cislo : integer;
    i,x : integer;

begin
   { paraleln zkoume sla od 0 do 2^K - 1 }
   cislo := 0;
   for i:=1 to K do begin
      Some(x);
      cislo := 2*cislo + x;
   end;

   { 0 a 1 do mnoiny M nepat }
   if cislo <= 1 then Reject;
   { zkusme, zda vygenerovan slo dl N }
   if N mod cislo = 0 then Accept;
   Reject;
end.
```

Soutěžní úloha. a) V proměnných *jehla* a *seno* jsou dva znakové řetězce. Napište co nejrychlejší program pro paralelizátor, který pro každý vstup skončí, přičemž *úspěšně* skončí právě tehdy, když se řetězec *jehla* nachází v řetězci *seno* jako souvislý podřetězec. Váš program by tedy měl úspěšně skončit, jestliže například:

$$\textit{jehla} = \texttt{abcd}, \quad \textit{seno} = \texttt{aaabcdddaa},$$

$$\textit{jehla} = \texttt{ddda}, \quad \textit{seno} = \texttt{aaabcdddaa},$$

ale ne v případech:

$$jehla = \texttt{abcd}, \quad seno = \texttt{aaabcEdddaa},$$
$$jehla = \texttt{jajsemjehla}, \quad seno = \texttt{vtetokupesenajehlaneni}.$$

b) Nad polem přirozených čísel můžeme postavit „pyramidu". Spodní řádek pyramidy bude tvořit samotné pole. Každý vyšší řádek bude o 1 kratší než předcházející, přičemž i-tý prvek v novém řádku je roven součtu i-tého a $(i+1)$-ního prvku z řádku pod ním, modulo 10 000 (tzn. pokud by součet vyšel větší než 9 999, necháme z něho v pyramidě jen jeho poslední čtyři cifry). Vrchní řádek pyramidy je tvořen jediným číslem.

V proměnné N máme přirozené číslo. V poli A na pozicích 1 až N máme N přirozených čísel menších než 10 000. V proměnné V je nezáporné celé číslo menší než 10 000.

Napište co nejrychlejší program pro paralelizátor, který pro každý vstup skončí, přičemž *úspěšně* skončí právě tehdy, když hodnota V je na vrcholu pyramidy postavené nad polem A.

Příklad:

Vstup:	Výstup:	*(Pyramida vypadá následovně:)*
$N = 4$	skončí neúspěšně	45
$A = (6, 3, 9, 3)$		21 24
$V = 17$		9 12 12
		6 3 9 3
Vstup:	Výstup:	*(Pyramida vypadá následovně:)*
$N = 4$	skončí úspěšně	20
$A = (1, 2, 3, 4)$		8 12
$V = 20$		3 5 7
		1 2 3 4

P – II – 1

Fotbal

V Absurdistánu právě začíná nový ročník fotbalové soutěže. Tento rok se ho zúčastní také slavný tým Dynamo Zbicyklu. Jeho trenér už tři noci pořádně nespal, ale stále ještě nemá připraven plán na tuto sezónu.

Dobře ví, že žádné mužstvo nedokáže vyhrát všechny zápasy, neboť každá výhra stojí hráče mnoho sil. Vymyslel si proto následující zjednodušení:

Aktuální stav jeho mužstva bude popisovat jedno celé číslo S, které udává, kolik mají hráči síly. Na začátku sezóny (v den číslo 0) je síla mužstva nulová. Každou noc si hráči odpočinou, a proto se jejich síla zvýší o 1. Pokud chtějí nějaký zápas vyhrát, musí se hodně snažit — každá výhra je stojí V síly. Mohou samozřejmě také „hrát na remízu," což je stojí jenom R síly, případně mohou zápas úplně vypustit a prohrát ho, což je nestojí nic. (Jestliže chtějí nějaký zápas vyhrát nebo remizovat, musí na to mít dost sil, síla týmu nemůže nikdy klesnout pod nulu.)

Trenér už zná přesný rozpis ligy, ví tedy, ve kterých dnech má jeho mužstvo volno a kdy hraje nějaký zápas. Napište program, který vypočítá, kolik nejvýše bodů může jeho mužstvo v tomto ročníku ligy získat: za každou výhru jsou tři body a za remízu jeden.

Formát vstupu: Na vstupu jsou zadána celá čísla V, R (vysvětlená výše) a počet zápasů N. Následuje N celých čísel — čísla dní, v nichž hraje naše fotbalové mužstvo zápas.

Můžete předpokládat, že $N \leqq 10\,000$ a $V > R$. Čísla V, R i všechna čísla dní se vejdou do běžné 32bitové celočíselné proměnné. Čísla dní jednotlivých zápasů jsou uvedena v rostoucím pořadí.

Formát výstupu: Program vypíše jediné celé číslo — maximální počet bodů, které může naše mužstvo v soutěži získat.

Příklady:

vstup:	*výstup*:
$V = 10$, $R = 3$, $N = 2$	4
dni zápasů:	*(Hráči stihnou nabrat přesně tolik sil, aby dokázali první zápas remizovat a druhý vyhrát.)*
3, 13	
vstup:	*výstup*:
$V = 20$, $R = 15$, $N = 4$	3
dni zápasů:	*(Mužstvo dokáže vyhrát libovolný jeden z těchto čtyř zápasů.)*
23, 24, 25, 26	
vstup:	*výstup*:
$V = 30$, $R = 9$, $N = 4$	4
dni zápasů:	*(Ne vždy se vyplatí vyhrát, v tomto případě je výhodnější všechny 4 zápasy remizovat.)*
30, 32, 34, 36	

P – II – 2

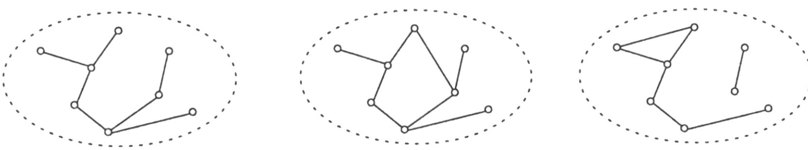
Housenka

Strom je objekt, který má následující vlastnosti:

- ▷ Obsahuje konečný počet význačných míst, kterým říkáme *vrcholy* (jejich počet označíme N). Některé dvojice vrcholů jsou spojeny *hranami*.
- ▷ Je souvislý, tzn. z libovolného vrcholu se můžeme dostat do libovolného jiného vrcholu tak, že postupně projdeme po několika hranách.
- ▷ Obsahuje právě $N - 1$ hran.

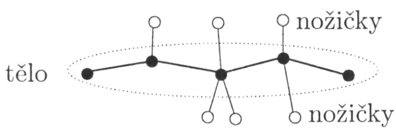
Strom si můžeme představit například jako souvislou silniční síť, kterou tvoří N měst a právě $N - 1$ silnic mezi nimi.

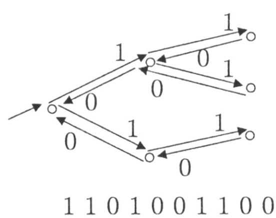
Na následujícím obrázku je levý graf strom, zatímco zbývající dva grafy nikoliv — druhý obsahuje příliš mnoho hran a třetí má sice správný počet hran, ale není souvislý.



Posloupnost na sebe navazujících hran, v níž se žádná hrana neopakuje, se nazývá *cesta*. Všimněte si, že ve stromě vede mezi každými dvěma vrcholy právě jedna cesta.

Housenka je strom, ve kterém existuje taková cesta (tuto cestu pak nazýváme *tělo* housenky), že každý vrchol stromu je buď na této cestě, nebo sousedí s nějakým vrcholem této cesty (pak ho nazýváme *nožička*). Příklad housenky vidíte na následujícím obrázku vlevo.





Existuje několik způsobů, jak je možné zadat strom. My ho popíšeme posloupností nul a jedniček: Zvolíme si jeden libovolný vrchol jako výchozí a začneme se z něj po stromě procházet, přičemž chceme navštívit každý vrchol stromu a chceme projít po každé jeho hraně právě dvakrát (v každém směru jednou). Během této procházky si budeme zapisovat nuly a jedničky následovně: Vždy, když přijdeme do vrcholu, ve kterém jsme ještě nebyli, napíšeme jedničku. Vždy, když se z vrcholu vracíme zpět (po hraně, kterou jsme do něj přišli), napíšeme nulu. Rozmyslete si, že takto dokážeme (aspoň jedním způsobem) popsat libovolný strom a naopak že z tohoto popisu můžeme strom jednoznačně sestrojit. (Viz předchozí obrázek vpravo.)

Soutěžní úloha. Na základě zadané posloupnosti nul a jedniček sestrojte strom a zjistěte, kolik nejméně vrcholů je z něho třeba odstranit, abychom dostali housenku.

Jinými slovy řečeno, určete v zadaném stromě takovou cestu, pro níž je množina vrcholů, které na ní neleží ani s ní nesousedí, nejmenší možná.

Formát vstupu: Na vstupu je zadána posloupnost nul a jedniček reprezentující strom tak, jak je popsáno výše.

Formát výstupu: Program vypíše jediné celé číslo — minimální počet vrcholů, které je třeba odstranit z původního stromu, abychom dostali housenku.

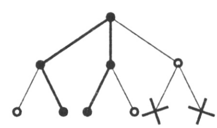
Příklad:

vstup:

`110100110100110100`

výstup:

2 *(Je třeba odstranit 2 vrcholy.)*

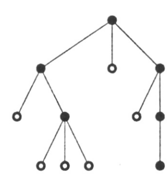


vstup:

`11011010100001011011000`

výstup:

0 *(Zadaný strom už je housenka.)*



Poznámka. V obou uvedených příkladech vstupu procházku začínáme v „horním“ vrcholu stromu a ostatní vrcholy navštěvujeme v pořadí „zleva doprava.“

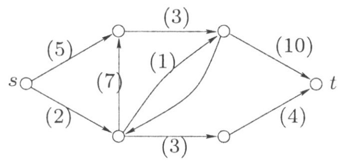
P – II – 3

Myška

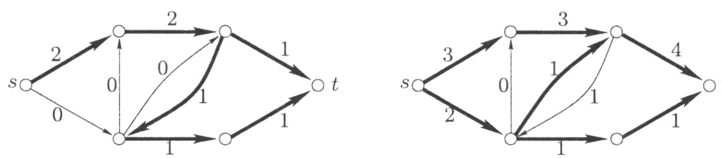
Představte si síť navzájem pospojovaných potrubí. Místa, kde se spojují konce a začátky potrubí, budeme nazývat uzly. Z každého uzlu může vést libovolné množství potrubí, podobně do každého uzlu může libovolně množství potrubí přicházet. Každé potrubí je upraveno tak, že jím voda může téci jen jedním směrem. Jednotlivá potrubí mohou mít různý průřez, takže jimi může protékat za sekundu různé množství vody. (Maximální množství vody, které může protéci potrubím za sekundu, nazýváme *kapacitou* tohoto potrubí.)

Dva uzly v uvažované síti budou mít speciální význam. Jeden z nich nazýváme zdroj (a značíme ho s), druhý nazýváme ústí (a označujeme ho t). *Zdroj* je jediné místo, kde do naší soustavy potrubí může přitékat voda, *ústí* je jediné místo, kde naopak voda může odtékat. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že do zdroje ani z ústí žádná potrubí nevedou.

Nyní si představte, že takovouto sítí potrubí necháme protékat vodu a pro každé potrubí si zapíšeme množství vody, které jím za sekundu proteče. Tomuto seznamu čísel říkáme *tok*. *Velikost* tohoto toku je množství vody, které za sekundu vyteče ven ústím (nebo ekvivalentně, které za sekundu přiteče ze zdroje).



a) Příklad sítě potrubí



b) Příklad toku velikosti 2 c) Příklad maximálního toku

Obr. 32

Na obr. 32a) je příklad sítě potrubí, čísla v závorkách představují kapacity jednotlivých potrubí. Na obr. 32b) je vyznačen jeden možný tok pro naši ukázkovou síť potrubí. Silnou čarou jsou znázorněna potrubí, kterými teče nějaká voda, čísla u jednotlivých potrubí udávají množství vody, které za sekundu daným potrubím proteče.

Maximální tok je takový tok, který má pro danou síť potrubí největší možnou velikost. Jinými slovy řečeno, maximální tok popisuje, jakým způsobem lze naší sítí potrubí „protlačit" co největší množství vody za jednu sekundu. Na obr. 32c) je znázorněn maximální tok v naší ukázkové síti.

Soutěžní úloha. Představte si, že máte k dispozici krabičku, které zadáte popis nějaké sítě potrubí (včetně kapacit jednotlivých potrubí) a ona vám určí hodnotu maximálního toku. S její pomocí vyřešte následující problém:

Na vstupu máte zadáno bludiště — neorientovaný graf s N místnostmi (vrcholy grafu) a M chodbami (hrany grafu) mezi nimi. V místnosti 1 se nachází myška. V místnosti N je umístěn sýr. Myška unese najednou nejvýše 1 kousek sýra a chce přemístit co nejvíce sýra z místnosti N do místnosti 1. Nechce ale nikdy vstoupit podruhé do téže místnosti (samozřejmě kromě místností 1 a N), neboť nechce riskovat, že si tam na ni počká kocour, který ji tam po prvním průchodu mohl ucítit. Kolik kousků sýra dokáže myška nejvýše přenést? (Předpokládejte, že místnosti 1 a N nejsou spojeny přímou chodbou, v takovém případě by samozřejmě myška mohla postupně přenosit všechen sýr.)

Řešením této úlohy je tedy program, v němž můžete volat funkci *NajdiMaximalniTok*(...), které zadáte jako parametry popis nějaké sítě potrubí (počet uzlů, počet potrubí, pro každé potrubí jeho začátek, konec a kapacitu, a dále informaci, který uzel je zdrojem a který je ústím) a ona vám vrátí hodnotu maximálního toku v zadané síti. Tuto funkci nemusíte implementovat, přesný formát parametrů si zvolte tak, jak vám bude nejlépe vyhovovat.

Příklad:

vstup:	*výstup*:
$N = 8$, $M = 10$	1
1–2, 1–5, 1–7,	*(Myška může jít po cestě* 1–2–3–8
2–3, 2–4, 3–8,	*pro sýr,* 8–7–1 *zpět. Mohla by*
4–8, 5–6, 6–8,	*ještě jít cestou* 1–5–6–8 *pro sýr,*
7–8	*ale zpět by se už nedostala.)*

Toky v grafech (studijní text). V této časti zadání uvádíme formálnější definice výše uvedených pojmů. Pokud je v zadání úlohy všechno jasné, tento text číst nemusíte, použijte ho jen v případě nejasností v neformálním popisu.

Začneme několika definicemi: *Graf* je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je konečná množina *vrcholů* grafu a E je konečná množina jeho *hran*. Počet vrcholů označme N a počet hran M, hrany označme e_1 až e_M. Každá hrana e_i spojuje právě dva vrcholy grafu a_i a b_i. Pokud se bude smět procházet po hraně e_i jenom jedním směrem (tj. smíme po ní jít z vrcholu a_i do b_i, ale nikoliv opačně), budeme ji nazývat *orientovaná* hrana, jinak ji budeme nazývat *neorientovaná* hrana. Graf nazveme orientovaný, resp. neorientovaný, jestliže jsou všechny jeho hrany orientované, resp. neorientované.

V grafu budeme mít dva speciální vrcholy. Jeden z nich nazveme *zdroj* (značíme s) a druhý *ústí* (značíme t). Dále budeme předpokládat, že každá hrana má stanovenu svoji *kapacitu* $c_i \geqq 0$. V orientovaném grafu hrana z a_i do b_i může mít jinou kapacitu než hrana z b_i do a_i, resp. některá z nich ani nemusí existovat.

Funkci f, která přiřazuje každé hraně množství vody, které touto hranou protéká, nazveme *tokem,* jestliže splňuje následující podmínky:

▷ $f(e_i) \in \mathbb{Z}$ pro $1 \leqq i \leqq M$. Tedy každou hranou může téci jen celočíselné množství vody.

▷ $0 \leqq f(e_i) \leqq c_i$ pro $1 \leqq i \leqq M$. Tedy žádnou hranou nemůže téci víc vody, než kolik je její kapacita, ani méně než 0.

▷ Nechť a je vrchol různý od zdroje a ústí. Nechť hrany vedoucí z vrcholu a mají čísla $v_1, \ldots, v_k$. Podobně, nechť hrany vedoucí do vrcholu a mají čísla $p_1, \ldots, p_l$. Potom platí: $\sum_i f(e_{v_i}) = \sum_i f(e_{p_i})$. Tedy ve „vnitřních" vrcholech se voda nemůže hromadit.

Tok je tedy taková funkce f, která nám určuje, kolik vody teče kterým potrubím. Předpokládejme, že do zdroje nevstupují žádné hrany a z ústí nevystupují žádné hrany. Potom můžeme *hodnotu* toku f definovat jako množství vody, které odtéká ze zdroje. *Maximální tok* je tok s největší možnou hodnotou pro daný graf.

P – II – 4

Paralelizátor

V zemi je několik měst a každé z nich je označeno nějakým přirozeným číslem (které se vejde do běžné celočíselné proměnné). Různým městům jsou přiřazena různá čísla, ale jinak není číslování měst nijak systematické.

Mezi některými dvojicemi měst jsou vybudovány cesty, těchto cest je celkem M. Všechny cesty jsou jednosměrné. Všechny křižovatky cest jsou mimoúrovňové, tzn. pokud se vydáme po nějaké cestě, musíme po ní dojít až do toho města, kde tato cesta končí. Můžete předpokládat, že v každém městě aspoň jedna cesta začíná nebo končí.

V poli $C[0..M-1][0..1]$ jsou popsány jednotlivé cesty (i-tá cesta spojuje města s čísly $C[i-1][0]$ a $C[i-1][1]$).

Soutěžní úloha. Napište co nejrychlejší program pro paralelizátor, který pro každý přípustný vstup skončí, přičemž úspěšně skončí právě tehdy, když je síť všech existujících cest silně souvislá — tedy pokud se z libovolného města můžeme po cestách dostat do libovolného jiného města.

Poznámka. Úlohu lze řešit v lepším čase než lineárním. Pokud se vám však takové řešení nepodaří nalézt, část bodů získáte i za pomalejší řešení.

Příklad 1:

vstup:	*výstup*:
$M = 5$	skončí úspěšně
cesty:	*(Po prvních třech cestách můžeme volně přecházet mezi městy* 1, 2 *a* 3,
$1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$, $47 \to 1$, $2 \to 47$	*díky zbývajícím dvěma se dokážeme dostat i do města* 47 *a z něho zase pryč.)*

Příklad 2:

vstup:	*výstup*:
$M = 3$	skončí neúspěšně
cesty:	*(Nedokážeme se dostat například z města* 47 *do města* 123456.*)*
$123456 \to 234567$, $23 \to 47$, $345678 \to 234567$	

(Definice paralelizátoru je uvedena v textu úlohy P–I–4.)

Netrvalo dlouho a Kleofáš si uvědomil, že na takovémto zázračném zařízení dokáže některé problémy řešit až neuvěřitelně rychle. Například testování prvočíselnosti je skutečně snadné.

Příklad 1: V proměnné N je přirozené číslo. Napište program pro paralelizátor, který pro každou hodnotu N skončí, přičemž *úspěšně* skončí právě tehdy, když N je prvočíslo.

ŘEŠENÍ. Pomocí volání příkazu **Both** paralelně vygenerujeme všechna čísla od 2 do $N - 1$ a najednou pro každé z nich ověříme, zda dělí N. Každá větev výpočtu úspěšně skončí, jestliže „její" číslo nedělí N. Aby původní program úspěšně skončil, musí úspěšně skončit všechny větve, tedy žádné z vygenerovaných čísel nesmí dělit N. Časová složitost programu je $O(\log N)$.

```
{ VSTUP:  N : integer; }

var moc2, pocet_cifer : integer;
    cislo : integer;
    i,x : integer;

begin
```

```
   { oetme okrajov ppad }
   if N = 1 then Reject;

   { zjistme, kolik m N cifer ve dvojkov soustav }
   moc2 := 1;
   pocet_cifer := 0;
   while moc2 < N do begin
      moc2 := moc2 * 2;
      inc(pocet_cifer);
   end;

   { vygenerujeme sla od 0 do 2^pocet_cifer - 1 }
   cislo := 0;
   for i:=1 to pocet_cifer do begin
      Both(x);
      cislo := 2*cislo + x;
   end;

   { moc mal dlitele zkouet nebudeme, prohlsme za dobr }
   if cislo <= 1 then Accept;
   { ani pli velk dlitele zkouet nebudeme }
   if cislo >= N then Accept;
   { jinak zkoume, zda vygenerovan slo dl N }
   if N mod cislo <> 0 then Accept;
   Reject;
end.
```

Názorně si ukážeme, jak vypadá výpočet paralelizátoru na tomto programu pro $N = 3$ a pro $N = 6$. Kopie programu, které vznikají během výpočtu, budeme číslovat v pořadí, v jakém vznikají.

Pro $N = 3$ bude výpočet probíhat následovně:

- ▷ Spustí se kopie #1 (tedy vlastně originál).
- ▷ Spočítá, že *pocet_cifer* = 2.
- ▷ Spustí se for-cyklus pro i = 1.
- ▷ Kopie #1 se zastaví, vzniknou kopie #2 a #3.
- ▷ V kopii #2 je *cislo* = 0, v kopii #3 je *cislo* = 1.
- ▷ V obou běžících kopiích pokračuje for-cyklus pro i = 2.
- ▷ Kopie #2 a #3 se zastaví, z #2 vzniknou #4 a #5, z #3 vzniknou #6 a #7.
- ▷ V kopiích #4 až #7 bude mít proměnná *cislo* hodnoty 0 až 3.
- ▷ Kopie #4 a #5 úspěšně skončí, neboť čísla 0 a 1 nechceme testovat jako dělitele.
- ▷ Kopie #2 úspěšně skončí, neboť už úspěšně skončily obě kopie, které z ní vznikly.
- ▷ Kopie #7 úspěšně skončí, neboť ani číslo 3 nechceme testovat.
- ▷ Kopie #6 úspěšně skončí, neboť 2 nedělí 3.

▷ Kopie #3 úspěšně skončí, neboť už úspěšně skončily obě kopie, které z ní vznikly.

▷ Kopie #1 (tedy původní program) úspěšně skončí, neboť už úspěšně skončily obě kopie, které z ní vznikly.

Pro $N = 6$ bude výpočet probíhat následovně:

▷ Podobně jako při $N = 3$ se dostaneme do situace, kdy běží kopie #8 až #15, proměnná *cislo* v nich má hodnoty postupně od 0 do 7.

▷ Kopie #8 a #9 (s příliš malým číslem) úspěšně skončí.

▷ Kopie #4 (z níž vznikly #8 a #9) úspěšně skončí.

▷ Kopie #14 a #15 (s příliš velkým číslem) úspěšně skončí.

▷ Kopie #7 (z níž vznikly #14 a #15) úspěšně skončí.

▷ Kopie #10 až #13 skončí — a to: #12 a #13 úspěšně (4 ani 5 nedělí 6), #10 a #11 neúspěšně (2 a 3 dělí 6).

▷ Kopie #5 skončí neúspěšně (obě její „děti“ skončily neúspěšně), kopie #6 skončí úspěšně.

▷ Kopie #2 skončí neúspěšně (neboť kopie #5 skončila neúspěšně), kopie #3 skončí úspěšně.

▷ Kopie #1 (tedy původní program) skončí neúspěšně.

Příklad 2: V proměnných N a K jsou přirozená čísla. Napište program pro paralelizátor, který pro každé N skončí, přičemž *úspěšně* skončí právě tehdy, když N má nějakého dělitele z množiny $M = \{2, 3, \ldots, 2^K - 1\}$.

Řešení. Pomocí volání příkazu **Some** paralelně projdeme všechna čísla $m \in M$, stačí nám, když libovolné jedno z nich dělí N.

(Jiný pohled na totéž řešení: Pomocí volání příkazu **Some** „uhodneme“ dělitele $m \in M$ a ověříme, zda jsme ho uhodli správně. Na náš program se můžeme dívat tak, že se nevětví, ale každé volání **Some** „uhodne“ a do x dosadí „správnou“ hodnotu. Jestliže tedy N má v množině M dělitele, najdeme ho, jinak skončíme s nějakým číslem, které N nedělí.)

Časová složitost programu je $O(K)$.

