

58. ročník matematické olympiády na středních školách

Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 58. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2008/2009. 50. mezinárodní matematická olympiáda. 21. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2011.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405165>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>



PADESÁTÝ OSMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2008/2009

50. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

21. MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE

Za přispění spolupracovníků zpracovali
RNDr. Karel Horák, CSc., Mgr. Martin Mareš, Ph.D.,
Mgr. Peter Novotný, Ph.D., Mgr. Martin Panák, Ph.D.,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

© Karel Horák, editor, 2011

ISBN 978-80-7015-009-2

Obsah

O průběhu 58. ročníku matematické olympiády	5
Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P	19
Výsledky ústředního kola 58. ročníku MO kategorie A	33
Výsledky ústředního kola 58. ročníku MO kategorie P	34
Kategorie C	35
Texty úloh	35
Řešení úloh	38
Kategorie B	49
Texty úloh	49
Řešení úloh	52
Kategorie A	65
Texty úloh	65
Řešení úloh	70
Kategorie P	102
Texty úloh	102
Kategorie Z5	121
Texty úloh	121
Kategorie Z6	125
Texty úloh	125
Kategorie Z7	128
Texty úloh	128
Kategorie Z8	131
Texty úloh	131
Kategorie Z9	134
Texty úloh	134
Přípravná soustředění před 50. MMO	139
Úlohy zadáné na přípravném soustředění	140
Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské	143
Texty soutěžních úloh	144
Řešení úloh	145
50. mezinárodní matematická olympiáda	156
Texty soutěžních úloh	160
Řešení soutěžních úloh	161
3. středoevropská matematická olympiáda	173
Texty soutěžních úloh	175
Řešení úloh	177
Šestnáctý ročník Středoevropské olympiády v informatice	191
21. mezinárodní olympiáda v informatice	193
Texty soutěžních úloh	195

O průběhu 58. ročníku matematické olympiády

Padesátý osmý ročník matematické olympiády se uskutečnil v České republice ve školním roce 2008/09. Hlavním pořadatelem soutěže bylo (stejně jako v předchozích letech) Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, dále Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd ČR. Průběh soutěže zajišťovala stejně jako v předchozích ročnících soutěže Ústřední komise MO (ÚK MO), které předsedal doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., s místopředsedy RNDr. *Jaroslavem Švrčkem*, CSc. (pro kategorie A, B, C), RNDr. *Vojtěchem Žádníkem*, Ph.D. (pro kategorie Z9–Z5) a doc. RNDr. *Pavlem Töpferem*, CSc. (pro kategorii P). Tajemníkem ÚK MO byl RNDr. *Karel Horák*, CSc.

Přípravou a výběrem úloh pro jednotlivé kategorie a soutěžní kola byly pověřeny Ústřední komisí MO dvě úlohové komise (jedna pro kategorie A, B, C a druhá pro kategorie Z). Obě komise se sešly na svých pracovních seminářích dvakrát ročně (v listopadu 2008 a v květnu 2009). Ve spolupráci se slovenskými kolegy zabezpečují obě komise s více než ročním předstihem výběr úloh pro další ročník MO v České republice i na Slovensku. Garanty výběru úloh pro tento ročník soutěže byli Peter Novotný (kategorie A), Pavel Calábek (kategorie B) a Martin Panák (kategorie C).

Průběh 58. ročníku soutěže byl standardní. Letáky s úlohami a komentáře k řešení úloh I. kola 58. ročníku MO byly pro všechny kategorie soutěže dodány včas. Krajská (II.) kola v jednotlivých kategoriích se uskutečnila ve stanovených termínech: 20. 1. 2009 v kategorii A, 7. 4. 2009 v kategoriích B a C a 13. 1. 2009 v kategorii P. Celkové počty účastníků v jednotlivých krajích každé z uvedených kategorií jsou uvedeny v tabulkách, které tvoří přílohu této zprávy.

Ústřední kolo 58. ročníku Matematické olympiády v kategorii A se uskutečnilo 22.–25. března 2009 v Plzni. Organizace závěrečného kola soutěže se v tomto roce ujala Krajská komise MO Plzeňského kraje. Vlastní soutěž se konala v prostorách Západočeské univerzity v Plzni, soutěžící a členové ÚK MO byli po dobu soutěže ubytováni v Domově mládeže Středního odborného učiliště elektrotechnického a Hotelové školy v Plzni.

Slavnostní zahájení ústředního kola proběhlo v neděli 22. března 2009 v Západočeském muzeu v Plzni. Záštitu nad III. kolem soutěže převzali Mgr. *Ondřej Liška*, ministr školství, mládeže a tělovýchovy České republiky, doc. MUDr. *Milada Emmerová*, CSc., hejtmanka Plzeňského kraje, Ing. *Pavel Rödl*, primátor města Plzně, doc. Ing. *Josef Průša*, CSc., rektor Západočeské univerzity, a dále senátoři Ing. *Jiří Bís* a Mgr. *Miroslav Nenutil*. Kromě soutěžících, členů ÚK MO a garantů se zahájení soutěže zúčastnili rovněž pozvaní hosté, mezi nimiž byli především zástupci společenského života v Plzni a dále zástupci sponzorských firem (skupina ČEZ, Vydavatelství Fraus, Komerční banka, a.s., ČSOB) a Gymnázia v Plzni na Mikulášském náměstí.

Na základě jednotné koordinace úloh krajského kola kategorie A pozvala ÚK MO k účasti v ústředním kole 50 nejlepších řešitelů z celé republiky. Svého zástupce v něm tentokrát neměl pouze Karlovarský a Ústecký kraj. Soutěžními dny byly 23. a 24. březen 2009. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící již tradičně vyhrazeny vždy 4,5 hodiny čistého času a za každou úlohu bylo možno získat maximálně 7 bodů.

Plzeňští organizátoři připravili pro soutěžící a pro členy ÚK MO zajímavý doprovodný program. Pondělní odpoledne bylo vyhrazeno nejprve prohlídce historického centra Plzně, dále pak byla pro všechny účastníky zajištěna zajímavá exkurze do Plzeňského Prazdroje, a.s. Odpoledne po druhém soutěžním dni absolvovali soutěžící exkurzi do některých významných pracovišť ZČU v Plzni.

Slavnostní vyhlášení výsledků a předání cen nejlepším soutěžícím se uskutečnilo ve středu 25. března 2009 dopoledne v aule Gymnázia v Plzni na Mikulášském náměstí opět za přítomnosti představitelů města Plzeň a zástupců ZČU v Plzni. Předseda ÚK MO ve svém závěrečném projevu mj. poděkoval také všem, kteří se zasloužili o bezchybnou organizaci ústředního kola kategorie A, především pak předsedkyni Krajské komise MO v Plzeňském kraji PaedDr. *Nadě Kubešové* a krátce informoval všechny přítomné o ústředním kole nadcházejícího 59. ročníku MO, které se uskuteční v březnu 2010 v Karlovarském kraji (v Chebu).

Na ústřední kolo kategorie A bezprostředně navázalo ústřední kolo kategorie P. K účasti v závěrečném kole této soutěže bylo tentokrát pozváno 30 nejlepších řešitelů krajského kola, finále soutěže se však zúčastnilo pouze 29 z nich.

Soutěžními dny ústředního kola v kategorii P byly 26. a 27. březen 2009. První soutěžní den řešili soutěžící tři úlohy teoretické, celý druhý

soutěžní den byl vyhrazen tradičně řešení dvou praktických úloh. Za každou teoretickou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 10 bodů, za řešení každé praktické úlohy pak 15 bodů — celkově tedy nejvýše 60 bodů. Na přípravě soutěžních úloh v kategorii P se podíleli pracovníci Katedry matematické informatiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Devět z deseti vítězů soutěže v kategorii A bylo pozváno k výběrovému soustředění před 50. mezinárodní matematickou olympiádou. Ta se uskutečnila v červenci 2009 v německých Brémách. Kromě toho bylo vybráno také družstvo pro 3. ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO), který se konal koncem září 2009 v polské Poznani. Družstvo pro tuto mezinárodní soutěž tvořila šestice úspěšných řešitelů ústředního kola kategorie A, kteří se nezúčastnili 50. MMO. Počátkem července 2009 se konal v Rumunsku (Tîrgu-Mureş) za české účasti také 16. ročník Středoevropské olympiády v informatice (CEOI) a zhruba o měsíc později se české reprezentační družstvo zúčastnilo již 21. ročníku Mezinárodní olympiády v informatice v bulharském Plovdivu. Podrobnější zprávy o těchto mezinárodních soutěžích jsou uvedeny na konci ročenky.

Ústřední komise MO se během 58. ročníku soutěže sešla na dvou pravidelných jednáních, a to 12. prosince 2008 v Matematickém ústavu AV ČR v Praze a dále 23. března 2009 v Plzni u příležitosti ústředního kola MO.

Pro 40 nejlepších řešitelů krajského kola 58. ročníku MO v kategoriích B a C uspořádala ÚK MO v červnu 2009 tradiční soustředění v Jevíčku, organizované ředitelem tamějšího gymnázia, dr. Dagem Hrubým. Lektorsky chod soustředění zabezpečovali doc. Calda, doc. Boček, doc. Šimša, Mgr. Panák, dr. Švrček a dr. Hrubý. Počátkem září téhož roku se konalo v Janských Lázních na chatě Lovrana ještě výběrové soustředění nejlepších řešitelů kategorie A, jež bylo zároveň i poslední přípravou reprezentačního družstva pro 3. MEMO v Polsku. Na tomto soustředění jednotlivé semináře vedli doc. Šimša, dr. Horák, dr. Švrček, dr. Leischner, Mgr. Panák a dr. Calábek.

Závěrem dovoluje poděkovat všem nadšeným učitelům matematiky, kteří nad své pracovní povinnosti připravovali své matematicky talentované žáky pro soutěž v tomto ročníku. Bez nich si lze jen těžko představit úspěšný průběh nejstarší předmětové soutěže v České republice, kterou je MO.

**Projev předsedy Ústřední komise MO
při slavnostním zahájení ústředního kola 58. ročníku MO
v Plzni**

Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,

po následující dva dny čekají vás, posledně jmenované, hodiny nesnadného přemýšlení o matematických problémech. Atmosféru napínavého hledání dílčích poznatků, které by mohly vést k vytčenému cíli, doprovázenou pocity objevitelského nadšení z dílčích hypotéz, střídaného často trpkým poznáním, že to byly pouhé domněnky, vám nyní přiblížím velice osobním vyprávěním o jednom příběhu s doposud otevřeným koncem.

Loni v červnu v anglicky psané knize *Secrets in Inequalities* vietnamského autora *Pham Kim Hunga* (vydanou rumunským nakladatelstvím Gil Publishing House v roce 2007) jsem objevil následující úlohu samotného autora knihy:

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\sqrt{\frac{ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2}} + \sqrt{\frac{bc}{4b^2 + c^2 + 4a^2}} + \sqrt{\frac{ca}{4c^2 + a^2 + 4b^2}} \leq 1. \quad (1)$$

Autorské řešení podané v knize je velmi náročné: nejprve je pro součet tří hodnot konkávní funkce $f(x) = \sqrt{x}$ využita Jensenova nerovnost s rafinovaně vybranými váhovými koeficienty, po následném dvojím užití AG-nerovnosti je úloha zredukována na důkaz takové nerovnosti:

$$\begin{aligned} 9(a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b)) + 3abc(a+b+c) &\leq \\ &\leq 4(a^4 + b^4 + c^4) + 17(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2). \end{aligned}$$

I to je však nesnadný úkol řešení v knize tak, že získaná symetrická nerovnost je nejprve upravena do tvaru se součtem tří analogických sčítanců

$$\sum_{\text{cykl}} \left(2a^2 + 2b^2 + \frac{3c^2}{2} - 5ab \right) (a-b)^2 \geq 0.$$

Další úvahy o znaménkách tří velkých závorek a porovnávání jejich absolutních hodnot založená na předpokladu $a \geq b \geq c$ zde nebudu uvádět, nemá to pro další děj příběhu význam.

Nad takovým postupem jsem si jen povzdychl, že tohle bych sám asi nikdy nevymyslel. Nepropadl jsem však trudnomyslnosti, protože vím, jak podobné příklady často autoři vytvářejí, totiž opačným postupem

od metody důkazu k zadání. S chladnější hlavou a kritičností jsem si položil otázku, proč vůbec kompetentní autor zapletl do zadání úlohy odmocniny, když díky známé Cauchyově nerovnosti

$$(\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w})^2 \leq 3(u + v + w)$$

mohl dokazovat tvarově jednodušší, a přitom silnější výsledek

$$\frac{ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2} + \frac{bc}{4b^2 + c^2 + 4a^2} + \frac{ca}{4c^2 + a^2 + 4b^2} \leq \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Možné vysvětlení bylo dvojí: buďto nerovnost (2) pro některé trojice kladných a, b, c neplatí, nebo autor nebyl schopen obecně platnou nerovnost (2) dokázat (po listování celou zmíněnou knihou bych téměř vyloučil, že její autor na nerovnost (2) nepomyslel). Že by v případě druhé možnosti byl důkaz jednodušší nerovnosti (2) ještě obtížnější než důkaz složitější nerovnosti (1)?

Poslední otázka způsobila, že jsem měl o letních prázdninách o ušlechtilou zábavu vystaráno. Dny, kdy jsem ve chvílích volna usilovně přemýšlel, jak na důkaz (2) navléct všemožné obvyklé postupy a klasické nerovnosti, se střídaly s dny, kdy jsem na počítači zkusmo hledal trojice čísel (a, b, c) , pro které nerovnost (2) neplatí. Neúspěchy jednoho druhu snažení posilovaly následné snažení druhého druhu, a tak se to pravidelně opakovalo. Už mě to celé dost iritovalo, zejména ta konkrétní čtyřka ve jmenovatelích zlomků, že jsem pomýšlel, přiznám docela netakticky, i na obecnější nerovnost

$$\frac{ab}{pa^2 + b^2 + pc^2} + \frac{bc}{pb^2 + c^2 + pa^2} + \frac{ca}{pc^2 + a^2 + pb^2} \leq \frac{3}{2p + 1} \quad (3)$$

s nezáporným parametrem p , v níž je zlomek na pravé straně sestaven tak, aby po dosazení $a = b = c$ přešla nerovnost v rovnost (pro záporná p nemůžeme kvůli jmenovatelům na obecnou platnost (3) pomýšlet). Slabou útěchou mi bylo, že takovou nerovnost umím dokázat v jednom konkrétním případě $p = 1$, kdy zlomky nalevo mají stejný jmenovatel, takže je mohu snadno sečíst a dostat tak jednoduchou nerovnost

$$\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \leq 1,$$

o které je dobře známo, že skutečně platí. Na druhou stranu, po dosazení do (3) krajního přípustného $p = 0$ dostaneme nerovnost, která platí rovněž obecně, ovšem naopak:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Proto má také smysl se ptát, zda pro některá (aspoň malá) kladná p neplatí obecně opačná nerovnost

$$\frac{ab}{pa^2 + b^2 + pc^2} + \frac{bc}{pb^2 + c^2 + pa^2} + \frac{ca}{pc^2 + a^2 + pb^2} \geq \frac{3}{2p+1}. \quad (4)$$

V listopadu jsem si vzpomněl, že můj přítel, pan docent Jaroslav Hora ze Západočeské univerzity v Plzni, je expertem na programy počítačové algebry, a že některé z nich jsou schopny dokazovat polynommické nerovnosti, zdůrazňují *symbolicky dokazovat*, nikoliv pouze *numericky testovat*. Tak jsem mu napsal, zda by dostupnými prostředky nerovnosti (3) a (4) počítačově nezpracoval. Jako dnes si pamatuji na 27. listopad, kdy mi kolega Hora poslal email, že nerovnost (3) pro původní parametr $p = 4$ skutečně platí, jak mu ohlásil počítač po asi 20 minutách výpočtů. Nejprve v programu *Mathematica 6.1* upravil nerovnost (3) s obecným p na ekvivalentní nerovnost $M(a, b, c, p) \geq 0$ pro mnohočlen

$$\begin{aligned} M(a, b, c, p) = & -a^2b^3c - a^3bc^2 + 3a^2b^2c^2 - ab^2c^3 - a^5bp + 3a^4b^2p - a^3b^3p + \\ & + 3a^2b^4p - a^4bcp - a^3b^2cp - 2a^2b^3cp - ab^4cp - b^5cp + 3a^4c^2p - 2a^3bc^2p - \\ & - ab^3c^2p + 3b^4c^2p - a^3c^3p - a^2bc^3p - 2ab^2c^3p - b^3c^3p + 3a^2c^4p - abc^4p + \\ & + 3b^2c^4p - ac^5p + 3a^6p^2 - 2a^5bp^2 + 3a^4b^2p^2 - 3a^3b^3p^2 + 3a^2b^4p^2 - ab^5p^2 + \\ & + 3b^6p^2 - a^5cp^2 - 2a^4bcp^2 - 3a^3b^2cp^2 - a^2b^3cp^2 - 2ab^4cp^2 - 2b^5cp^2 + \\ & + 3a^4c^2p^2 - a^3bc^2p^2 + 9a^2b^2c^2p^2 - 3ab^3c^2p^2 + 3b^4c^2p^2 - 3a^3c^3p^2 - \\ & - 3a^2bc^3p^2 - ab^2c^3p^2 - 3b^3c^3p^2 + 3a^2c^4p^2 - 2abc^4p^2 + 3b^2c^4p^2 - 2ac^5p^2 - \\ & - bc^5p^2 + 3c^6p^2 + 3a^4b^2p^3 - 2a^3b^3p^3 + 3a^2b^4p^3 - 2ab^5p^3 - 2a^5cp^3 - \\ & - 2a^3b^2cp^3 - 2a^2b^3cp^3 + 3a^4c^2p^3 - 2a^3bc^2p^3 + 6a^2b^2c^2p^3 - 2ab^3c^2p^3 + \\ & + 3b^4c^2p^3 - 2a^3c^3p^3 - 2a^2bc^3p^3 - 2ab^2c^3p^3 - 2b^3c^3p^3 + 3a^2c^4p^3 + \\ & + 3b^2c^4p^3 - 2bc^5p^3, \end{aligned}$$

pak do počítače vložil úkol pro p rovné čtyřem

```
Reduce[ForAll[{a,b,c},a>0&&b>0&&c>0,M[a,b,c,4]>=0],{a,b,c},Reals]
```

a po zmíněném čase dostal kladnou lakonickou odpověď „True“.

Ještě ten den mě napadlo, že bych mohl o nerovnosti (3) za 4 měsíce tady v Plzni povídat. Než promluví o dalších počítačových experimentech, které pro mne kolega Hora udělal později, prozradím, že své osobní marné pokusy a první prohru v důkazovém souboji s počítačem jsem nebral tragicky. Naopak poměrně sebevědomě jsem usoudil, že nic snadného

ke zdolání nerovnosti (3) jsem snad nepřehlédl, a tak jsem ji v prosinci — jak s hodnotou $p = 4$, tak s obecným p — rozeslal současným i minulým českým reprezentantům na MMO i starším kolegům — úlohářům z Čech, Moravy, Slovenska i Polska. Do dnešního dne se nikdo z nich neozval, že by vyřešil problém alespoň pro p rovné čtyřem.

Jaké ovoce přinesly další týdny komunikace s kolegou Horou? Předně poznání, že opačná nerovnost

$$\frac{ab}{pa^2 + b^2 + pc^2} + \frac{bc}{pb^2 + c^2 + pa^2} + \frac{ca}{pc^2 + a^2 + pb^2} \geq \frac{3}{2p + 1} \quad (4)$$

(splněná, jak víme, pro $p = 0$) nebude platit s obecnými kladnými a, b, c pro žádné kladné p . Při zadání najít protipříklad pro p rovné 10^{-5}

```
FindInstance[a>0&& b>0&&c>0
&&M[a,b,c,1/100000]>0,{a,b,c},Reals]
```

dostal kolega Hora z počítače odpověď $\{a \rightarrow 1/32\,768, b \rightarrow 1/2, c \rightarrow 1\}$. Po podobném testování ještě menších kladných p pochopil, že bude moci nechat $b = 1/2, c = 1$ a dohledávat k danému malému p vhodné malé a . Proto zaútočil obecně s úkolem

```
Reduce[ForAll[p,p>0,Exists[a,a>0,M[a,1/2,1,p]>0]]]
```

a podle očekávání dostal kladnou odpověď.

Po takové cenné kolegově nápovědě už nebylo obtížné vysvětlit bez užití počítače, jak je to s nerovností (4). Kdyby platila s určitým kladným p pro všechny trojice kladných a, b, c , musela by ze spojitosti platit i pro trojici $(0, 1/2, 1)$. Pro ni však po dosazení dostáváme nerovnost

$$0 + \frac{2}{p + 4} + 0 \geq \frac{3}{2p + 1},$$

která neplatí pro žádné $p < 10$. Všiml jsem si, že ještě ničivější dopad má užití trojice $(0, 1, 1)$, pro niž vyjde nerovnost

$$0 + \frac{1}{p + 1} + 0 \geq \frac{3}{2p + 1},$$

jež dokonce neplatí pro žádné kladné p . Tím je naděje na obecnou platnost nerovnosti (4) pro nějaké kladné p definitivně zmařena.

Daleko překvapivější a dodnes nezavršený vývoj událostí se rozvinul kolem nerovnosti (3). Jak už víme, s hodnotou $p = 4$ stála na začátku našeho příběhu a 27.11. byla dokázána na počítači s programem *Mathematica*. Ten pracoval s nerovností o třech proměnných $M(a, b, c, 4) \geq 0$, kde

$$M(a, b, c, 4) = 48(a^6 + b^6 + c^6) - 36(a^5b + b^5c + c^5a) - 144(a^5c + b^5a + c^5b) + 252(a^4b^2 + a^4c^2 + b^4a^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + c^4b^2) - 36(a^4bc + b^4ca + c^4ab) - 180(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) - 180(a^3b^2c + b^3c^2a + c^3a^2b) - 153(a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2) + 531a^2b^2c^2.$$

K dalším pokusům mi kolega Hora především napsal, že jeho počítač nebyl schopen řešit podobný úkol pro čtyři proměnné, tj. vypočítat všechny hodnoty p dané zadáním

```
Reduce[ForAll[{a,b,c},a>0&& b>0&&
c>0&&p>0&&M[a,b,c,p]>=0,p,Reals],
```

Takový úkol stroj po určité době vzdal. Co ten jeho počítač utáhl, ocituji z přítelovy zprávy: *Pokud mu dám konkrétní hodnotu parametru p , dostanu po několika desítkách minut odpověď, zda je mnohočlen M nezáporný pro všechna kladná a, b, c či nikoliv. Projel jsem několik přirozených čísel. Vyšlo mi, že hypotéza platí pro $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, neplatí pro $p = 7, 8, 9, \dots, 20, 30, 50, 100$. Pro $p = 7$ to vyvrací $a = 5/2, b = 1/3, c = 1$. Tak jsem zkoušel ještě p mezi šesti a sedmi. Platí to pro $13/2$ a $33/5$, ne však pro $20/3$. Pak jsem ještě zkoušel p v pravém okolí nuly. Vyhovují $1/2, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8$ i $1/9$, ne však již $1/10$. Pro ni to vyvrací protipříklad $a = 3/4, b = 3/4, c = 1$.*

Jistě pochopíte, jaké vzrušení ve mně taková nečekaná zpráva vyvolala a jaký závěr se z poskytnutých informací nabízí. Zdá se, že vyhovující hodnoty parametru p vytvoří jeden interval s hranicemi přibližně 0,1 a 6,6. Tato hypotéza mě přivedla k nápadu, zda by se bez počítače nedala vyloučit obecná platnost nerovnosti (3), když je p hodně malé nebo hodně velké, nějak podobně jednoduše, jako byla vyloučena všechna kladná p u opačné nerovnosti (4). Tak jsem vsadil na trojice tvaru $(a, b, c) = (0, t, 1)$, kde kladné t hledám v závislosti na daném p , aby po dosazení platila opačná nerovnost

$$0 + \frac{t}{pt^2 + 1} + 0 > \frac{3}{2p + 1}.$$

Existenci takového t bude obecná platnost nerovnosti (3) pro dané p vyvrácena. Každý z přítomných (myslím soutěžících) by rychle zjistil, že vyhovující t nalezneme jenom pro ta kladná p , která splňují jednu z nerovností

$$p < \frac{8 - 3\sqrt{7}}{2} \doteq 0,03 \quad \text{nebo} \quad p > \frac{8 + 3\sqrt{7}}{2} \doteq 7,97.$$

Přestože takové meze jsou o dost hrubší, než naznačovaly počítačové výsledky, jejich jednoduché odvození mě v první chvíli docela uspokojilo; brzy se však dostavila touha po vylepšení.

Pomohla mi šťastná náhoda. V přítelově zprávě bylo uvedeno, že hodnotu $p = 0,1$ vylučuje trojice $(3/4, 3/4, 1)$, na které mě zaujala rovnost $a = b$. Proto jsem začal zjišťovat, pro které další hodnoty p vyloučím obecnou platnost nerovnosti (3) jen pomocí trojic $(t, t, 1)$ s vhodným kladným t . Po dosažení takové trojice vyjdou na levé straně

$$\frac{t^2}{pt^2 + t^2 + p} + \frac{t}{pt^2 + 1 + pt^2} + \frac{t}{p + t^2 + pt^2} \leq \frac{3}{2p + 1}$$

dva krajní zlomky se stejným jmenovatelem, což podstatně zjednodušuje situaci. Když si navíc uvědomíme, že pro $t = 1$ musíme dostat rovnost, dojdeme nakonec k ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{(t - 1)^2((4p^2 + 4p)t^2 - t(2p^2 - 3p + 1) + 3p)}{(2pt^2 + 1)((p + 1)t^2 + p)(2p + 1)} \geq 0.$$

Hodnota p bude tudíž vyloučena, pokud pro ni najdeme takové t , které poslední nerovnosti nehoví, tedy kladné t s vlastností

$$(4p^2 + 4p)t^2 - t(2p^2 - 3p + 1) + 3p < 0.$$

Není obtížné ukázat, že takto vyloučíme interval všech malých hodnot p s horní hranicí p_0 :

$$0 < p < p_0 = 5 - 2\sqrt{6} \doteq 0,101\,020\,514.$$

Protipříkladem všem takovým p je trojice $(t_0, t_0, 1)$ s číslem

$$t_0 = \frac{6 + \sqrt{6}}{10} \doteq 0,844\,948\,974.$$

Výsledek mě nadchl o to více, že nalezená iracionální mez p_0 leží mezi zlomky $1/10$ a $1/9$, kam přesnou dolní hranici vyhovujících p umísťovaly přítelovy experimenty. Proto jsem ho požádal, aby hodnotu p_0 otestoval úkolem

`Reduce[ForAll[{a,b,c},a>0&& b>0&&
c>0,M[a,b,c,5-2*Sqrt[6]]>=0],{a,b,c}, Reals]`

Ocituji část jeho odpovědi: *Především Ti gratuluji k nalezení meze $p_0 = 5 - 2\sqrt{6}$. Pokoušel jsem se ji ověřit strojově přímo, výpočetní doba je ale neúnosná. Dnes jsem měl v práci počítač puštěný přes noc, a když ještě ani v poledne nebyl výpočtům konec, tak jsem to vzdal. Tak jsi porazil stroj K.O., aspoň co se týče programu Mathematica. Zdá se mi, že problém je v tom, že symbolické výpočty s odmocninami jsou holt krajně nepříjemné. Tak jsem tu Tvou hranici testoval racionálními čísly p ležícími blízko p_0 , posílám to v příloze. Ještě se pokusím asi jinak.*

Zmíněné testy racionálních p dopadly dobře, uvedu jen ta dvě nejbližší testovaná přiblížení: jako vyhovující byla shledána hodnota 0,101 03 větší než p_0 , naopak jako nevyhovující hodnota 0,101 020 5 menší než p_0 . A tak jsem mohl vychutnávat pocit vítězství nad počítačem, možná jsem to měl i nějak oslavit, byla však na to příliš krátká doba: od 3. března 14:43 do 4. března 11:36. To jsem právě dostal z Plzně zprávu, že hodnota p_0 není vyhovující, ať ji i já sám otestuji na trojici čísel

$$a = \frac{433}{512} \doteq 0,845\,703, \quad b = \frac{27}{32} \doteq 0,843\,750, \quad c = 1.$$

S hořkostí jsem ten snadný úkol vyplnil, přítel měl samozřejmě pravdu. Naplnil poslední větu předchozího citátu, zadal svému počítači úkol

`FindInstance[a>0&& b>0&&c>0
&&M[a,b,c,5-2*Sqrt[6]]<0,{a,b,c},Reals]`

a jeho splnění ve tvaru uvedené trojice přineslo odvetné K.O. druhé straně. Marná sláva, přesná dolní mez vyhovujících p , číslo nepatrně větší než $5 - 2\sqrt{6}$, je opět neznámá hodnota. Povzdechl jsem si jen, jak blízko je ta trojice $(a, b, 1)$ trojici se shodnými složkami a, b , kterou jsem dříve tak šťastně našel a v jejíž rozhodující roli jsem tolik věřil. Tak to prostě při práci v matematice chodí, radosti střídají zklamání. Musím být příteli vděčný, že ve své důslednosti nepolevil a nezanechal mě žítí v bludu déle.

Chtěl bych proto kolegovi Horovi za jeho veškerou dosavadní nezištnou pomoc ve formě počítačových pokusů vyslovit veřejné poděkování, a protože je dnes tady s námi, rád bych vám ho představil.

Vážení přítomní, děkuji vám za pozornost, se kterou jste sledovali mé vyprávění. Nebylo by správné, kdybych se ještě nezmínil o jedné významné události. Dne 19. února mi můj student Mgr. Miloš Přinosil oznámil, že z Internetu stáhl dokument *Collected Problems About Inequalities* pětice autorů *Vo Quoc Ba Can, Nguyen Van Thach, Nguyen Phi Hung, Phan Hong Son, Vo Thanh Van*. Kromě anglického názvu je celý dokument ve vietnamštině a je v něm dokázáno 174 od prvního pohledu velice zajímavých a obtížných nerovností. Mgr. Přinosil si povšiml úlohy 8 s tímto zadáním:

8. *Chung minh rang voi moi so thuc a, b, c, ta co*

$$\frac{ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2} + \frac{bc}{4b^2 + c^2 + 4a^2} + \frac{ca}{4c^2 + a^2 + 4b^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Ano, je to přesně ta nerovnost, která mě v loni červnu nad knihou jiného vietnamského autora napadla a o které jsem vám dnes povídal! Jak vypadá její vietnamsky komentovaný důkaz bez užití počítače i prostředků vyšší matematiky, co jsem všechno při jeho luštění prožil a proč se mi zatím nedaří rozšířit jeho působnost na hodnoty parametru p různé od čísla 4, je námětem na celou poučnou přednášku, kterou bych rád v budoucnu proslovil na nějakém soustředění řešitelů matematické olympiády. Snad tam budu mít stejně pozorné posluchače, jako jsem je měl dnes ve vás.

Na úplný závěr svého vystoupení chci jménem Ústřední komise MO srdečně pográtulovat všem přítomným soutěžícím k postupu do nejvyššího kola letošního ročníku olympiády a popřát jim do obou soutěžních dopolední co nejvíce dobrých nápadů a štěstí. Prohlašuji ústřední kolo 58. ročníku MO za zahájené.

Dodatek. Díky bývalému olympioniku *Michalu Rolínkovi* jsme se při přípravě této ročenky dozvěděli o elegantním důkazu nerovnosti (2), který pochází z knihy *Inequalities with Beautiful Solutions*. Tomuto názvu zmíněný důkaz plně odpovídá, proto ho zde nyní uvedeme.

Dotyčnou nerovnost

$$\frac{ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2} + \frac{bc}{4b^2 + c^2 + 4a^2} + \frac{ca}{4c^2 + a^2 + 4b^2} \leq \frac{1}{3}$$

pro libovolná kladná a, b, c dostaneme sečtením dvou nerovností

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{ab - c^2}{4a^2 + b^2 + 4c^2} \leq 0 \quad \text{a} \quad \sum_{\text{cykl}} \frac{c^2}{4a^2 + b^2 + 4c^2} \leq \frac{1}{3}, \quad (5)$$

kde zápis $\sum_{\text{cykl}} f(a, b, c)$ značí součet $f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b)$. Naším úkolem je tedy obě nerovnosti v (5) dokázat. První z nich vynásobíme čtyřmi a poté ke každému zlomku z levé strany přičteme 1. Díky rovnosti

$$\frac{4(ab - c^2)}{4a^2 + b^2 + 4c^2} + 1 = \frac{(2a + b)^2}{4a^2 + b^2 + 4c^2}$$

tak obdržíme ekvivalentní nerovnost

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{(2a + b)^2}{4a^2 + b^2 + 4c^2} \leq 3,$$

kteřá je součtem tří analogických nerovností

$$\frac{(2a + b)^2}{4a^2 + b^2 + 4c^2} \leq \frac{2a^2}{2a^2 + c^2} + \frac{b^2}{2c^2 + b^2}, \quad (6)$$

jak plyne ze zřejmé úpravy součtu

$$\frac{2a^2}{2a^2 + c^2} + \frac{b^2}{2c^2 + b^2} + \frac{2b^2}{2b^2 + a^2} + \frac{c^2}{2a^2 + c^2} + \frac{2c^2}{2c^2 + b^2} + \frac{a^2}{2b^2 + a^2}.$$

Jak zdůvodnit nerovnost (6)? Využijeme k tomu Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \cdot (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$$

s trojicemi čísel

$$(u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{a}{\sqrt{2a^2 + c^2}}, \frac{a}{\sqrt{2a^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{2c^2 + b^2}} \right),$$

$$(v_1, v_2, v_3) = \left(\sqrt{2a^2 + c^2}, \sqrt{2a^2 + c^2}, \sqrt{2c^2 + b^2} \right),$$

pro něž platí

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 = (2a + b)^2,$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{2a^2}{2a^2 + c^2} + \frac{b^2}{2c^2 + b^2},$$

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 4a^2 + b^2 + 4c^2,$$

takže po vydělení kladným součtem $4a^2 + b^2 + 4c^2$ skutečně dostaneme nerovnost (6). Tím je první z nerovností (5) dokázána.

Protože v druhé nerovnosti (5) vystupují pouze druhé mocniny, píšme dále a, b, c namísto a^2, b^2, c^2 , tj. dokazujeme nerovnost

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{c}{4a + b + 4c} \leq \frac{1}{3}.$$

Vynásobme ji nejprve výrazem $12(a + b + c)$ a poté zlomky z levé strany upravme podle vzoru

$$\frac{12c(a + b + c)}{4a + b + 4c} = 3c + \frac{9bc}{4a + b + 4c}.$$

Po odečtení $3(a + b + c)$ od obou stran dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{9bc}{4a + b + 4c} \leq a + b + c,$$

kteřá je součtem tří analogických nerovností

$$\frac{9bc}{4a + b + 4c} \leq \frac{2bc}{2c + a} + \frac{bc}{2a + b}, \quad (7)$$

jak plyne ze zřejmé úpravy součtu

$$\frac{2bc}{2c + a} + \frac{bc}{2a + b} + \frac{2ca}{2a + b} + \frac{ca}{2b + c} + \frac{2ab}{2b + c} + \frac{ab}{2c + a}.$$

Zbývá tedy dokázat nerovnost (7). Ta je opět důsledkem výše zmíněné Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti, tentokrát pro trojice

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3) &= \left(\sqrt{\frac{bc}{2c + a}}, \sqrt{\frac{bc}{2c + a}}, \sqrt{\frac{bc}{2a + b}} \right), \\ (v_1, v_2, v_3) &= \left(\sqrt{2c + a}, \sqrt{2c + a}, \sqrt{2a + b} \right), \end{aligned}$$

neboť pro ně platí

$$\begin{aligned} (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 &= (3\sqrt{bc})^2, \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= \frac{2bc}{2c + a} + \frac{bc}{2a + b}, \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 &= 4a + b + 4c. \end{aligned}$$

Tím je celý důkaz hotov.

Tabulka 1

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 58. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	71	49	128	110	149	129	23	19	371	307
Středočeský	66	15	54	32	60	40	5	4	185	91
Jihočeský	74	28	54	36	64	35	4	3	196	102
Plzeňský	51	44	57	51	68	60	15	8	191	163
Karlovarský	12	8	6	5	13	9	0	0	31	22
Ústecký	22	18	56	29	53	29	4	4	135	80
Liberecký	34	4	43	15	46	18	6	6	129	43
Královéhradecký	18	11	41	13	61	19	1	1	121	44
Pardubický	30	21	35	26	34	18	4	4	103	69
Vysočina	63	30	57	32	78	48	1	1	199	111
Jihomoravský	127	53	106	54	141	58	15	11	389	176
Zlínský	57	17	75	29	121	40	1	1	254	87
Olomoucký	24	10	19	14	32	15	2	2	77	41
Moravskoslezský	62	23	114	39	137	34	9	7	322	103
ČR	711	331	845	485	1057	552	90	71	2703	1439

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 58. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	37	16	44	22	59	27	17	7	157	72
Středočeský	14	1	29	11	38	12	4	1	85	25
Jihočeský	25	5	29	7	33	9	3	2	90	23
Plzeňský	38	12	48	19	54	22	7	2	147	55
Karlovarský	8	3	5	3	9	4	0	0	22	10
Ústecký	18	0	28	9	27	5	4	2	77	16
Liberecký	4	1	15	6	15	4	6	6	40	17
Královéhradecký	11	2	13	10	19	7	1	0	44	19
Pardubický	17	1	26	14	15	4	4	3	62	22
Vysočina	21	4	25	14	39	16	1	1	86	35
Jihomoravský	49	15	51	30	56	10	11	3	167	58
Zlínský	14	2	26	16	28	4	1	1	69	23
Olomoucký	10	2	14	11	15	9	2	0	41	22
Moravskoslezský	21	7	39	17	32	8	7	3	99	35
ČR	287	71	392	189	439	141	68	31	1186	432

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

v kategoriách A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie jsou dle dostupných výsledků uvedeni všichni úspěšní řešitelé, kteří skončili do desátého místa. Označení G znamená gymnázium.

• • • • • Kraj Praha • • • • •

Kategorie A

1. *Josef Tkadlec*, G J. Keplera, Praha 6
2. *Tomáš Zeman*, G J. Keplera, Praha 6
3. *Petr Ryšavý*, G J. Heyrovského, Praha 5
4. *Jáchym Sýkora*, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 5.–6. *Tomáš Pavlík*, G J. Keplera, Praha 6
Karolína Rezková, G Praha 10, Voděradská
7. *Van Nhan Nguyen*, G Praha 6, Nad Alejí
8. *Radek Marciňa*, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 9.–10. *Miroslav Olšák*, G Praha 5, Buďánka
Dan Šafka, G J. Keplera, Praha 6

Kategorie B

1. *Michal Turek*, G J. Keplera, Praha 6
2. *Tadeáš Dohnal*, G Ch. Dopplera, Praha 5
3. *Daniel Šafka*, G J. Keplera, Praha 6
4. *Matěj Petrouš*, G Ch. Dopplera, Praha 5
5. *Jakub Zíka*, G Praha 6, Nad Alejí
- 6.–7. *Vít Henych*, G Praha 7, Nad Alejí
David Votava, G Praha 9, Chodovická
- 8.–9. *Ondřej Bajgar*, G J. Nerudy, Praha 1
Michal Palas, G J. Keplera, Praha 6
10. *David Koubek*, G J. Keplera, Praha 6

Kategorie C

- 1.–2. *Matouš Helíkar*, G Praha 6, Nad Alejí
Martin Töpfer, G Praha 7, Nad Štolou
3. *Tereza Andršová*, G J. Keplera, Praha 6
- 4.–5. *Matouš Hrubeš*, G J. Heyrovského, Praha 5
Marie Kvasnicová, G Praha 2, Botičská
- 6.–7. *Jiří Čížek*, Akad.G Praha 2, Korunní
Jan Hadrava, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 8.–10. *Martin Hrycej*, G J. Keplera, Praha 6
Petra Kaštánková, G Praha 10, Omská 1300
Julie Tomišková, Akad.G Praha 2, Korunní

Kategorie P

1. *Vlastimil Dort*, G Praha 9, Špitálská
2. *František Hejl*, G J. Nerudy, Praha 1
- 3.–4. *Antonín Novák*, G Praha 6, Arabská
Martin Patera, G Praha 6, Arabská
5. *Jiří Setnička*, G Praha 9, Čakovice
6. *Ondřej Pelech*, G J. Nerudy, Praha 1
7. *Tomáš Vítek*, G Praha 6, Arabská

• • • • • **Středočeský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Jan Pokorný*, G V. B. Třebízského, Slaný

Kategorie B

1. *Jan Mikeš*, G Kolín
2. *John Plechatý*, G V. B. Třebízského, Slaný
3. *Jan Musil*, G Kolín
- 4.–5. *Helena Brandejská*, G J. Ortena, Kutná Hora
Tomáš Martínek, G Vlašim
Jana Váňová, G J. Ortena, Kutná Hora

- 7.–8. *Karolína Kopecká*, G J. Barranda Beroun
Jiří Stránský, Dvořákovo G a SOŠE, Kralupy
9. *Marek Kettner*, G V. B. Třebízského, Slaný
- 10.–12. *Markéta Košťálová*, Dvořákovo G a SOŠE, Kralupy
Martin Procházka, G V. B. Třebízského, Slaný
Petra Čápková, G Vlašim

Kategorie C

1. *Miroslav Martínek*, G Vlašim
2. *Jindřich Škripko*, G Kladno
3. *Martin Frumar*, G dr. J. Pekaře, Mladá Boleslav
4. *Michal Berg*, G V. Hraběte, Hořovice
5. *Dominik Pěnkava*, G Kladno
- 6.–9. *Lenka Houdková*, G Benešov
Stanislav Hlubocký, G Kolín
Iva Kavková, G Jiřího z Poděbrad, Poděbrady
Jan Kratochvíl, G Příbram, Svatá Hora
10. *Tomáš Kumsta*, G Benešov

Kategorie P

1. *Petr Čermák*, G Kladno

• • • • • Jihočeský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Jan Matějka*, G České Budějovice, Jírovcova
2. *Pavel Veselý*, G Strakonice
3. *Martina Vaváčková*, G P. de Coubertina, Tábor
4. *Adam Jurazsek*, G České Budějovice, Jírovcova
5. *Jan Moravec*, G Český Krumlov

Kategorie B

1. *Josef Janoušek*, G P. de Coubertina, Tábor

- ### Kategorie C

- Kategorie P*

..... Plzeňský kraj

Kategorie A

- 22

Kategorie B

- 1.–2. *Martin Bucháček*, G L. Pika, Plzeň
Filip Hlásek, G Plzeň, Mikulášské nám.
3. *Tomáš Bárta*, G Plzeň, Mikulášské nám.
4. *Václav Fanfule*, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 5.–6. *Sven Johannes Künkel*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jakub Suchý, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 7.–8. *Vojtěch Matula*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jiří Němeček, G Plzeň, Mikulášské nám.
9. *Jan Kotrbatý*, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 10.–12. *Michal Bathory*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Ondřej Hovjacký, G Plzeň, Mikulášské nám.
Filip Štědranský, G Plzeň, Mikulášské nám.

Kategorie C

1. *Kateřina Soukupová*, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 2.–4. *Eliška Pilátová*, G J. Š. Baara, Domažlice
Martin Prudek, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jaroslava Ryplová, Masarykovo G, Plzeň
5. *Radek Hošek*, G Plzeň, Mikulášské nám.
6. *František Havránek*, G Stříbro

Kategorie P

1. *Martin Holeček*, G Plzeň, Mikulášské nám.
2. *Karel Tesař*, VOŠ a SPŠE, Plzeň

• • • • • **Karlovarský kraj** • • • • •

Kategorie A

- 1.–3. *Josef Hazi*, G Cheb
Jan Humplík, První české G, Karlovy Vary
Martin Kvěš, G Sokolov

Kategorie B

1. *Josef Hazi*, G Cheb
2. *Miroslav Kozák*, G Cheb
3. *Dung Le Quang*, G Cheb

Kategorie C

1. *Pham Tat Dat*, G Cheb
- 2.–3. *Kateřina Jarosilová*, G Sokolov
Emil Minář, G Cheb
4. *Tran Anh Duc*, G Cheb

• • • • • Ústecký kraj • • • • •

Kategorie B

- 1.–3. *Vojtěch Havel*, G Rumburk
Tomáš Holka, G Kadaň
David Kuboň, G Teplice, Čs. Dobrovolců
4. *Vojtěch Havlíček*, G Č. Kamenice
- 5.–6. *Vojtěch Hlavenka*, G Teplice, Čs. Dobrovolců
Martin Zuckerstein, G Lovosice
7. *Michal Mojžík*, SPŠ a VOŠ, Školní 50, Chomutov
- 8.–9. *Kristýna Matějová*, G V. Hlavatého, Louny
Jindřich Lubeňský, G Žatec

Kategorie C

1. *František Kaván*, G Č. Kamenice
2. *Zuzana Boršiová*, G Teplice, Čs. Dobrovolců
- 3.–4. *Markéta Pilnerová*, G J. Jungmanna, Litoměřice
Otakar Zich, SPŠ a VOŠ, Chomutov
5. *Štěpán Šimsa*, G J. Jungmanna, Litoměřice

Kategorie P

1. *Lukáš Kripner*, G T. G. Masaryka, Litvínov
2. *Karel Král*, Podkrušnohorské G, Most

..... **Liberecký kraj**

Kategorie A

1. *Klára Holková*, G F. X. Šaldy, Liberec

Kategorie B

1. *Jan Polášek*, G Turnov
- 2.-5. *Karolína Burešová*, G Česká Lípa
Jakub Hrnčíř, G F. X. Šaldy, Liberec
Jakub Petr, G F. X. Šaldy, Liberec
Ondřej Zlevor, G Turnov
6. *Martin Dvořák*, G Jablonec nad Nisou, U Balvanu

Kategorie C

1. *Martin Zikmund*, G Turnov
2. *Jiří Erhart*, G F. X. Šaldy, Liberec
- 3.-4. *Magdalena Nechanická*, G Liberec, Jeronýmova
David Pustai, G Jablonec nad Nisou, U Balvanu

Kategorie P

1. *Milan Cejnar*, G Turnov
- 2.-3. *Jan Polášek*, G Turnov
Martin Zikmund, G Turnov
- 4.-5. *Karolína Burešová*, G Česká Lípa
Vojtěch Kudrnáč, G Turnov

Kategorie A

1. *Petr Pařízek*, G B. Němcové, Hradec Králové
2. *Anna Chejnovská*, G B. Němcové, Hradec Králové

Kategorie B

1. *Anetta Sternwaldová*, Biskupské G B. Balbína, Hradec Králové
- 2.–3. *Kateřina Medková*, Biskupské G B. Balbína, Hradec Králové
Jan Remeš, G Dobruška
4. *Anna Chejnovská*, G B. Němcové, Hradec Králové
- 5.–6. *Jan Fišer*, Lepařovo G, Jičín
Jan Šimbera, Jiráskovo G, Náchod
7. *Vít Baumelt*, G Dvůr Králové n. L.
- 8.–10. *Zdeněk Borecký*, G a SOŠ, Jaroměř
Marek Stehlík, G B. Němcové, Hradec Králové
Petra Svatoňová, G Dobruška

Kategorie C

- 1.–3. *Petr Bartoň*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Petr Jurčo, G Trutnov
Jakub Konrád, G a SOŠ, Jaroměř
4. *Kateřina Vlčková*, G Broumov
5. *Anežka Semrádová*, G B. Němcové, Hradec Králové
6. *Michal Pokorný*, SŠ aplik. kybernetiky, Hradec Králové
7. *Josefína Mádrová*, G Dobruška

Kategorie A

1. *Miroslav Koblížek*, G Žamberk

Kategorie B

- 1.-2. *Lukáš Charamza*, G Litomyšl
Filip Lux, G Žamberk
- 3.-4. *Miroslav Koblížek*, G Žamberk
Martin Laštovička, G Pardubice, Dašická
5. *Tomáš Klejch*, G Litomyšl
- 6.-8. *Jakub Puchýř*, G Chrudim
Tereza Soukupová, G Česká Třebová
Ondřej Tobek, G Litomyšl
9. *Tomáš Felcman*, G Žamberk
10. *Zuzana Jedličková*, G Lanškroun

Kategorie C

1. *Tomáš Kubelka*, G Žamberk
- 2.-3. *Nikola Havlasová*, G Pardubice, Dašická
Petr Kovář, G Lanškroun
4. *Tomáš Horák*, G Chrudim

Kategorie P

1. *David Vondrák*, G Pardubice, Dašická
- 2.-3. *Ondřej Holý*, G Chrudim
Jan Tichý, G Pardubice, Dašická

..... **Kraj Vysočina**

Kategorie A

1. *Jan Nevoral*, G Jihlava
- 2.-3. *Jaromír Karmazín*, G Velké Meziříčí
Marek Lanč, G Telč
4. *Luboš Vítek*, G Jihlava

Kategorie B

1. *Kristýna Krejčířová*, G O. Březiny a SOŠ, Telč

2. *Petr Louša*, Havlíčkov G, Havlíčkův Brod
- 3.–4. *Tomáš Havelka*, G Žďár nad Sázavou
Petra Staňková, G Jihlava
5. *Jan Hudeček*, Biskupské G Žďár nad Sázavou
- 6.–7. *Dalimil Fišar*, G Žďár nad Sázavou
Adam Kučera, G Chotěboř
8. *Jakub Prášek*, G O. Březiny a SOŠ, Telč
- 9.–11. *Tomáš Karásek*, G Žďár nad Sázavou
Lukáš Řídký, G O. Březiny a SOŠ, Telč
Václav Stránský, G Žďár nad Sázavou

Kategorie C

- 1.–2. *Ondřej Bartoš*, G Žďár nad Sázavou
Helena Fišarová, G Jihlava
3. *Jan Kuchařík*, G Jihlava
4. *Jan Klusáček*, G Třebíč
5. *Jan Mazánek*, G Žďár nad Sázavou
6. *Lucie Zemánková*, G Třebíč
7. *Filip Murár*, G Třebíč
8. *Kateřina Zagorová*, Havlíčkov G, Havlíčkův Brod
- 9.–11. *Jana Novotná*, G Třebíč
Vlasta Vítková, G Jihlava
Simona Zimová, G Moravské Budějovice

Kategorie P

1. *Michal Koutný*, G Třebíč

• • • • • Jihomoravský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Samuel Říha*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *David Klaška*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Hana Šormová*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Alexander Slávik*, G Brno, T. Novákové
5. *Bohuslav Zmek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

- 6.–10. *František Fiala*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Michal Horák, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Petr Hruška, G Hodonín
Hynek Jemelík, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
David Macek, G Hodonín

Kategorie B

1. *Hynek Jemelík*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Pavel Ševeček*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *František Fiala*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Aleš Dostál*, G Blansko
5.–7. *Zdeněk Jakub*, Biskupské G Brno
Petr Kočí, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Dominik Velan, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
8. *Jakub Juránek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
9.–11. *Markéta Janošová*, G Židlochovice
Gabriela Kubíčková, G Brno, Lerchova
Stanislav Schütz, G Kyjov

Kategorie C

1. *Václav Raida*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Pavel Polcer*, G Brno, Křenová
3.–4. *Jan Stopka*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Dominik Tělupil, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
5. *Jana Sotáková*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
6.–7. *Tomáš Jordán*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Petr Vodička, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
8. *Jakub Vošmera*, G M. Lercha, Brno
9.–10. *Klára Janošková*, G Strážnice
Bedřich Said, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie P

1. *Hynek Jemelík*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *David Klaška*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
3. *Alexander Slávik*, G Brno-Řečkovice

..... Zlínský kraj

Kategorie A

1. *Jan Vaňhara*, G L. Jaroše, Holešov
2. *Josef Ondřej*, G Rožnov pod Radhoštěm

Kategorie B

1. *Adam Vyškovský*, Masarykovo G, Vsetín
2. *Zuzana Kluková*, G Uherské Hradiště
3. *Markéta Švehláková*, G Kroměříž
4. *Eliška Dostálková*, G Uherské Hradiště
- 5.–6. *Petr Martišek*, G Kroměříž
Petr Pecha, SPŠS Vsetín
- 7.–10. *Matěj Kocián*, G Zlín-Lesní čtvrť
David Svoboda, G Zlín-Lesní čtvrť
Petr Tomčík, G Holešov
Eva Ullrichová, G F. Palackého, Valašské Meziříčí

Kategorie C

1. *Jan Mikel*, G Rožnov pod Radhoštěm
2. *Michal Opler*, Masarykovo G, Vsetín
3. *Tomáš Juřica*, G F. Palackého, Valašské Meziříčí
4. *David Šerý*, G Rožnov pod Radhoštěm
5. *Filip Křenek*, G Rožnov pod Radhoštěm

Kategorie P

1. *Lukáš Ptáček*, G J. A. Komenského, Uherský Brod

..... Olomoucký kraj

Kategorie A

1. *Jana Faltýnková*, Cyrilometodějské G Prostějov
2. *Vít Musil*, G Šumperk

Kategorie B

1. *Jan Tvrdlík*, Cyrilometodějské G Prostějov
- 2.–4. *Daniel Frýbort*, Cyrilometodějské G Prostějov
Lukáš Kunovský, G Jeseník
Petra Macigová, G Hranice
5. *Věra Žitková*, G Šternberk
6. *Marie Kročová*, G J. Škody, Přerov
- 7.–11. *Karel Beneš*, G Kojetín
Pavel Francírek, G Kojetín
Kateřina Jaroušová, G Šternberk
Adéla Klárová, G Jeseník
Dominik Lachman, G Olomouc-Hejčín

Kategorie C

1. *Jiří Veselý*, G J. Wolkera, Prostějov
2. *Klára Sládečková*, G J. Škody, Přerov
3. *Gabriela Olivíková*, G J. Škody, Přerov
4. *Kateřina Burgetová*, G J. Wolkera, Prostějov
- 5.–6. *Šimon Rozsívál*, G Šumperk
Josef Uchýtil, G Jeseník
- 7.–8. *Eva Gocníková*, G J. Škody, Přerov
Vendula Horčíčková, G J. Škody, Přerov
9. *Tomáš Lázna*, G J. Wolkera, Prostějov

• • • • • **Moravskoslezský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Miroslav Klimoš*, G M. Koperníka, Bílovec
- 2.–5. *Simona Domesová*, G M. Koperníka, Bílovec
Lucie Mohelníková, G M. Koperníka, Bílovec
Lenka Sumbalová, G M. Koperníka, Bílovec
Vojtěch Kaluža, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
- 6.–7. *Hana Bílková*, G Frenštát pod Radhoštěm
Petr Boroš, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie B

- 1.–2. *Jiří Biolek*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Jakub Solovský, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Helena Svobodová*, G Frýdlant nad Ostravicí
4. *Ondřej Vejpustek*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
5. *Petra Koščáková*, Mendelovo G, Opava
6. *Vendula Maulerová*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
7. *Jakub Štoček*, G Havířov-Podlesí
- 8.–10. *Ines Arencibiová*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
Tomáš Bartoněk, G O. Havlové, Ostrava-Poruba
Vojtěch Šindlář, G Havířov-Podlesí

Kategorie C

1. *Lukáš Folwarczný*, G Havířov, Komenského
2. *Michal Kopf*, Slezské G Opava
3. *Barbora Móllová*, G M. Koperníka, Bílovec
4. *Ondřej Bouchala*, G Havířov, Komenského
- 5.–7. *Sebastián Filip*, Mendelovo G, Opava
Tomáš Hadámek, Mendelovo G, Opava
Augustin Žídek, G Frýdlant nad Ostravicí
8. *Jakub Dedek*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba

Kategorie P

1. *Miroslav Klimoš*, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Jitka Novotná*, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Libor Plucnar*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek

Výsledky ústředního kola 58. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.–2.	<i>Miroslav Klimoš</i> , 4/4 G M. Koperníka, Bílovec	39 b.
	<i>Josef Tkadlec</i> , 8/8 G J. Keplera, Praha 6	39 b.
3.–4.	<i>Samuel Říha</i> , 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	35 b.
	<i>Tomáš Zeman</i> , 6/8 G J. Keplera, Praha 6	35 b.
5.–6.	<i>David Klaška</i> , 3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	28 b.
	<i>Jan Matějka</i> , 8/8 G České Budějovice, Jírovцова	28 b.
7.–8.	<i>Josef Ondřej</i> , 7/8 G Rožnov pod Radhoštěm	26 b.
	<i>Hana Šormová</i> , 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	26 b.
9.	<i>Miroslav Olšák</i> , 7/8 G Buďánka, Praha 5	20 b.
10.	<i>Jan Vaňhara</i> , 8/8 G L. Jaroše, Holešov	19 b.
11.	<i>Hana Bílková</i> , 8/8 G Frenštát pod Radhoštěm	18 b.

