

59. ročník matematické olympiády na středních školách

Zdeněk Dvořák (editor); Karel Horák (editor); Daniel Král (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 59. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2009/2010. 51. mezinárodní matematická olympiáda. 22. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405186>

Terms of use:

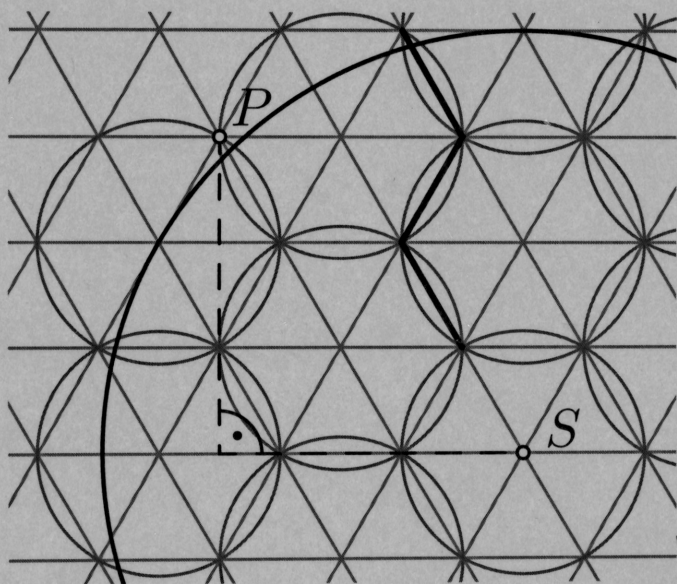
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

59. ročník matematické olympiády na středních školách



PADESÁTÝ DEVÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2009/2010

51. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

22. MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE



UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vydání této publikace je spolufinancováno Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky v rámci projektu OPVK MATES (reg. č. CZ.1.07/2.3.00/09.0017)

Za přispění spolupracovníků zpracovali

Mgr. Zdeněk Dvořák, Ph.D.,

RNDr. Karel Horák, CSc., RNDr. Daniel Král, Ph.D.,

Mgr. Peter Novotný, Ph.D., Mgr. Martin Panák, Ph.D.,

doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

© Karel Horák, editor, 2012

ISBN 978-80-244-3018-8

Obsah

O průběhu 59. ročníku matematické olympiády	5
Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P	15
Výsledky ústředního kola 59. ročníku MO kategorie A	30
Výsledky ústředního kola 59. ročníku MO kategorie P	31
Kategorie C	33
Texty úloh	33
Řešení úloh	36
Kategorie B	49
Texty úloh	49
Řešení úloh	52
Kategorie A	63
Texty úloh	63
Řešení úloh	68
Kategorie P	101
Texty úloh	101
Kategorie Z5	121
Texty úloh	121
Kategorie Z6	125
Texty úloh	125
Kategorie Z7	128
Texty úloh	128
Kategorie Z8	131
Texty úloh	131
Kategorie Z9	134
Texty úloh	134
Přípravná soustředění před 51. MMO	139
Úlohy zadané na přípravném soustředění	140
Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské	143
Texty soutěžních úloh	144
Řešení úloh	145
51. mezinárodní matematická olympiáda	152
Texty soutěžních úloh	156
Řešení soutěžních úloh	157
4. středoevropská matematická olympiáda	166
Texty soutěžních úloh	168
Řešení úloh	170
17. středoevropská olympiáda v informatice	185
22. mezinárodní olympiáda v informatice	188

O průběhu 59. ročníku matematické olympiády

Padesátý devátý ročník matematické olympiády se uskutečnil v České republice ve školním roce 2009/10. Hlavním pořadatelem soutěže bylo (stejně jako v předchozích letech) Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, dále Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd ČR. Průběh soutěže zajišťovala stejně jako v předchozích ročnících soutěže Ústřední komise MO (ÚK MO), které předsedal doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., s místopředsedy RNDr. *Jaroslavem Švrčkem*, CSc. (pro kategorie A, B, C), RNDr. *Vojtěchem Žádníkem*, Ph.D. (pro kategorie Z9–Z5) a doc. RNDr. *Pavlem Töpferem*, CSc. (pro kategorii P). Tajemníkem ÚK MO byl RNDr. *Karel Horák*, CSc.

Přípravou a výběrem úloh pro jednotlivé kategorie a soutěžní kola byly pověřeny Ústřední komisí MO dvě úlohové komise (jedna pro kategorie A, B, C a druhá pro kategorie Z). Obě komise se sešly na svých pracovních seminářích dvakrát ročně (v listopadu 2009 a v květnu 2010). Ve spolupráci se slovenskými kolegy zabezpečují obě komise s více než ročním předstihem výběr úloh pro další ročník MO v České republice i na Slovensku. Garanty výběru úloh pro tento ročník soutěže byli Jaromír Šimša (A), Pavel Novotný (B) a Pavel Leischner (C).

Krajská (II.) kola v jednotlivých kategoriích se uskutečnila ve stanovených termínech: 19. 1. 2010 v kategorii A, 30. 3. 2010 v kategoriích B a C a 12. 1. 2010 v kategorii P. Celkové počty účastníků v jednotlivých krajích každé z uvedených kategorií jsou uvedeny v tabulkách, které tvoří přílohu této zprávy. V průběhu 59. ročníku MO se na základě účinné podpory projektu **OPVK MATES CZ.1.07/2.3.00/09.0017** v moravských regionech uskutečnily pravidelné semináře určené řešitelům MO. Konaly se na PřF UP v Olomouci, dále v Jihlavě a ve Zlíně. Lektorsky se na nich podíleli především řešitelé projektu MATES.

Ústřední kolo 59. ročníku Matematické olympiády v kategorii A se uskutečnilo 21.–24. března 2010 v Chebu. Organizace závěrečného kola soutěže se v tomto roce ujala Krajská komise MO Karlovarského kraje. Vlastní soutěž se konala v prostorách Západočeské univerzity v Plzni, soutěžící a členové ÚK MO byli po dobu soutěže ubytováni v Domově mlá-

deže Středního odborného učiliště elektrotechnického a Hotelové školy v Plzni.

Záštitu nad finálovou částí MO převzali PaedDr. *Josef Novotný*, hejman Karlovarského kraje, MUDr. *Jan Svoboda*, starosta města Chebu, a Msgre. *František Radkovský*, biskup plzeňský, kteří se zúčastnili slavnostního zahájení ústředního kola. To se uskutečnilo v neděli 21. března 2010 v prostorách Fakulty ekonomické Západočeské Univerzity v Chebu. Kromě soutěžících, členů ÚK MO a garantů se zahájení soutěže zúčastnili rovněž pozvaní hosté, mezi nimiž byli především zástupci společenského života v Chebu a v Karlovarském kraji a dále zástupci sponzorů (skupina ČEZ, ECOVIS Corporate Finance, s.r.o.). Soutěžící a členové Ústřední komise MO (ÚK MO) byli ubytováni v Domově mládeže Střední zdravotnické školy v Chebu. Vlastní soutěž se přitom po oba soutěžní dny konala v učebnách Gymnázia Cheb.

Na základě jednotné koordinace úloh krajského kola kategorie A pozvala ÚK MO k účasti v ústředním kole 51 nejlepších řešitelů z celé republiky. Svého zástupce v něm tentokrát neměl pouze Liberecký kraj. Soutěžními dny byly 22. a 23. březen 2010. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící již tradičně vyhrazeny vždy 4,5 hodiny čistého času a za každou úlohu bylo možno získat maximálně 7 bodů.

Chebští organizátoři připravili pro soutěžící a pro členy ÚK MO atraktivní doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu bylo vyhrazeno zájezdu do přírodní rezervace Soos poblíž Františkových Lázní a prohlídce historického centra Chebu. Následující den odpoledne byla pro zájemce zajištěna prohlídka zámku Kynžvart spojená s návštěvou nedalekých Mariánských Lázní.

Slavnostní vyhlášení výsledků a předání cen nejlepším soutěžícím se uskutečnilo ve středu 24. března 2010 dopoledne v aule FEK ZČU v Chebu za přítomnosti představitelů města Plzeň a zástupců ZČU v Plzni. Předseda ÚK MO doc. *Jaromír Šimša* poděkoval ve svém závěrečném slovu všem, kteří se zasloužili o zdárný průběh ústředního kola kategorie A, především pak předsedovi Krajské komise MO v Karlovarském kraji Mgr. *Josefu Hazimu*, a krátce informoval všechny přítomné o ústředním kole v jubilejním, 60. ročníku MO, které se uskuteční v březnu 2010 v Brně.

Na ústřední kolo kategorie A bezprostředně navázalo ústřední kolo kategorie P. K účasti v závěrečném kole této soutěže bylo tentokrát pozváno 33 nejlepších řešitelů krajského kola, finále soutěže se však zúčastnilo pouze 29 z nich.

Soutěžními dny ústředního kola v kategorii P byly 25. a 26. březen 2010. První soutěžní den řešili soutěžící tři úlohy teoretické, celý druhý soutěžní den byl vyhrazen tradičně řešení dvou praktických úloh. Za každou teoretickou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 10 bodů, za řešení každé praktické úlohy pak 15 bodů — celkově tedy nejvýše 60 bodů. Na přípravě soutěžních úloh v kategorii P se podíleli pracovníci Katedry matematické informatiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Deset z jedenácti vítězů soutěže v kategorii A bylo pozváno k výběrovému soustředění v Kostelci nad Černými lesy před 51. mezinárodní matematickou olympiádou. Ta se uskutečnila v červenci 2010 v Astaně, hlavním městě Kazachstánu. Kromě toho bylo vybráno také družstvo pro 4. ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO), který se konal 9.–15. září 2010 ve slovenském Strečně. Družstvo pro tuto mezinárodní soutěž tvořila šestice úspěšných řešitelů ústředního kola kategorie A, kteří se nezúčastnili 51. MMO. Na Slovensku proběhl i 17. ročník Středoevropské olympiády v informatice (CEOI, Košice 12.–19. 7. 2010). V srpnu se pak české reprezentační družstvo zúčastnilo 22. ročníku Mezinárodní olympiády v informatice v kanadském Waterloo. Podrobnější zprávy o těchto mezinárodních soutěžích jsou uvedeny na konci ročenky.

Ústřední komise MO se během 59. ročníku soutěže sešla na dvou pravidelných jednáních, a to 11. prosince 2009 v Matematickém ústavu AV ČR v Praze a dále 22. března 2010 v Chebu u příležitosti ústředního kola MO.

Pro 40 nejlepších řešitelů krajského kola 59. ročníku MO v kategoriích B a C uspořádala ÚK MO v červnu 2010 tradiční soustředění v Jevíčku, organizované ředitelem tamějšího gymnázia, dr. Dagem Hrubým. Lektorsky chod soustředění zabezpečovali doc. Calda, dr. Švrček, dr. Panák, dr. Calábek, dr. Leischner a dr. Hrubý. Počátkem září téhož roku se konalo v Janských Lázních na chatě Lovrana ještě výběrové soustředění nejlepších řešitelů kategorie A, jež bylo zároveň i poslední přípravou reprezentačního družstva pro 4. MEMO na Slovensku. Na tomto soustředění jednotlivé semináře vedli doc. Šimša, dr. Horák, dr. Švrček, dr. Panák, dr. Calábek, dr. Zhouf a Michal Rolínek.

Závěrem dovoluje poděkovat všem nadšeným učitelům matematiky, kteří nad své pracovní povinnosti připravovali své matematicky talentované žáky pro soutěž v tomto ročníku. Bez nich si lze jen těžko představit úspěšný průběh nejstarší předmětové soutěže v České republice, kterou je MO.

**Projev předsedy Ústřední komise MO
při slavnostním zahájení ústředního kola 59. ročníku MO
v Chebu**

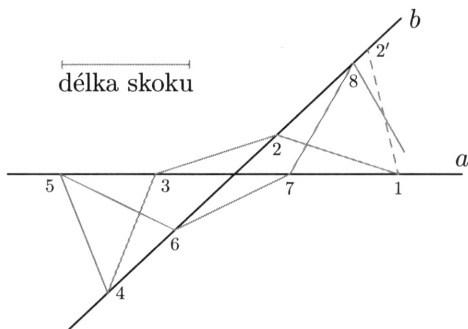
Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,

vám z přítomných, pro které je dnešní setkání s matematickou olympiádou spíše výjimečným zážitkem, bych nejprve rád přiblížil charakter naší soutěže. Pro její účastníky máme na každý ze dvou příštích dnů připravenou trojici úloh, kterou budou řešit po dobu 4,5 hodin. Náměty úloh budou pro soutěžící neznámé, takže úkolem našich mladých řešitelů bude objevit některé utajené rysy a důsledky matematicky popsanych situací a dobrat se ve vymezeném čase logickými úvahami k cíli, jasně stanovenému zadáním každé úlohy. Opravovatelský tým pak v odevzdaných protokolech zhodnotí nejen výsledné odpovědi, ale i výklad postupů řešení a jeho korektnost a úplnost. Není to tedy ani tak soutěž znalostní či soupeření v rychlosti a správnosti složitých výpočtů, jako spíše klání nápadů, matematické intuice, objevných myšlenek a jejich správného konečného podání. Tyto dovednosti přítomní účastníci již projevili ve školním a krajském kole naší soutěže a k postupu do ústředního kola jim všichni blahopřejeme. Zítřka a pozítří se rozhodne, kteří soutěžící se na základě podaných výkonů budou ucházet o místo v šestičlenném reprezentačním družstvu České republiky pro každoroční mezinárodní olympiádu. Té se v posledních letech účastní středoškoláci ze zhruba sto zemí celého světa a letos v červenci se bude konat v Kazachstánu.

Když jsem se zamýšlel nad tím, jaké matematické téma zvolit pro své dnešní vystoupení, uvědomil jsem si, že zadání letošní šestice úloh pro ústřední kolo je nebývale, jak se dnes říká, *akční*. V jedné úloze se bude střílet, pravda jenom do terče, námětem jiné úlohy bude pohádka o tom, jak čaroděj unese nikoliv princeznu ze zámku, ale zástupce čtyř nejmenovaných politických stran, v úloze pojmenovaných A, B, C a D. Tak mne napadlo, že i já bych dnes mohl v obdobném duchu promluvit o jedné pěkné matematické úloze, konkrétně ve formě příběhu o skákající bleše. Má následující zadání.