```
{ VSTUP:  N, K : integer; }

var cislo : integer;
    i,x : integer;

begin
   { paraleln zkoume sla od 0 do 2^K - 1 }
   cislo := 0;
   for i:=1 to K do begin
      Some(x);
      cislo := 2*cislo + x;
   end;
```

```
   { 0 a 1 do mnoiny M nepat }
   if cislo <= 1 then Reject;
   { zkusme, zda vygenerovan slo dl N }
   if N mod cislo = 0 then Accept;
   Reject;
end.
```

P – III – 1

Příšery

Na monitoru se zase jednou schyluje k velké bitvě mezi armádou hráče a armádou jeho počítače.

Každou armádu tvoří N příšer. Každou příšeru můžeme popsat dvěma přirozenými čísly: první popisuje její *útok* (útočnou sílu), druhé pak její *obranu* (obranné schopnosti). Příšeru s útokem a a obranou b budeme značit a/b.

Když spolu bojují dvě příšery a útok první je větší než obrana druhé, druhá příšera je zabita. Může se také stát, že se obě příšery zabijí navzájem nebo že obě přežijí. Příšera *vyhraje souboj*, pokud zabije druhou příšeru a sama přežije.

Příšery ovládané počítačem útočí, hráč se musí bránit. Proti každé z příšer počítače musí poslat právě jednu ze svých příšer. Všechny souboje probíhají současně.

Úloha. Napište program, který zjistí, kolik mohou hráčovy příšery maximálně vyhrát soubojů.

Vstup: Na prvním řádku vstupu je celé číslo N ($1 \leqq N \leqq 10\,000$) — počet příšer, které má každý z hráčů k dispozici. Na druhém řádku jsou uvedeny hráčovy příšery, na třetím pak příšery počítače. Útok i obrana každé příšery je celé číslo od 1 do 1 000 000 000.

Výstup: Vypište jediné celé číslo — největší počet hráčových příšer, které mohou najednou vyhrát své souboje.

Příklady:

vstup	*výstup*
3	2
9/2, 9/7, 8/8	*(Nad příšerou 7/8 vyhraje jedině příšera 9/7. Příšeře 1/1 může hráč přiřadit kteroukoliv ze svých zbylých dvou příšer.)*
100/100, 1/1, 7/8	

vstup	*výstup*
4 10/1, 10/1, 10/2, 10/9 10/1, 10/1, 10/2, 10/8	0 *(Bez ohledu na rozdělení se všechny příšery zabijí navzájem.)*

vstup	*výstup*
4 7/3, 2/12, 47/47, 5/6 10/1, 4/7, 3/6, 1/1	4 *(Jediné řešení: své příšery hráč přiřadí postupně třetí, první, druhé a čtvrté příšeře počítače.)*

P – III – 2

Bürroland

V Bürrolandu vyřešili otázku nezaměstnanosti po svém — zaměstnali hromadu úředníků. Aby měli noví úředníci co na práci, začali vydávat nejrůznější potvrzení, která je potřeba předkládat při různých příležitostech. A jelikož úředníků je mnoho, každý z nich je úzce specializovaný a vydává pouze jeden typ potvrzení. Stejný typ potvrzení ovšem může vydávat více úředníků.

Dostat od úředníka potvrzení, které vydává, není nikterak lehké. Abyste ho dostali, musíte mít potvrzení jiného konkrétního typu a k tomu ještě musíte úředníkovi předložit několik svých osobních dokladů. (Nezáleží na tom, jakých, důležitý je pouze jejich počet.)

Jožin už vlastní jedno potvrzení, ale potřeboval by si vyřídit potvrzení jiného typu. Nyní ho zajímá, jestli je to vůbec možné a pokud ano, jaký *nejmenší počet osobních dokladů* mu k tomu bude stačit. (Pro Jožina je snazší oběhat pár úředníků navíc než najít ve své rodné bažině rodný list.)

Úloha. Je dán počet různých typů potvrzení N ($2 \leqq N \leqq 10\,000$), počet úředníků M ($1 \leqq M \leqq 1\,000\,000$) a číslo K ($1 \leqq K \leqq 10\,000$) udávající počet různých osobních dokladů existujících v Bürrolandu.

Typy potvrzení jsou očíslované od 1 do N. Jožin vlastní potvrzení typu 1 a shání potvrzení typu N.

Pro každého úředníka jsou dána tři čísla: typ potvrzení, které mu je potřeba ukázat, typ potvrzení, které vydává, a počet osobních dokladů, které je nutné mít s sebou (číslo od 0 do K).

Váš program má vypsat nejmenší počet osobních dokladů, které stačí k získání potvrzení typu N, a také pořadí, v jakém máme potvrzení vyřizovat. Pokud není možné požadované potvrzení získat, vypište místo toho zprávu, že to není možné.

Příklad:

I vstup	*výstup*
$N = 4$, $M = 5$, $K = 2$	1
1 4 2	3 4
1 2 0	
2 3 2	
3 4 1	
1 3 1	

Existuje více způsobů, jak získat čtvrté potvrzení. Můžeme ho dostat přímo za potvrzení 1 (u prvního úředníka), ale k tomu potřebujeme dva doklady. Nebo si můžeme nejdříve zařídit potvrzení 2 (u druhého úředníka), potom 3 (u třetího) a nakonec 4 (u čtvrtého), ovšem k tomu potřebujeme předložit třetímu úředníkovi také 2 doklady. Nejlepší je získat potvrzení 3 (u pátého úředníka) a potom 4, na což nám stačí jediný doklad.

P – III – 3

Piškvorky

Mach a Šebestová spolu mají rozehranou partii piškvorek. Šebestová hraje s křížky a začínala.

V proměnných R a C je počet řádků a sloupců hrací plochy, v dvourozměrném poli A je na souřadnicích $[i, j]$ (kde $0 \leqq i < R$, $0 \leqq j < C$) znak ‚`X`', ‚`O`' nebo ‚`.`' (zatím prázdné políčko). V proměnné K je délka řady potřebné k výhře partie.

Můžete předpokládat, že vstup korektně popisuje rozehranou partii, ve které je právě na tahu Šebestová. (Čili počet křížků a koleček je stejný a nikde na hrací ploše se ještě nevyskytuje K stejných znaků v řadě vedle sebe.)

Soutěžní úloha. Napište co nejrychlejší program pro paralelizátor, který pro každý přípustný vstup skončí, přičemž *úspěšně* skončí právě tehdy, když v zadané pozici má Šebestová vyhrávající strategii (jinými slovy, pokud existuje postup, který určí, jak má Šebestová hrát a reagovat na Machovy tahy tak, aby vždy vyhrála, ať už Mach hraje jakkoliv).

Příklady:

I vstup

$R = 6$, $C = 5$, $K = 4$

$$A = \begin{pmatrix} \texttt{.....} \\ \texttt{.....} \\ \texttt{.....} \\ \texttt{.OXO.} \\ \texttt{.X...} \\ \texttt{.....} \end{pmatrix}$$

výstup

skončí úspěšně

(Šebestová začne tahem na políčko $[2,3]$*, čili na políčko v třetím řádku a čtvrtém sloupci, čímž dostane tři znaky ‚*`X`*' vedle sebe. I když Mach odpoví tahem na políčko* $[5,0]$ *nebo* $[1,4]$*, Šebestová může v dalším tahu vždy táhnout na druhé z nich a vyhrát.)*

I vstup

$R = 6$, $C = 5$, $K = 4$

$$A = \begin{pmatrix} \texttt{XOXOX} \\ \texttt{XOXOX} \\ \texttt{OXO.O} \\ \texttt{XO.OX} \\ \texttt{X....} \\ \texttt{OXOXO} \end{pmatrix}$$

výstup

skončí neúspěšně

(Šebestová prvním tahem řadu čtyř nevytvoří, dokonce ani nedokáže zabránit Machovi, aby příštím tahem vyhrál.)

vstup

$R = 5$, $C = 6$, $K = 6$

$$A = \begin{pmatrix} \texttt{......} \\ \texttt{......} \\ \texttt{......} \\ \texttt{......} \\ \texttt{......} \end{pmatrix}$$

výstup

skončí neúspěšně

(Řada šesti se dá vytvořit jedině vodorovně. Mach proto snadno zabrání Šebestové vyhrát. Při optimální hře obou hráčů partie skončí remízou.)

Piškvorky (studijní text). Piškvorky jsou hra, kterou hrají dva hráči na čtverečkovaném papíru obdélníkového tvaru. Na začátku hry se hráči dohodnou na celém kladném čísle K. Každý hráč má svou značku: hráč, který začíná, obvykle používá křížek (‚`X`'), druhý hráč kolečko (‚`O`'). Hráči tahají střídavě, v každém tahu hráč zvolí prázdné políčko na hracím plánu a umístí na něj svou značku. Hra končí, pokud některý z hráčů kdekoliv na hracím plánu vytvořil souvislou řadu K svých znaků ve vodorovném, svislém nebo úhlopříčném směru. Pokud se celá plocha zaplní a nikdo nevyhrál, hra končí remízou.

(Definice paralelizátoru je uvedena v textu úlohy P–I–4.)

Netrvalo dlouho a Kleofáš si uvědomil, že na takovémto zázračném zařízení dokáže některé problémy řešit až neuvěřitelně rychle. Například testování prvočíselnosti je skutečně snadné.

Příklad 1: V proměnné N je přirozené číslo. Napište program pro paralelizátor, který pro každou hodnotu N skončí, přičemž *úspěšně* skončí právě tehdy, když N je prvočíslo.

ŘEŠENÍ. Pomocí volání příkazu **Both** paralelně vygenerujeme všechna čísla od 2 do $N-1$ a najednou pro každé z nich ověříme, zda dělí N. Každá větev výpočtu úspěšně skončí, jestliže „její" číslo nedělí N. Aby původní program úspěšně skončil, musí úspěšně skončit všechny větve, tedy žádné z vygenerovaných čísel nesmí dělit N. Časová složitost programu je $O(\log N)$.

```
{ VSTUP:  N : integer; }

var moc2, pocet_cifer : integer;
    cislo : integer;
    i,x : integer;

begin
   { oetme okrajov ppad }
   if N = 1 then Reject;

   { zjistme, kolik m N cifer ve dvojkov soustav }
   moc2 := 1;
   pocet_cifer := 0;
   while moc2 < N do begin
      moc2 := moc2 * 2;
      inc(pocet_cifer);
   end;

   { vygenerujeme sla od 0 do 2^pocet_cifer - 1 }
   cislo := 0;
   for i:=1 to pocet_cifer do begin
      Both(x);
      cislo := 2*cislo + x;
   end;

   { moc mal dlitele zkouet nebudeme, prohlsme za dobr }
   if cislo <= 1 then Accept;
   { ani pli velk dlitele zkouet nebudeme }
   if cislo >= N then Accept;
   { jinak zkoume, zda vygenerovan slo dl N }
   if N mod cislo <> 0 then Accept;
   Reject;
end.
```

Názorně si ukážeme, jak vypadá výpočet paralelizátoru na tomto programu pro $N = 3$ a pro $N = 6$. Kopie programu, které vznikají během výpočtu, budeme číslovat v pořadí, v jakém vznikají.

Pro $N = 3$ bude výpočet probíhat následovně:

- ▷ Spustí se kopie #1 (tedy vlastně originál).
- ▷ Spočítá, že *pocet_cifer* $= 2$.
- ▷ Spustí se for-cyklus pro i = 1.
- ▷ Kopie #1 se zastaví, vzniknou kopie #2 a #3.
- ▷ V kopii #2 je *cislo* $= 0$, v kopii #3 je *cislo* $= 1$.
- ▷ V obou běžících kopiích pokračuje for-cyklus pro i = 2.
- ▷ Kopie #2 a #3 se zastaví, z #2 vzniknou #4 a #5, z #3 vzniknou #6 a #7.
- ▷ V kopiích #4 až #7 bude mít proměnná *cislo* hodnoty 0 až 3.
- ▷ Kopie #4 a #5 úspěšně skončí, neboť čísla 0 a 1 nechceme testovat jako dělitele.
- ▷ Kopie #2 úspěšně skončí, neboť už úspěšně skončily obě kopie, které z ní vznikly.
- ▷ Kopie #7 úspěšně skončí, neboť ani číslo 3 nechceme testovat.
- ▷ Kopie #6 úspěšně skončí, neboť 2 nedělí 3.
- ▷ Kopie #3 úspěšně skončí, neboť už úspěšně skončily obě kopie, které z ní vznikly.
- ▷ Kopie #1 (tedy původní program) úspěšně skončí, neboť už úspěšně skončily obě kopie, které z ní vznikly.

Pro $N = 6$ bude výpočet probíhat následovně:

- ▷ Podobně jako při $N = 3$ se dostaneme do situace, kdy běží kopie #8 až #15, proměnná *cislo* v nich má hodnoty postupně od 0 do 7.
- ▷ Kopie #8 a #9 (s příliš malým číslem) úspěšně skončí.
- ▷ Kopie #4 (z níž vznikly #8 a #9) úspěšně skončí.
- ▷ Kopie #14 a #15 (s příliš velkým číslem) úspěšně skončí.
- ▷ Kopie #7 (z níž vznikly #14 a #15) úspěšně skončí.
- ▷ Kopie #10 až #13 skončí — a to: #12 a #13 úspěšně (4 ani 5 nedělí 6), #10 a #11 neúspěšně (2 a 3 dělí 6).
- ▷ Kopie #5 skončí neúspěšně (obě její „děti" skončily neúspěšně), kopie #6 skončí úspěšně.
- ▷ Kopie #2 skončí neúspěšně (neboť kopie #5 skončila neúspěšně), kopie #3 skončí úspěšně.
- ▷ Kopie #1 (tedy původní program) skončí neúspěšně.

Příklad 2: V proměnných N a K jsou přirozená čísla. Napište program pro paralelizátor, který pro každé N skončí, přičemž *úspěšně* skončí právě tehdy, když N má nějakého dělitele z množiny $M = \{2, 3, \ldots, 2^K - 1\}$.

ŘEŠENÍ. Pomocí volání příkazu **Some** paralelně projdeme všechna čísla $m \in M$, stačí nám, když libovolné jedno z nich dělí N.

(Jiný pohled na totéž řešení: Pomocí volání příkazu **Some** „uhodneme“ dělitele $m \in M$ a ověříme, zda jsme ho uhodli správně. Na náš program se můžeme dívat tak, že se nevětví, ale každé volání **Some** „uhodne“ a do x dosadí „správnou“ hodnotu. Jestliže tedy N má v množině M dělitele, najdeme ho, jinak skončíme s nějakým číslem, které N nedělí.)

Časová složitost programu je $O(K)$.

```
{ VSTUP:  N, K : integer; }

var cislo : integer;
    i,x : integer;

begin
   { paraleln zkoume sla od 0 do 2^K - 1 }
   cislo := 0;
   for i:=1 to K do begin
      Some(x);
      cislo := 2*cislo + x;
   end;