Další úspěšní řešitelé

12.–13.	<i>Nguyen Van Minh</i> , 6/6 G Tachov	17 b.
	<i>Bohuslav Zmek</i> , 3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	17 b.
14.	<i>Jana Faltýnková</i> , 8/8 Cyrilometodějské G Prostějov	16 b.
15.–20.	<i>Petr Boroš</i> , 3/4 G M. Koperníka, Bílovec	15 b.
	<i>Simona Domesová</i> , 7/8 G M. Koperníka, Bílovec	15 b.
	<i>Vít Musil</i> , 4/4 G Šumperk, Masarykovo nám.	15 b.
	<i>Nguyen Van Nhan</i> , 8/8 G Praha 6, Nad Alejí	15 b.
	<i>Tomáš Pavlík</i> , 8/8 G J. Keplera, Praha 6	15 b.
	<i>Petr Ryšavý</i> , 7/8 G J. Heyrovského, Praha 5	15 b.
21.–22.	<i>Radek Marciňa</i> , 3/4 G Ch. Dopplera, Praha 5	14 b.
	<i>Alexander Slávik</i> , 8/8 G Brno, Terezy Novákové	14 b.
23.–25.	<i>Duc Trung Ha</i> , 7/8 Masarykovo G, Plzeň	13 b.
	<i>Zuzana Komárková</i> , 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	13 b.
	<i>Lucie Mohelníková</i> , 4/4 G M. Koperníka, Bílovec	13 b.

Výsledky ústředního kola 58. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1. <i>David Klaška</i> , 7/8 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	53 b.
2. <i>Miroslav Klímoš</i> , 4/4 G M. Koperníka, Bílovec	37 b.
3. <i>Vlastimil Dort</i> , 7/8 G Praha 9, Špitálská	34 b.
4. <i>Karel Tesař</i> , 3/4 VOŠ a SPŠE Plzeň	33 b.
5. <i>Hynek Jemelík</i> , 2/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	32 b.
6.–7. <i>Ondřej Holý</i> , 8/8 G J. Ressela, Chrudim	29 b.
<i>Jan Polášek</i> , 6/8 G Turnov	29 b.
8. <i>Libor Plucnar</i> , 6/6 G P. Bezruče, Frýdek-Místek	28 b.

Další úspěšní řešitelé

9. <i>Martin Holeček</i> , 7/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	27 b.
10.–11. <i>František Hejl</i> , 6/6 G J. Nerudy, Praha 1	24 b.
<i>Pavel Veselý</i> , 4/4 G Strakonice	24 b.
12. <i>Petr Čermák</i> , 7/8 G Kladno	22 b.
13.–14. <i>Lukáš Kripner</i> , 7/8 G T. G. Masaryka, Litvínov	21 b.
<i>Jitka Novotná</i> , 4/4 G M. Koperníka, Bílovec	21 b.
15.–16. <i>Jan Matějka</i> , 8/8 G České Budějovice, Jírovcova	20 b.
<i>Alexander Slávik</i> , 8/8 G Brno-Řečkovice	20 b.

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Honza, Jirka, Martin a Petr organizovali na náměstí sbírku na dobročinné účely. Za chvíli se u nich postupně zastavilo pět kolemjdoucích. První dal Honzovi do jeho kasičky 3 Kč, Jirkovi 2 Kč, Martinovi 1 Kč a Petrovi nic. Druhý dal jednomu z chlapců 8 Kč a zbylým třem nedal nic. Třetí dal dvěma chlapcům po 2 Kč a dvěma nic. Čtvrtý dal dvěma chlapcům po 4 Kč a dvěma nic. Pátý dal dvěma chlapcům po 8 Kč a dvěma nic. Poté chlapci zjistili, že každý z nich vybral jinou částku, přičemž tyto tvoří čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla. Který z chlapců vybral nejméně a který nejvíce peněz?

(Peter Novotný)

C – I – 2

Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A , B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D , E . Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC .

(Pavel Leischner)

C – I – 3

Najděte všechna čtyřmístná čísla n , která mají následující tři vlastnosti: V zápise čísla n jsou dvě různé číslice, každá dvakrát. Číslo n je dělitelné sedmi. Číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic čísla n , je rovněž čtyřmístné a dělitelné sedmi.

(Pavel Novotný)

C – I – 4

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Na polopřímce BC sestrojte takový bod G , aby obsah trojúhelníku ABG byl shodný s obsahem daného pětiúhelníku.

(Lucie Růžičková)

C – I – 5

Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. (Vysvětlete, proč zvolený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel nevyhovuje.) (Jaromír Šimša)

C – I – 6

Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

(Jaromír Šimša)

C – S – 1

Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla a, b, c platí

$$(a+bc)(b+ac) \geq ab(c+1)^2.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

(Jaromír Šimša)

C – S – 2

V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB . Průsečík úsečky AB s přímkou, která prochází vrcholem C a středem kružnice vepsané trojúhelníku PBC , označíme D . Dokažte, že úsečky AD a AC jsou shodné. (Pavel Leischner)

C – S – 3

Jestliže jistá dvě přirozená čísla ve stejném pořadí sečteme, odečteme, vydělíme a vynásobíme a všechny čtyři výsledky sečteme, dostaneme 2009. Určete tato dvě čísla. (Vojtech Bálint)

C – II – 1

Uvažujme výraz

$$V(x) = \frac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1}.$$

- a) Dokažte, že pro každé reálné číslo x platí $V(x) \geq 3$.
b) Najděte největší hodnotu $V(x)$. (*Aleš Kobza*)

C – II – 2

V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB a D, E středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům APC, CPB . Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC je průsečíkem výšek trojúhelníku CDE . (*Pavel Leischner*)

C – II – 3

Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ je vybráno několik různých čísel tak, že součet žádných tří z nich není násobkem devíti.

- a) Dokažte, že mezi vybranými čísly jsou nejvýše čtyři dělitelná třemi.
b) Ukažte, že vybraných čísel může být 26. (*Jaromír Šimša*)

C – II – 4

Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB a obsahem S je opsána kružnice. Tečna k této kružnici v bodě C protíná tečny vedené body A a B v bodech D a E . Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délky c přepony a obsahu S . (*Peter Novotný*)

Řešení úloh

C – I – 1

Dohromady chlapci dostali $3 + 2 + 1 + 8 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 42$ Kč. Toto číslo lze jednoznačně vyjádřit jako součet čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel: $42 = 9 + 10 + 11 + 12$. Čtyři chlapci tedy (v nějakém pořadí) vybrali sumy 9, 10, 11 a 12 Kč.

Žádný chlapec nemohl dostat 8 Kč zároveň od druhého i od pátého kolemjdoucího (jinak by měl alespoň 16 Kč, nejvíce však mohl každý z chlapců dostat 12 Kč). Takže od druhého a pátého mají tři chlapci po 8 Kč a jeden od nich nedostal nic. Nejvýše jeden z těchto tří chlapců mohl dostat 4 Kč od čtvrtého kolemjdoucího, jinak by měli už alespoň dva chlapci alespoň 12 Kč. Čtvrtý kolemjdoucí musel tedy dát 4 Kč právě jednomu z nich a 4 Kč zbývajícím chlapci. Bez peněz prvního a třetího kolemjdoucího tedy mají chlapci vybráno 12, 8, 8 a 4 Kč. Chlapec, který dostal v součtu od druhého, čtvrtého a pátého kolemjdoucího dvanáct korun, už nemohl dostat od prvního a třetího kolemjdoucího nic, neboť by měl více než dvanáct korun. Ten, který dostal v součtu od druhého, čtvrtého a pátého kolemjdoucího 4 Kč, musel dostat od prvního a třetího v součtu maximální možnou částku, tj. $3 + 2 = 5$ Kč, jinak by měl celkově méně než 9 Kč (dostal tedy právě 9 Kč a má nejméně). Takže nejméně vybral Honza, neboť on dostal od prvního kolemjdoucího 3 Kč, a nejvíc Petr, který od prvního kolemjdoucího nedostal nic.

Úvahy snadno dokončíme a ukážeme, že popsané rozdělení *je* vskutku *možné*. Jak už víme, Honza vybral 9 Kč a Petr 12 Kč, Jirka, který dostal 2 Kč od prvního, nemohl dostat od třetího nic, takže dostal celkem 10 Kč, a Martin 11 Kč. Všechny úvahy můžeme přehledně uspořádat do tabulky, kterou postupně doplňujeme:

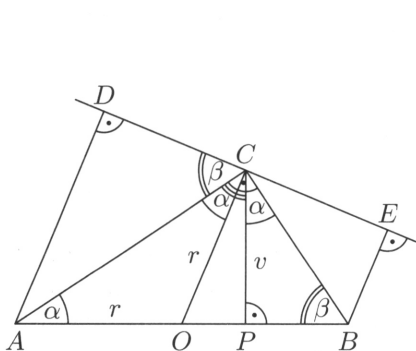
1	2	3	4	5	Σ
	8		0	0	
	0		0	8	
0	0	0	4	8	12 $\rightarrow$ P
3	0	2	4	0	$\leq 9 \rightarrow$ H
$1+2+3$	1×8	2×2	2×4	2×8	

Označme odvěsny trojúhelníku ABC obvyklým způsobem a , b a protilehlé úhly α , β . Střed přepony AB (střed opsané kružnice) označíme O (obr. 1).

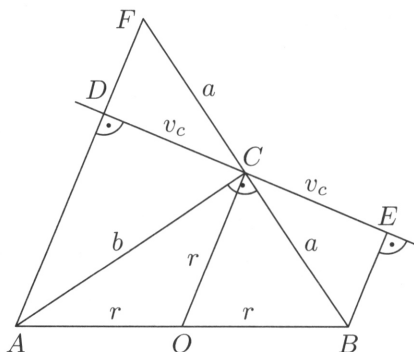
Výška $v = CP$ rozděluje trojúhelník ABC na trojúhelníky ACP a CBP podobné trojúhelníku ABC podle věty uu ($\alpha + \beta = 90^\circ$), úsečka OC je kolmá na DE a navíc $|OC| = |OA| = r$ (poloměr opsané kružnice). Odtud $|\sphericalangle OCA| = |\sphericalangle OAC| = \alpha$ a $|\sphericalangle DCA| = 90^\circ - |\sphericalangle OCA| = \beta$.

Pravoúhlé trojúhelníky ACP a CDP se společnou přeponou AC se tudíž shodují i v úhlech při vrcholu C . Jsou proto shodné, dokonce souměrně sdružené podle přímky AC . Analogicky jsou trojúhelníky CBP a CBE souměrně sdružené podle BC . Je tedy $|CD| = |CE| = v$, tudíž $|DE| = 2v = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$, neboť z dvojího vyjádření dvojnásobku obsahu trojúhelníku ABC plyne $v = ab/|AB|$, přičemž $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Poznámka. Místo dvojího vyjádření obsahu můžeme k výpočtu výšky CP využít podobnost trojúhelníků CBP a ABC : $\sin \alpha = |CP|/|AC| = |BC|/|AB|$.



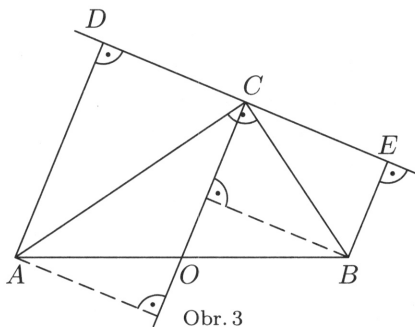
Obr. 1



Obr. 2

Jiné řešení. Úsečka OC je střední příčkou lichoběžníku $DABE$, neboť je rovnoběžná se základnami a prochází středem O ramene AB . Je proto D obrazem bodu E v souměrnosti podle středu C . Obraz F bodu B v téže souměrnosti leží na polopřímce AD za bodem D (obr. 2). Je $|CF| = |BC| = a$, úhel ACF je pravý, trojúhelníky AFC a ABC jsou tedy shodné. Vidíme, že CD je výška v trojúhelníku AFC shodná s výškou v_c trojúhelníku ABC , a DE je jejím dvojnásobkem. Velikost výšky v_c dopočítáme stejně jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Úsečky CD a CE (obr. 3) jsou shodné s výškami rovnoramenných trojúhelníků ACO , BCO na společnou stranu OC . Protože tyto dva trojúhelníky mají ve srovnání s třetím trojúhelníkem ABC poloviční obsah a i jejich společná strana OC je oproti přeponě AB poloviční, jsou obě výšky na stranu OC trojúhelníků ACO , BCO shodné s výškou na stranu AB trojúhelníku ABC . Jeho výšku dopočítáme jako v prvním řešení.



Obr. 3

Odpověď. $|DE| = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$.

C – I – 3

V řešení budeme $\bar{n}$ značit číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic čísla n . Rozlišíme tři případy.

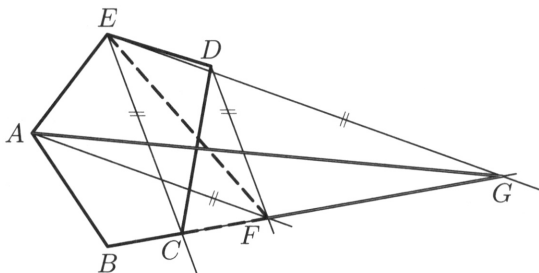
(i) Číslo n má tvar $aabb$, kde a, b jsou různé cifry. Je tedy $n = 1\,100a + 11b$ a $\bar{n} = 1\,100b + 11a$. Číslo 7 má dělit jak n , tak $\bar{n}$, tedy i jejich rozdíl $n - \bar{n} = 1089(a - b)$ a součet $n + \bar{n} = 1\,111(a + b)$. Protože ani číslo 1089, ani číslo 1111 nejsou násobkem sedmi a sedm je prvočíslo, tak $7 \mid a - b$ i $7 \mid a + b$. Použijeme-li stejnou úvahu ještě jednou, vidíme, že $7 \mid (a - b) + (a + b) = 2a$ a $7 \mid (a + b) - (a - b) = 2b$, tedy $7 \mid a$ a $7 \mid b$, neboli $a, b \in \{0, 7\}$. Číslíce a, b jsou navzájem různé, proto jedna z nich musí být 0. Ale potom jedno z čísel $aabb, bbaa$ není čtyřmístné. Hledané číslo n tedy nemůže být uvedeného tvaru.

(ii) Číslo n má tvar $abab$. Potom $7 \mid n = 1\,010a + 101b$ a rovněž $7 \mid \bar{n} = 1\,010b + 101a$. Podobně jako v předchozím případě odvodíme, že $7 \mid n - \bar{n} = 909(a - b)$ a $7 \mid n + \bar{n} = 1\,111(a + b)$, a ze stejných důvodů jako v předchozím případě zjišťujeme, že $7 \mid a$, $7 \mid b$. Některá z číslic by tedy musela být 0. Číslo n tak nemůže být ani tvaru $abab$.

(iii) Číslo n má tvar $abba$. Potom obrácením pořadí číslic vznikne totéž číslo, takže máme jedinou podmínku $7 \mid 1001a + 110b$. Protože $7 \mid 1001$ a $7 \nmid 110$, je tato podmínka ekvivalentní s podmínkou $7 \mid b$. Proto $b \in \{0, 7\}$, $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $a \neq b$. Vyhovuje tak všech 17 čísel, která právě uvedené podmínky splňují: 1 001, 2 002, 3 003, 4 004, 5 005, 6 006, 7 007, 8 008, 9 009, 1 771, 2 772, 3 773, 4 774, 5 775, 6 776, 8 778, 9 779.

C – I – 4

Rozbor: Nejprve uvažme bod F , který je průsečíkem přímky BC a rovnoběžky s EC jdoucí bodem D (protože $E \notin BC$, jsou EC a BC různoběžky, obr. 4). Obsahy trojúhelníků ECD a ECF jsou shodné (mají společnou stranu EC a shodnou výšku na tuto stranu), obsah pětiúhelníku $ABCDE$ je tedy shodný s obsahem čtyřúhelníku $ABFE$.



Obr. 4

Dále uvažme bod G , který je průsečíkem přímky BC a rovnoběžky s AF jdoucí bodem E . Potom jsou opět obsahy trojúhelníků AFE a AFG shodné, a jsou proto shodné i obsahy čtyřúhelníku $ABFE$ a trojúhelníku ABG . Bod G tak má požadovanou vlastnost.

Hledaný bod je na polopřímce BC jediný, neboť pro různé body X, Y na polopřímce BC mají trojúhelníky ABX a ABY různé výšky na společnou stranu AB , mají tedy různé obsahy.

Popis konstrukce:

1. p ; $p \parallel EC$, $D \in p$;
2. F ; $F \in p \cap BC$;
3. q ; $q \parallel AF$, $E \in q$;
4. G ; $G \in q \cap BC$;

Úloha má jediné řešení.

C - I - 5

Čísla od 1 do 99 rozdělíme podle jejich zbytku při dělení číslem 11 do jedenácti devítiprvkových skupin $T_0, T_1, \dots, T_{10}$:

$$T_0 = \{11, 22, 33, \dots, 99\},$$

$$T_1 = \{1, 12, 23, \dots, 89\},$$

$$\vdots$$

$$T_{10} = \{10, 21, 32, \dots, 98\}.$$

Vybereme-li jedno číslo z T_0 (víc jich ani vybrat nesmíme) a všechna čísla z T_1, T_2, T_3, T_4 a T_5 , dostaneme vyhovující výběr $1 + 5 \cdot 9 = 46$ čísel, neboť součet dvou čísel z 0, 1, 2, 3, 4, 5 je dělitelný 11 jediné v případě $0 + 0$, z množiny T_0 jsme však vybrali pouze jedno číslo.

Na druhou stranu v libovolném vyhovujícím výběru je nejvýše jedno číslo ze skupiny T_0 a nejvýše 9 čísel z každé ze skupin

$$T_1 \cup T_{10}, T_2 \cup T_9, T_3 \cup T_8, T_4 \cup T_7, T_5 \cup T_6,$$

neboť při výběru 10 čísel z některé skupiny $T_i \cup T_{11-i}$ by mezi vybranými bylo některé číslo ze skupiny T_i i některé číslo ze skupiny T_{11-i} ; jejich součet by pak byl dělitelný 11. Celkem je tedy ve výběru nejvýše $1 + 5 \cdot 9 = 46$ čísel.

C - I - 6

Levou nerovnost dokážeme ekvivalentními úpravami:

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}, \quad | \cdot 6(a+b)$$

$$3(a+b)^2 < 4(a^2+ab+b^2),$$

$$0 < (a-b)^2.$$

Poslední nerovnost vzhledem k předpokladu $a \neq b$ platí. Také pravou nerovnost ze zadání budeme ekvivalentně upravovat, začneme umocněním každé strany na druhou:

$$\frac{4(a^2+ab+b^2)^2}{9(a+b)^2} < \frac{a^2+b^2}{2}, \quad | \cdot 18(a+b)^2$$

$$8(a^2+ab+b^2)^2 < 9(a^2+b^2)(a+b)^2,$$

$$8(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+3a^2b^2) < 9(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+2a^2b^2),$$

$$6a^2b^2 < a^4+b^4+2a^3b+2ab^3.$$

Poslední nerovnost je součtem nerovností $2a^2b^2 < a^4 + b^4$ a $4a^2b^2 < < 2a^3b + 2ab^3$, které obě platí, neboť po převodu členů z levých stran na pravé dostaneme po rozkladu už zřejmé nerovnosti $0 < (a^2 - b^2)^2$, resp. $0 < 2ab(a - b)^2$.

C – S – 1

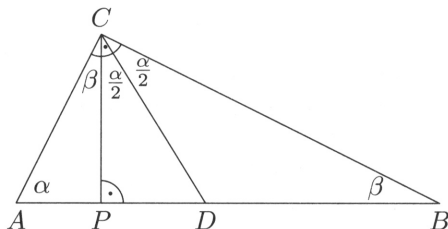
Roznásobením a dalšími ekvivalentními úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} ab + b^2c + a^2c + abc^2 &\geq abc^2 + 2abc + ab, \\ b^2c + a^2c &\geq 2abc, \\ (a - b)^2c &\geq 0. \end{aligned}$$

Podle zadání platí $c \geq 0$ a druhá mocnina reálného čísla $a - b$ je rovněž nezáporná, takže je nezáporná i levá strana upravené nerovnosti. Rovnost v ní (stejně jako v původní nerovnosti) nastane, právě když $a - b = 0$ nebo $c = 0$, tedy právě když je splněna aspoň jedna z podmínek $a = b$, $c = 0$.

C – S – 2

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB pro velikosti α, β úhlů při vrcholech A, B platí $\alpha + \beta = 90^\circ$, proto je $|\sphericalangle ACP| = 90^\circ - \alpha = \beta$ a $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DCP| = \frac{1}{2}(90^\circ - \beta) = \frac{1}{2}\alpha$, neboť přímka CD je osa úhlu BCP (obr. 5). Pro vnější úhel ADC trojúhelníku BCD tak zřejmě platí $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DBC| + |\sphericalangle BCD| = \beta + \frac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle DCA|$.



Obr. 5

Zjistili jsme, že trojúhelník ADC má u vrcholů C, D shodné vnitřní úhly, je tedy rovnoramenný, a proto $|AD| = |AC|$.

C – S – 3

Pro hledaná přirozená čísla x a y lze podmínku ze zadání vyjádřit rovnicí

$$(x + y) + (x - y) + \left(\frac{x}{y}\right) + (x \cdot y) = 2009, \quad (1)$$

ve které jsme dílčí výsledky jednotlivých operací uzavřeli.

Vyřešíme rovnici (1) vzhledem k neznámé x (v níž je, na rozdíl od neznámé y , rovnice *lineární*). Vyjde

$$x = \frac{2009y}{(y+1)^2}. \quad (2)$$

Hledáme právě ta přirozená čísla y , pro která má nalezený zlomek celočíselnou hodnotu, což lze vyjádřit vztahem $(y+1)^2 \mid 2009y$. Protože čísla y a $y+1$ jsou nesoudělná, jsou nesoudělná i čísla y a $(y+1)^2$, takže musí platit $(y+1)^2 \mid 2009 = 7^2 \cdot 41$. Protože $y+1$ je celé číslo větší než 1 (a činitele 7, 41 jsou prvočísla), poslední podmínce vyhovuje pouze hodnota $y = 6$, které po dosazení do (2) odpovídá $x = 246$. (Protože rovnice (1) a (2) jsou v oboru přirozených čísel ekvivalentní, není zkouška nezbytná.)

Hledaná čísla v uvažovaném pořadí jsou 246 a 6.

Poznámka. Úvaze o nesoudělnosti čísel y a $y+1$ se lze vyhnout: z rovnice (1) plyne, že podíl x/y je celé číslo. Dosadíme-li do ní $x = ky$, kde k je vhodné přirozené číslo, dostaneme po úpravě $k(y+1)^2 = 2009$, odkud podle rozkladu čísla 2009 na prvočinitele zjistíme, že může být jedině $k = 41$ a $y+1 = 7$, tedy $y = 6$ a $x = ky = 246$.

C – II – 1

Výraz V je zřejmě definován pro všechna reálná čísla x .

a) Protože $x^4 + 1 > 0$ pro každé x , je nerovnost $V(x) \geq 3$ ekvivalentní nerovnosti $5x^4 - 4x^2 + 5 \geq 3(x^4 + 1)$ neboli $2x^4 - 4x^2 + 2 \geq 0$. Výraz na levé straně je roven $2(x^2 - 1)^2$, takže je nezáporný pro každé x .

b) Využijme následující úpravu:

$$V(x) = \frac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1} = \frac{5(x^4 + 1)}{x^4 + 1} - \frac{4x^2}{x^4 + 1} = 5 - \frac{4x^2}{x^4 + 1}.$$

Protože zlomek $4x^2/(x^4 + 1)$ je díky sudým mocninám proměnné x pro libovolné reálné číslo x nezáporný, nabývá výraz V své největší hodnoty

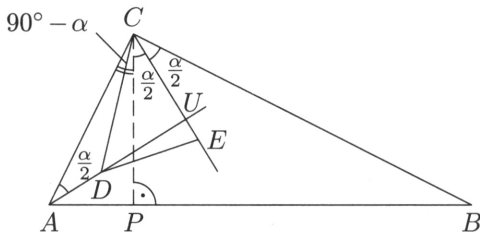
$V_{\max}$, právě když $4x^2/(x^4 + 1) = 0$, tedy právě když $x = 0$. Dostáváme tak $V_{\max} = V(0) = 5$.

C – II – 2

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme α velikost vnitřního úhlu při vrcholu A , zřejmě pak platí $|\sphericalangle ACP| = 90^\circ - \alpha$, $|\sphericalangle PCB| = \alpha$. Střed D kružnice vepsané trojúhelníku APC leží na ose úhlu PAC , takže $|\sphericalangle DAC| = \frac{1}{2}\alpha$, a podobně i $|\sphericalangle PCE| = \frac{1}{2}\alpha$. Odtud pro velikost úhlu AUC v trojúhelníku AUC , kde U je průsečík polopřímek AD a CE (obr. 6), vychází

$$|\sphericalangle AUC| = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + \frac{1}{2}\alpha) - \frac{1}{2}\alpha = 90^\circ.$$

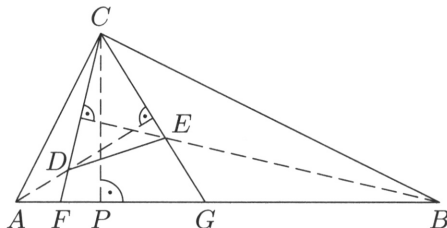
To znamená, že polopřímka AD je kolmá na CE , úsečka DU je tudíž výška v trojúhelníku DEC . Úplně stejně zjistíme, že i polopřímka BE



Obr. 6

(jinak osa úhlu ABC) je kolmá na CD . Dostáváme tak, že průsečík polopřímek AD a BE , což je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC , je zároveň i průsečíkem výšek trojúhelníku DEC .

Jiné řešení. Označme F a G odpovídající průsečíky přímk CD a CE se stranou AB (obr. 7). Podle tvrzení úlohy C–S–2 je trojúhelník CAG



Obr. 7

rovnoramenný se základnou CG . Osa AD úhlu CAG rovnoramenného trojúhelníku CAG je tudíž i jeho osou souměrnosti, a je proto kolmá na základnu CG , tedy i na CE . Podobně zjistíme, že i trojúhelník CBF je rovnoramenný se základnou CF , takže osa BE úhlu FBC je kolmá na CF , tedy i na CD . Průsečík obou os AD a BE je tak nejen středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC , ale i průsečíkem výšek trojúhelníku CDE , což jsme měli dokázat.

C – II – 3

Podle zbytků při dělení devíti rozdělíme všech 99 uvažovaných čísel do devíti jedenáctiprvkových tříd $T_0, T_1, \dots, T_8$ (do třídy T_i patří všechna čísla se zbytkem i):

$$T_0 = \{9, 18, 27, \dots, 99\},$$

$$T_1 = \{1, 10, 19, \dots, 91\},$$

$$\vdots$$

$$T_8 = \{8, 17, 26, \dots, 98\}.$$

a) Naším úkolem je dokázat, že v $T_0 \cup T_3 \cup T_6$ leží nejvýše čtyři vybraná čísla. Z každé ze tříd T_0, T_3, T_6 mohou pocházet nejvýše dvě z vybraných čísel (součet libovolných tří čísel z jedné takové třídy už totiž dělitelný devíti je). Protože součet libovolných tří čísel, která po jednom leží ve třídách T_0, T_3 a T_6 , je devíti dělitelný, aspoň jedna z těchto tříd žádné vybrané číslo neobsahuje. Z obou vyslovených závěrů plyne dokazované tvrzení: vybraných čísel dělitelných třemi je totiž nejvýše $2 + 2 + 0 = 4$.

b) Ukažme, že vyhovující výběr může obsahovat 26 čísel. Vybereme po dvou číslech z T_0, T_3 a po 11 číslech (tedy všechna čísla) z T_1 a T_2 . Dostaneme tak celkem $2 \cdot 2 + 2 \cdot 11 = 26$ čísel; přitom součet libovolných tří z nich dává při dělení devíti zbytek alespoň $0 + 0 + 1 = 1$, nejvýše však $2 + 3 + 3 = 8$, takže devíti dělitelný být nemůže.

C – II – 4

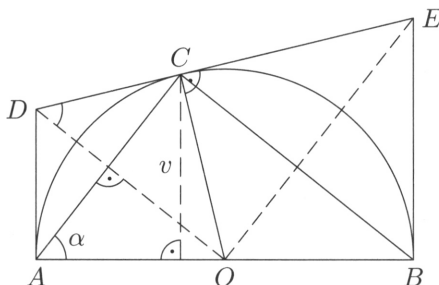
Označme O střed opsané kružnice, tedy střed přepony AB daného pravoúhlého trojúhelníku ABC , a v velikost jeho výšky na přeponu (obr. 8). Trojúhelník EDO je zřejmě rovněž pravoúhlý, protože jeho strany DO a EO jsou kolmé na odvěsny trojúhelníku ABC ; přitom jeho výškou na přeponu je úsečka OC (o velikosti $\frac{1}{2}c$). Vzhledem k souměr-

nosti úsečky AC podle osy OD platí pro jeho úhel při vrcholu D , že $|\sphericalangle CDO| = 90^\circ - |\sphericalangle COD| = 90^\circ - |\sphericalangle AOD| = \alpha$. Trojúhelníky EDO a ABC jsou tudíž podobné (*uu*). Koeficient k této podobnosti je dán poměrem délek odpovídajících výšek na přepony, takže $k = |OC|/v = \frac{1}{2}c/v$, a protože $vc = 2S$, je

$$k = \frac{c^2}{4S}.$$

V uvedené podobnosti odpovídá přeponě AB přepona DE , proto pro její velikost platí

$$|DE| = kc = \frac{c^3}{4S}.$$



Obr. 8

Jiné řešení. Ze souměrnosti tečen z bodu ke kružnici plyne, že oba trojúhelníky ACD i BCE jsou rovnoramenné, $|AD| = |DC|$, $|BE| = |CE|$. Rovnoramenné jsou i trojúhelníky ACO a BCO , kde O je střed přepony AB (ramena obou trojúhelníků mají velikost poloměru kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku ABC , což je $\frac{1}{2}c$). Ukážeme, že jde o dvě dvojice podobných trojúhelníků $ACD \sim BCO$ a $ACO \sim BCE$. K tomu si stačí všimnout, že ve čtyřúhelníku $AOCD$, který je složen ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků, platí $|\sphericalangle CDA| = 180^\circ - |\sphericalangle AOC| = |\sphericalangle COB|$. Rovnoramenné trojúhelníky ACD a BCO jsou tedy podobné podle věty *uu*. Z této podobnosti plyne rovnost $|CD| : |CA| = |CO| : |CB|$, takže při běžném označení odvěsen dostáváme $|CD| = \frac{1}{2}cb/a$, a z podobnosti trojúhelníků ACO a BCE pak $|CE| = \frac{1}{2}ca/b$. Celkem tak je

$$|DE| = |DC| + |CE| = \frac{cb}{2a} + \frac{ca}{2b} = \frac{cb^2 + ca^2}{2ab} = \frac{c(a^2 + b^2)}{2 \cdot 2S} = \frac{c^3}{4S}.$$

Poznámky. Podobnost zmíněných rovnoramenných trojúhelníků můžeme odvodit také tak, že si všimneme rovnosti odpovídajících úhlů ACO a BCE při základnách: oba totiž doplňují úhel OCB do pravého úhlu (ACB , resp. OCE). Proto $ACO \sim BCE$.

Další možnost skýtá objevení rovnosti $|\sphericalangle ADO| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$ (ramena jednoho úhlu jsou kolmá na ramena druhého). Z pravoúhlého trojúhelníku ODA tak máme $|AO| : |AD| = \operatorname{tg} |\sphericalangle ADO| = \operatorname{tg} \alpha = a : b$, takže $|CD| = |AD| = \frac{1}{2}cb/a$, a analogicky pro pravoúhlý trojúhelník OEB .

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo dělitelné osmi, jehož poslední číslice je 8. Kdybychom poslední číslici nahradili číslicí 7, získali bychom číslo dělitelné devíti. Kdybychom však poslední číslici nahradili číslicí 9, získali bychom číslo dělitelné sedmi. Určete číslo, které je napsané na tabuli.

(Peter Novotný)

B – I – 2

Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro které platí

$$x^2 + xy = y^2 + z^2,$$

$$z^2 + zy = y^2 + x^2.$$

(Jaroslav Švrček)

B – I – 3

Na straně BC , resp. CD rovnoběžníku $ABCD$ určete body E , resp. F tak, aby úsečky EF , BD byly rovnoběžné a trojúhelníky ABE , AEF a AFD měly stejné obsahy.

(Jaroslav Zhouf)

B – I – 4

Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3 . Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli.

(Ján Mazák)

B – I – 5

Trojúhelníku ABC je opsána kružnice k . Osa strany AB protne kružnici k v bodě K , který leží v polorovině opačné k polorovině ABC . Osy stran AC a BC protnou přímkou CK po řadě v bodech P a Q . Dokažte, že trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné. (Leo Boček)

B – I – 6

Najděte všechny dvojice celých čísel (m, n) , pro něž je hodnota výrazu

$$\frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2}$$

celé kladné číslo.

(Vojtech Bálint)

B – S – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + y &= 2, \\ x - y &= 2a, \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

o neznámých x a y a reálném parametru a .

(Jaroslav Švrček)

B – S – 2

Pro vnitřní bod P strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC označme K a L paty kolmic z bodu P na přímky AC a BC . Sestrojte takový bod P , pro který přímka CP půlí úsečku KL . (Pavel Calábek)

B – S – 3

Číslo nazveme *magickým*, právě když se dá vyjádřit jako součet trojmístného čísla m a trojmístného čísla m' zapsaného stejnými číslicemi v opačném pořadí. Některá magická čísla lze takto vyjádřit více způsoby; například $1554 = 579 + 975 = 777 + 777$. Určete všechna magická čísla, která mají takových vyjádření $m + m'$ co nejvíce. (Na pořadí m a m' nebereme zřetel.) (Aleš Kobza)

B – II – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y = 1,$$

$$x - y = a,$$

$$-4ax + 4y = z^2 + 4$$

o neznámých x , y , z a reálném parametru a .

(Jaroslav Švrček)

B – II – 2

Na desce 5×5 hrajeme hru lodě. Ze čtyř polí desky je vytvořena jedna loď některého z tvarů



Můžeme se zeptat na libovolné pole desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí.

- Navrhnete osm polí, na něž se stačí otázat, abychom měli jistotu zásahu lodě.
- Zdůvodněte, že žádných sedm otázek takovou jistotu nedává.

(Ján Mazák)

B – II – 3

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC , který není rovnoramenný. Označme K průsečík osy úhlu ACB s osou strany AB . Přímka CK protne výšky z vrcholů A a B v bodech, které označíme po řadě P a Q . Předpokládejme, že trojúhelníky AKP a BKQ mají stejný obsah. Určete velikost úhlu ACB .

(Ján Mazák)

B – II – 4

K libovolnému přirozenému číslu určíme jeho zbytky při dělení každým z deseti přirozených čísel $2, 3, 4, \dots, 11$ a těchto deset zbytků (některé mohou být nulové) sečteme. Určete všechna taková čísla menší než $25\,000$, která mají uvedený součet co nejmenší. (Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.)

(Jaromír Šimša)

Řešení úloh

B – I – 1

Označme n trojmístné číslo určené prvním trojčíslicím (zleva) hledaného čtyřmístného čísla, které se pak rovná $10n + 8$. Podle zadání úlohy platí

$$8 \mid 10n + 8, \quad (1)$$

$$9 \mid 10n + 7, \quad (2)$$

$$7 \mid 10n + 9. \quad (3)$$

Ze vztahu (1) plyne $8 \mid 10n$ neboli $4 \mid 5n$. Čísla 4 a 5 jsou nesoudělná, proto $4 \mid n$ neboli $n = 4k$, kde k je přirozené číslo. Dosazením $n = 4k$ do vztahu (2) dostaneme $9 \mid 40k + 7$ neboli $9 \mid 4k + 7$. Z tabulky zbytků čísel $4k + 7$ při dělení devíti

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4k + 7$	7	2	6	1	5	0	4	8	3

vidíme, že toto číslo je dělitelné devíti, právě když číslo k při dělení devíti dává zbytek 5. Proto $k = 9l + 5$, kde l je celé číslo, takže $n = 4k = 36l + 20$. Dosazením takového n do vztahu (3) dostaneme $7 \mid 360l + 209$ neboli $7 \mid 3l - 1$. Opět sestavíme tabulku zbytků, tentokrát při dělení čísla $3l - 1$ sedmi:

l	0	1	2	3	4	5	6
$3l - 1$	6	2	5	1	4	0	3

Vidíme, že $7 \mid 3l - 1$, právě když $l = 7m + 5$, kde m je celé číslo. Odtud dostáváme, že všechna celočíselná n splňující trojici podmínek (1)–(3) jsou tvaru $n = 36l + 20 = 252m + 200$.

Dodejme, že namísto sestavování tabulek jsme mohli využít úprav

$$40k + 7 = 36k + 4(k - 5) + 27,$$

$$360l + 209 = 357l + 3(l - 5) + 224,$$

z nichž bychom jako dříve dostali $9 \mid k - 5$ a $7 \mid l - 5$.

Číslo $n = 252m + 200$ je trojmístné jedině pro $m \in \{0, 1, 2, 3\}$; hledané n je proto z množiny $\{200, 452, 704, 956\}$ a na tabuli bylo napsáno jedno z čísel 2 008, 4 528, 7 048, 9 568. Zkouškou (která ovšem při našem postupu není nutná) můžeme ověřit, že každé z těchto čtyř čísel vyhovuje zadání úlohy.

Jiné řešení. Při druhém postupu budeme úvahy o dělitelnosti výhodně zapisovat kongruencemi.¹ Zápis $a \equiv b \pmod{m}$ (čteme „ a je kongruentní s b podle modulu m “) znamená, že čísla a , b dávají při dělení číslem m stejné zbytky neboli $m \mid a - b$.

Označme N hledané čtyřmístné číslo končící číslicí 8. Protože při její záměně číslicí 7, resp. 9 dostaneme číslo $N - 1$, resp. $N + 1$, všechny podmínky ze zadání úlohy lze vyjádřit čtyřmi kongruencemi

$$N \equiv 8 \pmod{10}, \quad (4)$$

$$N \equiv 0 \pmod{8}, \quad (5)$$

$$N - 1 \equiv 0 \pmod{9}, \quad (6)$$

$$N + 1 \equiv 0 \pmod{7}. \quad (7)$$

Ze vztahu (5) plyne $N = 8k$, kde k je celé číslo. Dosazením do vztahu (4) dostaneme $8k \equiv 8 \pmod{10}$ neboli $4k \equiv 4 \pmod{5}$, což po dělení číslem 4 (nesoudělným s číslem 5) vede k podmínce $k \equiv 1 \pmod{5}$. Proto $k = 5l + 1$, kde l je celé číslo. Dosazením $N = 8k = 40l + 8$ do vztahu (6) obdržíme podmínku $40l + 7 \equiv 0 \pmod{9}$. Její úpravou dostaneme

$$40l \equiv -7 \equiv -7 + 9 \cdot 23 = 200 \pmod{9}$$

a po vydělení číslem 40 (nesoudělným s číslem 9) dojdeme k podmínce $l \equiv 5 \pmod{9}$. Existuje tedy celé číslo m tak, že $l = 9m + 5$. Dosazením $N = 40l + 8 = 360m + 208$ do vztahu (7) dostaneme $360m + 209 \equiv 0 \pmod{7}$ neboli $3m \equiv 1 \pmod{7}$. Úpravou

$$3m \equiv 1 \equiv 1 + 2 \cdot 7 = 15 \pmod{7}$$

po vydělení číslem 3 vyjde $m \equiv 5 \pmod{7}$, takže $m = 7n + 5$, kde n je celé číslo. Hledané N je proto tvaru $N = 360m + 208 = 2520n + 2008$. Takové N je čtyřmístné, právě když $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Na tabuli proto mohlo být napsáno kterékoliv číslo z množiny $\{2\,008, 4\,528, 7\,048, 9\,568\}$ a žádné jiné.

¹ S tímto způsobem počítání se zbytkovými třídami se lze seznámit v brožuře Aloise Apfelbecka: *Kongruence*, Mladá fronta, edice Škola mladých matematiků, Praha 1968.

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme po úpravě

$$(z - x)(2z + 2x + y) = 0.$$

Jsou proto možné dva případy, které rozebereme samostatně.

a) *Případ* $z - x = 0$. Dosazením $z = x$ do první rovnice soustavy dostaneme $x^2 + xy = y^2 + x^2$ neboli $y(x - y) = 0$. To znamená, že platí $y = 0$ nebo $x = y$. V prvním případě dostáváme trojice $(x, y, z) = (x, 0, x)$, ve druhém $(x, y, z) = (x, x, x)$; takové trojice jsou řešeními dané soustavy pro libovolné reálné číslo x , jak snadno ověříme dosazením (i když taková zkouška při našem postupu vlastně není nezbytná).

b) *Případ* $2z + 2x + y = 0$. Dosazením $y = -2x - 2z$ do první rovnice soustavy dostaneme

$$x^2 + x(-2x - 2z) = (-2x - 2z)^2 + z^2 \quad \text{neboli} \quad 5(x + z)^2 = 0.$$

Poslední rovnice je splněna, právě když $z = -x$, tehdy ovšem $y = -2x - 2z = 0$. Dostáváme trojice $(x, y, z) = (x, 0, -x)$, které jsou řešeními dané soustavy pro každé reálné x , jak ověříme dosazením. (O takové zkoušce platí totéž co v případě a).)

Odpověď. Všechna řešení (x, y, z) dané soustavy jsou trojice tří typů:

$$(x, x, x), \quad (x, 0, x), \quad (x, 0, -x),$$

kde x je libovolné reálné číslo.

Jiné řešení. Obě rovnice soustavy sečteme. Po úpravě dostaneme rovnici

$$y(x + z - 2y) = 0$$

a opět rozlišíme dvě možnosti.

a) *Případ* $y = 0$. Z první rovnice soustavy ihned vidíme, že $x^2 = z^2$, neboli $z = \pm x$. Zkouškou ověříme, že každá z trojic $(x, 0, x)$ a $(x, 0, -x)$ je pro libovolné reálné x řešením.

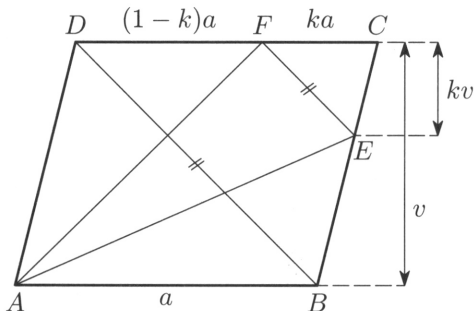
b) *Případ* $x + z - 2y = 0$. Dosazením $y = \frac{1}{2}(x + z)$ do první rovnice soustavy dostaneme

$$x^2 + \frac{x(x + z)}{2} = \frac{(x + z)^2}{4} + z^2, \quad \text{po úpravě} \quad x^2 = z^2.$$

Platí tedy $z = -x$ nebo $z = x$. Dosazením do rovnosti $x + z - 2y = 0$ v prvním případě dostaneme $y = 0$, ve druhém případě $y = x$. Odpovídající trojice $(x, 0, -x)$ a (x, x, x) jsou řešeními pro každé reálné x (první z nich jsme ovšem našli již v části a)).

B – I – 3

Označme a velikost stran AB a CD a v vzdálenost jejich přímek, která je zároveň rovna výšce trojúhelníku AFD z vrcholu A (obr. 9). Z podmínky $EF \parallel BD$ podle věty *uu* vyplývá, že trojúhelníky BCD a ECF jsou podobné; označme $k \in (0, 1)$ koeficient jejich podobnosti. Jakmile ho vypočteme, bude úloha vyřešena.



Obr. 9

Protože $|FC| = ka$, $|FD| = (1 - k)a$ a výšky trojúhelníků ECF , ABE ze společného vrcholu E mají velikosti kv , resp. $(1 - k)v$, pro obsahy trojúhelníků AFD a ABE platí

$$S_{AFD} = \frac{(1 - k)av}{2} = \frac{a(1 - k)v}{2} = S_{ABE},$$

takže oba obsahy se rovnají pro libovolné $k \in (0, 1)$. Protože obsah trojúhelníku ECF má hodnotu $S_{ECF} = \frac{1}{2}ka \cdot kv = \frac{1}{2}k^2av$ a obsah celého rovnoběžníku $ABCD$ je dán vzorcem $S_{ABCD} = av$, můžeme obsah trojúhelníku AEF vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} S_{AEF} &= S_{ABCD} - S_{ABE} - S_{ECF} - S_{AFD} = \\ &= av \left(1 - \frac{1}{2}(1 - k) - \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}(1 - k) \right) = av \left(k - \frac{1}{2}k^2 \right). \end{aligned}$$

Obsahy trojúhelníků ABE , AFD proto budou shodné s obsahem trojúhelníku AEF , právě když bude platit

$$\frac{1}{2}(1 - k) = k - \frac{1}{2}k^2 \quad \text{neboli} \quad k^2 - 3k + 1 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má kořeny

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

z nichž podmínce $k \in (0, 1)$ vyhovuje pouze kořen $k = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$. Dodejme, že pro takové k platí

$$1 - k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{k}{1 - k}.$$

Odpověď. Hledané body E, F jsou určeny poměry

$$|CE| : |EB| = |CF| : |FD| = (\sqrt{5} - 1) : 2.$$

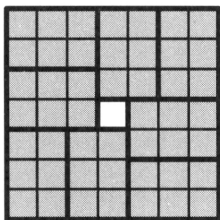
Poznámka. Rovnost $(1 - k) : 1 = k : (1 - k)$ ze závěru řešení znamená, že body E, F dělí příslušné strany rovnoběžníku v tzv. *zlatém poměru*. Vyjadřují to rovnosti

$$|CE| : |EB| = |EB| : |BC| \quad \text{a} \quad |CF| : |FD| = |FD| : |DC|.$$

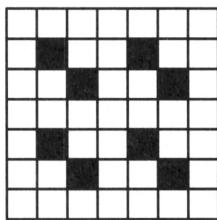
B – I – 4

Podle obr. 10 můžeme na desku umístit 8 disjunktních obdélníků 2×3 (střední políčko desky zůstane prázdné). Abychom jistě zasáhli loď, musíme se zeptat na alespoň jedno políčko v každém z osmi vyznačených obdélníků, proto je nutný počet otázek alespoň 8.

Na obr. 11 je uveden příklad výběru osmi polí, na která se stačí ptát, aby se už mimo ně nedala na desku umístit žádná loď 2×3 . Proto těchto 8 otázek k zasažení lodi vždy stačí.



Obr. 10

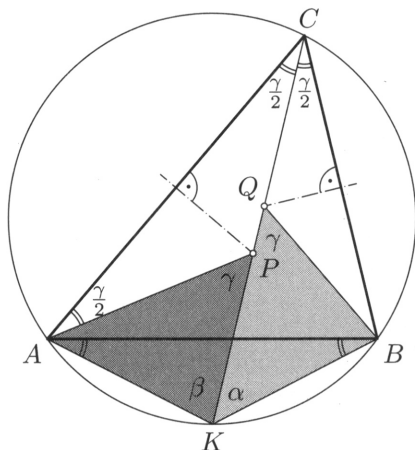


Obr. 11

Z obou uvedených úvah plyne následující závěr.

Odpověď. Nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli, je právě 8.

Označme α, β, γ obvyklým způsobem velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC (obr. 12). Bod K leží na ose úsečky AB , proto $|AK| = |KB|$. Trojúhelník AKB je rovnoramenný se základnou AB , jeho vnitřní úhly



Obr. 12

při vrcholech A a B jsou tudíž shodné. Podle věty o obvodových úhlech jsou shodné i úhly BCK a BAK , resp. ACK a ABK , jsou proto shodné i úhly BCK a ACK . Polopřímka CK je tudíž osou úhlu ACB :

$$|\sphericalangle ACK| = |\sphericalangle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Protože bod P leží na ose strany AC , je trojúhelník ACP rovnoramenný a jeho vnitřní úhly při základně AC mají velikost $\frac{1}{2}\gamma$, takže jeho vnější úhel APK při vrcholu P má velikost $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \gamma$. Stejně tak z rovnoramenného trojúhelníku BCQ usoudíme, že i velikost úhlu BQK je γ . Podle věty o obvodových úhlech jsou shodné úhly ABC a AKC , tedy úhel AKC (neboli úhel AKP) má velikost β a — zcela analogicky — úhel BKQ má velikost α .

V každém z trojúhelníků AKP a BKQ již známe velikosti dvou vnitřních úhlů (β, γ , resp. α, γ), takže vidíme, že zbývající úhly KAP a KBQ mají velikosti α , resp. β .

Z předchozího plyne, že trojúhelníky AKP a BKQ jsou shodné podle věty *usu*, neboť mají shodné strany AK a KB i obě dvojice k nim přilehlých vnitřních úhlů.

K uvedenému postupu dodejme, že výpočet úhlů KAP a KBQ přes úhly APK a BQK lze obejít takto: shodnost úhlů KAP a BAC (resp. KBQ a ABC) plyne ze shodnosti úhlů KAB a PAC (resp. KBA a QBC).

B – I – 6

Nejprve si všimneme, že jmenovatel zlomku lze postupným vytýkáním rozložit na součin $(m+2)(n-1)$. Proto bude výhodné položit $a = m+2$, $b = n-1$ a pro nová neznámá (nenulová!) celá čísla a , b zkoumat, kdy je hodnota daného výrazu

$$V = \frac{m+3n-1}{mn+2n-m-2} = \frac{(a-2)+3(b+1)-1}{ab} = \frac{a+3b}{ab}$$

(jak vyžaduje zadání) *celé kladné* číslo (používejme dále obvyklý termín *přirozené číslo*). Uveďme dva možné přístupy k řešení takové otázky.

Při prvním způsobu využijeme rozkladu

$$V = \frac{a+3b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{3}{a}$$

a zřejmých odhadů

$$0 < \left| \frac{1}{b} \right| \leq 1, \quad 0 < \left| \frac{3}{a} \right| \leq 3.$$

Kdyby platilo $a < 0$, bylo by $3/a < 0$, a tudíž $V < 1/b \leq 1$, tedy V by nebylo přirozené číslo. Proto nutně platí $a > 0$.

Pro $a > 6$ je $3/a < \frac{1}{2}$, a tedy $V < 1/b + \frac{1}{2}$, takže nerovnost $V \geq 1$ platí, jedině když $1/b > \frac{1}{2}$, což splňuje jedině celé b , totiž $b = 1$, pro které pak ovšem je $1 < V < \frac{3}{2}$. Proto musí platit $1 \leq a \leq 6$. Těchto šest možností jednotlivě rozebereme:

- ▷ $a = 1$. Číslo $V = 3 + 1/b$ je celé jedině pro $b = \pm 1$, kdy je i kladné. V původních neznámých dostáváme dvě řešení $(m, n) = (-1, 2)$ a $(m, n) = (-1, 0)$.
- ▷ $a = 2$. Číslo $V = \frac{3}{2} + 1/b$ je přirozené, právě když $b = \pm 2$; odpovídající řešení jsou $(m, n) = (0, 3)$ a $(m, n) = (0, -1)$.
- ▷ $a = 3$. Číslo $V = 1 + 1/b$ je přirozené, právě když $b = 1$, tehdy $(m, n) = (1, 2)$.

- ▷ $a = 4$. Číslo $V = \frac{3}{4} + 1/b$ je přirozené, právě když $b = 4$, tehdy $(m, n) = (2, 5)$.
- ▷ $a = 5$. Číslo $V = \frac{3}{5} + 1/b$ zřejmě není celé pro žádné celé b .
- ▷ $a = 6$. Číslo $V = \frac{1}{2} + 1/b$ je přirozené, právě když $b = 2$, tehdy $(m, n) = (4, 3)$.