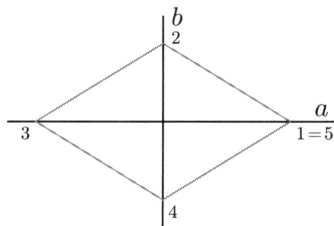
V rovině jsou dány dvě různoběžné přímky a a b . Blecha začne opakovaně skákat z jedné přímky na druhou. Všechny její skoky mají stejnou délku a každý následující skok blecha volí tak, aby nebyl opakováním předchozího skoku v opačném směru. Stanovte nutnou i postačující podmínku, za které se blecha po určitém počtu skoků dostane přesně na místo, odkud své skákání po přímkách a , b začala.

Skákavý pohyb blechy nám přibližuje obr. 1. Vidíme na něm úsečku, která znázorňuje délku jednoho blešího skoku. Blecha zanedbatelných rozměrů začala popsany pohyb řekněme v bodě 1 přímky a . První skok mohla cílit do dvou bodů 2 a 2' přímky b , blecha si vybrala ten bod, který je označen číslem 2. Dále už blecha neměla na vybranou. Z bodu 2 sice směřují na přímku a dva skoky dané délky, a to do bodů 1 a 3, aby však neopakovala předchozí skok v opačném směru, blecha skočila do bodu 3, ze kterého pak dále skočila na přímku b nikoliv zpět do bodu 2, nýbrž do bodu 4, dále skočila na přímku a do bodu 5 a tak dále. Zobrazený pohyb blechy končí částečně znázorněným skokem z bodu 8 do bodu 9 na přímce a , který už na obrázku chybí. Je však vidět, že to ještě není bod 1, jak bychom si přáli, aby se dráha blechy uzavřela. Z obrázku není patrné, zda se tak v dané situaci vůbec někdy stane.



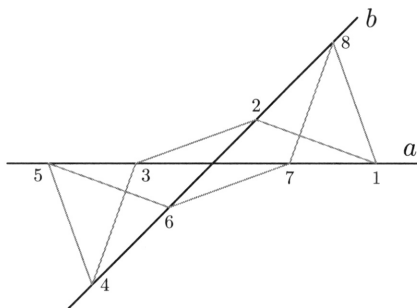
Obr. 1

Obrázek 2 jasně vysvětluje, že dráha blechy se uzavře po čtyřech skocích v případě, kdy přímky a a b jsou navzájem kolmé. Stane se tak bez ohledu na to, ze kterého bodu 1 přímky a blecha svůj pohyb začala. Jde jen o to, aby své skoky vůbec mohla začít, takže bod 1 musí mít od průsečíku přímek a , b vzdálenost menší, než je délka jednoho skoku.



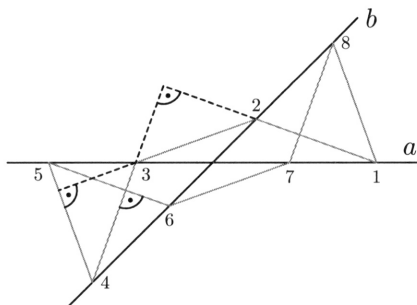
Obr. 2

Daleko zajímavější je situace z obr. 3, v níž přímky a , b svírají úhel 45° . Zdá se, že dráha blechy se uzavře po osmi skocích, ani velmi přesné rýsování však nedává matematickou jistotu, že tato hypotéza skutečně platí.



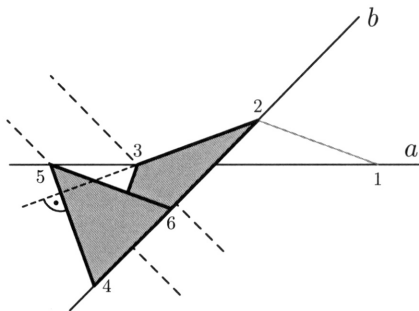
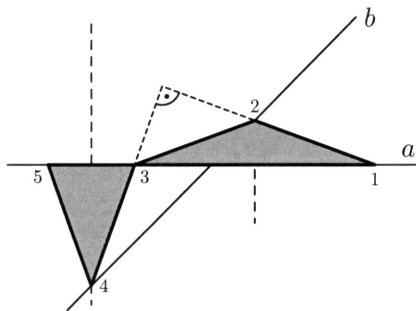
Obr. 3

K jejímu potvrzení je zapotřebí učinit malý objev, podmíněný tím, že se na danou situaci podíváme poněkud jinak. Jak, to vysvětluje obr. 4: odděleně posoudíme skoky z přímky a na přímku b (říkejme jim liché)



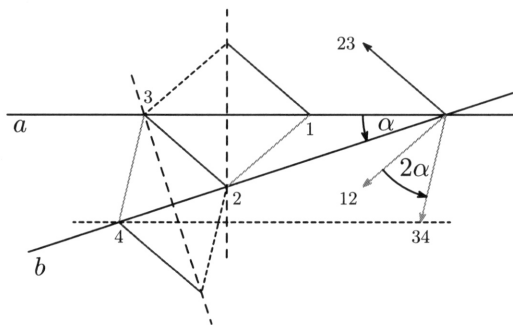
Obr. 4

a skoky z přímky b na přímku a (ty budou sudé). Může nás pak napadnout, že každé dva po sobě jdoucí skoky téže parity leží na dvou navzájem kolmých přímkách. Dobře je to vidět na lichých skocích 34 a 56, které se křížují, méně už na lichých skocích 12 a 34, nebo na sudých skocích 23 a 45, které je třeba protáhnout, abychom sevřené pravé úhly vytušili. Dokázat takovou dílčí hypotézu o pravých úhlech není těžké. Stačí k tomu využít dvojice rovnoramenných trojúhelníků, které pro skoky 12 a 34 vidíte na obr. 5, pro skoky 23 a 45 na obr. 6.



Po této zkušenosti už není obtížné provést obdobnou úvahu s upraveným závěrem pro případ obecných přímk a , b a vyřešit tak úplně celou úlohu, o které tady povídám. Podívejme se jak.

Na obr. 7 jsou znázorněny různoběžky a , b svírající obecný úhel velikosti α a první tři skoky blechy tvořící dráhu 1234. Z rovnoramenného trojúhelníku 123 plyne, že skoky 12 a 23 představují vektory, které jsou



souměrně sdružené podle přímký a . Podobně z rovnoramenného trojúhelníku 234 plyne, že skoky 23 a 34 představují vektory, které jsou souměrně sdružené podle přímký b . Abychom souměrnost těchto dvojic vektorů lépe viděli, nakreslil jsem ještě exempláře vektorů 12, 23 a 34 umístěné do průsečíku přímek a a b . Přítomní soutěžící jistě mají ponětí o skládání osových souměrností, takže si nepochybně uvědomují, že vektor 34 je obrazem vektoru 12 v otočení o orientovaný úhel 2α , je-li již zmíněný úhel α orientován od přímký a k přímce b . To je zásadní objev, který nás již rychle přivede k řešení úlohy, a to díky tomu, že provedenou úvahu

můžeme zřejmě zopakovat pro kteroukoliv trojici po sobě následujících skoků, nejenom pro tu trojici první.

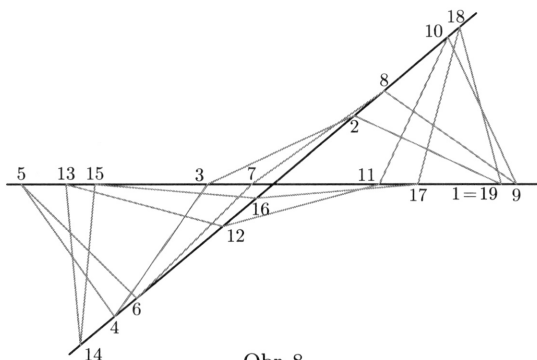
Pozorní diváci si možná povšimli, že na obrázku je kromě os souměrnosti dvou trojúhelníků ještě jedna neoznačená přímka. Je to rovnoběžka s přímkou a , která je obrazem této přímky v posunutí o vektor 34. Dokládám na ní ten zřejmý poznatek, že počáteční i koncový bod každého skoku z jedné konkrétní přímky na druhou, v našem případě skoku 34, jsou jednoznačně určeny příslušným volným, kdekoliv umístěným vektorem. Proto je dráha blechy uzavřená, právě když je posloupnost lichých vektorů 12, 34, 56, ... periodická. Shrňme zjištěné poznatky a jejich důsledky do následující podoby.

Označme α orientovaný úhel otočení, které převede přímku a na přímku b . V posloupnosti všech skoků z přímky a na přímku b je každý následující vektor vždy obrazem předchozího vektoru v otočení $\mathcal{R}$ o úhel 2α . Proto je obecně $(k+1)$ -ní vektor posloupnosti obrazem prvního vektoru v k -násobném otočení $\mathcal{R}^k$ o úhel $2k\alpha$. S ohledem na jednoznačné umístění každého vektoru skoku proto platí, že dráha blechy se uzavře po $2k$ skocích, právě když je úhel $2k\alpha$ roven nejmenšímu celočíselnému (řekněme m -) násobku plného úhlu 360° , tedy $2k\alpha = m \cdot 360^\circ$. Z upravené rovnosti

$$\alpha = \left(\frac{180m}{k} \right)^\circ$$

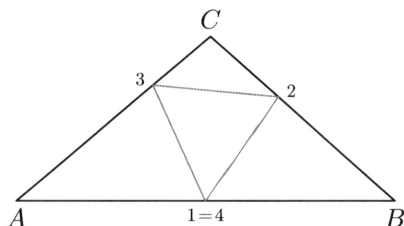
vyčteme hledanou — a poněkud překvapivou — nutnou i postačující podmínku pro uzavřenost bleší dráhy: úhel α mezi přímkami a a b je ve stupních vyjádřen celým číslem nebo zlomkem.

Dokázaný výsledek ilustrujeme pro úhel $\alpha = 40^\circ$. Z rovnosti $40^\circ = (180m/k)^\circ$ plyne $m/k = 2/9$, odkud $k = 9$, takže dráha blechy se uzavře po $2 \cdot 9 = 18$ skocích, jak uvidíte na myslím docela působivém obr. 8,



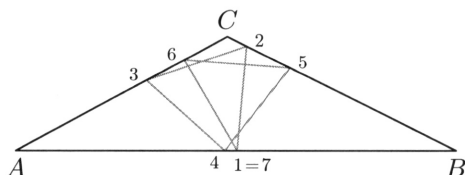
Obr. 8

kterým své vyprávění o bleše téměř končím. Dodám, že zájemci o tento námět se mohou sami věnovat rozboru obdobného problému, kdy blecha skáče po dvou mimoběžkách v prostoru, nebo situaci, kdy blecha skáče po stranách daného trojúhelníku podle jejich neměnného cyklického pořadí. Tehdy není obtížné lokalizovat uzavřenou dráhu ze tří skoků, neboť jde o poměrně jednoduchou úlohu vepsat do daného trojúhelníku ABC rovnostranný trojúhelník 123, jak vidíte na obr. 9. Délka strany vepsaného



Obr. 9

trojúhelníku 123, tedy délka jednoho blešího skoku, ovšem závisí na tvaru a velikosti daného trojúhelníku ABC . Zato nalezení uzavřené dráhy složené ze šesti skoků (obr. 10) je patrně velice složitá úloha, o jejímž řešení nemám sebemenší ponětí. Obtíž spatřuji v tom, že takové uzavřené dráhy mají nekonečně mnoho různých tvarů a je nesnadné stanovit, která z nich ve vhodném zmenšení či zvětšení přesně padne svými vrcholy na strany daného trojúhelníku.



Obr. 10

Na úplný závěr svého vystoupení chci jménem Ústřední komise MO a všech přítomných hostů popřát všem soutěžícím do obou soutěžních dopolední co nejvíce dobrých nápadů, postřehů a třeba i potřebné štěstí při rozhodování, do kterých hypotéz, jež je napadnou, se pustit. Prohlašuji ústřední kolo 59. ročníku MO za zahájené.

Tabulka 1

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 59. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	87	81	87	72	126	102	23	18	323	273
Středočeský	100	48	66	17	85	34	11	9	262	108
Jihočeský	98	52	28	23	60	40	4	4	190	119
Plzeňský	45	27	47	5	69	33	10	9	171	74
Karlovarský	22	15	12	2	19	6	1	1	54	24
Ústecký	30	22	33	17	55	27	10	7	128	73
Liberecký	59	26	43	4	47	15	9	7	158	52
Královéhradecký	40	28	34	8	41	17	3	3	118	56
Pardubický	46	36	17	3	30	25	6	4	99	68
Vysočina	71	48	57	25	69	38	1	0	198	111
Jihomoravský	149	90	67	30	132	68	17	11	365	199
Zlínský	88	37	52	9	62	25	4	4	206	75
Olomoucký	39	27	32	14	47	22	3	3	121	66
Moravskoslezský	68	46	69	12	98	28	6	4	241	90
ČR	942	583	644	241	940	480	108	84	2 634	1 388

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 59. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	49	18	41	13	54	45	17	8	161	84
Středočeský	46	1	13	6	33	7	9	3	101	17
Jihočeský	48	4	19	10	40	12	3	2	110	28
Plzeňský	27	9	5	3	33	17	9	6	74	35
Karlovarský	15	2	2	1	6	6	1	0	24	9
Ústecký	22	3	16	4	24	4	7	4	69	15
Liberecký	26	3	4	3	13	8	7	4	50	18
Královéhradecký	27	7	8	5	17	13	3	2	55	27
Pardubický	35	3	2	1	24	13	4	1	65	18
Vysočina	40	8	21	11	30	13	0	0	91	32
Jihomoravský	90	12	30	9	68	28	11	6	199	55
Zlínský	18	1	9	5	23	9	4	4	54	19
Olomoucký	27	4	14	8	22	10	3	1	66	23
Moravskoslezský	43	9	11	6	26	13	4	2	84	30
ČR	513	84	195	85	413	198	82	43	1 203	410

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO

v kategoriách A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie jsou dle dostupných výsledků uvedeni všichni úspěšní řešitelé, kteří skončili do desátého místa. Označení G znamená gymnázium.