   { 0 a 1 do mnoiny M nepat }
   if cislo <= 1 then Reject;
   { zkusme, zda vygenerovan slo dl N }
   if N mod cislo = 0 then Accept;
   Reject;
end.
```

P – III – 4

Násobek

Program: `nasobek.pas` / `nasobek.c` / `nasobek.cpp`
Vstup: `nasobek.in`
Výstup: `nasobek.out`

Nejmenší kladný násobek čísla 13, který je tvořen jen číslicemi 1 a 2, je 221. I číslo 997 má násobky zapsané jen pomocí číslic 1 a 2, nejmenším z nich je $1\,121\,222\,212 = 997 \times 1\,124\,596$. Nejmenším násobkem tří, ve kterém mohou být použity pouze číslice 4 a 7, je číslo 444.

Vaši úlohou je napsat program, který bude taková čísla hledat.

Vstup: Na prvním řádku vstupního souboru je uveden řetězec R tvořený minimálně jednou a maximálně deseti číslicemi (od 0 do 9). Všechny tyto číslice jsou navzájem různé.

Na druhém řádku je uvedeno jedno kladné celé číslo N ($1 \leqq N \leqq 1\,000\,000$).

Výstup: Vypište jediný řádek a v něm jediné celé číslo — nejmenší kladný násobek čísla N, ve kterém se vyskytují pouze číslice z řetězce R. (Pozor, toto číslo může mít mnoho číslic.)

Pokud číslo N žádný takový násobek nemá, vypište místo toho řetězec „`neexistuje`“.

Příklad:

nasobek.in	nasobek.out
12	1121222212
997	

Příklad:

nasobek.in	nasobek.out
1379	neexistuje
2	

Příklad:

nasobek.in	nasobek.out
7654321	47
47	

P – III – 5

Stránka

Program: `stranka.pas` / `stranka.c` / `stranka.cpp`
Vstup: `stranka.in`
Výstup: `stranka.out`

Rozhodli jsme se, že začneme konkurovat světoznámým vyhledávačům, jako jsou například Google a Yahoo. Hlavním klíčem k úspěchu bude samozřejmě prezentace nalezených stránek uživateli. Přesněji, chtěli bychom z každé nalezené stránky ukázat co nejkratší úsek obsahující všechna slova, která uživatel hledal. Vaší úlohou bude napsat program, který takový úsek v dané stránce nalezne.

Soutěžní úloha. Je dáno N slov, která uživatel zadal. Také je dán text stránky obsahující M slov. Napište program, který najde nejkratší úsek stránky, v němž se vyskytují všechna zadaná slova (každé alespoň jednou).

Úsek stránky tvoří několik po sobě jdoucích slov. Délka úseku je rovna součtu jejich délek plus jejich počet minus 1 (za mezery mezi nimi). Tedy například úsek „`Toto je úsek`“ má délku 12.

Vstup: Na prvním řádku vstupního souboru je jediné celé číslo N — počet vyhledávaných slov. Následuje N řádků, na každém z nich je jedno vyhledávané slovo. Všechna tato slova jsou navzájem různá.

Na dalším řádku se nachází celé číslo M — počet slov na stránce. Následuje M řádků, na každém z nich je jedno slovo textu stránky, v pořadí, v jakém jsou na stránce uvedena.

Omezení: Každé slovo je řetězec tvořený 1 až 100 malými písmenky anglické abecedy.

Pro počet vyhledávaných slov N platí $1 \leqq N \leqq 5\,000$. Součet délek vyhledávaných slov nepřekročí 100 000.

Pro počet slov na stránce M platí $1 \leqq M \leqq 200\,000$. Součet délek slov na stránce nepřekročí 1 000 000.

Výstup: Vypište nejkratší úsek stránky, v němž se každé vyhledávané slovo vyskytuje alespoň jednou. Pokud je takových úseků více, vypište ten, který je nejblíže k začátku stránky. Úsek vypisujte tak, jak je uveden na vstupu, tedy každé slovo na samostatném řádku.

Pokud se některé vyhledávané slovo v textu stránky nenachází, vypište jediný řádek s textem „`Chybná stránka!`" (bez uvozovek).

Příklad:

`stranka.in`	`stranka.out`
3	nasi
nasi	k vasim
vasi	aby
prisli	prisli
20	vasi
poslali	
me	
nasi	
k vasim	
aby	
prisli	
vasi	
k nasim	
kdyz	
neprijdou	
vasi	
k nasim	
tak	
neprijdou	
nasi	
k vasim	

Kategorie Z5

Texty úloh

Z5 – I – 1

Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 20 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:

$$\square \xrightarrow{:2} \square \xrightarrow{+4} \square \xrightarrow{-3} \square \xrightarrow{:7} \square$$

$$\square \xrightarrow{\times 4} \square \xrightarrow{-2} \square \xrightarrow{:2} \square \xrightarrow{+2} \square$$

$$\square \xrightarrow{+6} \square \xrightarrow{-2} \square \xrightarrow{-1} \square \xrightarrow{:4} \square$$

$$\square \xrightarrow{\times 5} \square \xrightarrow{-1} \square \xrightarrow{:7} \square \xrightarrow{\times 4} \square$$

(*M. Smitková*)

Z5 – I – 2

Blecha Skákalka skáče po číselné ose. Dokáže však jen dva druhy skoků. Jedním přeskočí o 14 čísel doprava nebo doleva, druhým přeskočí o 18 čísel doprava nebo doleva. Právě stojí na čísle 2.

a) Najdi způsob, jak má blecha skákat, aby se dostala právě čtyřmi skoky na desítku.

b) Blecha tvrdí, že včera byla na třináctce. Mluví pravdu, nebo lže? Zdůvodni. (*M. Dillingerová*)

Z5 – I – 3

Pohádkový nafukovací čtverec, který umí mluvit, měl před 5 minutami délku strany 8 cm. Při každé lži zvětší svůj obvod dvojnásobně, při každé vyslovené pravdě se zmenší délka každé jeho strany o 2 cm. Za posledních 5 minut dvakrát lhal a dvakrát mluvil pravdu.

a) Jaký největší obvod může teď mít?

b) Jaký nejmenší obvod může teď mít? (*S. Bodláková*)

Z5 – I – 4

Pepa na pouti koupil čtyři autíčka — bílé, červené, zelené a modré. Bílé stálo dvakrát tolik co červené, zelené třikrát tolik co bílé a za modré zaplatil tolik, co za červené a bílé dohromady. Přitom červené stálo o 70 Kč méně než zelené. Kolik stála jednotlivá autíčka? (*Š. Ptáčková*)

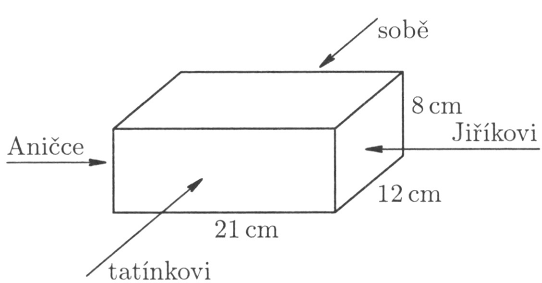
Z5 – I – 5

Máma stonožka má dvě děti a manžela. Každý z nich má sto nohou a všichni si berou denně čisté ponožky. V sobotu ráno v 6:00 začala máma stonožka dávat špinavé ponožky do pračky. Najednou se jí do pračky vejde 357 ponožek. Tato jedna várka se vypere za dvě a půl hodiny. Zjisti, kdy skončí s praním, pokud víš, že ponožky pere jenom jednou za týden, uložení ponožek do pračky jí trvá 2 minuty a jejich vyndání 3 minuty. (*S. Bednářová*)

Z5 – I – 6

Maminka má v lednici cihlu sýra, která je znázorněná na obr. 33. Postupně z ní odřezává 1 cm silné plátky na smažení. Nejprve odřízla zepředu plátek s rozměry 21 cm, 8 cm, 1 cm pro tatínka. Pak zboku odřízla pro Jiříka, zezadu pro sebe a nakonec z druhého boku pro Aničku. Napiš, jaké rozměry mají jednotlivé plátky. Urči rozměry zbytku sýra.

(*M. Dillingerová*)



Obr. 33

Z5 – II – 1

Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 16 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:

$$\square \xrightarrow{+2} \square \xrightarrow{:9} \square \xrightarrow{+12} \square$$

$$\square \xrightarrow{-5} \square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{\cdot 7} \square$$

$$\square \xrightarrow{\cdot 3} \square \xrightarrow{+3} \square \xrightarrow{:3} \square$$

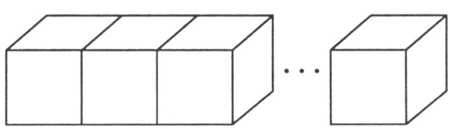
$$\square \xrightarrow{+7} \square \xrightarrow{-2} \square \xrightarrow{\cdot 2} \square$$

(*M. Smitková*)

Z5 – II – 2

Petr slepil 17 hracích kostek do hada (jako na obr. 34). Kostky lepil vždy tak, že slepil stěny se stejným počtem teček. Potom si hada prohlédl ze všech stran a správně spočítal všechny tečky na jeho povrchu. Kolik mu vyšlo? (Součet teček na protilehlých stěnách hrací kostky je 7.)

(*S. Bodláková, M. Dillingerová*)



Obr. 34

Z5 – II – 3

Myslím si trojmístné přirozené číslo menší než 200. Pokud jeho trojnásobek zaokrouhlím na stovky, zvětší se o 36. Které číslo si myslím?

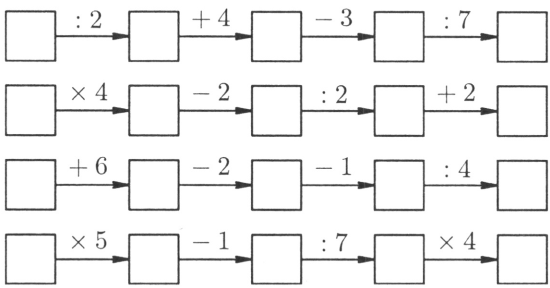
(*M. Dillingerová*)

Kategorie Z6

Texty úloh

Z6 – I – 1

Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 20 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:



(*M. Smitková*)

Z6 – I – 2

Sněhurka se sedmi trpaslíky sbírala lískové oříšky. Měla jich tolik, kolik všichni trpaslíci dohromady. Když se vraceli, potkali veverku Loudilku. Sněhurka i každý trpaslík jí dali stejný počet oříšků. Když pak trpaslíci a Sněhurka vysypali zbylé oříšky na stůl, zapsal Prófa jejich počty: 120, 316, 202, 185, 333, 297, 111 a 1 672. Kolik oříšků dostala veverka Loudilka?
(*L. Hozová*)

Z6 – I – 3

Když jsme čísla 80 a 139 vydělili stejným přirozeným číslem, získali jsme zbytky 8 a 13. Jakým číslem jsme dělili? (*M. Volfová*)

Z6 – I – 4

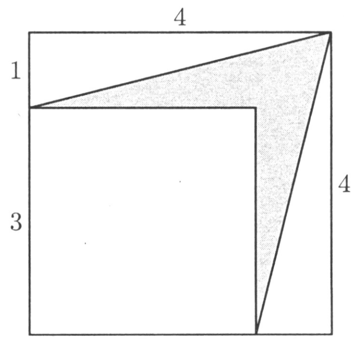
Obvod trojúhelníku je 16 cm. Jak dlouhé může mít strany, když jsou to v centimetrech přirozená čísla a součet délek dvou stran je o 6 cm větší než délka třetí strany? *(L. Hozová)*

Z6 – I – 5

Maruška dostala pět různě těžkých koláčů. Průměrná hmotnost jednoho koláče byla 200 gramů. Maruška jeden koláč snědla a průměrná hmotnost zbylých koláčů pak byla 160 gramů. Jakou hmotnost měl koláč, který Maruška snědla? *(B. Šťastná)*

Z6 – I – 6

Urči obsah šedé plochy vyplňující část útvaru mezi dvěma čtverci (rozměry na obr. 35 jsou v centimetrech). *(P. Tlustý)*

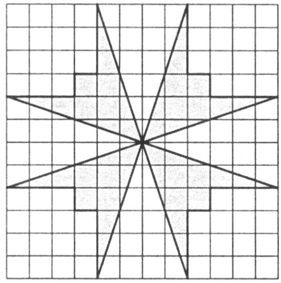


Obr. 35

Z6 – II – 1

Pan Kutil chtěl v koupelně vybarvit hvězdicové ornamenty na 20 dlaždicích. Na plechovce s barvou bylo napsáno, že barva vystačí na 750 cm^2. Kolik nejméně plechovek musel pan Kutil koupit, pokud jeden čtvereček sítě má obsah 1 cm^2? Ornament na jedné dlaždici vidíte na obr. 36.

(L. Hozová)



Obr. 36

Z6 – II – 2

V jeskyni žije pět obrů. Jejich průměrná výška je 45 504,63 cm. Obr Drobeček měří 174,53 m, obr Kulihrach 173 530,5 mm, obr Zlobr 1 745,23 dm, obr Hrompac 0,017 34 km.

a) Zjisti, kolik měří pátý obr Koloděj.

b) Seřaď obry podle velikosti od nejmenšího po největšího.

(*S. Bednářová*)

Z6 – II – 3

Sněhurka dala každému trpaslíkovi stejný počet kuliček. Trpaslíci házeli hrací kostkou. Kolik jim padlo teček, tolik kuliček museli vrátit Sněhurce. Každému z šesti trpaslíků padl jiný počet teček. Kolik teček padlo sedmému trpaslíkovi, když trpaslíkům zbylo dohromady 46 kuliček? Kolik kuliček dala Sněhurka každému trpaslíkovi na začátku? (*L. Hozová*)

Kategorie Z7

Texty úloh

Z7 – I – 1

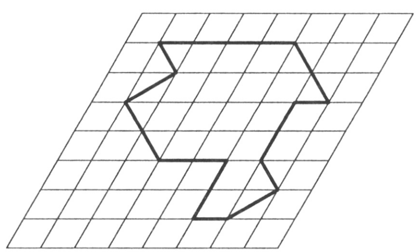
Pat a Mat upravovali nový asfalt na cestě. Nejprve s válcem jeli 10 m dopředu, potom 7 m couvli. Pak opět popojeli 10 m dopředu a 7 m couvli atd. Takto pokračovali, než poprvé sjeli z nového asfaltu.

a) Kolik metrů ujeli na novém 540 m dlouhém úseku cesty?

b) Kolikrát přejeli po 19. metru nového asfaltu? (*M. Dillingerová*)

Z7 – I – 2

Zjisti obsah a velikosti vnitřních úhlů mnohoúhelníku znázorněného v kosočtvercové síti na obr. 37, jestliže víš, že přímky sítě svírají úhel 80° a jeden malý kosočtvereček má obsah $1\,\mathrm{cm}^2$. (Pozor, obr. 37 je nepřesný!) (*S. Bednářová*)



Obr. 37

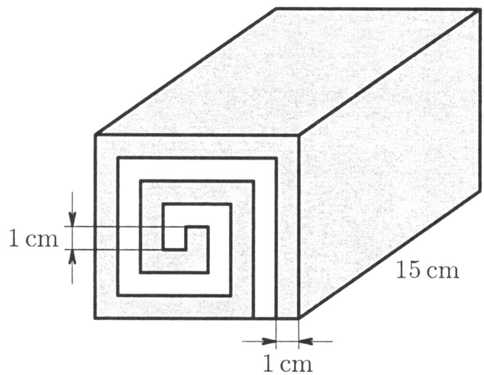
Z7 – I – 3

Na obr. 38 vidíš tzv. *kvadroládu* (speciální druh rolády). Je vyrobena z bílé a hnědé marcipánové hmoty, přičemž obě hmoty mají stejnou tloušťku, a to 1 cm. Celá kvadroláda má délku 15 cm. Prodává se rozkrájená na 10 shodných plátků. Zjisti

a) rozměry jednoho plátku,

b) kolik gramů hnědé hmoty a kolik gramů bílé hmoty je třeba na její přípravu, jestliže víš, že 1 cm^3 marcipánu má hmotnost 2 gramy.

(S. Bednářová)



Obr. 38

Z7 – I – 4

Najdi všechna pětimístná přirozená čísla, která se škrtnutím první a poslední číslice zmenší 250krát. *(L. Šimůnek)*

Z7 – I – 5

Pavel měl za domácí úkol vyjádřit desetinnými čísly zlomky $\frac{3}{7}$ a $\frac{7}{13}$. Chtěl udělat paní učitelce radost a místo do sešitu psal na laťky školního plotu. Nejprve vyjadřoval $\frac{3}{7}$, takže nahoru na první laťku napsal nulu, na druhou desetinnou čárku, na třetí 4. Takto pokračoval, dokud nenapsal číslici na poslední laťku. Potom vyjadřoval $\frac{7}{13}$. Na první laťku dolů napsal nulu, na druhou desetinnou čárku, na třetí 5 atd. Kolik bylo v plotě latěk, víš-li, že číslici 5 napsal přesně 667krát a že na 668 laťkách byla dvojice stejných číslic? *(P. Tlustý, M. Dillingerová)*

Z7 – I – 6

V Kocourkově jsou dvě směnárny. V současnosti mají tyto kurzy:

1. směnárna

	Nakupujeme	Prodáváme
1 euro	123 Kk	132 Kk

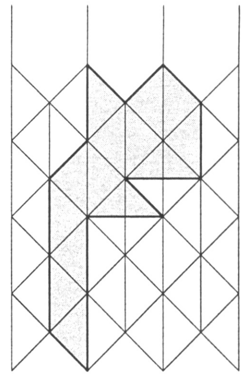
2. směnárna

	Nakupujeme	Prodáváme
1 euro	134 Kk	143 Kk

Slávek Mazaný měl několik eur. V druhé směnárně je vyměnil za kocourkovské koruny a ty potom vyměnil v první směnárně zpět za eura. Takto vydělal 1 euro. Kolik eur měl původně? (*S. Bednářová*)

Z7 – II – 1

Síť na obr. 39 je složena ze shodných rovnoramenných trojúhelníků, z nichž každý má obsah $2\,\mathrm{cm}^2$, přičemž některý z vnitřních úhlů trojúhelníku měří 100°. Zjistěte obsah a velikost vnitřních úhlů mnohoúhelníku znázorněného v této trojúhelníkové síti. (Pozor, obrázek může být velmi nepřesný.) (*S. Bednářová*)



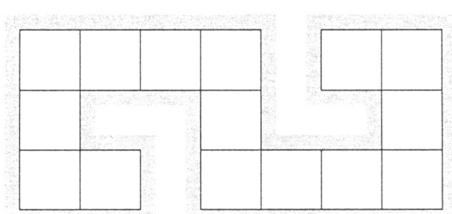
Obr. 39

Z7 – II – 2

Najdi všechna čtyřmístná čísla, která se po škrtnutí prostředních dvou cifer zmenší 120krát. (*S. Bednářová*)

Z7 – II – 3

Král Originál I. si sám navrhl a nechal vybudovat bazén. Na obr. 40 vidíte, jak vypadá při pohledu shora. Dno je pokryté čtvercovými dlaždicemi o straně délky 2 metry, betonové stěny jsou 3 metry vysoké a 0,5 metru silné. Zjistěte, kolik kilogramů betonu spotřebovali na stěny bazénu, jestliže $1\,\mathrm{m}^3$ betonu váží $2\,000\,\mathrm{kg}$. (*S. Bednářová*)



Obr. 40

Kategorie Z8

Texty úloh

Z8 – I – 1

Součin ciferného součinu a ciferného součtu dvojmístného přirozeného čísla je 126. Které číslo to je? Najděte všechna možná řešení.

(*M. Raabová*)

Z8 – I – 2

Paní Zručná se ucházela o místo v perníkárně. Při pohovoru s vedoucím chtěla říci, za kolik minut ozdobí kolik perníků. Byla nervózní, a proto omylem prohodila počet minut s počtem perníků. Vedoucí podle vyslechnutých údajů spočítal, kolik perníků by měla paní Zručná stihnout ozdobit za pětihodinovou pracovní dobu, a tolik jí dal úkolem. Paní Zručné však trvala práce o 2 hodiny a 12 minut déle. Kolik perníků ozdobila?

(*L. Šimůnek*)

Z8 – I – 3

Na obr. 41 vidíš tzv. *kvadroládu* (speciální druh rolády). Je vyrobena z bílé a hnědé marcipánové hmoty, přičemž obě hmoty mají stejnou tloušťku, a to 1 cm. Celá kvadroláda má délku 15 cm. Prodává se rozkrájená na 10 shodných plátků. Zjisti

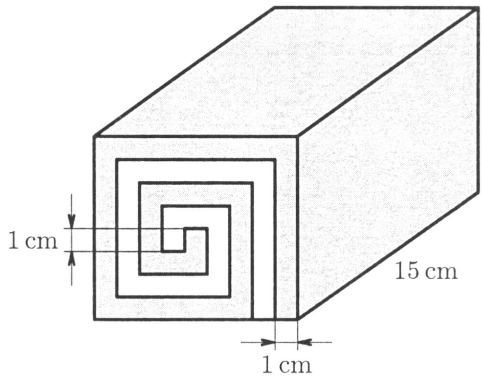
a) rozměry jednoho plátku,

b) kolik gramů hnědé hmoty a kolik gramů bílé hmoty je třeba na její přípravu, jestliže víš, že 1 cm^3 marcipánu má hmotnost 2 gramy.

(*S. Bednářová*)

Z8 – I – 4

Roman psal na list papíru celá čísla do řady tak, že každé následující získával z předchozího střídavě násobením dvěma a odečítáním tří.

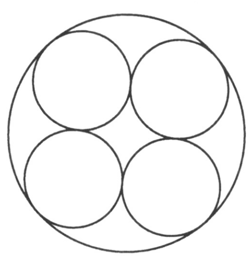


Obr. 41

(Např. řada čísel 1, 2, −1, −2, −5, −10 vyhovuje jeho pravidlu, ale řada 10, 7, 4, 8, 16, 32 jeho pravidlo nesplňuje.) Po chvíli sečetl posledních 5 čísel, která napsal, a vyšlo mu 114. Kterých pět čísel napsal naposledy? (*M. Raabová*)

Z8 – I – 5

Určete poloměr větší kružnice, víte-li, že malé kružnice mají poloměr 1 cm (kružnice mají celkem osm vzájemných dotyků, obr. 42). (*P. Tlustý*)



Obr. 42

Z8 – I – 6

Žák Pažout měl v loňském ročníku průměr všech známek 4,15. Z nich byly pouze čtyři jedničky, zato právě jedna třetina byly pětky. Kolik známek musel Pažout minimálně dostat? (*L. Šimůnek*)

Z8 – II – 1

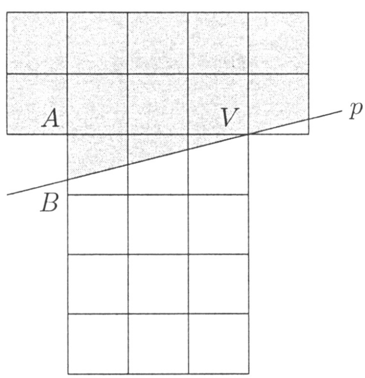
Každé písmeno tabulky nahrazuje určité přirozené číslo (stejná písmena představují stejná čísla). Známe součty hodnot ve třetím řádku, ve čtvrtém řádku a v prvním sloupci. Určete alespoň jednu vyhovující čtveřici čísel, jimiž lze nahradit písmena A, B, C, D.

D	A	C	B	
C	B	D	A	
B	C	B	C	50
D	A	A	A	45
85				

(*Š. Ptáčková*)

Z8 – II – 2

Máme obrazec ve tvaru T složený z 22 čtverečků o straně 1 cm (obr. 43). Bodem V prochází přímka p, která rozděluje obrazec na dvě části, bílou a šedou. Určete, v jakém poměru rozděluje přímka p úsečku AB, víte-li, že obsahy bílé a šedé plochy jsou stejné. (*L. Šimůnek*)



Obr. 43

Z8 – II – 3

Majka vytvořila posloupnost čísel, ve které je každé následující číslo součtem druhých mocnin číslic předcházejícího čísla. Vypište prvních 10 členů této posloupnosti, pokud je její první člen číslo 29. Které číslo je v posloupnosti na 2 006. místě? (*M. Dillingerová*)

Kategorie Z9

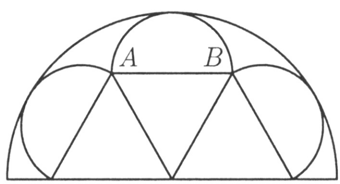
Texty úloh

Z9 – I – 1

Určete počet přirozených čísel od 100 do 999, která mají právě dvě stejné číslice. *(P. Tlustý)*

Z9 – I – 2

Na obr. 44 jsou tři rovnostranné trojúhelníky, tři malé polokružnice dotýkající se jedné velké polokružnice o poloměru 1 dm. Určete délku úsečky AB. *(P. Tlustý)*



Obr. 44

Z9 – I – 3

V soustavě souřadnic jsme znázornili body $A[3{,}2]$, $B[-1{,}1]$, $C[-2{,}4]$ a jejich obrazy A', B', C' ve středové souměrnosti se středem v počátku soustavy souřadnic. Vypočítejte obsah šestiúhelníku $ABCA'B'C'$. *(S. Bednářová)*

Z9 – I – 4

Starý podnikatel zemřel a zanechal po sobě dva bankovní účty, jeden dluh a závěť. V závěti je psáno, že peníze z prvního účtu si mají rozdělit první a druhý syn v poměru 1 : 2, peníze z druhého účtu první a třetí syn v poměru 1 : 3 a dluh mají zaplatit druhý a třetí syn v poměru 2 : 3. Zjistěte, kolik korun bylo na prvním, kolik na druhém účtu a jaký dluh museli synové zaplatit, víte-li, že v konečném důsledku každý z nich získal 123 456 korun. (*S. Bednářová*)

Z9 – I – 5

Dva rovnostranné papírové trojúhelníky, z nichž menší má obsah $60\,\mathrm{cm}^2$, jsme položili přes sebe tak, že jejich průnikem byl pravoúhlý trojúhelník s obsahem $30\,\mathrm{cm}^2$. Jaký nejmenší obsah mohl mít větší z rovnostranných trojúhelníků? (*S. Bednářová*)

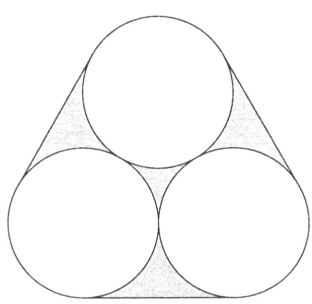
Z9 – I – 6

Prověrka obsahovala 26 otázek, jež byly rozděleny podle obtížnosti do tří skupin. V první byla každá správná odpověď hodnocena třemi body, ve druhé pěti body a ve třetí osmi body. Maximální počet bodů byl 111. Kolik otázek mohlo být v jednotlivých skupinách? (*L. Šimůnek*)

Petr a Honza šli plavat. Vzdálenosti, které uplavali, byly v poměru 4 : 5, Honza uplaval více. Další den šli znovu, tentokrát Petr uplaval o 200 metrů méně a Honza o 100 metrů více než předchozí den a poměr vzdáleností byl 5 : 8. Kolik metrů uplavali Honza a Petr první den? (*B. Šťastná*)

Z9 – II – 1

Určete obsah šedé plochy na obr. 45, pokud víte, že kružnice se navzájem dotýkají a mají poloměr 1 cm a úsečky, které plochu ohraničují, jsou jejich společné tečny. (*P. Tlustý*)



Obr. 45

Z9 – II – 2

Marek si hraje s jednoduchou kalkulačkou. Na papír si napsal jedno číslo. Zadal je do kalkulačky a pak postupně mačkal tlačítka: plus, čtyři, děleno, čtyři, minus, čtyři, krát, čtyři. Výsledek opsal na papír. Poté s tímto číslem postupoval stejně jako s předcházejícím, tedy zase: plus, čtyři, děleno, čtyři, minus, čtyři, krát, čtyři. Výsledek si opět opsal na papír. Celý postup s tímto nově získaným číslem zopakoval a opět výsledek opsal na papír. Poté zjistil, že součet čtyř čísel zapsaných na papíře je 80. Která čísla a v jakém pořadí napsal Marek na papír? (*M. Raabová*)

Z9 – II – 3

V rovnostranném trojúhelníku označte každý bod, jehož vzdálenost od nejbližšího vrcholu je menší než vzdálenost od těžiště. Kolik procent plochy rovnostranného trojúhelníku zaujímají body se zmíněnou vlastností? (*L. Šimůnek*)

Z9 – II – 4

Doplňte do čtverečků přirozená čísla tak, aby: součet všech doplněných čísel byl 44, součet čísel v každém čtyřčtverečkovém čtverci byl stejný, nejmenší doplněné číslo bylo liché, uprostřed čtverce bylo jednociferné číslo.

	7	
8		4
	2	

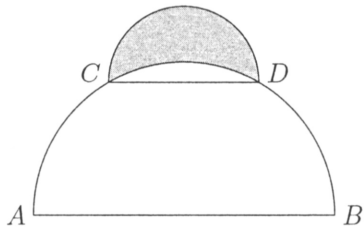
(*S. Bednářová*)

Z9 – III – 1

Určete obsah šedého měsíčku z obr. 46, pokud víte, že průměr AB větší polokružnice má délku 2 cm, průměr CD menší polokružnice má délku 1 cm a platí $AB \parallel CD$. (*P. Tlustý*)

Z9 – III – 2

Kuba našel ve sklepě tři krabice tvaru kvádru se čtvercovou podstavou. První byla dvakrát vyšší než druhá. Druhá byla 1,5krát širší než první.



Obr. 46

Třetí byla třikrát vyšší než první a dvakrát užší než první. V jakém poměru jsou objemy krabic? (*M. Raabová*)

Z9 – III – 3

Při přijímacích zkouškách na univerzitu je každému zájemci o studium přidělován krycí kód složený z pěti číslic. Zkoušky organizoval důkladný, leč pověrčivý docent, který se před přidělováním kódů rozhodl vyřadit ze všech možných kódů (tj. 00000 až 99999) ty, které v sobě obsahovaly číslo 13, tedy číslici 3 bezprostředně následující po číslici 1. Kolik kódů musel docent vyřadit? (*L. Šimůnek*)

Přípravná soustředění před 47. MMO

Výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu proběhlo od 10.–14. dubna v Kostelci nad Černými lesy. Na soustředění bylo pozváno 8 nejlepších řešitelů III. kola kategorie A s výjimkou těch, kteří se rozhodli dát přednost účasti na Mezinárodní fyzikální olympiádě (Pechal, Scholle a Motloch). Nepozvali jsme také vítěze letošního celostátního kola, protože v době Mezinárodní matematické olympiády dosáhne 20 let, a tak se dle uznávaných pravidel nemůže této soutěže zúčastnit. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a posloužilo ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Jaroslav Hančl	4/4 GMK Bílovec	89,5
Jakub Opršal	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	80
Zbyněk Konečný	3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	79,5
Vojtěch Říha	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	64,5
Pavel Šalom	8/8 G Rožnov pod Radhoštěm	56,5
Jan Uhlík	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	48
Anežka Faltýnková	3/4 GJŠ Přerov	47,5
Tomáš Jeziorský	3/4 GMK Bílovec	40

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentačního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Jaroslav Zhouf* (10. 4.),
dr. *Karel Horák* (11. 4.),
dr. *Pavel Calábek* (12. 4.),
dr. *Jaroslav Švrček* (13. 4.)
a doc. *Jaromír Šimša* (14. 4.).

Úlohy zadané na přípravných soustředěních

1. Na tabuli jsou napsána tři čtyřmístná přirozená čísla. Jestliže v jejich zápise zaměníme všechny dvojky trojkami, bude součet nových čísel roven 10 972. Jestliže v zápise původních čísel zaměníme všechny čtyřky sedmičkami, bude součet nových čísel roven 11 654. Čemu se rovná součet původních tří čísel?

2. Ve městě vede každá ulice buď ze severu na jih, nebo z východu na západ. Automobil právě dokončil projížďku městem, při které odbočil právě stokrát doleva. Kolikrát přitom mohl odbočit doprava, jestliže žádné místo neprojel dvakrát a nakonec se vrátil na výchozí místo? Každá ulice je průjezdná v obou směrech.

3. Nechť je dána funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou celá čísla, $a \neq 0$. Dále víme, že rovnice $f(x) = 0$ má aspoň jeden celočíselný kořen. Určete $f(1)$, jestliže $f\big(f(1)\big) = 1$.

4. V trojúhelníku ABC ($|AB| < |BC|$) je bod I střed kružnice vepsané, M je střed strany AC, N je střed oblouku ABC opsané kružnice. Dokažte, že $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle INB|$.

5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje n-místné číslo dělitelné 5^n, jehož všechny číslice jsou liché.

6. Je dán trojúhelník ABC a kružnice obsahující jeho vrcholy A, B, která protíná úsečky AC a BC postupně v bodech D a E, přičemž polopřímky BA a ED se protínají v bodě F. Označme M průsečík přímek BD a CF. Dokažte, že $|MF| = |MC|$, právě když $|MB| \cdot |MD| = |MC|^2$.

7. V rovině je dán trojúhelník ABC a uvnitř bod P. Označme postupně D, E, F průsečíky přímek PA, PB, PC se stranami BC, CA, AB. Dokažte, že

$$[PAF] + [PBD] + [PCE] = \frac{1}{2}[ABC],$$

právě když bod P leží na některé těžnici trojúhelníku ABC. (Symbol $[XYZ]$ označuje obsah trojúhelníku XYZ.)

8. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že

$$f(m+n)f(m-n) = f(m^2)$$

platí pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$.

9. Nechť S je množina všech funkcí $f\colon [0,1] \to [0,+\infty)$ takových, že $f(1)=1$ a platí

$$f(x)+f(y) \leqq f(x+y) \quad \text{pro všechna } x,y \in [0,1],\ x+y \leqq 1.$$

Určete nejmenší číslo k tak, že pro všechny funkce $f \in S$ a pro všechna $x \in [0,1]$ platí $f(x) \leqq kx$.

10. Určete všechna přirozená čísla m, n tak, že platí

$$\left\lfloor \frac{m^2}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n^2}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \right\rfloor + mn.$$

11. Nechť p je prvočíslo a q mnohočlen s celočíselnými koeficienty takový, že pro každé přirozené číslo k platí, že zbytek po dělení čísla $q(k)$ číslem p je buď 0, nebo 1. Dále platí $q(0)=0$ a $q(1)=1$. Dokažte, že stupeň mnohočlenu q je alespoň $p-1$.

12. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $x^2+y^2+z^2+ + 2xyz = 1$. Dokažte, že pro ně platí nerovnost

$$2(x+y+z) \leqq 3.$$

Kdy nastane rovnost?

13. V rovině uvažujme kružnice k_1 a k_2, které se protínají v bodech A, B. Tečna ke kružnici k_2 sestrojená v bodě A protíná kružnici k_1 v bodě C_1 ($C_1 \neq A$); tečna ke kružnici k_1 sestrojená v bodě A protíná kružnici k_2 v bodě C_2 ($C_2 \neq A$). Přímka C_1C_2 protíná kružnici k_1 v bodě D ($C_1 \neq \neq D \neq B$). Dokažte, že přímka BD prochází středem úsečky AC_2.

14. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Nechť P je průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB, dále nechť I_c značí střed kružnice vně připsané přeponě AB uvažovaného pravoúhlého trojúhelníku. Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{|CP|}{|PI_c|} \leqq \sqrt{2}-1.$$

Kdy nastane rovnost?

15. Zapište v desítkové soustavě číselnou hodnotu zlomku

$$\frac{1\cdot\binom{2006}{1}^2+2\cdot\binom{2006}{2}^2+3\cdot\binom{2006}{3}^2+\ldots+2006\cdot\binom{2006}{2006}^2}{\binom{2006}{0}^2+\binom{2006}{1}^2+\binom{2006}{2}^2+\binom{2006}{3}^2+\ldots+\binom{2006}{2006}^2}.$$

16. Osa vnitřního úhlu BAC trojúhelníku ABC protne stranu BC v bodě K. Vyjádřete $|AK|$ pomocí délek a, b, c stran ΔABC ve tvaru

$$|AK|=\frac{\sqrt{L_1L_2L_3L_4}}{L_5}$$

s vhodnými činiteli $L_i=u_ia+v_ib+w_ic$ s reálnými koeficienty u_i, v_i, w_i.

17. Napište příklad tří přirozených čísel a, b, c tak, aby číslo a bylo násobkem devíti, ne však násobkem jedenácti, aby číslo b bylo násobkem jedenácti, ne však násobkem devíti, a aby platilo $a^{99}+b^{99}=c^{100}$.

18. Máme n mincí $M_1, M_2, \ldots, M_n$, jejichž stranám říkáme „hlava" a „orel". Pro každé $k=1,2,\ldots,n$ je mince M_k natolik falešná, že při jejím hodu padne „hlava" s pravděpodobností $1:(2k+1)$. Hodíme-li každou z těchto n mincí jedenkrát, s jakou pravděpodobností padne „hlava" lichý počet krát? Odpověď zapište ve tvaru $P(n):Q(n)$, kde $P(n)$ a $Q(n)$ jsou mnohočleny proměnné n (tedy jejich stupně a koeficienty jsou na čísle n nezávislé).

19. Rozhodněte, zda lze vybrat 2 006 různých přirozených čísel menších než 100 000 tak, aby žádné z nich nebylo rovno aritmetickému průměru jiných dvou vybraných čísel.

20. Bod M je středem strany AC daného trojúhelníku ABC. Na prodloužení strany BC za bod B je vybrán bod D tak, že $|BD|=|BA|$. Osa úhlu ABC protne přímku MD v bodě P. Dokažte, že úhly BAP a ACB jsou shodné.

21. Na listě papíru narýsujeme všechny strany a úhlopříčky některého konvexního n-úhelníku. Tyto úsečky pak postupně odstraňujeme mazáním podle následující procedury: Vybereme libovolné čtyři různé vrcholy A, B, C, D takové, že úsečky AB, BC, CD, DA jsou (zatím) narýsovány, a jednu z těchto čtyř úseček umažeme. Proceduru opakujeme tak dlouho, dokud to je možné. Pro dané $n\geqq 4$ určete nejmenší možný počet úseček, které nakonec v n-úhelníku zůstanou narýsovány.

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

Žilina, 26.–28. června 2006

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již šesté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovaly šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 47. MMO v Lublani.

Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	Body	Součet
1.	Michał Pilipczuk	POL	7 7 2 7 7 6	36
2.	František Simančík	SVK	7 6 1 2 7 7	30
3.	Michal Burger	SVK	7 7 1 2 7 5	29
4.–5.	*Pavel Kocourek*	CZE	7 0 7 7 2 5	28
	Tomasz Kulczyński	POL	7 7 2 0 7 5	28
6.	Tomasz Warszawski	POL	7 6 1 2 4 7	27
7.–8.	*František Konopecký*	CZE	7 0 7 0 7 3	24
	Marek Pechal	CZE	7 0 1 5 7 4	24
9.	Ondrej Budáč	SVK	7 0 2 0 7 7	23
10.	*Jaromír Kuben*	CZE	6 0 7 2 0 7	22
11.–12.	Jozef Bodnár	SVK	2 3 1 2 7 5	20
	Wojciech Śmietanka	POL	6 6 1 7 0 0	20
13.–14.	Nadbór Drozd	POL	7 0 1 0 7 4	19
	Jakub Závodný	SVK	7 0 2 2 7 1	19
15.	*Jakub Opršal*	CZE	7 0 1 2 7 0	17
16.	Peter Černo	SVK	7 0 2 2 0 0	11
17.	Piotr Achinger	POL	1 0 1 2 6 0	10
18.	*Jaroslav Hančl*	CZE	1 0 0 0 3 0	4

Hodnocení vyřešených úloh koordinovala mezinárodní komise ve složení *Jaroslav Švrček* a *Jaroslav Zhouf* za Českou republiku, *Vojtech Bá-*

lint, *Peter Novotný* a *Ján Mazák* za domácí Slovensko a *Józef Kalinowski* a *Tomasz Szymczyk* za Polsko.

Texty soutěžních úloh

1. Na kružnici o poloměru r leží pět různých bodů A, B, C, D, E v tomto pořadí, přičemž platí $|AC| = |BD| = |CE| = r$. Dokažte, že trojúhelník, jehož vrcholy tvoří průsečíky výšek trojúhelníků ACD, BCD a BCE, je pravoúhlý. (*Tomáš Jurík*)

2. Kolem okrouhlého stolu sedí n dětí. Erika je z nich nejstarší a má n bonbonů. Ostatní děti žádné bonbony nemají. Erika se rozhodla, že bonbony rozdělí, a stanovila následující pravidla. V každém kole zdvihnou ruce všechny děti, jež mají u sebe aspoň dva bonbony. Erika jednoho z přihlášených vybere a ten dá každému svému sousedovi jeden bonbon. (V prvním kole se tedy přihlásí jen Erika a dá svým dvěma sousedům po bonbonu.) Zjistěte, pro které $n \geqq 3$ může dělení po konečném počtu kol skončit tak, že každé dítě bude mít právě jeden bonbon.
(*Peter Novotný*)

3. Součet čtyř reálných čísel se rovná 9, součet jejich druhých mocnin se rovná 21. Dokažte, že daná čísla je možno označit a, b, c a d tak, aby platila nerovnost $ab - cd \geqq 2$. (*Jaromír Šimša*)

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $k \geqq 1$ existuje přirozené číslo n takové, že v zápise čísla 2^n v desítkové soustavě se nachází blok právě k po sobě jdoucích nul, tj.

$$2^n = \ldots a\,\underbrace{00\ldots0}_{k\ \text{nul}}\,b\ldots,$$

přičemž číslice a, b jsou nenulové. (*Peter Novotný*)

5. Zjistěte, kolik existuje posloupností celých čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ takových, že pro každé přirozené číslo n platí

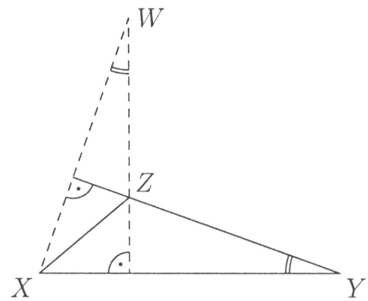
$$a_n \neq -1 \qquad \text{a} \qquad a_{n+2} = \frac{a_n + 2\,006}{a_{n+1} + 1}.$$

(*Peter Novotný*)

6. Zjistěte, zda existuje konvexní pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ takový, že pro každé $i = 1, 2, 3, 4, 5$ jsou přímky A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ různoběžné a protínají se v bodě B_i, přičemž body B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 leží v přímce. (Klademe $A_6 = A_1$, $A_7 = A_2$ a $A_8 = A_3$.) (*Waldemar Pompe*)

Řešení soutěžních úloh

1. V libovolném tupoúhlém trojúhelníku XYZ s tupým úhlem při vrcholu Z a průsečíkem výšek W mají úhly XYZ a XWZ stejnou velikost, oba jsou totiž doplňkem do $90°$ úhlu YXW (obr. 47). Navíc body Y a W leží v opačných polorovinách určených přímkou XZ.



Obr. 47

Označme průsečíky výšek uvažovaných trojúhelníků postupně P, Q, R. Ukážeme, že úhel PQR je pravý.

Zřejmě všechny tři uvedené trojúhelníky mají při vrcholu C tupý úhel. Body P, Q, R tedy leží ve vnější oblasti dané kružnice (obr. 48). Z rovnosti $|AC| = |BD|$ plyne, že jsou přímky BC a AD rovnoběžné. Protože polopřímka BD leží v konvexním úhlu CBE a přitom

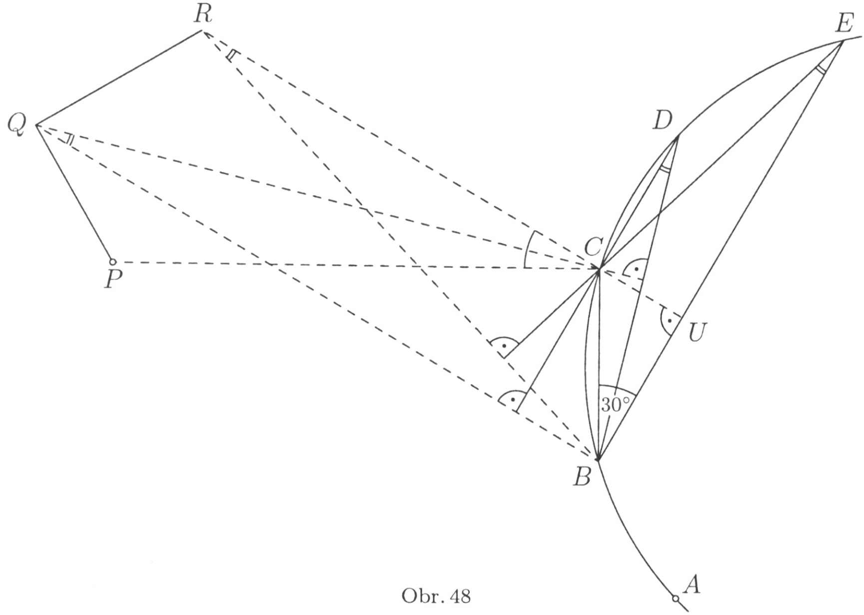
$$CP \perp AD \parallel BC, \quad CQ \perp BD, \quad CR \perp BE,$$

je zřejmé nejen to, že polopřímka CQ leží „mezi“ polopřímkami CP a CR, tj. v konvexním úhlu PCR, ale také to, že $|\sphericalangle PCR| = |\sphericalangle CBE| = 30°$, neboť tětivě CE velikosti poloměru přísluší středový úhel $60°$.