Odpověď. Existuje právě 7 dvojic celých čísel (m, n) , pro které je hodnota daného výrazu V celým kladným číslem, jsou to dvojice

$$(m, n) \in \{(-1, 2), (-1, 0), (0, 3), (0, -1), (1, 2), (2, 5), (4, 3)\}.$$

Jiné řešení. Hledáme nenulová celá a, b , pro něž $a + 3b = kab$ pro vhodné přirozené k . Označme $d \geq 1$ největší společný dělitel takových čísel a, b . Pak $a = xd$ a $b = yd$ pro celá nesoudělná čísla x, y , jež splňují rovnici $(x + 3y)d = kxyd^2$ neboli $x + 3y = kxyd$. Odtud plyne, že číslo y dělí nesoudělné číslo x . To je možné, jedině když $y = \pm 1$.

V případě $y = 1$ máme rovnici $x + 3 = kxd$ neboli $3 = x(kd - 1)$. Protože platí $kd \geq 1$ (čísla k, d jsou přirozená), je buď $x = 1$ a $kd - 1 = 3$ (pak $kd = 4$, a tedy $d \in \{1, 2, 4\}$, takže $(a, b) = (d, d)$ je jedna z dvojic $(1, 1), (2, 2), (4, 4)$), nebo je $x = 3$ a $kd - 1 = 1$ (pak $kd = 2$, a tedy $d \in \{1, 2\}$, takže $(a, b) = (3d, d)$ je jedna z dvojic $(3, 1), (6, 2)$).

V případě $y = -1$ máme rovnici $x - 3 = -kxd$ neboli $3 = x(1 + kd)$, což vzhledem k nerovnosti $1 + kd \geq 2$ znamená, že $x = 1$ a $1 + kd = 3$, takže je $kd = 2$, a tedy $d \in \{1, 2\}$, proto $(a, b) = (d, -d)$ je jedna z dvojic $(1, -1), (2, -2)$.

Zjistili jsme, že existuje sedm vyhovujících dvojic (a, b) , vypsát odpovídající řešení $(m, n) = (a - 2, b + 1)$ je už nasnadě (viz odpověď výše).

B – S – 1

Sečtením druhé a třetí rovnice dostaneme $2x = 2a + 1$, odečtením druhé rovnice od třetí $2y = -2a + 1$. Odtud vyjádříme

$$x = a + \frac{1}{2}, \quad y = -a + \frac{1}{2} \tag{1}$$

a dosadíme do první rovnice původní soustavy. Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{3}{2} = 0, \tag{2}$$

která má kořeny $a_1 = -1$ a $a_2 = \frac{3}{2}$. Pro každou z těchto dvou (jedině možných) hodnot parametru a již snadno stanovíme neznámé x a y dosazením do vzorců (1).

úhlech, takže body K a L jsou souměrně sdruženy podle přímky CP . Proto tětíva CP půlí úsečku KL .

Odpověď. Existuje právě jeden vnitřní bod strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC , pro který úsečka CP půlí úsečku KL . Je to průsečík osy vnitřního úhlu při jeho vrcholu C se stranou AB .

B – S – 3

Každé trojmístné číslo má vyjádření $m = 100a + 10b + c$, kde $a, b, c, a \neq 0$, jsou jeho číslice. Trojmístné číslo zapsané stejnými číslicemi v opačném pořadí má pak vyjádření $m' = 100c + 10b + a, c \neq 0$. Protože na pořadí čísel m a m' není brán zřetel, pro určitost předpokládejme, že $m \leq m'$ neboli $a \leq c$, kde $a, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ a $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Pro magické číslo x podle zavedeného označení číslic platí

$$x = m + m' = 101(a + c) + 20b.$$

Vidíme, že hodnota x nezáleží tolik na jednotlivých číslicích a a c jako na jejich součtu $s = a + c$, který může nabývat hodnot $s \in \{2, 3, \dots, 18\}$. Dále už budeme pracovat pouze s vyjádřením $x = 101s + 20b$.

Předpokládejme na okamžik, že se jako součet $101s + 20b$ dá některé magické číslo x zapsat dvěma různými způsoby:

$$x = 101s + 20b = 101s' + 20b'. \quad (1)$$

Z rovnosti $101(s - s') = 20(b - b')$ a nesoudělnosti čísel 101 a 20 vyplývá, že číslo 101 musí dělit číslo $b - b'$. Protože však b a b' jsou číslice, platí $-9 \leq b - b' \leq 9$. V tomto intervalu najdeme jediné číslo dělitelné číslem 101, a to číslo 0. Je proto $b - b' = 0$ neboli $b = b'$, a tudíž i $s = s'$. To však odporuje předpokladu, že číslo x má dvě různá vyjádření tvaru (1). Znamená to, že ve vyjádření $x = 101s + 20b$ má každé magické číslo x jednoznačně určenou číslici b i jednoznačně určený součet s .

Počet způsobů, kterými lze magické číslo vyjádřit jako součet $m + m'$ neboli $101s + 20b$, se proto rovná počtu způsobů, kterými lze vyjádřit odpovídající hodnotu s jako součet dvou číslic a a c , kde $1 \leq a \leq c \leq 9$. V množině $\{2, 3, \dots, 18\}$ má největší počet takových vyjádření číslo $s = 10$, jež se dá vyjádřit právě pěti vyhovujícími součty:

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5.$$

Ostatní čísla mají takových vyjádření méně.

Skutečně: v případě $s \leq 9$ z rovnosti $a + c \leq 9$ a předpokladu $a \leq c$ plyne $a \leq 4$, takže menší číslice a nabývá nejvýše čtyř hodnot stejně jako větší číslice c v případě $s \geq 11$, kdy ze vztahů $a + c \geq 11$ a $a \leq c$ plyne $c \geq 6$.

Nejvíce (pěti) součty $m + m'$ se dají vyjádřit magická čísla tvaru $101 \cdot 10 + 20b$, kde $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, jedná se tedy o čísla z desetiprvkové množiny

$$\{1\,010, 1\,030, 1\,050, \dots, 1\,190\}.$$

B – II – 1

Sečtením první a druhé rovnice dané soustavy dostaneme $2x = 1 + a$, odečtením druhé rovnice od první $2y = 1 - a$. Odtud

$$x = \frac{1}{2}(1 + a), \quad y = \frac{1}{2}(1 - a). \quad (1)$$

Dosadíme-li za x a y do třetí rovnice původní soustavy, dostaneme rovnici

$$-2a(1 + a) + 2(1 - a) = z^2 + 4 \quad \text{neboli} \quad z^2 + 2a^2 + 4a + 2 = 0,$$

kterou upravíme na tvar

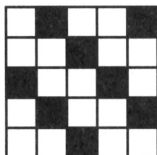
$$z^2 + 2(a + 1)^2 = 0.$$

Oba sčítanci na levé straně poslední rovnice jsou nezáporná čísla. Jejich součet je 0, právě když $z = 0$, $a = -1$. Dosazením těchto hodnot do (1) dostaneme $x = 0$, $y = 1$.

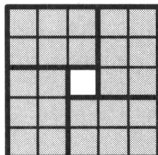
Závěr: Daná soustava rovnic má řešení pouze pro $a = -1$, a to $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. Zkouška při tomto postupu není nutná.

B – II – 2

a) Stačí se otázat například na černá pole v obr. 14: v každém řádku i sloupci jsou vedle sebe nejvýše dvě bílá pole, zatímco každá z lodí zabere v jednom z obou směrů právě tři po sobě stojící pole. Aspoň jedno z nich tedy bude černé.



Obr. 14

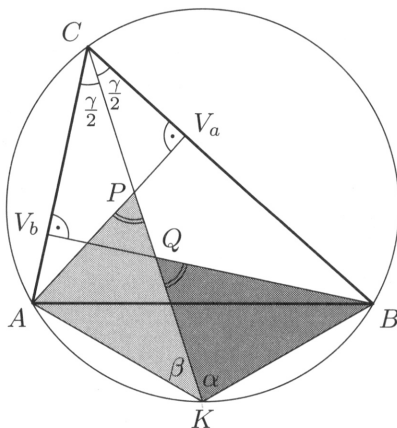


Obr. 15

b) K zásahu lodě na desce o rozměrech 3×2 jsou potřeba alespoň dvě otázky, protože žádné její pole neleží ve všech lodích, které na tuto desku můžeme umístit. Na desce 5×5 můžeme vymezit čtyři nepřekrývající se oblasti 3×2 (obr. 15). I kdyby loď byla umísťována pouze do těchto čtyř oblastí, sedm otázek na její zásah nestačí — podle předchozí úvahy totiž potřebujeme aspoň $4 \times 2 = 8$ otázek.

B – II – 3

Označme vnitřní úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Ze shodnosti obvodových úhlů ACK a BCK v kružnici opsané trojúhelníku ABC plyne shodnost odpovídajících tětiv AK a BK , takže bod K půlí ten z oblouků AB , který leží proti vrcholu C (obr. 16). Podle věty o obvodových úhlech jsou velikosti úhlů AKC a BKC po řadě rovny β a α . Označme V_a , V_b paty výšek příslušných vrcholům A , B trojúhelníku ABC . Protože ABC je ostroúhlý trojúhelník, jsou body V_a a V_b vnitřní body odpovídajících stran. Velikost úhlu APK je shodná s velikostí vnitřního úhlu při vrcholu P v pravoúhlém trojúhelníku CPV_a , je tedy rovna $90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$. Stejnou velikost má analogicky i úhel BQK .



Obr. 16

Trojúhelníky AKP a BKQ mají stejný obsah, shodné strany AK a BK , a tudíž i výšky na ně, a navíc se shodují i v úhlu proti nim. Z konstrukce trojúhelníku podle dané strany, výšky na tuto stranu a protilehlého vnitřního úhlu a ze souměrnosti sestrojených řešení plyne, že

trojúhelník AKP je shodný buď s trojúhelníkem KBQ , anebo s trojúhelníkem BKQ . Jelikož trojúhelník ABC není rovnoramenný (tj. $\alpha \neq \beta$), je trojúhelník AKP shodný s trojúhelníkem KBQ . Velikost vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku PAK je $180^\circ - \beta - (90^\circ - \frac{1}{2}\gamma) = 90^\circ - \beta + \frac{1}{2}\gamma$, takže z uvedené shodnosti plyne

$$90^\circ - \beta + \frac{\gamma}{2} = \alpha \quad \text{neboli} \quad 90^\circ + \frac{\gamma}{2} = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma.$$

Odtud dostáváme $\gamma = 60^\circ$. Naopak pokud $\gamma = 60^\circ$, je $|\sphericalangle APK| = |\sphericalangle BQK| = 60^\circ$ a trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné podle věty *usu*, mají tedy stejný obsah.

Závěr: Úhel ACB má velikost 60° .

B – II – 4

Uvažujme přirozené číslo $n < 25\,000$ a označme $r_2, r_3, \dots, r_{11}$ odpovídající mu zbytky po dělení čísly $2, 3, \dots, 11$. Jako součet nezáporných zbytků je příslušný součet $z = r_2 + r_3 + \dots + r_{11}$ rovněž nezáporný. V daném případě však nemůže být roven 0, protože to by znamenalo, že číslo n je dělitelné každým z prvků množiny $M = \{2, 3, 4, \dots, 11\}$, jejichž nejmenší společný násobek je $27\,720 > 25\,000$.

Ukážeme, že nejmenší možný součet je 1, a zároveň najdeme i všechna čísla n menší než 25 000 s touto vlastností.

Je-li příslušný součet roven 1, jsou všechny zbytky r_k s výjimkou jednoho rovny 0, a existuje tedy právě jedno $d \in M$ tak, že $r_d = 1$. Ukážeme, že $d = 7$ nebo $d = 11$. Nemůže zřejmě být $d \leq 5$, to by totiž nenulový zbytek odpovídal i číslu $2d \in M$. Kdyby zbytek 1 odpovídal jednomu z čísel $d = 6, 8, 9, 10$, odpovídal by nutně i jednomu z čísel 2 nebo 3.

Pokud $d = 7$, musí být hledané číslo násobkem všech čísel z $M \setminus \{7\}$, tedy násobkem čísla 3 960. Toto číslo dává při dělení 7 zbytek 5, zbytek 1 dává jeho trojnásobek $n = 3 \cdot 3\,960 = 11\,880$, který vyhovuje podmínkám úlohy, a obecně každý $(3 + 7a)$ -násobek; ovšem další násobek $10 \cdot 3\,960$ s vyhovujícím zbytkem je už větší než 25 000.

Pokud $d = 11$, musí být hledané číslo násobkem všech čísel z $M \setminus \{11\}$, tedy násobkem čísla 2 520. Protože toto číslo dává při dělení 11 zbytek 1, vyhovuje pro $d = 11$ jediné ono (další násobek $(1+11) \cdot 2\,520$ s vyhovujícím zbytkem je totiž už větší než 25 000).

Závěr: Hledaná čísla jsou dvě, a to 11 880 a 2 520.

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$2 \sin x \cos(x + y) + \sin y = 1,$$

$$2 \sin y \cos(y + x) + \sin x = 1.$$

(Jaroslav Švrček)

A – I – 2

Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice průsečíku výšek trojúhelníku ABC s průsečíkem výšek trojúhelníku ABD je rovnoběžná s přímkou CD .

(Tomáš Jurík)

A – I – 3

Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že

$$\frac{xy^2}{x+y}$$

je prvočíslo.

(Ján Mazák)

A – I – 4

Uvažujme nekonečnou aritmetickou posloupnost

$$a, a + d, a + 2d, \dots, \quad (*)$$

kde a, d jsou přirozená (tj. kladná celá) čísla.

a) Najděte příklad posloupnosti $(*)$, která obsahuje nekonečně mnoho k -tých mocnin přirozených čísel pro všechna $k = 2, 3, \dots$

- b) Najděte příklad posloupnosti $(*)$, která neobsahuje žádnou k -tou mocninu přirozeného čísla pro žádné $k = 2, 3, \dots$
- c) Najděte příklad posloupnosti $(*)$, která neobsahuje žádnou druhou mocninu přirozeného čísla, ale obsahuje nekonečně mnoho třetích mocnin přirozených čísel.
- d) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla a, d, k ($k > 1$) platí: Posloupnost $(*)$ buď neobsahuje žádnou k -tou mocninu přirozeného čísla, anebo obsahuje nekonečně mnoho k -tých mocnin přirozených čísel.
- (Jaroslav Zhouf)

A – I – 5

V každém vrcholu pravidelného 2008úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout:

- a) na 8 hromádek po 251 minci,
 b) na 251 hromádek po 8 mincích.
- (Radek Horenský)

A – I – 6

Je dán trojúhelník ABC . Uvnitř stran AC, BC jsou dány body E, D tak, že $|AE| = |BD|$. Označme M střed strany AB a P průsečík přímk AD a BE . Dokažte, že obraz bodu P v středové souměrnosti se středem M leží na ose úhlu ACB .

(Ján Mazák)

A – S – 1

Zjistěte, pro které dvojice kladných celých čísel m a n platí

$$\sqrt{m^2 - 4} < 2\sqrt{n} - m < \sqrt{m^2 - 2}.$$

(Jaromír Šimša)

A – S – 2

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž vnitřní úhel při vrcholu A má velikost 45° . Označme D patu výšky z vrcholu C . Uvažujme dále

libovolný vnitřní bod P výšky CD . Dokažte tvrzení: Přímký AP a BC jsou navzájem kolmé, právě když úsečky AP a BC jsou shodné.

(Jaroslav Švrček)

A – S – 3

Určete všechna celá čísla větší než 1, kterými lze krátit některý ze zlomků tvaru

$$\frac{3p - q}{5p + 2q},$$

kde p a q jsou nesoudělná celá čísla.

(Vojtech Bálint)

A – II – 1

Jisté čtyřmístné přirozené číslo je dělitelné sedmi. Zapišeme-li jeho číslice v opačném pořadí, dostaneme větší čtyřmístné číslo, které je rovněž dělitelné sedmi. Navíc při dělení číslem 37 dávají obě zmíněná čtyřmístná čísla stejný zbytek. Určete původní čtyřmístné číslo. (Jaromír Šimša)

A – II – 2

Na odvěsnách délek a , b pravoúhlého trojúhelníku leží po řadě středy dvou kružnic k_a , k_b . Obě kružnice se dotýkají přepony a procházejí vrcholem proti přeponě. Poloměry uvedených kružnic označme ϱ_a , ϱ_b . Určete největší kladné reálné číslo p takové, že nerovnost

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} \geq p \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

platí pro všechny pravoúhlé trojúhelníky.

(Jaroslav Švrček)

A – II – 3

Určete velikosti vnitřních úhlů α , β , γ trojúhelníku, pro něž platí

$$2 \sin \beta \sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha = 1,$$

$$2 \sin \gamma \sin(\beta + \gamma) - \cos \beta = 0.$$

(Jaroslav Švrček)

A – II – 4

Uvnitř strany BC ostroúhlého trojúhelníku ABC zvolme bod D a uvnitř úsečky AD bod P tak, aby neležel na těžnici z vrcholu C . Přímka této těžnice protne kružnici opsanou trojúhelníku CPD v bodě, který označíme K ($K \neq C$). Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKP prochází kromě bodu A dalším pevným bodem, který na výběru bodů D a P nezávisí. (Tomáš Jurík)

A – III – 1

Jsou-li všechna čísla p , $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ prvočísla, je číslo $6p+11$ složené. Dokažte. (Pavel Novotný)

A – III – 2

Na kratším z oblouků CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P . Paty kolmic z bodu P na přímky AB , AC a BD označme postupně K , L a M . Ukažte, že úhel LKM má velikost 45° , právě když $ABCD$ je čtverec. (Tomáš Jurík)

A – III – 3

Najděte nejmenší kladné číslo x , pro něž platí: Jsou-li a , b , c , d libovolná kladná čísla, jejichž součin je 1, potom

$$a^x + b^x + c^x + d^x \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

(Pavel Novotný)

A – III – 4

Zkoumejme, pro která přirozená čísla n existují právě čtyři přirozená čísla k taková, že číslo $n+k$ je dělitelem čísla $n+k^2$.

- Ukažte, že vyhovuje $n=58$, a najděte příslušná čtyři k .
- Dokažte, že sudé $n=2p$, kde $p \geq 3$, vyhovuje, právě když p i $2p+1$ jsou prvočísla.

(Nulu mezi přirozená čísla nepočítáme.) (Jaromír Šimša)

A – III – 5

V každém z vrcholů pravidelného n -úhelníku $A_1 A_2 \dots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \leq k \leq n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k , $1 \leq k \leq n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n + 1 - k$ mincí.

(Radek Horenský)

A – III – 6

V rovině ω jsou dány dva různé body O a T . Najděte množinu vrcholů všech trojúhelníků, které leží v rovině ω a mají těžiště v bodě T a střed opsané kružnice v bodě O .

(Jaromír Šimša)

Řešení úloh

A – I – 1

Použitím známých vzorců

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x\end{aligned}$$

dostaneme úpravou levé strany první rovnice

$$\begin{aligned}2 \sin x \cos(x+y) + \sin y &= 2 \sin x (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + \sin y = \\ &= 2 \sin x \cos x \cos y + (1 - 2 \sin^2 x) \sin y = \\ &= \sin 2x \cos y + \cos 2x \sin y = \\ &= \sin(2x+y).\end{aligned}$$

Podobně je levá strana druhé rovnice rovna $\sin(2y+x)$. Daná soustava je tedy ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned}\sin(2x+y) &= 1, \\ \sin(2y+x) &= 1.\end{aligned}\tag{1}$$

Protože funkce sinus nabývá hodnotu 1 právě v bodech tvaru $\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, kde k je celé číslo, budou řešením soustavy právě ty dvojice (x, y) , pro něž existují celá čísla k, l taková, že

$$2x+y = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi, \quad 2y+x = \frac{1}{2}\pi + 2l\pi.\tag{2}$$

Odtud buď odečtením vhodných násobků rovnic (např. od dvojnásobku první odečteme druhou), anebo přímým vyjádřením jedné proměnné z první rovnice a dosazením do druhé rovnice po úpravě dostaneme

$$x = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}(2k-l)\pi, \quad y = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}(2l-k)\pi.$$

Řešením soustavy jsou tedy dvojice $(\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}(2k-l)\pi, \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}(2l-k)\pi)$, kde k, l jsou libovolná celá čísla. Není nutné dělat zkoušku, neboť z uvedeného postupu vyplývá, že takovéto dvojice (x, y) splňují vztahy (2), a tedy i soustavu (1), která je zadané soustavě ekvivalentní.

Poznámka. Uvedený výsledek se dá zapsat i jinak. Vzhledem k tomu, že $y-x = \frac{1}{3}(6l-6k)\pi = 2(l-k)\pi$, můžeme pro $m = l-k, n = 2k-l$ psát

$x = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}n\pi$, $y = x + 2m\pi$, řešením jsou tedy dvojice $(\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}n\pi, \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}n\pi + 2m\pi)$, kde m, n jsou libovolná celá čísla. (Pokud k, l probíhají všechny možné dvojice celých čísel, platí to i pro čísla m, n .)

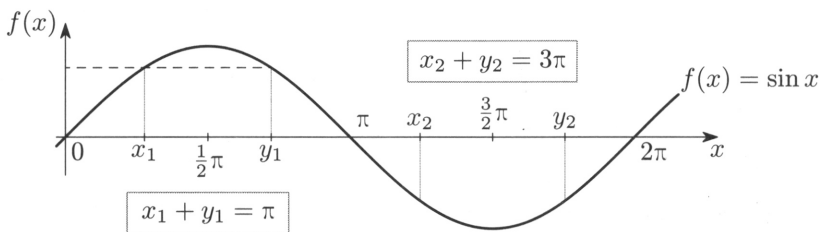
Jiné řešení. Pokud je řešením dané soustavy dvojice (x, y) , jsou díky periodicitě funkcí sinus a kosinus s periodou 2π zřejmě řešením i všechny dvojice $(x + 2k\pi, y + 2l\pi)$ (k, l jsou libovolná celá čísla). Budeme tedy soustavu řešit jen v oboru $\langle 0, 2\pi \rangle$ a na konci nalezená řešení „posuneme“ o $(2k\pi, 2l\pi)$, abychom získali obecné řešení.

Odečtením rovnic soustavy získáme po rozkladu levé strany na součin rovnici

$$(\sin x - \sin y)(2 \cos(x + y) - 1) = 0.$$

Rozlišíme dva případy podle toho, který z činitelů je nulový.

I. Jestliže $\sin x = \sin y$, máme vzhledem k podmínce $x, y \in \langle 0, 2\pi \rangle$ tři možnosti: buď $x = y$, anebo $x + y = \pi$, anebo $x + y = 3\pi$ (obr. 17).



Obr. 17

Pro $x = y$ po dosazení do původní soustavy získáme jedinou rovnici

$$2 \sin x \cos 2x + \sin x = 1.$$

Z ní použitím vzorce $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ a po substituci $\sin x = t$ ekvivalentními úpravami postupně dostaneme

$$2 \sin x(1 - 2 \sin^2 x) + \sin x = 1,$$

$$2t(1 - 2t^2) + t = 1,$$

$$4t^3 - 3t + 1 = 0,$$

$$(t + 1)(2t - 1)^2 = 0.$$

Při poslední úpravě jsme „uhodli“ kořen $t = -1$ a rozklad na součin získali vydělením mnohočlenu $4t^3 - 3t + 1$ kořenovým činitelem $t + 1$.

Vzhledem k použité substituci $t = \sin x$ jsou řešením poslední rovnice ta $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$, pro která buď $\sin x = -1$, anebo $\sin x = \frac{1}{2}$, takže $x \in \{ \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \}$. Ve zkoumaném oboru jsou řešením dané soustavy dvojice $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ a $(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

Pro $x + y = \pi$ či $x + y = 3\pi$ máme $\cos(x + y) = -1$. Dosazením do původní soustavy (vzhledem k předpokladu $\sin x = \sin y$) získáme jedinou rovnici $\sin x = -1$, a tedy i $\sin y = -1$. Ve zkoumaném oboru tak dostáváme jediné řešení $x = y = \frac{3}{2}\pi$, které jsme našli už dříve.

II. Jestliže $2\cos(x + y) - 1 = 0$ neboli $\cos(x + y) = \frac{1}{2}$, je $x + y = \pm \frac{1}{3}\pi + 2k\pi$ pro nějaké celé k a některé znaménko. Po dosazení do původní soustavy dostaneme jedinou rovnici $\sin x + \sin y = 1$, která díky periodě 2π funkce sinus a následujícímu užití známého vzorce $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$, podle něhož

$$\begin{aligned}\sin y &= \sin(\pm \frac{1}{3}\pi + 2k\pi - x) = \sin(\pm \frac{1}{3}\pi - x) = \\ &= \sin(\pm \frac{1}{3}\pi) \cos x - \cos(\pm \frac{1}{3}\pi) \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x,\end{aligned}$$

přejde do tvaru (zmíněný vzorec uplatníme ještě jednou)

$$1 = \sin x + \sin y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \sin(x \pm \frac{1}{3}\pi).$$

Ve zkoumaném oboru tak dostáváme $x \pm \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi$, takže buď (při „horním“ znaménku) $x = \frac{1}{6}\pi$, což vzhledem k rovnosti $y = \frac{1}{3}\pi - x + 2k\pi$ dá jediné $y = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi$, nebo (při „dolním“ znaménku) $x = \frac{5}{6}\pi$ a analogicky dostaneme jediné $y = \frac{5}{6}\pi$. V případě II tedy neexistují jiná řešení než ta, jež jsme objevili už v případě I.

Závěr. Řešením v oboru $\langle 0, 2\pi \rangle$ jsou dvojice $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. V oboru reálných čísel to pak jsou dvojice

$$(\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{1}{6}\pi + 2l\pi), \quad (\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2l\pi), \quad (\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2l\pi),$$

kde k a l jsou libovolná celá čísla.

Poznámka. Naznačme ještě jeden možný začátek řešení založený na tom, že z rovnic zadané soustavy vyloučíme společný „složité“ člen $\cos(x + y)$. Dosáhneme toho, když první rovnici vynásobíme $\sin y$, druhou rovnici vynásobíme $\sin x$ a vzniklé rovnice odečteme. Dostaneme tak rovnici

$$\sin^2 y - \sin^2 x = \sin y - \sin x,$$

po úpravě

$$(\sin x - \sin y)(1 - \sin x - \sin y) = 0.$$

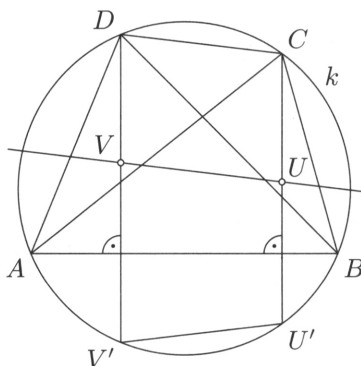
Musí tedy platit $\sin x = \sin y$ nebo $\sin x + \sin y = 1$. V prvním případě dále postupujeme jako v předchozím řešení, ve druhém případě po dosazení $\sin y = 1 - \sin x$ do první rovnice dané soustavy dostaneme první z rovnic

$$(2 \cos(x + y) - 1) \sin x = 0, \quad (2 \cos(x + y) - 1) \sin y = 0,$$

druhou pak odvodíme obdobně. Protože aspoň jeden sčítanec v rovnosti $\sin x + \sin y = 1$ musí být nenulový, vedou předchozí rovnice k závěru, že $\cos(x + y) = \frac{1}{2}$, takže opět můžeme postupovat stejně jako v předchozím řešení.

A - I - 2

Označme k kružnici opsanou čtyřúhelníku $ABCD$. Průsečíky výšek trojúhelníků ABC a ABD označme postupně U a V (obr. 18).



Obr. 18

Je známo, že obraz průsečíku výšek v osové souměrnosti podle strany daného trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané. To znamená, že obraz U' bodu U v osové souměrnosti podle strany AB leží na kružnici k , která je trojúhelníku ABC opsána. (To platí i pro tupouhlý trojúhelník ABC .) Podobně leží na kružnici k i obraz V' bodu V v téže osové souměrnosti.

Předpokládejme, že trojúhelníky ABC a ABD jsou ostroúhlé. Body U a V tedy leží v polorovině ABC . Obě kolmice CU' a DV' na stranu

AB jsou rovnoběžné, takže čtyřúhelník $CU'V'D$ je tětíkový lichoběžník, který je nutně rovnoramenný. Odtud a z vlastností osové souměrnosti dostáváme rovnosti

$$|\sphericalangle CDV'| = |\sphericalangle U'V'D| = |\sphericalangle UVV'|.$$

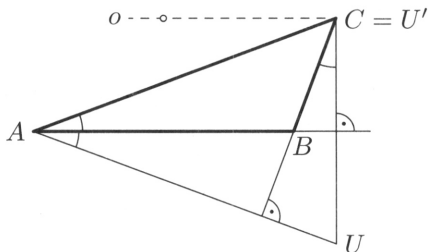
Protože body C a U leží v téže polorovině vzhledem k přímce $V'D$, jsou přímky CD a UV rovnoběžné, což jsme měli dokázat. (V poslední úvaze jsme využili, že body D, V, V' leží na přímce v tomto pořadí.)

V případě, kdy je aspoň jeden z trojúhelníků ABC a ABD tupoúhlý, je argumentace velmi podobná. Body C, D, V', U' vždy vytvoří rovnoramenný lichoběžník, i když ne nutně s vrcholy v uvedeném pořadí.

Jiné řešení. Pokud je AB průměrem kružnice k opsané danému tětívovému čtyřúhelníku $ABCD$, jsou zřejmě oba trojúhelníky ABC a ABD pravoúhlé, takže platí $U = C, V = D$ a není co dokazovat.

V opačném případě uvažme osu o kružnice k rovnoběžnou se stranou AB , $o \neq AB$. Jak už víme, obrazy U' a V' bodů U a V v osové souměrnosti podle strany AB leží na kružnici k opsané oběma trojúhelníkům ABC a ABD . Obě tětivy CU' i DV' jsou kolmé na osu o , takže body C a D jsou obrazy bodů U' a V' v osové souměrnosti podle osy o . To znamená, že úsečka CD je obrazem úsečky UV ve složení obou uvedených osových souměrností. Složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami je ovšem posunutí, takže $CD \parallel UV$. Tím je tedy tvrzení úlohy dokázáno.

Jsou to opravdu tětivy? Pokud je příslušný trojúhelník ABC či ABD ostroúhlý, není o tom pochyb. Podobně i v případě tupého úhlu při vrcholu C (a tedy i D); v obou případech jsou body C, U' i D, V' odděleny přímkou AB . Zbývá možnost, kdy je tupý úhel při jednom z vrcholů A nebo B (s ohledem na symetrii rozebereme pouze druhou možnost, obr. 19). Je-li $C = U'$, je trojúhelník UCA souměrný podle přímky AB ,



Obr. 19

takže $|\sphericalangle BCU| = |\sphericalangle UAB| = |\sphericalangle CAB|$. Z rovnosti obvodového (CAB) a úsekového (BCU) úhlu tětivy BC nyní plyne, že výška CU je tečnou opsané kružnice, bod $C = U'$ tak leží na ose o (je samodružným bodem zmíněné osové souměrnosti) a postup popsáný v předchozím odstavci je naprosto korektní.

Jiné řešení. Uvažujme tětivu AB dané kružnice k . Pro libovolný bod C na jednom z oblouků AB kružnice k označme U průsečík výšek příslušného trojúhelníku ABC . Ukážeme, že délka úsečky CU nezávisí na poloze bodu C na zvoleném oblouku AB .

Pokud je AB průměr dané kružnice, je $C = U$ a uvedené tvrzení zřejmě platí. V opačném případě je $U \neq C$. Označme K patu výšky z vrcholu A na stranu BC a L patu výšky z vrcholu C na stranu AB . Výšky AK a CL zřejmě svírají stejný úhel jako přímky BC a AB , k nimž jsou kolmé. To znamená, že úhly CUK a ABC mají stejný sinus. Z pravouhlých trojúhelníků UKC a AKC tak máme (při označení velikostí stran a úhlů obvyklým způsobem)

$$|CU| = \frac{|CK|}{\sin |\sphericalangle CUK|} = \frac{b|\cos \gamma|}{\sin \beta} = \frac{c|\cos \gamma|}{\sin \gamma},$$

přičemž poslední rovnost plyne ze sinové věty pro trojúhelník ABC . Délka úsečky CU tedy závisí jen na délce úsečky AB a na velikosti příslušného obvodového úhlu ACB . Protože úsečka AB i oblouk kružnice jsou dány, délka úsečky CU se nemění.

Vrcholy C a D daného čtyřúhelníku leží na téže oblouku AB opsané kružnice. Podle předchozí úvahy jsou tedy úsečky CU a DV stejně dlouhé. Coby výšky na tutéž stranu jsou navíc rovnoběžné, a to souhlasně (podle toho, zda je úhel γ ostrý nebo tupý, má vektor $\overrightarrow{CU}$ stejný směr jako $\overrightarrow{CL}$ či opačný). Čtyřúhelník $CDVU$ je tedy rovnoběžník, což znamená, že přímky CD a VU jsou rovnoběžné.

A – I – 3

Předpokládejme, že přirozená čísla x , y a prvočíslo p vyhovují rovnici

$$\frac{xy^2}{x+y} = p. \quad (1)$$

Největší společný dělitel čísel x , y označme d . Potom $x = da$ a $y = db$, kde přirozená čísla a , b jsou (již) nesoudělná. Po dosazení do rovnosti (1),

odstranění zlomku násobením a po vydělení kladným číslem d dostaneme

$$d^2 ab^2 = p(a + b). \quad (2)$$

Čísla a a b jsou nesoudělná, proto jsou taková i čísla b^2 , $a + b$ z různých stran rovnosti (2). To podle známého pravidla¹ znamená, že $b^2 \mid p$. Prvočíslo p má pouze dva dělitele: čísla 1 a p , druhé z nich však není druhou mocninou, proto nutně platí $b = 1$. Po dosazení do (2) obdržíme

$$d^2 a = p(a + 1). \quad (3)$$

Zopakujme podobnou úvahu jako dříve. Protože a dělí levou stranu rovnosti (3), dělí i její pravou stranu, což vzhledem ke zřejmé nesoudělnosti čísel a , $a + 1$ vede k závěru, že $a \mid p$. Platí proto buď $a = 1$, nebo $a = p$. Oba případy nyní posoudíme odděleně.

Po dosazení $a = 1$ do (3) dostaneme $d^2 = 2p$. Protože p je prvočíslo, číslo $2p$ je druhou mocninou jedině v případě $p = 2$. Potom rovněž platí $d = 2$ a výsledek vede k první vyhovující dvojici $x = da = 2$, $y = db = 2$.

Po dosazení $a = p$ do (3) a vydělení kladným p dostaneme $d^2 = p + 1$ neboli $p = (d + 1)(d - 1)$. Takový rozklad prvočísla p na dva činitele ($d - 1 < d + 1$) je jediný: $d - 1 = 1$ a $d + 1 = p$. Odtud dostáváme $d = 2$, $p = 3$, takže druhá vyhovující dvojice je $x = da = dp = 6$ a $y = db = 2$.

I když můžeme provést zkoušku obou řešení snadným dosazením do rovnice (1), při našem postupu taková kontrola není nezbytná, neboť jsme rovnici v daném oboru upravovali ekvivalentně.

Odповěď: Úloze vyhovují právě dvě dvojice (x, y) , a to $(2, 2)$ a $(6, 2)$.

A – I – 4

a) Položme například $a = 1$, $d = 1$. Posloupnost

$$a, a + d, a + 2d, \dots, \quad (*)$$

pak má tvar

$$1, 2, 3, 4, \dots,$$

tj. obsahuje všechna přirozená čísla. Mezi nimi je samozřejmě nekonečně mnoho k -tých mocnin pro každé k . (Vyhovující a , d v této triviální části úlohy je možné zvolit i mnohými jinými způsoby.)

¹ Jsou-li k , l nesoudělná a $k \mid lm$, pak $k \mid m$.

b) Položme například $a = 2$, $d = 4$. Posloupnost $(*)$ pak má tvar

$$2, 6, 10, 14, \dots,$$

tj. je tvořena sudými čísly tvaru $4n + 2$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$. Tato posloupnost proto určitě neobsahuje žádnou k -tou mocninu *lichého* čísla. Všimněme si, že k -tá mocnina libovolného *sudého* čísla je dělitelná číslem 2^k , tedy i číslem 4 (uvažujeme pouze exponenty $k \geq 2$), tuto vlastnost však nemá žádné číslo tvaru $4n + 2$. Zvolená posloupnost proto neobsahuje k -tou mocninu žádného přirozeného čísla, ať je $k = 2, 3, \dots$ zvoleno jakkoli.

(Podobně můžeme zdůvodnit, že úloze b) vyhovuje každá posloupnost, kterou dostaneme volbou $a = p$, $d = p^2$ pro libovolné prvočíslo p ; popsany případ odpovídá hodnotě $p = 2$.)

c) Položme například $a = 8$, $d = 16$. Posloupnost $(*)$ pak má tvar

$$8, 24, 40, 56, \dots,$$

tj. je tvořena lichými násobky osmi tvaru $8(2n + 1)$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$. Vysvětlíme, proč zvolená posloupnost neobsahuje žádnou druhou mocninu přirozeného čísla. Každý její člen $8(2n + 1)$ má totiž prvočíslo 2 ve svém rozkladu na prvočinitele zastoupeno třikrát ($8 = 2^3$ a číslo $2n + 1$ je liché), zatímco každá druhá mocnina má ve svém rozkladu *sudý* počet výskytů jakéhokoli prvočísla.

Na druhé straně, ve zvolené posloupnosti jsou zastoupeny všechny třetí mocniny $8 \cdot 1^3, 8 \cdot 3^3, 8 \cdot 5^3, \dots$, protože třetí mocnina lichého čísla je opět číslo liché, tedy tvaru $2n + 1$, a všechna čísla tvaru $8(2n + 1)$ naše posloupnost obsahuje.

Zvolená posloupnost tedy úloze c) vyhovuje. (Opět jsme mohli čísla a a d zvolit jinak, např. obecněji $a = p^3$ a $d = p^4$, kde p je libovolné prvočíslo.)

d) Předpokládejme, že pro dané $k > 1$ se v posloupnosti $(*)$ vyskytuje aspoň jedna k -tá mocnina, řekněme číslo m^k , kde m je přirozené. Ze vzorce pro obecný člen aritmetické posloupnosti pak plyne, že pro některé celé nezáporné číslo n platí rovnost $m^k = a + nd$. Ukažme, že pak v posloupnosti $(*)$ leží (spolu s mocninou m^k) všechny mocniny $(m + d)^k$, $(m + 2d)^k$, $(m + 3d)^k$, ... (kterých je nekonečně mnoho).

Vezměme rovnou obecný člen z vypsanych k -tých mocnin, tedy mocninu $(m + td)^k$, kde t je celé kladné číslo. Podle binomické věty platí

$$\begin{aligned}(m + td)^k &= \\&= m^k + km^{k-1}td + \binom{k}{2}m^{k-2}t^2d^2 + \dots + kmt^{k-1}d^{k-1} + t^kd^k = \\&= m^k + d(km^{k-1}t + \binom{k}{2}m^{k-2}t^2d + \dots + kmt^{k-1}d^{k-2} + t^kd^{k-1}) = \\&= m^k + d \cdot M = (a + nd) + dM = a + d(n + M).\end{aligned}$$

Protože M (výraz ve velké závorce) je zřejmě přirozené číslo, hodnota $(m+td)^k = a+d(n+M)$ je členem posloupnosti $(*)$ pro každé přirozené t . Tím je požadovaná vlastnost naší posloupnosti dokázána.

Poznamenejme, že namísto binomické věty jsme v posledním odstavci mohli využít kongruence². Každá aritmetická posloupnost $(*)$ je totiž tvořena právě těmi celými čísly x , pro něž platí $x \equiv a \pmod{d}$ a $x \geq a$. Jak je známo, platí implikace: jestliže $x \equiv y \pmod{d}$, pak $x^k \equiv y^k \pmod{d}$ pro každé přirozené k . Díky tomuto pravidlu o umocnění můžeme celé řešení úlohy d) pojmut takto: má-li pro dané k kongruence $x^k \equiv a \pmod{d}$ nějaké řešení $x = m$ s vlastností $m \geq a$, je jejím řešením i každé takové x , pro něž $x \equiv m \pmod{d}$. (V původním řešení bychom mohli tedy vzít i např. mocninu $(m - d)^k$, kdyby platilo $a + d \leq m$.)

A – I – 5

Očíslujme vrcholy daného mnohoúhelníku po řadě čísly 1, 2, ..., 2008.

a) Popíšeme rovnou jeden z postupů jak přesouvat mince, abychom je dostali na 8 hromádek po 251 mincích.

Nejprve mince z prvních 251 vrcholů s čísly 1, 2, ..., 251 postupně shromáždíme na jedné hromádce ve vrcholu s číslem 251, přitom jejich pohyb budeme vyvažovat zřejmým „symetrickým“ přesouváním mincí z posledních 251 vrcholů s čísly 1758, 1759, ..., 2008 do vrcholu s číslem 1758. Takto vytvoříme první dvě požadované hromádky. Podobným způsobem pak shromáždíme mince z vrcholů 252 až 502 na jedné hromádce ve vrcholu s číslem 502. Jejich pohyb opět symetricky vyvážíme vytvořením stejné početné hromádky ve vrcholu s číslem rovným rozdílu 1757 – 250, tedy s číslem 1507. Postup zopakujeme ještě dvakrát; poslední

² S tímto způsobem počítání se zbytkovými třídami se lze seznámit v brožuře Aloise Apfelbecka: *Kongruence*, Mladá fronta, edice Škola mladých matematiků, Praha 1968.

dvě hromádky s 251 mincemi dostaneme v sousedních vrcholech s čísly 1004 a 1005.

b) Dokážeme, že žádný postup ke kýženému cíli nevede.

Přiřaďme každé minci číslo vrcholu, v němž se (aktuálně) nachází. Všimněme si, jak se změní součet S všech 2008 čísel přiřazených jednotlivým mincím, když povoleným způsobem přesuneme libovolnou dvojici mincí. Nenastane-li přitom přesun mince mezi vrcholy s čísly 1 a 2008, hodnota součtu S se zřejmě nezmění, neboť jedné z přesouvaných mincí se přiřazené číslo o 1 zvětší, druhé přesouvané minci se přiřazené číslo o 1 zmenší (čísla přiřazená ostatním mincím, jež zůstaly na místě, se nezmění). Pokud však přesun mezi vrcholy s čísly 1 a 2008 nastane a nejde-li přitom o bezvýznamnou výměnu mince z vrcholu 1 za minci z vrcholu 2008 a naopak, součet S se změní na hodnotu $S \pm 2008$, neboť čísla přiřazená přesouvaným mincím se buď obě zvětší, nebo obě zmenší, a to v obou případech o hodnoty 1 a 2007.

Naše úvahy o aktuálních hodnotách součtu S přiřazených všem mincím můžeme shrnout takto: po libovolném počtu přesunů dvojic mincí se hodnota S z počáteční hodnoty $S_0 = 1 + 2 + \dots + 2008$ dostane na hodnotu $S = S_0 + 2008k$, kde k je vhodné celé číslo. Snadno určíme hodnotu $S_0 = 1004 \cdot 2009$. Kdybychom připustili, že po určitém počtu přesunů dvojic mincí vznikne 251 hromádek po 8 mincích ve vrcholech, jejichž čísla označíme $v_1, v_2, \dots, v_{251}$, musela by platit rovnost

$$1004 \cdot 2009 + 2008k = 8(v_1 + v_2 + \dots + v_{251}),$$

kterou však nesplňuje žádné celé číslo k , neboť její pravá strana je násobkem osmi, zatímco levá strana nikoliv (číslo $2008k$ násobkem osmi je, číslo $1004 \cdot 2009$ nikoliv). Tím je tvrzení o neexistenci hledaného postupu dokázáno.

Dodejme pro zajímavost, že úvaha o součtu S není v rozporu s výsledkem části a). Postupu popsanému v řešení a) odpovídá rovnice

$$1004 \cdot 2009 + 2008k = 251(v_1 + v_2 + \dots + v_8),$$

a to dokonce s hodnotou $k = 0$ (žádný přesun mince mezi vrcholy s čísly 1 a 2008 jsme neprovedli). Z uvedené rovnice s hodnotou $k = 0$ plyne, že čísla vrcholů osmi konečných hromádek musejí splňovat rovnici

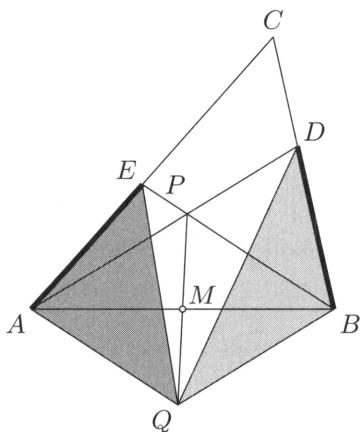
$$v_1 + v_2 + \dots + v_8 = 4 \cdot 2009,$$

ať volíme jakýkoli postup bez přesunu mince mezi vrcholy 1 a 2008. Při našem postupu za rostoucího pořadí čísel v_i platí

$$v_1 + v_8 = v_2 + v_7 = v_3 + v_4 = v_5 + v_6 = 2009.$$

A – I – 6

Označme Q obraz bodu P ve středové souměrnosti se středem M . Bod Q bude ležet na ose úhlu ACB , právě když bude mít stejnou vzdálenost od obou přímk AC a BC . Vzhledem k tomu, že úsečky AE a BD mají stejnou délku, vidíme, že bod Q bude stejně vzdálen od přímk AC a BC , právě když trojúhelníky AEQ a BDQ budou mít stejný obsah (obr. 20). Rovnost jejich obsahů teď dokážeme.



Obr. 20

Z konstrukce bodu Q plyne, že $AQBP$ je rovnoběžník, tj. přímka QB je rovnoběžná s přímkou AD , proto mají trojúhelníky QBD a QBA stejný obsah (mají shodné výšky na společnou základnu QB). Podobně z rovnoběžnosti přímk QA a BE plyne rovnost obsahů trojúhelníků QAE a QAB . Tím je rovnost obsahů trojúhelníků AEQ a BDQ dokázána, a tudíž je dokázáno i tvrzení úlohy.

Jiné řešení. Označme C' obraz bodu C a Q obraz bodu P ve středové souměrnosti podle středu M . Dále označme K průsečík přímk $C'B$ a AD . Průsečíky přímk $C'P$ s přímkami AB a AC označme N a L (obr. 21).

A – S – 1

Splňují-li přirozená čísla m, n zadané nerovnosti, musí zřejmě platit

$$m \geq 2 \quad \text{a} \quad 2\sqrt{n} - m > 0, \quad (1)$$

jinak by zastoupené odmocniny nebyly definovány, resp. prostřední výraz $2\sqrt{n} - m$ by byl nekladný, a tak by nemohl být větší než nezáporný výraz $\sqrt{m^2 - 4}$.

Předpokládejme, že podmínky (1) jsou splněny a každou ze zadaných nerovností v jednom sloupci *ekvivalentně* upravme (při každém ze čtyř umocňování jsou obě strany definovány a mají nezáporné hodnoty, stejně tak obě dělení *kladným* číslem n jsou v pořádku):

$$\begin{array}{ll} 2\sqrt{n} - m < \sqrt{m^2 - 2} & \sqrt{m^2 - 4} < 2\sqrt{n} - m & \Big|^2 \\ 4n - 4m\sqrt{n} + m^2 < m^2 - 2 & m^2 - 4 < 4n - 4m\sqrt{n} + m^2 & \\ n + \frac{1}{2} < m\sqrt{n} & m\sqrt{n} < n + 1 & \Big|^2 \\ n^2 + n + \frac{1}{4} < m^2 n & m^2 n < n^2 + 2n + 1 & \Big| : n \\ n + 1 + \frac{1}{4n} < m^2 & m^2 < n + 2 + \frac{1}{n} & \end{array}$$

Poslední dvě nerovnosti platí, právě když číslo m^2 leží v otevřeném intervalu

$$\left(n + 1 + \frac{1}{4n}, n + 2 + \frac{1}{n}\right).$$

Ten s ohledem na zřejmé nerovnosti $0 < \frac{1}{4}n^{-1} \leq \frac{1}{4}$ a $0 < n^{-1} \leq 1$ obsahuje jediné celé číslo $n + 2$. Za předpokladu (1) proto přirozená čísla m, n splňují původní nerovnosti, právě když platí $m^2 = n + 2$.

Zbývá zjistit, která přirozená čísla m, n vázaná vztahy $n = m^2 - 2$ splňují za předpokladu $m \geq 2$ i druhou z podmínek (1). Provedme její ekvivalentní úpravy:

$$\begin{array}{l} 2\sqrt{m^2 - 2} - m > 0, \\ 2\sqrt{m^2 - 2} > m, \quad \Big|^2 \\ 4(m^2 - 2) > m^2, \\ 3m^2 > 8. \end{array}$$

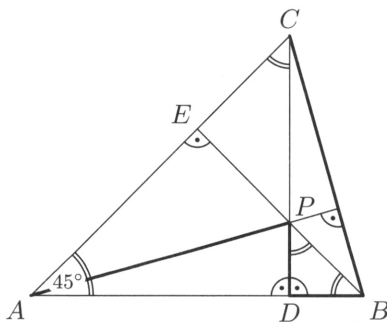
Poslední nerovnost je ovšem pro každé $m \geq 2$ už splněna.

Odpověď. Hledané dvojice jsou právě ty tvaru $(m, n) = (m, m^2 - 2)$, kde $m \geq 2$ je libovolné přirozené číslo.

A – S – 2

Nejdřív dokážeme první implikaci. Nechť $AP \perp BC$, bod P je pak průsečíkem výšek trojúhelníku ABC . Chceme dokázat, že úsečky AP a BC jsou shodné, najdeme proto dva shodné trojúhelníky, v nichž si tyto úsečky jako strany odpovídají.

Označme E průsečík přímky BP se stranou AC , tj. patu výšky z vrcholu B . Z pravoúhlého trojúhelníku ABE a dané velikosti úhlu BAC snadno dopočítáme, že $|\angle PBD| = 45^\circ$. Trojúhelník PDB je tedy pravoúhlý a rovnoramenný, takže $|DP| = |DB|$ (obr. 22). Podobně trojúhelník ADC je pravoúhlý a vzhledem k velikosti úhlu při vrcholu A i rovnoramenný, proto $|DA| = |DC|$. Podle věty *sus* jsou pak pravoúhlé trojúhelníky APD a CBD shodné a jejich přepony AP , BC proto mají stejnou délku.



Obr. 22

Zbývá dokázat opačnou implikaci. Předpokládejme, že $|AP| = |BC|$. Protože ADC je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, platí $|AD| = |CD|$, takže trojúhelníky PAD a BCD jsou shodné podle věty *Ssu*. Máme tak $|PD| = |BD|$, proto $|\angle ABP| = 45^\circ$. Označme opět E průsečík přímky BP se stranou AC . V trojúhelníku ABE vychází, že úhel BEA je pravý, takže přímka BP je výškou trojúhelníku ABC (obr. 22) a bod P je tak jeho průsečík výšek. Odtud plyne, že AP je výška na stranu BC , tudíž je na ni kolmá.

Jiné řešení. Je-li $AP \perp BC$, je bod P průsečíkem výšek trojúhelníku ABC . Označme $\alpha = |\sphericalangle BAC| = 45^\circ$. Podobně jako v jednom z řešení úlohy A–I–2 můžeme odvodit, že

$$|AP| = \frac{|BC| \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = |BC| \cdot \cotg \alpha = |BC| \cdot \cotg 45^\circ = |BC|.$$

Nechť naopak $|AP| = |BC|$. Označme Q průsečík výšek trojúhelníku ABC . Z právě dokázané implikace víme, že $|AQ| = |BC|$. Všechny body výšky CD mají ovšem navzájem různou vzdálenost od vrcholu A , proto může uvnitř úsečky CD ležet nejvýše jeden bod P s vlastností $|AP| = |BC|$, a tento bod musí být totožný s bodem Q . Je tedy $AP \perp BC$.

A – S – 3

Zlomek lze krátit celým číslem $d > 1$, právě když je číslo d společným dělitelem čitatele i jmenovatele uvažovaného zlomku. Předpokládejme tedy, že platí $d \mid 3p - q$ a zároveň $d \mid 5p + 2q$, kde p a q jsou nesoudělná celá čísla. Sečtením vhodných násobků dvojčlenů $3p - q$ a $5p + 2q$ dostaneme

$$2(3p - q) + (5p + 2q) = 11p \quad \text{a} \quad 3(5p + 2q) - 5(3p - q) = 11q.$$

Protože obě čísla $3p - q$ a $5p + 2q$ jsou dle předpokladu násobky čísla d , jsou jeho násobky i sestavená čísla $11p$ a $11q$. Jinak řečeno, číslo d je společným dělitelem čísel $11p$ a $11q$. Čísla p a q jsou však nesoudělná a číslo 11 je prvočíslo, takže čísla $11p$ a $11q$ mají jediného společného dělitele většího než 1, a tím je číslo 11. Musí tedy platit $d = 11$.

Řešení ještě není u konce: musíme ukázat, že číslem 11 lze skutečně některé z uvažovaných zlomků krátit. Jak tedy najít dvojici nesoudělných čísel p a q tak, aby platilo $11 \mid 3p - q$ a zároveň $11 \mid 5p + 2q$? S trochou trpělivosti objevíme takové hodnoty p a q zkusmým dosazováním; stačí však vypsát soustavu rovnic

$$3p - q = 11m \quad \text{a} \quad 5p + 2q = 11n,$$

najít její řešení $(p, q) = (2m + n, 3n - 5m)$ a pak pohodlně dosazovat: dvojici nesoudělných čísel p a q určitě dostaneme, když bude $q = 3n - 5m = 1$, tedy např. pro $n = 2$ a $m = 1$, kdy $(p, q) = (4, 1)$ a uvažovaný zlomek je $11/22$.

Odpoověď. Jediné celé číslo větší než 1, kterým lze krátit některý z uvedených zlomků, je číslo 11.