..... Kraj Praha

Kategorie A

1. *Tomáš Zeman*, G J. Keplera, Praha 6
2. *Jáchym Sýkora*, G Ch. Dopplera, Praha 5
3. *Radek Marciňa*, G Ch. Dopplera, Praha 5
4. *Lukáš Zavřel*, G Praha 9, Chodovická
5. *Kateřina Honzáková*, G J. Keplera, Praha 6
6. *Petr Ryšavý*, G J. Heyrovského, Praha 5
- 7.–9. *Jakub Hajč*, Akad. G Praha 2, Korunní
Miroslav Olšák, G Budánka, Praha 5
Martin Töpfer, G Praha 7, Nad Štolou
10. *Tadeáš Dohnal*, G Ch. Dopplera, Praha 5

Kategorie B

1. *Martin Töpfer*, G Praha 7, Nad Štolou
2. *Stanislav Mach*, G J. Keplera, Praha 6
- 3.–4. *Jakub Borovanský*, G Ch. Dopplera, Praha 5
Tomáš Rusý, G J. Keplera, Praha 6
- 5.–6. *Matouš Helikar*, G Praha 6, Nad Alejí
Petra Kašánková, G Praha 10, Omská
7. *Jakub Krejčí*, G Praha 1, Truhlářská
8. *Marie Kvasnicová*, G Praha 2, Botičská
- 9.–11. *Jan Bydžovský*, G J. Heyrovského, Praha 5

David Janda, G Ch. Dopplera, Praha 5
Alena Preradová, G Praha 4, Konstantinova

Kategorie C

- 1.–3. *Martin Čech*, G Praha 6, Nad Alejí
Luís Černochová, G Praha 6, Nad Alejí
Martin Sýkora, G Praha 6, Nad Alejí
4. *Eliška Janásková*, G Praha 1, Truhlářská
- 5.–6. *Ondřej Cífká*, G Praha 6, Nad Alejí
Michal Kurz, G Budánka, Praha 5
- 7.–15. *Hana Dlouhá*, G J. Keplera, Praha 6
Ondřej Košut, Akad. G Praha 2, Korunní
Anežka Kotrbová, G Praha 9, Špitálská
Adam Láf, G Ch. Dopplera, Praha 5
Miloš Prágr, G Praha 10, Voděradská
Jakub Slepíčka, G Praha 10, Voděradská
Tereza Stopková, PORG, Praha 8
Petr Tomášek, G Praha 10, Voděradská
Tereza Uhlířová, G Praha 10, Omská

Kategorie P

1. *Vlastimil Dort*, G Praha 9, Špitálská
2. *Tomáš Malý*, G Praha 6, Arabská
3. *Jiří Setnička*, G Praha Čakovice
4. *Martin Patera*, G Praha 6, Arabská
- 5.–7. *Jaroslav Brabec*, G Praha 6, Arabská
Martin Kerhart, G Praha 10, Voděradská
Michal Soucha, G Praha 10, Voděradská
8. *Tomáš Báča*, G Praha 6, Arabská

• • • • • **Středočeský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Petr Čermák*, G Kladno

Kategorie B

- 1.–2. *Lenka Houdková*, G Benešov
Miroslav Martínek, G Vlašim
- 3.–6. *Petr Bělohávek*, G J. Barranda Beroun
Stanislav Hlubocký, G Kolín
Matěj Maivald, G J. Barranda Beroun
Jindřich Škripko, G Kladno

Kategorie C

- 1.–2. *Linda Tichá*, G Benešov
Anna Zavadilová, Masarykovo klasické G Říčany
3. *Lucie Konopáčová*, G Kolín
- 4.–5. *Petr Procházka*, G Mladá Boleslav
Adéla Šimůnková, G dr. J. Pekaře, Mladá Boleslav
- 6.–7. *Jan Kára*, G Mladá Boleslav
Jakub Pešek, G Jiřího z Poděbrad, Poděbrady

Kategorie P

1. *Petr Čermák*, G Kladno
2. *Vojtěch Kolář*, G F. Palackého, Neratovice
3. *Vítězslav Plachý*, G Jiřího z Poděbrad, Poděbrady

• • • • • **Jihočeský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Martina Vaváčková*, G P. de Coubertina, Tábor
2. *Pavel Dupal*, G České Budějovice, Jírovcova
3. *Ondřej Šejvl*, SPŠ a VOŠ, Písek
4. *Jan Navara*, G Strakonice

Kategorie B

1. *František Petrouš*, G České Budějovice, Jírovcova
2. *Marek Lipán*, G České Budějovice, Jírovcova

- Jakub Klemsa*, G J. Vrchlického, Klatovy
 7. *Lukáš Chlad*, G Plzeň, Mikulášské nám.
 8. *Filip Hlásek*, G Plzeň, Mikulášské nám.
 9. *Dung Le Anh*, G Tachov

Kategorie B

1. *Jaroslava Ryplová*, Masarykovo G, Plzeň
 2.–3. *Martin Prudek*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Kateřina Soukupová, G Plzeň, Mikulášské nám.

Kategorie C

1. *David Hruška*, G Plzeň, Mikulášské nám.
 2. *Michal Nožička*, G Plzeň, Mikulášské nám.
 3.–4. *Juda Kaleta*, G Klatovy
Thi Tuget Trang Nguyen, G Klatovy
 5.–6. *Kateřina Kinzlová*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Martin Matas, G L. Pika, Plzeň
 7. *Karolína Böhmová*, G J. Š. Baara, Domažlice
 8. *David Kubeš*, G L. Pika, Plzeň
 9.–11. *Lucie Častorálová*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Martin Hezoučký, G Klatovy

Kategorie P

1. *Karel Tesař*, VOŠ a SPŠE, Plzeň
 2.–3. *Filip Hlásek*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Filip Štědronský, G Plzeň, Mikulášské nám.
 4. *Martin Holeček*, G Plzeň, Mikulášské nám.
 5. *Tomáš Faltín*, G J. Vrchlického, Klatovy
 6. *Dana Kodýdková*, G J. Vrchlického, Klatovy

Kategorie A

1. *Josef Hazi*, G Cheb
2. *Lukáš Jarosil*, G Sokolov

Kategorie B

1. *Pham Tat Dat*, G Cheb

Kategorie C

1. *Duc Anh Mai*, G Cheb
2. *Karel Guvenčiak*, První české G, Karlovy Vary
3. *Jan Kučera*, Svobodná chebská škola, Cheb
4. *Lucie Leňková*, G Sokolov
- 5.–6. *Jakub Karaffa*, Svobodná chebská škola, Cheb
Jakub Kowalowski, G Sokolov

Kategorie A

1. *Štěpán Šimsa*, G J. Jungmanna, Litoměřice
2. *Michal Mojžík*, SPŠ a VOŠ, Chomutov
3. *Tadeáš Berkman*, G Ústí nad Labem, Jateční

Kategorie B

1. *František Wolf*, G Podbořany
2. *Markéta Pilneyová*, G J. Jungmanna, Litoměřice
- 3.–4. *František Kaván*, G Česká Kamenice
Vojtěch Kubica, G Česká Kamenice

Kategorie C

1. *Štěpán Šimsa*, G J. Jungmanna, Litoměřice

2. *Hong Thay Le*, G Děčín, Komenského nám.
3. *Kolář Daniel*, G dr. V. Šmejkal, Ústí nad Labem
4. *Šebesta Karel*, G Teplice, Čs. Dobrovolců

Kategorie P

1. *Daniel Stahr*, G J. Jungmanna, Litoměřice
2. *Štěpán Šimsa*, G J. Jungmanna, Litoměřice
3. *Michal Mojžík*, SPŠ a VOŠ, Chomutov
4. *Ondřej Fiedler*, G J. Jungmanna, Litoměřice

• • • • • Liberecký kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Jan Polášek*, G Turnov
2. *Martin Zikmund*, G Turnov
3. *Ondřej Kunc*, G Turnov

Kategorie B

1. *Martin Zikmund*, G Turnov
2. *Jiří Erhart*, G F. X. Šaldy, Liberec
3. *Petr Jančík*, G Jablonec nad Nisou, U Balvanu

Kategorie C

1. *Marcel Tománek*, G Jablonec nad Nisou, U Balvanu
2. *Jan Baborák*, G Česká Lípa
3. *Ota Kunt*, G F. X. Šaldy, Liberec
4. *Jakub Chvosta*, G Jablonec nad Nisou, Dr. Randy
5. *Pavel Buchvald*, G Liberec, Jeronýmová
6. *Ondřej Čajánek*, G Jablonec nad Nisou, U Balvanu
8. *Tomáš Müller*, G Jablonec nad Nisou, Dr. Randy
9. *Miroslav Hanzelka*, G Česká Lípa

Kategorie P

1. *Jan Polášek*, G Turnov
2. *Martin Zikmund*, G Turnov
3. *Karolína Burešová*, G Česká Lípa
4. *Ondřej Kunc*, G Turnov

• • • • • **Královéhradecký kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Petr Pařízek*, G B. Němcové, Hradec Králové
2. *Jan Voborník*, Jiráskovo G, Náchod
3. *Anna Chejnovská*, G B. Němcové, Hradec Králové
- 4.–5. *Kateřina Medková*, Biskupské G B. Balbína, Hradec Králové
Tomáš Rubín, G B. Němcové, Hradec Králové
- 6.–7. *Jan Remeš*, G Dobruška
Martin Vojtíšek, G B. Němcové, Hradec Králové

Kategorie B

1. *Petr Jurčo*, G Trutnov
- 2.–3. *Josefina Mádrová*, G Dobruška
Anežka Semrádová, G B. Němcové, Hradec Králové
4. *Kateřina Vlčková*, G Broumov
5. *Petr Bartoň*, G J. K. Tyla, Hradec Králové

Kategorie C

1. *Petr Kujal*, G Broumov
- 2.–6. *Vojtěch Erbrt*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
Matěj Fanta, Jiráskovo G, Náchod
Filip Hauptfleisch, G F. M. Pelcla, Rychnov nad Kněžnou
Pavel Rozdolský, G a SOŠ Jaroměř
Jan Vávra, G Hořice
7. *Eva Brožková*, G B. Němcové, Hradec Králové
8. *Lenka Šimonová*, Lepařovo G, Jičín
9. *Daniel Knut Pernet*, G Nový Bydžov

10. *Václav Pokorný*, Lepařovo G, Jičín

Kategorie P

1. *Michal Bilanský*, Lepařovo G, Jičín

2. *Michael Pokorný*, SŠ aplikované kybernetiky, Hradec Králové

• • • • • **Pardubický kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Tomáš Kubelka*, G Žamberk

2. *Miroslav Koblížek*, G Žamberk

3. *Jan Novotný*, G Pardubice, Dašická

Kategorie B

1. *Tomáš Kubelka*, G Žamberk

Kategorie C

1. *Kristýna Kohoutová*, G Žamberk

2. *Martin Dvořák*, SPŠE Pardubice

3. *Jiří Malíř*, G Pardubice, Dašická

4.–5. *Tomáš Kodytek*, G Ústí nad Orlicí

Marek Skalický, G Ústí nad Orlicí

6.–8. *Kateřina Jarkovská*, G Jevíčko

František Filip, G Ústí nad Orlicí

Michal Farník, G Vysoké Mýto

9. *Jan Baláš*, G Žamberk

10.–12. *Jakub Jačisko*, G Lanškroun

Filip Jeniš, G Jevíčko

Jiří Trnka, G Polička

Kategorie P

1. *David Vondrák*, G Pardubice, Dašická

Kategorie A

1. *Jan Nevoral*, G Jihlava
2. *Ondřej Bartoš*, G Žďár nad Sázavou
- 3.–4. *Jaromír Karmazín*, G Velké Meziříčí
Jan Schwarz, G Jihlava
5. *Petr Louša*, G Havlíčkův Brod
- 6.–7. *Ondřej Šalanda*, G Žďár nad Sázavou
Jiří Vejrosta, G Třebíč
8. *Vladislav Větrovec*, G Třebíč

Kategorie B

1. *Jakub Krásenský*, G Jihlava
2. *Ondřej Bartoš*, G Žďár nad Sázavou
- 3.–4. *Eva Havelková*, G Žďár nad Sázavou
Jan Kuchařík, G Jihlava
5. *Štěpán Holub*, G Jihlava
6. *Ondřej Zacha*, G Jihlava
- 7.–8. *Lukáš Buchta*, G Velké Meziříčí
Helena Fišarová, G Jihlava
- 9.–11. *Josef Bača*, G V. Makovského, Nové Město na Moravě
Ludmila Mašterová, G Třebíč

Kategorie C

1. *Jakub Sláma*, G Třebíč
2. *Filip Murár*, G Třebíč
- 3.–4. *Pavel Hladký*, G Jihlava
Marian Krájíček, G Jihlava
- 5.–6. *Stanislav Kruml*, G Chotěboř
Anna Kubátová, G Chotěboř
- 7.–8. *Jaroslav Fíkr*, G Žďár nad Sázavou
Jan Hladík, G Pelhřimov
9. *Lucie Zemánková*, G Třebíč
10. *Daniel Jurda*, G Velké Meziříčí

Kategorie A

- 1.–2. *Hynek Jemelík*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
David Klaška, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 3.–4. *Michal Horák*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Bohuslav Zmek, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 5.–6. *Tomáš Pokorný*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Pavel Ševeček, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 7.–9. *Pavel Čoupek*, Biskupské G Brno
Aleš Dostál, G Blansko
Jan Sopoušek, G Brno-Řečkovice
- 10.–12. *Jaromír Kala*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Gabriela Kubíčková, Cyrilometodějské G Brno, Lerchova
Tomáš Lamser, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie B