Podle tvrzení z úvodního odstavce leží body Q a R v téže polorovině určené přímkou BC a platí

$$|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle BRC| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BQC|.$$

Přitom úhly BEC a BDC mají stejnou velikost, poněvadž se jedná o obvodové úhly nad společnou tětivou BC. Je tedy také $|\sphericalangle BRC| = |\sphericalangle BQC|$, takže čtyřúhelník $BCRQ$ je tětivový. Pro velikost úhlu CRQ proto platí $|\sphericalangle CRQ| = 180° - |\sphericalangle QBC| = 120°$ (z $|BD| = |CE|$ totiž plyne $CD \parallel BE$, což spolu s $QB \perp CD$ dává $|\sphericalangle QBE| = 90°$, neboli $|\sphericalangle QBC| = 60°$).



Obr. 48

Analogicky zjistíme, že i čtyřúhelník $DCPQ$ je tětivový a platí $|\sphericalangle CPQ| = 180° - |\sphericalangle QDC| = 120°$ (PD je výška na stranu AD, přičemž velikost úhlu ADC nad tětivou AC je $30°$). Dopočítáním úhlu PQR ve čtyřúhelníku $PCRQ$ dostáváme $|\sphericalangle PQR| = 360° - 30° - 2 \cdot 120° = 90°$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

2. Nejprve ukážeme, že pro sudé n dělení nikdy nemůže skončit požadovaným způsobem. V každém kole se změní poloha jen dvou bonbonů, přičemž se posunou „opačnými směry“. To nás vede ke zkoumání, jak se mění celkový součet vzdáleností bonbonů od daného dítěte, řekněme od Eriky. Označme jednotlivá místa po směru hodinových ručiček čísly od 0 do $n-1$ podle vzdálenosti (v tomto směru) od Eriky. Po každém kole sečtěme vzdálenosti všech bonbonů od Eriky a označme součet S (tj. s každým bonbonem zahrneme do S číslo místa, kde sedí jeho aktuální držitel). Pokud v daném kole vybere Erika dítě na místě s číslem k ($1 \leqq k \leqq n-2$), hodnota S se nezmění — namísto $2k$ bude v součtu $(k-1)+(k+1) = 2k$. Pokud vybere dítě na místě s číslem $n-1$, v S místo $2(n-1) = 2n-2$ bude $(n-2)+0$, hodnota součtu se tedy zmenší o n. A konečně pokud vybere sebe, místo $2 \cdot 0$ bude v součtu $(n-1)+1 = n$, takže se hodnota S o n zvětší. Protože na začátku je $S = 0$ a může se měnit jen o hodnotu $\pm n$, zůstane S po každém kole dělitelné číslem n, tj. S/n bude stále celé číslo. Ovšem pokud by každé dítě mělo právě jeden bonbon, výsledný součet by byl

$$S = 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \text{neboli} \quad \frac{S}{n} = \frac{n-1}{2},$$

což pro sudá n není celé číslo. Taková situace tedy nastat nemůže.

Věnujme se teď lichým hodnotám n. Ukážeme, že existuje dělení, které skončí tak, že každé dítě bude mít právě jeden bonbon. Nechť $n = 2k + 1$. Vhodné dělení sestrojíme indukcí; přesněji, dokážeme, že pro každé $i = 0, 1, \ldots, k$ umíme dostat pozici, v níž Erika má $n - 2i$ bonbonů a prvních i dětí sedících nalevo a zároveň i prvních i dětí napravo má po jednom bonbonu. Hodnota $i = 0$ představuje počátek dělení, hodnota $i = 1$ stav po prvním kole (a tedy první indukční krok) a hodnota $i = k$ stav, kdy má každý jeden bonbon. Předpokládejme, že se nám podařilo dostat se do popsané pozice pro nějakou hodnotu $i = m$, přičemž $1 \leqq m < k$ (a prošli jsme přitom všemi pozicemi pro $i < m$). V této situaci postupujme následovně: Nejprve dá Erika po bonbonu dvěma svým sousedům (protože $m < k$, má aspoň tři bonbony a může to udělat). Další kola jsou znázorněna v následujícím schématu. (Čísla znamenají počty bonbonů u Eriky a dětí napravo od ní, situace nalevo je symetrická.)

$$\underline{n-2m}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m}, 0, \ldots \;\rightarrow\; n-2m-2, \underline{2}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-1}, 0, \ldots \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; n-2m, 0, \underline{2}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-2}, 0, \ldots \;\rightarrow\; n-2m, 1, 0, \underline{2}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-3}, 0, \ldots \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; n-2m, 1, 1, 0, \underline{2}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-4}, 0, \ldots \;\rightarrow\; \ldots \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; n-2m, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-2}, 0, \underline{2}, 0, \ldots \;\rightarrow\; n-2m, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-1}, 0, 1, 0, \ldots$$

Dostali jsme se tak do pozice, kdy Erika má $n - 2m$ bonbonů, prvních $m - 1$ dětí napravo i nalevo má po jednom bonbonu, m-té dítě po obou stranách nemá žádný bonbon a děti vzdálené o $m+1$ míst mají po jednom bonbonu. Abychom dosáhli pozice pro $i = m + 1$, stačí doplnit bonbony právě dětem na místech vzdálených od Eriky o m. Na to však můžeme využít indukční předpoklad. Pokud si totiž odmyslíme bonbony u dětí vzdálených o $m+1$ míst, dostaneme pozici pro $i = m-1$ (jen Erika má o dva bonbony méně, avšak stále má aspoň tři, můžeme tedy učinit tytéž kroky). Odtud se už umíme dostat do situace pro $i = m$. Vrátíme-li zpět odmyšlené bonbony, dostaneme pozici pro $i = m+1$.

Nakonec se nám proto podaří dosáhnout i pozice pro $i = k$, tj. pro lichá n dělení může skončit tak, že každé dítě má právě jeden bonbon.

Poznámky. Pro sudé n, jež není dělitelné čtyřmi, se dá tvrzení dokázat jednodušeji. V takovém případě stačí totiž příslušná místa obsazená dětmi střídavě obarvit bílou a černou. Je zřejmé, že parita počtu bonbonů u všech dětí na bílých místech (kterých je pro takové n lichý počet) se nemění. Na začátku je tato hodnota sudá, zatímco v situaci, kdy by každé dítě mělo právě jeden bonbon, by byla lichá. Proto není možné se do takové situace dostat.

Dá se ukázat, že v případě lichého n dělení dokonce musí vždy (bez ohledu na to, jako děti vybíráme) po konečném počtu kroků skončit tak, že každé dítě má právě jeden bonbon. Je-li $n = 2k+1$, počet kol, po nichž to nastane, je vždy $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2$.

3. Označme daná čísla p, q, r, s tak, aby $p \geqq q \geqq r \geqq s$.

Uvažujme nejprve případ $p + q \geqq 5$. Potom

$$p^2 + q^2 + 2pq \geqq 25 = 4 + (p^2 + q^2 + r^2 + s^2) \geqq 4 + p^2 + q^2 + 2rs,$$

odkud máme $pq - rs \geqq 2$. V tomto případě tedy tvrzení platí.

Předpokládejme tedy, že $p + q < 5$; potom

$$4 < 9 - (p+q) = r + s \leqq p + q < 5. \tag{1}$$

Všimněme si, že

$$\begin{aligned}&(pq + rs) + (pr + qs) + (ps + qr) = \\ &= \frac{(p+q+r+s)^2 - (p^2+q^2+r^2+s^2)}{2} = 30.\end{aligned}$$

Navíc

$$pq + rs \geqq pr + qs \geqq ps + qr,$$

protože $(p-s)(q-r) \geqq 0$ a $(p-q)(r-s) \geqq 0$. Odtud dostáváme, že $pq + rs \geqq 10$. Z (1) vyplývá $0 \leqq (p+q) - (r+s) < 1$, takže

$$(p+q)^2 - 2(p+q)(r+s) + (r+s)^2 < 1.$$

Když tuto nerovnost přičteme ke zřejmé rovnosti

$$(p+q)^2 + 2(p+q)(r+s) + (r+s)^2 = 9^2,$$

dostaneme

$$(p+q)^2 + (r+s)^2 < 41.$$

Proto

$$\begin{aligned} 41 = 21 + 2 \cdot 10 \leqq (p^2+q^2+r^2+s^2) + 2(pq+rs) = \\ = (p+q)^2 + (r+s)^2 < 41, \end{aligned}$$

což je spor. Takový případ tedy nastat nemůže.

Jiné řešení. Z rovnosti $a+b+c+d=9$ při uspořádání $a \geqq b \geqq c \geqq d$ nejprve vyplývá, že aritmetické průměry dvojic čísel a, b, resp. c, d mají pro vhodné $\varepsilon_1 \geqq 0$ vyjádření

$$\frac{a+b}{2} = \frac{9}{4} + \varepsilon_1, \qquad \frac{c+d}{2} = \frac{9}{4} - \varepsilon_1.$$

Odtud zase vyplývá vyjádření čísel a, b, c, d ve tvaru

$$a = \frac{9}{4} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad b = \frac{9}{4} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad c = \frac{9}{4} - \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \quad d = \frac{9}{4} - \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

pro vhodná $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \geqq 0$. Nerovnost $b \geqq c$ znamená, že

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \geqq -\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \quad \text{neboli} \quad \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqq 2\varepsilon_1.$$

Z rovnosti

$$\begin{aligned} 21 = (a^2+b^2) + (c^2+d^2) = 2 \cdot \left(\frac{9}{4} + \varepsilon_1\right)^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2 \cdot \left(\frac{9}{4} - \varepsilon_1\right)^2 + 2\varepsilon_3^2 = \\ = 4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 4\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2 = 20 + \frac{1}{4} + 2 \cdot (2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \end{aligned}$$

zjistíme, že nezáporná čísla ε_i splňují vztah

$$2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \frac{3}{8}. \tag{2}$$

Vzhledem k nerovnostem $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqq 2\varepsilon_1$ a $\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \leqq (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2$ vyplývá z (2) odhad

$$\frac{3}{8} \leqq 2\varepsilon_1^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \leqq 2\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_1^2 = 6\varepsilon_1^2,$$

odkud $\varepsilon_1^2 \geqq \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$, neboli $\varepsilon_1 \geqq \frac{1}{4}$. Pro zkoumaný výraz $ab - cd$ platí

$$ab - cd = \left(\frac{9}{4} + \varepsilon_1\right)^2 - \varepsilon_2^2 - \left(\frac{9}{4} - \varepsilon_1\right)^2 + \varepsilon_3^2 = 9\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2.$$

Dosadíme-li za ε_2^2 vyjádření z (2), dostaneme

$$ab - cd = 9\varepsilon_1 - \left(\frac{3}{8} - 2\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2\right) + \varepsilon_3^2 = 9\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1^2 - \frac{3}{8} + 2\varepsilon_3^2 \geqq$$
$$\geqq 9 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{8} = 2.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

4. Nejprve ukážeme, že v zápisech mocnin čísla 2 se nalézají libovolně dlouhé bloky nul. Aby v zápise čísla 2^n byl blok *aspoň* k nul, musí to být číslo tvaru $y \cdot 10^{m+k} + z$, kde y, z jsou přirozená a z má nejvýše m číslic, tj. $z < 10^m$. Stačí tedy najít taková n a m, aby bylo $2^n \geqq 10^{m+k}$ a zbytek čísla 2^n po dělení číslem 10^{m+k} byl menší než 10^m. Podle Eulerovy věty pro každé přirozené t platí

$$2^{\varphi(5^t)} \equiv 1 \pmod{5^t}.$$

(Využili jsme, že čísla 2 a 5^t jsou nesoudělná.) Vynásobením této kongruence číslem 2^t dostaneme

$$2^{t+\varphi(5^t)} \equiv 2^t \pmod{10^t}, \quad \text{neboli} \quad 2^{t+\varphi(5^t)} = y \cdot 10^t + 2^t$$

pro nějaké přirozené y. Podle předchozích úvah volme $n = t + \varphi(5^t)$ a $m = t-k$. Přitom t musí mít takovou hodnotu, aby bylo jednak $2^{t+\varphi(5^t)} \geqq$ $\geqq 10^t$ neboli $2^{\varphi(5^t)} \geqq 5^t$ (což zřejmě platí pro každé $t \geqq 1$, neboť $\varphi(5^t) =$ $= 4 \cdot 5^{t-1}$), jednak $2^t < 10^{t-k}$. Takové t určitě existuje, stačí například vzít $t = 2k$ (neboť $2^{2k} = 4^k < 10^k$). Z uvedeného vyplývá, že v čísle

$$2^{2k+\varphi(5^{2k})} = y \cdot 10^{2k} + 2^{2k}$$

se nachází blok aspoň k nul.

Vezměme tedy pro dané k takovou mocninu dvojky (označme ji 2^n), jež obsahuje blok právě r nul, přičemž $r \geqq k$. Zkoumejme, co se s blokem děje, když bereme další mocniny, tj. když číslo s blokem postupně násobíme dvěma. Vzhledem k tomu, že máme (a, b označují nějaké nenulové číslice)

$$2^n = \underbrace{\ldots a}_{y}\underbrace{00\ldots0}_{r \text{ nul}}\underbrace{b\ldots}_{z} = y \cdot 10^{r+s} + z,$$

dostaneme $2^{n+1} = 2y \cdot 10^{r+s} + 2z$. Přitom číslo $2z$ má zřejmě buď s číslic (stejně jako číslo z), anebo $s+1$ číslic. Z „pravé strany" se tedy blok nul buď nezmenší, anebo se zmenší o jednu. Z „levé strany" se blok může jen prodloužit (pokud je y dělitelné pěti). Celkově se tak délka bloku buď zmenší o jednu, nebo se nezmění, nebo se zvětší. Budeme-li dál násobit dvěma, délka bloku se v každém kroku zmenší nejvýše o jednu. Tedy jediná možnost, kdy blok nikdy nedosáhne délky k, je, že blok bude mít stále délku větší než k. To však není možné. Číslo y má totiž ve svém prvočíselném rozkladu pětku s nějakým exponentem, řekněme α. Když 2^n vynásobíme α-krát dvěma, při dalším násobení se už blok zřejmě „zleva" prodlužovat nebude. A „zprava" se blok minimálně po každém čtvrtém násobení zkrátí (neboť $2^4 > 10$). A tak po dostatečném počtu kroků dostaneme mocninu čísla 2, která obsahuje blok právě k nul.

5. Každá posloupnost splňující podmínky zadání je určena prvními dvěma členy — všechny další vypočítáme z rekurentního vztahu. Hledáme tedy takové dvojice (a_1, a_2), pro něž jsou všechny členy posloupnosti celá čísla. Napišme daný vztah pro několik malých hodnot n. Po odstranění zlomků dostaneme

$$\begin{aligned} a_3(a_2+1) &= a_1 + 2\,006, \\ a_4(a_3+1) &= a_2 + 2\,006, \\ a_5(a_4+1) &= a_3 + 2\,006, \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

Odečtěme sousední rovnosti, abychom se zbavili čísla 2 006. Po přeuspořádání členů získáme rovnosti

$$\begin{aligned} a_3 - a_1 &= (a_3+1)(a_4-a_2), \\ a_4 - a_2 &= (a_4+1)(a_5-a_3), \\ a_5 - a_3 &= (a_5+1)(a_6-a_4), \\ &\ \vdots \end{aligned} \tag{1}$$

Protože podle zadání jsou všechny závorky $(a_n + 1)$ nenulové, mohou nastat dvě možnosti. Pokud $a_3 - a_1 = 0$, postupným dosazováním do předešlých rovností dostaneme také $a_4 - a_2 = 0$, $a_5 - a_3 = 0$, ..., tj.

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots \qquad \text{a} \qquad a_2 = a_4 = a_6 = \ldots \tag{2}$$

Na druhé straně, pokud $a_3 - a_1 \neq 0$, stejným dosazováním odvodíme, že $a_4 - a_2 \neq 0$, $a_5 - a_3 \neq 0$, ... Věnujme se nejprve druhé možnosti.

Z rovností (1) máme pro každé $n \geqq 1$ vztah

$$0 < |a_{n+3} - a_{n+1}| = |a_{n+2} - a_n| \cdot \frac{1}{|a_{n+2} + 1|} \leqq |a_{n+2} - a_n|. \qquad (3)$$

Dostáváme tak nerostoucí posloupnost kladných celých čísel

$$|a_3 - a_1| \geqq |a_4 - a_2| \geqq |a_5 - a_3| \geqq \dots$$

Tato posloupnost je zřejmě od určitého členu počínaje konstantní (jinak bychom z ní mohli vybrat nekonečnou klesající posloupnost kladných celých čísel, což není možné). Existuje tedy takový index N a hodnota d, že pro každé $n \geqq N$ je $|a_{n+2} - a_n| = d$. Podle (3) potom $|a_{n+2} + 1| = 1$, tj. pro každé $n \geqq N + 2$ máme $a_n \in \{0, -2\}$. Avšak podle zadání

$$a_{N+4} = \frac{a_{N+2} + 2\,006}{a_{N+3} + 1},$$

neboli a_{N+4} nabývá jedné z hodnot

$$\frac{0 + 2\,006}{0 + 1} = 2\,006, \qquad \frac{0 + 2\,006}{-2 + 1} = -2\,006,$$
$$\frac{-2 + 2\,006}{0 + 1} = 2\,004, \qquad \frac{-2 + 2\,006}{-2 + 1} = -2\,004,$$

což odporuje tomu, že $a_{N+4} \in \{0, -2\}$. V tomto případě žádná posloupnost podmínkám zadání nevyhovuje.

Každá vyhovující posloupnost proto splňuje (2). Dosazením $n = 1$ a $a_3 = a_1$ do dané rovnosti dostaneme

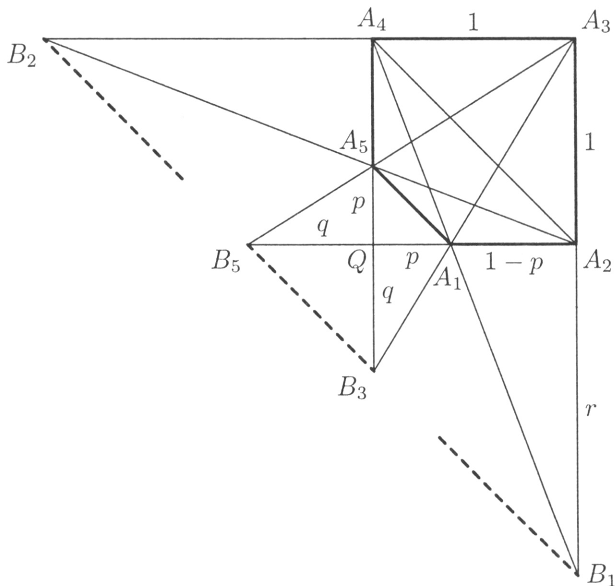
$$a_1 = \frac{a_1 + 2\,006}{a_2 + 1}, \quad \text{neboli} \quad a_1 a_2 = 2\,006 = 2 \cdot 17 \cdot 59.$$

Berouce do úvahy $a_1, a_2 \neq -1$, dostáváme

$$a_1 \in \{1, \pm 2, \pm 17, \pm 34, \pm 59, \pm 118, \pm 1\,003, 2\,006\} \quad \text{a} \quad a_2 = \frac{2\,006}{a_1}.$$

Snadno ověříme, že každá takováto posloupnost $a_1, a_2, a_1, a_2, a_1, \dots$ podmínky zadání splňuje. Hledaných posloupností je tudíž 14.

6. Zkusme pětiúhelník s popsanými vlastnostmi najít. Překážkou je, že pětiúhelníky souměrné podle nějaké osy (pro něž by snad mohlo být jednodušší ukázat, že popsané body leží v přímce) mají vždy aspoň jednu dvojici přímek A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ rovnoběžnou. Začněme tedy s jednodušší úlohou — hledejme pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ takový, že jen čtyři z bodů B_i budou ležet v přímce. Takový si už můžeme dovolit hledat mezi osově souměrnými pětiúhelníky. Abychom situaci ještě zjednodušili, předpokládejme, že body A_2, A_3, A_4 jsou vrcholy čtverce $QA_2A_3A_4$ o straně délky 1 a body A_1, A_5 leží postupně na stranách QA_2 a QA_4 ve vzdálenosti p od vrcholu Q (obr. 49). Ze souměrnosti (pětiúhelník je sou-



Obr. 49

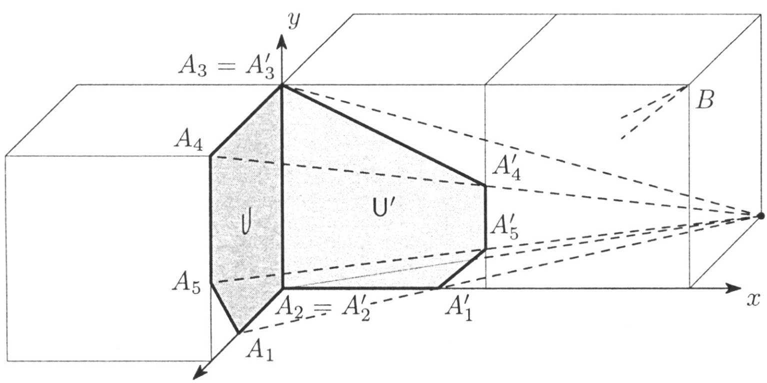
měrný podle osy QA_3) je zřejmé, že přímky B_1B_2, B_3B_5 jsou rovnoběžné. Snadno vypozorujeme, že v případě, kdy p nabývá malé hodnoty, tj. když body A_1, A_5 jsou blízko bodu Q, nachází se přímka B_3B_5 mnohem blíž bodu Q než přímka B_1B_2. Naopak pro hodnoty p blízké 1 jsou body A_1, A_5 blízko bodů A_2, A_4 a blíž bodu Q je přímka B_1B_2 (dokonce pro $p = \frac{3}{4}$ bod Q obsahuje a pro $p > \frac{3}{4}$ budou obě přímky ležet na opačných stranách od bodu Q) než přímka B_3B_5. Dá se proto očekávat, že pro nějakou hodnotu $p \in (0, 1)$ jsou obě přímky totožné a body B_1, B_2, B_3, B_5 tak leží na jedné přímce. Nalezněme takové p.

Označme $|B_5Q| = |B_3Q| = q$ a $|B_1A_2| = r$. Z podobnosti trojúhelníků B_5QA_5 a $B_5A_2A_3$ máme $q : p = (q+1) : 1$ neboli $q = \dfrac{p}{1-p}$. Z podobnosti trojúhelníků $B_1A_2A_1$ a $B_1A_3A_4$ máme $r : (1-p) = (r+1) : 1$ neboli $r = \dfrac{1-p}{p}$. Konečně k tomu, aby bod B_1 ležel na přímce B_3B_5, stačí, aby byly podobné trojúhelníky B_5QB_3 a $B_5A_2B_1$, tj. aby trojúhelník $B_5A_2B_1$ byl také rovnoramenný, neboli $q+1 = r$. Po dosazení předchozích vztahů a jednoduché úpravě získáme kvadratickou rovnici

$$p^2 - 3p + 1 = 0.$$

Ta má v intervalu $(0, 1)$ jediné řešení $p = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$. Pro nalezené p tedy body B_1, B_3, B_5, B_2 leží na jedné přímce. Navíc přímky A_1A_5 a A_2A_4 (které by se, kdyby nebyly rovnoběžné, protínaly v bodě B_4) jsou s ní rovnoběžné. V jistém smyslu se tedy tyto tři přímky protínají „v nekonečnu“ v „bodě“ B_4 a všechny body B_i tak „leží“ na jedné přímce.

Abychom vyhověli podmínkám zadání, stačí najít vhodné zobrazení, které „bod z nekonečna“ zobrazí na konkrétní bod (a zachová všechny ostatní potřebné vlastnosti, tj. zobrazí přímky na přímky). Takovým zobrazením je středové promítání (obr. 50). Uvažujme kartézskou soustavu



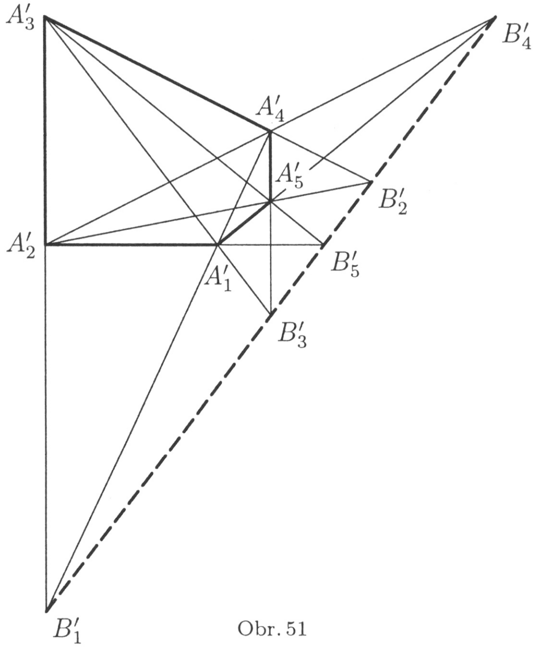
Obr. 50

souřadnic v prostoru. Pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5 = \mathsf{U}$ vložme do roviny Oyz s bodem $A_2 = O$ v počátku a s body A_1, A_3 postupně na kladných poloosách z, y. Zvolme jako střed promítání například bod $P[2, 0, -1]$. Každá přímka PA_i protne rovinu Oxy v bodě, který označíme A_i'. Dostaneme tak pětiúhelník $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5' = \mathsf{U}'$. Přímo z vlastností použitého zobrazení vyplývá, že U′ splňuje podmínky zadání. Každá přímka rovnoběžná s úhlopříčkou A_2A_4 se totiž promítne do přímky jdoucí bodem $B[2,1,0]$, který je proto i průsečíkem přímek $A_1'A_5'$ a $A_2'A_4'$.

O tom se můžeme přesvědčit i výpočtem. Snadno totiž zjistíme, že v rovině Oxy mají jednotlivé body souřadnice

$$A_1' = \left[3-\sqrt{5},0\right], \quad A_2' = [0,0], \quad A_3' = [1,0],$$
$$A_4' = \left[1,\tfrac{1}{2}\right], \quad A_5' = \left[1,\tfrac{3-\sqrt{5}}{4}\right]$$

a následně ověřit, že příslušné body B_1', B_2', B_3', B_4', B_5' leží v přímce (obr. 51).



Obr. 51

Poznámka. Úloha se dá řešit i bez konstruování pětiúhelníku, v němž odpovídající čtyři z bodů B_i leží v přímce. Za promítaný útvar U stačí vzít pravidelný pětiúhelník. Ten má totiž všechny dvojice přímek A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ rovnoběžné; po vhodném promítnutí budou tedy průsečíky B_i' ležet v množině, která v daném promítání nemá vzor. Takovou množinou je však přímka.

47. mezinárodní matematická olympiáda

47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

47. mezinárodní matematická olympiáda se uskutečnila 6.–18. července 2006 ve slovinském hlavním městě Ljubljani. Slovinsko, které má zhruba 2 miliony obyvatel, se tak stalo dosud nejmenší zemí, v níž se tato významná celosvětová soutěž nejlepších středoškolských matematiků uskutečnila. Letos se soutěže zúčastnilo celkem 498 soutěžících z 90 zemí světa.

České reprezentační družstvo pro 47. MMO bylo již tradičně sestaveno na základě výsledků III. (ústředního) kola 55. ročníku české MO v kategorii A a dále na základě výsledků výběrového soustředění, které se uskutečnilo v polovině dubna v Kostelci nad Černými lesy. Dlužno zmínit, že výběr českého družstva pro letošní MMO byl podstatným způsobem ovlivněn skutečností, že se termíny MMO a MFO překrývaly. Tři z vítězů ústředního kola MO v kategorii A dali přednost atraktivnímu prostředí jihoasijského Singapuru, kde se MFO konala, a navíc absolutní vítěz III. kola překročil povolenou věkovou hranici pro účast na MMO. Na výběrové soustředění před 47. MMO byli proto kromě zbývajících šesti vítězů 55. ročníku MO v kategorii A přizváni také dva nejlepší úspěšní řešitelé III. kola.

Právo reprezentovat Českou republiku na 47. MMO ve Slovinsku si nakonec vybojovala následující šestice našich středoškoláků: *Jaroslav Hančl* z Gymnázia M. Koperníka v Bílovci, *Zbyněk Konečný*, *Jakub Opršal*, *Vojtěch Říha* a *Jan Uhlík* z Gymnázia v Brně na tř. Kpt. Jaroše a *Pavel Šalom* z Gymnázia v Rožnově pod Radhoštěm. Vedoucím české delegace a zástupcem v jury MMO byl RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., z Přírodovědecké fakuly UP v Olomouci. Jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím českého družstva byl RNDr. *Jaroslav Zhouf*, Ph.D., z Pedagogické fakulty UK v Praze.

ÚK MO a vedení českého družstva si na tomto místě dovolují upřímně poděkovat přerovské akciové společnosti *Precheza* za nezištnou pomoc při vybavení celého reprezentačního týmu jednotným oblečením.

Oficiální zahájení soutěže se uskutečnilo 11. července v kongresovém sále hotelu Union v Ljubljani (v předvečer prvního soutěžního dne). Následující dva dny byly soutěžícím předloženy dvě trojice úloh, které z došlých návrhů vybrala mezinárodní jury na svém jednání ve slovinském přímořském letovisku *Portorož* před zahájením soutěže. Na řešení každé trojice úloh měli žáci jako obvykle 4,5 hodiny čistého času a za každou úlohu měli možnost získat maximálně 7 bodů. Po koordinaci žákovských řešení, která proběhla následující dva dny ihned po soutěži, stanovila mezinárodní jury bodové hranice pro zisk medailí: 15–18 bodů pro bronzové medaile, 19–27 bodů pro stříbrné medaile a 28–42 bodů pro zlaté medaile. Maximálního bodového zisku (42 body) dosáhli přitom pouze tři soutěžící: *Zhiyu Liu* (Čína), *Jurij Borejko* (Moldavsko) a *Alexander Magazinov* (Rusko).

Výsledky našich jsou uvedeny v následující tabulce:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
161.–188.	Zbyněk Konečný	7	1	0	7	1	0	16	III.
161.–188.	Pavel Šalom	7	1	0	7	1	0	16	III.
189.–253.	Jaroslav Hančl	7	1	0	7	0	0	15	III.
319.–334.	Vojtěch Říha	7	1	0	3	0	0	11	HM
335.–363.	Jakub Opršal	7	1	0	2	0	0	10	HM
364.–387.	Jan Uhlík	7	0	1	1	0	0	9	HM
	Celkem	42	5	1	27	2	0	77	

Pro srovnání uveďme i výsledky slovenských reprezentantů, kteří si vedli nesrovnatelně lépe (zejména stojí za pozornost vynikající výsledek Ondreje Budáče):

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
16.–20.	Ondrej Budáč	7	7	1	7	7	1	30	I.
98.–108.	Samuel Hapák	6	7	0	7	1	0	21	II.
109.–116.	Jaroslav Knebl	7	5	1	7	0	0	20	II.
150.–160.	Ján Mikuláš	6	1	0	7	3	0	17	III.
189.–253.	István Estélyi	7	1	0	7	0	0	15	III.
189.–253.	Michal Takács	7	1	0	6	1	0	15	III.
	Celkem	44	22	2	41	12	1	118	

Naše družstvo dosáhlo v letošním roce jen průměrného výsledku. Tři naši soutěžící však v silné konkurenci získali bronzové medaile — *Zbyněk Konečný* a *Pavel Šalom* (oba 16 bodů) a *Jaroslav Hančl* (15 bodů).

Zbývající tři naši reprezentati přivezli domů čestná uznání za bezchybné vyřešení jedné (u všech tří našich soutěžících první) soutěžní úlohy. Umístění českého družstva v neoficiálním pořadí zemí však nelze považovat za lichotivé. Celkový zisk 77 bodů nás po loňském vynikajícím výsledku, kdy české družstvo skončilo mezi nejlepšími dvaceti zeměmi, odsunul až do středu tabulky:

	I	II	III	body		I	II	III	body
ČLR	6	0	0	214	Mongolsko	0	0	2	80
Rusko	3	3	0	174	Španělsko	0	1	2	80
Korea	4	2	0	170	Portugalsko	0	0	3	78
Německo	4	0	2	157	Ázerbájdžán	0	1	1	77
USA	2	4	0	154	*Česká republika*	0	0	3	77
Rumunsko	3	1	2	152	Albánie	0	1	1	76
Japonsko	2	3	1	146	Kolumbie	0	0	2	76
Írán	3	3	0	145	Belgie	0	0	1	75
Moldavsko	2	1	3	140	Lotyšsko	0	0	3	75
Tchaj-wan	1	5	0	136	Srí Lanka (5)	0	0	3	71
Polsko	1	2	3	133	Řecko	0	0	2	69
Itálie	2	2	0	132	Uzbekistán	0	0	2	68
Vietnam	2	2	2	131	Nový Zéland	0	0	2	66
Hongkong	1	3	2	129	Island	0	0	1	63
Kanada	0	5	1	123	Macao	0	0	2	63
Thajsko	1	3	2	123	Turkmenistán (5)	0	1	1	59
Maďarsko	0	5	1	122	JAR	0	0	0	57
Slovensko	1	2	3	118	Makedonie	0	0	1	57
Turecko	0	4	1	117	Nizozemsko	0	0	0	57
Velká Británie	0	4	1	117	Maroko	0	0	0	55
Bulharsko	0	4	1	116	Norsko	0	0	1	52
Ukrajina	1	2	2	114	Irsko	0	0	0	49
Bělorusko	0	3	2	111	Paraguay (4)	0	1	0	47
Mexiko	1	2	1	110	Dánsko	0	0	0	45
Argentina	0	2	2	109	Ekvádor	0	0	1	40
Izrael	0	3	1	109	Malajsie	0	0	1	40
Austrálie	0	3	2	108	Tádžikistán	0	0	0	35
Singapur	0	2	3	100	Trinidad a Tobago	0	0	0	34
Francie	1	0	3	99	Venezuela (4)	0	0	0	34
Brazílie	0	0	6	96	Panama (4)	0	0	0	33
Kazachstán	0	1	4	95	Pákistán (5)	0	0	0	32
Švýcarsko	1	1	0	95	Kirgizie	0	0	0	31
Gruzie	0	1	3	94	Salvádor (3)	0	0	0	27
Litva	0	1	2	94	Bangladéš (4)	0	0	0	22
Indie	0	0	5	92	Kypr	0	0	0	19
Arménie	0	1	1	90	Chorvatsko (2)	0	0	0	13
Slovinsko	0	1	3	90	Lucembursko (2)	0	0	0	12
Srbsko a Černá Hora	0	0	5	88	Uruguay (2)	0	0	0	12
Finsko	0	0	4	86	Nigérie	0	0	0	11
Kostarika	0	1	2	86	Portoriko	0	0	0	11
Peru	0	1	1	85	Bolívie (2)	0	0	0	5
Bosna a Hercegovina	0	1	2	84	Kuvajt (4)	0	0	0	5
Rakousko	0	0	3	83	Saudská Arábie (4)	0	0	0	3
Švédsko	0	0	3	82	Lichtenštejnsko (1)	0	0	0	2
Estonsko	0	0	2	80	Mozambik (3)	0	0	0	0

Pro účastníky 47. MMO připravili organizátoři hodnotný doprovodný program. V rámci jednodenního výletu navštívili soutěžící slovinská přímořská letoviska *Portorož* a *Piran*. Během zpáteční cesty do Ljubljaně si prohlédli světoznámé aragonitové jeskyně *Postojna*, které jsou veřejnosti přístupné od roku 1818, a blízký *Podjamský hrad*. Na závěr pobytu ve Slovinsku absolvovali všichni účastníci 47. MMO společný jednodenní výlet k *Bledskému jezeru* a do oblasti *Julských Alp*. Dopolední program byl spojen s prohlídkou *Bledského hradu*, který se tyčí přímo nad jezerem, a krátkou procházkou kolem tohoto jezera. Odpoledne pak strávili všichni účastníci MMO ve známém alpském středisku *Kranjska Gora* a jeho okolí. Během cesty bylo mj. možno spatřit také vrcholky dvou nejvyšších hor Julských Alp, kterými jsou *Triglav* a *Škrlatica*.

Slavnostní vyhlášení výsledků 47. MMO se konalo 17. července v Paláci kultury v Ljubljani (Cankarjev dom) za účasti Dr. *Janeze Potočnika*, evropského komisaře pro vědu a výzkum. Závěrečného ceremoniálu se zúčastnili také přední představitelé společenského života ve Slovinsku v čele s Dr. *Milanem Zverem*, ministrem školství a sportu Slovinska.

Hostitelskými zeměmi příštích olympiád budou Vietnam a Španělsko.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a P jeho vnitřní bod, pro který platí

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Dokažte, že $|AP| \geqq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$.
(*Korea*)

2. Nechť P je pravidelný 2 006úhelník. Jeho úhlopříčka je *lichá*, jestliže její koncové body dělí hranici mnohoúhelníku P na dvě části, z nichž každá je tvořena lichým počtem jeho stran. Každá strana mnohoúhelníku P je rovněž *lichá*.

Předpokládejme, že mnohoúhelník P je rozdělen na trojúhelníky 2 003 úhlopříčkami, z nichž žádné dvě se uvnitř P neprotínají. Určete, jaký je největší možný počet rovnoramenných trojúhelníků, které mají v uvažovaném rozdělení mnohoúhelníku P dvě liché strany. (*Srbsko*)

3. Určete nejmenší reálné číslo M takové, že nerovnost

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leqq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

platí pro všechna reálná čísla a, b, c. (*Irsko*)

4. Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, pro něž platí

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

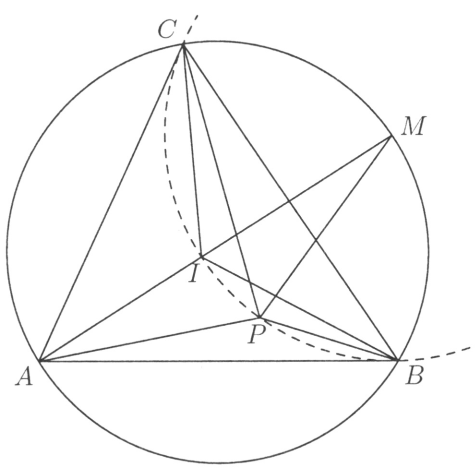
(*USA*)

5. Nechť P je mnohočlen stupně $n > 1$ s celočíselnými koficienty a k nechť je přirozené číslo. Uvažujme mnohočlen $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kde P je v zápise použito k-krát. Dokažte, že existuje nejvýše n celých čísel t, pro něž platí $Q(t) = t$. (*Rumunsko*)

6. Každé straně a konvexního mnohoúhelníku P přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který celý leží v P a jehož jedna strana je a. Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku P není menší než dvojnásobek obsahu mnohoúhelníku P. (*Srbsko*)

Řešení soutěžních úloh

1. Označme velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C uvažovaného trojúhelníku po řadě α, β, γ. Protože součet velikostí všech čtyř úhlů v dané rovnosti je $\beta + \gamma$, musí platit $|\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, takže $|\sphericalangle BPC| = 180° - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90° + \frac{1}{2}\alpha$. Jak se snadno přesvědčíme, stejnou velikost má i úhel BIC (obr. 52). Protože P a I jsou vnitřní body trojúhelníku ABC (leží v polorovině BCA), leží body B, C, I a P na téže kružnici. Středem této kružnice je střed M toho oblouku BC kruž-



Obr. 52

nice opsané trojúhelníku ABC, který neobsahuje vrchol A (to je známé tvrzení, které snadno ověříme dopočítáním úhlů v [rovnoramenném] trojúhelníku CIM). Přitom bodem M prochází i polopřímka AI, neboť je to osa vnitřního úhlu při vrcholu A.

Tím je nerovnost $|AP| \geqq |AI|$ v podstatě dokázána, protože bod I má ze všech bodů kružnice opsané trojúhelníku IBC od bodu A nejkratší vzdálenost. Bezprostředně to plyne z trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku APM:

$$|AP| + |PM| \geqq |AM| = |AI| + |IM| = |AI| + |PM|.$$

Je tedy $|AP| \geqq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když je P bodem úsečky AM, tj. právě když $P = I$.

2. (Podle *Ondreje Budáče*, Slovensko.) Označme rovnoramenný trojúhelník jako *lichý*, pokud má (právě) dvě strany liché. (Je jasné, že takový rovnoramenný trojúhelník má lichá ramena a „sudou" základnu.)

Rozeberme nejprve speciální případ. Místo všech 2 006 vrcholů mnohoúhelníku P budeme uvažovat jen takovou část jeho hranice s n vrcholy ($n \geqq 2$), že krajní body příslušného oblouku opsané kružnice svírají se středem mnohoúhelníku P úhel nejvýše $180°$ (tj. $n \leqq 1\,004$). Těchto n vrcholů tvoří mnohoúhelník X. Označme $f(n)$ maximální možný počet lichých trojúhelníků, které mohou vzniknout popsaným rozdělením X neprotínajícími se úhlopříčkami na trojúhelníky. Snadno ověříme, že $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 1$, $f(5) = 2$, ... Dokážeme matematickou indukcí, že

$$f(n) \leqq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

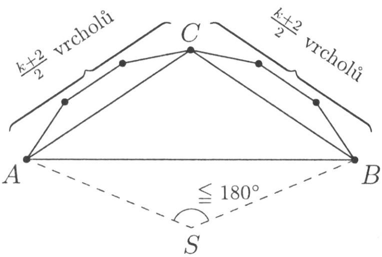
První indukční krok jsme už učinili. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $n \leqq k$, a uvažujme oblouk obsahující $n = k+1$ vrcholů. Krajní body tohoto oblouku označme A a B. Předpokládejme, že mnohoúhelník X je rozdělen úhlopříčkami na trojúhelníky s maximálním možným počtem lichých trojúhelníků. Úsečka AB je stranou nějakého trojúhelníku ABC v tomto rozdělení.

Je-li trojúhelník ABC lichý, je AB vzhledem k podmínce $n \leqq 1\,004$ nutně jeho základna a BC, CA jeho lichá ramena, takže oblouk AB se skládá ze dvou stejných oblouků lichých délek (obr. 53). Proto $k \equiv 2$