A – II – 1

Označme hledané číslo $n = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ a číslo s opačným pořadím číslic $k = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$. Protože obě čísla k, n dávají stejný zbytek při dělení číslem 37, je jejich rozdíl

$$\begin{aligned} k - n &= (1000d + 100c + 10b + a) - (1000a + 100b + 10c + d) = \\ &= 999(d - a) + 90(c - b) = 37 \cdot 27(d - a) + 90(c - b) \end{aligned} \quad (1)$$

dělitelný číslem 37, odkud $37 \mid 90(c - b)$. Jelikož 37 je prvočíslo a číslo 90 není jeho násobkem, musí platit $37 \mid c - b$. To je pro číslice b, c možné jedině v případě, kdy $b = c$. Naopak, je-li $b = c$, plyne z vyjádření (1), že bez ohledu na hodnoty číslic a, d je rozdíl $k - n$ dělitelný číslem 37, takže čísla n a k skutečně dávají při dělení 37 stejný zbytek. Můžeme tedy předpokládat, že $n = \overline{abb\bar{d}}$ a $k = \overline{dbba}$, a dále se už zabývat pouze podmínkami úlohy o dělitelnosti sedmi.

Z podmínek $7 \mid n, 7 \mid k$ plyne

$$7 \mid k - n = 37 \cdot 27(d - a)$$

(do vyjádření (1) jsme dosadili $b = c$), odkud vzhledem k nesoudělnosti čísla 7 se součinem $37 \cdot 27$ dostáváme, že $7 \mid d - a$. Protože podle zadání platí $k > n$, platí rovněž $d > a$; takové číslice d, a splňují podmínku $7 \mid d - a$ jedině v případě, kdy $d - a = 7$. Konkrétně je tedy buď $a = 1$ a $d = 8$, nebo $a = 2$ a $d = 9$. (Možnost $a = 0, d = 7$ je vyloučena, protože a je první číslicí čtyřmístného čísla n .)

V případě $a = 1, d = 8$ budou čísla

$$\begin{aligned} n &= \overline{1bb8} = 1008 + 110b = 7 \cdot (144 + 15b) + 5b, \\ k &= \overline{8bb1} = 8001 + 110b = 7 \cdot (1143 + 15b) + 5b \end{aligned}$$

dělitelná sedmi, právě když bude platit $7 \mid 5b$ neboli $b \in \{0, 7\}$. Dostáváme tak první dvě řešení $n = 1008$ a $n = 1778$.

Rovněž v případě $a = 2$ a $d = 9$, kdy

$$\begin{aligned} n &= \overline{2bb9} = 2009 + 110b = 7 \cdot (287 + 15b) + 5b, \\ k &= \overline{9bb2} = 9002 + 110b = 7 \cdot (1286 + 15b) + 5b, \end{aligned}$$

vyjde stejná podmínka $7 \mid 5b$, která vede ke zbylým dvěma řešením $n = 2009$ a $n = 2779$.

Hledané čtyřciferné číslo je kterékoli z čísel 1 008, 1 778, 2 009, 2 779 (a žádné jiné).

Jiné řešení. Zachovejme označení čísel n , k a jejich číslic z původního řešení. Začneme-li řešení analýzou podmínek $7 \mid n$ a $7 \mid k$, zjistíme s ohledem na zbytky řádů 10^3 , 10^2 , 10^1 , 10^0 při dělení sedmi (jež jsou po řadě 6, 2, 3, 1), že tyto podmínky lze zjednodušit do tvaru

$$7 \mid 6a + 2b + 3c + d, \quad \text{resp.} \quad 7 \mid 6d + 2c + 3b + a.$$

Sečtením obou výrazů dostaneme $7 \mid 5(b + c)$ neboli $7 \mid b + c$. Zjistíme-li stejně jako v původním řešení, že platí $37 \mid k - n \Leftrightarrow b = c$, z podmínky $7 \mid b + c$ vyplyne $b = c \in \{0, 7\}$; z obou zbylých podmínek $7 \mid 6a + d$ a $7 \mid 6d + a$, jež jsou obě ekvivalentní jednomu vztahu $7 \mid d - a$, pak s ohledem na $d > a > 0$ najdeme obě vyhovující dvojice číslic $(a, d) = (1, 8)$ a $(a, d) = (2, 9)$.

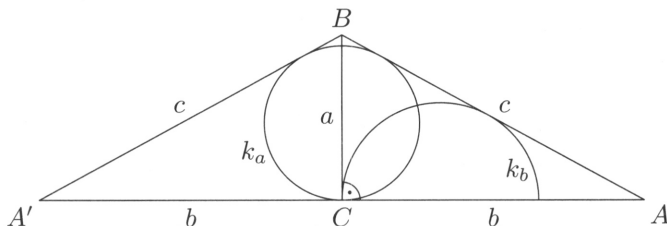
A – II – 2

Označme vrcholy daného trojúhelníku A , B , C tak, aby vrcholy A , B ležely postupně proti odvěsnám délek a , b .

Nejdříve vypočítáme velikosti poloměrů obou kružnic k_a a k_b . Označme A' obraz bodu A v osově souměrnosti podle přímky BC . Kružnice k_a je vepsána trojúhelníku $A'AB$ (obr. 23). Rovnoramenný trojúhelník ABA' má obvod $o = 2(b + c)$ a obsah $S = ab$, pro poloměr ϱ_a kružnice k_a tak podle známého vztahu vychází

$$\varrho_a = \frac{2S}{o} = \frac{ab}{b + c}.$$

Podobně vypočítáme i poloměr kružnice k_b : vyjde $\varrho_b = ab/(a + c)$.



Obr. 23

Pro číslo p a pro libovolný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a , b a přeponou c má platit

$$p \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{\frac{b+c}{ab} + \frac{a+c}{ab}}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{a+b+2c}{a+b} = 1 + \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Protože v případě $a = b$ má poslední výraz hodnotu $1 + \sqrt{2}$, musí každé vyhovující číslo p splňovat nerovnost $p \leq 1 + \sqrt{2}$. Ukážeme-li nyní, že pro libovolné dvě kladné hodnoty a , b platí

$$\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \geq \sqrt{2}, \quad (1)$$

bude výše odvozená nerovnost znamenat, že $p = 1 + \sqrt{2}$ je hledané reálné číslo (a úloha tak bude vyřešena).

Nerovnost (1) pro libovolná kladná a , b snadno převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost, která zřejmě platí:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a^2+b^2} &\geq \sqrt{2}(a+b), \\ 4(a^2+b^2) &\geq 2(a+b)^2, \\ 4a^2+4b^2 &\geq 2a^2+4ab+2b^2, \\ 2(a-b)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Místo takové prověrky bylo možné využít Cauchyovu nerovnost $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ nebo nerovnost mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

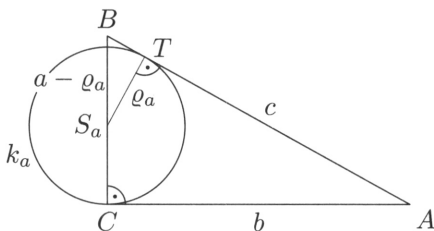
Obě tyto klasické nerovnosti jsou zřejmě pouze obměněnými zápisy nerovnosti (1).

Odpověď. Hledané číslo p má hodnotu $1 + \sqrt{2}$.

Poznámka. Velikost poloměrů ϱ_a a ϱ_b je možné vypočítat i jinak: Dvojím vyjádřením sinu úhlu ABC z pravoúhlých trojúhelníků S_aBT a ABC (obr. 24) dostaneme

$$\frac{\varrho_a}{a - \varrho_a} = \frac{b}{c},$$

odkud plyne $\varrho_a = ab/(b+c)$. Analogicky vypočítáme i ϱ_b .



Obr. 24

A – II – 3

Z rovnosti $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ a ze známých goniometrických vzorců dostáváme

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \gamma, \\ \cos \alpha &= -\cos(\beta + \gamma) = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma.\end{aligned}$$

Dosaďme tato vyjádření hodnot $\sin(\alpha + \beta)$ a $\cos \alpha$ do první rovnice ze zadání a výsledek upravme:

$$\begin{aligned}2 \sin \beta \sin \gamma - (-\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma) &= 1, \\ \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma &= 1, \\ \cos(\beta - \gamma) &= 1.\end{aligned}$$

Poslední rovnost nastane, právě když $\beta = \gamma$, neboť rozdíl dvou vnitřních úhlů trojúhelníku leží v intervalu $(-\pi, \pi)$, v němž má funkce kosinus hodnotu 1 jedině v bodě nula. Tak jsme ukázali, že první zadaná rovnice je pro vnitřní úhly trojúhelníku splněna, právě když $\beta = \gamma$.

Nyní snadno vyřešíme i druhou ze zadaných rovnic, když do ní za γ dosadíme β :

$$\begin{aligned}2 \sin \beta \sin 2\beta - \cos \beta &= 0, \\ 4 \sin^2 \beta \cos \beta - \cos \beta &= 0, \\ (4 \sin^2 \beta - 1) \cos \beta &= 0.\end{aligned}$$

Je tedy buď $\cos \beta = 0$, nebo $\sin \beta = \pm \frac{1}{2}$. Rovnost $\beta = \gamma$ však pro úhly trojúhelníku znamená, že úhel β je ostrý, takže $\cos \beta > 0$, a proto musí platit $\sin \beta = \frac{1}{2}$ (hodnota $\sin \beta = -\frac{1}{2}$ je pro úhel β z intervalu $(0, \pi)$ vyloučena). Tak docházíme k jediným možným hodnotám $\beta = \gamma = 30^\circ$,

z nichž snadno dopočteme $\alpha = 120^\circ$. Při uvedeném postupu není zkouška nutná: první zadaná rovnice platí díky rovnosti $\beta = \gamma$ a druhou rovnici jsme za předpokladu $\beta = \gamma$ řešili ekvivalentními úpravami.

Jiné řešení. Podobně jako při řešení úlohy domácího kola využijeme známé goniometrické vzorce k odvození rovnosti

$$\begin{aligned} 2 \sin y \sin(x+y) - \cos x &= 2 \sin y (\sin x \cos y + \cos x \sin y) - \cos x = \\ &= 2 \sin y \cos y \sin x + (2 \sin^2 y - 1) \cos x = \\ &= \sin 2y \sin x - \cos 2y \cos x = -\cos(x+2y) \end{aligned}$$

pro libovolná reálná čísla x, y . Díky tomu můžeme soustavu rovnic ze zadání přepsat do tvaru

$$\cos(\alpha + 2\beta) = -1, \quad (1)$$

$$\cos(\beta + 2\gamma) = 0. \quad (2)$$

Vnitřní úhly libovolného trojúhelníku leží v intervalu $(0, \pi)$, z čehož plynou nerovnosti $0 < \alpha + 2\beta < 3\pi$.³ Z nich plyne, že rovnice (1) je splněna, právě když $\alpha + 2\beta = \pi$. Porovnáním s obecně platnou rovností $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ dostáváme ekvivalentní podmínku $\gamma = \beta$, za níž (2) přejde do tvaru

$$\cos 3\beta = 0. \quad (3)$$

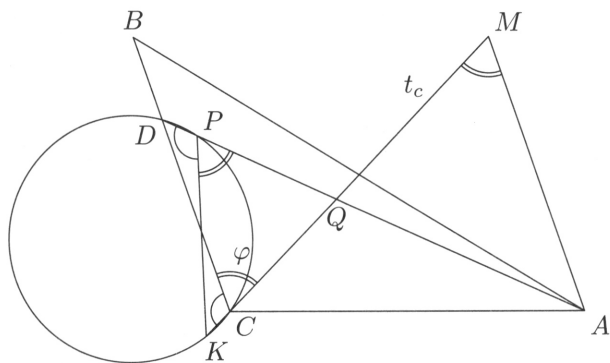
Protože úhel β je ostrý (neboť je shodný s úhlem γ a trojúhelník nemůže mít dva pravé nebo dva tupé vnitřní úhly), platí nerovnosti $0 < 3\beta < \frac{3}{2}\pi$, při kterých je rovnice (3) splněna, právě když $3\beta = \frac{1}{2}\pi$ neboli $\beta = \gamma = \frac{1}{6}\pi$. Stejně jako v prvním řešení dopočítáme $\alpha = \pi - \beta - \gamma = \frac{2}{3}\pi$. Zkouškou (ani při tomto postupu však není nutná) snadno ověříme, že nalezená trojice úhlů α, β, γ splňuje všechny podmínky zadání úlohy.

Podmínkám úlohy vyhovují pouze trojúhelníky, jejichž vnitřní úhly mají velikosti $\alpha = 120^\circ, \beta = \gamma = 30^\circ$.

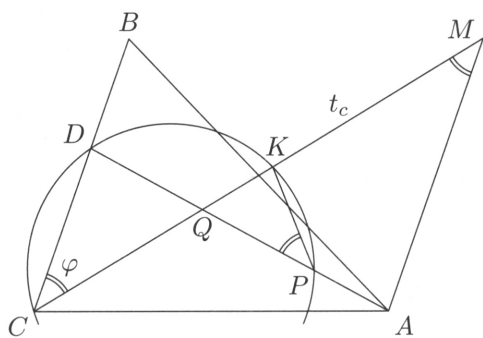
A – II – 4

Označme φ velikost úhlu, který svírá přímka t_c , na níž leží těžnice z vrcholu C , s přímkou strany BC daného trojúhelníku. Vzhledem k definici bodu K budou stejný úhel φ svírat i přímky KP a AD . To však znamená, že na kružnici opsané trojúhelníku AKP bude ležet i takový bod M

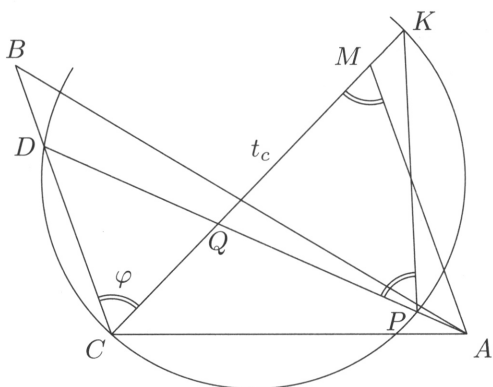
³ Platí dokonce $\alpha + 2\beta < 2\pi$, neboť $\alpha + 2\beta < 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2\pi$.



Obr. 26



Obr. 27



Obr. 28

určené přímkou KA , leží i v tomto případě bod M na kružnici opsané trojúhelníku AKP .

Jiné řešení. Označme body Q a M stejně jako v prvním řešení. Pro mocnost bodu Q ke kružnici opsané bodům C, P, D, K (bez ohledu na polohu bodu P) platí $|QK| \cdot |QC| = |QP| \cdot |QD|$, takže $|QK| : |QP| = |QD| : |QC|$. Z podobnosti trojúhelníků QDC a QAM , jež plyne z rovnoběžnosti přímek BC a AM , dostáváme $|QD| : |QC| = |QA| : |QM|$. Platí tedy

$$\frac{|QK|}{|QP|} = \frac{|QD|}{|QC|} = \frac{|QA|}{|QM|},$$

takže

$$|QK| \cdot |QM| = |QP| \cdot |QA|. \quad (1)$$

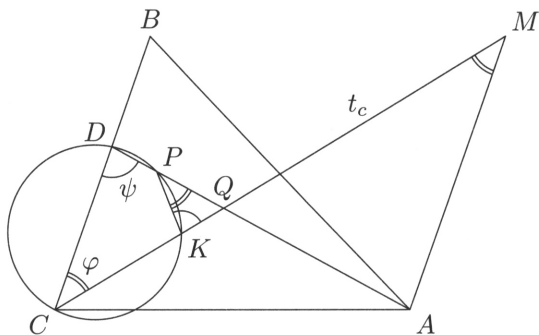
Jak už víme, leží bod Q buď uvnitř, anebo vně obou úseček AP a KM , proto z právě získané rovnosti vyplývá, že bod M leží na kružnici určené body A, P, K . Označíme-li totiž M' druhý průsečík přímky QK s touto kružnicí ($M' \neq K$), plyne z mocnosti bodu Q vůči této kružnici rovnost $|QK| \cdot |QM'| = |QP| \cdot |QA|$, takže podle (1) je $|QM'| = |QM|$, a musí tudíž být $M' = M$.

Poznámky. V žádném z obou řešení jsme nevyužili předpoklad, že daný trojúhelník ABC je ostroúhlý. Za tohoto předpokladu leží bod K vždy uvnitř úsečky CM . Lze to ukázat úvahami o obvodových úhlech podobně, jako jsme ukázali, že tvrzení úlohy platí i v případech, kdy bod K padne mimo tuto úsečku. Jiný důkaz dostaneme následující úvahou:

Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý, platí $\psi > \varphi$, kde jsme jako ψ označili velikost úhlu CDA . Tato nerovnost $\psi > \varphi$ plyne ze zřejmé nerovnosti $\psi = \beta + |\sphericalangle DAB| > \beta$ a z nerovnosti $\beta > \varphi$, která je ekvivalentní nerovnosti $t_c > \frac{1}{2}|AB|$ (proti větší straně trojúhelníku leží větší úhel), což je nerovnost $|CM| > |AB|$ mezi délkami úhlopříček rovnoběžníku $CAMB$, jehož vnitřní úhel při vrcholu C je dle předpokladu ostrý (tuto nerovnost získáme snadno použitím kosinové věty: $|AB|^2 < |AC|^2 + |CB|^2 = |AC|^2 + |AM|^2 < |CM|^2$).

Z nerovnosti $\psi > \varphi$ pak pro bod P uvnitř úsečky DQ pro délky stran trojúhelníků QPK , QCD (obr. 29) vychází, že $|QK| < |QP| < |QD| < |QC|$ (proti většímu úhlu v trojúhelníku leží větší strana), takže bod K leží uvnitř úsečky QC . Podobně pro bod P uvnitř úsečky QA dostaneme $|QK| < |QP| < |QA| < |QM|$, takže bod K leží uvnitř úsečky QM .

Budeme-li úhel φ chápat jako orientovaný úhel dvou přímek (tj. úhel, o který musíme první přímku otočit, aby splynula nebo byla rovnoběžná



Obr. 29

s druhou přímkou), vyplyne tvrzení úlohy z úvah v úvodním odstavci a z následující charakterizace kružnice: *Body A, B, C, D leží na kružnici, právě když se orientovaný úhel ACB rovná orientovanému úhlu ADB.*

A – III – 1

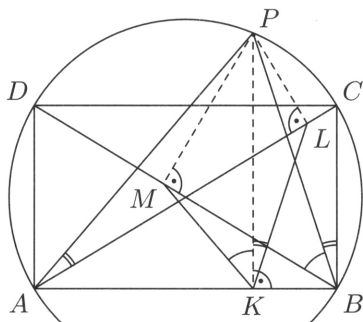
Předpokládejme, že všechna čísla p , $3p + 2$, $5p + 4$, $7p + 6$, $9p + 8$ a $11p + 10$ jsou prvočísla. Zkoumejme, jaký zbytek při dělení pěti může dávat prvočíslo p , tj. pro jaká l z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ a nezáporné celé číslo k může platit $p = 5k + l$.

- ▷ Je-li $p = 5k$ prvočíslo, pak $p = 5$, tehdy ovšem $11p + 10 = 65$ není prvočíslo.
- ▷ Je-li $p = 5k + 1$, pak $3p + 2 = 5(3k + 1)$ je prvočíslem jedině pro $k = 0$, tehdy ovšem platí $p = 1$, což není prvočíslo.
- ▷ Je-li $p = 5k + 2$, pak $7p + 6 = 5(7k + 4)$ není prvočíslem pro žádné celé $k \geq 0$.
- ▷ Je-li $p = 5k + 3$, pak $9p + 8 = 5(9k + 7)$ není prvočíslem pro žádné celé $k \geq 0$.

Prvočíslo p tedy musí být tvaru $5k + 4$. Pak ovšem $6p + 11 = 5(6k + 7)$ je složené číslo pro každé celé $k \geq 0$.

Poznámka. Nejmenší prvočíslo p , pro něž jsou i všechna čísla $3p + 2$, $5p + 4$, $7p + 6$, $9p + 8$ a $11p + 10$ prvočísla, je $p = 2099$.

Ukážeme, že úhel LKM má stejnou velikost jako úhel CBD (obr. 30). Odtud dané tvrzení triviálně plyne (úhel CBD má velikost 45° , právě když $|BC| = |CD|$, tj. když $ABCD$ je čtverec).



Obr. 30

Body B, K, M, P leží v tomto pořadí na Thaletově kružnici nad průměrem BP . Pro velikosti obvodových úhlů nad tětivou PM tedy platí $|\sphericalangle PKM| = |\sphericalangle PBM|$. Podobně body A, K, L, P leží v tomto pořadí na Thaletově kružnici nad průměrem AP a pro velikosti obvodových úhlů nad tětivou PL máme $|\sphericalangle LKP| = |\sphericalangle LAP|$. Z obvodových úhlů nad tětivou CP kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ tak dostáváme $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|$.

Z uvedených rovností vyplývá

$$\begin{aligned} |\sphericalangle LKM| &= |\sphericalangle LKP| + |\sphericalangle PKM| = |\sphericalangle LAP| + |\sphericalangle PBM| = \\ &= |\sphericalangle CAP| + |\sphericalangle PBD| = |\sphericalangle CBP| + |\sphericalangle PBD| = |\sphericalangle CBD|, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Uvedený postup se dá použít i v triviálním případě, kdy $P = C$ anebo $P = D$; tehdy mají některé z uvažovaných úhlů nulovou velikost.

Jiné řešení. Opět dokážeme, že úhly LKM a CBD mají stejnou velikost. Označme N patu kolmice z bodu P na přímku BC . Body K, L, N leží na Simsonově přímce příslušející bodu P a trojúhelníku ABC (obr. 31). Na Thaletově kružnici nad průměrem PB leží body K, M i N . Z obvodových úhlů nad tětivou MN téže kružnice tak máme

$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle NKM| = |\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle CBD|.$$

Bude-li proto navíc platit $4t^x < t^3$, nebude nerovnost ze zadání úlohy splněna. S ohledem na podmínku $x < 3$ je nerovnost $4t^x < t^3$ ekvivalentní s nerovností

$$t > 4^{\frac{1}{3-x}},$$

která je pro dostatečně velké t skutečně splněna.

Závěr. Hledané nejmenší kladné číslo je $x = 3$.

Poznámka. Požadovanou vlastnost má nejen $x = 3$, ale každé $x \geq 3$ (a rovněž každé $x \leq -1$). Vysvětlíme to tak, že jedničky ve jmenovatelích zlomků na pravé straně uvažované nerovnosti zaměníme výrazem $(abcd)^{\frac{x+1}{4}}$; dostaneme tak homogenní nerovnost

$$\begin{aligned} a^x + b^x + c^x + d^x &\geq \\ &\geq a^{\frac{x-3}{4}} (bcd)^{\frac{x+1}{4}} + b^{\frac{x-3}{4}} (acd)^{\frac{x+1}{4}} + c^{\frac{x-3}{4}} (abd)^{\frac{x+1}{4}} + d^{\frac{x-3}{4}} (abc)^{\frac{x+1}{4}}, \end{aligned}$$

což je Muirheadova nerovnost pro čtveřice exponentů

$$(x, 0, 0, 0) \quad \text{a} \quad \left(\frac{x+1}{4}, \frac{x+1}{4}, \frac{x+1}{4}, \frac{x-3}{4} \right),$$

jejíž uplatnění je v případě $x > 0$ vázáno jedinou podmínkou $\frac{1}{4}(x-3) \geq 0$ neboli $x \geq 3$ (zatímco v případě $x < 0$ vychází jediná podmínka $\frac{1}{4}(x+1) \leq 0$ neboli $x \leq -1$).

A – III – 4

Z rovnosti $n + k^2 = (k + n)(k - n) + n(n + 1)$ vidíme, že $n + k \mid n + k^2$ platí, právě když $n + k \mid n(n + 1)$. Počet čísel k s touto vlastností je tedy rovný počtu těch dělitelů čísla $D = n(n + 1)$, které jsou větší než n .

a) V případě $n = 58$ z rozkladu na prvočinitele příslušného $D = 58 \cdot 59 = 2 \cdot 29 \cdot 59$ vidíme, že dělitelé čísla D , jež jsou větší než 58, jsou právě čtyři: 59 , $2 \cdot 59 = 118$, $29 \cdot 59 = 1711$ a $2 \cdot 29 \cdot 59 = 3422$. To jsou hodnoty $58 + k$, takže příslušná hledaná k jsou o 58 menší, jsou to tudíž postupně čísla $k = 1$, $k = 60$, $k = 1653$ a $k = 3364 = 58^2$. (Dodejme, že obě čísla $k = 1$ a $k = n^2$ splňují podmínku $n + k \mid n + k^2$ pro každé n .)

b) Pro sudé $n = 2p$, kde $p \geq 3$, platí $D = 2p(2p + 1)$, takže snadno vypíšeme čtyři dělitele čísla D , které jsou větší než dané $n = 2p$:

$$2p + 1 < 2(2p + 1) < p(2p + 1) < 2p(2p + 1). \quad (1)$$

Jsou-li obě čísla p , $2p + 1$ prvočísla, žádné jiné takové dělitele číslo D zřejmě nemá, tudíž číslo $n = 2p$ má požadovanou vlastnost.

Je-li naopak aspoň jedno z čísel p , $2p + 1$ složené a platí-li předpoklad $p \geq 3$ ze zadání úlohy, ukážeme, že příslušné D pak má kromě dělitelů vypsanych v (1) ještě aspoň jednoho dalšího dělitele většího než $2p$. Rozlišíme přitom dva případy podle toho, které z čísel p , $2p + 1$ je složené.

(i) Je-li složené číslo p , je toto číslo dělitelné některým q , $2 \leq q \leq \frac{1}{2}p$, a číslo D má pak dělitele $2q(2p + 1)$, který s výjimkou případu $q = \frac{1}{2}p$ leží mezi druhým a třetím dělitelem vypsáním v (1):

$$2(2p + 1) < 2q(2p + 1) < p(2p + 1).$$

Nemá-li však číslo p jiného netriviálního dělitele kromě $q = \frac{1}{2}p$, platí nutně $p = 4$. Tehdy ani druhé číslo $2p + 1 = 9$ není prvočíslo, takže pátého dělitele čísla D (většího než $2p$) najdeme v části (ii).

(ii) Je-li složené (liché) číslo $2p + 1$, je toto číslo dělitelné některým q , $3 \leq q < p$, a číslo D má pak dělitele $2pq$, který leží mezi druhým a třetím dělitelem vypsáním v (1):

$$2(2p + 1) < 2pq < p(2p + 1), \quad \text{neboť} \quad q > 2 + \frac{1}{p} \quad \text{a} \quad q < p + \frac{1}{2}.$$

Ekvivalence z části b) úlohy je tak dokázána.

Jiné řešení části b). Označme $D = 2p(2p + 1)$. Protože $2p < \sqrt{D} < 2p + 1$, má D právě čtyři dělitele větší než $2p$, právě když má zároveň právě čtyři dělitele menší než $\sqrt{D}$, celkem tedy právě osm dělitelů. Číslo D má aspoň dva prvočinitele, takže je buď součinem tří různých prvočísel (to zřejmě nastane, právě když p a $2p + 1$ jsou prvočísla), nebo tvaru $q^3 r$, kde q , r jsou různá prvočísla. Druhý případ však nemůže nastat, protože $D = 2p(2p + 1)$ je sudé, má lichého dělitele $2p + 1$ a ještě dělitele p nesoudělného s $2p + 1$, muselo by proto být $p = 2^2$, odkud $r = 2p + 1 = 9$, což ovšem není prvočíslo. Tím je požadovaná ekvivalence v části b) dokázána.

A – III – 5

Přiřadíme každé minci index i vrcholu A_i , na kterém leží (tedy číslo z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$) a po každém přemístění dvojice mincí čísla přiřazená mincím aktualizujeme. Sledujme nejprve, jak se změní součet S všech n čísel přiřazených jednotlivým mincím po jednom přemístění.

Nepřemísťujeme-li žádnou z obou mincí mezi vrcholy A_1 a A_n , součet S se nezmění, protože jedno z čísel mincí se o 1 zmenší, druhé se o 1 zvětší (a ostatní se nezmění). Stejně tak se součet S zřejmě nezmění, přemístíme-li jednu minci z A_1 do A_n a současně druhou z A_n do A_1 . Přemístíme-li jednu minci z A_1 do A_n a druhou z A_i do A_{i+1} (kde $1 \leq i \leq n-1$), součet S vzroste o $(n-1)+1 = n$. Konečně přemístíme-li jednu minci z A_n do A_1 a druhou z A_i do A_{i-1} (kde $2 \leq i \leq n$), součet S klesne o n . Z uvedeného úplného rozboru plyne, že *zbytek součtu S po dělení číslem n se nikdy nezmění*.

Součet S ve výchozí pozici má hodnotu

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + n \cdot n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

zatímco v kýžené cílové pozici by měl mít hodnotu

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(n+1-k) &= (n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 = \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

(využili jsme známé vzorce pro součet prvních a druhých mocnin čísel prvních n přirozených čísel). Aby bylo možné zamýšleného cíle dosáhnout, musí dvě určené hodnoty S dávat po dělení číslem n stejný zbytek, neboli jejich rozdíl $\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)$ musí být násobkem čísla n . Číslo $\frac{1}{6}(n+1)(n-1) = \frac{1}{6}(n^2-1)$ proto musí být celé. Dosazením všech jednotlivých zbytků 0 až 5 modulo 6 snadno zjistíme, že nalezená podmínka je splněna, právě když číslo n dává po dělení šesti zbytek 1 nebo 5. V další části řešení ukážeme, že pro všechna taková n lze skutečně kýžené cílové pozice dosáhnout.

Popíšeme jeden z možných postupů. (Jedinou) minci, která je na počátku ve vrcholu A_1 , označme M . Všechny mince s výjimkou M budeme neustále přemísťovat ve stejném společném směru. V opačném směru se tedy bude přemísťovat jediná mince M , aniž bychom se o její pozici nějak průběžně „starali“. Její konečnou polohu určíme pomocí dříve odvozené vlastnosti součtu S : index i vrcholu A_i , ve kterém se mince M nakonec ocitne, je jednoznačně určen tím, že konečná hodnota součtu S dává po dělení číslem n stejný zbytek jako hodnota výchozí — indexy všech vrcholů totiž tvoří úplnou soustavu zbytků modulo n .

Navrženým postupem permanentního přemísťování mince M můžeme kteroukoliv ze zbylých mincí (nezávisle na ostatních zbylých mincích) přemístit do libovolného vrcholu, který si zameneme. Po konečném počtu vhodných přemístění tedy zřejmě dosáhneme toho, aby všechny mince různé od M byly v každém vrcholu A_i s indexem $i > 1$ v počtu, jaký nám předepisuje zadání úkolu, tedy $n + 1 - i$. Je celkem lhostejno, že je to právě $n + 1 - i$, důležité však je, že celkové počty mincí ve výchozí pozici i kýžené cílové pozici jsou zřejmě stejné, takže po zmíněném „zajištění“ vrcholů $A_2, A_3, \dots, A_n$ mincemi různými od M bude zbylých $n - 1$ mincí různých od M ve vrcholu A_1 a poslední mince M se ocitne v některém, prozatím nezjištěném vrcholu. Kdy to bude vrchol A_1 , a tudíž cíle bude dosaženo? Právě tehdy, když počet vrcholů n bude takový, že součet S pro výchozí pozici dává při dělení n stejný zbytek jako součet pro cílovou pozici, o kterou přemísťováním usilujeme. A všechna taková n jsme již našli.

Odpověď. Požadovaného cíle je možné dosáhnout, právě když číslo n dává po dělení šesti zbytek 1 nebo 5.

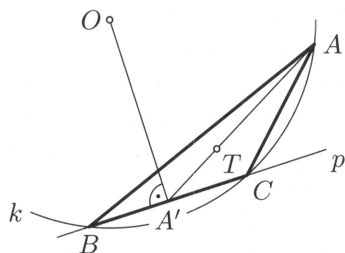
Poznámka. Popsaný způsob řešení vede k následujícímu závěru: Jsou-li dána dvě rozmístění stejného počtu mincí ve vrcholech n -úhelníku, pak jedno z nich lze převést na druhé popsáním přemísťováním mincí, právě když oba součty S , které odpovídají těmto rozmístěním, dávají po dělení číslem n stejný zbytek.

A – III – 6

Vezměme nějaký bod A z roviny ω . Aby mohl být vrcholem trojúhelníku popsaného v zadání, musí být různý od bodů O a T . Nejprve popíšeme obecnou konstrukci trojúhelníku ABC , v němž jsou dány vrchol A , střed O opsané kružnice a těžiště T (pro trojici navzájem různých bodů A, O, T). Teprve pak zjistíme, pro které body A takový trojúhelník sestrojít nelze.

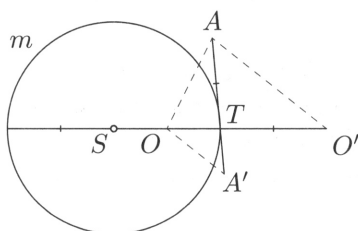
Označme A' střed strany BC . Bod A' je obrazem bodu A ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Pokud $A' \neq O$, leží body B a C na kolmici p vedené bodem A' k přímkce OA' a zároveň na opsané kružnici k se středem O a poloměrem $|OA|$ (obr. 32).

K danému bodu A dokážeme vždy sestrojít jeho obraz A' v uvedené stejnolehlosti. Předpokládejme nejprve, že $A' \neq O$. Abychom dostali dva různé body B a C , musí být přímka p sečnou kružnice k . To nastane, právě když $|OA'| < |OA|$. Označme O' obraz bodu O ve stejnolehlosti

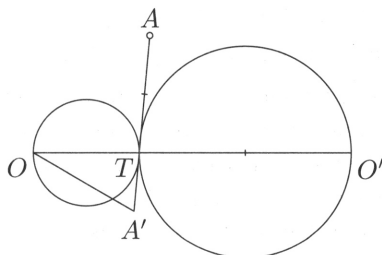


Obr. 32

se středem T a koeficientem -2 . Platí $|O'A| = 2|OA'|$, proto konstrukční podmínku můžeme zapsat ve tvaru $|O'A| < 2|OA|$. Bod A proto musí ležet mimo kruh určený Apollóniovou kružnicí⁴ $m(S; |ST|)$, kde S je bod souměrně sdružený s bodem T podle bodu O (obr. 33).



Obr. 33

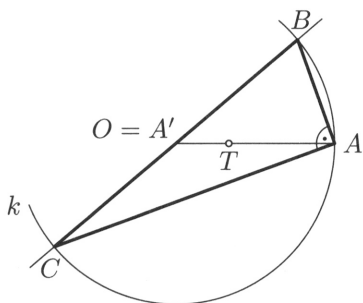


Obr. 34

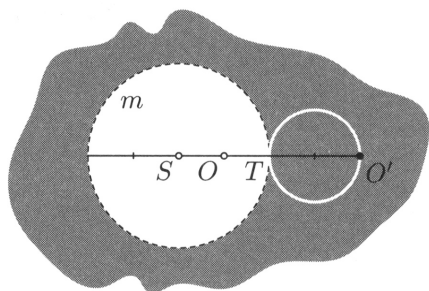
Pokud tedy $A' \neq O$ neboli $A \neq O'$, dostaneme konstrukci tři body A , B , C . Ty budou vrcholy vyhovujícího trojúhelníku, pokud neleží v přímce. Na přímce leží, když je přímka BC totožná s přímku AT , tj. když přímka OA' je kolmá na AT . Bod A' proto nesmí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem OT a (po „zobrazení“ této podmínky ve stejno-
lehlosti se středem T a koeficientem -2) bod A nesmí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem $O'T$ (obr. 34).

V případě, že bod A je totožný s bodem O' , tj. $A' = O$, namísto kolmice p můžeme vzít libovolnou přímku (různou od AT) procházející bodem O (obr. 35). Dostaneme tak nekonečně mnoho různých trojúhel-

⁴ Pro dané dva různé body P , Q a kladné číslo $k \neq 1$ je Apollóniova kružnice množina bodů X , pro něž platí $|PX| = k|QX|$. Střed Apollóniové kružnice leží na přímce PQ stejně jako dva body kružnice, které dovedeme pro dané k jednoduše sestrojit.



Obr. 35



Obr. 36

níků ABC s pravým úhlem při vrcholu A , které splňují všechny podmínky zadání.

Závěr. Hledanou množinou bodů je vnější oblast kružnice m kromě bodů ležících na Thaletově kružnici nad průměrem $O'T$, přičemž bod O' do hledané množiny též patří (obr. 36).

Kategorie P

Texty úloh

P – I – 1

Učebnice

„Píšeme dějiny, týhletý krajiny, jaký to příběh je. . .“ prozpěvoval si král Zloburtus a rozverně upravoval učebnice dějepisu. Přece jen byly napsány za jeho předchůdce krále Pravdomila III. a ten měl na historii příliš upjaté názory. Třeba tvrdil, že rod Pravdomilů byl starší a urozenější než rod Zloburtusů. Což ovšem nebyla pravda a bylo potřeba vše napravit. To je spousta práce, a tak vás královským rozkazem požádal o program, který by dokázal nahrazovat nevhodná slova slovy vhodnějšími.

Soutěžní úloha. Pro zadaný seznam nevhodných slov a jejich náhrad upravit vstupní text tak, že každý výskyt nevhodného slova v textu nahradíte jeho vhodnějším „ekvivalentem“.

Formát vstupu: Vstupní soubor se jmenuje `ucebnice.in`. Na prvním řádku souboru se nachází přirozené číslo N ($1 \leq N \leq 100\,000$), které udává počet nevhodných slov. Následuje N řádků, přičemž na každém z nich se nacházejí vždy dvě slova oddělená mezerou, která jsou tvořena pouze velkými písmeny. První slovo na každém z těchto N řádků je „nevhodné“ a druhé je jeho vhodnější náhrada. Od $(N + 2)$ -ého řádku až do konce souboru pak následuje samotný text učebnice. Text je tvořen pouze velkými písmeny anglické abecedy a mezerami (a konci řádků), přičemž souvislé úseky písmen tvoří jednotlivá slova. Můžete předpokládat, že žádné slovo nebude delší než 255 písmen a že N nevhodných slov je navzájem různých.

Formát výstupu: Výstupní soubor se jmenuje `ucebnice.out`. Výstupem programu je text, ve kterém byla všechna nevhodná slova nahrazena jejich vhodnějšími ekvivalenty. Ostatní slova, tj. zbytek souboru, musí zůstat beze změny. Výstupní text musí též zachovávat mezery mezi slovy a odřádkování podle vstupního souboru.

Příklad:

Vstupní soubor `ucebnice.in`:

```
5
PRAVDOMIL_ZLOBURTUS
ZLOBURTUS_PRAVDOMIL
DRACKA_DRAKA
ZROUNA_MRACKA
ZBYTECNA_DVOJICE
A_PAK_HRDINNY_PRAVDOMIL_PRAVDOMILUJICNE_SRAZIL_K ZEMI_DRACKA_ZROUNA
VSE_LZE_NAJIT_VE_FILMU_HISTORIE_RODU_PRAVDOMILU
```

V `TETO_UCEBNICI_BUDE_HANEN_ZLOBURTUS`

Výstupní soubor `ucebnice.out`:

```
A_PAK_HRDINNY_ZLOBURTUS_PRAVDOMILUJICNE_SRAZIL_K ZEMI_DRACKA_MRACKA
VSE_LZE_NAJIT_VE_FILMU_HISTORIE_RODU_PRAVDOMILU
```

V `TETO_UCEBNICI_BUDE_HANEN_PRAVDOMIL`

P – I – 2

Egyptské pyramidy

Amon a Thespis kontrolují bezpečnost pyramid před lupiči ve starověkém Egyptě. Amona stavitelé vpustí do nové pyramidy a čekají, jestli se dostane k některému z ukrytých pokladů. Thespis zůstane venku se stavebním plánem a voláním Amona naviguje. Ani jeden z nich bohužel není žádný génius a Thespis často netuší, kam by měl Amona poslat. U vaší firmy na děrování hliněných destiček si proto objednali návrh algoritmu na hledání cest v pyramidách.

Pyramidy i jejich interiéry jsou podle odvěké tradice zorientovány podle světových stran a plány se obvykle kreslí na čtverečkový papyrus, přičemž jeden čtvereček odpovídá délce 1 m. Podle nejnovějších bezpečnostních trendů se v pyramidě též vyskytují uzamykatelné dveře a klíče. Každé z políček plánu pyramidy je chodba, stěna, poklad, dveře nebo místnost, kde se nachází klíč. Dveře a klíče jsou pro odlišení označeny červenou, zelenou, modrou a fialovou barvou.

Aby se Amon v pyramidě neztratil, otáčí se jen o násobky devadesáti stupňů a každý jeho krok měří přesně 1 m, tj. Amon se může pohybovat pouze vodorovně nebo svisle o jedno pole. Na pole může Amon vstoupit, pokud je prázdné, je to poklad, místnost s klíčem, nebo pokud jsou to dveře, ke kterým už má příslušný klíč. Klíč Amon sebere, jakmile vstoupí na pole, kde se klíč nachází, a klíč mu už poté zůstává po celý zbytek pohybu v pyramidě. Jedním klíčem může Amon odemknout libovolně mnoho dveří barvy shodné s barvou klíče.

Díky magickým formulím vyřčeným faraónskými kouzelníky platí, že pokud Amon udělá jeden krok doleva z políčka v nejlevějším sloupci plánku, ocitne se na políčku ve stejném řádku v nejpravějším sloupci. Na druhou stranu, krok doprava z nejpravějšího sloupce ho přivede do nejlevějšího sloupce. Podobně krok nahoru z prvního řádku ho přemístí do posledního řádku a naopak. Jakmile se Amon dostane na políčko s pokladem, dá to hlasitým voláním najevo, a Thespidův úkol navigování uvnitř pyramidy končí.

Vaším úkolem je napsat program, který pro zadanou mapu pyramidy najde cestu k některému z pokladů nebo určí, že žádná taková cesta není možná. Památujte, že v pyramidě nemusí být vůbec žádný poklad ukryt, mohou existovat dveře bez příslušných klíčů a také klíče, ke kterým neexistují žádné dveře stejné barvy. Také se může vyskytnout více pokladů nebo dveří či klíčů stejné barvy. Amonova výchozí pozice je ale na plánu vždy právě jedna.

Formát vstupu: Vstupní soubor se jmenuje `pyramida.in`. Na jeho prvním řádku jsou uvedeny rozměry plánu pyramidy jako dvě přirozená čísla R (počet řádků) a S (počet sloupců) oddělená jednou mezerou. Můžete předpokládat, že $1 \leq R \times S \leq 1\,000\,000$. Na každém z následujících R řádků je vždy právě S znaků popisujících mapu pyramidy s následujícími významy:

#	zeď
.	volné políčko
*	Amonova výchozí pozice
CZMF	červené, zelené, modré nebo fialové dveře
czmf	červený, zelený, modrý nebo fialový klíč
\$	poklad

Mapa pyramidy je ve vstupním souboru orientována jako běžné mapy, tj. její horní okraj je severní.

Formát výstupu: Výstupní soubor `pyramida.out` obsahuje jediný řádek, který popisuje některou z nejkratších posloupností kroků, jimiž se Amon může dostat k některému z pokladů. Posloupnost Amonových kroků k pokladu je zadána jako posloupnost znaků ‚S‘, ‚J‘, ‚V‘ a ‚Z‘, které udávají, na kterou světovou stranu má Amon udělat následující krok. Pokud žádná taková posloupnost neexistuje, tj. poklad není možné získat, výstupní soubor obsahuje pouze slovo ‚NELZE‘.

Příklady:

Vstup:

3 5

#####

##F\$#

#####

Vstup:

3 19

#####

#\$F.zMc.*.Cm.Z.ZZf#

#####

Vstup:

3 1

*

.

\$

Výstup:

NELZE

Výstup:

ZZVVVVVZZZZZZVVVVVVVVVVVVVVZZZZZZZZZZZZZZ

Výstup:

S

(Přejdeme přes severní okraj.)

P – I – 3

Horský maraton

V jedné hornaté zemi si všimli, že ve velkoměstech získávají na popularitě všelijaké maratony, půlmaratony a podobné běžecké závody, které se odehrávají v jejich ulicích. Rozhodli se, že podobný závod uspořádají ve svých velehorách. Uběhnout více než 42 kilometrů ve vysoké nadmořské výšce ovšem není žádná legrace. Chtějí proto postavit závod na jiném principu — nebude tak dlouhý, ale jeho náročnost bude spočívat v rozdílu mezi nadmořskou výškou startu a cíle.

Protože podobné akce jsou často využívány k propagaci, pořadatelé stanovili, že trasa tohoto „maratonu“ by měla vést po nedávno otevřené turistické značce, která prochází celým pohořím, a start i cíl by měly být u některého z rozcestí. Aby však závod měl stále ještě něco společného s maratonem, potřebují vybrat takovou trasu, aby rozdíl nadmořských výšek cíle a startu byl pokud možno co nejbližší předem dané hodnotě X , což bude vhodně zvolený násobek oné maratonské délky 42,195 km.

Organizátoři vás požádali o pomoc s výběrem trasy závodu. Trasa turistické značky se skládá z N úseků mezi rozcestími. Pro každý z úseků je zadáno celé číslo a_i — rozdíl nadmořských výšek konce a začátku úseku. Pokud je a_i kladné, pak trasa stoupá, pokud je záporné, tak trasa klesá, a pokud je nulové, tak trasa v tomto úseku vede po rovině. Vaším úkolem

je nalézt čísla i a j , $1 \leq i \leq j \leq N$, taková, že rozdíl mezi nadmořskou výškou konce j -tého úseku a začátku i -tého úseku je co nejbližší číslu X . Jinými slovy, vaším úkolem je nalézt v zadané posloupnosti souvislou podposloupnost $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$, jejíž součet je S a $|X - S|$ je co nejmenší možné.

Při řešení úlohy nepředpokládejte, že by velikost čísel v posloupnosti byla omezená (přeci jen nevíte, jak přesné údaje vám pořadatelé zadají), ale můžete předpokládat, že všechny aritmetické operace vyžadují čas $O(1)$.

Příklad: Pro posloupnost 3, 5, -2, 5, 4 délky $N = 5$ a pro $X = 7$ je hledanou podposloupností -2, 5, 4 (tedy $i = 3$ a $j = 5$) se součtem 7. Pro $X = 10$ jsou možným řešením podposloupnost 3, 5, -2, 5 se součtem 11 a jiným možným řešením je podposloupnost 5, 4 se součtem 9. Váš program nemusí nalézt všechna nejlepší řešení — stačí, když vypíše libovolné z nich.

P – I – 4

Stackal

V letošním ročníku olympiády se budeme setkávat se *zásobníkovými počítači*. To jsou výpočetní stroje, jejichž paměť je tvořena několika *zásobníky*. Každý zásobník obsahuje posloupnost *hodnot* a umí s nimi provádět tyto tři operace: přidat hodnotu na konec posloupnosti (uložit ji do zásobníku), odebrat hodnotu z konce posloupnosti (vybrat ji ze zásobníku) a konečně zjistit, zda v zásobníku ještě nějaké hodnoty jsou. Mimo to má náš počítač ještě pevný počet obyčejných proměnných. Hodnoty uložené v zásobnících i v proměnných musí mít pevný rozsah *nezávislý na velikosti vstupu*.

Zásobníkové počítače budeme programovat v jazyku Stackal. To je jazyk podobný Pascalu, ovšem upravený podle možností našich strojů. V následujících odstavcích popíšeme, v čem se od klasického Pascalu liší.

Proměnné ve Stackalu mohou být pouze těchto typů: **boolean** (logický typ, může nabývat hodnot **true** a **false**), **char** (znak z nějaké konečné množiny znaků, které budeme říkat abeceda), $a..b$ (celá čísla z intervalu od a do b ; jak a , tak b musí být nezáporné konstanty menší než 100) a **stack of t** , což je zásobník hodnot typu t (jiného než **stack**). Počáteční hodnoty proměnných při spuštění programu nejsou definovány, výjimku tvoří zásobníky, které jsou na počátku vždy prázdné.

Vstup a výstup programu jsou vždy posloupnosti znaků (neboli řetězce). Funkce `read(c)` přečte další znak ze vstupu, uloží ho do proměnné `c` a vrátí `true`. Pokud by již na vstupu žádné další znaky nebyly, vrátí `false` a proměnnou `c` nezmění. Na výstup se zapisuje příkazem `write(x)`, kde `x` je buďto znak nebo proměnná typu `char`. Ve vstupu ani výstupu se není možné vracet ani znaky přeskakovat.

Zásobníky je možno ovládat pomocí speciálních příkazů a funkcí: Je-li `S` zásobník, pak příkaz `push(S, x)` uloží do `S` hodnotu `x` (hodnota samozřejmě musí být správného typu), funkce `pop(S)` vybere hodnotu ze zásobníku a vrátí ji jako svůj výsledek a booleovská funkce `empty(S)` vrátí `true`, pokud je zásobník `S` prázdný, jinak `false`. Funkci `pop` je také možné volat jako proceduru, pokud nás odebraná hodnota nezajímá. Použití funkce `pop` na prázdný zásobník není povoleno a způsobí zastavení programu s běhovou chybou. Žádným jiným způsobem nelze se zásobníky manipulovat.

Příkazy Pascalu máme k dispozici všechny, jediným omezením je, že nesmíme používat přiřazovací příkaz `:=` na zásobníky. Také můžeme v programu definovat procedury a funkce, není ovšem dovoleno používat rekurzi a zásobníky mohou být použity jako parametry pouze tehdy, jsou-li předávány odkazem.

Časovou a paměťovou složitost programů definujeme obdobně jako na normálním počítači. Čas budeme měřit počtem provedených příkazů, paměť největším počtem hodnot, které si program pamatuje v jednom okamžiku ve svých proměnných a všech zásobnících. Často se budeme snažit o to, aby program používal co nejmenší počet zásobníků, byť by kvůli tomu byl pomalejší.

Příklad: Napište program, který zjistí, zda se v zadaném řetězci vyskytuje stejný počet znaků `'a'` jako znaků `'b'` a podle toho vypíše buď `'1'` (když to je pravda), nebo `'0'` (když ne).

ŘEŠENÍ: Jelikož hodnoty proměnných jsou omezené stovkou, nemůžeme si jednoduše počítat výskyty znaků v celočíselné proměnné. Místo toho využijeme dva zásobníky: do jednoho budeme ukládat `a`-čka, do druhého `b`-čka. Až vstup skončí, budeme vybírat znaky vždy z obou zásobníků současně a odpovíme `1` právě tehdy, když se oba současně vyprázdnily.

```

program rovnost;
var a, b: stack of char;      { dva zásobníky na znaky }
    c: char;                  { právě zpracovávaný znak }
begin
    while read(c) do begin    { čteme ze vstupu, dokud to jde }

```

```

    if c='a' then push(a, c); { znak uložíme do správného zásobníku }
    if c='b' then push(b, c);
end;
while not empty(a) and not empty(b) do begin
    pop(a);                { odebíráme znaky z obou zás. současně }
    pop(b);
end;
if empty(a) and empty(b) then { vyšly oba prázdné? }
    write('1')
else
    write('0');
end;

```

Tento program má lineární časovou i paměťovou složitost a potřebuje dva zásobníky.

DRUHÉ ŘEŠENÍ: Ukážeme si, jak jeden zásobník ušetřit a stále zachovat lineární časovou složitost. Místo jednotlivých počtů znaků budeme do zásobníku ukládat, o kolik víc jsme viděli a-ček než b-ček. Pokud je tento rozdíl kladný (a-ček je více), zapamatujeme si příslušný počet znaků '+'. Záporné rozdíly budeme ukládat pomocí znaků '-'.

Rozmysleme si tedy, co se stane, když program přečte znak 'a'. Tehdy by měl k rozdílu přičíst jedničku. Proto zkontroluje, jaká hodnota se nachází na vrcholu zásobníku — to je hodnota, kterou by přečetl následující pop. Pokud to je '-', tak ho pouze odstraníme. V opačném případě (+, nebo prázdný zásobník) přidáme nové '+'. Znak 'b' se zpracovává obdobně, pouze se k oběma znaménkům chováme opačně.

```

program rovnost_podruhe;

{ Pomocná funkce, která zjistí, co je na vrcholu zásobníku }
function look(var s:stack of char): char;
var c: char;
begin
    if empty(s) then c := '0' { pokud je prázdný, vrátíme nulu }
    else begin
        c := pop(s);          { jinak odebereme prvek ze zásobníku }
        push(s, c);           { a ihned ho vrátíme zpět }
    end;
    look := c;
end;

var r: stack of char;      { zde je uložen rozdíl a-b }
c: char;                  { právě zpracovávaný znak }
begin
    while read(c) do begin
        if c='a' then begin { přečetli jsme 'a' => zvyšujeme rozdíl }
            if look(r)='- ' then pop(r)
            else push(r, '+');
        end;
        if c='b' then begin { přečetli jsme 'b' => snižujeme rozdíl }

```

```

        if look(r)='+' then pop(r)
                        else push(r, '-');
    end;
end;
if empty(r) then write('1') { je rozdíl nulový? }
    else write('0');
end;

```

Na zpracování každého znaku potřebujeme konstantně mnoho příkazů, takže časová složitost je stále lineární. Na jediném použitém zásobníku se objeví nejvýše tolik znamének, kolik je znaků na vstupu, takže paměťová složitost je taktéž lineární.

Soutěžní úloha. Napište program pro zásobníkový počítač, který o zadaném řetězci rozhodne, zda je symetrický. Tak se říká těm řetězcům, které se pozpátku čtou stejně jako popředu, jinými slovy první znak je stejný jako poslední, druhý jako předposlední a tak dále.

- Snajte se o co nejlepší časovou složitost. (5 bodů)
- Použijte nejmenší možný počet zásobníků. (5 bodů)

P – II – 1

Lesník Jehlička

Pan Jehlička kdysi vysázel krásný a veliký les, stromy rostoucí v přesných řadách se ani jehličkou neodchylovaly od dokonalosti. Přišel čas, kdy les již vyrostl, a začalo se s těžbou dřeva. Každý z dřevorubců začal kácet na jiném okraji lesa a vysekal do něj pořádnou paseku. Když se pan Jehlička přišel na les podívat, objevil jen jeho zbytek, s hlubokými výseky od těžby. Pana Jehličku by teď zajímalo, kolik stromů mu vlastně zbylo. Pomůžete mu s tím?