- 1.–3. *Pavel Polcer*, G Brno, Křenová
Jana Sotáková, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Dominik Tělužil, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Jan Stopka*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 5.–6. *Martin Novák*, G Hodonín
Václav Raida, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 7.–8. *Tomáš Effenberg*, G Brno, Vídeňská
David Máchal, Biskupské G Brno
- 9.–10. *Michal Pokorný*, G Břeclav

Kategorie C

1. *Jakub Vančura*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 2.–3. *Tadeáš Kučera*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jana Novotná, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 4.–5. *Vojtěch Hlávka*, G a ZUŠ Šlapanice
Mark Karpilovsky, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 6.–7. *Anna Hradecká*, G Brno-Řečkovice
Jan Povolný, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 8.–10. *Kristián Kozák*, G Matyáše Lercha Brno

Tereza Novotná, G a ZUŠ Šlapanice
Oldřich Vlašic, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie P

1. *Hynek Jemelík, G Brno, tř. Kpt. Jaroše*
2. *David Klačka, G Brno, tř. Kpt. Jaroše*
3. *Tomáš Lamser, G Brno, tř. Kpt. Jaroše*
4. *Bohuslav Zmek, G Brno, tř. Kpt. Jaroše*
- 5.–6. *Vendula Poncová, G Brno, tř. Kpt. Jaroše*
Vít Stanislav, Purkyňovo gymnázium, Strážnice

• • • • • **Zlínský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Josef Ondřej, G Rožnov pod Radhoštěm*

Kategorie B

1. *David Šerý, G Rožnov pod Radhoštěm*
2. *Filip Křenek, G Rožnov pod Radhoštěm*
3. *Zdeněk Rafaj, G Zlín-Lesní čtvrť*
4. *Michal Opler, Masarykovo G, Vsetín*
5. *Lucie Doležálková, G Uherské Hradiště*

Kategorie C

1. *Jan Mikel, G Rožnov pod Radhoštěm*
2. *Adriana Slaníková, G Uherské Hradiště*
3. *Jitka Janíková, G Uherské Hradiště*
4. *Lukáš Fusek, G Uherské Hradiště*
5. *Jan Mrázek, G Kroměříž*
6. *Petra Křenová, G Uherské Hradiště*
7. *Michal Janoušek, G Zlín, nám. TGM*
- 8.–9. *Petra Horák, G Kroměříž*
Lenka Šilhánková, G Jana Pivečky, Slavičín

Kategorie P

- 1.-2. *Aleš Krivák*, SPŠH Uherské hradiště
Petr Pecha, SPŠS Vsetín
- 3.-4. *Matěj Kocián*, G Zlín-Lesní čtvrť
Lukáš Ptáček, G J. A. Komenského Uherský Brod

• • • • • Olomoucký kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Martin Broušek*, G J. Škody, Přerov
2. *Vojtěch Miloš*, G Hranice
3. *Lukáš Kunovský*, G Jeseník
4. *Dominik Lachman*, G Olomouc-Hejčín

Kategorie B

1. *Eva Gocníková*, G J. Škody, Přerov
- 2.-3. *Alena Harlenderová*, Slovanské G Olomouc
Klára Sládečková, G J. Škody, Přerov
4. *Jiří Polcr*, G Olomouc-Hejčín
- 5.-6. *Jiří Eichler*, Slovanské G Olomouc
Gabriela Olivíková, G J. Škody, Přerov
7. *Josef Uchýtil*, G Jeseník
8. *Šimon Rozsíval*, G Šumperk

Kategorie C

- 1.-2. *Lubomír Grund*, G Zábřeh
Jan Krivošej, G Šumperk
3. *Aleš Neoral*, G Olomouc-Hejčín
4. *Matěj Suchánek*, G J. Wolkera, Prostějov
5. *Adéla Hrdličková*, G Šumperk
- 6.-7. *Dominika Fídrová*, G Kojetín
Ondřej Krčmář, G Hranice
- 8.-9. *Lukáš Chmela*, G J. Škody, Přerov

• • • • • Moravskoslezský kraj • • • • •

Kategorie A

1. Petr Boroš, G M. Koperníka, Bílovec
2. Jakub Solovský, G M. Koperníka, Bílovec
- 3.–4. Jiří Biolek, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Jan Legerský, G Ostrava-Hrabůvka
5. Simona Domesová, G M. Koperníka, Bílovec
6. Miroslav Raška, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
7. Matúš Kopf, Mendelovo G, Opava
8. Ondřej Bouchala, G Havířov, Komenského
9. Josef Svoboda, G Frýdlant nad Ostravicí
- 10.–11. Lukáš Folwarczný, G Havířov, Komenského
Lukáš Habrňal, G P. Bezruče, Frýdek-Místek

Kategorie B

- 1.–3. Ondřej Bouchala, G Havířov
Lukáš Folwarczný, G Havířov
Michal Kopf, Slezské G Opava
4. Jan Tofel, Mendelovo G, Opava
5. Barbora Mólová, G M. Koperníka, Bílovec
6. Augustin Židek, G Frýdlant nad Ostravicí

Kategorie C

1. Josef Svoboda, G Frýdlant nad Ostravicí
2. Stanislav Horák, G M. Koperníka, Bílovec
- 3.–4. Lukáš Ondráček, G Ostrava-Zábřeh
Matěj Vaněk, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
- 5.–6. Filip Vavera, Biskupské G, Ostrava-Poruba
Magdaléna Žváčková, G Rýmařov
- 7.–9. Lubomír Hudec, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Lucie Kolčárková, G P. Bezruče, Frýdek-Místek

- Kristýna Mořkovská*, G P. Bezruč, Frýdek-Místek
10.–12. *Martin Poloch*, Matiční G, Ostrava
Ondřej Sikora, G Karviná
Kateřina Solovská, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie P

1. *Lukáš Folwarczný*, G Havířov, Komenského
2. *Tomáš Dočekal*, G J. Kainara, Hlučín

Výsledky ústředního kola 59. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1. <i>David Klaška</i> , 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	14	35 b.
2. <i>Miroslav Olšák</i> , 8/8 G Buďánka, Praha	5	34 b.
3. <i>Jáchym Sýkora</i> , 4/4 G Ch. Dopplera, Praha	5	27 b.
4.–6. <i>Radek Marciňa</i> , 4/4 G Ch. Dopplera, Praha	5	26 b.
<i>Lukáš Zavřel</i> , 7/8 G Praha 9, Chodovická		26 b.
<i>Bohuslav Zmek</i> , 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše		26 b.
7. <i>Petr Ryšavý</i> , 8/8 G J. Heyrovského, Praha	5	24 b.
8.–9. <i>Filip Hlásek</i> , 7/8 G Plzeň, Mikulášské nám.		23 b.
<i>Tomáš Zeman</i> , 7/8 G J. Keplera, Praha	6	23 b.
10. <i>Jakub Solovský</i> , 3/4 G M. Koperníka, Bílovec		22 b.
11. <i>Michael Bílý</i> , 7/8 G J. Vrchlického, Klatovy		21 b.

Další úspěšní řešitelé

12.–14. <i>Martin Bucháček</i> , 7/8 G L. Pika, Plzeň		20 b.
<i>Michal Horák</i> , 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše		20 b.
<i>Jakub Klemsa</i> , 8/8 G J. Vrchlického, Klatovy		20 b.
15.–19. <i>Ondřej Bartoš</i> , 6/8 G Žďár nad Sázavou		19 b.
<i>Tadeáš Dohnal</i> , 7/8 G Ch. Dopplera, Praha	5	19 b.
<i>Kateřina Honzáková</i> , 4/4 G J. Keplera, Praha	6	19 b.
<i>Josef Ondřej</i> , 8/8 G Rožnov pod Radhoštěm		19 b.
<i>Martin Töpfer</i> , 2/4 G Praha 7, Nad Štolou		19 b.
20. <i>Jiří Biolek</i> , 5/6 G P. Bezruče, Frýdek-Místek		18 b.
21.–22. <i>Hynek Jemelík</i> , 3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše		17 b.
<i>Petr Pařízek</i> , 6/6 G B. Němcové, Hradec Králové		17 b.
23. <i>Lukáš Chlad</i> , 8/8 G Plzeň, Mikulášské nám.		16 b.

Výsledky ústředního kola 59. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1. <i>Hynek Jemelík</i> , 3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	52 b.
2. <i>David Klačka</i> , 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	51 b.
3. <i>Vlastimil Dort</i> , 8/8 G Praha 9, Špitálská	45 b.
4. <i>Jan Polášek</i> , 7/8 G Turnov	41 b.
5.–6. <i>Filip Hlásek</i> , 7/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	40 b.
<i>Michal Mojžík</i> , 3/4 SPŠ a VOŠ Chomutov	40 b.
7. <i>Petr Čermák</i> , 8/8 G Kladno	37 b.

Další úspěšní řešitelé

8.–9. <i>Martin Holeček</i> , 8/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	34 b.
<i>Tomáš Lamser</i> , 8/8 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	34 b.
10.–11. <i>Martin Patera</i> , 4/4 G Praha 6, Arabská	30 b.
<i>Štěpán Šimsa</i> , 5/8 G J. Jungmanna, Litoměřice	30 b.
12. <i>Vojtěch Kolář</i> , 8/8 G F. Palackého, Neratovice	29 b.
13. <i>Bohuslav Zmek</i> , 8/8 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	24 b.
14. <i>Karel Tesař</i> , 4/4 VOŠ a SPŠE Plzeň	20 b.
15.–17. <i>Michal Bilanský</i> , 8/8 Lepařovo G, Jičín	19 b.
<i>Lukáš Folwarczný</i> , 6/8 G Havířov, Komenského	19 b.
<i>Jiří Setnička</i> , 5/6 G Praha 9, Čakovice	19 b.

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Erika a Klárka hrály hru „slovní logik“ s těmito pravidly: Hráč A si myslí slovo složené z pěti různých písmen. Hráč B vysloví libovolné slovo složené z pěti různých písmen a hráč A mu prozradí, kolik písmen uhodl na správné pozici a kolik na nesprávné. Písmena považujeme za různá, i když se liší jen háčkem nebo čárkou (například písmena A, Á jsou různá). Kdyby si hráč A myslel například slovo LOŽKA a B by vyslovil slovo KOLÁČ, odpoví hráč A, že jedno písmeno uhodl hráč B na správné pozici a dvě na nesprávné. Zkráceně sdělí „1+2“, neboť se opravdu obě slova shodují pouze v písmenu O včetně pozice (druhé zleva) a v písmenech K a L, jejichž pozice jsou odlišné. Erika si myslela slovo z pěti různých písmen a Klárka vyslovila slova KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA a ZÁPAL. Erika na tato slova v daném pořadí odpověděla $0 + 3$, $0 + 2$, $1 + 2$, $2 + 0$ a $1 + 2$. Zjistěte, jaké slovo si Erika mohla myslet. (Peter Novotný)

C – I – 2

Vrcholem C pravoúhelníku $ABCD$ vedte přímky p a q , které mají s daným pravoúhelníkem společný pouze bod C , přičemž přímka p má od bodu A největší možnou vzdálenost a přímka q vymezuje s přímkami AB , AD trojúhelník co nejmenšího obsahu. (Leo Boček)

C – I – 3

Určete všechna reálná čísla x , která vyhovují rovnici $4x - 2[x] = 5$. (Symbol $[x]$ značí největší celé číslo, které není větší než číslo x , tzv. dolní celou část reálného čísla x .) (Jaroslav Švrček)

C – I – 4

Kružnice $k(S; r)$ se dotýká přímky AB v bodě A . Kružnice $l(T; s)$ se dotýká přímky AB v bodě B a protíná kružnici k v krajních bodech C , D jejího průměru. Vyjádřete délku a úsečky AB pomocí poloměrů r , s . Dokažte dále, že průsečík M přímk CD , AB je středem úsečky AB .

(Leo Boček)

C – I – 5

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a , b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} \leq \frac{a + b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost.

(Ján Mazák)

C – I – 6

Najděte všechna přirozená čísla, která nejsou dělitelná deseti a která ve svém dekadickém zápisu mají někde vedle sebe dvě nuly, po jejichž vyškrtnutí se původní číslo 89krát zmenší.

(Jaromír Šimša)

C – S – 1

Kružnice $k(S; 6 \text{ cm})$ a $l(O; 4 \text{ cm})$ mají vnitřní dotyk v bodě B . Určete délky stran trojúhelníku ABC , kde bod A je průsečík přímky OB s kružnicí k a bod C je průsečík kružnice k s tečnou z bodu A ke kružnici l .

(Pavel Leischner)

C – S – 2

Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a , b , pro něž platí $a^2 + b + 2 = a + b^2$.

(Ján Mazák)

C – S – 3

Dokažte, že pro libovolná celá čísla n a k větší než 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ dělitelné dvanácti.

(Vojtech Bálint)

C – II – 1

Dokažte, že pro libovolná čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty \rangle$ platí nerovnost

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - (a - 1)^2(b - 1)^2 \geq 4,$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost.

(*Jaromír Šimša*)

C – II – 2

Je dána kružnice k se středem S . Kružnice l má větší poloměr než kružnice k , prochází jejím středem a protíná ji v bodech M a N . Přímka, která prochází bodem N a je rovnoběžná s přímkou MS , vytíná na kružnicích tětivy NP a NQ . Dokažte, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný.

(*Tomáš Jurík*)

C – II – 3

Určete všechny dvojice reálných čísel x, y , které vyhovují soustavě rovnic

$$\lfloor x + y \rfloor = 2010,$$

$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

jestliže a) $p = 2$, b) $p = 3$.

Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než dané reálné číslo x (tzv. dolní celá část reálného čísla x).