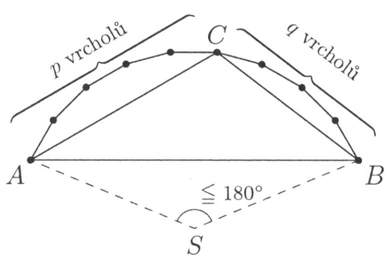
(mod 4). Z indukčního předpokladu tak dostáváme

$$f(k+1) \leqq 1 + 2f\Big(\frac{k+2}{2}\Big) \leqq 1 + 2\Big\lfloor \frac{\frac{1}{2}(k+2)-1}{2} \Big\rfloor =$$
$$= 1 + 2\Big\lfloor \frac{k}{4} \Big\rfloor = 1 + 2 \cdot \frac{k-2}{4} = \frac{k}{2} = \Big\lfloor \frac{(k+1)-1}{2} \Big\rfloor,$$

tvrzení tedy platí i pro $n = k+1$.



Obr. 53



Obr. 54

Pokud trojúhelník ABC není lichý, máme oblouky AC, CB s počty vrcholů p, q, přičemž $p+q = k+2$, $p, q \geqq 2$ (obr. 54). Je tudíž

$$f(k+1) \leqq f(p) + f(q) = f(p) + f(k+2-p) \leqq$$
$$\leqq \Big\lfloor \frac{p-1}{2} \Big\rfloor + \Big\lfloor \frac{k+2-p-1}{2} \Big\rfloor \leqq$$
$$\leqq \Big\lfloor \frac{p-1}{2} + \frac{k+2-p-1}{2} \Big\rfloor = \Big\lfloor \frac{(k+1)-1}{2} \Big\rfloor$$

(využili jsme známou nerovnost

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqq \lfloor x + y \rfloor, \tag{1}$$

která platí pro libovolná kladná čísla x, y). I v tomto případě jsme tedy tvrzení pro $n = k+1$ dokázali. Tím je důkaz indukcí ukončen.

Vraťme se teď k původní úloze. V rozdělení mnohoúhelníku P na trojúhelníky určitě existuje trojúhelník ABC, který obsahuje (uvnitř či na hranici) jeho střed S. Oblouky AB, BC, CA obsahují p, q, r vrcholů, přičemž $p, q, r \leqq 1\,004$ a $p+q+r = 2\,006+3 = 2\,009$. V případě, že ABC není lichý, existuje v rozdělení nejvýše

$$f(p) + f(q) + f(r) \leqq \Big\lfloor \frac{p-1}{2} \Big\rfloor + \Big\lfloor \frac{q-1}{2} \Big\rfloor + \Big\lfloor \frac{r-1}{2} \Big\rfloor \leqq$$
$$\leqq \Big\lfloor \frac{p-1+q-1+r-1}{2} \Big\rfloor = 1\,003$$

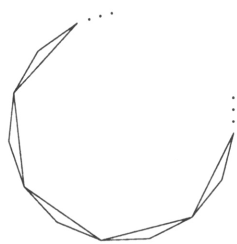
lichých trojúhelníků (opět využíváme nerovnost (1)).

Je-li naopak ABC lichý, jsou právě dvě z čísel p, q, r sudá, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou to p a q. Potom je v rozdělení nejvýše

$$1 + f(p) + f(q) + f(r) \leqq 1 + \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{q-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor =$$
$$\leqq 1 + \frac{p-2+q-2+r-1}{2} = 1\,003$$

lichých trojúhelníků.

Ukázali jsme tedy, že maximální možný počet lichých trojúhelníků je 1 003. Tato hodnota sa dá dosáhnout, jak ukazuje obr. 55 (po obvodě pravidelného 2 006úhelníku „odřežeme" 1 003 rovnoramenných trojúhelníčků s rameny tvořenými sousedními stranami mnohoúhelníku a zbytek rozdělíme libovolně).



Obr. 55

Jiné řešení. Podobně jako v předchozím řešení rovnoramenný trojúhelník s dvěma lichými stranami v rozdělení mnohoúhelníku P jeho úhlopříčkami nazveme *lichý*.

Nechť ABC je lichý trojúhelník s lichými stranami AB a BC. To znamená, že se jak mezi vrcholy A a B, tak i mezi vrcholy B a C nachází lichý počet stran mnohoúhelníku P. Řekneme, že tyto strany *patří* lichému trojúhelníku ABC.

Aspoň jedna strana v každé z těchto dvou skupin nepatří žádnému jinému lichému trojúhelníku, jehož vrcholy leží mezi vrcholy A a B, resp. B a C. Každý takový lichý trojúhelník má totiž dvě shodné strany, takže dohromady existuje sudý počet stran, které mu patří. Vyloučíme-li všechny strany patřící lichým trojúhelníkům v této části, musí zůstat aspoň jedna strana, která nepatří žádnému z nich. Přiřaďme tyto dvě strany (jednu v každé z obou skupin) trojúhelníku ABC.

Každému lichému trojúhelníku jsme takto přiřadili dvojici stran, přičemž žádné dva trojúhelníky nemají přiřazenu stejnou stranu. Protože takových dvojic můžeme vytvořit nejvýše 1 003, je to zároveň maximální možný počet lichých trojúhelníků. Tento počet můžeme dosáhnout, jak jsme už ukázali v prvním řešeni.

3. Uvažujme kubický mnohočlen

$$P(t) = tb(t^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ct(c^2 - t^2).$$

Snadno nahlédneme, že $P(b) = P(c) = P(-b-c) = 0$, proto platí

$$P(t) = (b-c)(t-b)(t-c)(t+b+c),$$

neboť koeficient při t^3 je $b-c$. Levou stranu dokazované nerovnosti lze tedy upravit na tvar

$$\begin{aligned}|ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2)| &= |P(a)| = \\ &= |(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)|.\end{aligned}$$

Daná úloha je tak převedena na problém nalézt nejmenší reálné číslo M, pro něž platí nerovnost

$$|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)| \leqq M(a^2+b^2+c^2)^2. \tag{1}$$

Obě strany vztahu (1) jsou symetrické výrazy v proměnných a, b, c. Bez újmy na obecnosti lze proto předpokládat, že $a \leqq b \leqq c$. Na základě tohoto předpokladu a užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dostáváme

$$|(a-b)(b-c)| = (b-a)(c-b) \leqq \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2 = \frac{(c-a)^2}{4}, \tag{2}$$

kde rovnost nastane, právě když $b-a = c-b$, tj. když $2b = a+c$. Dále platí

$$\frac{(c-a)^2}{4} = \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2 \leqq \frac{(b-a)^2+(c-b)^2}{2}.$$

Odtud snadnou úpravou dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$3(c-a)^2 \leqq 2[(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2], \tag{3}$$

v níž také nastane rovnost, kdykoliv $2b = a + c$. Ze vztahů (2) a (3) pak plyne

$$\begin{aligned}
&|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leqq \\
&\leqq \frac{1}{4}\,|(c-a)^2(a-c)(a+b+c)| = \frac{1}{4}\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2} \leqq \\
&\leqq \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2]}{3}\right)^3\cdot(a+b+c)^2} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3\cdot(a+b+c)^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem konečně dostaneme nerovnost požadovaného tvaru:

$$\begin{aligned}
&|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leqq \\
&\leqq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2}{4}\right)^2 = \\
&= \frac{9\sqrt{2}}{32}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Nerovnost (1) tedy platí pro $M = \frac{9}{32}\sqrt{2}$, přičemž rovnost nastane, právě když $2b = a + c$ a současně

$$\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3} = (a+b+c)^2.$$

Dosazením $b = \frac{1}{2}(a+c)$ do poslední rovnosti dostaneme

$$2(c-a)^2 = 9(a+c)^2.$$

Rovnost ve (4) tudíž nastane, právě když současně platí

$$2b = a + c \qquad \text{a} \qquad (c-a)^2 = 18b^2.$$

Volbou $b = 1$ dostaneme $a = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ a $c = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Je tedy $M = \frac{9}{32}\sqrt{2}$ skutečně nejmenší reálné číslo, pro něž je daná nerovnost splněna. Rovnost pak nastává pro trojice $(a,b,c) = \left(t, t - \frac{3}{2}t\sqrt{2}, t + \frac{3}{2}t\sqrt{2}\right)$ a jejich permutace, přičemž t je libovolné reálné číslo.

4. Pokud (x, y) je dvojice celých čísel, která vyhovuje dané rovnici, je jejím řešením také dvojice $(x, -y)$. Stačí se tedy omezit na $y \geqq 0$. Protože levá strana je větší než 1, stačí uvažovat jen $y \geqq 2$. Dále pro celočíselné hodnoty x rozlišíme tři případy.

Je-li x záporné celé číslo, platí

$$1 < 1 + 2^x + 2^{2x+1} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$

avšak pro žádné přirozené číslo y neplatí $1 < y^2 < 2$. Neexistuje tedy žádné řešení dané rovnice, pro něž je x záporné celé číslo.

Je-li $x = 0$, má daná rovnice právě dvě řešení v oboru celých čísel. Jsou jimi dvojice $(0, 2)$ a $(0, -2)$.

Je-li x přirozené číslo, upravíme danou rovnici na tvar

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (y - 1)(y + 1). \tag{1}$$

Odtud plyne, že y je liché číslo. Zřejmě právě jedno z dvou po sobě jdoucích sudých čísel $y - 1$, $y + 1$ je dělitelné čtyřmi. Součin obou čísel na pravé straně (1) je tedy dělitelný aspoň osmi, a proto je $x \geqq 3$. Z rovnosti (1) plyne, že buď číslo $y - 1$ je dělitelné 2^{x-1}, avšak není dělitelné 2^x, nebo číslo $y + 1$ je dělitelné 2^{x-1}, ale není už dělitelné 2^x. Platí tedy $y = 2^{x-1}m + \varepsilon$, kde m je nezáporné liché číslo a $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Dosazením za y do (1) dostaneme

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (2^{x-1}m + \varepsilon)^2 - 1 = 2^{2x-2}m^2 + 2^x m\varepsilon.$$

Odtud plyne

$$1 + 2^{x+1} = 2^{x-2}m^2 + m\varepsilon,$$

neboli

$$1 - m\varepsilon = 2^{x-2}(m^2 - 8). \tag{2}$$

Pro $\varepsilon = 1$ musí být $m^2 - 8 \leqq 0$. Tuto nerovnost splňuje jediné nezáporné liché číslo $m = 1$, po dosazení do (2) však vyjde $0 = -7 \cdot 2^{x-2}$ a tomu nevyhovuje žádné x.

Pro $\varepsilon = -1$ máme $1 + m = 2^{x-2}(m^2 - 8) \geqq 2(m^2 - 8)$ (neboť $x \geqq 3$). Odtud po snadné úpravě dostaneme kvadratickou nerovnici

$$2m^2 - m - 17 \leqq 0.$$

Této nerovnici vyhovují právě dvě nezáporná lichá čísla, a to $m = 1$ a $m = 3$. Pro první z nich však v (2) dostaneme různá znaménka. Pro $m = 3$ vyjdou $x = 4$ a $y = 23$, která jsou řešením dané rovnice.

Daná rovnice má tedy celkem 4 řešení. Jsou jimi následující dvojice celých čísel: $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(4, 23)$ a $(4, -23)$.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení vyloučíme možnost, že by x bylo záporné, a najdeme dvě řešení $(0, 2)$, $(0, -2)$ pro $x \leqq 2$. Protože levá strana uvažované rovnice je pro $x \geqq 3$ lichá, položme $y = 2k + 1$, kde k je přirozené. Po jednoduché úpravě dostáváme

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = 4k(k + 1).$$

To znamená, že $k/2^{x-2}$ nebo $(k + 1)/2^{x-2}$ musí být celé kladné číslo.

Jestliže je tedy $k = 2^{x-2}a$ pro vhodné přirozené a, dostaneme po dosazení do původní rovnice a po úpravě rovnici $a - 1 + 2^{x-2}(a^2 - 8) = 0$. Ta zřejmě nemá řešení pro žádné přirozené a.

Podobně pro $k = 2^{x-2}a - 1$ vyjde rovnice $a + 1 = 2^{x-2}(a^2 - 8)$, která může mít řešení jedině pro $a \leqq 3$ (pro $a \geqq 4$ je $a^2 - 8 \geqq 4a - 8 > a + 1$). Možnosti $a = 1$ a $a = 2$ snadno vyloučíme a pro $a = 3$ najdeme řešení $x = 4$. Dostáváme tak další dvě řešení původní rovnice: $(4, 23)$ a $(4, -23)$.

Jiné řešení. Jak snadno zjistíme, pro $x \leqq 2$ má daná rovnice jediná dvě řešení $(0, 2)$, $(0, -2)$. Předpokládejme tedy, že $x \geqq 3$.

Z dané rovnice zřejmě plyne

$$2^{2x+1} = \left(\sqrt{2} \cdot 2^x\right)^2 < y^2 < \left(1 + \sqrt{2} \cdot 2^x\right)^2,$$

takže $y = \left\lfloor \sqrt{2} \cdot 2^x \right\rfloor + 1$. Protože největší společný dělitel čísel $y - 1$, $y + 1$ je 2, vidíme z již dříve odvozeného vztahu (1), že právě jedno z čísel $y - 1$, $y + 1$ je dělitelné mocninou 2^{x-1}. To znamená, že v dvojkové soustavě má číslo $y - 1$ zápis končící $x - 1$ nulami nebo $x - 2$ jednotkami a nulou (je $y - 1 = y + 1 - (10)_2$). Protože $\sqrt{2}$ má v dvojkové soustavě rozvoj $1{,}01101\ldots$ a násobení mocninou 2^x jen posouvá „dvojkovou" čárku o x míst doprava, vidíme, že celá část čísla $\sqrt{2} \cdot 2^x$ může mít požadovaný zápis jen pro $x \leqq 4$.

5. Pro libovolná celá čísla a, b a libovolný mnohočlen P s celočíselnými koeficienty platí $a - b \mid P(a) - P(b)$. Jsou-li u, v celá čísla, pro něž platí $Q(u) = u$ a $Q(v) = v$ (tzv. *pevné body* mnohočlenu Q), a použijeme-li pro ně výše uvedený vztah k-krát, dostaneme

$$u - v \mid P(u) - P(v) \mid P(P(u)) - P(P(v)) \mid \ldots \mid Q(u) - Q(v) = u - v.$$

Pro libovolné dva celočíselné pevné body u, v mnohočlenu Q proto platí

$$|u - v| = |P(u) - P(v)|. \tag{1}$$

Jsou-li t, u, v tři navzájem různé celočíselné pevné body mnohočlenu Q, přičemž $t > u > v$, platí právě jedna z postupných nerovností

$$P(t) > P(u) > P(v) \quad \text{nebo} \quad P(t) < P(u) < P(v). \tag{2}$$

Každé jiné uspořádání hodnot $P(t)$, $P(u)$ a $P(v)$ vede totiž s ohledem na (1) ke sporu.

Připusťme, že mnohočlen Q má $n + 1$ celočíselných pevných bodů $t_0, t_1, \ldots, t_n$, pro něž platí $t_0 > t_1 > \ldots > t_n$. Podle (2) je pak nutně buď

$$P(t_0) > P(t_1) > \ldots > P(t_n), \quad \text{nebo} \quad P(t_0) < P(t_1) < \ldots < P(t_n).$$

Podle (1) platí pro $i = 1, 2, \ldots, n$ rovnost $|t_0 - t_i| = |P(t_0) - P(t_i)|$, což v prvním případě vede k rovnosti $t_0 - t_i = P(t_0) - P(t_i)$. Uvažme nyní mnohočlen

$$R(x) = P(x) - P(t_0) + t_0 - x,$$

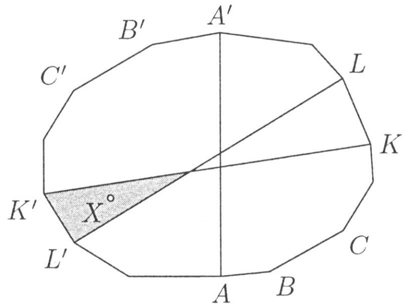
který je stejně jako P stupně n, přitom však má $n + 1$ reálných kořenů $t_0, t_1, \ldots, t_n$. To je spor. Zcela analogickým způsobem dojdeme ke sporu i v druhém případě.

Mnohočlen Q má tedy nejvýše n celočíselných pevných bodů. Tím je důkaz hotov.

6. Nejdřív dokážeme, že v libovolném konvexním $2n$-úhelníku s obsahem S existuje strana AB a vrchol V tak, že obsah trojúhelníku ABV je aspoň S/n.

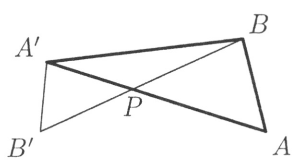
Úhlopříčky, jež rozdělují $2n$-úhelník na dvě části se stejným počtem stran, budeme nazývat *hlavní*. Pro libovolnou stranu $a = AB$ uvažovaného $2n$-úhelníku označme A', B' příslušné „protější" vrcholy obou hlavních úhlopříček AA', BB' a P jejich průsečík. Sjednocení všech $2n$ takových trojúhelníků ABP, $A'B'P$, jež dostaneme pro jednotlivé strany, pokrývá celý $2n$-úhelník.

Je-li totiž X libovolný vnitřní bod $2n$-úhelníku, který neleží na žádné hlavní úhlopříčce (body ležící na hranici a na hlavních úhlopříčkách popsaným sjednocením zřejmě pokryté jsou), uvažujme posloupnost (orientovaných) hlavních úhlopříček $AA', BB', CC', \ldots$, přičemž $B, C, \ldots$ jsou po sobě jdoucí vrcholy ležící v opačné polorovině určené přímkou AA' než bod X. Bez újmy na obecnosti nechť bod X leží „nalevo“ od AA'. Pak se v této posloupnosti na místě s pořadovým číslem $n+1$ nachází úhlopříčka $A'A$, která má bod X „napravo“. Proto v posloupnosti $A, B, C, \ldots, A'$ existují po sobě jdoucí vrcholy K a L takové, že X leží „nalevo“ od KK', ale „napravo“ od LL'. To však znamená, že X leží v trojúhelníku příslušném straně $K'L'$ (obr. 56). Trojúhelníky příslušné jednotlivým stranám tedy skutečně pokrývají celý $2n$-úhelník. Součet jejich obsahů je proto aspoň S.



Obr. 56

Z předešlého vyplývá, že existují dvě protilehlé strany $a = AB$, $a' = A'B'$ (přičemž AA', BB' jsou hlavní úhlopříčky protínající se v bodě P) takové, že součet obsahů jim příslušných trojúhelníků $S(ABP) + S(A'B'P)$ je aspoň S/n. Bez újmy na obecnosti nechť $|PB| \geqq |PB'|$. Potom (obr. 57)



Obr. 57

$$S(ABA') = S(ABP) + S(PBA') \geqq$$
$$\geqq S(ABP) + S(PB'A') = S(ABP) + S(A'B'P) \geqq S/n.$$

Tím je úvodní tvrzení dokázáno.

Uvažujme nyní libovolný konvexní mnohoúhelník P s obsahem S, který má m stran $a_1, \ldots, a_m$, a pro každé i ($1 \leqq i \leqq m$) označme S_i obsah největšího trojúhelníku, který má stranu a_i a je celý obsažen v P. Předpokládejme naopak, že tvrzení ze zadání neplatí, tj. že

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i}{S} < 2.$$

Potom existují racionální čísla $q_1, \ldots, q_m$ taková, že

$$\sum_{i=1}^{m} q_i = 2 \qquad \text{a} \qquad q_i > \frac{S_i}{S} \quad \text{pro každé } i;$$

stačí například pro $i < m$ vzít za q_i libovolné racionální číslo z intervalu

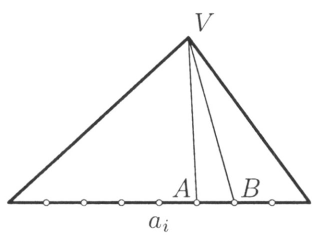
$$\frac{S_i}{S} < q_i < \frac{S_i}{S} + \frac{1}{m-1}\Bigl(2 - \sum \frac{S_i}{S}\Bigr)$$

a položit $q_m = 2 - (q_1 + \ldots + q_{m-1})$.

Zapišme zlomky $q_1, \ldots, q_m$ ve tvaru $q_i = k_i/n$, kde n je jejich společný jmenovatel. Máme tedy $\sum k_i = 2n$. Rozdělme každou stranu a_i mnohoúhelníku P na k_i shodných úseků, vytvoříme tak konvexní $2n$-úhelník s obsahem S (některé jeho vnitřní úhly mohou mít velikost 180°). Podle tvrzení, které jsme dokázali na začátku, existuje v tomto novém mnohoúhelníku strana AB a vrchol V, pro něž $S(ABV) \geqq S/n$. Je-li AB částí strany a_i mnohoúhelníku P (obr. 58), pak pro obsah trojúhelníku T se stranou a_i a vrcholem V dostáváme

$$S(\mathsf{T}) = k_i \cdot S(ABV) \geqq k_i \cdot S/n = q_i \cdot S > S_i,$$

což odporuje volbě hodnot S_i. Tím je úloha vyřešena.



Obr. 58

Jiné řešení. Ke každému vrcholu A daného mnohoúhelníku existuje na jeho hranici bod A' tak, že úsečka AA' rozděluje mnohoúhelník na dva mnohoúhelníky stejného obsahu. Přidáme-li všechny tyto body k vrcholům mnohoúhelníku P, dostaneme mnohoúhelník P' se stejným obsahem, jehož některé vnitřní úhly mohou být 180°. Na tvrzení úlohy to nemá vliv (stačí si uvědomit, že pokud je ABV nějaký trojúhelník s maximálním obsahem příslušný straně AB původního mnohoúhelníku P, pak i každý trojúhelník s danými dvěma vrcholy na straně AB bude mít maximální obsah, když jeho třetím vrcholem bude právě vrchol V).

Jsou-li nyní A, B dva sousední vrcholy mnohoúhelníku P' a A', B' příslušné „protější" vrcholy, pro něž úsečky AA' a BB' rozdělují mnohoúhelník P na dva mnohoúhelníky stejného obsahu, a P jejich průsečík, mají trojúhelníky ABP a $A'B'P$ stejný obsah. Platí tedy

$$|PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |PB'|.$$

To ovšem znamená, že je $|PA| \leqq |PA'|$ nebo $|PB| \leqq |PB'|$. V prvním případě $S(ABA') = S(APB) + S(PA'B) \geqq 2S(ABP)$, v druhém $S(ABB') = S(APB) + S(APB') \geqq 2S(ABP)$. V každém případě je tedy maximální obsah trojúhelníku příslušného straně AB roven nejméně dvojnásobku obsahu trojúhelníku ABP. Stejně jako v prvním řešení není těžké ukázat, že všechny takové trojúhelníky ABP pokrývají celý mnohoúhelník $\mathsf{P}' = \mathsf{P}$. Tím je tvrzení dokázáno.

Poznámka. Součet přiřazených obsahů může být *právě* dvojnásobkem obsahu mnohoúhelníku P. Platí to pro všechny středově souměrné mnohoúhelníky. (V takovém případě má střed S mnohoúhelníku tu vlastnost, že maximální obsah přiřazený podle zadání úlohy každé straně AB mnohoúhelníku je vždy dvojnásobkem obsahu trojúhelníku ABS.)

Třináctý ročník Středoevropské olympiády v informatice

Třináctá středoevropská olympiáda v informatice CEOI 2006 se konala v chorvatském Vrsaru na poloostrově Istria ve dnech 1. až 8. července 2006. Vzhledem k tomu, že olympiáda probíhala o prázdninách, bylo možné použít k zahajovacímu a ukončovacímu ceremoniálu, soutěži i schůzkám vedoucích družstev prostory základní školy „Vladimir Nazor". Jednotlivá družstva byla ubytována v apartmánech po celém Vrsaru.

Soutěž probíhá naprosto stejně jako mezinárodní olympiáda v informatice. Soutěží se ve dvou dnech, v každém z nich řeší studenti u počítačů tři náročné příklady, svá řešení programují v některém z programovacích jazyků Pascal, C nebo C++. Aby se studenti předem seznámili s prostředím, probíhá před soutěží samotnou zkušební předkolo, ve kterém mohou účastníci vyřešit dvě primitivní úlohy. Protože je středoevropská olympiáda v informatice pro své obtížné a zajímavé úlohy známa i mezi řešiteli mezinárodní olympiády, probíhá současně s klasickou soutěží ještě internetová varianta soutěže pro veřejnost.

Vyhodnocování a testování studentských řešení se na CEOI již několik let provádí stejně jako na IOI automatickým vyhodnocovacím systémem. Ten testuje programy na připravené sadě vstupních dat, všechny prováděné testy mají dobu výpočtu omezenu předem známým časovým a paměťovým limitem. Jednotlivá testovací vstupní data mají navíc různou velikost a složitost, což dohromady umožňuje bodově rozlišit programy podle kvality použitého algoritmu. Za každou úlohu lze získat maximálně 100 bodů, často se používá 20 sad testovacích dat po 5 bodech. U některých úloh lze vyřešit jen část zadání (například při hledání nejkratší cesty stačí nalézt pouze její délku a nevypisovat cestu jako takovou) a získat za takové řešení odpovídající část bodů (v případě zmíněné nejkratší cesty bylo za nalezení její délky 80 % bodů).

Třinácté středoevropské olympiády v informatice se zúčastnilo sedm zemí, každá měla jedno čtyřčlenné družstvo, takže soutěžilo 28 studentů. Pouze pořádající Chorvaté měli v soutěži tři družstva I, II a III, přičemž se ale do výsledného pořadí započítával pouze tým číslo I. Česká republika vyslala do soutěže družstvo ve složení

Miroslav Klimoš, student Gymnázia M. Koperníka v Bílovci,
Martin Křivánek, student Gymnázia Brno, třída Kpt. Jaroše,
Lukáš Lánský, student Gymnázia J. K. Tyla v Hradci Králové,
Roman Smrž, student Gymnázia E. Krásnohorské v Praze.

Naši soutěžící byli vybráni na základě výsledků dosažených v ústředním kole 55. ročníku matematické olympiády — kategorie P (programování). Vedením družstva byli pověřeni *Milan Straka* a *Petr Škoda*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Medaile se na středoevropské olympiádě v informatice se udělují podle stejného klíče, jaký se používá i na mezinárodní olympiádě v informatice. První polovina soutěžících obdrží nějakou medaili. Tato první polovina se rozdělí v poměru 1 : 2 : 3 a tyto skupiny studentů dostanou po řadě zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili. Letos se rozdávalo 14 medailí, z toho 2 zlaté, 5 stříbrných a 7 bronzových. Zlatou medaili získali tentokrát studenti z Polska (1. místo) a pořádajícího Chorvatska (2. místo).

Stejně jako například Slovensko a Maďarsko vysílá i Česká republika na středoevropskou olympiádu spíše studenty mladší, jejichž hlavním cílem je sbírání zkušeností (a jejich uplatnění v příštích letech na mezinárodní olympiádě v informatice). Přesto se českým studentům podařilo získat dvě bronzové medaile (pro porovnání Maďarsko získalo jednu bronzovou a Slovensko žádnou medaili). Miroslav Klimoš skončil navíc hned za poslední stříbrnou příčkou. Výsledky českého družstva:

8.	Miroslav Klimoš	190 bodů	bronz
13.	Roman Smrž	142 body	bronz
24.	Martin Křivánek	46 bodů	–
28.	Lukáš Lánský	4 body	–

18. mezinárodní olympiáda v informatice

Ve dnech 13.–20. 8. 2006 se konala v Mexiku 18. mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2006 (IOI — International Olympiad in Informatics). Soutěž proběhla ve městě Mérida v provincii Yucatán, tedy na stejném místě, kde se o rok dříve konala i mezinárodní matematická olympiáda.

Olympiády se zúčastnilo 284 soutěžících ze 76 zemí celého světa. Každé družstvo je tvořeno nejvýše čtyřmi soutěžícími studenty a je doprovázeno dvěma pedagogickými pracovníky jako vedoucími. Českou republiku letos reprezentovalo družstvo ve složení:

Jan Hrnčíř, absolvent gymnázia F. X. Šaldy v Liberci,
Daniel Marek, absolvent gymnázia Ch. Dopplera v Praze 5,
Josef Pihera, student gymnázia ve Strakonicích,
Michal Vaner, absolvent gymnázia v Turnově.

Naši soutěžící byli vybráni na základě výsledků dosažených v celostátním kole 55. ročníku Matematické olympiády — kategorie P. Jako příprava vybraných reprezentantů na soutěž posloužilo zejména tradiční týdenní česko-polsko-slovenské přípravné soustředění, které se tentokrát konalo v červnu na Slovensku. Vedoucími české delegace byli jmenováni Mgr. *Martin Mareš* a doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc., oba pracovníci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Ubytování všech účastníků bylo zajištěno v několika hotelích nedaleko centra Méridy, ve stejném místě probíhala i všechna jednání spojená s organizací soutěže a přípravou soutěžních úloh. Vlastní soutěž studentů u počítačů byla uspořádána v moderním konferenčním středisku Yucatan SIGLO XXI na severním okraji města.

Soutěž IOI probíhá vždy ve dvou soutěžních dnech, v každém z nich soutěžící řeší po dobu pěti hodin tři zadané úlohy. Každý účastník má pro svoji práci přidělen osobní počítač s nainstalovanými překladači programovacích jazyků Pascal, C a C++ a s interaktivním webovým rozhraním pro komunikaci soutěžícího s řídicím a vyhodnocovacím systémem soutěže. To umožňuje zálohovat data, tisknout výpisy programů, ověřovat správnost chování programu a zejména pak předávat vytvořené programy na vyhodnocení. Všechny soutěžní úlohy jsou algoritmického charakteru a je nutné dovést je až do podoby kompletního odladěného programu, podobně jako je tomu třeba i v praktické části celostátního kola naší Matematické olympiády — kategorie P. Odevzdané programy jsou vždy po skončení soutěžního dne automaticky testovány pomocí předem připravené sady testovacích dat, aby se ověřila jejich správnost. Důležitou součástí těchto testů jsou časové limity. Je pevně stanoveno, jak nejdéle může program počítat pro každá vstupní data. Tímto způsobem se mezi správně fungujícími programy rozliší, na jak dobrém algoritmu je který program založen. Některá vstupní data zadávaná při testování jsou malá, takže výpočet s nimi stihne v časovém limitu i pomalejší algoritmus, naopak jiná vstupní data jsou rozsáhlá a včas je zvládne zpracovat jedině program využívající dostatečně efektivní algoritmus.

Pro všechny účastníky IOI 2006 byl připraven i zajímavý doprovodný program. Ve volném dnu oddělujícím oba soutěžní dny nám organizátoři nabídli celodenní výlet do známé rekreační oblasti Progresso spojený s koupáním v moři a řadou dalších sportovních činností. Po ukončení soutěže jsme na závěr našeho pobytu v Mexiku měli možnost navštívit jedno z archeologických nalezišť se zachovalými památkami staré mayské kultury — asi 120 km vzdálené středisko Chichén Itzá.

Soutěžní úlohy letošního ročníku olympiády byly algoritmicky zajímavé a dobře připravené, jejich náročnost byla vcelku přiměřená této soutěži. Za každou úlohu bylo možné získat maximálně 100 bodů, tj. celkově v soutěži 600 bodů. To se ovšem nikomu ze studentů nepodařilo, celkový vítěz získal 480 bodů. Na základě dosažených výsledků se na IOI udělují mediale tak, že polovina účastníků obdrží některou z medailí, přičemž počet zlatých, stříbrných a bronzových medialí je v rámci možností přibližně v poměru 1 : 2 : 3. Letos bylo uděleno 24 zlatých medailí (soutěžícím, kteří dosáhli alespoň 385 bodů), 51 stříbrných medailí (za zisk alespoň 314 bodů) a 70 bronzových medailí (pro ty, kdo v soutěži získali minimálně 219 bodů).

Reprezentanti ČR si vedli v soutěži dobře, získali jednu stříbrnou a dvě bronzové medaile. Výsledky našich studentů:

57.	Josef Pihera	339 bodů	stříbrná medaile
85.	Daniel Marek	296 bodů	bronzová medaile
144.	Michal Vaner	219 bodů	bronzová medaile
255.	Jan Hrnčíř	41 bodů	

Mezinárodní olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, takže žádné oficiální pořadí národních družstev se v ní nevyhlašuje. Není ani stanoveno, zda by se mělo určovat podle součtu dosažených bodů, součtu umístění nebo třeba podle počtu získaných medailí. Nejúspěšnějšími zeměmi letošního ročníku IOI byly Čína (4 zlaté medaile), Polsko a Rusko (po 3 zlatých medailích), rovněž celkový vítěz IOI byl z Polska. Slovensko získalo na IOI 2006 tři stříbrné medaile.

19. mezinárodní olympiáda v informatice se bude konat v chorvatském Zagrebu.

Texty soutěžních úloh

1. Mayské písmo

Luštění písma starých Mayů se ukázalo být poněkud tvrdším oříškem, než se zprvu zdálo. Po dvou staletích vesměs marného zkoumání teprve posledních 30 let přineslo jakési výsledky.

Mayské písmo je založeno na malých obrázcích neboli *glyfech*, které odpovídají jednotlivým zvukům. Mayská slova se obvykle zapisují několika glyfy poskládanými k sobě.

Jedním z mnoha problémů při čtení mayských nápisů je určit správné pořadí glyfů. Staří písaři se totiž pro vzájemnou polohu glyfů tvořících slovo často nerozhodovali podle nějakých pravidel, ale spíš podle svého uměleckého cítění. I když výslovnost mnohých glyfů je již známa, často nevíme, jak vyslovit jimi zapsané slovo.

Badatelé zrovna v nápisech hledají určité slovo W. Vědí, z jakých je složeno glyfů, ale doposud neobjevili všechny možnosti, jak je k sobě Mayové skládali. A jelikož se doslechli o vašem věhlasu, požádali vás o pomoc. Dostanete od nich g glyfů tvořících slovo W a posloupnost glyfů S; tyto glyfy tvoří právě studovaný nápis (v pořadí, jak jsou namalovány). Pomozte jim spočítat všechny možné výskyty slova W v nápisu S.

Úloha: Napište program, který dostane glyfy slova W a posloupnost glyfů S a vypíše všechny možné výskyty slova W v posloupnosti S, čili všechny posloupnosti g po sobě jdoucích glyfů v posloupnosti S, které jsou permutací glyfů tvořících slovo W.

Omezení: $1 \leqq g \leqq 3\,000$ — počet glyfů slova W,
$g \leqq |S| \leqq 3\,000\,000$, kde $|S|$ je počet glyfů v posloupnosti S.

Vstup: Program bude číst vstupní data ze souboru `writing.in`:

writing.in	*Popis*:
4 11 cAda AbrAcadAbRa	*1. řádek*: obsahuje dvě celá čísla oddělená mezerou: g a $\|S\|$. *2. řádek*: obsahuje g po sobě jdoucích znaků popisujících glyfy slova W. Jsou povoleny znaky `a`–`z` a `A`–`Z`; velká a malá písmena považujeme za různá. *3. řádek*: obsahuje $\|S\|$ po sobě jdoucích znaků popisujících glyfy v posloupnosti S. Opět jsou povoleny znaky `a`–`z` a `A`–`Z` a rozlišuje se velikost písmen.

Výstup: Program zapíše do výstupního souboru `writing.out` následující údaje:

writing.out	*Popis*:
2	*Jediný řádek*: obsahuje počet možných výskytů W v S.

Hodnocení: Část testovacích vstupů (dohromady za 50 bodů) bude splňovat podmínku $g \leqq 10$.

Upozornění pro Pascalisty: Freepascalský typ `string` je implicitně omezen na 255 znaků. Pokud byste chtěli používat delší stringy, připište si těsně za řádek `program` … direktivu `{$H+}`.

2. Pyramida

Poté, co král Jaguár zvítězil ve veliké bitvě, rozhodl se postavit pyramidu, která poslouží nejen jako památník jeho slavného vítězství, ale také coby hrobka vojáků v bitvě padlých. Pyramidu postaví na bojišti. Bojiště má tvar obdélníka, který si můžeme představit jako čtvercovou síť $m \times n$ políček (m sloupců v n řádcích) a jsou v něm četné terénní nerovnosti. Královští stavitelé pro každé políčko sítě změřili jeho výšku.

Základnou pyramidy bude obdélník o velikosti $a \times b$ políček (sloupce × × řádky). Uvnitř bude na úrovni terénu menší obdélníková komora velikosti $c \times d$ políček (opět sloupce × řádky), v níž spočinou těla a zbraně padlých bojovníků.

Jelikož obzvláštní přízni krále se těší celá čísla, bude jak pyramida, tak komora mít půdorys složený z políček zmíněné čtvercové sítě. Zatímco terén políček, na nichž je umístěna pohřební komora, zůstane v původní úrovni, zbývající políčka tvořící základnu pyramidy budou srovnána do stejné výšky přesouváním zeminy z vyšších políček na nižší. Výsledná *výška základny* bude rovna aritmetickému průměru původních výšek všech políček tvořících základnu kromě políček pod komorou.

Stavitelé mohou komoru umístit kdekoliv uvnitř pyramidy, pokud bude ze všech stran obklopena zdmi širokými alespoň 1 políčko.

Pomozte stavitelům vybrat nejlepší umístění pyramidy a pohřební komory. To je takové, při němž bude základna v největší možné výšce. Přitom je nutné dodržet požadované rozměry pyramidy i komory.

Obrázek 59 ukazuje příklad bojiště. Čísla v jednotlivých políčkách udávají jejich výšky. Šedá políčka představují základnu pyramidy, zatímco jimi obklopený bílý obdélník značí možné umístění komory. Na obrázku je jedno z optimálních řešení.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	5	10	3	7	1	2	5
2	6	12	4	4	3	3	1	5
3	2	4	3	1	6	6	19	8
4	1	1	1	3	4	2	4	5
5	6	6	3	3	3	2	2	2

Obr. 59

Úloha: Napište program, který pro dané rozměry bojiště, pyramidy a komory a pro dané výšky všech políček bojiště najde umístění pyramidy na bojišti a komory v pyramidě takové, že výška základny bude největší možná.

Pokud existuje více optimálních řešení, vypište libovolné jedno z nich.

Omezení: $3 \leqq m \leqq 1\,000$, $3 \leqq n \leqq 1\,000$,
$3 \leqq a \leqq m$, $3 \leqq b \leqq n$,
$1 \leqq c \leqq a - 2$, $1 \leqq d \leqq b - 2$.
Všechny výšky jsou celá čísla od 1 do 100.

Vstup: Program bude číst vstupní data ze souboru `pyramid.in`:

`pyramid.in`