Soutěžní úloha. Stromy v lese pana Jehličky jsou vysázeny tak, že rostou v mřížových bodech obdélníkové mřížky. Polohu každého stromu lze tedy popsat dvojicí celočíselných souřadnic (x, y) . To, co z lesa zbylo, je vymezeno mnohoúhelníkem (který může být i nekonvexní) tak, že vrcholy mnohoúhelníku jsou stromy a na všech mřížových bodech uvnitř i na hranici mnohoúhelníku stále ještě stojí strom. Vaším úkolem je spočítat, kolik mřížových bodů leží uvnitř tohoto mnohoúhelníku, včetně jeho hranice.

Formát vstupu: První řádek obsahuje přirozené číslo N — počet vrcholů mnohoúhelníku ($3 \leq N \leq 100\,000$).

Na následujících N řádcích jsou popsány jednotlivé vrcholy mnohoúhelníku. Na i -tém z nich je dvojice celočíselných souřadnic $1 \leq x_i \leq 10^9$,

$1 \leq y_i \leq 10^9$ udávající polohu i -tého vrcholu. Vrcholy jsou zadány v pořadí, v jakém leží na hranici mnohoúhelníku při obcházení po nebo proti směru hodinových ručiček.

Formát vstupu: Na jediný řádek výstupu vypíšete jedno celé číslo představující počet mřížových bodů uvnitř mnohoúhelníku včetně jeho hranice.

Příklady:

Vstup:

3

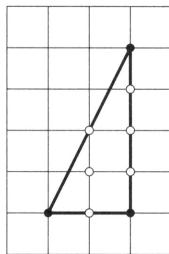
1 1

3 5

3 1

Výstup:

9



Tri mřížové body tvoří vrcholy trojúhelníku, pět mřížových bodů leží na hranách a jeden mřížový bod leží uvnitř.

Vstup:

8

2 5

3 3

1 1

5 2

6 1

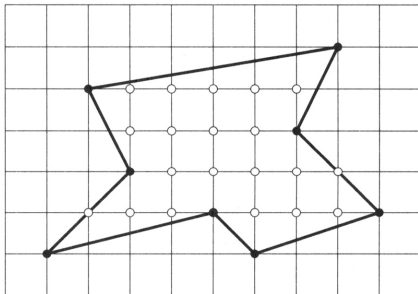
9 2

7 4

8 6

Výstup:

28



Osm mřížových bodů tvoří vrcholy mnohoúhelníku, dva mřížové body leží na hranách a osmnáct mřížových bodů leží uvnitř.

P – II – 2

Čínsky nebo česky?

Děd Vševěd zestárl. Nelze se tedy divit tomu, že na všetečné dotazy už neodpovídá tak rád a ochotně jako dříve. Navíc ho začala zlobit paměť, takže se tu a tam stává, že něco neví, což je v jeho profesi velmi nemilé. Proto učinil moudré rozhodnutí — předat své poslání někomu mladšímu, a to rovnou svému vnukovi.

Vnuk Vševed je na svůj věk neskonale moudrý, chytrý a navíc přečetl všechny encyklopedie i wikiédie. Bohužel se ale nestihl za tak krátkou dobu naučit dostatek cizích jazyků.

Což o to, s tím by, díky programu TheBestTranslatorOfTheWorld 5.0, neměl být žádný problém. Nepříjemné je, že tento program sám od sebe neumí zjistit, z jakého jazyka má překládat, takže je nutné vstupní jazyk nastavit ručně.

Vyzkoušet všech 10^9 jazyků, které program umí, by zabralo neúnosně dlouhou dobu, takže před kanceláří vnuka Vševeda by se tvořily fronty. Proto by potřeboval ještě jeden program, který by uměl zjistit, v jakém jazyku je daný text napsaný.

Soutěžní úloha. Vaším úkolem je navrhnout program, který určí jazyk, jehož slova se v daném textu vyskytují nejčastěji. Váš program bude mít k dispozici dva soubory: `slovníky.in`, ve kterém jsou uložena slova jednotlivých jazyků, a `text.in`, ve kterém je text, který má program analyzovat. Do souboru `jazyk.out` váš program запиše jméno jazyka, jehož slova jsou v textu nejčastěji obsažena. V případě, že takových jazyků bude více, měl by program vypsat všechny takové jazyky. Opakované výskyty téhož slova v souboru `text.in` se počítají do počtu slov opakovaně.

Formát vstupu — soubor slovníky.in: Na prvním řádku souboru je číslo N ($1 \leq N \leq 10\,000$), které udává počet slovníků v souboru. Dále následuje N slovníků.

Každý ze slovníků začíná dvěma řádky. Na prvním je uvedeno jméno jazyka a na druhém číslo S , které udává počet slov v tomto slovníku. Poté následuje S řádků, přičemž na každém z nich je právě jedno slovo daného jazyka (každé slovo je kratší než 255 znaků a je tvořeno pouze malými písmeny anglické abecedy). Tato slova nejsou uvedena v žádném určitém pořadí, ale jsou navzájem různá. Celkový počet slov ve všech slovnících dohromady je nejvýše 100 000.

Jméno každého jazyka je tvořeno nejvýše 255 malými písmeny anglické abecedy. Můžete předpokládat, že jména jazyků jsou navzájem různá. Různé slovníky mohou obsahovat stejné slovo.

Formát vstupu — soubor text.in: V tomto souboru je uložen text určený k analýze. Text je tvořen slovy kratšími než 255 znaků, přičemž slovem nazýváme souvislý úsek malých písmen anglické abecedy. Slova jsou oddělena mezerami nebo konci řádků. Text nebude obsahovat více než 1 000 000 slov. Tato slova nemusí být navzájem různá.

Formát výstupu — soubor jazyk.out: Pokud existuje jeden jazyk, jehož slova se vyskytují v zadaném textu nejčastěji, program vypíše do vý-

stupního souboru jméno tohoto jazyka. V případě, že takových jazyků je více, program vypíše jména všech takových jazyků na samostatné řádky (v libovolném pořadí).

Příklad:

<i>slovníky.in</i>	<i>text.in</i>	<i>jazyk.out</i>
3	tento text	cestina
cestina	by nepochopila	anglictina
4	ani zebra	
text	co ma auto	
bagr		
ahoj		
zebra		
anglictina		
4		
zebra		
by		
hello		
car		
nemcina		
3		
hallo		
auto		
sagt		

P – II – 3

Cyklistický závod

Po úspěchu horského maratonu se na vás jeho organizátoři obrátili s prosbou o pomoc při organizaci cyklistického závodu. Trasa závodu by měla vést z cíle horského maratonu, Vyšných Háků, do hlavního města Velkého Sumce. Cyklistický závod bude tvořen několika etapami a organizátoři již určili možné dvojice měst, mezi kterými by mohly vést jednotlivé etapy závodu. Pro každou takovou dvojici navíc odhadli počet diváků, kteří by se na závod přišli podívat. Protože rozpočet celého závodu je omezený, organizátoři by rádi trasu závodu navrhli tak, aby měl co nejméně etap, a přitom ho vidělo co nejvíce diváků.

Soutěžní úloha. Váš program obdrží seznam dvojic měst, mezi kterými by mohly vést etapy závodu, a pro každou dvojici odhad počtu diváků,

kteří by se na danou etapu přišli podívat. Jednotlivé etapy, které tvoří trasu závodu, musí na sebe v koncových městech navazovat. Program by měl nalézt trasu závodu vedoucí z Vyšných Háků do Velkého Sumce, která má co nejméně etap, a mezi všemi takovými trasami určit tu, kterou shledne největší počet diváků (počty diváků jednotlivých etap závodu se sčítají). Pokud je i takových tras více, program může vypsát libovolnou z nich.

Formát vstupu: První řádek obsahuje dvě přirozené čísla N a M , $2 \leq N \leq 1\,000\,000$ a $1 \leq M \leq 1\,000\,000$; N je počet měst a M je počet dvojic měst, mezi kterými by mohla jedna z etap závodu vést. Města jsou očíslována čísly mezi 1 a N , přičemž Vyšné Háky mají číslo 1 a Velký Sumec má 2. Na každém z M následujících řádků je trojice čísel A , B a D ($1 \leq A, B \leq N$ a $0 \leq D \leq 1\,000$) popisující jednu z dvojic měst, mezi kterými by mohla vést jedna etapa závodu: etapa závodu by mohla vést mezi městy s čísly A a B a očekávaný počet diváků pro tuto etapu je D . Etapa závodu může vést z města A do města B nebo naopak.

Můžete předpokládat, že zadané dvojice měst pro etapy závodu umožňují sestavit aspoň jednu trasu závodu. Vstup navíc neobsahuje dva různé řádky, které by popisovaly etapu mezi stejnou dvojicí měst.

Formát výstupu: Na první řádek výstupu vypište dvě čísla, nejmenší možný počet P etap závodu z města s číslem 1 do města s číslem 2 a největší počet diváků, který by mohl shlédnout takový závod tvořený P etapami. Na druhý řádek vypište $P+1$ čísel měst, která tvoří optimální trasu.

Příklad:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
---------------	----------------

6 9

3 16

1 6 10

1 3 4 2

1 3 8

4 6 2

4 3 7

5 6 0

5 3 4

4 5 100

2 4 1

2 5 2

P – II – 4

Stackal

K úloze se vztahuje studijní text z úlohy P–I–4.

Soutěžní úloha. Napište program pro zásobníkový počítač, který vyhodnotí zadaný logický výraz a vypíše jeho hodnotu na výstup. Program by měl používat nejmenší možný počet zásobníků.

Logické výrazy zapisujeme pomocí znaků 0, 1, &, |, (a). Znaky 0 a 1 slouží jako konstanty (nepravda a pravda), & je logický součin ($0&0 = 0&1 = 1&0 = 0$, $1&1 = 1$), | je logický součet ($0|0 = 0$, $0|1 = 1|0 = 1|1 = 1$) a závorky fungují běžným způsobem. Pokud závorky neuvedeme, součin má přednost před součtem, tedy $1|0&0|0 = 1|(0&0)|0 = 1|0|0 = 1$.

P – III – 1

Lesník Jehlička II

V krajském kole pan Jehlička s vaší pomocí a s hrůzou zjistil, že z jeho kdysi krásného a velikého lesa zbývá jen drobný háj. Aby zabránil jeho dalšímu zmenšování, najal tlupu strážných trollů. Trollové jsou známí pro svou sílu, méně pak již pro svou pronikavou inteligenci. Pan Jehlička se proto rozhodl příkazy pro trolly co možná nejvíce zjednodušit. Každý troll má přiděleny dva body a mezi nimi pochoduje po rovné čáře.

Během prvního dne bylo však nutné ošetřit takřka všechny trolly s drobnými zraněními. Pan Jehlička pozapomněl, že se úsečky, po nichž trollové pochodují, mohou protínat, a ve svých instrukcích nezmínil nutnost vyhýbat se srážkám s ostatními trolly. Pokus přidat trollům tento příkaz narazil na jejich zapomnětlivost. Po několika opakováních obtížného příkazu „na konci úsečky se otoč“ trollům přetekl zásobník a příkaz „vyhýbej se srážkám“ se ztratil, s neblahými důsledky pro rozpočet ošetřovny.

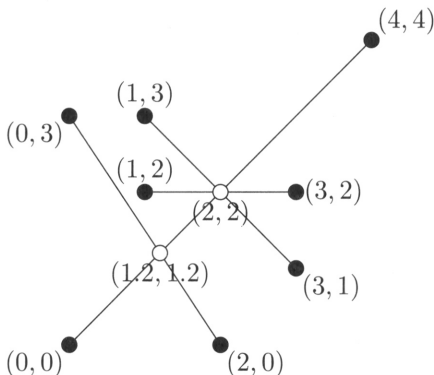
Pan Jehlička se proto rozhodl všechna křížení označit dopravní značkou „Pozor, troll!“. Vaším úkolem je zjistit, kam tyto značky umístit.

Soutěžní úloha. Úsečka, po níž se i -tý troll pohybuje, je zadána dvojicí jejích krajních bodu se souřadnicemi (a_i, b_i) , (c_i, d_i) , kde a_i , b_i , c_i a d_i jsou celá čísla. Krajiní body úsečky neleží na žádné jiné úsečce. Úlohou je vypsát souřadnice průsečíků těchto úseček. Každý průsečík vypíšte pouze jednou, i když by se v něm protínalo tři nebo více úseček. Předpokládejte, že průsečíků je málo — podstatně méně než N^2 .

Formát vstupu: První řádek obsahuje přirozené číslo N , udávající počet trollů, $0 \leq N \leq 10\,000$. Na následujících N řádcích jsou popsány úsečky, po nichž se trollové pohybují. Na i -tém řádku se nachází čtveřice celých čísel a_i, b_i, c_i a d_i , souřadnice krajních bodů (a_i, b_i) a (c_i, d_i) úsečky.

Formát výstupu: Na každý řádek výstupu vypište souřadnice jednoho z průsečíků zadaných úseček. Pořadí průsečíků může být libovolné.

Příklady:



Vstup:

```
4
0 0 4 4
0 3 2 0
1 3 3 1
1 2 3 2
```

Výstup:

```
1.2 1.2
2 2
```

P – III – 2

Kouzelník Pecivális

Při poklesu zájmu o jeho magická představení v důsledku hospodářské krize se starý kouzelník Pecivális rozhodl využít nově nabytého času k procestování vzdálených koutů Země. Klesající tržby však mají ten nepříjemný důsledek, že si nemůže dovolit konvenční způsoby přepravy a nezbývá než se spolehnout na (ne)osvědčené metody předků. . .

Během pátrání v zapomenutých koutech svého obydlí měl Pecivális štěstí a podařilo se mu najít potřebné svazky zaklínadel. Jejich použití však není úplně jednoduché — podle nejlepších soudobých poznatků v oblasti cestovní magie (které se za posledních pár set let příliš nezměnily)

může sice začít i skončit zařikání na libovolném místě v knize, není však záhodno mezitím nějaký text přeskočit a navíc musí magickými slovy vyvolaná energie dosáhnou některé z potřebných hladin pro kýžený cíl přesunu. Čím větší bude počet přečtených slov, tím větší je pak šance úspěšného zakončení. Jelikož však není starý mág v této oblasti čarování příliš zběhlý, bude potřebovat vaši pomoc.

Soutěžní úloha. Mějme posloupnost slov, z nichž každé je ohodnoceno celým číslem, které představuje jeho energii. Hledaná energetická hladina je reprezentována (všemi) násobky daného přirozeného čísla K . Vaším úkolem je na základě těchto informací najít nejvhodnější začátek a konec zařikání, to jest nejdelší souvislý úsek slov, jejichž energie budou v součtu násobkem čísla K . Předpokládejte, že číslo K je obvykle řádově menší než počet slov v knize zařikadel.

Formát vstupu: Na prvním řádku vstupu jsou dvě přirozená čísla N a K , $1 \leq N \leq 1\,000\,000$ a $1 \leq K \leq 50\,000$, oddělená mezerami; číslo N udává počet slov v knize zařikadel. Jak již bylo řečeno, K je obvykle mnohem menší než N . Na druhém řádku je pak mezerami oddělený seznam N nezáporných celých čísel $a_1, \dots, a_n$, $0 \leq a_i \leq 1\,000\,000\,000$, která představují energie jednotlivých slov v knize.

Formát výstupu: Program vypíše dvě čísla i a j ($1 \leq i \leq j \leq N$), přičemž součet $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ musí být násobkem čísla K a rozdíl $j - i$ největší možný mezi všemi dvojicemi i a j , pro něž je součet $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ násobkem K . Je-li možných dvojic i a j více, můžete vypsat libovolnou z nich. Pokud naopak žádná taková dvojice neexistuje, vypíšte „Nelze zaklínat.“.

Příklad 1:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
---------------	----------------

8 5	3 7
-----	-----

1 2 8 6 3 4 4 9	
-----------------	--

Příklad 2:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
---------------	----------------

5 8	Nelze zaklínat.
-----	-----------------

1 1 1 1 1	
-----------	--

P – III – 3

Stackal

K úloze se vztahuje studijní text z úlohy P–I–4.

Soutěžní úloha. Na vstupu je zadán řetězec obsahující pouze znaky ‚a‘, ‚b‘, ‚c‘ a ‚d‘. Napište program pro zásobníkový počítač, který zjistí, zda má v tomto řetězci každý ze znaků ‚a‘ až ‚d‘ stejný počet výskytů. Pokud ano, program na výstup запиše jedničku, jinak nulu.

Zaměřte se na použití co nejmenšího počtu zásobníků, byť za cenu vyšší časové složitosti.

Příklad: Na vstupy ‚abcdcdcb‘ a ‚aaabbbcccd‘ je správná odpověď ‚1‘.

Na vstup ‚badbadc‘ je správná odpověď ‚0‘ (znaky ‚a‘, ‚b‘ a ‚d‘ se vyskytují dvakrát, ale znak ‚c‘ pouze jednou).

P – III – 4

Výlet do Švýcarska

Program: `swiss.pas` / `swiss.c` / `swiss.cpp`

Vstup: `swiss.in`

Výstup: `swiss.out`

Tibor je vášnivý cyklista. Kromě cyklů v grafech má však také rád hory. Rozhodl se, že se o prázdninách vypraví s kamarády na kola do Švýcarska. Chtěli by podniknout čtyřdenní výlet a spát budou vždy v hotelu v některém ze švýcarských měst. Vlakem dojedou do jednoho z měst a odtud vyrazí do strmých kopců a hlubokých údolí. Na internetu si našli seznam jednodenních tras mezi švýcarskými městy, dokonce i s bohatým hodnocením od ostatních cyklistů. Stejně jako mnoho dalších věcí v Tiborově životě, i výlet musí tvořit cyklus. Po čtyřech dnech se tedy musí vrátit zase zpět do města, ze kterého vyrazili. Teď jen naplánovat tu nejlepší trasu. Tibor však zjistil, že to není tak jednoduché a rád by, abyste mu pomohli.

Soutěžní úloha. Švýcarská města si pro jednoduchost očíslováme čísla od 1 do N a počet tras nalezených na internetu si označíme M . Každá trasa vždy spojuje dvě různá města a žádné dvě trasy nespojují stejnou dvojici měst. Navíc má každá trasa ohodnocení, což je přirozené číslo menší nebo rovné 256. Všechny trasy lze projet oběma směry a ohodnocení trasy je pro oba směry stejné. Z každého města vede nejvýše 100 tras.

Tibor přirozeně nechce jet žádnou z tras dvakrát. Vaším úkolem je najít čtyři na sebe navazující trasy takové, že první z nich začíná ve stejném městě, kde poslední končí, a tyto trasy mají největší součet ohodnocení. Pokud existuje více řešení, můžete vybrat libovolné z nich.

Formát vstup: První řádek vstupního souboru **swiss.in** obsahuje přirozená čísla N a M , počet měst $4 \leq N \leq 10\,000$ a počet tras $4 \leq M \leq 1\,000\,000$.

Na následujících M řádcích jsou popsány jednotlivé trasy. Na i -tém řádku jsou přirozená čísla x_i , y_i a h_i , kde $1 \leq x_i \leq N$ a $1 \leq y_i \leq N$ jsou čísla měst, které spojuje i -tá trasa, a $1 \leq h_i \leq 256$ je ohodnocení i -té trasy. Žádné město se nevyskytuje ve více než 100 trasách.

Formát výstup: Na první řádek výstupního souboru **swiss.out** vypište nejvyšší součet hodnocení čtyř tras, které splňují podmínky zadání. Na druhý řádek vypište pět čísel navštívených měst v pořadí, v jakém je cyklisté projedou. Dle zadání úlohy musí být první a poslední z těchto čísel stejná.

Pokud žádné takové čtyři trasy neexistují, výstup bude tvořen jedním řádkem se slovem „NEEXISTUJE“.

Příklady:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>	<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
6 9	43	7 9	NEEXISTUJE
1 2 10	2 6 3 5 2	1 2 1	
2 5 11		2 3 1	
3 1 10		1 3 1	
6 3 7		3 4 1	
1 4 3		3 5 1	
2 6 15		5 4 1	
5 3 10		5 6 1	
4 5 5		6 7 1	
4 6 9		2 7 1	

P – III – 5

Záchranná akce

Program: akce.pas / akce.c / akce.cpp
Vstup: akce.in
Výstup: akce.out

Do lunární stanice na Měsíci narazil neznámý předmět a jedinou šancí na záchranu je vyslat teleportem robota s prosbou o pomoc do některé z dalších stanic na Měsíci. Nejbližší takovou stanicí je stanice Alfa, která je však kromě jednoho skladiště zcela odstíněna proti teleportaci.

Mapa skladiště je obdélníková mřížka čtvercových polí, kde je každé pole buď celé zabráno překážkou (a tedy je neprůchozí) nebo je pro robota celé průchozí. Robot je malý primitivní model, kterého lze ovládat jen tak, že se mu zadá poslušnost jednoduchých příkazů a on ji neustále opakuje. Příkazy jsou čtyři: pro otočení robota vlevo a vpravo (o 90°) a pro pohyb vpřed a vzad (na sousední pole).

Robot se po teleportaci může ocitnout na libovolném políčku na mapě skladiště, kde není překážka, a je natočen směrem na sever. Pokud se robot pokusí pohnout na místo s překážkou, zůstane na místě (zarazil se o ni) a pokračuje následujícím příkazem ze své poslušnosti. Za opuštění skladiště se považuje překročení libovolného okraje mapy.

Soutěžní úloha. Vaším úkolem je napsat testovací software, který na základě příkazové sekvence pro robota a mapy skladu ve tvaru čtvercové sítě spočítá, z kolika políček lze sklad opustit prováděním zadané poslušnosti příkazů. Připomeňme, že po provedení posledního příkazu této poslušnosti robot začne znovu provádět příkazy poslušnosti od začátku. Navíc pro každé políčko, ze kterého robot skladiště opustí, program určí počet příkazů, které robot provede do opuštění skladiště (do tohoto počtu se započítávají i ty příkazy, které robot nemohl vykonat kvůli překážce v cestě).

Formát vstupu: Na prvním řádku vstupního souboru **akce.in** je délka L ($1 \leq L \leq 500$) sekvence příkazů pro robota; samotná sekvence příkazů pro robota je pak uvedena na druhém řádku. Druhý řádek tedy obsahuje poslušnost čítající L následujících znaků:

- ▷ L = otočení robota o 90 stupňů doleva,
- ▷ R = otočení robota o 90 stupňů doprava,
- ▷ + = posun robota o jedno políčko vpřed vzhledem ke směru jeho natočení,
- ▷ - = posun robota o jedno políčko vzad vzhledem ke směru jeho natočení.

Na třetím řádku vstupu jsou pak čísla S a V , oddělená jednou mezerou. S ($1 \leq S \leq 500$) udává šířku mapy, tedy počet políček od západu k východu (vodorovně), a V ($1 \leq V \leq 500$) reprezentuje výšku mapy, tj. počet políček od severu k jihu (svisle).

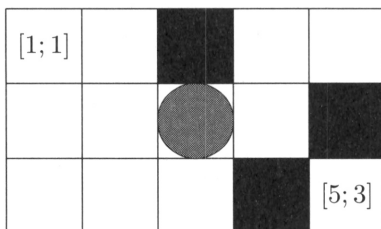
Na dalších V řádcích následuje samotná mapa. Každý řádek obsahuje S znaků tečka (.) nebo mříž (#), kde tečky představují volná políčka a mříže překážky. První znak prvního řádku mapy odpovídá jejímu severozápadnímu rohu.

Formát výstupu: Na první řádek výstupního souboru `akce.out` vy-
pište počet políček, ze kterých robot skladiště opustí. Každý z následujících V řádků pak obsahuje S čísel: j -té číslo na i -tém řádku udává počet robotem vykonaných příkazů do okamžiku, kdy robot opustí skladiště. Pokud z odpovídajícího políčka nelze skladiště opustit nebo se na něm nachází překážka, je toto číslo rovno nule.

Příklad:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
8	9
+R++LL+R	1 1 0 1 1
5 3	9 9 0 4 0
..#..	17 0 0 0 3
....#	
...#.	

Plán skladiště z příkladu:



Z políčka se šedou značkou robot neunikne, pokud dostane posloupnost příkazů uvedenou v příkladu.

Kategorie Z5

Texty úloh

Z5 – I – 1

Učitelka Kadrnožková kupovala v pokladně zoologické zahrady vstupenky pro své žáky a pro sebe. Vstupenka pro dospělého byla dražší než pro školáka, avšak ne více než dvakrát. Učitelka Kadrnožková zaplatila celkem 994 Kč. Učitel Hnízdo měl s sebou o tři žáky více než jeho kolegyně, a tak za své žáky a za sebe zaplatil 1 120 Kč.

1. Kolik žáků měl s sebou učitel Hnízdo?

2. Kolik stála vstupenka pro dospělého?

(*L. Šimůnek*)

Z5 – I – 2

František Nudílek se zabýval tím, že psal po sobě jdoucí přirozená čísla. Začal takto: 1234567891011... Po čase ho to přestalo bavit, dokončil právě rozepsané číslo a kriticky se podíval na svůj výtvor. Zjistil, že v posloupnosti číslic, které napsal, se vyskytuje pět jedniček bezprostředně za sebou.

1. Kolik nejméně po sobě jdoucích přirozených čísel musel František napsat?

2. Kolik nejméně číslic musel František napsat?

(*S. Bednářová*)

Z5 – I – 3

Nejvyšší známá sopka na Zemi je Mauna Kea na Havajských ostrovech. Její výška od úpatí po vrchol je dokonce o 358 metrů větší, než je nadmořská výška nejvyšší hory světa, Mount Everestu. Nezvedá se však z pevniny, ale ze dna Tichého oceánu, z 5 000metrové hloubky. Kdyby mořská hladina v této oblasti klesla o 397 metrů, byla by ponořená část Mauna Key přesně stejně vysoká jako část, která by vyčnívala nad hladinu.

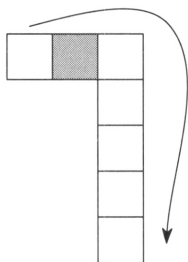
1. Jakou nadmořskou výšku má vrchol sopky?

2. Kolik měří Mauna Kea od úpatí po vrchol?
3. Jakou nadmořskou výšku má Mount Everest?

(Údaje o nadmořských výškách uváděné v různých zdrojích se mohou lišit, což je způsobeno nepřesnostmi měření, pohyby zemské kůry, vrstvou sněhové pokrývky apod. Při řešení úlohy proto vycházej pouze z údajů v ní uvedených.) (S. Bednářová)

Z5 – I – 4

Klasická hrací kostka se převracela naznačeným směrem po plánu na obr. 37. Na každém políčku zůstaly otisknuty tečky ze stěny, kterou se kostka plánu dotýkala. Počet všech teček otisknutých na plánu byl 23.



Obr. 37

Kolik teček bylo otisknuto na vybarveném políčku?

(Klasická hrací kostka má na stěnách tečky v počtu od 1 do 6 umístěné tak, že na protilehlých stěnách je vždy dohromady 7 teček. Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.) (M. Dillingerová)

Z5 – I – 5

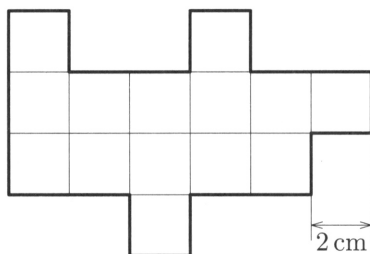
Digitální hodiny ukazují hodiny a minuty, jako například 14:37.

Kolik minut denně svítí na těchto hodinách alespoň jedna pětka?

(M. Volfová)

Z5 – I – 6

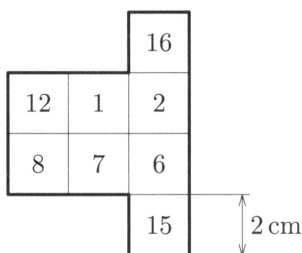
Dan si ze čtvercové sítě vystříhl útvar jako na obr. 38. Odstříhni dva čtverečky sítě tak, aby se výsledný útvar nerozpadl a měl co největší obvod. Najdi všechna řešení. (M. Dillingerová)



Obr. 38

Z5 – II – 1

Mirek si ze čtvercové sítě s vepsanými čísly vystříhl útvar na obr.39:



Obr. 39

Odstříhni dva čtverečky útvaru tak, aby se výsledný útvar nerozpadl, aby po odstříhnutí obou čtverečků měl stejný obvod jako původně a aby součet vepsaných čísel byl nejmenší možný.

(M. Petrová, M. Dillingerová)

Z5 – II – 2

Patnáct na sobě položených stejných listů papíru jsem najednou přeložil. Získal jsem tak „sešit“, jehož stránky jsem očísloval po řadě čísla 1 až 60. Která další tři čísla jsou napsána na stejném listu papíru jako číslo 25?

(L. Šimůnek)

Z5 – II – 3

František Všímálek vypisoval po sobě jdoucí čísla výsledků malé násobilky tří, pěti a devíti. Mezi jednotlivými čísly nepsal mezery a postupoval

následovně: nejprve vypsál násobky čísla tři, za posledním z nich začal hned vypisovat násobky pěti a nakonec násobky devíti. Všiml si, že v jeho zápisu se objevují souměrná čísla. (Souměrné číslo se čte zezadu stejně jako zepředu, např. 272, 3553, 98089.) František vypsál všechna souměrná čísla se třemi a více číslicemi a seřadil je podle velikosti od nejmenšího po největší. Které číslo bylo v téhle posloupnosti na třetím místě a které bylo poslední?

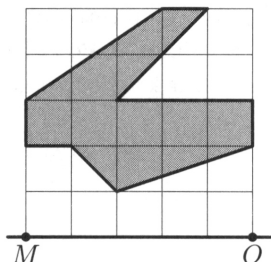
(*L. Hozová*)

Kategorie Z6

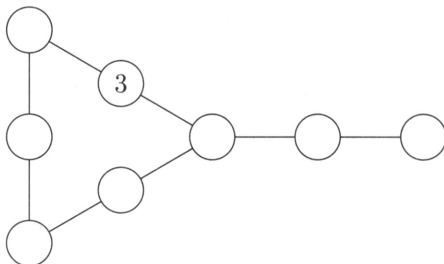
Texty úloh

Z6 – I – 1

Na obr. 40 je čtvercová síť, jejíž čtverce mají stranu délky 1 cm. V síti je zakreslen obrazec vybarvený šedě. Libor má narýsovat přímku, která je rovnoběžná s přímkou MO a rozděluje šedý obrazec na dvě části o stejném obsahu. V jaké vzdálenosti od přímky MO povede Libor tuto rovnoběžku? *(L. Šimůnek)*



Obr. 40



Obr. 41

Z6 – I – 2

Do prázdných polí na obr. 41 vepiš čísla 2, 4, 6, 8, 12, 14 a 21 tak, aby tři čísla zapsaná na jedné úsečce dávala vždy stejný součin. Napiš svůj postup. *(L. Šimůnek)*

Z6 – I – 3

B-banka vydává bankomatové karty se čtyřmístným PIN kódem, který neobsahuje číslici 0. Pan Skleróza se bál, že zapomene PIN kód své karty, proto si ho napsal přímo na ni, avšak římskými číslicemi IIIVIIIIV, aby

to případný zloděj neměl tak jednoduché. Svůj nápad prozradil nejlepšímu příteli, panu Odkoukalovi, který byl také klientem B-banky. Ten záhy se svým PIN kódem udělal totéž a na kartu si napsal IVIIIVI. Ke svému velkému překvapení však z římského zápisu neuměl svůj PIN kód určit přesně.

1. Jaký PIN kód má karta pana Sklerózy?
2. Jaký PIN kód může mít karta pana Odkoukala? *(S. Bednářová)*

Z6 – I – 4

Načrtni všechny možné tvarově různé čtyřúhelníky, které mají vrcholy ve vrcholech daného pravidelného šestiúhelníku.

Urči, jaké by byly jejich obsahy, kdyby šestiúhelník měl obsah 156 cm^2 .
(M. Volfová)

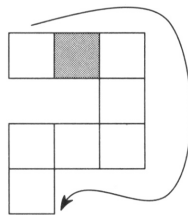
Z6 – I – 5

Paní Kučerová byla na sedmidenní dovolené a Káťa jí po celou tuto dobu venčila psa a krmila králíky. Dostala za to velký dort a 700 Kč. Po další dovolené, tentokrát čtyřdenní, dostala Káťa za venčení a krmení podle stejných pravidel stejný dort a 340 Kč.

Jakou cenu měl dort? *(M. Volfová)*

Z6 – I – 6

Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné. Kostku jsme položili na první políčko plánu na obr. 42 nejmenším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.



Obr. 42

Kterým číslem se kostka dotkla zbarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl nejmenší možný?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)
(M. Dillingerová)

Z6 - II - 1

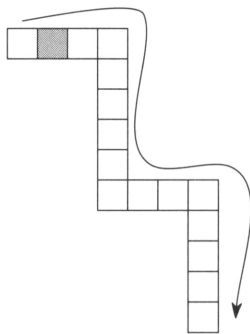
Káťa chce obdarovat své kamarádky a přemýšlí: kdybych každé koupila sponku za 28 Kč, zbylo by mi ještě 29 Kč, ale kdyby to byl medvídek za 42 Kč, tak by mi 13 Kč chybělo. Kolik má Káťa kamarádek a kolik peněz na dárky? (M. Volfová)

Z6 - II - 2

Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné. Kostku jsme položili na první políčko plánu na obr. 43 nejmenším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla. Kterým číslem se kostka dotkla zabarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl

1. nejmenší možný,
2. největší možný?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky,
obr. 43.) (M. Dillingerová, L. Hozová)



Obr. 43

Z6 - II - 3

Tři zahradníci měli velkou úrodu mrkve, a tak zkusili mrkve odšťavovat. Pak šťávu nalili do 9 skleniček. Všechny byly plné, každá však měla jiný objem: 1 dl, 2 dl, 3 dl, ..., 9 dl. Chtěli se spravedlivě podělit tak, aby každý dostal stejný počet skleniček i stejně šťávy. Najdi dva způsoby, jak to mohli provést.

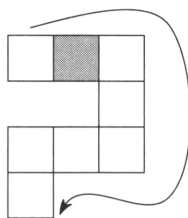
(M. Volfová)

Kategorie Z7

Texty úloh

Z7 – I – 1

Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné. Kostku jsme položili na první políčko plánu na obr. 44 největším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.



Obr. 44

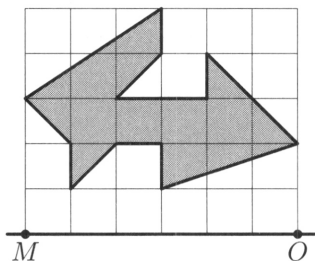
Kterým číslem se kostka dotkla zbarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl největší možný?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

(M. Dillingerová)

Z7 – I – 2

Na obr. 45 je čtvercová síť, jejíž čtverce mají stranu délky 1 cm. V síti je



Obr. 45

zakreslen obrazec vybarvený šedě. Libor má narýsovat přímku, která je rovnoběžná s přímkou MO a rozděljuje šedý obrazec na dvě části o stej-

ném obsahu. V jaké vzdálenosti od přímky MO povede Libor tuto rovnoběžku?
(*L. Šimůnek*)

Z7 – I – 3

Turisté plánovali dlouhou túru na tři dny s tím, že každý den ujdou třetinu celé trasy. To dodrželi jen první den. Druhý den ušli pouze třetinu zbylé cesty a třetí den, unaveni, jen čtvrtinu zbytku. Posledních 24 km do cíle je dovezlo terénní auto.

Jak dlouhá měla být celá túra a kolik kilometrů turisté ušli první, druhý a třetí den?
(*M. Volfová*)

Z7 – I – 4

Pan Horák je o 3 roky starší než jeho žena a jejich prvorozený syn je o 4 roky starší než jejich druhorozený. Všichni čtyři členové rodiny slaví narozeniny ve stejný den, nyní mají dohromady 81 let. Před 5 lety bylo členům této rodiny dohromady 62 let. Urči dnešní stáří rodičů i obou dětí.
(*M. Volfová*)

Z7 – I – 5

Zuzka napsala pětímístné číslo. Když připsala jedničku na konec tohoto čísla, dostala číslo, které je třikrát větší než číslo, které by získala, kdyby napsala jedničku před původní číslo. Které pětímístné číslo Zuzka napsala?
(*L. Hozová*)

Z7 – I – 6

Je dán obdélník $ABCD$. Bodem A vedeme přímku, která protne úsečku CD v bodě X tak, že pro obsahy vzniklých útvarů platí $S_{AXD} : S_{ABCX} = 1 : 2$. Bodem X vedeme přímku, která protne úsečku AB v bodě Y tak, že platí $S_{AXY} : S_{YBCX} = 1 : 2$. Nakonec bodem Y vedeme přímku, která protne úsečku XC v bodě Z tak, že platí $S_{XYZ} : S_{YBCZ} = 1 : 2$.

Vypočítej poměr obsahů $S_{AXD} : S_{AXZY}$.
(*M. Dillingerová*)

Z7 – II – 1

Radovan čte zajímavou knížku. Včera přečetl 15 stran, dnes dalších 12 stran. S údivem si uvědomil, že součet čísel stran, které přečetl včera, je stejný jako součet čísel stran, které přečetl dnes. Kterou stránkou

začne zítřejší četbu? (Radovan při četbě žádné stránky nepřeskakuje ani nečte žádnou stránku podruhé. Denní četbu nikdy neskončí rozečtenou stránkou.) (M. Petrová)

Z7 – II – 2

Tajný agent se snaží rozluštit přístupový kód. Zatím získal tyto informace:

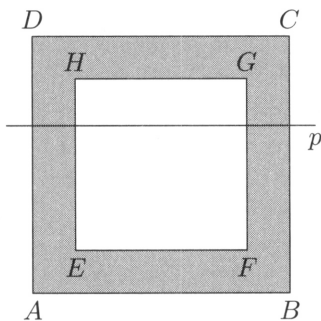
- a) je to čtyřmístné číslo,
- b) není dělitelné sedmi,
- c) číslice na místě desítek je součtem číslice na místě jednotek a číslice na místě stovek,
- d) číslo vytvořené z prvních dvou číslic kódu (v tomto pořadí) je patnáctinásobkem poslední číslice kódu,
- e) první a poslední číslice kódu (v tomto pořadí) tvoří prvočíslo.

Stačí mu tyto informace k rozluštění kódu? Svůj závěr zdůvodni.

(M. Petrová)

Z7 – II – 3

Na obr. 46 je čtverec $ABCD$ o straně délky 10 cm a menší čtverec $EFGH$, jehož vrcholy E, F, G, H leží na úhlopříčkách AC, BD čtverce $ABCD$. Plocha, která leží uvnitř čtverce $ABCD$ a přitom vně čtverce $EFGH$, je označena šedě. Přímka p , která je rovnoběžná s AB ve vzdálenosti 6,5 cm a prochází čtvercem $EFGH$, rozděluje šedou plochu na dvě části. Obsah jedné této části je o $13,8 \text{ cm}^2$ větší než obsah druhé. Vypočítej délku strany EF . (L. Šimůnek)



Obr. 46

Kategorie Z8

Texty úloh

Z8 – I – 1

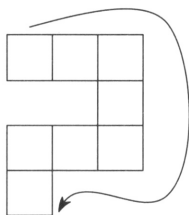
Myslím si nezáporné číslo ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem 12. Když je napíšeš ve tvaru desetinného čísla, bude mít před i za desetinnou čárkou po jedné číslici, obě tyto číslice budou nenulové. Čísel, která mají obě uvedené vlastnosti, je více. Pokud je však seřadím od nejmenšího po největší, bude to „moje“ předposlední.

Jaké číslo si myslím?

(S. Bednářová)

Z8 – I – 2

Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné. Kostku jsme položili na první políčko plánu na obr. 47. Potom jsme kostku



Obr. 47

převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.

Kterým svým číslem se kostka plánu nedotkla, jestliže součet všech napsaných čísel byl 86?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

(M. Dillingerová)

Z8 – I – 3

Grafik v redakci novin dostal dva obrázky, aby je umístil k článku. První originál byl 13 cm široký a 9 cm vysoký, druhý měřil na šířku 14 cm a na výšku 12 cm. Grafik se rozhodl umístit obrázky na stránku vedle sebe tak, aby se dotýkaly a aby oba měly stejnou výšku. Po vytištění měly obrázky dohromady zaujímat šířku 18,8 cm. Obrázky tedy vhodně zmenšil, aniž by je jakkoli ořezával.

Jaká bude výška vytištěných obrázků?

(L. Šimůnek)

Z8 – I – 4

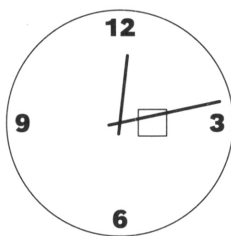
Máme dány tři navzájem různé nenulové číslice. Na tabuli napíšeme všechna trojčiferná čísla, která lze složit z těchto číslic, přičemž pro každé číslo použijeme všechny tři číslice. Součet napsaných čísel je 1 776.

Se kterými třemi číslicemi jsme pracovali? Určete všechna řešení.

(L. Šimůnek)

Z8 – I – 5

Na věži radnice jsou hodiny, které mají blízko středu ciferníku dvířka používaná při údržbě (obr. 48). Dvířka se však otevírají ven, což je nepraktické — například přesně v 12:09 zakryje velká ručička dvířka, která pak nejdou otevřít po dobu, jež končí přesně v 12:21.



Obr. 48

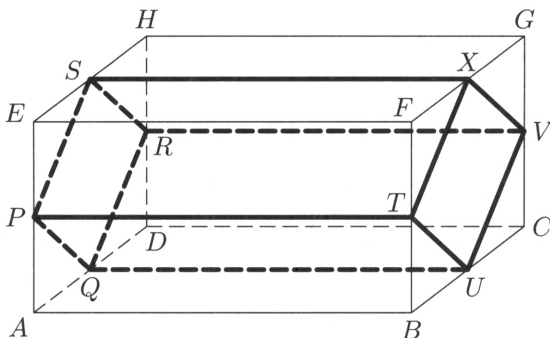
Kolik minut denně dvířka nelze otevřít?

(Nezapomeňte, že dvířka může zakrýt i malá ručička; celá dvířka leží v kruhu, který tato ručička opisuje.)

(L. Šimůnek)

Z8 – I – 6

V kvádru $ABCDEFGH$ je umístěno těleso $PQRSTUVX$, jehož vrcholy jsou středy hran kvádru (obr. 49).



Obr. 49

Vypočtete objem a povrch tělesa, je-li: $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|BF| = 4$ cm. (M. Krejčová)

Z8 – II – 1

U lesa, který měl tvar rovnoramenného trojúhelníku, se u jednoho z jeho vrcholů utábořili Ivo s Petrem. Uprostřed protilehlé strany byla studánka. Chlapci se rozhodli, že k ní nepůjdou lesem, ale po jeho obvodu. Každý vyšel jiným směrem, ale oba rychlostí 4 km/h. Ivo dorazil ke studánce za 15 minut, Petr za 12. Jak dlouhé byly strany „lesního“ trojúhelníku? (Délky stran zaokrouhlete na celé metry.) (M. Volfová)

Z8 – II – 2

Eva psala po sobě jdoucí přirozená čísla: 1234567891011... Jakou číslici napsala na 2009. místě? (M. Volfová)

Z8 – II – 3

Tři daná přirozená čísla jsou seřazena podle velikosti. Určete je na základě následujících informací:

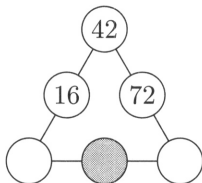
- ▷ aritmetický průměr daných tří čísel je roven prostřednímu z nich,
- ▷ rozdíl některých dvou daných čísel je 321,
- ▷ součet některých dvou daných čísel je 777. (L. Šimůnek)

Kategorie Z9

Texty úloh

Z9 – I – 1

Do tří prázdných polí na obr. 50 patří taková přirozená čísla, aby součin tří čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný. Jaké nejmenší a jaké



Obr. 50

největší číslo může být za této podmínky vepsáno do šedě vybarveného pole?
(*L. Šimůnek*)

Z9 – I – 2

Alena, Bára, Čeněk a David si společně koupili tandem — jízdní kolo pro dva. Na projížďku vyrážejí vždy ve dvojici. Každý jel s každým už alespoň jednou a nikdo jiný se na tandemu ještě nevezl. Alena byla na projížďce jedenáctkrát, Bára dvacetkrát, Čeněk jen čtyřikrát.

Určete, kolikrát minimálně a kolikrát maximálně mohl být na projížďce David.
(*L. Šimůnek*)

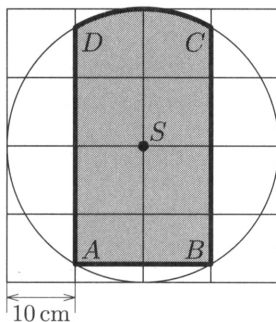
Z9 – I – 3

Ve čtvercové síti, jejíž čtverce mají stranu délky 10 cm (obr. 51), je narysována kružnice se středem S ve vyznačeném mřížovém bodě a poloměrem 20 cm. Body A , B , C a D jsou průsečíky kružnice se sítovými přímkami. Určete obsah vybarvené plochy $ABCD$.
(*L. Šimůnek*)

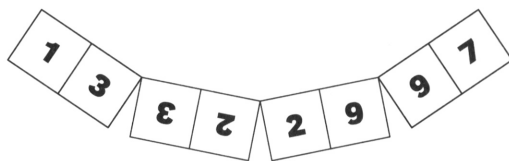
Z9 – I – 4

Dominik si vyrobil „prvočíselné domino“ — každá kostka odpovídala jednomu dvojmístnému prvočíslu tak, že na každé polovině kostky byla jedna číslice tohoto prvočísla. Žádné dvojmístné prvočíсло v dominu nechybělo a žádné prvočíсло nebylo na dvou kostkách.

Dominik se rozhodl, že všechny kostky uspořádá do kružnice tak, aby kostky ležící vedle sebe sousedily stejnou číslicí (obr. 52). Jeho kamarád Bořek mu řekl, že to nelze provést. Měl Bořek pravdu? (*M. Petrová*)



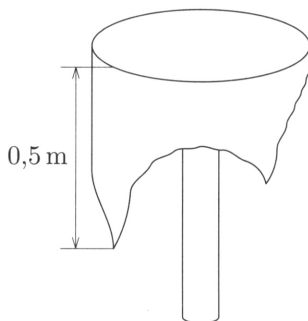
Obr. 51



Obr. 52

Z9 – I – 5

Na stole s kruhovou deskou o průměru 0,6 m je „nakřivo“ položen čtvercový ubrus se stranou 1 m (obr. 53). Jeden cíp ubrusu přechází přes hranu desky stolu 0,5 m, sousední cíp 0,3 m. Určete délku přesahu zbylých dvou cípů. (*S. Bednářová*)



Obr. 53

Z9 – I – 6

Čtyři tatínkové chtěli dětem sponzorovat lyžařský zájezd.

První slíbil: „Dám 11 500 Kč,“

druhý slíbil: „Dám třetinu toho, co vy ostatní dohromady,“

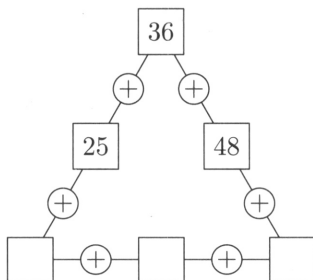
třetí slíbil: „Já dám čtvrtinu toho, co vy ostatní dohromady,“

čtvrtý slíbil: „A já dám pětinu toho, co vy ostatní dohromady.“

Kolik korun slíbil druhý, třetí a čtvrtý tatínek? (M. Volfová)

Z9 – II – 1

Do prázdných čtverců na obr. 54 patří taková přirozená čísla, aby součet tří čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný. Kolik různých trojic přirozených čísel lze do obrázku doplnit? (L. Šimůnek)



Obr. 54

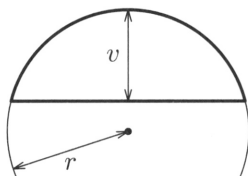
Z9 – II – 2

Noční hlídač si psal pro ukrácení času posloupnost čísel. Začal jistým přirozeným číslem. Každý další člen posloupnosti vytvořil tak, že k předchozímu členu přičetl určité číslo: k prvnímu členu přičetl 1, k druhému 3, ke třetímu 5, ke čtvrtému 1, k pátému 3, k šestému 5, k sedmému 1 a tak dále. Víme, že se v jeho posloupnosti nacházejí čísla 40 a 874.

1. Které číslo následuje v posloupnosti těsně po čísle 40 a které těsně po čísle 874?
2. V posloupnosti najdeme dva těsně po sobě jdoucí členy, jejichž součet je 491. Která dvě čísla to jsou? (L. Šimůnek)

Z9 – II – 3

V Kocourkově plánovali postavit přes řeku ozdobný most, jehož oblouk má být částí kružnice. Profil oblouku vymezuje spolu s vozovkou kruhovou úseč (obr. 55). V původním návrhu byla ale výška oblouku mostu příliš velká. Postavili tedy most, jehož výška oblouku byla třikrát menší, tím se však poloměr příslušné kružnice dvakrát zvětšil. V jakém poměru byla výška oblouku mostu a poloměr příslušné kružnice u návrhu a v jakém u postaveného mostu? *(M. Petrová)*



Obr. 55

Z9 – II – 4

Na naši zamyšovanou chalupu jsme přivezli myšilovce kocoura Vildu. V pondělí chytil $\frac{1}{2}$ všech myší, v úterý $\frac{1}{3}$ zbylých, ve středu $\frac{1}{4}$ těch, co zbyly po úterním lovu, a ve čtvrtek už jen $\frac{1}{5}$ zbytku. V pátek se zbylé myši raději odstěhovaly. Kolik bylo myší na chalupě původně, jestliže se v pátek odstěhovalo o dvě myši více, než jich Vilda chytil v úterý? Nezapomeňte ověřit, zda byl každý den uloven celočíselný počet myší. *(M. Volfová, M. Dillingerová)*

Z9 – III – 1

Jirka, Vít a Ota na soutěži získali všechny tři medaile. Nechtěli se chlubit, proto takto žertovali:

Jiří: „Ota získal zlatou!“

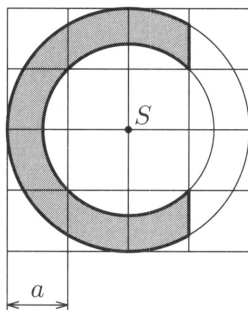
Vít: „Ale ne, Ota získal stříbrnou!“

Ota: „Nedostal jsem ani zlatou ani stříbrnou!“

Tělocvikář prozradil, že nositel zlaté medaile mluvil pravdu a nositel bronzové lhal. Kdo získal jakou medaili? *(M. Volfová)*

Z9 – III – 2

Ve čtvercové síti, jejíž čtverce mají stranu délky a , jsou naryšovány dvě kružnice (obr. 56). Obě mají střed v bodě S a každá prochází čtyřmi mřížovými body. Šedě vybarvený obrazec je vymezen částmi těchto kružnic a jednou síťovou přímkou. Vyjádřete obsah šedého obrazce pomocí délky a .
(*L. Šimůnek*)



Obr. 56

Z9 – III – 3

Adam s Evou hráli šachy.

Adam vyhrál a utěšoval Evu: „To víš, já hraji šachy dlouho, dvakrát déle než ty!“

Eva se zlobila: „Ale minule jsi říkal, že je hraješ třikrát déle!“

Adam se divil: „To že jsem říkal? A kdy to bylo?“

„Předloni!“

„No tak to ano, mluvil jsem pravdu — a dnes také.“

Jak dlouho hraje Adam šachy?

(*M. Volfová*)

Přípravná soustředění před 50. MMO

V průběhu 58. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 20. do 24. dubna 2009 v Kostelci nad Černými lesy nedaleko Prahy. Na soustředění bylo pozváno 9 nejlepších řešitelů III. kola kategorie A. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Josef Tkadlec	8/8 G J. Keplera, Praha 6	105
Samuel Říha	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	81
David Klačka	3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	78
Jan Matějka	8/8 G České Budějovice, Jírovcova	78
Tomáš Zeman	6/8 G J. Keplera, Praha 6	72
Josef Ondřej	7/8 G Rožnov pod Radhoštěm	68
Jan Vaňhara	8/8 G L. Jaroše, Holešov	62
Hana Šormová	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	61
Miroslav Olšák	7/8 G Praha 5, Budánka	49

Vzhledem k uvedeným výsledkům bylo do reprezentačního družstva České republiky pro 50. MMO v Brémách vybráno prvních šest studentů bez Tomáše Zemana, který odmítl účast na další přípravě v Uherském Hradišti a na střetnutí s družstvy Slovenska a Polska z důvodu studia v zahraničí, takže byl jmenován náhradníkem.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:

dr. Karel Horák (20. 4.),

dr. Jaroslav Zhouf (21. 4.),

Mgr. Martin Panák (22. 4.),

dr. Jaroslav Švrček (23. 4.)

a doc. Jaromír Šimša (24. 4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Uvažujme krychli $1 \times 1 \times 1$ a označme O a A dva její vrcholy takové, že OA tvoří stěnovou úhlopříčku. Zjistěte, co je větší: počet cest délky 1386 začínajících i končících ve vrcholu O , nebo počet cest délky 1386 začínajících ve vrcholu O a končících ve vrcholu A ? (Cesta délky n na uvažované krychli je posloupnost $n + 1$ jejích vrcholů, z nichž každé dva po sobě jdoucí mají vzdálenost 1.)
2. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 , jež mají vnější dotyk v bodě P . Z libovolného bodu A kružnice k_1 sestrojíme obě tečny ke kružnici k_2 a označme M, M' příslušné body dotyku. Jestliže další průsečík přímky AM , resp. AM' s kružnicí k_1 označíme N , resp. N' , platí

$$|PN| \cdot |M'N'| = |PN'| \cdot |MN|.$$

Dokažte.