(*Jaroslav Švrček*)

Řešení úloh

C – I – 1

Slova ZÁPÁL a STRUK nemají společná písmena. Proto se, jak plyne z odpovědí $1+2$ a $0+2$, mezi jejich písmeny, jež dohromady tvoří množinu $M = \{Z, \acute{A}, P, A, L, S, T, R, U, K\}$, nachází všech pět písmen hledaného slova. Ve slově SKOBA mají být právě tři z hledaných písmen. Jsou to tedy písmena S, K, A. (Zbývající písmena B a O totiž do množiny M nepatří.) Ve slově CESTA mají být jen dvě z hledaných písmen, a obě na správné pozici. Jsou to již nalezená S a A, která tedy patří na třetí, resp. páté místo hledaného slova (a písmeno T lze z množiny M „vyloučit“). Písmeno K nemůže být ani na prvním, ani druhém místě, jak plyne z odpovědi pro slova KABÁT ($0+3$) a SKOBA ($1+2$). Je tedy na čtvrtém místě a zbývá určit první dvě písmena. Ve slově STRUK jsou jen dvě z hledaných písmen (musí to tedy být S a K), obě v nesprávných pozicích. Proto z množiny M „vyloučíme“ i písmena R, U (a T, pokud jsme to dosud neučinili). Zbývající dvě hledaná písmena proto patří do množiny $\{Z, \acute{A}, P, L\}$. Z podmínek pro slovo KABÁT plyne, že jedno z nich je $\acute{A}$. Ve slově ZÁPÁL je právě jedno písmeno ve správné pozici. Kdyby to bylo Z, neměli bychom kam umístit písmeno $\acute{A}$. Je tedy $\acute{A}$ na druhém místě a navíc lze vyloučit písmeno Z. Na prvním místě hledaného slova může být L nebo P. Snadno se přesvědčíme, že nalezená slova LÁSKA i PÁSKA vyhovují všem podmínkám úlohy.

C – I – 2

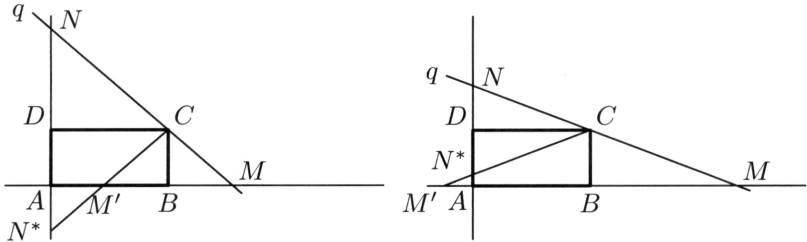
Pata P kolmice z bodu A na přímkou p procházející bodem C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AC . Vzdálenost bodu A od přímky p , tj. délka úsečky AP , je tedy nejvýše rovna velikosti průměru AC . Přitom rovnost nastane, právě když je přímka p kolmá na úhlopříčku AC . Přitom je zřejmé, že taková přímka p má s daným pravoúhelníkem společný pouze bod C .

Zvolme nyní libovolnou přímku q tak, aby měla s pravoúhelníkem $ABCD$ společný jen bod C . Její průsečíky s přímkami AB , AD označme M a N (v uvedeném pořadí). Dále označme M' obraz bodu M v souměrnosti podle přímky BC a N^* obraz bodu N v souměrnosti podle přímky CD . Protože $|\sphericalangle NCD| + |\sphericalangle MCB| = 180^\circ - |\sphericalangle BCD| = 90^\circ$, plyne z právě uvedených souměrností rovnost $|\sphericalangle MCM'| = 2|\sphericalangle MCB| =$

$= 2(90^\circ - |\sphericalangle NCD|) = 180^\circ - 2|\sphericalangle NCD| = 180^\circ - |\sphericalangle NCN^*|$. Body C , M' a N^* leží tudíž na téže polopřímce s počátkem C . Pro obsah trojúhelníku AMN tak vždy platí (obr. 11)

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= S_{ABCD} + S_{BMC} + S_{DCN} = \\ &= S_{ABCD} + S_{M'BC} + S_{DN^*C} \geq 2S_{ABCD}, \end{aligned}$$

s rovností, právě když polopřímka $CM' = CN^*$ bude procházet vrcholem A daného pravoúhelníku, tj. právě když $M' = A = N^*$ (pak budou BC a CD středními příčkami trojúhelníku AMN).



Obr. 11

Závěr. Přímku q , pro kterou je obsah trojúhelníku AMN minimální, sestrojíme jako přímku CM , kde M je obraz bodu A v osové souměrnosti s osou BC . Přímka p s největší možnou vzdáleností od bodu A je za daných podmínek kolmice na úsečku AC sestrojená v bodě C .

Jiné řešení. Označme P patu kolmice z bodu A na hledanou přímku p a φ velikost odchylky přímek p a AC . Pro vzdálenost d přímky p od bodu A platí $d = |AP| = |AC| \sin \varphi \leq |AC|$. Přímka p má tedy největší možnou vzdálenost od bodu A , právě když je kolmá na AC .

Uvažujme libovolnou přímku q , která má s pravoúhelníkem $ABCD$ společný jen bod C , a budeme hledat, za jakých podmínek ohraničuje spolu s přímkami AB a AD trojúhelník nejmenšího obsahu. Použijeme označení z obr. 11 a zavedeme $a = |AB| = |DC|$, $x = |BM|$, $b = |AD| = |BC|$ a $y = |DN|$. Pomocí těchto veličin vyjádříme obsah trojúhelníku AMN a odhadneme jej užitím A-G nerovnosti:

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(ab+xy+ay+bx) \geq \\ &\geq \frac{1}{2}(ab+xy+2\sqrt{ab \cdot xy}). \end{aligned} \quad (1)$$

Z podobnosti trojúhelníků BMC a DCN dostáváme $|DN|/|BC| = |DC|/|BM|$, což vzhledem ke zvolenému označení dává $xy = ab$. Po

dosazení do (1) a po jednoduché úpravě tak dostaneme $S_{AMN} \geq 2ab = 2S_{ABCD}$. Přitom rovnost nastane, právě když platí $ay = bx$. Spolu s podmínkou $xy = ab$ představují oba vztahy soustavu rovnic s neznámými x, y , jejímž vyřešením dostaneme $x = a$ a $y = b$. Dospěli jsme tedy ke stejnému výsledku jako v prvním řešení, kde jsme též uvedli konstrukci přímky q .

Jiné řešení. Postupujeme stejně jako v předchozím řešení s tím rozdílem, že nejprve z podobnosti trojúhelníků $BMC \sim DCN$ určíme $y = ab/x$ a potom odhadneme obsah trojúhelníku AMN pomocí tvrzení z úlohy 5.2 takto:

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(a+x)\left(b + \frac{ab}{x}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(2ab + bx + \frac{a^2b}{x}\right) = ab + \frac{1}{2}ab\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \geq 2ab. \end{aligned}$$

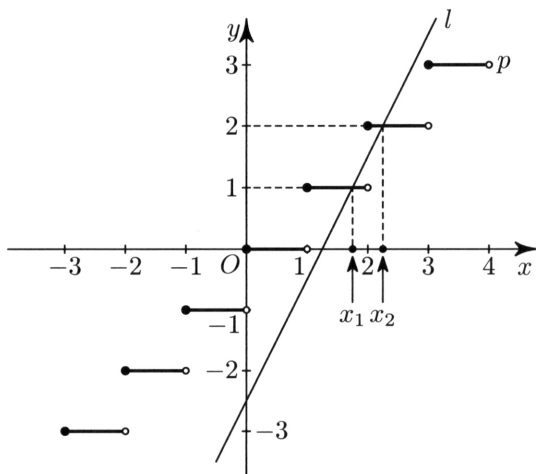
Rovnost nastává, právě když $\frac{x}{a} = \frac{a}{x}$, což je ekvivalentní s podmínkou $x = a$.

C – I – 3

Položme $\lfloor x \rfloor = a$, pak $x = a + t$, kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$, a rovnici $4(a+t) - 2a = 5$ ekvivalentně upravme na tvar $a = \frac{5}{2} - 2t$. Aby bylo číslo a celé, musí být $2t = k \cdot \frac{1}{2}$, kde k je liché číslo. Navíc $2t \in \langle 0, 2 \rangle$. Je tedy buď $2t = \frac{1}{2}$ a $a = 2$, nebo $2t = \frac{3}{2}$ a $a = 1$. Původní rovnice má proto dvě řešení: $x_1 = 2,25$ a $x_2 = 1,75$.

Jiné řešení. Rovnici upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Jejím řešením jsou x -ové souřadnice průsečíků grafů funkcí $l: y = 2x - \frac{5}{2}$ a $p: y = \lfloor x \rfloor$. Grafy se protínají ve dvou bodech, jak vidíme na obr. 12. Pro první průsečík platí $\lfloor x \rfloor = 1$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme $4x - 2 = 5$ a odtud $x_1 = \frac{7}{4} = 1,75$. Pro druhý průsečík platí $\lfloor x \rfloor = 2$, takže $4x - 4 = 5$ a $x_2 = \frac{9}{4} = 2,25$.

Jiné řešení. Rovnici upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Taková rovnice bude splněna, právě když číslo $2x - \frac{5}{2}$ bude celé a bude splňovat nerovnosti $x - 1 < 2x - \frac{5}{2} \leq x$ neboli $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$. Pro taková x hodnoty výrazu $2x - \frac{5}{2}$ zřejmě zaplní interval $\frac{1}{2} < 2x - \frac{5}{2} \leq \frac{5}{2}$. V něm leží právě dvě celá čísla 1 a 2, tudíž hledaná x najdeme z rovnic $2x - \frac{5}{2} = 1$ a $2x - \frac{5}{2} = 2$.



C - I - 4

Protože kružnice l má za tětivu průměr CD kružnice k a dané kružnice nejsou totožné, platí pro jejich poloměry nerovnost $s > r$. Označíme-li P patu kolmice z bodu S na úsečku BT (obr. 13), pak z Pythagorovy věty

pro pravoúhlé trojúhelníky CST a SPT plyne

Odtud pro velikost úsečky SP vychází

$$|SP|^2 = (s^2 - r^2) - (s - r)^2 = 2r(s - r).$$

A protože $ABPS$ je pravoúhelník, dostáváme

$$|AB| = |SP| = \sqrt{2r(s - r)}.$$

Z pravoúhlých trojúhelníků AMS a MTS dále podle první rovnosti v (1) plyne

$$|AM|^2 = |SM|^2 - r^2 = |MT|^2 - |ST|^2 - r^2 = |MT|^2 - s^2,$$

přitom z pravoúhlého trojúhelníku MBT máme

$$|BM|^2 = |MT|^2 - s^2.$$

Je proto $|AM| = |BM|$, a bod M je tedy středem úsečky AB .

Poznámka. Závěr, že M je středem úsečky AB , plyne okamžitě z mocnosti bodu M k oběma kružnicím (bod M leží na tzv. chordále obou kružnic). Tyto pojmy jsou však pro soutěžící kategorie C dosud neznámé a nebudou nezbytné ani pro řešení dalších soutěžních kol.

C – I – 5

Pravá nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$4(a^2 + 3ab + b^2) \leq 5(a + b)^2,$$

kterou lze ekvivalentně upravit na nerovnost $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$. Ta je splněna vždy a rovnost v ní nastane, právě když $a = b$.

Levou nerovnost zbavíme zlomků a umocníme na druhou,

$$\begin{aligned} 25ab(a^2 + 2ab + b^2) &\leq 4(a^4 + 9a^2b^2 + b^4 + 6a^3b + 6ab^3 + 2a^2b^2), \\ 25ab(a^2 + b^2) + 50a^2b^2 &\leq 4a^4 + 4b^4 + 44a^2b^2 + 24ab(a^2 + b^2), \end{aligned}$$

takže po úpravě dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$4a^4 + 4b^4 - 6a^2b^2 \geq ab(a^2 + b^2).$$

Po odečtení výrazu $2a^2b^2$ od obou stran nerovnosti se nám podaří na obou stranách využít úpravy na čtverec. Dostaneme tak (opět ekvivalentní) nerovnost

$$4(a^2 - b^2)^2 \geq ab(a - b)^2.$$

Rozdíl čtverců v závorce levé strany ještě rozložíme na součin a vztah upravíme na tvar $4(a - b)^2(a + b)^2 \geq ab(a - b)^2$.

Pokud je $a = b$, platí rovnost. Je-li $a \neq b$, můžeme poslední nerovnost vydělit kladným výrazem $(a - b)^2$ a dostaneme tak nerovnost $4(a + b)^2 \geq \geq ab$ neboli $4a^2 + 4b^2 + 7ab \geq 0$. Levá strana této nerovnosti je vždy kladná, proto vyšetřovaná nerovnost platí pro všechna kladná čísla a, b , přičemž rovnost v ní nastane, právě když $a = b$.

Jiné řešení. Aritmetický průměr c čísel a, b má tu vlastnost, že se od něj obě čísla liší o tutéž hodnotu d . Nahradíme-li proměnné a, b v daných nerovnostech proměnnými c, d , zápis nerovností i důkaz obou vztahů se zjednoduší. Položme tedy $c = \frac{1}{2}(a + b)$, pak $a = c + d$ a $b = c - d$ (kde $d = \frac{1}{2}(a - b)$, jak se snadno můžeme přesvědčit). Tudíž $a^2 + b^2 = 2(c^2 + d^2)$, $ab = c^2 - d^2$, odkud $a^2 + 3ab + b^2 = 5c^2 - d^2$. Označme ještě písmeny m a n levou a pravou stranu první z dokazovaných nerovností. Potom

$$m = \sqrt{ab} = \sqrt{c^2 - d^2}$$

a

$$\begin{aligned} n &= \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} = \frac{2(5c^2 - d^2)}{5 \cdot 2c} = \\ &= c - \frac{d^2}{5c} = \sqrt{\left(c - \frac{d^2}{5c}\right)^2} = \sqrt{c^2 - d^2 \left(\frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2}\right)}. \end{aligned}$$

Protože z vyjádření kladné hodnoty m vidíme, že $d^2 < c^2$, pro výraz v poslední závorce pod odmocninou platí

$$1 > \frac{2}{5} \geq \frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2} > \frac{2}{5} - \frac{1}{25} = \frac{9}{25} > 0,$$

což znamená, že odmocněnec leží v uzavřeném intervalu mezi čísly $c^2 - d^2$ a c^2 . Odtud vyplývá $m \leq n \leq c$, přičemž rovnost nastane, právě když $d = 0$, tj. když $a = b$.