```
8 5 5 3 2 1
1 5 10 3 7 1 2 5
6 12 4 4 3 3 1 5
2 4 3 1 6 6 19 8
1 1 1 3 4 2 4 5
6 6 3 3 3 2 2 2
```

Popis:

1. řádek: obsahuje 6 celých čísel oddělených mezerami: m, n, a, b, c, d.

Následujících n řádků: Tyto řádky popisují jednotlivé řádky čtvercové sítě v pořadí od prvního k n-tému. Každý z nich obsahuje m celých čísel oddělených mezerami. Tato čísla popisují výšky políček v příslušném řádku sítě v pořadí od prvního sloupce k m-tému.

Výstup: Program zapíše do výstupního souboru `pyramid.out` následující údaje:

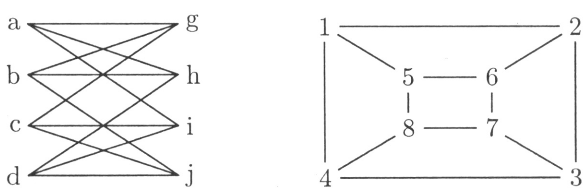
`pyramid.out`	*Popis*:
`4 1`	*1. řádek*: obsahuje dvě celá čísla oddělená mezerou. Tato čísla udávají souřadnice levého horního rohu základny pyramidy (v pořadí sloupec, řádek).
`6 2`	*2. řádek*: obsahuje dvě celá čísla oddělená mezerou. Tato čísla udávají souřadnice levého horního rohu komory (v pořadí sloupec, řádek).

Hodnocení: Část testovacích vstupů (dohromady za 30 bodů) bude splňovat podmínky $3 \leqq m, n \leqq 10$.

3. Zakázaný podgraf

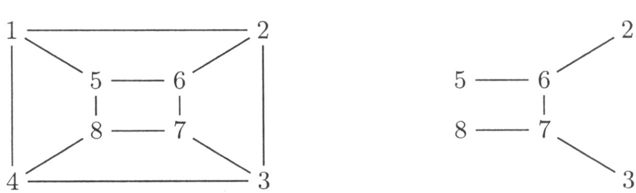
Dva grafy G a H nazveme *isomorfní*, pokud mají stejný počet vrcholů a vrcholům grafu G lze přiřadit navzájem různé vrcholy grafu H tak, aby pro každou dvojici vrcholů v grafu G platilo, že mezi nimi vede hrana právě tehdy, vede-li hrana také mezi jim odpovídající dvojicí vrcholů v grafu H.

Kupříkladu oba grafy na obr. 60 jsou isomorfní, přestože na první pohled je každý úplně jiný. Můžeme totiž jejich vrcholy přiřadit například takto: a–1, b–6, c–8, d–3, g–5, h–2, i–4, j–7.



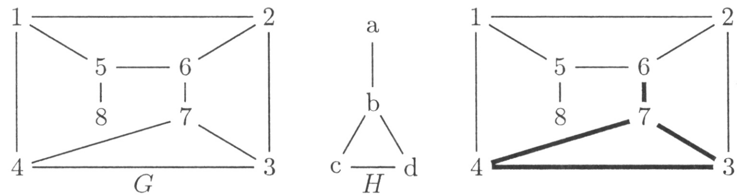
Obr. 60

Podgrafem grafu G nazveme libovolný graf, jehož množiny vrcholů a hran jsou podmnožinami množin vrcholů a hran grafu G. Obr. 61 ukazuje příklad grafu a jeho podgrafu.



Obr. 61

Řekneme, že graf G *obsahuje* graf H, existuje-li v grafu G alespoň jeden podgraf H', který je isomorfní s grafem H (obr. 62).



Obr. 62

Úloha: Pro zadané neorientované grafy G a H najděte podgraf G' grafu G takový, aby G a G' měly stejný počet vrcholů a graf G' neobsahoval graf H.

Podgrafů s žádanými vlastnostmi přirozeně může být mnoho. Úkolem je nalézt jeden z těch, které mají co možná největší počet hran.

Základní algoritmus: Podgrafy neobsahující graf H je možné hledat například následujícím primitivním způsobem: Budeme procházet hrany grafu G v pořadí, v jakém jsou popsány vstupním souborem, a postupně je přidávat do G'. V každém kroku přitom budeme ověřovat, zda H není obsažen v G'. Správná implementace tohoto hladového algoritmu nějaké body získá, ovšem existují i mnohem lepší strategie.

Omezení: $3 \leqq m \leqq 4$ — počet vrcholů grafu H,
$3 \leqq n \leqq 1\,000$ — počet vrcholů grafu G.

Vstup: Dostanete deset vstupních souborů `forbidden1.in` až `forbidden10.in`, každý z nich v následujícím tvaru:

`forbidden`K`.in`