3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme M střed přepony BC . Na polopřímce AC zvolme bod D tak, že $|AD| = |AM|$. Druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům AMC a BDC označme P . Dokažte, že bod P leží na ose úhlu ACB .
4. Je dána konečná množina P prvočísel. Dokažte, že existuje číslo x , jež se dá pro zvolené prvočíslo p vyjádřit jako součet $x = a^p + b^p$ s vhodnými přirozenými čísly a, b , právě když $p \in P$.
5. Na kružnici stojí 2009 dětí a každé má jeden míček. Každou minutu každé dítě hodí míček, pokud nějaký má, některému ze dvou nejbližších sousedů. Pokud se u některého dítěte sejdou dva míčky, jeden z nich odloží. Za jakou nejmenší dobu může v kruhu zůstat jen jeden míček?
6. Je dán trojúhelník ABC . Na straně AC je libovolně zvolen bod P a na polopřímkách AB, CB jsou sestrojeny po řadě body N, M tak, aby velikosti úhlů APN, CPM a ABC byly stejné. Označme Q průsečík polopřímek AM a CN . Dokažte, že všechny přímky PQ procházejí týmž bodem.
7. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ je splněna rovnost

$$y(x+y)f(x)\sin x + x(x+y)f(y)\sin y = xyf(-x-y)\sin(x+y).$$

8. Mnohočlen $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ stupně $n > 1$ má n různých reálných kořenů $x_1, x_2, \dots, x_n$. Mnohočlen $Q(x) = nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + a_2(n-2)x^{n-3} + \dots + a_{n-1}$ stupně $n-1$ má reálné kořeny $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Dokažte nerovnost

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2}{n-1}.$$

9. Řekneme, že dvě kladná celá čísla a, b jsou vzdálena o jeden krok, jestliže $ab + 1$ je čtvercem přirozeného čísla. Řekneme, že dvě přirozená čísla jsou vzdálena o n kroků, jestliže existuje posloupnost kladných celých čísel $a = c_0, c_1, \dots, c_n = b$ taková, že každé dva její sousední členy jsou vzdáleny o jeden krok a přitom neexistuje taková posloupnost kratší délky než n .

- Ukažte, že libovolná dvě kladná celá čísla jsou vzdálena o konečný počet kroků.
- Určete, o kolik kroků jsou vzdálena kladná celá čísla m a $m+1$ (v závislosti na m)

10. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takové, že

$$(x+y)f(f(x)y) = x^2f(f(x)+f(y)).$$

11. Nechť a, c jsou celá kladná čísla a b celé. Dokažte, že existuje kladné celé x tak, že

$$a^x + x \equiv b \pmod{c}.$$

12. Nechť ϱ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC a $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ jsou poloměry kružnic vně připsaných jeho stranám. Určete obsah trojúhelníku ABC , jestliže ϱ_a, ϱ_b a ϱ_c jsou přirozená čísla a $\varrho = 1$.

13. Nechť $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ jsou celá čísla s vlastností: Každých $2n$ čísel z nich je možno rozdělit do dvou skupin o n číslech tak, že součet čísel v obou skupinách je stejný. Dokažte, že $a_1 = a_2 = \dots = a_{2n+1}$.

14. Je dán tětíkový čtyřúhelník $ABCD$. Nechť S je průsečík jeho úhlopříček. Paty kolmic z bodu S k přímkám AB a CD označme po řadě E a F . Dokažte, že osa úsečky EF prochází středy stran BC a AD .

15. Uvažujme libovolnou n -prvkovou množinu B bodů v rovině a označme S množinu středů všech úseček s krajními body v B . V závislosti na čísle n určete nejmenší možný počet prvků množiny S .

16. Reálná čísla a, b mají tuto vlastnost: rovnice

$$x^2 - ax + b - 1 = 0$$

má v oboru $\mathbb{R}$ dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice

$$x^2 - ax + b + 1 = 0.$$

Najděte nejmenší možné a .

17. Určete největší možný počet různých čísel, které lze vybrat z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 1\,000\}$ tak, aby součet žádných tří vybraných čísel nebyl násobkem devíti.

18. Na stranách daného trojúhelníku ABC jsou vybrány body K, L a M tak, že $\mathbf{AK} = \frac{1}{3}\mathbf{AB}$, $\mathbf{BL} = \frac{1}{3}\mathbf{BC}$ a $\mathbf{CM} = \frac{1}{3}\mathbf{CA}$. Určete, jakou část obsahu trojúhelníku ABC tvoří obsah trojúhelníku vymezeného úsečkami AL , BM a CK .

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již deváté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 50. MMO v Brémách.

Soutěž se uskutečnila 21.–24. června 2009 na fakultě PEDAS Žilinské univerzity. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 20. 6. 2009. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.	Jakub Oćwieja	POL	777777	42
2.	Tomasz Kociumaka	POL	770777	35
3.	Damian Orlef	POL	707774	32
4.–6.	Tomasz Pawłowski	POL	707770	28
	Josef Tkadlec	CZE	607771	28
	Jakub Witaszek	POL	770770	28
7.–8.	Martin Bachratý	SVK	701770	22
	David Klačka	CZE	170770	22
9.–12.	Mikołaj Frączyk	POL	401754	21
	Michal Hagara	SVK	700770	21
	Jan Matějka	CZE	700770	21
	Filip Sládek	SVK	601770	21
13.	Samuel Říha	CZE	600770	20
14.	Ladislav Bačo	SVK	701730	18
15.	Eduard Eiben	SVK	401750	17
16.–17.	Jakub Uhrík	SVK	401070	12
	Jan Vaňhara	CZE	200460	12
18.	Josef Ondřej	CZE	701300	11

Návrh všech šesti úloh (a jejich vzorová řešení) připravili kolegové ze Slovenské republiky (s využitím jedné polské úlohy), řešení úloh koordinovala mezinárodní porota, kterou tvořili RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., a Mgr. Martin Panák, PhD., z České republiky, dr. Małgorzata Bednarska a Bartłomiej Bzdega z Polska, Mgr. Peter Novotný, PhD., a doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., ze Slovenska. Organizačně soutěž zabezpečil doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.

Nejvíce se už tradičně dařilo polskému družstvu, ač tento rok neobsadilo (na rozdíl od posledních dvou) prvních šest příček — v první šestici mělo pět studentů. Naše družstvo tak soutěžilo především se slovenským, což byl opět souboj velmi vyrovnaný.

Texty soutěžních úloh

1. Označme $\mathbb{R}^+$ množinu všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, které pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ splňují podmínku

$$(1 + yf(x))(1 - yf(x + y)) = 1.$$

(František Kardoš)

2. Pro daná kladná celá čísla a, k je posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ definována vztahy

$$a_1 = a \quad \text{a} \quad a_{n+1} = a_n + k \cdot \varrho(a_n) \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots,$$

kde $\varrho(m)$ značí součin všech číselic zápisu čísla m v desítkové soustavě (například $\varrho(413) = 12$, $\varrho(308) = 0$ apod.). Dokažte, že existují taková kladná celá čísla a, k , že posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ obsahuje právě 2009 různých čísel.

(Peter Novotný)

3. Nechť k je kružnice připsaná straně BC daného trojúhelníku ABC . Zvolme přímkou p rovnoběžnou se stranou BC , která protíná úsečky AB, AC po řadě v bodech D, E . Kružnici vepsanou trojúhelníku ADE označme l . Tečny ke kružnici k z bodů D a E , které neprocházejí bodem A , se protínají v bodě P . Tečny ke kružnici l z bodů B a C , které neprocházejí bodem A , se protínají v bodě Q . Dokažte, že přímka PQ prochází pevným bodem nezávislým na volbě přímky p . (Tomáš Jurík)

4. Je dána kružnice k a její tětiva AB , která není jejím průměrem. Uvnitř delšího oblouku AB kružnice k zvolme libovolně bod C . Označme K bod souměrně sdružený s bodem A podle přímky BC a L bod souměrně sdružený s bodem B podle přímky AC . Dokažte, že vzdálenost středů úseček KL a AB nezávisí na poloze bodu C .

(Tomáš Jurík)

5. Je dána n -tice celých čísel $a_1, \dots, a_n$ splňující následující podmínky:

- (i) $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 50$,
- (ii) pro každou n -tici kladných celých čísel $b_1, \dots, b_n$ existuje kladné celé číslo m a taková n -tice kladných celých čísel $c_1, \dots, c_n$, že

$$m \cdot b_i = c_i^{a_i} \quad \text{pro } i = 1, \dots, n.$$

Dokažte, že $n \leq 16$ a určete počet všech různých n -tic $a_1, \dots, a_n$ splňujících dané podmínky pro $n = 16$. (Peter Novotný)

6. Nechť $n \geq 16$ je přirozené číslo. Uvažujme množinu

$$G = \{(x, y) : x, y \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

tvořenou n^2 body roviny. Je-li A libovolná podmnožina množiny G obsahující aspoň $4n\sqrt{n}$ prvků, dokažte, že existuje aspoň n^2 konvexních čtyřúhelníků, které mají vrcholy v A , a přitom všechny jejich úhlopříčky procházejí jedním bodem. (Polsko)

Řešení úloh

1. Postupnými úpravami zadané podmínky dostáváme

$$\begin{aligned} 1 + yf(x) - yf(x+y) - y^2f(x)f(x+y) &= 1, \\ yf(x) - yf(x+y) &= y^2f(x)f(x+y). \end{aligned}$$

Poslední rovnost můžeme vydělit hodnotou $y \neq 0$. Po dalších úpravách (všechny výrazy, kterými budeme dělit, jsou evidentně nenulové) tak pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ dostaneme

$$\begin{aligned} f(x) - f(x+y) &= yf(x)f(x+y), \\ f(x+y) &= \frac{f(x)}{1 + yf(x)}, \\ \frac{1}{f(x+y)} &= y + \frac{1}{f(x)}, \end{aligned}$$

a tedy i

$$\frac{1}{f(y+x)} = x + \frac{1}{f(y)}.$$

Odtud

$$y + \frac{1}{f(x)} = x + \frac{1}{f(y)}$$

pro všechna kladná x, y . Dosazením $y = 1$ dostaneme

$$\frac{1}{f(x)} = x + \frac{1}{f(1)} - 1 = x + c, \quad \text{tedy} \quad f(x) = \frac{1}{x + c},$$

kde c je konstanta. Protože $f(x) > 0$ pro každé $x > 0$, musí být $x + c > 0$ pro každé $x > 0$, tedy $c \geq 0$.

Snadno ověříme, že každá funkce $f(x) = 1/(x + c)$, kde $c \geq 0$, vyhovuje:

$$\left(1 + \frac{y}{x + c}\right) \left(1 - \frac{y}{x + y + c}\right) = \frac{x + c + y}{x + c} \cdot \frac{x + y + c - y}{x + y + c} = 1.$$

Jiné řešení. Dosadíme do zadané podmínky $x = 1$. Při označení $a = f(1) > 0$ úpravami postupně dostáváme

$$\begin{aligned} (1 + ay)(1 - yf(y + 1)) &= 1, \\ ay - yf(y + 1)(1 + ay) &= 0, \\ f(y + 1) &= \frac{a}{1 + ay}. \end{aligned}$$

Jestliže nyní do dané podmínky dosadíme $y = 1$ a $f(x + 1) = a/(1 + ax)$, vyjde

$$\begin{aligned} (1 + f(x)) \left(1 - \frac{a}{1 + ax}\right) &= 1, \\ f(x) \cdot \frac{1 + ax - a}{1 + ax} &= \frac{a}{1 + ax}, \\ f(x) &= \frac{a}{1 + ax - a} = \frac{1}{x + 1/a - 1} = \frac{1}{x + c}. \end{aligned}$$

Podobně jako v prvním řešení musí být $c \geq 0$ a snadno ověříme, že každá taková funkce vyhovuje.

Poznámka. Řešení se dá zapsat i ve tvaru

$$f(x) = \frac{a}{1 + (x - 1)a},$$

kde $a = f(1) \in (0, 1)$ je reálný parametr.

2. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je evidentně rostoucí až po první člen, v jehož zápise se vyskytne číslice 0, a počínaje tímto členem je už konstantní. Naším cílem je tedy najít hodnoty a , k , pro něž se číslice 0 poprvé vyskytne v členu a_{2009} . Úlohu vyřešíme obecně — uvedeme příklad hodnot a , k , pro něž se číslice 0 poprvé vyskytne v členu a_m , přičemž $m > 4$ je dané celé číslo.

Vezměme

$$a = \frac{10^{2m-5} - 1}{9} = \underbrace{11 \dots 1}_{2m-5 \text{ jedniček}}, \quad k = 10^{m-3} + 4 = \underbrace{1 \ 00 \dots 0}_{m-4 \text{ nul}} 4.$$

Postupně máme

$$\begin{aligned} a_1 &= a = \underbrace{11 \dots 1}_{2m-5}, \\ \varrho(a_1) &= 1, \\ a_2 &= a_1 + k = a_1 + \underbrace{100 \dots 04}_{m-4} = \underbrace{11 \dots 1}_m \underbrace{2}_{m-3} \underbrace{11 \dots 15}_{m-4}, \\ \varrho(a_2) &= 10, \\ a_3 &= a_2 + 10k = a_2 + \underbrace{100 \dots 040}_{m-4} = \underbrace{11 \dots 1}_m \underbrace{22}_{m-4} \underbrace{11 \dots 155}_{m-5}, \\ \varrho(a_3) &= 100, \\ &\vdots \\ a_i &= a_{i-1} + 10^{i-2}k = \underbrace{11 \dots 1}_{m-i-1} \underbrace{22 \dots 2}_{i-1} \underbrace{11 \dots 1}_{m-i-2} \underbrace{55 \dots 5}_{i-1}, \\ \varrho(a_i) &= 10^{i-1}, \\ &\vdots \\ a_{m-2} &= a_{m-3} + 10^{m-4}k = \underbrace{122 \dots 2}_{m-3} \underbrace{55 \dots 5}_{m-3}, \\ \varrho(a_{m-2}) &= 10^{m-3}, \\ a_{m-1} &= a_{m-2} + 10^{m-3}k = a_{m-2} + \underbrace{100 \dots 04}_{m-4} \underbrace{00 \dots 0}_{m-3} = \\ &= \underbrace{22 \dots 2}_{m-3} \underbrace{6}_{m-3} \underbrace{55 \dots 5}_{m-3}, \\ \varrho(a_{m-1}) &= 6 \cdot 10^{m-3}, \\ a_m &= a_{m-1} + 6 \cdot 10^{m-3}k = a_{m-1} + \underbrace{600 \dots 0}_{m-5} \underbrace{24}_{m-3} \underbrace{00 \dots 0}_{m-3} = \\ &= 8 \underbrace{22 \dots 2}_{m-5} \underbrace{50}_{m-3} \underbrace{55 \dots 5}_{m-3}, \\ \varrho(a_m) &= 0. \end{aligned}$$

Závěr. Posloupnost obsahuje právě 2009 různých čísel například pro $a = \frac{1}{9}(10^{4013} - 1)$, $k = 10^{2006} + 4$.

Jiné řešení. Zvolme

$$a = 6 \underbrace{11 \dots 1}_{2007}, \quad k = \underbrace{33 \dots 3}_{2007} 4 = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{200 \dots 0}_{2007} 4.$$

Potom

$$a_1 = 6 \underbrace{11 \dots 1}_{2007},$$

$$\varrho(a_1) = 6, \quad k\varrho(a_1) = \underbrace{200 \dots 0}_{2007} 4,$$

$$a_2 = 26 \underbrace{11 \dots 1}_{2006} 5,$$

$$\varrho(a_2) = 60, \quad k\varrho(a_2) = \underbrace{200 \dots 0}_{2007} 40,$$

$$a_3 = 226 \underbrace{11 \dots 1}_{2005} 55,$$

$$\varrho(a_3) = 600, \quad k\varrho(a_3) = \underbrace{200 \dots 0}_{2007} 400,$$

$$a_4 = 2226 \underbrace{11 \dots 1}_{2004} 555,$$

$$\varrho(a_4) = 6000, \quad k\varrho(a_4) = \underbrace{200 \dots 0}_{2007} 4000,$$

$\vdots$

$$a_{i+1} = \underbrace{22 \dots 2}_i \underbrace{6}_{2007-i} \underbrace{11 \dots 1}_i \underbrace{55 \dots 5}_i,$$

$$\varrho(a_{i+1}) = 6 \underbrace{0 \dots 0}_i, \quad k\varrho(a_{i+1}) = \underbrace{200 \dots 0}_{2007} 4 \underbrace{00 \dots 0}_i,$$

$\vdots$

$$a_{2007} = \underbrace{22 \dots 2}_{2006} \underbrace{61}_{2006} \underbrace{55 \dots 5}_{2006},$$

$$\varrho(a_{2007}) = \underbrace{60 \dots 0}_{2006}, \quad k\varrho(a_{2007}) = \underbrace{200 \dots 0}_{2007} 4 \underbrace{00 \dots 0}_{2006},$$

$$a_{2008} = \underbrace{22 \dots 2}_{2007} \underbrace{655 \dots 5}_{2007},$$

$$\varrho(a_{2008}) = \underbrace{60 \dots 0}_{2007}, \quad k\varrho(a_{2008}) = \underbrace{200 \dots 0}_{2007} 4 \underbrace{00 \dots 0}_{2007},$$

$$a_{2009} = \underbrace{22 \dots 2}_{2007} \underbrace{3055 \dots 5}_{2007},$$

$$\varrho(a_{2009}) = 0, \quad k\varrho(a_{2009}) = 0$$

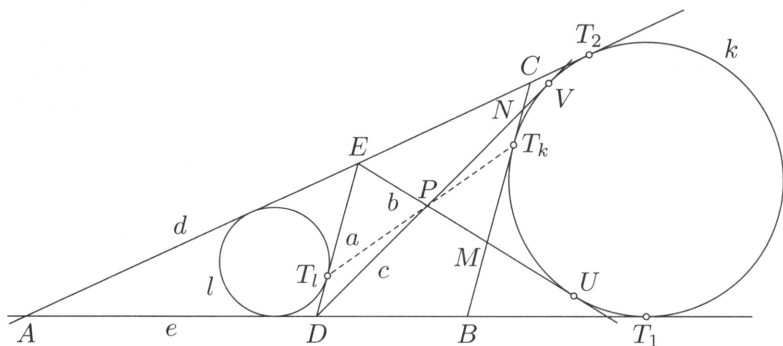
a dále samozřejmě $a_{2009} = a_{2010} = a_{2011} = \dots$

3. Nechť T_k je bod, v němž se kružnice k dotýká strany BC a T_l je bod, v němž se kružnice l dotýká strany DE . Ukážeme, že hledaným pevným bodem je bod T_k .

Protože $BC \parallel DE$, jsou trojúhelníky DEP a NMP podobné a stejnoolehlost H se středem P a (záporným) koeficientem opačným k číslu $q = |MN|/|ED|$ zobrazí úsečku DE na úsečku NM . Na kolineárnost bodů T_k , T_l , P stačí dokázat rovnost

$$\frac{|MT_k|}{|NT_k|} = \frac{|ET_l|}{|DT_l|}; \quad (1)$$

je-li totiž splněna, zobrazí se ve stejolehlosti H bod T_l do bodu T_k .



Obr. 57

Označme a, b, c délky stran trojúhelníku DEP tak jako na obr. 57. Dále necht' $|AD| = e$, $|AE| = d$. Připomeňme známé vztahy pro délku úseku mezi vrcholem trojúhelníku a dotykovým bodem vepsané, resp. připsané kružnice: V trojúhelníku XYZ je vzdálenost vrcholu X od dotykového bodu vepsané, resp. připsané kružnice (ležícího na straně XY) rovna $\frac{1}{2}(|XY| + |XZ| - |YZ|)$, resp. $\frac{1}{2}(|XY| + |YZ| - |XZ|)$.

Kružnice k je připsanou kružnicí ke straně NM trojúhelníku NMP .
Proto

$$\frac{|MT_k|}{|NT_k|} = \frac{\frac{1}{2}(|MN| + |NP| - |MP|)}{\frac{1}{2}(|MN| + |MP| - |NP|)} = \frac{qa + qc - qb}{qa + qb - qc} = \frac{a + c - b}{a + b - c}. \quad (2)$$

Kružnice l je kružnicí vepsanou trojúhelníku DEA . Proto

$$\frac{|ET_l|}{|DT_l|} = \frac{\frac{1}{2}(|DE| + |AE| - |AD|)}{\frac{1}{2}(|DE| + |AD| - |AE|)} = \frac{a + d - e}{a + e - d}. \quad (3)$$

Jestliže z nějakého bodu vedeme ke kružnici dvě tečny, vzdálenost obou dotykových bodů od daného bodu je stejná. Opakovaným použitím tohoto faktu dostáváme

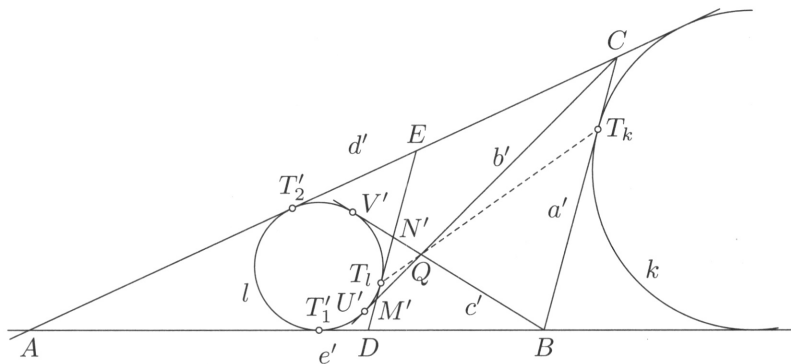
$$\begin{aligned} e + c + |PU| &= e + c + |PV| = e + |DT_1| = |AT_1| = |AT_2| = \\ &= d + |ET_2| = d + b + |PU|, \end{aligned}$$

tedy $e + c = d + b$. Proto $c - b = d - e$ a dosazením do (2), (3) okamžitě dostáváme

$$\frac{|MT_k|}{|NT_k|} = \frac{a + (c - b)}{a - (c - b)} = \frac{a + (d - e)}{a - (d - e)} = \frac{|ET_l|}{|DT_l|},$$

což je požadovaná rovnost (1). Bod P tedy leží na přímce $T_l T_k$.

Podobně dokážeme, že i body T_k , T_l a Q jsou kolineární. Označme body dotyku kružnice l s přímkami CQ , BQ postupně U' , V' , průsečíky strany DE s těmito přímkami postupně M' , N' a body dotyku kružnice l se stranami AD , AE postupně T'_1 , T'_2 . Dále necht' a' , b' , c' jsou délky stran trojúhelníku BCQ , $|AB| = e'$, $|AC| = d'$ (obr. 58).



Obr. 58

Analogickými úvahami jako v první části dostáváme (tentokrát jsou obě kružnice připsané)

$$\frac{|M'T_l|}{|N'T_l|} = \frac{a' + c' - b'}{a' + b' - c'}, \quad \frac{|CT_k|}{|BT_k|} = \frac{a' + e' - d'}{a' + d' - e'}.$$

Porovnáváním délek (obr. 58) máme

$$\begin{aligned} e' - c' - |QU'| &= e' - c' - |QV'| = e' - |BT'_1| = |AT'_1| = |AT'_2| = \\ &= d' - |CT'_2| = d' - b' - |QU'|, \end{aligned}$$

tedy $c' - b' = e' - d'$ a následně

$$\frac{|M'T_l|}{|N'T_l|} = \frac{|CT_k|}{|BT_k|}.$$

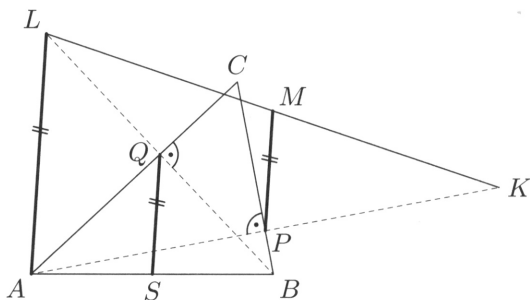
Ze stejnolehlosti trojúhelníků BCQ a $N'M'Q$ nakonec dostáváme, že bod Q leží na přímce T_lT_k .

Přímka PQ (zřejmě $P \neq Q$) je tedy totožná s přímkou T_lT_k a prochází bodem T_k , který na poloze přímky p nezávisí.

4. V trojúhelníku ABC označme S střed strany AB a P, Q paty výšek z vrcholů A, B . Střed úsečky KL označme M . Body P, Q jsou samozřejmě středy úseček AK, BL (obr. 59). Proto QS je střední příčkou trojúhelníku LAB a MP střední příčkou trojúhelníku LAK . Odtud

$$|QS| = \frac{1}{2}|LA| = |MP| \quad \text{a} \quad QS \parallel LA \parallel MP,$$

tedy $SPMQ$ je rovnoběžník (to zřejmě platí i v případě, jestliže některý z trojúhelníků LAB, LAK je „degenerovaný“).



Obr. 59

The diagram shows a sphere with center \$S\$. Points \$A\$, \$B\$, and \$C\$ are on the sphere's surface. Lines \$SA\$, \$SB\$, and \$SC\$ connect the center to these points. A plane \$M\$ is shown passing through point \$A\$ and point \$Q\$, which is the orthogonal projection of \$S\$ onto the plane. Point \$P\$ lies on the great circle arc \$AC\$. The angle \$\gamma\$ is shown at vertex \$A\$ between lines \$AP\$ and \$AQ\$. The angle \$\alpha\$ is shown at vertex \$S\$ between lines \$SA\$ and \$SB\$. Dashed lines represent projections or auxiliary constructions.

$$|\sphericalangle PSQ| = 2|\sphericalangle PAQ| = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma.$$
$$|\sphericalangle PSQ| = 2|\sphericalangle PBQ| = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma.$$

Jiné řešení. Označme α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC . Budeme předpokládat, že úhel α je ostrý; případ, kdy α není ostrý, je analogický (tehdy je ostrý úhel β). Nechť S, M, U, V jsou postupně středy úseček AB, KL, AL, BK a H je průsečík přímek AK a BL .

Předpokládejme, že čísla $a_1, \dots, a_n$ jsou navzájem nesoudělná. Ukážeme, že potom je podmínka (ii) splněna. Nechť $b_1, \dots, b_n$ je libovolná n -tice přirozených čísel a $p_1, \dots, p_k$ jsou všechna prvočísla nacházející se v prvočíselných rozkladech čísel $b_1, \dots, b_n$. Hledejme m ve tvaru

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Pro každé $i = 1, \dots, n$ označme $\beta_{i,j}$ exponent prvočísla p_j v prvočíselném rozkladu b_i . Aby číslo $m \cdot b_i$ bylo a_i -tou mocninou, stačí, aby pro každé $j = 1, \dots, k$ bylo $\alpha_j + \beta_{i,j}$ násobkem a_i . Každou hodnotu α_j tedy stačí zvolit tak, aby platilo

$$\begin{aligned} \alpha_j &\equiv -\beta_{1,j} \pmod{a_1}, & \alpha_j &\equiv -\beta_{2,j} \pmod{a_2}, & \dots, \\ \alpha_j &\equiv -\beta_{n,j} \pmod{a_n}. \end{aligned}$$

Existence takového α_j plyne z čínské zbytkové věty (čísla $a_1, \dots, a_n$ jsou navzájem nesoudělná).

Dokázali jsme, že podmínka (ii) je splněna, právě když jsou čísla $a_1, \dots, a_n$ navzájem nesoudělná. Mezi čísly $1, 2, \dots, 50$ je právě patnáct prvočísel. Kdyby bylo $n \geq 17$, existovala by mezi čísly $2 \leq a_2 < a_3 < \dots < a_n \leq 50$ určitě aspoň dvě čísla mající v prvočíselném rozkladu stejné prvočíslu, byla by tedy soudělná. Proto nutně $n \leq 16$.

Jestliže $n = 16$, musí být $a_1 = 1$ a každé z patnácti čísel $a_2, a_3, \dots, a_{16}$ musí být mocninou jiného prvočísla. Vypišme, které mocniny prvočísel můžeme použít:

$$\begin{aligned} p = 2: & \quad 2, 4, 8, 16, 32, \\ p = 3: & \quad 3, 9, 27, \\ p = 5: & \quad 5, 25, \\ p = 7: & \quad 7, 49, \\ p \geq 11: & \quad \text{jen } p. \end{aligned}$$

Celkový počet vyhovujících šestnáctic je tedy $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$.

6. Označme $|A| = m \geq 4n\sqrt{n}$. Nechť S je množina všech úseček majících krajní body v A . Zřejmě $|S| = \binom{m}{2}$. Souřadnice středu každé úsečky z S jsou celé násobky čísla $\frac{1}{2}$ a leží v konvexním obalu množiny G . Takových bodů je $(2n-1)^2$, tedy méně než $4n^2$. Proto existuje bod B , který je středem aspoň $\binom{m}{2}/(4n^2)$ úseček z S . Nechť P je množina všech úseček

z S , jejichž středem je B . Potom

$$\begin{aligned} |P| &\geq \frac{\binom{m}{2}}{4n^2} = \frac{m(m-1)}{8n^2} \geq \\ &\geq \frac{4n\sqrt{n}(4n\sqrt{n}-1)}{8n^2} = \frac{16n^3 - 4n\sqrt{n}}{8n^2} = 2n - \frac{1}{2\sqrt{n}} > 2n - 1, \end{aligned}$$

tedy $|P| \geq 2n$.

Rozdělme P na třídy úseček ležících na jedné přímce. Označme k počet těchto tříd a a_i počet úseček v i -té třídě pro $i = 1, \dots, k$. Každá úsečka mezi a_i úsečkami jedné třídy má krajní body v G a všech $2a_i$ krajních bodů (které jsou zřejmě různé) úseček jedné třídy leží na jedné přímce, proto $2a_i \leq n$. Přitom každé dvě úsečky z P jsou úhlopříčkami rovnoběžníku, právě když neleží na jedné přímce. Pro počet různých rovnoběžníků s úhlopříčkami patřícími do P tak dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j &= \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2 - \sum_{i=1}^k a_i^2 \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2 - \sum_{i=1}^k a_i \cdot \frac{n}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(|P|^2 - |P| \cdot \frac{n}{2} \right) = \frac{1}{2} |P| \left(|P| - \frac{n}{2} \right) \geq \\ &\geq n \left(2n - \frac{n}{2} \right) = \frac{3}{2} n^2 > n^2. \end{aligned}$$

Existuje tedy více než n^2 konvexních čtyřúhelníků (dokonce rovnoběžníků) s požadovanou vlastností.

50. mezinárodní matematická olympiáda

Jubilejní 50. ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil 10.–22. července 2009 v německém hansovním městě Brémy. Poprvé počet zemí, které se zúčastnily této nejstarší mezinárodní předmětové soutěže, překročil stovku. Padl zde také nový rekord v počtu soutěžících — celkově se 50. ročníku MMO zúčastnilo 565 soutěžících ze 104 zemí (předchozí 49. MMO ve Španělsku se zúčastnilo 535 soutěžících z 97 zemí). Nechyběli zde žádní tradiční účastníci a poprvé se soutěže zúčastnila družstva Mauretánie, Zimbabwe, Sýrie a Beninu.



České družstvo tvořili v abecedním pořadí tito soutěžící: *David Klaška* z Gymnázia v Brně na tř. Kpt. Jaroše, *Jan Matějka* z Gymnázia v Českých Budějovicích v Jírovcově ul., *Josef Ondřej* z Gymnázia v Rožnově pod Radhoštěm, *Samuel Říha* z Gymnázia v Brně na tř. Kpt. Jaroše, *Josef Tkadlec* z Gymnázia Jana Keplera v Praze 6 a *Jan Vaňhara* z Gymnázia Ladislava Jaroše v Holešově. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl Mgr. *Martin Panák*, Ph.D., z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně.

Vedoucí jednotlivých delegací a další členové jury se sjeli do Německa již 10. července. Ihned po svém příjezdu do Brém byli všichni odvezeni autobusy do přístavního města Bremerhaven, které je od Brém vzdáleno zhruba 60 km. V hotelu Atlantic, kde byli ubytováni, se konala i všechna jednání jury. Zde byla také vybrána šestice úloh pro vlastní soutěž. Soutěžící přicestovali do Brém 13. července a byli po celou dobu ubytováni v rozsáhlém, modernizovaném kampusu Jacobs Univerzity v Brémách.

Slavnostní zahájení 50. ročníku MMO se uskutečnilo den po příjezdu všech soutěžících do Brém. V jeho úvodu pozdravila všechny přítomné z předtočeného videozáznamu kanclérka Spolkové republiky Německo *Angela Merkelová*. Osobně všechny účastníky přivítal parlamentní státní

sekretář ministerstva školství, vědy a výzkumu SRN *Andreas Storm* a další významní představitelé společenského a politického života Německa včetně zástupců města Brémy.

Vlastní soutěž se konala 15. a 16. července ve velkém pavilónu výstaviště v Brémách. Pro následující dva dny připravili organizátoři pro soutěžící dva autokarové zájezdy. První do nedalekého Hamburku, kde navštívili atraktivní výstavu významných architektonických zmenšenin (Miniatur Wunderland), Následující den pak soutěžící navštívili Univerzum v Brémách. Po oba tyto dny probíhala zároveň v objektech Jacobs Univerzity koordinace žákovských řešení.

U příležitosti 50. ročníku MMO uspořádali organizátoři slavnostní podvečer, který se konal v brémském Divadle hudby. Slavnostní program moderovala dvojice významných současných německých matematiků *Martin Aigner* a *Günter M. Ziegler* a vystoupila v něm se svými příspěvky šestice významných světových matematiků, kteří v minulosti získali zlaté medaile na mezinárodní matematické olympiádě: *Terence Tao*, *Béla Bollobás*, *Timothy Gowers*, *Stanislav Smirnov*, *Jean-Christophe Yoccoz* a *László Lovász*, který je v současnosti předsedou Mezinárodní matematické společnosti a byl protagonistou celého podvečera. Účastníci se od nich nejen dozvěděli mnoho zajímavého o jejich vědecké práci, ale měli navíc i ojedinělou příležitost si s nimi pohovořit.

Závěrečný den olympiády se již tradičně konalo slavnostní zakončení spojené s oficiálním předáním medailí nejlepším soutěžícím. Všechny přítomné přivítala v hudební síni brémské Komorní filharmonie (die Glocke) ministryně školství, vědy a výzkumu SRN Prof. Dr. *Anette Schavanová*. Slavnostní ceremoniál, jehož se zúčastnili i další významní představitelé společenského života v Brémách, zpestřila brémská Komorní filharmonie provedením závěrečné části 1. symfonie Ludwiga van Beethovena.

Je potěšitelné, že mezi oceněnými byli i všichni naši studenti. Stříbrnou medaili získal *Josef Tkadlec* a bronzové medaile *Jan Matějka* a *Jan Vaňhara*. Ostatní tři naši soutěžící obdrželi čestná uznání za bezchybné vyřešení jedné z úloh.

Na zlatou medaili bylo letos potřeba minimálně 32 bodů, na stříbrnou medaili 24 body a na bronzovou medaili stačilo získat 14 bodů. Jediní dva soutěžící, *Dongyi Wei* z Číny a *Makoto Soejima* z Japonska, dosáhli maximálního bodového zisku, tj. 42 bodů.

Za zmínku stojí, že nejmladší účastník soutěže, jedenáctiletý *Raúl Arturo Chávez Sarmiento* z Peru, získal bronzovou medaili se ziskem 16 bodů. Stal se tak zároveň druhým nejmladším držitelem medaile v his-

torii mezinárodních matematických olympiád; tím úplně nejmladším byl shora jmenovaný Terence Tao z Austrálie, jenž postupně získal bronzovou, stříbrnou a nakonec i zlatou medaili v letech 1986–1988. Další medaile nezískal zřejmě jen proto, že jako 13letý nastoupil na univerzitu.

Výsledky našich studentů shrnuje následující tabulka:

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
117.–129. Josef Tkadlec	7	7	1	7	3	0	25	II.
249.–263. Jan Matějka	6	6	1	0	2	0	15	III.
264.–282. Jan Vaňhara	6	0	1	0	7	0	14	III.
296.–313. David Klaška	7	1	0	0	4	0	12	HM
314.–334. Samuel Říha	7	3	0	1	0	0	11	HM
335.–353. Josef Ondřej	7	3	0	0	0	0	10	HM
Celkem	40	20	3	8	16	0	87	

Pro srovnání uvedme i výsledky slovenských reprezentantů, kteří získali o 14 bodů méně (jejich nejzkušenější reprezentant Michal Spišiak dal přednost účasti na Mezinárodní fyzikální olympiádě v Mexiku):

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
233.–248. Martin Bachratý	7	1	1	7	0	0	16	III.
314.–334. Jakub Uhrík	7	3	1	0	0	0	11	HM
314.–334. Filip Sládek	7	2	1	1	0	0	11	HM
376.–392. Peter Csiba	7	1	0	0	0	0	8	HM
393.–415. Eduard Eiben	3	2	0	0	2	0	7	
190.–197. Michal Hagara	7	7	1	3	2	0	20	III.
Celkem	38	16	4	11	4	0	73	

V neoficiálním pořadí zemí se naši reprezentanti umístili na konci čtvrté desítky (tabulka na následující straně). Ve srovnání s předešlým ročníkem MMO jsou letošní výsledky našeho družstva o trochu lepší. Naši reprezentanti přivezli domu o jednu bronzovou medaili víc a i ti naši soutěžící, kteří na medaili nedosáhli, si domů přivezli aspoň čestná uznání. Zájemce o detailnější informace o průběhu 50. ročníku MMO odkazujeme na příslušné oficiální stránky: www.imo2009.de.

Na předposlední den pobytu v Brémách připravili němečtí organizátoři pro všechny účastníky MMO jednodenní výlet na ostrov Wangerooge v Severním moři, který byl poměrně nedávno začleněn do seznamu

	I	II	III	body		I	II	III	body
ČLR	6	0	0	221	<i>Slovensko</i>	0	0	2	73
Japonsko	5	0	1	212	Mongolsko	0	0	3	72
Rusko	5	1	0	203	Španělsko	0	0	4	71
Korea	3	3	0	188	Švédsko	0	0	2	70
KLDR	3	2	1	183	Dánsko	0	1	1	68
USA	2	4	0	182	Bangladéš	0	0	2	67
Thajsko	1	5	0	181	Rakousko	0	0	2	66
Turecko	2	4	0	177	Lucembursko	0	0	3	65
Německo	1	4	1	171	Bosna a Hercegovina	0	0	1	63
Bělorusko	1	4	1	167	Lotyšsko	0	0	1	61
Itálie	2	2	2	165	Norsko	0	0	2	60
Tchaj-wan	1	5	0	165	Arménie	0	0	2	59
Rumunsko	2	2	2	163	Slovinsko	0	0	1	58
Ukrajina	3	1	2	162	Nový Zéland	0	0	1	53
Írán	1	4	1	161	Finsko	0	0	0	49
Vietnam	2	2	2	161	Macao	0	0	1	49
Brazílie	1	3	2	160	Kypr	0	1	0	45
Kanada	1	3	2	158	Chile (4)	0	1	0	41
Bulharsko	1	3	2	157	Estonsko	0	0	0	40
Maďarsko	1	2	3	157	Kostarika (4)	0	0	1	34
Velká Británie	1	3	2	157	Kyrgyzstán	0	0	0	33
Srbsko	1	3	1	153	Maroko	0	0	0	32
Austrálie	2	1	2	151	Malajsie (2)	0	1	0	31
Peru	0	4	2	144	Trinidad a Tobago	0	0	0	28
Gruzie	0	3	2	140	Tunisko (5)	0	0	1	27
<i>Polsko</i>	0	2	4	140	Ekvádor	0	0	0	26
Kazachstán	0	3	3	136	Filipíny (4)	0	0	1	26
Indie	0	3	2	130	Island	0	0	0	26
Hongkong	1	2	2	122	Albánie	0	0	0	24
Singapur	0	2	3	116	Honduras (3)	0	0	1	24
Francie	0	1	3	112	Černá hora (4)	0	0	0	23
Chorvatsko	0	1	4	110	Portoriko	0	0	0	23
Portugalsko	0	1	3	99	Kuba (1)	0	0	1	21
Turkmenistán	0	1	3	97	Lichtenštejnsko (2)	0	0	1	21
Argentina	0	1	1	93	Pákistán (5)	0	0	1	21
Ázerbájdžán	0	1	2	91	Uruguay	0	0	0	21
Makedonie	0	1	3	91	Irsko	0	0	0	20
Belgie	0	1	2	89	Nigérie	0	0	0	17
Kolumbie	0	1	2	88	Guatemala (4)	0	0	0	14
<i>Česká republika</i>	0	1	2	87	Kambodža	0	0	0	14
Řecko	0	0	3	86	Paraguay (4)	0	0	0	14
Uzbekistán	0	1	2	85	Salvádor (3)	0	0	0	13
Indonésie	0	0	4	84	Venezuela (2)	0	0	0	13
JAR	0	0	2	84	Panama (1)	0	0	0	12
Tádžikistán	0	1	2	82	Bolívie (3)	0	0	0	9
Izrael	0	0	3	80	Mauretánie	0	0	0	8
Nizozemsko	0	1	1	79	Sýrie (5)	0	0	0	7
Švýcarsko	0	0	3	79	Zimbabwe (2)	0	0	0	5
Litva	0	1	1	77	Benin (2)	0	0	0	3
Mexiko	0	0	3	74	Kuvajt (4)	0	0	0	3
Moldavsko	0	0	4	74	SAE (5)	0	0	0	3
Srí Lanka	0	0	2	74	Alžírsko (4)	0	0	0	2

přírodních památek UNESCO. Otužilejší účastníci využili během výletu možnost okoupat se v chladných mořských vodách, které tento ostrov obklopují.

Ústřední komise MO a vedení českého reprezentačního týmu děkují následujícím firmám a institucím — Hanácké kyselce, a.s., Nissan Kobliha Car v Přerově a FJFI ČVUT v Praze — za jejich nevšední pomoc při zabezpečení společného oblečení celého českého týmu na 50. MMO.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Nechť n je kladné celé číslo a $a_1, \dots, a_k$ ($k \geq 2$) jsou navzájem různá celá čísla z množiny $\{1, \dots, n\}$ taková, že pro každé $i = 1, \dots, k-1$ je číslo $a_i(a_{i+1} - 1)$ dělitelné n . Dokažte, že číslo $a_k(a_1 - 1)$ není číslem n dělitelné. (Austrálie)

2. Nechť O je střed kružnice opsané danému trojúhelníku ABC a nechť P a Q jsou po řadě vnitřní body stran AC a AB . Označme K, L, M postupně středy úseček BP, CQ, PQ a k kružnici body K, L, M procházející. Jestliže přímka PQ je tečnou kružnice k , je $|OP| = |OQ|$. Dokažte. (Rusko)

3. Nechť $s_1, s_2, s_3, \dots$ je rostoucí posloupnost kladných celých čísel taková, že obě její podposloupnosti

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{a} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

jsou aritmetické. Dokažte, že posloupnost $s_1, s_2, s_3, \dots$ je rovněž aritmetická. (USA)

4. Je dán trojúhelník ABC , v němž $|AB| = |AC|$. Osy jeho vnitřních úhlů při vrcholech A a B protínají strany BC a CA po řadě v bodech D a E . Označme K střed kružnice vepsané trojúhelníku ADC a předpokládejme, že $|\sphericalangle BEK| = 45^\circ$. Najděte všechny možné velikosti úhlu CAB . (Belgie)

5. Určete všechny funkce f z množiny kladných celých čísel do množiny kladných celých čísel takové, že pro všechna kladná celá čísla a, b existuje nedegenerovaný trojúhelník, jehož strany mají délky

$$a, \quad f(b), \quad f(b + f(a) - 1).$$

(Trojúhelník je *nedegenerovaný*, pokud jeho vrcholy neleží v přímce.) (Francie)

6. Necht $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou navzájem různá kladná celá čísla a M je množina $n - 1$ kladných celých čísel neobsahující číslo $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Luční kobyłka má skákat podél číselné osy tak, že začne v bodě 0 a ve směru doprava provede v nějakém pořadí n skoků o délkách $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dokažte, že pořadí skoků lze zvolit tak, že se kobyłka neoctne na žádném čísle z množiny M . (Rusko)

Řešení soutěžních úloh

1. Daná čísla $a_1, a_2, \dots, a_k$ splňují následující soustavu kongruencí

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &\equiv a_1 \pmod{n}, \\ a_2 a_3 &\equiv a_2 \pmod{n}, \\ &\vdots \\ a_{k-1} a_k &\equiv a_{k-1} \pmod{n}. \end{aligned}$$

Odtud postupně dostáváme

$$a_1 \equiv a_1 a_2 \equiv a_1 a_2 a_3 \equiv \dots \equiv a_1 a_2 \dots a_k \pmod{n} \quad (1)$$

a (vynecháním první kongruence)

$$a_2 \equiv a_2 a_3 \equiv a_2 a_3 a_4 \equiv \dots \equiv a_2 \dots a_k \pmod{n}. \quad (2)$$

Kdyby číslo $a_k(a_1 - 1)$ bylo dělitelné číslem n neboli $a_k a_1 \equiv a_k \pmod{n}$, bylo by zároveň

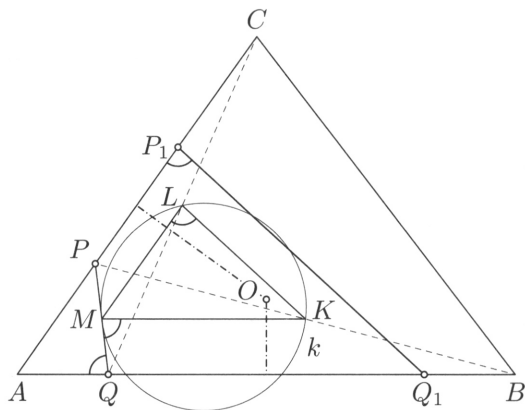
$$a_1 a_2 \dots a_k = a_2 \dots a_k a_1 \equiv a_2 \dots a_k \pmod{n},$$

což podle (1) a (2) dává $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$. Dvě různá čísla z množiny $\{1, \dots, n\}$ však nemohou při dělení číslem n dávat stejný zbytek. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. Z kongruencí (1) speciálně dostáváme

$$a_1 \equiv (a_1 \dots a_{k-1}) a_k \equiv a_1 a_k \pmod{n}.$$

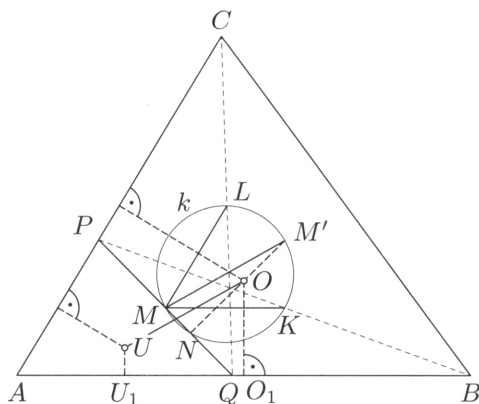
Protože dvě různá čísla a_1, a_k z množiny $\{1, \dots, n\}$ nemohou při dělení číslem n dávat stejný zbytek, musí být $a_1 a_k \not\equiv a_k \pmod{n}$ neboli $a_k(a_1 - 1) \not\equiv 0 \pmod{n}$.



Obr. 65

Jestliže je PQ tečnou kružnice opsané trojúhelníku MKL , plyne z rovnosti úsekového a obvodového úhlu příslušného tětívě MK rovnost $|\sphericalangle KMQ| = |\sphericalangle KLM|$, takže je také $|\sphericalangle AQP| = |\sphericalangle AP_1Q_1|$. To ale znamená, že body P, Q, P_1, Q_1 leží na jedné kružnici, přitom středem této kružnice je zřejmě střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC , neboť osy úseček PP_1 a QQ_1 jsou zároveň osami stran AC a AB . Proto $|OP| = |OQ|$.

Jiné řešení. Nechť PQ je libovolná příčka stran AC a AB trojúhelníku ABC . Označme U střed kružnice opsané trojúhelníku APQ a O_1, U_1 kolmé projekce bodů O a U na přímku AB (obr. 66). Pro kolmou



Obr. 66

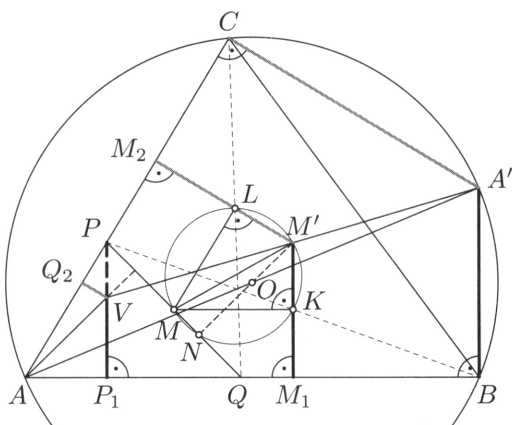
projekci vektoru $\mathbf{OU}$ do přímky AB zřejmě platí $\mathbf{O}_1\mathbf{U}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{BA} + \mathbf{AQ}) = = \frac{1}{2}\mathbf{BQ} = \mathbf{KM}$, protože KM je střední příčka trojúhelníku BQP . Podobně zjistíme, že projekci téhož vektoru do přímky AC je vektor $\mathbf{LM}$. Stejně projekce má ovšem i vektor $\mathbf{M'M}$ určený průměrem MM' kružnice k (opsané trojúhelníku KLM). Připomeňme, že vektor v rovině je jednoznačně určen svými projekcemi do dvou nezávislých směrů. Dostáváme tak tedy, že $\mathbf{OU} = \mathbf{M'M}$. Protože $UM \perp PQ$, je také $M'O \perp PQ$.

Pokud je nyní PQ tečna kružnice k , je $M'M \perp PQ$ a bod O leží na téže kolmici k PQ jako body U a M' , což je ovšem osa úsečky PQ . Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Z předchozích úvah plyne, že obecně je $UOM'M$ rovnoběžník (redukovaný na úsečku UM' , když je PQ tečnou kružnice k), a protože $UM \perp PQ$, je také $M'O \perp PQ$. Označíme-li N patu kolmice z bodu O na PQ , je zřejmě bod N (podle Thaletovy věty) dalším průsečíkem přímky PQ s kružnicí k . Dokázali jsme tak vlastně obecnější tvrzení (obr. 66):

Je-li O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a P a Q jsou po řadě vnitřní body stran AC a AB , leží středy úseček BP , CQ , PQ a pata kolmice z bodu O na PQ na jedné kružnici.

Ukážeme ještě jeden pěkný důkaz tohoto tvrzení. Nechť AA' je průměr kružnice opsané danému trojúhelníku ABC , takže $A'B \perp AB$ a $A'C \perp AC$. Označme dále V průsečík výšek trojúhelníku APQ a P_1 , Q_2 odpovídající paty výšek (obr. 67). Je-li M' střed úsečky VA' , označme M_1 a M_2 jeho kolmé průměty do stran AB a AC , potom je $M'M_1$ střední



Obr. 67

příčkou lichoběžníku VP_1BA' a nutně na ní leží i střed K úsečky PB . Je tudíž $M'K \perp MK$ a podobně i $M'L \perp ML$, což znamená, že $MKM'L$ je čtvercový čtyřúhelník, tedy MM' je průměrem kružnice k . Nyní už vidíme, že OM' je střední příčkou trojúhelníku $AA'V$, a protože $AV \perp PQ$, je také $M'O \perp PQ$. Pata N této kolmice zřejmě leží na kružnici k .

3. Označme D diferenci aritmetické posloupnosti $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots$ a pro každé přirozené i označme $d_i = s_{i+1} - s_i$. Chceme dokázat, že hodnota d_i je pro všechna i stejná.

Nejdříve ukážeme, že množina hodnot d_i je ohraničená. Protože daná posloupnost je rostoucí, je $d_i \geq 1$ pro každé i . Každé dva po sobě jdoucí členy posloupnosti (s_i) zřejmě leží mezi některými dvěma sousedními členy posloupnosti $1, s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots$, proto $s_{i+1} - s_i \leq \max\{D, s_{s_1}\}$.

Označme m nejmenší a M největší z hodnot d_i (jejich existence plyne z ohraničenosti). Stačí dokázat, že $m = M$. Předpokládejme naopak, že $m < M$.

Nechť n je libovolný takový index, že $d_n = m$. Tedy $s_{n+1} - s_n = m$, odkud

$$\begin{aligned} D &= s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} = \\ &= d_{s_n} + d_{s_n+1} + \dots + d_{s_n+m-1} \leq \underbrace{M + M + \dots + M}_{m\text{-krát}} = mM. \end{aligned} \quad (1)$$

Podobně je-li N libovolný index takový, že $d_N = M$, je $s_{N+1} - s_N = M$, tedy

$$\begin{aligned} D &= s_{s_{N+1}} - s_{s_N} = s_{s_N+M} - s_{s_N} = \\ &= d_{s_N} + d_{s_N+1} + \dots + d_{s_N+M-1} \geq \underbrace{m + m + \dots + m}_{M\text{-krát}} = Mm. \end{aligned} \quad (2)$$

Z (1) a (2) plyne, že $D = Mm$, a aby platila rovnost, nutně $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \dots = d_{s_n+m-1} = M$ a $d_{s_N} = d_{s_N+1} = \dots = d_{s_N+M-1} = m$. Speciálně máme

$$d_{s_n} = M \quad \text{a} \quad d_{s_N} = m. \quad (3)$$

Z toho, že posloupnost (s_n) je rostoucí, plyne $s_n \geq n$. Navíc dokonce $s_n > n$, neboť kdybychom měli $s_n = n$, bylo by podle (3) $m = d_n = d_{s_n} = M$, což odporuje předpokladu $m < M$. Stejně můžeme ukázat, že $s_N > N$.

Položme $n_1 = n$. Tedy $d_{n_1} = m$ a podle (3) platí $d_{s_{n_1}} = M$. Dále zvolme $n_2 = s_{n_1} > n_1$. Protože $d_{n_2} = M$, může n_2 vystupovat v pozici N , takže podle (3) máme $d_{s_{n_2}} = m$ a zároveň $s_{n_2} > n_2$. Můžeme

proto zvolit $n_3 = s_{n_2}$ a z (3) (protože n_3 může vystupovat v pozici n) dostaneme $d_{s_{n_3}} = M$. A tak pomocí předpisu $n_{i+1} = s_{n_i}$ postupně sestrojíme rostoucí posloupnost $n_1, n_2, n_3, \dots$ takovou, že

$$d_{s_{n_1}} = M, d_{s_{n_2}} = m, d_{s_{n_3}} = M, d_{s_{n_4}} = m, \dots \quad (4)$$

Přitom posloupnost $d_{s_{n_1}}, d_{s_{n_2}}, \dots$ je podposloupností posloupnosti $d_{s_1}, d_{s_2}, \dots$. Ta má členy, které jsou rozdíly členů aritmetických posloupností $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \dots$ a $s_{s_1}, s_{s_2}, \dots$, je tedy rovněž aritmetickou posloupností. Podle (4) se v ní nekonečněkrát opakuje hodnota m (i M), což při $m < M$ zřejmě není možné.