Poznámka. Z výsledků soutěžní úlohy plyne, že rozdíl mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou kladných čísel lze zdola odhadnout nezáporným lomeným výrazem takto:

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{a + b}{2} - \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} = \frac{(a - b)^2}{10(a + b)}.$$

Umocněním osamostatněné odmocniny a dalšími úpravami můžeme dokázat silnější odhad téhož druhu

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}.$$

Jinou metodu důkazů spolu s dalšími podobnými nerovnostmi najdete v článku J. Šimši *Dolní odhady rozdílu průměrů* in *Rozhledy matematicko-fyzikální* 65 (1986/87), číslo 10, str. 403–407.

C – I – 6

a) Předpokládejme nejprve, že nuly jsou na třetím a druhém místě zprava. Hledané číslo x má pak tvar $x = 1\,000a + b$, kde a je přirozené číslo (stejně jako v dalších případech) a b nenulová číslice. Podmínku zadání $1\,000a + b = 89(10a + b)$ upravíme na tvar $5a = 4b$, z něž plyne, že b je násobek pěti. Vyhovuje tak jen $b = 5$ a $a = 4$, tedy $x = 4\,005$.

b) Jestliže hledané číslo x má nuly na čtvrtém a třetím místě zprava, je $x = 10\,000a + b$, kde b je dvojmístné číslo. Podmínku zadání $10\,000a + b = 89(100a + b)$ upravíme na tvar $25a = 2b$, z něž plyne, že b je lichý násobek čísla 25 (připomínáme, že x , a tedy ani b není dělitelné deseti). Odtud $b = 25$, $a = 2$ nebo $b = 75$, $a = 6$, tedy $x \in \{20\,025, 60\,075\}$.

c) Jestliže hledané číslo x má nuly na pátém a čtvrtém místě zprava, je $x = 100\,000a + b$, kde b je trojmístné číslo. Podmínku zadání $100\,000a + b = 89(1\,000a + b)$ upravíme na tvar $125a = b$, z něž plyne, že b je lichý násobek čísla 125. Vyhovují pouze $b = 125$ a $a = 1$, $b = 375$ a $a = 3$, $b = 625$ a $a = 5$, $b = 875$ a $a = 7$, tedy $x \in \{100\,125, 300\,375, 500\,625, 700\,875\}$.

d) Z předchozích případů vidíme, že pro hledané číslo x tvaru $x = 10^{n+2}a + b$, kde b je n -místné číslo, dostáváme podmínku $10^{n+2}a + b = 89(10^n a + b)$ neboli $11 \cdot 10^n a = 88b$, odkud pro $n \geq 4$ dostáváme podmínku $125 \cdot 10^{n-3}a = b$, podle níž je b násobkem deseti. Žádné další x , které by vyhovovalo zadání, tedy neexistuje.

Závěr. Hledaná čísla jsou 4 005, 20 025, 60 075, 100 125, 300 375, 500 625, a 700 875.

C – S – 1

Označme a/b původní zlomek. Podle zadání platí rovnosti

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} = \frac{1}{12} \quad (a, b \in \mathbb{N})$$

ekvivalentní se vztahy

$$20b(a+1) - 20a(b+1) = b(b+1)$$

a

$$12b(a+2) - 12a(b+2) = b(b+2),$$

které upravíme na tvar $19b - 20a = b^2$ a $22b - 24a = b^2$. Po odečtení obou vztahů zjistíme, že $4a = 3b$, což po dosazení do druhé rovnosti dá $22b - 18b = b^2$ neboli $b^2 = 4b$. Vzhledem k podmínce $b \neq 0$ odtud plyne $b = 4$ a $a = 3$.

Hledané zlomky jsou tedy $3/4$, $4/5$ a $5/6$.

Jiné řešení. Označme a/b původní zlomek. Ze vztahů

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4 \cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4 \cdot 6}$$

lze odhadnout, že řešením by mohlo být $b = 4$. Pak

$$\frac{4(a+1) - 5a}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{4(a+2) - 6a}{4 \cdot 6} = \frac{1}{12},$$

neboli $a = 3$. Musíme se však ještě přesvědčit, že úloha jiné řešení nemá. Podmínky úlohy vedou ke vztahům

$$\frac{b-a}{b(b+1)} = \frac{1}{4 \cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{2(b-a)}{b(b+2)} = \frac{2}{4 \cdot 6}.$$

Z podílu jejich levých a pravých stran pak plyne

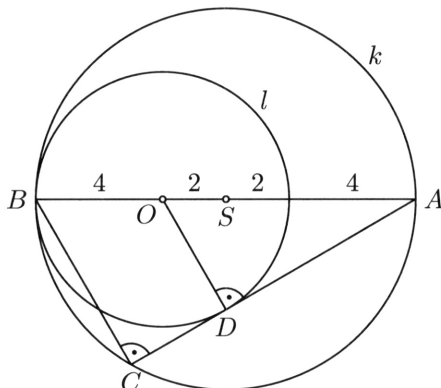
$$\frac{b+2}{b+1} = \frac{6}{5},$$

čemuž vyhovuje jediné $b = 4$.

Poznámka. V úplném řešení nesmí chybět vyloučení možnosti $b \neq 4$. Například z podobných rovností $1/20 = 30/24 \cdot 25$ a $1/12 = 52/24 \cdot 26$ bychom mohli hádat, že $b = 24$, což řešením není.

C – S – 2

Bod dotyku kružnice l s tečnou z bodu A označme D (obr. 14). Z vlastností tečny ke kružnici plyne, že úhel ADO je pravý. Zároveň je pravý



Obr. 14

i úhel ACB (Thaletova věta). Trojúhelníky ABC a AOD jsou tak podobné podle věty uu , neboť se shodují v úhlech ACB , ADO a ve společném úhlu při vrcholu A . Z uvedené podobnosti plyne

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \quad (1)$$

Ze zadaných číselných hodnot vychází $|OD| = |OB| = 4$ cm, $|OS| = |SB| - |OB| = 2$ cm, $|OA| = |OS| + |SA| = 8$ cm a $|AB| = 12$ cm. Podle (1) je tedy $|BC| : 4 \text{ cm} = 12 : 8$ a odtud $|BC| = 6$ cm. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC nakonec zjistíme, že $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2} \text{ cm} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$.

C – S – 3

Rovnici přepíšeme do tvaru $2 = (b^2 - a^2) - (b - a)$, z něž po využití vztahu pro rozdíl čtverců a následném vytknutí výrazu $b - a$ dostaneme $2 = (b - a)(a + b - 1)$. Protože 2 je prvočíslo, máme pro uvedený součin následující čtyři možnosti:

- a) $b - a = 1$ a $a + b - 1 = 2$, pak $a = 1$ a $b = 2$.
- b) $b - a = 2$ a $a + b - 1 = 1$, pak $a = 0$ a $b = 2$.

c) $b - a = -1$ a $a + b - 1 = -2$. Druhou rovnici lze přepsat na tvar $a + b = -1$, z něž vidíme, že rovnost nenastane pro žádnou dvojici nezáporných celých čísel.

d) $b - a = -2$ a $a + b - 1 = -1$. Druhou rovnici lze přepsat na tvar $a + b = 0$, z něž vidíme, že jí vyhovuje jediná dvojice nezáporných celých čísel $a = b = 0$, která však nevyhovuje první rovnici.

Závěr: Úloha má dvě řešení: Buď je $a = 1$ a $b = 2$, nebo $a = 0$ a $b = 2$.

Poznámka. Místo rozboru čtyř možností můžeme začít úvahou, že nulová čísla a, b nejsou řešením úlohy, takže $a + b - 1 \geq 0$, a tedy i $b - a \geq 0$. Stačí tudíž uvažovat jen možnosti a) a b).

Jiné řešení. Rovnici upravíme na tvar $2 = (b^2 - b) - (a^2 - a)$, resp. na tvar $2 = b(b - 1) - a(a - 1)$. Z následující tabulky i tvaru čísel $x^2 - x = x(x - 1)$ je zřejmé, že rozdíly mezi sousedními hodnotami výrazů $x(x - 1)$ rostou s rostoucím x (snadno se o tom přesvědčíme výpočtem: $(x + 1)x - x(x - 1) = 2x$).

x	0	1	2	3	4	5	...
$x(x - 1)$	0	0	2	6	12	20	...

Může tedy být jediné $b^2 - b = 2$ a $a^2 - a = 0$. Odtud $a \in \{0, 1\}$ a $b = 2$. Řešením úlohy jsou tedy dvě dvojice nezáporných celých čísel: $a = 0$, $b = 2$ a $a = 1$, $b = 2$.

C – II – 1

Vzhledem k tomu, že $12 = 3 \cdot 4$, stačí ukázat, že číslo $a = n^{k+2} - n^k = n^k(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)n^{k-1}$ je dělitelné třemi a čtyřmi. První tři činitele posledního výrazu jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla, takže právě jedno z nich je dělitelné třemi, a proto i číslo a je dělitelné třemi. A je dělitelné i čtyřmi, neboť při sudém n je v posledním výrazu druhý a čtvrtý činitel sudý, zatímco při lichém n je sudý první a třetí činitel. Tím je důkaz proveden.

Jiné řešení. Položme $a = n^{k+2} - n^k = n^k(n^2 - 1) = (n - 1)n^k(n + 1)$. Opět ukážeme, že a je dělitelné čtyřmi a třemi. Je-li n sudé, je n^k dělitelné čtyřmi pro každé celé $k \geq 2$. Je-li n liché, jsou činitele $n - 1$ a $n + 1$ sudá čísla, takže a je dělitelné čtyřmi pro každé celé $n \geq 2$.

Dělitelnost třemi je zřejmá pro $n = 3l$. Je-li $n = 3l + 1$, kde l je celé kladné číslo, je třemi dělitelný činitel $n - 1$ (a tedy i číslo a). Je-li

$n = 3l + 2$ (l je celé nezáporné), je třemi dělitelný činitel $n + 1$. Protože jiné možnosti vzhledem ke zbytku čísla n při dělení třemi nejsou, je číslo a dělitelné třemi. Tím je požadovaný důkaz proveden.

C – II – 2

Danou nerovnost ekvivalentně upravujeme:

$$\begin{aligned}
 (a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - (a^2 - 2a + 1)(b^2 - 2b + 1) &\geq 4, \\
 (a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - \\
 -(a^2b^2 - 2ab^2 + b^2) + (2a^2b - 4ab + 2b) - (a^2 - 2a + 1) &\geq 4, \\
 2ab(a + b) - 4ab + 2(a + b) &\geq 4, \\
 2(a + b)(ab + 1) &\geq 4(ab + 1), \\
 2(ab + 1)(a + b - 2) &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Vzhledem k předpokladu $a \geq 1$, $b \geq 1$ je $a + b \geq 2$, takže upravená nerovnost zřejmě platí. Rovnost v ní (a tedy i v zadané) nerovnosti přitom nastane, právě když $a + b = 2$ neboli $a = b = 1$.

Jiné řešení. Při označení $m = a^2 + 1$ a $n = b^2 + 1$ lze levou stranu dokazované nerovnosti přepsat do tvaru $L = mn - (m - 2a)(n - 2b) = 2an + 2bm - 2ab - 2ab$, z něž vytýkáním dostaneme $L = 2a(n - b) + 2b(m - a)$.

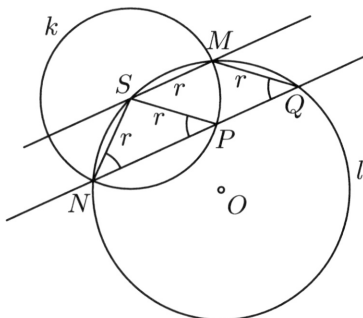
Čísla a , b jsou z intervalu $\langle 1, \infty \rangle$, proto $1 = m - a^2 \leq m - a$. Odtud $2b(m - a) \geq 2$. Analogicky dostaneme $2a(n - b) \geq 2$. Je tedy $L \geq 4$ a rovnost nastává, právě když $a = b = 1$.

Jiné řešení. Po substituci $a = 1 + m$ a $b = 1 + n$, kde $m, n \geq 0$, získá levá strana nerovnosti tvar

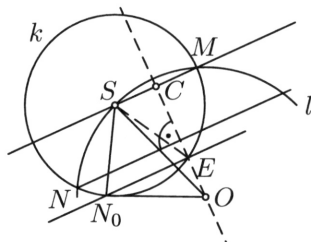
$$L = (m^2 + 2m + 2)(n^2 + 2n + 2) - m^2n^2.$$

Po roznásobení, které si stačí pouze představit, se zruší člen m^2n^2 , takže L bude součtem nezáporných členů, mezi nimiž bude i člen $2 \cdot 2 = 4$. Tím je nerovnost $L \geq 4$ dokázána. A protože mezi zmíněnými členy budou rovněž $4m$ a $4n$, z rovnosti $L = 4$ plyne $m = n = 0$, což naopak zřejmě i rovnost $L = 4$ zaručuje. To znamená, že rovnost nastává, právě když $a = b = 1$.

Poloměr kružnice k označme r . Označení vrcholů P, Q v trojúhelníku MPQ není důležité, proto bez újmy na obecnosti označme jako P ten z bodů přímky vedené bodem N rovnoběžně s přímkou MS , který leží na kružnici k . Bod Q pak leží na kružnici l a čtyřúhelník $NQMS$ je lichoběžník vepsaný kružnici l (obr. 15). Je tedy rovnoramenný s rameny MQ a NS délky r . Navíc i úsečky SP a SM mají délku r . Z rovnoramenného trojúhelníku NPS a rovnoramenného lichoběžníku $NQMS$ plyne rovnost úhlů $|\sphericalangle SPN| = |\sphericalangle SNP| = |\sphericalangle MQP|$. Příčka PQ tedy protíná přímky SP a MQ pod stejně velkými úhly, a proto (podle věty o souhlasných úhlech) jsou přímky SP a MQ rovnoběžné. Čtyřúhelník $PQMS$ je tudíž rovnoběžník, a protože $|SM| = |SP| = r$, je to dokonce kosoctvrec. Odtud je již zřejmé, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný s rameny PQ a MQ délky r .