```
3 5
0 1 0
1 0 1
0 1 0
0 1 0 0 0
1 0 1 0 0
0 1 0 1 0
0 0 1 0 1
0 0 0 1 0
```

Popis:

1. řádek: obsahuje 2 celá čísla oddělená mezerou: m a n.

Následujících m řádků: Každý z těchto řádků obsahuje m celých čísel oddělených mezerami a popisuje jeden vrchol grafu H. Vrcholy jsou očíslovány od 1 do m. Na j-tém řádku tohoto bloku vstupu je i-té číslo rovno 1, pokud vrcholy i a j jsou spojeny hranou, jinak je rovno 0.

Následujících n řádků: Každý z těchto řádků obsahuje n celých čísel oddělených mezerami. Tato čísla obdobným způsobem popisují graf G.

Povšimněte si, že s výjimkou prvního řádku obsahuje vstup matice sousednosti grafů H a G.

Výstup: Odevzdejte 10 souborů, pro každý ze vstupních souborů jeden. Každý soubor nechť obsahuje následující:

forbidden$K$.out	*Popis*:
#FILE forbidden K	*1. řádek*: hlavička souboru. Musí obsahovat `#FILE forbidden` K kde K je číslo od 1 do 10 identifikující vstup, ke kterému tento výstup patří.
5	*2. řádek*: obsahuje jediné celé číslo n.
0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	*Následujících n řádků*: Každý řádek obsahuje n mezerami oddělených celých čísel, která popisují graf G' výše uvedeným způsobem.

Povšimněte si, že kromě řádků 1 a 2 výstup odpovídá matici sousednosti grafu G' a že výše uvedený ukázkový výstup je správný, ale ne optimální.

Hodnocení: Počet bodů, které získáte, bude záviset na počtu hran vašeho grafu G' a bude stanoven takto: Nenulový počet bodů můžete získat pouze tehdy, bude-li výstup splňovat zadání. Pokud splňuje, označíme si E_y počet hran ve vašem řešení, E_b počet hran v řešení nalezeném základním algoritmem, E_m počet hran v nejlepším ze všech odevzdaných řešení a použijeme následující vzorec:

$$\text{body} = \begin{cases} 30\,\dfrac{E_y}{E_b}, & \text{pokud } E_y \leqq E_b, \\[2ex] 30 + 70\,\dfrac{E_y - E_b}{E_m - E_b}, & \text{pokud } E_y > E_b. \end{cases}$$

4. Mexická dolina

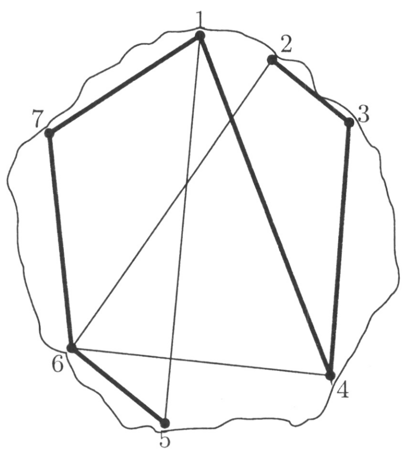
Mexico City stojí v malebném údolí známém jako Mexická dolina. V dávných časech bylo na jeho místě jezero, ale okolo roku 1300 se aztéčtí velekněží usnesli, že ve středu jezera vytvoří ostrov, na kterém vybudují centrum celé říše. Dnes už z jezera nezbylo nic.

Před příchodem Aztéků stálo na břehu jezera c měst. Některé dvojice měst uzavřely obchodní dohody, podle nichž převážely zboží na lodích mezi těmito městy. Trasa lodí vedla vždy po úsečce.

Jak už to bývá, králové měst se rozhodli obchod zorganizovat. Navrhli obchodní cestu spojující všechna města stojící okolo jezera. Cesta měla následující vlastnosti:

- ▷ začínala v některém městě, navštívila každé z ostatních měst a skončila v městě různém od počátečního;
- ▷ cesta každé město navštívila právě jednou;
- ▷ každá dvojice měst jdoucích na cestě po sobě měla spolu uzavřenu obchodní dohodu;
- ▷ každá taková dvojice měst byla spojena lodní trasou vedoucí po úsečce;
- ▷ aby se lodě nesrážely, žádné dvě lodní trasy se nekřížily.

Obr. 63 ilustruje jezero a města vůkol. Úsečky odpovídají obchodním dohodám, tučně je vyznačena obchodní cesta, která začíná v městě 2 a končí v městě 5. Tato cesta sama sebe nikde nekříží. Nebylo by například možné, aby cesta z města 2 vedla do města 6 a pak do měst 5 a 1, protože tehdy by se křížila.



Obr. 63

Města jsou očíslována od 1 do c ve směru hodinových ručiček.

Úloha: Napište program, jenž pro zadaný počet měst a seznam obchodních dohod mezi nimi sestrojí obchodní cestu splňující výše uvedené podmínky.

Omezení: $3 \leqq c \leqq 1\,000$ počet měst okolo jezera.

Vstup: Program bude číst vstupní data ze souboru `mexico.in`:

mexico.in	*Popis*:
7	*1. řádek*: obsahuje jediné celé číslo c.
9	*2. řádek*: obsahuje jediné celé číslo n — počet obchodních dohod.
1 4	*Následujích n řádků*: Tyto řádky popisují jednotlivé obchodní dohody. Každý z nich obsahuje dvě celá čísla oddělená mezerou — čísla měst, která uzavřela dohodu.
5 1	
1 7	
5 6	
2 3	
3 4	
2 6	
4 6	
6 7	

Výstup: Program zapíše do výstupního souboru `mexico.out` následující údaje:

mexico.out	*Popis*:
2	Pokud je možné sestrojit obchodní cestu, soubor obsahuje c řádků, na nichž jsou uvedena čísla všech měst v pořadí, jak jdou po sobě na obchodní cestě. Pokud požadovaná cesta neexistuje, soubor obsahuje jediný řádek s číslem `-1`.
3	
4	
1	
7	
6	
5	

Poznámka: Pokud existuje více cest splňující zadané podmínky, vypište libovolnou z nich.

Hodnocení: Část testovacích vstupů (dohromady za 40 bodů) bude splňovat podmínky $3 \leqq c \leqq 20$.

5. Spojovaná

Spojovaná (Joining Points) je hra pro jednoho hráče. Začíná tím, že si zvolíte dvě celá čísla $g \geqq 2$ a $r \geqq 2$. Poté nakreslíte čtyři body ve vrcholech čtverce: horní dva zelené, dolní dva červené. Pokračujete v kreslení zelených a červených bodů uvnitř čtverce tak, aby žádné tři body (včetně prvních čtyř) neležely v jedné přímce. Takto nakreslíte celkem g zelených a r červených bodů.

Po nakreslení všech bodů je začnete spojovat úsečkami. Dva body můžete spojit, pokud:

▷ oba body jsou téže barvy, a zároveň

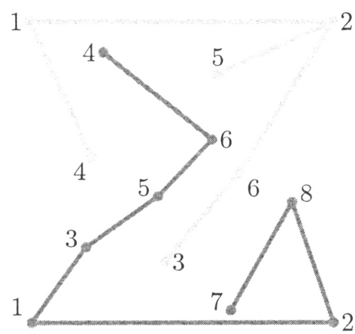
▷ nová úsečka neprotíná žádnou již nakreslenou úsečku jinde než v krajních bodech.

O dvou bodech u, v řekneme, že leží v téže *komponentě*, pokud je možné dojít z bodu u do bodu v po nakreslených úsečkách.

Hru vyhrajete, pokud se vám podaří všechny zelené body spojit do jedné komponenty pomocí právě $g - 1$ úseček a také všechny červené body do jedné komponenty pomocí právě $r - 1$ úseček. Lze dokázat, že ať už jsou body zadány jakkoliv, *hru lze vždy vyhrát.*

Dostanete čtvercový hrací plán o rozměrech $s \times s$ obsahující g zelených a r červených bodů, nakreslených na souřadnicích (x_i, y_i), kde x_i a y_i jsou celá čísla. Zelené body očíslujeme od 1 do g, přičemž bod v levém horním rohu čtverce na souřadnicích $(0, s)$ dostane číslo 1, bod v pravém horním rohu na souřadnicích (s, s) číslo 2 a body uvnitř čtverce čísla 3 až g. Červené body očíslujeme od 1 do r, levý dolní na souřadnicích $(0, 0)$ bude mít číslo 1, pravý dolní na $(s, 0)$ číslo 2, vnitřní body čísla 3 až r.

Obr. 64 ilustruje jeden příklad zadání a vyhrávajícího řešení. Všechny zelené body jsou spojeny do jedné komponenty a všechny červené do druhé. Povšimněte si, že žádné tři body neleží v téže přímce a že se žádné dvě úsečky neprotínají s výjimkou svých koncových bodů.



Obr. 64

Úloha: Napište program, který pro zadané souřadnice g zelených a r červených bodů určí, jak nakreslit $g - 1$ zelených a $r - 1$ červených úseček tak, aby byly všechny zelené body spojeny do jedné komponenty, všechny červené do druhé a žádné dvě úsečky se neprotínaly.

Omezení: $3 \leqq g \leqq 50\,000$	počet zelených bodů,
$3 \leqq r \leqq 50\,000$	počet červených bodů,
$0 \leqq s \leqq 200\,000\,000$	velikost hracího plánu.

Vstup: Program bude číst vstupní data ze souboru `points.in`:

`points.in`	*Popis*:
`6`	*1. řádek*: obsahuje jediné celé číslo g.

`0 1000`
`1000 1000`
`203 601`
`449 212`
`620 837`
`708 537`
	Následujících g řádků: Tyto řádky popisují jednotlivé zelené body v pořadí od bodu 1 do bodu g. Na každém řádku se nacházejí dvě mezerou oddělená celá čísla x_i a y_i, souřadnice i-tého zeleného bodu.

`8`	*$(g+2)$-hý řádek*: obsahuje jediné celé číslo r.

`0 0`
`1000 0`
`185 300`
`314 888`
`416 458`
`614 622`
`683 95`
`838 400`
	Následujících r řádků: Tyto řádky popisují jednotlivé červené body v pořadí od bodu 1 do bodu r. Na každém řádku se nacházejí dvě mezerou oddělená celá čísla x_i a y_i, souřadnice i-tého červeného bodu.

Výstup: Program zapíše do výstupního souboru následující údaje:

`points.out`	*Popis*:

`1 3 g`
`3 1 r`
`3 5 r`
`4 6 r`
`6 5 r`
`4 6 g`
`1 2 g`
`1 2 r`
`5 2 g`
`2 6 g`
`7 8 r`
`8 2 r`
	Výstupní soubor obsahuje $(g-1)+(r-1)$ řádků, z nichž každý popisuje jednu úsečku spojující dva body.
	Na každém řádku jsou tři mezerou oddělené údaje: dvě celá čísla a znak reprezentující barvu úsečky. Čísla označují body spojené úsečkou, znak má hodnotu `g`, pokud jsou oba body zelené, nebo `r`, jsou-li červené.
	Nezáleží na pořadí, ve kterém úsečky uvedete, ani na pořadí bodů v popisu úsečky.

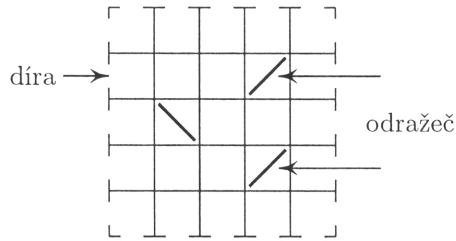
Hodnocení: Část testovacích vstupů (dohromady za 35 bodů) bude splňovat podmínky $3 \leqq g, r \leqq 20$.

6. Černá skříňka

Pojďte, zahrajeme si hru s černou skříňkou. Na stole leží skříňka ve tvaru čtverce. Na každé straně skříňky je n otvorů (celkem v ní je tedy

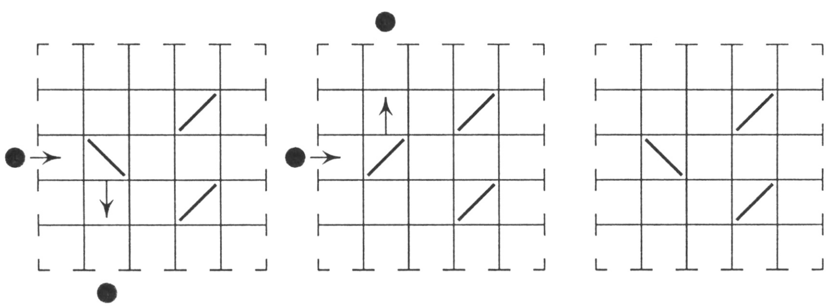
$4n$ otvorů), do nichž lze házet kuličky. Každá vhozená kulička po čase vypadne některým z otvorů ven, možná i otvorem, jímž jsme ji vhodili.

Vnitřek skříňky si můžeme představit (a také nakreslit, obr. 65) jako mřížku $n \times n$ políček. Otvory jsou umístěny na obou koncích všech řádků a sloupců mřížky. Každé políčko mřížky je buďto prázdné, nebo obsahuje *odražeč*. To je zařízení, které mění směr pohybu kuličky o 90°.



Obr. 65

Vhozená kulička se uvnitř skříňky pohybuje přímo, než buďto narazí do odražeče, nebo ze skříňky vypadne některým z otvorů. Pokud narazí do odražeče, kulička změní svůj směr pohybu a odražeč se otočí o 90°. Obr. 66 ukazuje činnost odražeče:



a) b) c)

Obr. 66

a) Kuličku jsme vhodili otvorem. Kulička naráží do odražeče a mění směr pohybu.
b) Po průletu první kuličky změnil odražeč svůj směr. Vhodili jsme další kuličku do stejného otvoru, ta se od téhož odražeče odrazí v opačném směru než první kulička.
c) Odražeč se otáčí pokaždé, když je zasažen.

Při každém nárazu kuličky do odražeče se ozve pípnutí. Počet nárazů vhozené kuličky do odražečů při průletu skříňkou lze tedy snadno zjistit spočítáním pípnutí. Lze dokázat, že kulička vždy ze skříňky vypadne. Skříňka je vybavena tlačítkem, které všechny odražeče otočí do počátečního stavu, a druhým tlačítkem, jímž můžeme všechny odražeče otočit o 90°.

Úloha: Dostanete 15 černých skříněk, které můžete ovládat pomocí knihovny funkcí. Zjistěte vnitřní uspořádání všech skříněk co nejpřesněji a odevzdejte soubory popisující jednotlivé skříňky. Rovněž budete mít k dispozici prostředky pro definování svých vlastních testovacích černých skříněk.

Omezení: $1 \leqq n \leqq 30$.

Výstup: Odevzdejte 15 souborů, pro každou černou skříňku jeden. Každý soubor nechť obsahuje následující:

```
blackboxK.out
#FILE blackbox K
.....
.../.
.\...
.../.
.?.?.
```

Popis:

1. řádek: hlavička souboru. Musí obsahovat

`#FILE blackbox K`

kde K je číslo od 1 do 15 identifikující černou skříňku, ke které tento výstup patří.

Následujících n řádků: Každý řádek popisuje jeden řádek černé skříňky, v pořadí od horního řádku po spodní. Na každém řádku je přesně n znaků; každý znak odpovídá jednomu políčku řádku (v pořadí zleva doprava):

- ▷ '.' značí, že políčko je prázdné,
- ▷ '/' značí, že políčko obsahuje odražeč s počátečním stavem '/',
- ▷ '\' značí, že políčko obsahuje odražeč s počátečním stavem '\',
- ▷ '?' značí, že jste nezjistili obsah políčka.

Knihovna: Dostanete knihovnu, která poskytuje následující funkce:

Pascal:

```
function Initialize(box: integer):integer;
```

Inicializuje knihovnu. Tuto funkci je třeba zavolat právě jednou na počátku vašeho programu. Funkce vrací počet otvorů na každé straně skříňky (n).

C/C++:

```
int Initialize(int box);
```

Parametr *box* obsahuje jedno celé číslo v rozsahu 1 až 15 určující skříňku, kterou chcete zkoumat, nebo nulu, pokud si obsah skříňky chcete zadat sami.

Pascal:

```
function throwBall(holeIn, sideIn: integer;
  var holeOut, sideOut: integer): longint;
```

C:

```
int throwBall(int holeIn, int sideIn,
  int *holeOut, int *sideOut);
```

C++:

```
int throwBall(int holeIn, int sideIn,
  int &holeOut, int &sideOut);
```

Vhodí do skříňky kuličku otvorem *holeIn* na straně *sideIn*. Strany jsou číslovány takto: 1 — horní, 2 — pravá, 3 — dolní, 4 — levá. Otvory jsou číslovány zleva doprava a shora dolů, na každé straně od jedničky. V *holeOut* a *sideOut* se dozvíte otvor a stranu, kudy kulička ze skříňky vypadla. Funkce *throwBall* vrací počet pípnutí, která se během pokusu ozvala.

Pascal:

```
procedure ResetBox;
```

C/C++:

```
void ResetBox();
```

Otočí všechny odražeče do počátečního stavu.

Pascal:

```
procedure ToggleDeflectors;
```

C/C++:

```
void ToggleDeflectors();
```

Otočí každý odražeč ve skříňce o 90°.

Pascal:

```
procedure Finalize;
```

C/C++:

```
void Finalize();
```

Ukončí komunikaci se skříňkou. Tuto funkci byste měli zavolat na konci svého programu.

Vynecháváme zde popis použití knihoven, protože nejsou k dispozici příslušné soubory...

Ukázka komunikace s knihovnou: S černou skříňkou z obr. 66a by bylo prostřednictvím knihovny možné komunikovat například takto:

`Initialize(0);` Pokud zadáme skříňku z obrázku, funkce vrátí hodnotu 5.

Pascal:

```
throwBall(3, 4, holeOut, sideOut);
```

C:

```
throwBall(3, 4, &holeOut, &sideOut);
```

C++:

```
throwBall(3, 4, holeOut, sideOut);
```

Kuličku vhazujeme do otvoru č. 3 (třetí shora) na levé straně. Funkce vrátí 1, což znamená, že kulička narazila do jednoho odražeče. Po návratu z funkce je $holeOut = 2$ a $sideOut = 3$, čili že kulička vypadla otvorem č. 2 (druhý zleva) na dolní straně skříňky.

Testování: Pokud funkci `Initialize` zavoláte s parametrem 0, knihovna si obsah skříňky přečte ze souboru `blackbox.in`. Takto můžete s knihovnou experimentovat. Soubor má následující formát:

`blackbox.in`	*Popis*:
`5` `3`	*1. řádek*: obsahuje jediné celé číslo n — počet otvorů na každé straně skříňky.
`2 3 \` `4 2 /`	*2. řádek*: obsahuje jediné celé číslo d — počet odražečů uvnitř skříňky.
`4 4 /`	*Následujích d řádků*: Tyto řádky popisují jednotlivé odražeče. Každý z nich obsahuje dvě celá čísla oddělená mezerou — sloupec a řádek polohy odražeče. Za nimi následuje mezera a jeden znak, který popisuje počáteční stav odražeče a může mít hodnotu '/' nebo '\'.

Poznámka: Uvedený příklad vstupu popisuje skříňku z obr. 66a.

Hodnocení: Pro každou skříňku odevzdejte textový soubor co nejlépe popisující vnitřek této skříňky. Hodnocen bude takto:

- ▷ Pokud váš soubor obsahuje znak '.', '/' nebo '\' na chybné pozici, dostanete za tuto skřínku 0 bodů.
- ▷ Označíme-li B_m maximální počet správně rozpoznaných políček mezi všemi správnými řešeními účastníků, a B_y počet políček správně rozpoznaných vaším řešením, dostanete za tuto skříňku

$$\frac{100 \cdot B_y}{B_m} \text{ procent maximálního počtu bodů.}$$

Poznámka: Vzorové řešení této úlohy dokáže automaticky určit 100 % počátečního obsahu všech zadaných skříněk za méně než 8 minut.

RNDr. Karel Horák, CSc., Mgr. Martin Mareš, Mgr. Peter Novotný,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.

PADESÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Vydala Jednota českých matematiků a fyziků,
Žitná 25, 117 10 Praha 1
jako svou publikaci č. 57-552-07
Sazbu programem TEX připravil Karel Horák
Vytisklo Polygrafické středisko
Univerzity Palackého v Olomouci
1. vydání
Praha 2007

ISBN 978-80-7015-133-4

matematická
olympiáda

ISBN 978-80-7015-133-4

ISBN 978-80-7015-133-4