Protože náš předpoklad vede ke sporu, nutně musí být $m = M$.

Jiné řešení. Především si uvědomme, že obě uvažované aritmetické podposloupnosti musejí mít stejnou diferenci. Posloupnosti $(s_{s_i+1} - s_{s_i})$ a $(s_{s_{i+1}} - s_{s_i+1})$ jsou obě jako rozdíl dvou aritmetických posloupností rovněž aritmetické a navíc s *opačnými* diferencemi. Protože jsou však zároveň obě nezáporné, musejí být jejich difference nulové (a tudíž jsou obě „rozdílové“ posloupnosti konstantní).

Označme tedy d společnou diferenci obou posloupností (s_{s_i}) a $(s_{s_{i+1}})$. Pro ostře rostoucí posloupnost (s_i) nepochybně platí $|j - k| \leq |s_j - s_k|$, proto $0 \leq s_{k+1} - s_k \leq s_{s_{k+1}} - s_{s_k} = d$, takže posloupnost $s_{k+1} - s_k$ je ohraničená, a nabývá tak pro nějaké N svého maxima $s_{N+1} - s_N = M$ a pro nějaké n minima $s_{n+1} - s_n = m$. Přitom

$$s_{s_{s_{N+1}}} - s_{s_{s_N}} = d(s_{N+1} - s_N) = dM = (s_{s_{N+1}} - s_{s_N})M.$$

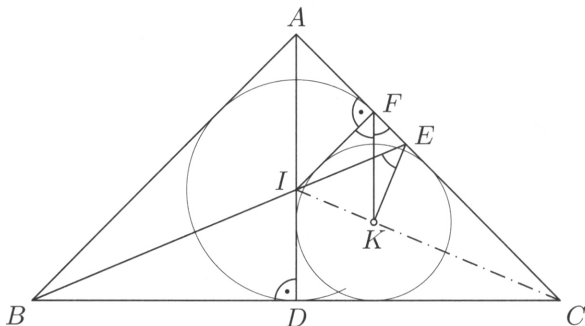
Levou stranu této rovnosti můžeme zapsat jako součet $s_{s_{N+1}} - s_{s_N}$ sčítanců tvaru $s_{i+1} - s_i \leq M$, takže musejí být všechny rovny M , což speciálně v případě toho posledního znamená, že $s_{s_{s_N}+1} - s_{s_{s_N}} = M$. Jak ale víme z úvodního odstavce, je posloupnost $(s_{s_i+1} - s_{s_i})$ konstantní, tudíž $s_{s_i+1} - s_{s_i} = M$ pro všechna přirozená i .

Úplně stejně (jen místo N a M budeme psát n a m) ukážeme, že $s_{s_i+1} - s_{s_i} = m$ pro všechna i . Je tudíž $M = m$ a tvrzení úlohy je tak dokázáno.

4. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a F její bod dotyku se stranou AC . Pokud $F = E$, tedy osa úhlu při vrcholu B je zároveň výškou trojúhelníku ABC , je trojúhelník ABC rovnostranný a jeho úhel při vrcholu A tak má velikost 60° .

V každém případě je úsečka IF obrazem úsečky ID v souměrnosti podle osy CI , takže IF je tečnou kružnice vepsané trojúhelníku ADC . Přímka KF je tedy osou pravého úhlu a $|\sphericalangle IFK| = 45^\circ$.

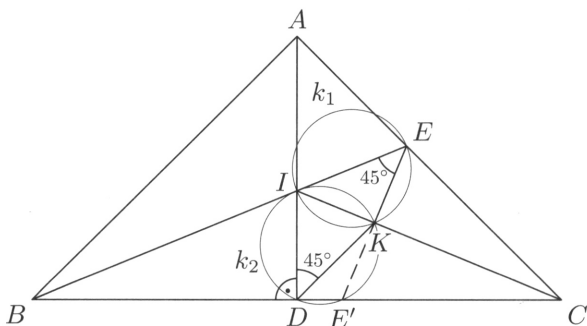
Pokud jsou body E a F různé a $|\sphericalangle IEK| = |\sphericalangle BEK| = 45^\circ$ (obr. 68), leží body K, E, F, I na (Thaletově) kružnici s průměrem IE . To znamená, že trojúhelník EIK je rovnoramenný pravoúhlý, tudíž $|\sphericalangle KIE| = 45^\circ$. Protože KIE je zároveň vnější úhel rovnoramenného trojúhelníku BCI , je $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| = 2|\sphericalangle IBC| = |\sphericalangle KIE| = 45^\circ$, tudíž úhel při vrcholu A má velikost 90° .



Obr. 68

V obou případech snadno ověříme, že úhel BEK má velikost 45° .

Jiné řešení. (Podle *Martina Bachratého*, Slovensko.) Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC (je to společný bod přímk AD , BE , CK) a uvažujme kružnice k_1 , k_2 opsané trojúhelníkům IKE , IKD (obr. 69). Obě mají nad společnou tětivou IK obvodový úhel ve-



Obr. 69

likosti 45° , neboť K leží na ose pravého úhlu ADC . Proto jsou obě kružnice shodné a odpovídají si v osové souměrnosti podle přímky CI . V téže osové souměrnosti si odpovídají i přímky AC , BC , takže průsečíky kružnice k_1 se stranou AC se zobrazí na průsečíky kružnice k_2 se stranou BC .

Protože jedním ze společných bodů kružnice k_1 a přímky AC je bod E a jedním ze společných bodů kružnice k_2 a přímky BC je bod D , mohou nastat dva případy.

Je-li obrazem bodu E v osové souměrnosti podle přímky CI bod D , je úhel CEI pravý, což znamená, že v trojúhelníku ABC je osa úhlu při vrcholu B zároveň výškou. Z toho plyne, že trojúhelník ABC je rovnostranný, takže $|\sphericalangle CAB| = 60^\circ$.

Pokud kružnice k_2 protíná přímku BC ve dvou různých bodech D a E' , přičemž obrazem bodu E v osové souměrnosti podle přímky CI je bod E' , je kružnice k_2 opsána pravoúhlému trojúhelníku IDE' (obr. 69; bod E' leží uvnitř úsečky DC , protože trojúhelník DKI je ostroúhlý — součet dvou jeho ostrých úhlů je totiž $45^\circ + 90^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle BCA| > 90^\circ$), takže úhel $E'KI$ je rovněž pravý. Pro vnější úhel EIK rovnoramenného trojúhelníku BCI tak dostáváme

$$|\sphericalangle EIK| = 45^\circ = |\sphericalangle BCA|.$$

Odtud už snadno dopočítáme $|\sphericalangle CAB| = 180^\circ - 2|\sphericalangle BCA| = 90^\circ$.

Snadno ověříme, že jak v rovnostranném, tak v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku je $|\sphericalangle BEK| = 45^\circ$.

Jiné řešení. Označme I střed kružnice vepsané rovnoramennému trojúhelníku ABC a jeho úhly označme obvyklým způsobem, takže $\beta = \gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Bod K je průsečíkem os úhlů trojúhelníku ADC , proto

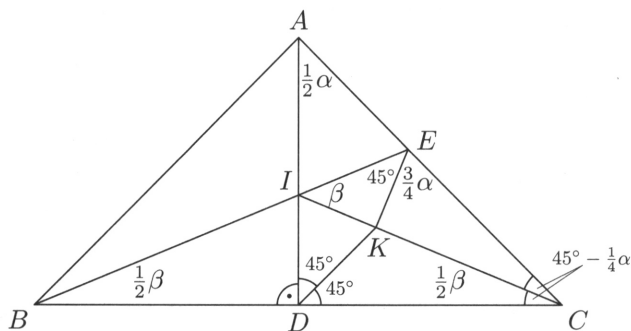
$$|\sphericalangle ECK| = |\sphericalangle KCD| = \frac{1}{2}\beta = 45^\circ - \frac{1}{4}\alpha \quad \text{a} \quad |\sphericalangle CDK| = |\sphericalangle KDA| = 45^\circ.$$

Z trojúhelníku BEA plyne (obr. 70)

$$|\sphericalangle BEA| = 180^\circ - \alpha - \frac{1}{2}\beta,$$

takže

$$|\sphericalangle KEC'| = 180^\circ - 45^\circ - |\sphericalangle BEA| = \alpha + \frac{1}{2}\beta - 45^\circ = \frac{3}{4}\alpha.$$



Obr. 70

Pro jednodušší počítání označme $x = \frac{1}{4}\alpha$. Z vlastností osy úhlu DK v trojúhelníku DCI máme

$$\frac{|KI|}{|KC|} = \frac{|DI|}{|DC|} = \operatorname{tg} |\sphericalangle DCI| = \operatorname{tg}(45^\circ - x)$$

a pomocí sinových vět v trojúhelnících KEI a KEC dostaneme

$$\frac{|KI|}{|KC|} = \frac{|KI| \cdot |EK|}{|EK| \cdot |KC|} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin(90^\circ - 2x)} \cdot \frac{\sin(45^\circ - x)}{\sin 3x}.$$

Spojením obou rovností po zkrácení vychází

$$\cos(45^\circ - x) \cdot \sin 45^\circ = \cos 2x \cdot \sin 3x.$$

Levou i pravou stranu upravíme pomocí vzorečku

$$\sin(u + v) + \sin(u - v) = 2 \sin u \cos v,$$

takže po zřejmých úpravách dostáváme

$$\sin(90^\circ - x) + \sin x = \sin 5x + \sin x,$$

$$\cos x + \sin x = \sin 5x + \sin x,$$

$$\cos x = \cos(90^\circ - 5x).$$

Protože $0^\circ < \alpha = 4x < 180^\circ$, je buď $x = 90^\circ - 5x$ neboli $\alpha = 60^\circ$, nebo $x = 5x - 90^\circ$ neboli $\alpha = 90^\circ$. Pro obě tyto hodnoty platí $|\sphericalangle BEK| = 45^\circ$, jak snadno ověříme.

5. Především si uvědomme, že pokud mají tři přirozená čísla $1, m, n$ splňovat trojúhelníkovou nerovnost, musí být $m = n$.

Označme $m = f(1) - 1$. Pro $a = 1$ tak dostáváme tři čísla $1, f(b), f(b + m)$, která pro libovolné přirozené b splňují trojúhelníkovou nerovnost, jedině když $f(b) = f(b + m)$. Pokud by však bylo $m > 0$, byla by funkce f periodická s periodou m , a nabývala by tudíž jen konečný počet hodnot $f(1), f(2), \dots, f(m)$. V takovém případě je ovšem zřejmé, že pro dostatečně velké přirozené číslo a (větší než dvojnásobek maxima uvedených hodnot) nemohou čísla $a, f(b), f(b + f(a) - 1)$ splňovat trojúhelníkovou nerovnost. Nutně tedy $m = 0$ neboli $f(1) = 1$.

Pro $b = 1$ odtud hned dostáváme, že čísla $a, 1, f(f(a))$ pro libovolné přirozené číslo a splňují trojúhelníkovou nerovnost, takže podle úvodního pravidla

$$f(f(a)) = a \quad \text{pro všechna přirozená čísla } a. \quad (1)$$

Z vlastnosti (1) navíc plyne, že funkce f je prostá. Je-li totiž $f(x) = f(y)$, pak nutně $x = f(f(x)) = f(f(y)) = y$.

Označme $k = f(2)$. Protože $f(1) = 1$ a f je prostá, je $k \geq 2$. Navíc $f(k) = f(f(2)) = 2$. Pro $a = 2, b = k$ tak máme, že čísla $2, 2$ a $f(2k - 1)$ splňují trojúhelníkovou nerovnost, proto

$$|f(2k - 1) - 2| < 2, \quad \text{takže} \quad f(2k - 1) \in \{1, 2, 3\}.$$

Poněvadž $f(1) = 1, f(k) = 2$ a $2k - 1 \notin \{1, k\}$, z prostoty funkce f nutně plyne $f(2k - 1) = 3$.

Nyní podobně pro $a = 2, b = 2k - 1$ dostáváme

$$|f(3k - 2) - 3| < 2, \quad \text{takže} \quad f(3k - 2) \in \{2, 3, 4\};$$

a protože $2 = f(k), 3 = f(2k - 1)$ a $3k - 2 \notin \{k, 2k - 1\}$, musí být $f(3k - 2) = 4$. Matematickou indukcí tak snadno odvodíme, že

$$f(nk - (n - 1)) = n + 1$$

platí pro všechna přirozená čísla n . Speciálně pak pro $n = k - 1$ dostáváme

$$f((k - 1)k - (k - 2)) = k,$$

což vzhledem k prostotě funkce f dává $(k - 1)k - (k - 2) = 2$ neboli $k(k - 2) = 0$. Je tedy $k = 2$, takže indukcí odvozený vztah je tvaru

$$f(n + 1) = n + 1 \quad \text{pro všechna přirozená čísla } n.$$

To spolu s rovností $f(1) = 1$ znamená, že jedinou vyhovující funkcí je identita $f(x) = x$.

Snadno ověříme, že tato funkce vyhovuje, neboť $|a - b| < a + b - 1 < a + b$ pro libovolná dvě přirozená čísla a, b .

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení zjistíme, že $f(1) = 1$ a že funkce f je involutorní, tj. $f(f(a)) = a$ pro libovolné přirozené a , což zároveň znamená, že funkce f je prostá.

Položme $k = f(2) - 1$, $k \geq 1$. Z předpokladů úlohy plyne, že pro libovolné přirozené číslo b splňuje trojice čísel 2 , $f(b)$, $f(b + k)$ trojúhelníkovou nerovnost $|f(b + k) - f(b)| < 2$. Protože f je prostá, musí být $|f(b + k) - f(b)| = 1$, což znamená, že $f(b)$ a $f(b + k)$ jsou dvě sousední přirozená čísla. Záměnou b postupně za $b + k$, $b + 2k$, $\dots$ zjistíme, že stejnou vlastnost mají i dvojice čísel $f(b + k)$ a $f(b + 2k)$, $f(b + 2k)$ a $f(b + 3k)$, $\dots$. Navíc posloupnost čísel

$$f(b), f(b + k), f(b + 2k), f(b + 3k), \dots \quad (2)$$

musí být rostoucí, protože funkce f je prostá (klesající být nemůže, protože je to nekonečná posloupnost přirozených čísel). Tak docházíme k závěru, že (2) je posloupnost všech (po sobě jdoucích) přirozených čísel počínaje číslem $f(b)$. Pro $b = 1$ tak dostáváme *všechna* přirozená čísla, proto v takovém případě mezi argumenty funkce f ve (2) nesmí žádné přirozené číslo chybět. Je tedy $k = 1$ a $f(n) = n$ pro každé přirozené n . Zároveň je zřejmé, že tato funkce má požadované vlastnosti.

6. K důkazu využijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ je tvrzení triviálně splněno. Budeme tedy předpokládat, že $n > 1$ a že tvrzení úlohy platí pro všechna přirozená čísla menší než n .

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a_1 = \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$, a označme $m = \min M$. Rozebereme dva případy: $m < a_1$ a $a_1 \leq m$.

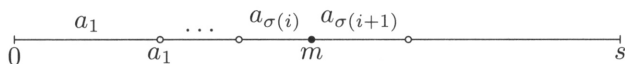
Pokud $m < a_1$ a zároveň $a_1 \notin M$, začneme skokem délky a_1 , kterým přeskočíme m , a použijeme indukční předpoklad na zbylých $n - 1$ skoků a nejvýše $n - 2$ čísel z množiny $M \setminus \{m\}$, jež leží v intervalu (a_1, s) .

Pokud $m < a_1 \in M$, uvažujme $n - 1$ dvojic $a_2, a_2 + a_1, \dots, a_n, a_n + a_1$. To je celkem $2n - 2$ různých čísel, z nichž nejvýše $n - 2$ může patřit do M (v M je a_1 , které mezi nimi určité není). To znamená, že z n čísel, která v M neleží, aspoň dvě tvoří jednu z uvedených $n - 1$ dvojic, řekněme $a_i, a_i + a_1$, $2 \leq i \leq n$. Budou-li první dva skoky kobylinky a_i, a_1 , přeskočí m i a_1 z M a zbylé $n - 2$ skoky najdeme podle indukčního předpokladu (v množině M zbyla nejvýše $n - 3$ čísla k přeskočení).

Pokud $a_1 \leq m$, uvažujme posloupnost skoků $a_1 = a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}$, kde σ je nějaká vhodná permutace čísel $1, 2, \dots, n$ taková, že kobylka neskočí na žádné číslo z $M \setminus \{m\}$. Takovou permutaci σ dokážeme najít podle indukčního předpokladu (máme k dispozici $n - 1$ skoků $a_2, \dots, a_n$ a nejvýše $n - 2$ čísel z M větších než m , která leží v intervalu (a_1, s)).

Je-li nyní $m = a_1$, stačí prohodit první a druhý skok, tj. skoky délek a_1 a $a_{\sigma(2)}$.

Pokud v nalezené posloupnosti skoků některý z nich vede do čísla $m > a_1$, je tedy $m = a_1 + \dots + a_{\sigma(i)}$ pro nějaké $i \in \{2, 3, \dots, n - 1\}$ (obr. 71), prohodíme první a $(i + 1)$ -ní skok, tj. skoky délek a_1 a $a_{\sigma(i+1)}$. Tím dosáhneme toho, že číslo m kobylka přeskochí a ostatní čísla, do nichž vedou její skoky, se změní pouze v intervalu $(0, m)$, kde však žádné číslo z M neleží.



Obr. 71

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

3. středoevropská matematická olympiáda

Třetí ročník Středoevropské matematické olympiády se uskutečnil 24.–29. září 2009 v polské Poznani za účasti 59 studentů z deseti zemí středoevropského regionu: z České republiky, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska.

České družstvo tvořili *Petr Boroš* a *Simona Domesová* z Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci, *Radek Marciňa* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, *Miroslav Olšák* z Gymnázia Budánka v Praze, *Petr Ryšavý* z Gymnázia Jaroslava Heyrovského v Praze a *Bohuslav Zmek* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně. Vedoucím družstva byl Mgr. *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem pak dr. *Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci.

Vlastní soutěž probíhala v prostorách Fakulty matematiky a informatiky Univerzity Adama Mickiewicze, a to ve dvou dnech: v sobotu 26. září byla na programu soutěž jednotlivců, v neděli 27. září se pak konala soutěž družstev. V soutěži jednotlivců řešili žáci v průběhu pěti hodin čtyři úlohy, v týmové soutěži pak každé národní družstvo mělo stejný čas na řešení osmi úloh. Příklady do soutěže vybírala z návrhů jednotlivých účastnických států mezinárodní jury složená z vedoucích jednotlivých národních delegací.

Absolutním vítězem mezi jednotlivci se stal maďarský student *Bertalan Bodor*, který jako jediný vyřešil všechny čtyři úlohy. V týmové soutěži dominovalo družstvo Polska. Česká výprava byla úspěšná, Bohuslav Zmek získal stříbrnou medaili, zbylí členové družstva až na Petra Boroše pak vybojovali medaili bronzovou. V soutěži družstev obsadil český tým pěkné páté místo.



Umístění	Body za úlohu				Body	Cena
	1	2	3	4		
52.–55. Petr Boroš	0	0	0	1	1	
27.–35. Simona Domesová	0	0	8	1	9	bronz
36.–39. Radek Marciňa	0	0	8	0	8	bronz
27.–35. Miroslav Olšák	0	0	8	1	9	bronz
27.–35. Petr Ryšavý	0	0	8	1	9	bronz
8.–12. Bohuslav Zmek	5	1	8	1	15	stříbro
Celkem		5	1	40	5	51

Přehled výsledků všech zemí v soutěži jednotlivců je v druhé tabulce. Země jsou v ní seřazeny podle součtu bodů celého družstva podobně jako při neoficiálním pořadí zemí na MMO (číslo v závorce označuje menší počet účastníků).

	I	II	III	body		I	II	III	body
Maďarsko	3	1	2	100	<i>Česká republika</i>	–	1	4	51
Polsko	2	3	1	86	Slovensko	1	1	–	48
Německo	1	2	2	75	Rakousko	–	1	2	39
Chorvátsko	–	2	3	59	Litva	–	–	1	17
Slovinsko (5)	–	2	3	54	Švýcarsko	–	–	1	16

Nejvíce se tak dařilo družstvům z Polska a Maďarska — Polsko vyhrálo soutěž družstev a v soutěži jednotlivců získalo dvě zlaté medaile, Maďarsko bylo v soutěži družstev druhé a v soutěži jednotlivců získalo tři zlaté medaile. Celkové výsledky soutěže družstev jsou uvedeny v následující tabulce.

Umístění	Body za úlohu								Body
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1. Polsko	8	6	8	8	8	8	6	8	60
2. Maďarsko	6	5	8	8	8	4	8	8	55
3. Německo	8	4	8	8	8	8	0	8	52
4. Chorvátsko	8	5	8	5	8	2	8	8	52
5. <i>Česká republika</i>	8	6	8	8	8	3	1	0	42
6. Slovinsko	8	2	8	0	8	0	2	8	36
7.–8. Rakousko	8	3	4	3	2	0	8	6	34
Slovensko	7	3	8	6	8	0	1	1	34
9. Švýcarsko	0	2	4	8	8	0	0	8	30
10. Litva	8	2	4	0	5	0	1	4	24

V pondělí po soutěži studenti navštívili lanové centrum a mnohým z nich zůstane tato atrakce nesmazatelně vryta do paměti. Po této fyzicky

náročnější aktivitě následovalo večer slavnostní zakončení soutěže, které proběhlo v historické budově univerzity v centru Poznaň.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

Soutěž jednotlivců

1. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y))$$

pro libovolná reálná x, y . ($\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel.) (Slovinsko)

2. Mějme $n \geq 3$ různých barev. Nechť $f(n)$ je největší přirozené číslo s následující vlastností: každou stranu a každou úhlopříčku konvexního $f(n)$ -úhelníku můžeme obarvit jednou z n barev tak, že

- ▷ použijeme aspoň dvě barvy,
- ▷ libovolné tři vrcholy mnohoúhelníku jsou spojeny buď úsečkami stejné barvy, nebo navzájem různých barev.

Dokažte, že $f(n) \leq (n-1)^2$ a že rovnost v této nerovnosti nastává v nekonečně mnoha případech. (Slovinsko)

3. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník se shodnými stranami AB a CD , které nejsou rovnoběžné. Označme E, F středy úhlopříček AC a BD . Přímka EF protíná úsečky AB a CD po řadě v bodech G a H . Ukažte, že $|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle DHG|$. (Maďarsko)

4. Určete všechna přirozená $k \geq 2$ taková, že pro žádnou dvojici (m, n) různých kladných celých čísel, nepřevyšujících k , není číslo $n^{n-1} - m^{m-1}$ dělitelné číslem k . (Švýcarsko)

Soutěž družstev

5. Nechť reálná čísla x, y, z splňují podmínku $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z)$. Dokažte, že

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geq 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27,$$

a určete, kdy nastává rovnost. (Slovensko)

6. Nechť a, b, c jsou reálná čísla taková, že pro každé dvě z rovnic

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + a = 0$$

existuje právě jedno reálné číslo, které je jejich společným řešením. Určete všechny možné hodnoty výrazu $a^2 + b^2 + c^2$. (Slovensko)

7. Na tabuli jsou napsána čísla $0, 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 2$). V každém kroku vymažeme číslo, které je aritmetickým průměrem dvou různých čísel, která ještě na tabuli zůstala. Tyto kroky opakuje tak dlouho, až už žádné další číslo na tabuli nemůžeme smazat. Buď $g(n)$ nejmenší možný počet čísel, která na tabuli mohou zůstat. Pro každé n určete $g(n)$.

(Polsko)

8. Každé políčko hrací desky 2009×2009 obarvíme jednou z n barev (nemusíme použít každou z nich). Barvu nazveme *souvislou*, jestliže existuje buď jediné políčko dané barvy, nebo libovolná dvě políčka jsou vzájemně dosažitelná posloupností tahů šachové dámy takových, že každý z nich začíná i končí na políčku dané barvy (šachová dáma se po hrací desce může pohybovat vertikálně, horizontálně a diagonálně). Určete největší n takové, že pro libovolné obarvení bude alespoň jedna barva použitá na hrací desce souvislá.

(Polsko)

9. Je dán rovnoběžník $ABCD$, v němž $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ$ a E označuje průsečík jeho úhlopříček. Kružnice opsaná trojúhelníku ACD protíná přímkou BA v bodě $K \neq A$, přímkou BD v bodě $P \neq D$ a přímkou BC v bodě $L \neq C$. Přímka EP protíná kružnici opsanou trojúhelníku CEL v bodech E a M . Dokažte, že trojúhelníky KLM a CAP jsou shodné.

(Slovinsko)

10. Je dán tětíkový čtyřúhelník $ABCD$, v němž $|CD| = |DA|$. Body E a F leží po řadě na úsečkách AB a BC tak, že $|\sphericalangle ADC| = 2|\sphericalangle EDF|$. Úsečka DK je výškou a DM těžnicí trojúhelníku DEF . Nechť L je obraz bodu K ve středové souměrnosti podle bodu M . Dokažte, že přímky DM a BL jsou rovnoběžné.

(Polsko)

11. Nalezněte všechny dvojice (m, n) celých čísel, které splňují rovnici

$$(m+n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn.$$

(Chorvatsko)

12. Najděte všechna řešení rovnice

$$2^x + 2009 = 3^y 5^z$$

v množině nezáporných celých čísel.

(Litva)

Řešení úloh

1. Konstantní funkce $f(x) = 0$ zřejmě vyhovuje. Předpokládejme dále, že existuje $a \in \mathbb{R}$, pro něž $f(a) \neq 0$. Dokážeme, že funkce f je pak prostá.

Nechť $f(y_1) = f(y_2)$ pro nějaká $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Postupným dosazením $y = y_1, y = y_2$ do dané rovnice a odečtením vzniklých rovností dostaneme $y_1 f(x) = y_2 f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Po dosazení $x = a$ můžeme nenulové $f(a)$ vykrátit, takže $y_1 = y_2$ a f je vskutku prostá.

Dosazením $x = 0, y = 1$ do dané rovnice získáme

$$f(0) + f(f(0) + f(1)) = f(0) + f(f(1)),$$

tedy $f(f(0) + f(1)) = f(f(1))$ a vzhledem k prostotě f odtud plyne $f(0) + f(1) = f(1)$ neboli $f(0) = 0$.

Volbou $y = 0$ následně z dané rovnice dostaneme $f(f(x)) = f(x)$, odkud opět díky prostotě funkce f plyne $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. I tato funkce vyhovuje, o čemž se dosazením snadno přesvědčíme.

Jedinými řešeními jsou tedy funkce $f(x) = 0$ a $f(x) = x$.

2. Uvažujme mnohoúhelník, jehož všechny strany i úhlopříčky jsou obarveny popsáním způsobem, můžeme ho tedy považovat za úplný graf. Jeho hrany jsou obarveny n barvami tak, že každý trojúhelník (neboli úplný podgraf s třemi vrcholy, tzv. 3-klika) je buď jednobarevný, anebo trojbarevný. Navíc celý graf není jednobarevný.

Uvedená podmínka pro trojúhelníky je vlastně ekvivalentní s následující podmínkou: Všechny hrany grafu lze rozdělit do několika (alespoň dvou) jednobarevných klik (úplných podgrafů), přičemž kliky téže barvy jsou vrcholově disjunktní (za kliku považujeme i podgraf tvořený dvěma vrcholy neboli jedinou hranou). Otázkou už zůstává jen to, jak velké takové kliky mohou být a kolik nejvíce jich bude jedné barvy.

Kdyby některá z těchto jednobarevných klik (řekněme modrá) měla aspoň n vrcholů, musel by mimo ni existovat vrchol v , který by byl s každým vrcholem modré kliky spojen jinou než modrou barvou, což však není možné, protože kromě modré barvy máme k dispozici už jen $n - 1$ barev. Proto každá jednobarevná klika má nejvýše $n - 1$ vrcholů.

Jeden vrchol leží nejvýše v n různých klikách (různé barvy) a každá z nich má nejvýše $n - 2$ dalších vrcholů. Tento vrchol má tedy nejvýše $n(n - 2)$ sousedů. Graf má tudíž nejvýše $f(n) \leq n(n - 2) + 1 = (n - 1)^2$ vrcholů.

V druhé části řešení najdeme požadované obarvení hran úplného grafu s $(n - 1)^2$ vrcholy n barvami pro nějaké vhodné n .

Z našeho odvození odhadů pro $f(n)$ plyne, že v hledaném „maximálním“ případě bude každý vrchol právě v n klikách (všech) různých barev, každá klika bude mít $n-1$ vrcholů a od každé barvy jich bude právě $n-1$. Odtud plyne, že každé dvě kliky různých barev budou muset mít společný vrchol (kupř. každý vrchol dané modré kliky je v jiné žluté klice, takže to jsou v souhrnu všechny žluté kliky). Budeme-li proto chápat jednobarevné kliky jako „přímky“ o $n-1$ bodech (příslušných vrcholech grafu), pak každé dvě z těchto „přímek“ budou mít vzájemnou polohu jako rovnoběžky či různoběžky v rovině — podle toho, zda půjde o kliky stejné barvy či dvou různých barev.

Nabízí se tak možnost umístit všechny body jedné kliky na přímku jedné barvy. Body kliky jiné barvy budou na přímce nejen jiné barvy, ale i jiného směru tak, aby průsečík těchto dvou přímek představoval společný vrchol obou klik. Dvě kliky téže barvy pak můžeme reprezentovat rovnoběžkami.

Protože vrcholů je dohromady $(n-1)^2$, zkusíme je rozmístit do čtverce (vrcholy grafu tak budou všechny body s celočíselnými souřadnicemi (i, j) , kde $i, j \in M_n = \{0, 1, \dots, n-2\}$) a pospojovat přímkami různých směrů. Na každé přímce by mělo ležet právě $n-1$ vrcholů grafu. Takových ideálních přímek sice moc nenajdeme, ale pomůžeme si tím, že budeme s mřížovými body počítat modulo $(n-1)$.

Nejprve vrcholy pospojujeme $n-1$ svislými přímkami první barvy a dále $n-1$ vodorovnými přímkami druhé barvy. Mezi přímky třetí barvy zařadíme hlavní úhlopříčku s body (k, k) ($k \in M_n$) a dále přímky s ní rovnoběžné, tj. $(n-1)$ -tice bodů $(a + k \pmod{n-1}, k)$ ($k \in M_n$), kde a postupně volíme z množiny $M_n \setminus \{0\}$ (pro $a = 0$ dostáváme ovšem hlavní úhlopříčku). To jsou vlastně všechny „přímky“ se směrnici 1, které jakmile „vyběhnou“ vpravo ze čtverce ve výšce k , vrátí se zleva do čtverce pod stejným úhlem ve výšce $k+1$.

Podobně budeme postupovat i dále: kliky další barvy budou tvořit $(n-1)$ -tice vrcholů všech $n-1$ rovnoběžných přímek se směrnici 2 vycházejících postupně z vrcholů $(0, 0), (0, 1), \dots, (0, n-2)$ (princip kongruence teď uplatníme nejen vodorovně, ale i vertikálně, tedy na obě souřadnice): na každé z uvedených přímek pak budou ležet vrcholy se souřadnicemi $(a + k, 2k) \pmod{n-1}$, kde $k \in M_n$, $a \in M_n$. Stejný postup zopakujeme i pro další směrnice $\lambda \in \{3, 4, \dots, n-2\}$; jednotlivé přímky budou obsahovat vrcholy se souřadnicemi $(a + k, \lambda k) \pmod{n-1}$.

Popsanou konstrukcí jsme získali $n(n-1)$ přímek n různých směrů.

Přitom jsme v každé klice („přímce“) obarvili $\binom{n-1}{2}$ hran, celkem tedy

$$n(n-1)\binom{n-1}{2} = \frac{n(n-1)^2(n-2)}{2} = \binom{(n-1)^2}{2}$$

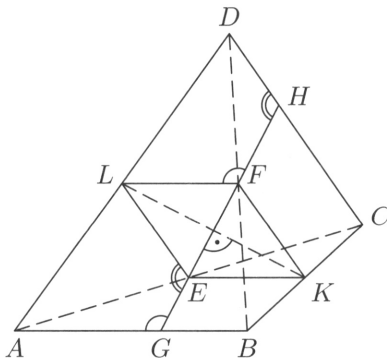
hran. To však je přesně počet hran úplného grafu s $(n-1)^2$ vrcholy.

Zbývá už jen zvolit n tak, aby průnikem dvou klik různé barvy byl právě jeden vrchol. K tomu stačí, aby $p = n-1$ bylo prvočíslo, neboť pak má kongruence

$$(a+k, \lambda k) \equiv (b+l, \mu l) \pmod{p} \quad \text{resp.} \quad (a, k) \equiv (b+l, \mu l) \pmod{p}$$

pro daná čísla $a, b, \lambda, \mu \in M_n$ právě jedno řešení. A protože prvočísel je nekonečně mnoho, našli jsme nekonečně mnoho různých n , pro něž $f(n) = (n-1)^2$. Tím je úloha vyřešena.

3. Označme K, L středy stran BC, DA . Z vlastností středních příček trojúhelníků ABC, ABD plyne $EK \parallel AB \parallel LF$, přičemž $|EK| = |LF| = \frac{1}{2}|AB|$ (obr. 72). Podobně platí $FK \parallel CD \parallel LE$, přičemž $|FK| = |LE| = \frac{1}{2}|CD|$. A protože $|AB| = |CD|$, je $EKFL$ kosočtverec nebo čtverec. To ovšem znamená, že trojúhelník FEK je rovnoramenný

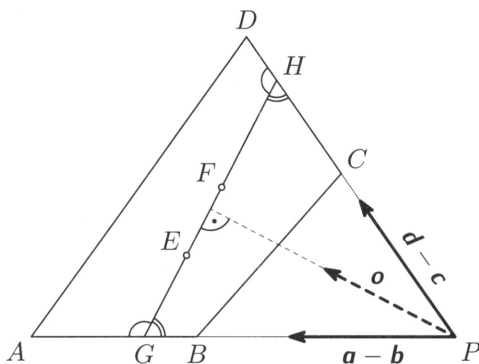


Obr. 72

(se základnou FE), přičemž z rovnoběžnosti příček v uvedených trojúhelnících plyne

$$|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle LFH| = |\sphericalangle LEG| = |\sphericalangle DHG|.$$

Jiné řešení. Za počátek soustavy souřadnic zvolme průsečík P přímek AB a CD (obr. 73). Polohové vektory bodů A, B, C, D označme postupně



Obr. 73

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Potom směrové vektory přímek AB , CD jsou $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{d} - \mathbf{c}$, a protože podle zadání mají stejnou velikost, směrový vektor osy úhlu mezi nimi je

$$\mathbf{o} = \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{d} - \mathbf{c})}{2}.$$

Středy E , F úhlopříček AC , BD mají polohové vektory $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$, $\mathbf{f} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$. Z rovnosti $|AB| = |CD|$ plyne

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 - (\mathbf{d} - \mathbf{c})^2 = ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) - (\mathbf{d} - \mathbf{c})) \cdot ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{d} - \mathbf{c})) = \\ &= 4 \left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{b} + \mathbf{d}}{2} \right) \cdot \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{d} - \mathbf{c})}{2} = 4(\mathbf{e} - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{o} \end{aligned}$$

(všechna uvedená násobení a druhé mocniny vektorů jsou *skalární* součiny). Osa úhlu sevřeného přímkami AB a CD je tedy kolmá na přímkou EF , takže trojúhelník GHP je rovnoramenný se základnou GH . Protože body A a D leží v téže polorovině určené přímkou GH , jsou úhly AGH a DHG shodné (buď jsou oba vnitřními úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku, anebo jsou jejich doplňky do 180°).

4. Podmínka v zadání je ekvivalentní s prostotou funkce

$$f(m) = m^{m-1} \bmod k$$

v oboru zbytkových tříd při dělení číslem k .

Pro $k = 2$ a $k = 3$ snadno zjistíme, že odpovídající funkce f prostá je.

Protože pro každé k pro příslušnou funkci f platí $f(1) = 1$ a $f(k) = 0$, je pro libovolné sudé $k > 2$

$$f(k-1) \equiv (k-1)^{k-2} \equiv (-1)^{k-2} \equiv 1 = f(1) \pmod{k},$$

takže funkce f pro taková k prostá není.

Jestliže se v rozkladu čísla k na prvočinitele vyskytuje liché prvočíslo p aspoň v druhé mocnině, je $q = k/p \geq p \geq 3$, a tudíž

$$f\left(\frac{k}{p}\right) \equiv \left(\frac{k}{p}\right)^{q-1} = k \cdot \frac{k}{p^2} \cdot \left(\frac{k}{p}\right)^{q-3} \equiv 0 = f(k) \pmod{k}.$$

Zbývá tedy vyšetřit lichá čísla $k > 4$, která nejsou dělitelná druhou mocninou žádného prvočísla. Všechny hodnoty

$$f(k), f(k-2), \dots, f(3), f(1)$$

jsou zbytky druhých mocnin přirozeného čísla při dělení číslem k , tzv. kvadratické zbytky. Kromě nich je kvadratickým zbytkem modulo k i $f(4) \equiv 4^3 = 8^2 \pmod{k}$. Našli jsme tak celkem $\frac{1}{2}(k+1) + 1$ kvadratických zbytků, ale různých kvadratických zbytků je nejvýše $\frac{1}{2}(k+1)$, neboť $a^2 \equiv (k-a)^2 \pmod{k}$. Aspoň dvě ze zmíněných hodnot funkce f musejí být proto stejné, takže ani pro taková k nemůže být funkce f prostá.

Úloze vyhovují jedině $k = 2$ a $k = 3$.

5. Danou podmínku můžeme přepsat do tvaru

$$x(x-4) + y(y-4) + z(z-4) = -9$$

a zkoumanou nerovnost zase na nápadně podobný tvar

$$x^2(x-4)^2 + y^2(y-4)^2 + z^2(z-4)^2 \geq 27.$$

Poslední nerovnost dostaneme z Cauchyovy nerovnosti $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ pro hodnoty $a = x(x-4)$, $b = y(y-4)$, $c = z(z-4)$. Rovnost v Cauchyově nerovnosti nastane, právě když

$$x(x-4) = y(y-4) = z(z-4),$$

což vzhledem k dané podmínce vede na rovnosti $(x-2)^2 = (y-2)^2 = (z-2)^2 = 1$. Řešením této soustavy je 8 uspořádaných trojic $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(1, 3, 3)$, $(3, 1, 3)$, $(3, 3, 1)$, $(3, 3, 3)$.

Jiné řešení. S využitím podmínky

$$x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z) \quad (1)$$

můžeme danou nerovnost ekvivalentně upravit na tvar

$$(x - 2)^4 + (y - 2)^4 + (z - 2)^4 \geq 3, \quad (2)$$

zatímco samotnou podmínku (1) přepíšeme na

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 3.$$

Vidíme tedy, že nerovnost (2) opět plyne z Cauchyovy nerovnosti $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, tentokrát pro hodnoty $a = (x - 2)^2$, $b = (y - 2)^2$, $c = (z - 2)^2$. Rovnost zřejmě nastane, právě když $(x - 2)^2 = (y - 2)^2 = (z - 2)^2 = 1$, což je stejná podmínka jako v prvním řešení.

6. Vyšetříme dva případy.

Pokud mají všechny tři rovnice jeden společný kořen x_1 , je

$$x_1^2 + ax_1 + b = 0, \quad (1)$$

$$x_1^2 + bx_1 + c = 0, \quad (2)$$

$$x_1^2 + cx_1 + a = 0. \quad (3)$$

Kombinací rovností (3) – (2) + $x_1((1) - (3))$ a následnou úpravou dostaneme

$$(a - c)(x_1^2 - x_1 + 1) = 0.$$

Odtud vzhledem k nenulovosti kvadratického trojčlenu $x_1^2 - x_1 + 1$ (má záporný diskriminant) plyne $a = c$. Cyklickou záměnou dostaneme $c = b = a$ a jedinou kvadratickou rovnici $x^2 + ax + a = 0$, která s ohledem na zadání musí mít dvojnásobný kořen. Pro její diskriminant tak platí $a^2 - 4a = a(a - 4) = 0$, proto je $a = b = c = 0$ nebo $a = b = c = 4$. Pro výraz $a^2 + b^2 + c^2$ tudíž dostáváme dvě možné hodnoty: 0 a 48.

Druhý případ, kdy první rovnice má kořeny x_1, x_2 , druhá x_2, x_3 a třetí x_1, x_3 (příčemž všechny tři kořeny jsou navzájem různé, jinak bychom měli předchozí případ) je o poznání komplikovanější.

Budeme zkoumat koeficienty mnohočlenu

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + c)(x^2 + cx + a), \quad (4)$$

o němž víme, že má tři dvojnásobné kořeny x_1, x_2, x_3 , a tedy tvar

$$(x^3 - px^2 + qx - r)^2. \quad (5)$$

Z Viètových vztahů pro původní mnohočleny navíc plyne

$$2p = 2(x_1 + x_2 + x_3) = -(a + b + c) = -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = -q. \quad (6)$$

Jestliže označíme $a + b + c = e$, $ab + bc + ca = f$, $abc = g$, dostaneme roznásobením totožných mnohočlenů (4) a (5) a porovnáním jejich koeficientů při mocninách x^5 , x^4 , x^3 a x^0 postupně

$$e = -2p, \quad e + f = p^2 - 4p, \quad e^2 - f + g = 4p^2 - 2r, \quad g = r^2. \quad (7)$$

Koeficienty při x^2 a x sice nejsou symetrické v proměnných a, b, c (a nedají se tedy vyjádřit pomocí e, f, g), ale jejich součet symetrický je, proto jejich porovnáním po úpravě dostaneme

$$f + ef - 3g = 4p^2 + 6pr. \quad (8)$$

Spojením (6), (7) a (8) dostáváme soustavu šesti rovnic o šesti neznámých p, q, r, e, f, g . Můžeme ji řešit různými způsoby. Například dosazením prvních dvou vztahů $q = -2p$ a $e = -2p$ do třetí rovnice dostaneme $f = p^2 - 2p$. Spolu s pátou rovnicí $g = r^2$ teď můžeme za neznámé q, e, f, g dosadit do čtvrté a šesté rovnice výrazy obsahující jen neznámé p a r . Po úpravě dostaneme dvě rovnice

$$(r + p)(r - p + 2) = 0, \quad 2p^3 - p^2 + 2p(3r + 1) + 3r^2 = 0.$$

Nyní stačí vyjádřit r z první rovnice a dosadit do druhé. Pro $r = -p$ tak dostaneme rovnici $p(p - 1)^2 = 0$, pro $r = p - 2$ rovnici $(p + 6)(p - 1)^2 = 0$.

Podobně by bylo $p \neq 1$, dostaneme v prvním případě $p = 0$ a také $q = r = 0$, což v (5) vede na mnohočlen x^6 , který zřejmě nevyhovuje. Podobně pro $p = -6$ vyjde $r = -8$, $q = 12$, takže v (5) dostaneme mnohočlen $(x + 2)^6$, který rovněž nevyhovuje. Zbývá tudíž poslední možnost $p = 1$, odkud $q = -2$, $r = -1$, a mnohočlen v (5) má tvar

$$(x^3 - x^2 - 2x + 1)^2. \quad (9)$$

Snadno nahlédneme, že mnohočlen $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ opravdu má tři různé reálné kořeny, protože $p(-2) < 0$, $p(-1) > 0$, $p(0) > 0$,

$p(1) < 0, p(2) > 0$. Už jen dopočítáme $e = -2, f = -1, g = 1, a^2 + b^2 + c^2 = e^2 - 2f = 6$.

Odpoověď. Uvedený výraz může nabývat hodnot 0, 6 a 48.

Poznámka. Pro úplné řešení bychom měli ještě ověřit, že k trojici kořenů (x_1, x_2, x_3) mnohočlenu (9) skutečně přísluší tři kvadratické rovnice s koeficienty jako v zadání. Jednou z možností, jak to udělat, je ukázat, že příslušné koeficienty a, b, c (které jsou podle Viètových vztahů kořeny mnohočlenu $x^3 - ex^2 + fx - g$) po dosazení do (4) dají mnohočlen identický s (5). Protože koeficient při x^6 je zřejmě stejný a rovnost koeficientů při x^5, x^4, x^3, x^0 plyne z toho, že p, q, r, e, f, g splňují (7), stačí ukázat rovnost koeficientů při x^2 a x . Na základě rovnosti (8) však víme, že součet koeficientů při x^2 a x je stejný.

7. Krajní hodnoty 0 a n zřejmě nesmažeme nikdy. Kromě toho snadno ověříme, že

$$g(1) = g(2) = 2, \quad g(3) = 3, \quad g(4) = 2.$$

Technika mazání použitá pro $n = 4$ se dá snadno rozšířit na všechna n tvaru $n = 2^a$ (stručně řečeno, nejprve smažeme všechna lichá čísla jako aritmetický průměr dvou sousedních sudých čísel, zbylá sudá čísla si představíme jako dvojnásobky čísel od 1 do 2^{a-1} a smažeme všechny dvojnásobky lichých čísel atd.), proto je $g(2^a) = 2$ pro všechna přirozená čísla a .

Mějme nyní n , které není mocninou dvou, takže $2^a < n < 2^{a+1}$ pro nějaké přirozené a . Představme si, že i v tomto případě nakonec zůstala na tabuli jen dvě čísla (nepochybně 0 a n). Při zpětné rekonstrukci (přidáváme aritmetický průměr některých dvou čísel, která na tabuli zůstala) dokážeme přidat vždy jen čísla tvaru $tn/2^k$, kde t a $k \geq 1$ jsou přirozená čísla. Takto však nikdy nevznikne číslo 1, protože není-li číslo n mocninou dvou, nemůže jí být ani žádný jeho násobek. To je spor.

Naopak pro libovolné takové n dokážeme postupně smazat čísla $n - 1, n - 2, \dots, 2^a + 1$ (číslo $n - i$ je aritmetickým průměrem čísel n a $n - 2i$; pokud $n = 2^a + 1$, mažeme pochopitelně prázdnou množinu), načež už popsaným způsobem smažeme všechna čísla mezi 0 a 2^a . Na tabuli tak zůstanou jen tři čísla 0, $2^a, n$. Proto není-li n mocninou dvojky, je $g(n) = 3$.

8. Ukážeme příklad obarvení desky $k \times k$ (pro liché $k \geq 5$) třemi nesouvislými barvami 1, 2 a 3.

Nejprve obarvíme políčko $(2, k)$ barvou 1 a políčko $(3, 1)$ barvou 2. Na desce zřejmě existují právě čtyři políčka $(2, 1), (2, 2), (3, k - 1)$ a $(3, k)$,

která jsou dosažitelná tahem dámy z obou zvolených polí zároveň (stačí si uvědomit, že při běžném černobílém obarvení polí mají při lichém k obě zvolená pole různou barvu). Uvedená čtyři políčka tedy obarvíme třetí barvou, zatímco všechna ostatní políčka dosažitelná dámou z $(2, k)$ dostanou barvu 2 a naopak políčka dosažitelná dámou z $(3, 1)$ barvu 1. Tím jsme obarvili všechna políčka dosažitelná jedním tahem dámy z políček $(2, k)$ nebo $(3, 1)$, přičemž ani jedna ze tří barev není souvislá. (Následující tabulka znázorňuje popsanou situaci pro $k = 9$.)

2	1	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3						
	2	1	2					1
	2	1		2			1	
	2	1			2	1		
	2	1			1	2		
1	2	1		1			2	
	3	1	1					2
1	3	2	1	1	1	1	1	1

Obarvíme-li dosud neobarvená políčka desky libovolně barvami 1 a 2, zůstanou políčka $(2, k)$ a $(3, 1)$ izolována od ostatních políček své barvy.

Dokážeme nyní, že při libovolném obarvení libovolné desky $k \times m$ dvěma barvami bude jedna z barev souvislá. Případy $k = 1$ nebo $m = 1$ jsou jistě triviální. Budeme proto předpokládat, že $k \geq m \geq 2$. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí vzhledem k součtu $k + m$.

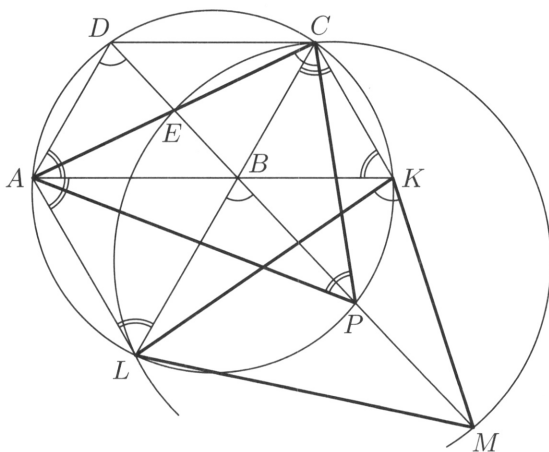
Předpokládejme, že uvedené tvrzení platí pro libovolnou desku $k' \times m'$ splňující $k' + m' < k + m$. Uvažujme libovolné obarvení desky S s rozměry $k \times m$ dvěma barvami, např. červenou a modrou, a označme S_1, S_2 , resp. S_3 desky, které dostaneme z S odstraněním prvního sloupce, posledního sloupce, resp. posledního řádku. Podle indukčního předpokladu je na každé ze tří desek S_1, S_2, S_3 aspoň jedna ze dvou barev souvislá. Nechť S_i, S_j jsou ty dvě z nich, jež mají souvislou stejnou barvu, např. červenou, a označme dále $A_0 = S_i \cap S_j$, $A_1 = S_j \setminus S_i$ a $A_2 = S_i \setminus S_j$.

Pokud je deska A_0 už jednobarevná, je zřejmě její barva souvislá i na celé desce S . Předpokládejme tedy, že v A_0 existuje červené políčko. V takovém případě je ovšem červená barva souvislá v množině $S_i \cup S_j$. Připomeňme, že $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cup S_3 = S \setminus \{(1, m)\}$, $S_2 \cup S_3 = S \setminus \{(k, m)\}$. Pokud $\{i, j\} = \{1, 2\}$, jsme hotovi. Pokud např. $\{i, j\} = \{1, 3\}$ (obě zbylé možnosti jsou zřejmě symetrické), nebude červená barva souvislá v celé S ,

jedině když políčko $(1, m)$ bude červené a všechna políčka v $A_1 \cup A_2 \subset S_i \cup S_j$ naopak budou modrá. Pak je ovšem modrá barva souvislá v S . Tím je důkaz indukčního kroku hotov.

Odpověď. Hledané největší číslo je $n = 2$.

9. Protože $AK \parallel CD$, je $AKCD$ rovnoramenný lichoběžník, takže trojúhelník BKC je rovnostranný (obr. 74). Podobně je rovnostranný i trojúhelník BLA . Oba trojúhelníky jsou tak souměrné podle osy úhlu CBK , odkud plyne rovnost $|AC| = |LK|$. Zároveň z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou AC máme $|\sphericalangle APC| = 60^\circ$.



Obr. 74

Bod B leží na chordále obou kružnic, proto platí

$$|AB| \cdot |BK| = |DB| \cdot |BP| = |LB| \cdot |BC| = |EB| \cdot |BM|.$$

Uvažujme proto zobrazení $\varkappa$, které vznikne složením kruhové inverze podle kružnice se středem B a poloměrem $\sqrt{|LB| \cdot |BC|}$ a středové souměrnosti s tímž středem B . V tomto zobrazení si vzájemně odpovídají dvojice bodů A, K, C, L, D, P a E, M .

Jednou z vlastností kruhové inverze je, že přímku neprocházející středem inverze zobrazí na kružnici středem inverze procházející (stejnou vlastnost zřejmě má i složené zobrazení $\varkappa$). Z toho plyne, že obrazem přímky obsahující body A, E, C v zobrazení $\varkappa$ je kružnice opsaná trojúhelníku LMK a procházející bodem B , tudíž čtyřúhelník $BLMK$ je

tětivový. Proto

$$|\sphericalangle KML| = 180^\circ - |\sphericalangle KBL| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = |\sphericalangle APC|$$

a navíc (obr. 74)

$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle LBM| = |\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle ACP|.$$

Trojúhelníky APC , LMK jsou tedy podobné, a protože (jak jsme už ukázali) $|AC| = |LK|$, jsou i shodné. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

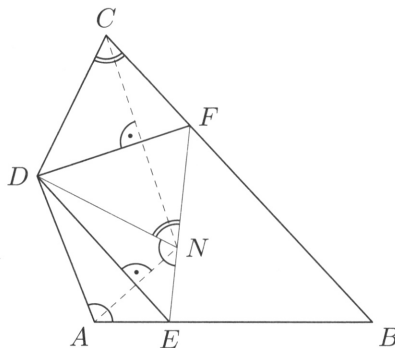
10. Jestliže N je obraz bodu A v osové souměrnosti podle DE (obr. 75), potom

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CDN| &= |\sphericalangle CDA| - |\sphericalangle ADN| = \\ &= 2|\sphericalangle EDF| - 2|\sphericalangle EDN| = 2|\sphericalangle FDN| \end{aligned}$$

a $|ND| = |AD| = |CD|$. Bod N je tudíž zároveň obrazem bodu C v osové souměrnosti podle DF . Ze shodnosti dvojic trojúhelníků ADE , NDE a CDF , NDF , jež si v uvedených osových souměrnostech vzájemně odpovídají, plyne

$$|\sphericalangle END| + |\sphericalangle DNF| = |\sphericalangle EAD| + |\sphericalangle DCF| = 180^\circ,$$

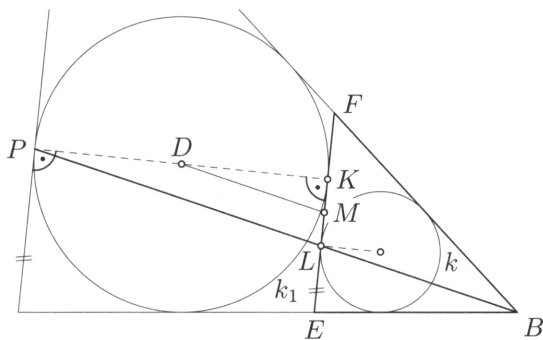
proto bod N leží na úsečce EF .