Obr. 15



Obr. 16

Poznámka. Existence tětiv NP a NQ v zadání je zaručena díky předpokladu, že kružnice l má větší poloměr než kružnice k . Označíme-li C střed úsečky SM a E ten průsečík kružnice k s osou úsečky SM , který leží v polorovině SMO , bude střed O kružnice l ležet na polopřímce CE až za bodem E (obr. 16). Další průsečík N obou kružnic proto padne do pásu mezi rovnoběžkami SM a N_0E v polorovině OCS , kde N_0 je čtvrtý vrchol kosoctverce s vrcholy S, M, E . K tomu stačí ukázat, že kružnice l protne polopřímku EN_0 až za bodem N_0 , že tedy její poloměr OS je větší než délka úsečky ON_0 . Toto srovnání dvou stran trojúhelníku OSN_0 snadno plyne z porovnání jeho vnitřních úhlů: úhel u vrcholu N_0 je největší, neboť oba úhly při protilehlé straně OS jsou menší než 60° (trojúhelník ESN_0 je rovnostranný). Snadno nahlédneme, že každá z rov-

noběžek uvedeného pásu protíná každou z obou kružnic ve dvou bodech (vždy souměrně sdružených podle příslušné osy kolmé na SM).

Tím je prokázána nejen existence obou tětiv NP a NQ , ale i to, že jejich krajní body P a Q leží na stejnou stranu od bodu N (jako na obr. 15), neboť oba body zřejmě leží v polorovině opačné ke zmiňované polorovině OCS .

C – II – 4

Protože číslo p je celé, je i $y = \lfloor x \rfloor - p$ celé číslo a $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$. Původní soustava rovnic je tedy ekvivalentní se soustavou

$$\lfloor x \rfloor + y = 2010,$$

$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

kterou snadno vyřešíme například sčítací metodou. Obdržíme $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}(2010 + p)$ (což může platit jen pro sudá p) a $y = \lfloor x \rfloor - p$.

a) Pro $p = 2$ je řešením soustavy libovolné $x \in \langle 1\,006, 1\,007 \rangle$ a $y = 1\,004$.

b) Pro $p = 3$ nemá soustava řešení.

Jiné řešení. Položme $\lfloor x \rfloor = a$, pak $x = a + t$, kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

a) Pro $p = 2$ soustavu přepíšeme do tvaru $y = a - 2$ a $\lfloor 2a - 2 + t \rfloor = 2010$. Z poslední rovnice plyne $2a - 2 = 2010$, odtud $a = 1\,006$. Jelikož $t \in \langle 0, 1 \rangle$, vyhovuje původní soustavě každé $x \in \langle 1\,006, 1\,007 \rangle$, přičemž $y = 1\,004$.

b) Pro $p = 3$ dostáváme $y = a - 3$ a $\lfloor 2a - 3 + t \rfloor = 2010$. Poslední rovnice je ekvivalentní se vztahem $2a - 3 = 2010$, kterému nevyhovuje žádné celé číslo a . Pro $p = 3$ nemá daná soustava rovnic řešení.

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Na stole leží tři hromádky zápalek: v jedné 2009, ve druhé 2010 a v poslední 2011. Hráč, který je na tahu, zvolí dvě hromádky a z každé z nich odebere po jedné zápalce. Ve hře se pravidelně střídají dva hráči. Hra končí, jakmile některá hromádka zmizí. Vyhrává ten hráč, který udělal poslední tah. Popište strategii jednoho z hráčů, která mu zajistí výhru. (*Ján Mazák*)

B – I – 2

Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo, které má přesně šest kladných dělitelů, z nichž právě dva jsou jednomístní a právě dva dvojmístní. Větší z dvojmístných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla. Určete všechna čísla, která mohou být na tabuli napsána. (*Peter Novotný*)

B – I – 3

V rovině je dána úsečka AB . Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, pro jehož středy stran AB , CD , DA označené po řadě K , L , M platí: body A , B , L , D leží na jedné kružnici a rovněž body K , L , D , M leží na jedné kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Najděte 2009 po sobě jdoucích čtyřmístných čísel, jejichž součet je součinem tří po sobě jdoucích přirozených čísel. (*Radek Horenský*)

B – I – 5

Uvnitř kratšího oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je zvolen bod D . Tětiva CD protíná stranu AB v bodě E .

Dokažte, že trojúhelník se stranami délek $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný trojúhelníku ABD .
(Pavel Leischner)

B – I – 6

Reálná čísla a , b mají tuto vlastnost: rovnice $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokažte nerovnost $b > 3$.

b) Pomocí b vyjádřete kořeny obou rovnic. (Jaromír Šimša)

B – S – 1

Určete všechny hodnoty reálných parametrů p a q , pro něž má každá z rovnic

$$x(x - p) = 3 + q, \quad x(x + p) = 3 - q$$

v oboru reálných čísel dva různé kořeny, jejichž aritmetický průměr je jedním z kořenů zbylé rovnice. (Jaromír Šimša)

B – S – 2

Jsou dány délky odvěsen $a = |BC|$, $b = |AC|$ pravoúhlého trojúhelníku ABC , přičemž $a > b$. Označme D střed přepony AB a E ($E \neq C$) průsečík strany BC s kružnicí opsanou trojúhelníku ADC . Vypočítejte obsah trojúhelníku EAD .
(Pavel Novotný)

B – S – 3

Určete všechny dvojice celých kladných čísel m a n , pro něž platí $37 + 27^m = n^3$.
(Martin Panák)

B – II – 1

Kružnice $l(T; s)$ prochází středem kružnice $k(S; 2 \text{ cm})$. Kružnice $m(U; t)$ se vně dotýká kružnic k a l , přičemž $US \perp ST$. Poloměry s a t vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Určete je. (Pavel Leischner)

B – II – 2

V matematické soutěži bylo zadáno 7 úloh a za každou z nich mohl soutěžící získat 0, 1 nebo 2 body. Soutěže se zúčastnilo 60 žáků. Za každou

úlohu bylo uděleno aspoň 95 bodů. Dokažte, že mezi soutěžícími najdeme dva tak, že každou z úloh vyřešil aspoň jeden z nich za 2 body.

(*Ján Mazák*)

B – II – 3

V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$. Označme K, L, M po řadě středy stran AB, CD, AD . Předpokládejme, že body A, B, L, D leží na jedné kružnici a zároveň i body K, L, D, M leží na jedné kružnici. Dokažte, že $|AC| = 2 \cdot |AD|$.

(*Jaroslav Švrček*)

B – II – 4

Číslo n je součinem čtyř prvočísel. Jestliže každé z těchto prvočísel zvětšíme o 1 a vzniklá čtyři čísla vynásobíme, dostaneme číslo o 2886 větší než původní číslo n . Určete všechna taková n .

(*Jaromír Šimša*)

B – I – 1

Jsou-li počty zápalek na jednotlivých hromádkách a, b, c , řekneme, že hra je v pozici (a, b, c) . Celkový počet zápalek je na začátku sudý a po každém tahu se zmenší o 2, proto zůstává stále sudý. Zanechá-li některý hráč po svém tahu pozici $(2, 2, c)$, kde c je nějaké kladné sudé číslo, donutí soupeře vytvořit aspoň jednu jednozápalkovou hromádku a to mu umožní dalším tahem vyhrát. Pozice $(2, 2, c)$ mohla vzniknout z pozice $(3, 3, c)$ nebo z pozice $(3, 2, c+1)$, tedy z pozic, v nichž jsou dvě čísla lichá a jedno sudé.

Dokážeme, že zanechávání pozic se třemi sudými čísly zajistí výhru. Z takové pozice soupeř jakýmkoliv svým tahem vytvoří pozici se dvěma čísly lichými a jedním sudým. Odebereme-li potom zápalky ze stejných hromádek jako v předešlém tahu soupeř, vytvoříme opět pozici se třemi sudými čísly. Strategie zanechávání pozic se třemi sudými čísly je tedy realizovatelná (za předpokladu, že celkový počet zápalek je sudý). Celkový počet zápalek se stále zmenšuje a počty zápalek na jednotlivých hromádkách se po každém tahu zmenší nanejvýš o 1. Proto musí dojít k situaci, kdy aspoň na jedné hromádce zůstane přesně jedna zápalka. To se ale může stát jen po soupeřově tahu (číslo 1 je totiž liché). Odebráním této zápalky spolu s kteroukoliv další hru vítězně zakončíme.

Popsanou strategii může použít hráč, který začíná, odebere-li ve svém prvním tahu po jedné zápalky z první a třetí hromádky. Pokud ale udělá jiný tah, může vítěznou strategii uplatnit jeho soupeř.

B – I – 2

Počet kladných dělitelů čísla, jehož rozklad na prvočinitele má tvar $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, je $(k_1+1)(k_2+1) \dots (k_r+1)$. Proto číslo, které má přesně $6 = 3 \cdot 2$ kladných dělitelů, musí mít jeden z tvarů p^5 nebo p^2q , kde p a q jsou prvočísla.

Uvažujme nejdříve možnost p^5 . Toto číslo má dělitele $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5$; zřejmě $1 < p < p^2 < p^3 < p^4 < p^5$. Dva nejmenší dělitele jsou jednomístní a další dva dvojčístní. Větší z nich, tedy p^3 , ale není druhou mocninou přirozeného čísla.

Hledané číslo má tedy tvar p^2q a jeho dělitelé jsou 1, p , p^2 , q , pq , p^2q . Je-li $p > q$, potom $1 < q < p < pq < p^2 < p^2q$. Dva dvojmístní dělitelé by byli p a pq , ale pq není druhou mocninou přirozeného čísla.

Musí tedy být $p < q$. Ze všech šesti dělitelů jsou druhými mocninami přirozeného čísla jen 1 a p^2 . Proto je p^2 větší ze dvou dvojmístných dělitelů a odtud vyplývá $1 < p < q < p^2 < pq < p^2q$. Dělitelé 1 a p jsou jednomístní, q a p^2 jsou dvojmístní, pq aspoň trojmístný a p^2q čtyřmístný. Odtud vyplývá $p \in \{5, 7\}$, $9 < q < p^2$, $pq > 99$, $999 < p^2q < 10\,000$.

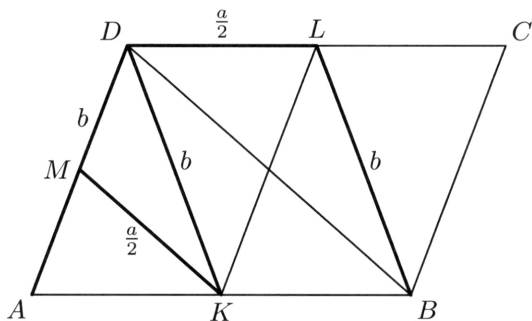
Pro $p = 5$ dostáváme $9 < q < 25$, $5q > 99$ a $999 < 25q < 10\,000$, těmto podmínkám žádné prvočíslo q nevyhovuje.

Pro $p = 7$ dostáváme $9 < q < 49$, $7q > 99$ a $999 < 49q < 10\,000$; těmto podmínkám vyhovují $q \in \{23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$.

Na tabuli je tedy napsáno jedno ze sedmi čísel $49 \cdot 23 = 1\,127$, $49 \cdot 29 = 1\,421$, $49 \cdot 31 = 1\,519$, $49 \cdot 37 = 1\,813$, $49 \cdot 41 = 2\,009$, $49 \cdot 43 = 2\,107$, $49 \cdot 47 = 2\,303$.

B – I – 3

Označme $a = |AB|$, $b = |AD|$ délky stran hledaného rovnoběžníku (obr. 17). Lichoběžníku $ABLD$ lze opsat kružnici, proto je rovnoramenný, a tudíž $|BL| = b$. Protože úsečky KB a DL jsou rovnoběžné a shodné, je $KBLD$ rovnoběžník, a tedy $|KD| = |BL| = b$. To znamená, že trojúhelník AKD je rovnoramenný, takže bod D musí ležet na ose jeho základny AK .



Obr. 17

Úsečka KL je střední příčkou rovnoběžníku $ABCD$, proto $KL \parallel MD$; $KLDM$ je tedy lichoběžník, a jelikož se mu dá opsat kružnice, je rovnoramenný a odtud $|KM| = |DL| = \frac{1}{2}a$. Protože KM je střední příčka

trojúhelníku BDA , má strana BD délku $2 \cdot |KM| = a$. Bod D tedy leží na kružnici se středem B a poloměrem a .

Konstrukce: Sestrojíme střed K úsečky AB , osu o úsečky AK a kružnici k se středem B a poloměrem $|AB|$. Průsečík této kružnice s osou úsečky AK je bod D . Bod C je potom průsečík přímek vedených body D a B rovnoběžně s přímkami AB a AD .

Důkaz: Čtýřúhelník $ABCD$ má protilehlé strany rovnoběžné, je to tedy rovnoběžník. Označme L a M středy úseček CD a AD . Z toho, že bod D leží na ose úsečky AK , vyplývá $|KD| = |AD|$. Protože $KBLD$ je rovnoběžník, platí $|BL| = |KD| = |AD|$. Lichoběžník $ABDL$ je tedy rovnoramenný, a proto body A, B, L, D leží na jedné kružnici. Úsečka KM je střední příčka trojúhelníku BDA , proto $|KM| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}|AB| = |DL|$; $KLDM$ je tedy rovnoramenný lichoběžník, takže jeho vrcholy leží na jedné kružnici.