Obr. 75

Uvědomme si ještě, že přímka EF je v souměrnosti podle DE obrazem přímky AB a v souměrnosti podle DF obrazem přímky BC . Bod D má

proto od uvedených tří přímek stejnou vzdálenost, a je tedy středem kružnice k_1 připsané straně EF trojúhelníku BEF (obr. 76), a bod K je tudíž bodem dotyku připsané kružnice se stranou EF .



Obr. 76

Jak známo, body dotyku vepsané a připsané kružnice jsou souměrně sdruženy podle středu příslušné strany trojúhelníku, proto je bod L bodem dotyku kružnice k vepsané trojúhelníku BEF .

Označme P obraz bodu L ve stejnoolehlosti se středem v bodě B , která převádí kružnici k vepsanou trojúhelníku BEF na připsanou kružnici k_1 . Pak je zřejmě PK průměrem kružnice k_1 a DM střední příčkou trojúhelníku PLK . Tím je rovnoběžnost přímek DM a BL dokázána.

11. Jestliže je dvojice (m, n) řešením, jsou řešením i symetrické dvojice (n, m) , $(-m, -n)$ a $(-n, -m)$. Pro $n = 0$ dostaneme rovnici $m^4 = m^2$ s řešeními $m \in \{-1, 0, 1\}$. Ze symetrie tak plyne, že řešením dané rovnice je pět dvojic

$$(n, m) \in \{(0, -1), (-1, 0), (0, 0), (0, 1), (1, 0)\}.$$

Uvědomme si, že pro kladná m i n je levá strana řádově větší než strana pravá. V takovém případě, jak hned ukážeme, žádné řešení neexistuje:

Bez újmy na obecnosti nechť $0 < n \leq m$. Z dané rovnice ovšem plyne

$$\begin{aligned} (m+1)^4 &\leq (m+n)^4 = m^2 n^2 + (m+n)^2 + 4mn \leq m^4 + 8m^2, \\ 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 &\leq 8m^2, \\ 2m^2(2m-1) + 4m + 1 &\leq 0, \end{aligned}$$

což zřejmě nemůže platit pro žádné přirozené číslo m . Řešením tedy není žádná dvojice kladných čísel (a ze symetrie) ani žádná dvojice záporných čísel.

Bez újmy na obecnosti dále předpokládejme, že $n = -k$ je záporné a $0 < k \leq m$. Z dané rovnice pak máme

$$\begin{aligned}(m-k)^4 - m^2 k^2 &= m^2 + k^2 - 6mk, \\ (m^2 - mk + k^2)(m^2 - 3mk + k^2) &= m^2 - 6mk + k^2, \\ (m^2 - mk + k^2)(m^2 - 3mk + k^2 - 1) &= -5mk\end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$m^2 - mk + k^2 \mid 5mk.$$

Označme $d = (m, k)$ největší společný dělitel čísel m a k a nechť $k = da$, $m = db$, kde a, b jsou dvě kladná nesoudělná čísla. Je tedy

$$b^2 - ba + a^2 \mid 5ba.$$

Zároveň je však zřejmé, že číslo $b^2 - ba + a^2$ je nesoudělné jak s a , tak s b , proto je nesoudělné i se součinem ab obou nesoudělných čísel. Pro kladné číslo $b^2 - ba + a^2$ tak máme jen dvě možné hodnoty: 1 nebo 5.

Jestliže $b^2 - ba + a^2 = 1$, má odpovídající kvadratická rovnice s neznámou a diskriminant $4 - 3b^2$, který je čtvercem přirozeného čísla jedině pro $b = 1$, takže $a = 1$ a $n = -m$. Dosazením do dané rovnice získáme další dvě řešení

$$(n, m) \in \{(2, -2), (-2, 2)\}.$$

Jestliže $b^2 - ba + a^2 = 5$, příslušný diskriminant $20 - 3b^2$ není čtvercem přirozeného čísla nikdy. Daná rovnice tedy nemá žádná další celočíselná řešení.

12. Snadno nahlédneme, že musí být $x \geq 2$ a $y + z \geq 1$. Uvažujme danou rovnici modulo 4, dostaneme tak $1 \equiv (-1)^y \pmod{4}$, proto y musí být sudé. Pokud je $y > 0$, je $(-1)^x + 2 \equiv 0 \pmod{3}$, takže x musí být sudé. Podobně je-li $z > 0$, máme $2^x - 1 \equiv 0 \pmod{5}$, což pro x znamená dělitelnost čtyřmi. Ovšem aspoň jedno z čísel y, z je kladné, proto x musí být v každém případě sudé.

Nechť $x = 2t$ a $y = 2u$. Protože $2009 = 7^2 \cdot 41$, je

$$2^x + 2009 \equiv 2^x \pmod{7},$$

zatímco pro liché z platí

$$3^y 5^z \equiv 9^u (-2)^z \in \{3, 5, 6\} \pmod{7}.$$

Proto musí být i z sudé, $z = 2v$. Rovnici nyní můžeme přepsat do tvaru

$$7^2 \cdot 41 = 2\,009 = (3^u 5^v - 2^t)(3^u 5^v + 2^t).$$

Zřejmě existuje jen jedna dvojice čísel, jejichž součin je 2 009 a rozdíl je mocninou dvou: 41 a 49. Odtud plyne, že daná rovnice má v oboru nezáporných celých čísel jediné řešení

$$x = 4, \quad y = 4, \quad z = 2.$$

Středoevropská olympiáda v informatice se v letošním roce konala ve dnech 8.–14. 7. 2009 v rumunském městě Targu Mures. Ke klasickému zastoupení sedmi středoevropských států se jako hosté soutěže přidala navíc družstva Švýcarska, Moldávie, USA a Srbska. Celkem soutěžilo 44 studentů z 11 zemí a navíc se akce zúčastnilo 13 místních rumunských studentů mimo oficiální soutěž.



Reprezentační družstvo České republiky bylo sestaveno na základě výsledků dosažených soutěžícími v ústředním kole 58. ročníku Matematické olympiády — kategorie P. Celosvětové soutěže IOI 2009 v Bulharsku se zúčastní čtyři nejlepší studenti. Jako obvykle pro účast na CEOI 2009 byli vybráni další čtyři nejlepší studenti, kteří ještě nejsou v maturitním ročníku. Mohli tak získat zkušenosti, aby úspěšně reprezentovali Českou republiku na IOI v příštím roce. Letos se CEOI zúčastnili následující studenti:

Petr Čermák, student Gymnázia v Kladně,

Lukáš Kripner, student Gymnázia T. G. Masaryka v Litvínově,

Martin Patera, student Gymnázia Arabská v Praze,

Jan Polášek, student Gymnázia v Turnově.

Vedoucími české delegace byli jmenováni Mgr. *Petr Škoda* a Bc. *Jan Bulánek*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Již tradičně se účastníci připravovali na olympiádu na týdenním soustředěním CPSPC (Czech-Polish-Slovak Preparation Camp). Akci tentokrát připravili polští organizátoři a účastnili se jí vybraní studenti všech tří zemí.

Soutěž probíhala jak je obvyklé během dvou soutěžních dnů. V každém dni soutěžící řešili tři úlohy, na které měli celkem pět hodin. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat programy a odesílat je k vyhodnocení. Výsledné programy jsou testovány pomocí připravené sady testovacích dat a se stanovenými časovými limity. Tím je zajištěna

nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší testy. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů.

V letošním roce organizátoři připravili velmi hezké a originální, ale také těžké úlohy. Úlohy jsou vždy večer před soutěží přeloženy do mateřského jazyka studentů a čeští studenti tedy dostali jak anglickou, tak i českou verzi zadání úloh. Soutěž proběhla bez větších problémů.

Kromě soutěže je pro účastníky CEOI také připravován doprovodný program. Letos jeli účastníci na prohlídku středověkého městečka Sighisoara, navštívili solné jeskyně Praid a prošli se po lázních Sovata.

Poslední den proběhlo slavnostní zakončení soutěže s vyhlášením výsledků. Každá ze soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkově bylo teoreticky možné získat až 600 bodů. Vítězem se stal Američan *Wu Neal*, který dosáhl výsledku 400 bodů. Podle pravidel CEOI obdrží na závěr soutěže lepší polovina účastníků některou z medailí, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se udělují přibližně v poměru 1 : 2 : 3 (pochopitelně s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili). Letos byly uděleny 3 zlaté, 10 stříbrných a 15 bronzových medailí. Další zlaté medaile získali soutěžící z Chorvatska a Polska. Středoevropská olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlášeno.

Žádný z našich reprezentantů letos medaili nezískal. Naši studenti dosáhli následujících výsledků:

32. Petr Čermák	80 bodů
40.-42. Lukáš Kripner	20 bodů
40.-42. Martin Patera	20 bodů
43. Jan Polášek	10 bodů

Veškeré informace o soutěži, texty soutěžních úloh i podrobné výsledky všech medailistů lze nalézt na adrese www.ceoi2009.ro. Příští 17. ročník CEOI se bude konat v Košicích na Slovensku.

21. mezinárodní olympiáda v informatice

Dvacátý první ročník Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2009 se konal ve dnech 8.–15. 8. 2009 v bulharském Plovdivu. Záštitu nad soutěží převzal osobně bulharský prezident Georgi Parvanov, který se také zúčastnil slavnostního zahájení společně s ministryni školství, mládeže a vědy, paní Jordankou Fandakovou a s dalšími významnými hosty.

Na olympiádu do Bulharska přijely delegace z 82 zemí celého světa. Z každé země se olympiády mohou zúčastnit čtyři soutěžící a dva vedoucí, celkově letos soutěžilo 312 studentů. České družstvo bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola 58. ročníku Matematické olympiády — kategorie P a bylo tvořeno těmito studenty:

Vlastimil Dort, student gymnázia Špitálská v Praze,
Hynek Jemelík, student gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně,
David Klačka, student gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně,
Karel Tesař, student VOŠ a SPŠE v Plzni.

Vedoucími české delegace byli doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc., a Mgr. *Zdeněk Dvořák*, Ph.D., oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Již tradičně se naši účastníci připravovali na olympiádu společně s reprezentanty vybranými pro CEOI (Středoevropská olympiáda v informatice) na týdenním soustředěním CPSPC (Czech-Polish-Slovak Preparation Camp). Přípravné soustředění letos uspořádali polští organizátoři a zúčastnili se ho vybraní studenti ze všech tří zemí.

Během prvního dne pobytu v Bulharsku proběhlo slavnostní zahájení soutěže a studenti měli také příležitost seznámit se podrobně s počítači a se softwarovým prostředím, ve kterém budou pracovat při soutěži. Vlastní soutěž se konala jako obvykle ve dvou dnech, oddělených jedním dnem odpočinku. Po druhém soutěžním dnu následoval jeden den věnovaný výletu k moři a v závěrečném dni pobytu se uskutečnilo vyhlášení výsledků v historických prostorách antického amfiteátru.



Soutěž probíhá podobným způsobem jako praktická část ústředního kola naší Matematické olympiády — kategorie P. Každý soutěžící má přidělen osobní počítač, na kterém řeší zadané úlohy. V každém dni má na práci vymezen čas 5 hodin. Úlohy je třeba dovést až do tvaru odladěného programu, hotové programy se odevzdávají k vyhodnocení prostřednictvím soutěžního prostředí. Odevzdané programy se testují pomocí předem připravené sady testovacích dat. Prováděné testy jsou navíc omezeny časovými limity, aby se kromě otestování správnosti odlišila i časová efektivita algoritmu použitého jednotlivými účastníky soutěže. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky zcela správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší testy. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů.

Úlohy bývají tradičně dost náročné a stávalo se, že řada účastníků nevyřešila správně ani jednu z nich. Novinkou letošního ročníku proto bylo přidání navíc jedné výrazně lehčí úlohy v každém soutěžním dnu. V každém dnu byly tedy zadány nikoliv tři jako dříve, ale čtyři úlohy. Tyto přidané snadnější úlohy byly vyhodnocovány ve zvláštním režimu „s plnou odezvou“ ihned v průběhu soutěže. Jedná se o podobný systém, jaký používáme od loňska u nás v kategorii P pro praktické úlohy domácího kola. Krátce po odevzdání vypracovaného programu do vyhodnocovacího systému se soutěžící dozví hodnocení svého řešení a má pak ještě možnost řešení opravit a odevzdat řešení téže úlohy opakovaně vícekrát. Soutěžící z programátorsky méně vyspělých zemí tak dostali velmi reálnou šanci vyřešit každý den aspoň některou úlohu, zatímco pro ty nejlepší nepředstavovala přidaná úloha žádné velké zdržení a mohli se pak věnovat ostatním, náročnějším problémům.

Každá z osmi soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkově bylo možné získat až 800 bodů. To se ovšem nikomu nepodařilo, vítěz soutěže Genadii Karatzkevitch z Běloruska dosáhl výsledku 743 bodů. Na základě přesně stanovených pravidel se na IOI podle dosažených bodů rozdělují medaile. Některou z medailí obdrží nejvýše polovina účastníků soutěže, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se udělují přibližně v poměru 1 : 2 : 3 (s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili). Na letošní IOI bylo rozděleno celkem 26 zlatých, 50 stříbrných a 73 bronzových medailí. Výsledky našich soutěžících shrnuje následující tabulka.

Mezinárodní olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců a žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno. Podle dosažených vý-

73. David Klaška	497 bodů	stříbrná medaile
94. Vlastimil Dort	458 bodů	bronzová medaile
140. Hynek Jemelík	403 bodů	bronzová medaile
260. Karel Tesař	179 bodů	–

sledků bychom se ale jistě umístili v lepší polovině. Nejúspěšnějšími zeměmi byly letos Čína a Korea se třemi zlatými medailemi.

Všechny podrobnosti o soutěži, texty soutěžních úloh i jejich řešení a celkové výsledky lze nalézt na adrese <http://www.ioi2009.org>. Příští ročníky IOI se budou konat v Kanadě (2010), Thajsku (2011), Itálii (2012) a Austrálii (2013). Pořadatelé IOI 2010 z Kanady na místě pozvali všechny delegace zúčastněné na IOI 2009, aby se zúčastnily také následujícího ročníku soutěže.

Texty soutěžních úloh

1. Lukostřelba

Turnaj v lukostřelbě má následující pravidla. Do řady se postaví N terčů, očíslovaných zleva doprava od 1 do N . Soutěží $2N$ lukostřelců. V každém kole turnaje se u každého terče utkají dva lukostřelci. Po skončení kola se lukostřelci přesunou tímto způsobem:

- ▷ Vítězi na tercích 2 až N včetně se posunou o jeden terč doleva (tj. k terčům 1 až $N - 1$).
- ▷ Poražení na tercích 2 až N včetně a vítěz na terči 1 zůstávají u stejného terče.
- ▷ Poražený na terči 1 se přesune k terči N .

Turnaj trvá R kol. Počet kol je větší nebo roven počtu lučištníků (tj. $R \geq 2N$).

Jste jediný účastník, který dorazil přesně na čas, nebo možná dokonce o pár minut pozdě (jako obvykle). Zbýlých $2N - 1$ lučištníků zde už je a jsou seřazeni v pořadí, ve kterém nastoupí k terčům. Zbývá se již jen mezi ně někam zařadit, a turnaj může začít — dva nejlevější lučištníci nastoupí k terči 1, následující dva k terči 2, a tak dále, až dva nejpravější lučištníci nastoupí k terči N .

Všichni lučištníci včetně vás jsou oznámkováni dle dovednosti (jako ve škole, tj. lučištník s nižší známkou je dovednější). Žádní dva lučištníci nejsou stejně dovední, a když spolu soutěží, ten s nižší známkou vždy zvítězí.

Znáte známky všech soutěžících a chtěli byste se mezi ně zařadit tak, abyste skončili u terče s co nejmenším číslem. Je-li více možností, jak toho dosáhnout, vyberte tu, kde začínáte na terči s největším možným číslem.

Úloha: Napište program, který načte známky všech lučištníků včetně vás a počáteční pořadí vašich soupeřů a určí pozici, na niž byste se měli zařadit, splňující výše popsané podmínky.

Omezení:

$1 \leq N \leq 200\,000$ počet terčů, roven též polovině počtu lučištníků
 $2N \leq R \leq 1\,000\,000\,000$ počet kol turnaje
 $1 \leq S_k \leq 2N$ známka lučištníku k

Vstup: Váš program musí načíst ze standardního vstupu následující data:

- ▷ První řádek obsahuje dvě přirozená čísla N a R , oddělená mezerou.
- ▷ Následujících $2N$ řádků obsahuje známky lučištníků. První z těchto řádků obsahuje vaši známku. Zbytek z nich obsahuje známky vašich soupeřů v pořadí, v němž jsou seřazeni (zleva doprava). Každý z těchto $2N$ řádků obsahuje jedno přirozené číslo v rozsahu od 1 do $2N$. Zámka 1 je nejlepší a známka $2N$ je nejhorší. Žádní dva lučištníci nemají stejnou známku.

Výstup: Váš program musí na standardní výstup vypsát jediný řádek obsahující jedno přirozené číslo v rozsahu od 1 do N včetně: číslo terče, na kterém budete v turnaji začínat.

Hodnocení: Pro některé ze vstupů bude N menší nebo rovno 5 000. Za tyto vstupy můžete získat až 60 bodů. Pro některé z těchto vstupů navíc bude N menší nebo rovno 200 a za tyto vstupy lze získat až 20 bodů.

Příklady:

<i>Vstup</i>	<i>Výstup</i>
4 8	3
7	
4	
2	
6	
5	
8	
1	
3	

Jste druhý nejhorší lukostřelec. Začnete-li na prvním terči, prohra-
jete a přesunete se na terč 4 a tam zůstanete až do konce. Podobně,
začnete-li na terči 2 či 4, zůstanete na něm až do konce. Začnete-li na
terči 3, porazíte nejhoršího lukostřelce, posunete se na terč 2 a tam zů-
stanete.

<i>Vstup</i>	<i>Výstup</i>
4 9	2
2	
1	
5	
8	
3	
4	
7	
6	

Jste druhý nejlepší lukostřelec. Nejlepší je již na prvním terči a zů-
stane tam až do konce. Kdekoliv začnete, budete se v každém kole posu-
novat o jeden terč doleva, až dorazíte k prvnímu terči. Zde prohrajete,
přesunete se k čtvrtému terči, a opět se začnete přesunovat doleva. Abyste
po 9 kolech byli na terči 1, musíte začít na terči 2.

2. Stavba

Potřebujete najmout dělníky na stavbu. Máte N zájemců, očíslova-
ných od 1 do N . V případě, že zaměstnáte zájemce číslo k , budete mu
muset platit alespoň S_k korun. Navíc, zájemce číslo k má úroveň kvalifi-
kace Q_k . Odbory vyžadují, aby platy byly přímo úměrné úrovni kvalifi-
kace. Zaměstnáte-li například zájemce A a B takové, že $Q_A = 3Q_B$, pak
budete muset dělníkovi A platit přesně třikrát tolik, co dělníkovi B . Platy
mohou být i neceločíselné a dokonce je ani nemusí být možné vyjádřit
v desítkové soustavě konečným počtem číslic; je tedy možné dělníkovi
platit například třetinu či šestinu koruny.

Máte k dispozici W korun a chtěli byste najmout co nejvíc dělníků.
Je jen na vás, koho najmete a kolik mu budete platit, ale musíte dodržet
jak požadavky na minimální platy, tak omezení odborů. Všem vybraným
dělníkům samozřejmě nemůžete dohromady platit více než W korun.

Vzhledem k tomu, že tito dělníci stejně budou jen nosit cihly, jejich
kvalifikace pro vás není důležitá a snažíte se pouze maximalizovat počet
najatých dělníků. Existuje-li více než jedna možnost, jak tohoto maximál-
ního počtu dosáhnout, preferujete tu, v níž platíte dělníkům dohromady

nejméně peněz. Pokud existuje více možností, jak splnit tyto podmínky, zvolte jednu libovolnou z nich.

Úloha: Napište program, který načte požadavky na minimální mzdy a úroveň kvalifikace dělníků a částku, kterou disponujete, a určí, které dělníky máte najmout. Musíte najmout co nejvíce dělníků, a to tak, abyste přitom utratili co nejméně peněz a zároveň splnili výše popsané omezení odborů.

Omezení:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| $1 \leq N \leq 500\,000$ | počet zájemců |
| $1 \leq S_k \leq 20\,000$ | minimální mzda požadovaná zájemcem číslo k |
| $1 \leq Q_k \leq 20\,000$ | úroveň kvalifikace zájemce číslo k |
| $1 \leq W \leq 10\,000\,000\,000$ | částka, již disponujete |

Důležité upozornění: Největší možná hodnota W se nevejde do 32 bitů, musíte proto pro její reprezentaci použít 64-bitový datový typ, například `long long` v C/C++ či `int64` v Pascalu.

Vstup: Váš program musí načíst následující data ze standardního vstupu:

- ▷ První řádek obsahuje dvě přirozená čísla N a W , oddělená mezerou.
- ▷ Následujících N řádků popisuje zájemce. Na k -tém z těchto řádků se nachází dvě přirozená čísla S_k a Q_k oddělená mezerou.

Výstup: Váš program musí vypsát na standardní výstup následující data:

- ▷ První řádek musí obsahovat právě jedno přirozené číslo H , počet dělníků, které najmete.
- ▷ Následujících H řádků musí obsahovat čísla dělníků, které jste se rozhodli zaměstnat. Každý z těchto řádků musí obsahovat jedno přirozené číslo mezi 1 a N . Tato čísla musí být navzájem různá. Jejich pořadí může být libovolné.

Hodnocení: Za daný vstup obdržíte plný počet bodů, jestliže vaše volba dělníků splňuje všechna omezení, maximalizuje jejich počet a minimalizuje součet jejich platů. Jestliže váš výstup bude mít správný první řádek (tj. určíte správně hodnotu H), ale zbytek nebude splňovat podmínky zadání, obdržíte 50 % bodů. Stejně budete hodnoceni i v případě, že zbytek výstupu nebude správně naformátován.

V několika z testovacích vstupů bude N nanejvýš 5 000. Celkově za tyto vstupy můžete získat až 50 bodů.

Příklady:

<i>Vstup</i>	<i>Výstup</i>
4 100	2
5 1000	2
10 100	3
8 10	
20 1	

Jediný způsob, jak si můžete dovolit najmout dva dělníky, je zaměstnat zájemce 2 a 3. Zájemci 2 zaplatíte 80 korun a zájemci 3 zaplatíte 8 korun. Celkově zaplacená částka bude menší než 100 korun, které máte k dispozici.

<i>Vstup</i>	<i>Výstup</i>
3 4	3
1 2	1
1 3	2
1 3	3

Zde si můžete dovolit zaměstnat všechny tři zájemce. Prvnímu z nich zaplatíte 1 korunu a zbylým dvěma 1 korunu a 50 haléřů. Dohromady jim tedy budete platit 4 koruny, což přesně odpovídá vašemu rozpočtu.

<i>Vstup</i>	<i>Výstup</i>
3 40	2
10 1	2
10 2	3
10 3	

Zde si nemůžete dovolit zaměstnat všechny tři zájemce, jelikož by vás to stálo 60 korun. Nicméně můžete najmout libovolné dva z nich. Vyberete si zájemce 2 a 3, jelikož na této kombinaci utratíte nejméně. Stačí vám dělníkovi 2 platit 10 korun a dělníkovi 3 platit 15 korun, dohromady tedy utratíte 25 korun. Oproti tomu, jestliže byste zaměstnali zájemce 1 a 2, museli byste jim platit 10 a 20 korun, a jestliže byste zaměstnali zájemce 1 a 3, platili byste jim 10 a 30 korun.

3. POI (úloha s úplnou odezvou)

Místní Plovdivská olympiáda v informatice (POI) má následující neobvyklá pravidla. Soutěží v ní N účastníků a mají za úkol řešit T soutěžních úloh. Každé odevzdané řešení úlohy je testováno s jedinými vstupními daty, takže za každou úlohu získá každý soutěžící buď plný počet bodů, nebo nic. Žádné částečné hodnocení neexistuje.

Počet bodů přidělených za správně vyřešenou úlohu se stanoví až po skončení soutěže a je roven počtu soutěžících, kteří tuto úlohu nevy-

řešili. Výsledné hodnocení soutěžícího je stanoveno jako součet bodů, které soutěžící získal za všechny jím vyřešené úlohy.

Filip se zúčastnil soutěže, ale je zmaten složitými pravidly bodování a nedokáže určit svoje umístění v celkovém pořadí POI. Pomozte Filipovi a napište mu program, který určí jeho celkové hodnocení a výsledné umístění v soutěži.

Před zahájením soutěže obdrželi účastníci jednoznačná identifikační čísla od 1 do N . Filip má číslo P . Ve výsledkové listině jsou soutěžící uspořádáni sestupně podle počtu získaných bodů. V případě shody bodů je ve výsledkové listině umístěn dříve ten soutěžící, který vyřešil více úloh. Pokud nerozhodne ani toto kritérium, soutěžící se stejnými výsledky budou uspořádáni vzestupně podle svých identifikačních čísel.

Úloha: Napište program, který určí Filipovo výsledné hodnocení a jeho pořadí ve výsledkové listině na základě informací, který soutěžící vyřešil kterou úlohu.

Omezení:

$1 \leq N \leq 2000$	počet účastníků soutěže
$1 \leq T \leq 2000$	počet řešených úloh
$1 \leq P \leq N$	Filipovo identifikační číslo

Vstup: Váš program musí přečíst ze standardního vstupu následující údaje:

- ▷ První řádek obsahuje tři celá čísla N , T , P oddělená vždy jednou mezerou.
- ▷ Dalších N řádků popisuje, které úlohy vyřešil který soutěžící. V pořadí k -tý z těchto řádků určuje, které úlohy vyřešil soutěžící s identifikačním číslem k . Každý takový řádek obsahuje T celých čísel oddělených mezerami. První z čísel na řádku udává, zda soutěžící k vyřešil první úlohu, druhé určuje, zda vyřešil druhou úlohu, atd. Každé z těchto T čísel je rovno 0 nebo 1, přičemž 1 znamená vyřešenou úlohu a 0 znamená nevyřešenou úlohu.

Výstup: Váš program musí zapsat na standardní výstup jediný řádek, který obsahuje dvě celá čísla oddělená jednou mezerou. První z nich představuje výsledný počet bodů, které Filip získal v soutěži. Druhé z čísel na výstupu určuje Filipovo pořadí ve výsledkové listině. Je to číslo z rozmezí od 1 do N , kde 1 znamená umístění na prvním místě (tj. soutěžící, který dosáhl nejvyššího bodového hodnocení) a N umístění na posledním místě (tj. soutěžící s nejnižším hodnocením).

Hodnocení: V testovacích datech odpovídajících celkovému ohodnocení 35 body nebude mít žádný soutěžící v POI stejný výsledný počet bodů jako Filip.

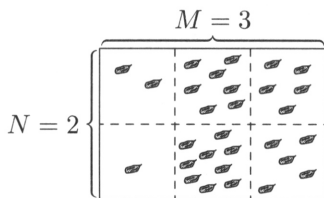
Příklad:

<i>Vstup</i>	<i>Výstup</i>
5 3 2	3 2
0 0 1	
1 1 0	
1 0 0	
1 1 0	
1 1 0	

První úlohu nevyřešil jediný soutěžící, takže bude hodnocena 1 bodem. Druhou úlohu nevyřešili dva soutěžící, bude tedy hodnocena 2 body. Třetí úlohu nevyřešili čtyři soutěžící, takže je hodnocena 4 body. První soutěžící tudíž získal celkem 4 body; druhý soutěžící (Filip), čtvrtý a pátý soutěžící mají všichni po 3 bodech; třetí soutěžící má 1 bod. Soutěžící s identifikačními čísly 2, 4 a 5 mají nejen shodný počet bodů, ale i stejný počet vyřešených úloh, takže jejich vzájemné pořadí bude určeno podle identifikačních čísel. Filip bude tudíž ve výsledkové listině POI na druhém místě, hned za soutěžícím s číslem 1.

4. Rozinky

Cukrářka Bonny potřebuje rozřezat tabulku čokolády s rozinkami. Čokoláda má tvar obdélníku s dílky uspořádanými do N řádků a M sloupců. Celkově je tedy tvořena NM dílky. V každém dílku čokolády je jedna nebo více rozinek, žádná rozinka nepřesahuje hranice dílků.



Na začátku je čokoláda vcelku. Bonny ji potřebuje postupně řezat na menší a menší části, až nakonec bude čokoláda rozřezána až na jednotlivé samostatné dílky (tzn. na NM dílků). Bonny má hodně práce a s řezáním čokolády jí proto pomáhá její asistent Petr. Petr provádí pouze rovné řezy po hranicích dílků, vždy od kraje ke kraji řezaného kusu čokolády. Za každý provedený řez dostane Petr odměnu. Bonny nemá po ruce dostatek peněz, má ale spoustu zbývajících rozinek. Za každý provedený řez proto Bonny zaplatí Petrovi tolik rozinek, kolik rozinek je obsaženo v řezaném kusu čokolády.

Bonny chce zaplatit Petrovi za rozřezání celé čokolády na dílky co nejméně. Zná počet rozinek v každém z NM dílků a může podle toho

volit pořadí, v jakém dává Petrovi jednotlivé kusy čokolády na řezání, a určovat, jaký řez má Petr provést (zda vodorovně nebo svisle a kde přesně). Pomozte Bonny určit, jak má čokoládu nechat řezat, aby zaplatila Petrovi za její rozřezání na jednotlivé dílky co nejméně.

Úloha: Napište program, který na základě počtu rozinek obsažených v jednotlivých dílcích čokolády určí minimální počet rozinek, který musí Bonny zaplatit Petrovi za rozřezání celé čokolády na dílky.

Omezení:

$1 \leq N, M \leq 50$ rozměry čokolády (vyjádřeny počtem dílků)

$1 \leq R_{k,p} \leq 1\,000$ počet rozinek v dílku v k -té řadě a p -tém sloupci

Vstup: Váš program přečte ze standardního vstupu následující údaje:

- ▷ První řádek obsahuje dvě celá čísla N a M oddělená jednou mezerou.
- ▷ Dalších N řádků popisuje, kolik rozinek je obsaženo v jednotlivých dílcích čokolády. V pořadí k -tý z těchto N řádků popisuje k -tou řadu čokolády. Každý takový řádek obsahuje M celých čísel oddělených vždy jednou mezerou. Tato čísla určují počty rozinek obsažených v jednotlivých dílcích příslušné řady čokolády, a to v pořadí dílků zleva doprava.

Výstup: Váš program musí zapsat na standardní výstup jeden řádek obsahující jedno celé číslo: minimální počet rozinek, které musí Bonny zaplatit Petrovi.

Hodnocení: V několika z testovacích vstupů budou zadané hodnoty N a M nanejvýš rovny 7. Za tyto vstupy můžete získat celkem 25 bodů.

Příklad:

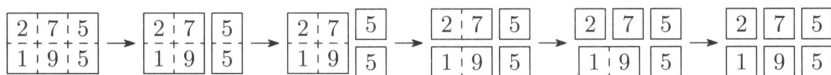
Vstup *Výstup*

2 3 77

2 7 5

1 9 5

Jeden z více možných způsobů, jak lze dosáhnout ceny 77, vypadá následovně:



Bonny nejprve požádá Petra, aby oddělil třetí sloupec od zbytku čokolády. Za to zaplatí Petrovi 29 rozinek.

Potom dá Bonny Petrovi menší z obou kusů čokolády, který je tvořen dvěma dílky po 5 rozinkách. Petr ho rozdělí za 10 rozinek.

Dále dá Bonny Petrovi zbývající kus čokolády, který má dílky obsahující 2, 7, 1 a 9 rozinek. Bonny požádá Petra o vodorovný řez a zaplatí za něj 19 rozinek.

Konečně dá Bonny Petrovi na rozříznutí levý horní blok (řez za 9 rozinek) a pak i levý spodní blok (řez za 10 rozinek).

Celková cena řezání čokolády je $29 + 10 + 19 + 9 + 10 = 77$ rozinek. Žádné jiné pořadí řezů nevede k levnějšímu rozřezání čokolády na jednotlivé dílky.

5. Garáž (úloha s úplnou odezvou)

Ve velké garáži je N parkovacích míst, která jsou očíslována od 1 do N včetně. Garáž otvírá každé ráno prázdná a je během dne provozována v následujícím režimu. Kdykoliv do garáže přijede auto, hlídač zkontroluje, zda je některé parkovací místo volné. Pokud není, auto musí počkat u vjezdu do garáže, dokud se nějaké místo neuvolní. Je-li v garáži více volných míst, auto zaparkuje na volném místě s nejmenším číslem. Jestliže do garáže přijedou další auta v době, kdy nějaké auto čeká na uvolnění místa, všechna tato auta se řadí u vjezdu do fronty v tom pořadí, v jakém přijela. Když se pak uvolní v garáži nějaké parkovací místo, zaparkuje na něm první auto z fronty (tzn. to z čekajících aut, které přijelo nejdříve).

Cena za parkování (v dolarech) se počítá jako součin váhy auta (v kilogramech) a koeficientu, jehož hodnota závisí na použitém parkovacím místě. Cena nezávisí na tom, jak dlouho auto zůstane v garáži.

Správce garáže ví, že dnes přijede do garáže celkem M aut, a zná také pořadí jejich příjezdů a odjezdů. Pomozte mu spočítat, kolik dolarů dnes celkově vybere za parkování.

Úloha: Napište program, který na základě znalosti cenových koeficientů jednotlivých parkovacích míst v garáži a údajů o příjezděcích autech (váhy aut, pořadí jejich příjezdů a odjezdů) určí celkovou cenu v dolarech, kterou řidiči parkujících aut zaplatí.

Omezení:

- | | |
|---------------------------|---|
| $1 \leq N \leq 100$ | počet parkovacích míst |
| $1 \leq M \leq 2000$ | počet aut |
| $1 \leq R_s \leq 100$ | koeficient parkovacího místa s v dolarech za kilogram |
| $1 \leq W_k \leq 10\,000$ | váha auta k v kilogramech |

Vstup: Váš program musí přečíst ze standardního vstupu následující údaje:

▷ První řádek obsahuje celá čísla N a M oddělená mezerou.

- ▷ Dalších N řádků udává koeficienty parkovacích míst. V pořadí s -tý z těchto řádků obsahuje jedno celé číslo R_s , koeficient parkovacího místa číslo s v dolarech za kilogram.
- ▷ Následujících M řádků určuje váhy aut. Auta jsou očíslována od 1 do M včetně, a to bez ohledu na pořadí jejich příjezdu do garáže nebo odjezdu. V pořadí k -tý z těchto M řádků obsahuje jedno celé číslo W_k , váhu auta číslo k v kilogramech.
- ▷ Posledních $2M$ řádků popisuje chronologicky, jak probíhají příjezdy a odjezdy jednotlivých aut. Kladné celé číslo i znamená, že auto číslo i přijíždí do garáže. Záporné celé číslo $-i$ znamená, že auto číslo i odjíždí z garáže. Žádné auto nebude odjíždět z garáže dříve, než přijelo, a číslo každého auta od 1 do M včetně se objeví v této posloupnosti právě dvakrát — jednou při příjezdu a podruhé při odjezdu. Žádné auto neodjede z garáže před zaparkováním (tzn. žádné auto neopustí předčasně frontu, v níž čeká na parkování).

Výstup: Program musí zapsat na standardní výstup řádek obsahující jedno celé číslo — částku v dolarech, kterou dnes utrží správce garáže.

Hodnocení: V testovacích datech, za která lze získat hodnocení 40 bodů, bude mít každé přijíždějící auto k dispozici vždy alespoň jedno volné parkovací místo v garáži. V těchto případech tedy žádné auto nebude muset čekat na uvolnění místa.

Příklady:

<i>Vstup</i>	<i>Výstup</i>
2 4	16200
5	
2	
100	
500	
1000	
2000	
3	
1	
2	
4	
-1	
-3	
-2	
-4	

Auto číslo 3 zaparkuje na místě 1 a zaplatí $1\,000 \cdot 5 = 5\,000$ dolarů.

Auto číslo 1 zaparkuje na místě 2 a zaplatí $100 \cdot 2 = 200$ dolarů.

Auto číslo 2 přijede a musí čekat u vjezdu.

Auto číslo 4 přijede a musí čekat u vjezdu za autem číslo 2.

Když auto číslo 1 opustí své parkovací místo, auto číslo 2 na něm zaparkuje a zaplatí $500 \cdot 2 = 1\,000$ dolarů.

Když auto číslo 3 opustí své parkovací místo, auto číslo 4 na něm zaparkuje a zaplatí $2\,000 \cdot 5 = 10\,000$ dolarů.

<i>Vstup</i>	<i>Výstup</i>
--------------	---------------

3 4	5300
-----	------

2

3

5

200

100

300

800

3

2

-3

1

4

-4

-2

-1

Auto číslo 3 zaparkuje na místě 1 a zaplatí $300 \cdot 2 = 600$ dolarů.

Auto číslo 2 zaparkuje na místě 2 a zaplatí $100 \cdot 3 = 300$ dolarů.

Auto číslo 1 zaparkuje na místě 1 (které se uvolnilo po odjezdu auta číslo 3) a zaplatí $200 \cdot 2 = 400$ dolarů.

Auto číslo 4 zaparkuje na místě 3 (poslední zbývajícím místem) a zaplatí $800 \cdot 5 = 4\,000$ dolarů.

6. Míša

Medvěd Míša objevil tajnou včelí zásobu medu a teď si lebedí a pochutnává si na něm. Vtom kde se vzala, tu se vzala — včela! Než se Míša stačil překulit a schovat za strom, včela ho zahlédla jedním ze svých očí a spustila poplach. Míša ví, že z úlů právě vyrazily hordy včel a pokud ho dopadnou, zle to s ním dopadne. Musí včas přestat jíst med a utéct do svého doupěte. Ale med je sladoučký a Míšovi se od něj vůbec nechce

odejít. Pomozte mu určit, jak dlouho ještě může zůstat, aby se stihl bezpečně vrátit domů.

Míšov les vypadá jako čtvercová mřížka o rozměrech N krát N , orientovaná ve směru světových stran. Na každém políčku je strom, tráva, úl nebo Míšovo doupě. Dvě políčka *sousedí*, pokud se jedno z nich nachází bezprostředně na sever, jih, východ či západ od druhého (ale ne diagonálně). Jak jste si již jistě všimli, Míša je velmi mlsný a to se negativně projevuje na jeho pohybových schopnostech — každým krokem se dokáže posunout pouze na sousední políčko, a to pouze po trávě (na stromy Míša lézt nedokáže) či do svého doupěte. Samozřejmě se také nesmí posunout na políčko obsahující včely. Za jednu minutu Míša ujde nanejvýš S kroků.

V okamžiku, kdy včely vyhlásí poplach, je Míša na políčku obsahujícím med a včely jsou na všech políčkách, která obsahují úl (v lese může být několik úlů). Každou další minutu se odehrají následující události:

- ▷ Jestliže je Míša stále na políčku s medem, rozhodne se, zda zůstane další minutu nebo zda vyrazí domů. Jestliže zůstane, pak se celou minutu nepohne. Jinak (v případě, že se rozhodl vyrazit nebo již políčko s medem opustil) ujde nanejvýš S kroků dle výše popsanych pravidel.
- ▷ Poté, co Míša stráví minutu požíváním medu či pohybem po lese, se včelí roj rozšíří o jedno pole do všech světových stran, ale jen po travnatých políčkách. Přesněji, roj včel se rozšíří na všechna travnatá políčka sousední s políčky, která již včely obsahují. Míša tedy nesmí být na žádném z těchto políček. Jakmile na nějakém políčku jsou včely, už na něm zůstanou až do konce — roj se nepřesunuje, ale zvětšuje se.

Na konci první minuty se tedy včely nacházejí na úlech a na travnatých políčkách, která s úly sousedí. Na konci druhé minuty jsou včely navíc na travnatých políčkách, na která se lze z úlů dostat dvěma kroky po travnatých políčkách ve směru světových stran, a tak dále. Po nějaké době včely zaplní všechna políčka, na která se z úlů dá dostat.

Ani Míša, ani včely nemohou opustit les. Dle výše popsanych pravidel Míša bude jíst med celočíselný počet minut.

Úloha: Napište program, který načte mapu lesa a určí maximální počet minut, které Míša může strávit na své výchozí pozici tak, aby se stále byl schopen vrátit do doupěte dříve, než ho dostihnou včely.

Omezení:

$1 \leq N \leq 800$ velikost (délka strany) lesa

$1 \leq S \leq 1\,000$ maximální počet kroků, které Míša může urazit za 1 min

Vstup: Váš program musí ze standardního vstupu načíst následující data:

- ▷ První řádek obsahuje celá čísla N a S oddělená mezerou.
- ▷ Mapa lesa je obsažena na následujících N řádcích. Každý z těchto řádků obsahuje N znaků, z nichž každý popisuje jedno políčko lesa.

Možné znaky a jejich význam:

T označuje strom

G označuje travnaté políčko

M označuje Míšovu počáteční pozici, která je na travnatém políčku

D označuje Míšovo doupě. Na toto políčko smí vstoupit Míša, ale ne včely.

H označuje úl

Poznámka. Mapa vždy bude obsahovat právě jedno písmeno M, právě jedno písmeno D a alespoň jedno písmeno H. Také vždy bude existovat posloupnost sousedících písmen G spojující počáteční pozici Míši s jeho doupětem a posloupnost sousedících písmen G spojující alespoň jeden úl s Míšovou počáteční pozicí. Tyto posloupnosti mohou být i prázdné, jestliže doupě či úl sousedí s Míšovou počáteční pozicí. Všimněte si, že včely nemohou vstoupit na políčko obsahující doupě, ani skrz něj nemohou projít. Toto políčko se tedy pro ně chová stejně jako strom.

Výstup: Váš program musí na standardní výstup vypsát jediný řádek obsahující jedno celé číslo: maximální počet minut, které Míša může strávit na své počáteční pozici tak, aby se stačil bezpečně vrátit domů.

Jestliže se Míša nemůže vrátit domů, aniž by ho včely dostihly, váš program musí místo toho vypsát na standardní výstup číslo -1 .

Hodnocení: Za vstupy, pro něž je N nejvýše 60, lze získat až 40 bodů.

Příklady:

<i>Vstup</i>	<i>Výstup</i>
--------------	---------------

7 3	1
-----	---

TTTTTTT

TGGGGGT

TGGGGGT

MGGGGGD

TGGGGGT

TGGGGGT

THHHHHT

Poté, co Míša jí med jednu minutu, vyrazí nejkratší cestou přímo vpravo a po dvou minutách bezpečně dorazí domů.

Vzorový vstup *Vzorový výstup*

7 3 2

TTTTTTT

TGGGGGT

TGGGGGT

MGGGGGD

TGGGGGT

TGGGGGT

TGHHGGT

Míša jí med dvě minuty, během třetí minuty provede kroky $\rightarrow\uparrow\rightarrow$, během čtvrté minuty kroky $\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ a nakonec kroky $\downarrow\rightarrow$ během páté minuty.

7. Kraje

Výbor OSN pro rozvoj krajů (VOSNRK) má následující organizační strukturu: Zaměstnává celkem N lidí, očíslovaných od 1 do N v klesajícím pořadí dle služebního stáří. Služebně nejstarší zaměstnanec (předseda) má tedy číslo 1. Každý zaměstnanec kromě předsedy (zaměstnance číslo 1) má právě jednoho přímého nadřízeného. Nadřízený je vždy služebně starší než všichni jeho podřízení. Zaměstnanec A je *manažer* zaměstnance B , jestliže A je buď přímý nadřízený zaměstnance B , nebo manažer přímého nadřízeného zaměstnance B . Předseda je tedy manažerem libovolného jiného zaměstnance. Zjevně také není možné, aby dva zaměstnanci byli navzájem svými manažery.

Každý zaměstnanec pochází z jednoho z R krajů. Kraje jsou očíslovány od 1 do R , přičemž jejich pořadí nemá žádný speciální význam. Úřad OSN pro vyšetřování (ÚOSNV) se zabývá podezřením, že VOSNRK diskriminuje některé kraje. Aby bylo možné toto podezření potvrdit či vyvrátit, ÚOSNV potřebuje počítačový systém schopný odpovídat na následující dotazy: Máte dány dva různé kraje r_1 a r_2 . Kolik existuje dvojic zaměstnanců e_1 a e_2 takových, že zaměstnanec e_1 pochází z kraje r_1 , zaměstnanec e_2 pochází z kraje r_2 a e_1 je manažer zaměstnance e_2 ? Každý dotaz má dva parametry (kraje r_1 a r_2) a odpověď na něj je jedno celé číslo (počet dvojic e_1 a e_2 splňujících výše popsané podmínky).

Úloha: Napište program, který načte informace o krajích, z nichž pochází zaměstnanci VOSNRK, a o přímých nadřízených těchto zaměstnanců a poté interaktivně odpovídá na dotazy výše popsaného typu.

Omezení:

- $1 \leq N \leq 200\,000$ počet zaměstnanců
- $1 \leq R \leq 25\,000$ počet krajů
- $1 \leq Q \leq 200\,000$ počet dotazů, na něž bude muset program odpovědět
- $1 \leq H_k \leq R$ kraj, ze kterého pochází zaměstnanec k ($1 \leq k \leq N$)
- $1 \leq S_k < k$ přímý nadřízený zaměstnance k ($2 \leq k \leq N$)
- $1 \leq r_1, r_2 \leq R$ čísla krajů, udávající parametry dotazu

Vstup: Váš program musí ze standardního vstupu načíst následující data:

- ▷ První řádek obsahuje celá čísla N , R a Q oddělená jednotlivými mezerami.
- ▷ Následujících N řádků popisuje N zaměstnanců výboru v klesajícím pořadí dle služebního stáří, tj. k -tý z těchto řádků popisuje zaměstnance číslo k . První z řádků (popisující předsedu) obsahuje jedno celé číslo udávající kraj H_1 , ze kterého předseda pochází. Každý z následujících $N - 1$ řádků obsahuje dvě celá čísla oddělená mezerou: číslo S_k přímého nadřízeného zaměstnance k a číslo H_k kraje, z něhož zaměstnanec k pochází.

Interakce: Poté, co váš program načte výše popsaná vstupní data, musí střídavě číst dotazy ze standardního vstupu a vypisovat odpovědi na ně na standardní výstup. Na dotazy (jichž je dohromady Q) je nutno odpovídat postupně — na každý dotaz musíte odpovědět předtím, než přečtete následující dotaz.

Každý dotaz je zadán na jednom řádku, obsahujícím dvě navzájem různá celá čísla r_1 a r_2 oddělená mezerou. Odpověď na tento dotaz musí být vypsána na standardní výstup jako jeden řádek obsahující jedno celé číslo: počet dvojic zaměstnanců e_1 a e_2 takových, že zaměstnanec e_1 pochází z kraje r_1 , zaměstnanec e_2 pochází z kraje r_2 a e_1 je manažer zaměstnance e_2 .

Poznámka: Vstupní data budou taková, že správnou odpovědí na každý zadaný dotaz bude číslo menší než 1 000 000 000.

Důležitá poznámka: Aby váš program správně komunikoval s vyhodnocovačem, je nutné, aby „spláchnul“ (flush) standardní výstup po každé odpovědi. Musí také zabránit zablokování při čtení standardního vstupu, což by mohlo nastat, pokud byste použili například příkaz `scanf ("%d\n")`.

Hodnocení: Za vstupy, pro něž R nepřesáhne 500, lze získat až 30 bodů.

Za vstupy, pro něž z každého kraje bude pocházet nanejvýš 500 zaměstnanců, lze získat až 55 bodů.

Za vstupy splňující obě podmínky lze získat 15 bodů a za vstupy, které splňují alespoň jednu z těchto podmínek, lze získat 70 bodů.

Příklad:

Vstup

Výstup

6 3 4

1

1 2

1 3

2 3

2 3

5 1

1 2

1 [spláchnout standardní výstup]

1 3

3 [spláchnout]

2 3

2 [spláchnout]

3 1

1 [spláchnout]

Testování: Jestliže budete testovat své řešení pomocí rozhraní soutěžního prostředí, vstupní soubor, který mu poskytnete, musí obsahovat vstupní data i dotazy (obdobně jako ve výše uvedeném příkladu, ale bez prázdných řádků).

8. Obchodní cestující

Obchodní cestující usoudil, že optimální plánování cesty mezi městy po zemi je výpočetně příliš náročné, a proto přenesl svůj obchod na řeku Dunaj. Při plánování svých obchodních cest se tak může omezit pouze na jednorozměrný případ, neboť se pohybuje výhradně podél vodního toku. Pořídil si velmi rychlý člun, s jehož pomocí se dostane po řece odkudkoliv kamkoliv v zanedbatelném čase; člun má ovšem značnou spotřebu paliva. Na každý metr ujetý proti proudu (tzn. směrem k prameni řeky) spotřebuje palivo v ceně U dolarů, zatímco na každý metr ujetý po proudu (tzn. směrem od pramene) spotřebuje palivo za D dolarů.

Obchodní cestující by rád navštívil N trhů, které se konají na různých místech podél řeky. Každý trh se koná pouze jeden den. O každém trhu X zná obchodní cestující jeho datum T_X (je vyjádřeno počtem dnů od doby,

kdy si pořídil člun), místo konání L_X (je vyjádřeno jako vzdálenost v metrech podél toku od pramene řeky) a předpokládanou tržbu v dolarech M_X , kterou obchodní cestující získá, pokud tento trh navštíví. Obchodní cestu musí zahájit i zakončit ve svém domovském přístavu na řece, který se nachází v místě S (měřeno rovněž v metrech podél toku od pramene řeky).

Pomozte obchodnímu cestujícímu zvolit, které trhy má navštívit (pokud vůbec nějaké) a v jakém pořadí, aby svou obchodní cestou dosáhl co nejvyššího zisku. Zisk obchodního cestujícího je roven součtu tržeb (v dolarech), které získá na všech navštívených trzích, minus celková cena paliva (rovněž v dolarech), které spotřebuje jeho člun při cestování po řece.

Pamatujte na to, že pokud se trh A koná dříve než trh B , obchodní cestující je může navštívit jedinečně v tomto pořadí (tzn. nemůže navštívit trh B a teprve potom trh A). Jestliže se dva trhy konají ve stejném dni, obchodní cestující může navštívit oba tyto trhy, a to v libovolném pořadí. Není nijak omezeno, kolik trhů může obchodní cestující navštívit v jednom dnu, ale přirozeně nemůže navštívit dvakrát stejný trh a získat na něm dvakrát tržbu. Může ale projet místem, kde se právě koná trh, na kterém již dříve byl (bez získání další tržby na tomto trhu).

Úloha: Napište program, který určí maximální zisk, jehož může dosáhnout obchodní cestující na své cestě. Vstupem programu jsou údaje o datu, místu konání a předpokládané tržbě pro všechny probíhající trhy, o umístění domovského přístavu a o jízdních nákladech člunu.

Omezení:

- $1 \leq N \leq 500\,000$ počet trhů
- $1 \leq D \leq U \leq 10$ cena paliva (v dolarech) za jeden metr jízdy
proti proudu (U) a po proudu (D)
- $1 \leq S \leq 500\,001$ umístění domu obchodního cestujícího
- $1 \leq T_k \leq 500\,000$ datum konání trhu k
- $1 \leq L_k \leq 500\,001$ místo konání trhu k
- $1 \leq M_k \leq 4\,000$ předpokládaná tržba (v dolarech) při návštěvě trhu k

Vstup: Váš program musí přečíst ze standardního vstupu následující údaje:

- ▷ První řádek obsahuje celá čísla N , U , D a S v uvedeném pořadí, oddělená vždy jednou mezerou.
- ▷ Dalších N řádků popisuje všech N trhů (v libovolném vzájemném uspořádání). V pořadí k -tý z těchto N řádků popisuje trh číslo k ;

obsahuje tři celá čísla oddělená vždy jednou mezerou: datum konání trhu T_k , jeho umístění L_k a předpokládanou tržbu obchodního cestujícího M_k .

Poznámka: Všechna umístění uvedená na vstupu jsou navzájem různá. To znamená, že žádné dva trhy se nekonají na stejném místě a žádný trh se nekoná v místě, kde má obchodní cestující svůj domovský přístav.

Výstup: Váš program musí zapsat na standardní výstup jeden řádek obsahující jedno celé číslo: maximální zisk, jakého může obchodní cestující dosáhnout uskutečněním obchodní cesty.

Hodnocení: V testovacích datech ohodnocených 60 body se žádné dva trhy nebudou konat ve stejném dni.

V testovacích datech ohodnocených 40 body nebude žádné číslo na vstupu větší než 5 000.

Obě výše uvedené podmínky budou zároveň splněny v testovacích datech ohodnocených 15 body.

Alespoň jedna z obou výše uvedených podmínek bude splněna v testovacích datech ohodnocených 85 body.

Příklad:

<i>Vstup</i>	<i>Výstup</i>
4 5 3 100	50
2 80 100	
20 125 130	
10 75 150	
5 120 110	

Optimální je navštívit trhy 1 a 3 (tzn. trhy na pozicích 80 a 75).

Pořadí událostí a jejich finanční důsledky budou následující:

- ▷ Obchodní cestující pojede 20 metrů proti proudu za 100 dolarů. Dosavadní zisk: -100
- ▷ Navštíví trh číslo 1, kde utrží 100. Dosavadní zisk: 0
- ▷ Pojede 5 metrů proti proudu za 25. Dosavadní zisk: -25
- ▷ Navštíví trh číslo 3, kde utrží 150. Dosavadní zisk: 125
- ▷ Pojede 25 metrů po proudu, aby se vrátil domů, což stojí 75. Výsledný zisk: 50

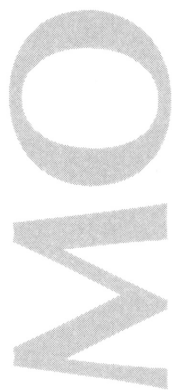
RNDr. Karel Horák, CSc., Mgr. Martin Mareš, Ph.D.
Mgr. Peter Novotný, Mgr. Martin Panák, Ph.D.,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.,

**PADESÁTÝ OSMÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydala Jednota českých matematiků a fyziků,
Žitná 25, 117 10 Praha 1
jako svou publikaci č. 57-553-11
Sazbu programem T_EX připravil Karel Horák
Vytisklo Polygrafické středisko
Univerzity Palackého v Olomouci
1. vydání
Praha 2011

ISBN 978-80-7015-009-2

matematická olympiáda



ISBN 978-80-7015-009-2

ISBN 978-80-7015-009-2



9 788070 150092