Diskuse: Protože přímka o má od bodu B menší vzdálenost než bod A , protíná kružnici k ve dvou bodech. Úloha má tedy v každé polorovině s hraniční přímkou AB jedno řešení.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení dokážeme, že $|KD| = |AD|$ a $|DB| = |AB|$. Trojúhelníky AKD a DAB jsou tedy rovnoramenné, a protože se shodují v úhlu u vrcholu A , jsou podobné. Proto $|AK|/|AD| = |DA|/|AB|$ čili $\frac{1}{2}a/b = b/a$ a odtud $b = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Bod D je tedy průsečíkem kružnic se středy A a K a poloměrem $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

B – I – 4

Označme prostřední z hledaných čísel a . Součet čísel $a - 1004, a - 1003, \dots, a + 1003, a + 1004$ je $2009a = 41 \cdot 49 \cdot a$, přičemž $2004 \leq a \leq 8995$. Má platit $41 \cdot 49 \cdot a = n(n+1)(n+2)$ pro vhodné přirozené číslo n . Protože

$$2009 \cdot 2004 \leq n(n+1)(n+2) < (n+1)^3,$$

musí platit $n+1 > \sqrt[3]{2009 \cdot 2004}$, a tedy $n \geq 159$. Podobně z nerovností

$$2009 \cdot 8995 \geq n(n+1)(n+2) > n^3$$

dostáváme $n < \sqrt[3]{2009 \cdot 8995}$ čili $n \leq 262$.

Součin $n(n+1)(n+2)$ má být dělitelný čísly 41 a 49. Žádný z činitelů $n, n+1, n+2$ nemůže být dělitelný oběma čísly 41 i 49, neboť $41 \cdot 49 > 262 + 2$. Sedmi je dělitelný nanejvýš jeden z činitelů $n, n+1, n+2$;

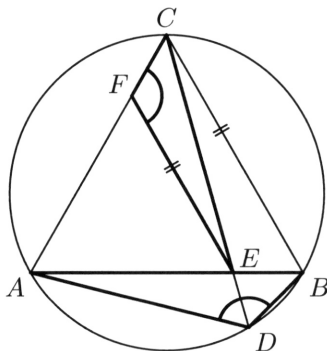
proto musí být některý z nich dělitelný číslem 49. Budeme tedy mezi čísla 159, 160, ..., 264 hledat taková dvě, jejichž rozdíl je 1 nebo 2, přičemž jedno z nich je dělitelné číslem 41 a druhé číslem 49. Násobky čísla 41 v uvedeném rozsahu jsou 164, 205 a 246, násobky čísla 49 jsou 196 a 245. Vyhovující čísla jsou tedy 245 a 246 a my máme dvě možnosti:

a) $n = 245$, $n + 1 = 246$, $n + 2 = 247$, $a = 245 \cdot 246 \cdot 247 / 2\,009 = 7\,410$
a hledaná čísla jsou 6 406, 6 407, ..., 8 414;

b) $n = 244$, $n + 1 = 245$, $n + 2 = 246$, $a = 244 \cdot 245 \cdot 246 / 2\,009 = 7\,320$
a hledaná čísla jsou 6 316, 6 317, ..., 8 324.

B – I – 5

Veďme bodem E rovnoběžku se stranou BC a označme F její průsečík se stranou AC . Trojúhelník AEF je rovnostranný, proto $|EF| = |AE|$ a také $|CF| = |BE|$. Trojúhelník FEC má tedy délky stran $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ (obr. 18), které nás zajímají. Dokážeme, že je podobný trojúhelníku ABD :



Obr. 18

Oba trojúhelníky se zřejmě shodují ve vyznačeném tupém úhlu velikosti 120° ($|\sphericalangle ADB| = 180^\circ - |\sphericalangle ACB|$). Úhly ACD a ABD jsou obvodové nad tětivou AD , proto jsou shodné. Podle věty *uu* tedy skutečně platí $\triangle ECF \sim \triangle ABD$.

Jiné řešení. Obvodové úhly DAB a DCB jsou shodné stejně jako úhly ADC a ABC , proto $\triangle ADE \sim \triangle CBE$. Odtud vyplývá

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|CB|} = \frac{|CE|}{|AB|}.$$

Analogicky jsou podobné i trojúhelníky DEB a AEC , takže

$$\frac{|BE|}{|BD|} = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|AB|}.$$

Z rovností

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|AB|} = \frac{|BE|}{|BD|}$$

pak vyplývá podobnost trojúhelníku s délkami stran $|AE|$, $|CE|$, $|BE|$ a trojúhelníku ABD .

B – I – 6

Označme x_1 menší a x_2 větší kořen první rovnice. Potom platí $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = b - 1$. Druhá rovnice má kořen $x_2 - x_1$, a protože součet obou jejích kořenů je (stejně jako u první rovnice) roven číslu a , musí být druhý kořen $a - (x_2 - x_1) = x_1 + x_2 - x_2 + x_1 = 2x_1$. Součin kořenů druhé rovnice je tak $(x_2 - x_1) \cdot 2x_1 = b + 1$. Odtud dostáváme $b = -1 + 2x_1x_2 - 2x_1^2 = -1 + 2(b - 1) - 2x_1^2$, a tedy

$$b = 3 + 2x_1^2 > 3, \tag{1}$$

neboť z rovnosti $x_1 = 0$ by vyplývalo $b + 1 = b - 1 = 0$.

Protože $x_2 - x_1 > 0$ a $b + 1 > 0$, musí být kladný i druhý kořen $2x_1$ druhé rovnice, tedy $x_1 > 0$; z rovnosti (1) tak máme

$$x_1 = \sqrt{\frac{b-3}{2}} \quad \text{a dále} \quad x_2 = \frac{b-1}{x_1} = \frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Kořeny druhé rovnice jsou pak

$$x_2 - x_1 = \frac{b+1}{\sqrt{2(b-3)}} \quad \text{a} \quad 2x_1 = \sqrt{2(b-3)}.$$

Jiné řešení. Kořeny prvé rovnice jsou

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2},$$

přičemž pro diskriminant platí

$$D = a^2 - 4(b - 1) > 0. \tag{2}$$

Rozdíl kořenů $x_2 - x_1 = \sqrt{a^2 - 4b + 4}$ je kořenem druhé rovnice, proto

$$\begin{aligned} a^2 - 4b + 4 - a\sqrt{a^2 - 4b + 4} + b + 1 &= 0, \\ a^2 - 3b + 5 &= a\sqrt{a^2 - 4b + 4}, \\ a^4 + 2a^2(5 - 3b) + (3b - 5)^2 &= a^4 - 4a^2b + 4a^2, \\ (3b - 5)^2 &= a^2(2b - 6). \end{aligned} \quad (3)$$

Rovnost $a = 0$ nastává, právě když $3b - 5 = 0$; potom by ale neplatilo (2). Proto $a^2 > 0$, $(3b - 5)^2 > 0$, a tedy i $2b - 6 > 0$ čili $b > 3$. Z (2) a (3) potom vyplývá $a > 0$ (pro $b > 3$ je totiž $a^2 - 3b + 5 > a^2 - 4b + 4 = D > 0$), takže

$$a = \frac{3b - 5}{\sqrt{2(b - 3)}};$$

dále pak

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3b - 5}{\sqrt{2(b - 3)}} - \sqrt{\frac{(3b - 5)^2}{2(b - 3)} - 4b + 4} \right) = \sqrt{\frac{b - 3}{2}}, \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3b - 5}{\sqrt{2(b - 3)}} + \sqrt{\frac{(3b - 5)^2}{2(b - 3)} - 4b + 4} \right) = \frac{(b - 1)\sqrt{2}}{\sqrt{b - 3}}. \end{aligned}$$

Druhá rovnice má kořeny

$$x_3 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \frac{b + 1}{\sqrt{2(b - 3)}} = x_2 - x_1$$

a

$$x_4 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \sqrt{2(b - 3)}.$$

B – S – 1

Z Viětových vztahů pro kořeny kvadratické rovnice (jež mimochodem plynou z rozkladu daného kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů) snadno zjistíme, že součet kořenů první rovnice je p , takže jejich aritmetický průměr je $\frac{1}{2}p$. Toto číslo má být kořenem druhé rovnice, proto

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3 - q. \quad (1)$$

Podobně součet kořenů druhé rovnice je $-p$, jejich aritmetický průměr je $-\frac{1}{2}p$, a proto

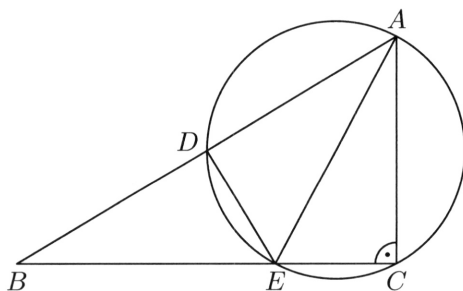
$$-\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{3p}{2}\right) = 3 + q. \quad (2)$$

Porovnáním obou vztahů (1) a (2) máme $3 - q = 3 + q$ neboli $q = 0$ a z (1) pak vyjde $p = 2$ nebo $p = -2$.

Obě nalezená řešení vedou na tutéž dvojici rovnic $x(x - 2) = 3$, $x(x + 2) = 3$. Kořeny první z nich jsou čísla -1 a 3 , jejich aritmetický průměr je 1 . Kořeny druhé rovnice jsou čísla 1 a -3 , jejich aritmetický průměr je -1 .

B – S – 2

Označme c délku přepony AB , takže $|AD| = |BD| = \frac{1}{2}c$. Čtýřúhelník $ADEC$ je tětíkový a úhel ECA je pravý, proto i protilehlý úhel ADE je pravý (obr. 19). Pravoúhlé trojúhelníky ABC a EDB mají úhel u vrcholu



Obr. 19

B společný, proto $\triangle ABC \sim \triangle EBD$. Odtud

$$\frac{|ED|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad \text{a proto} \quad |ED| = \frac{bc}{2a}.$$

Obsah pravoúhlého trojúhelníku EAD je tak (s využitím Pythagorovy věty)

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |ED| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{bc}{2a} = \frac{bc^2}{8a} = \frac{b(a^2 + b^2)}{8a}.$$

B – S – 3

Rovnici upravíme na tvar $37 = n^3 - 27^m$ a rozdíl třetích mocnin rozložíme na součin:

$$37 = (n - 3^m)(n^2 + n \cdot 3^m + 9^m).$$

Číslo 37 je prvočíslo a na pravé straně rovnosti je součin dvou celých čísel, přičemž druhý činitel je větší než 1. Proto musí platit

$$n - 3^m = 1 \tag{3}$$

a

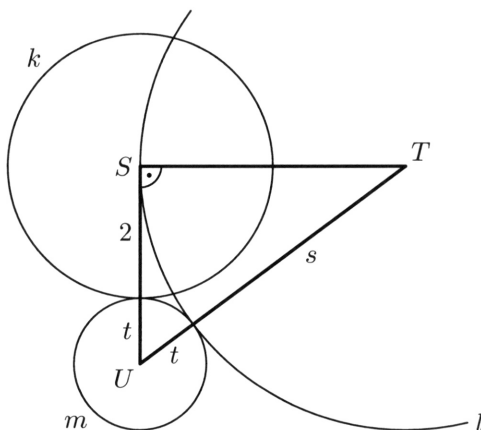
$$n^2 + n \cdot 3^m + 9^m = 37. \tag{4}$$

Pro $m \geq 2$ je $n^2 + n \cdot 3^m + 9^m > 9^2 > 37$, takže zbývá jediná možnost $m = 1$; z (3) potom plyne $n = 1 + 3^m = 4$. Zkouškou se přesvědčíme, že $37 + 27^1 = 4^3$, nebo ověříme, že dvojice $m = 1$, $n = 4$ vyhovuje podmínce (4).

B – II – 1

Trojúhelník UST je pravoúhlý. Jeho přepona UT má délku $s + t$, délky odvěsen jsou $|US| = t + 2$, $|ST| = s$ (obr. 20). Podle Pythagorovy věty proto platí

$$(s + t)^2 = (t + 2)^2 + s^2.$$



Obr. 20

Úpravami postupně dostáváme

$$s^2 + 2st + t^2 = t^2 + 4t + 4 + s^2,$$

$$st = 2t + 2,$$

$$t(s - 2) = 2.$$

Čísla t a $s - 2$ jsou celá, proto t musí být dělitelem čísla 2. Protože t je kladné, jsou jen dvě možnosti; jestliže $t = 1$ cm, potom $s = 4$ cm, a jestliže $t = 2$ cm, potom $s = 3$ cm.

B – II – 2

Nejdříve dokážeme, že každou úlohu vyřešilo za dva body aspoň 35 žáků: Kdyby totiž některou úlohu vyřešilo za 2 body a soutěžících, přičemž $a < 35$, bylo by za tuto úlohu uděleno nejvýše $2a + 60 - a = a + 60 < 95$ bodů, což odporuje zadání.

Z právě provedené úvahy tedy plyne, že celkový počet dvoubodových řešení je aspoň $7 \cdot 35 = 245$. Protože $245 > 4 \cdot 60$, musel některý žák vyřešit za dva body aspoň 5 úloh.

Dále budeme místo „vyřešit úlohu za dva body“ psát stručněji jen „vyřešit úlohu“. Jestliže některý žák vyřešil všech 7 úloh, stačí k němu do dvojice přidat libovolného jiného žáka. Jestliže některý žák vyřešil 6 úloh, přidáme k němu kteréhokoliv ze žáků, kteří vyřešili zbylou úlohu (máme z čeho vybírat, protože každou úlohu vyřešilo aspoň 35 žáků).

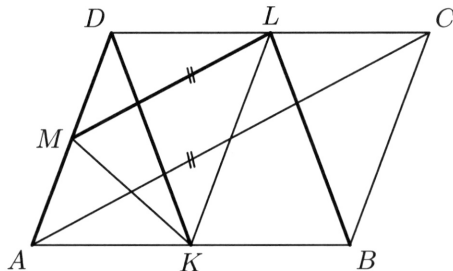
Zbývá tedy uvážit situaci, kdy některý soutěžící A vyřešil přesně 5 úloh. Každou ze dvou zbylých úloh vyřešilo aspoň 35 žáků (jiných než A). A protože všech žáků jiných než A je 59, musí mezi nimi být aspoň $2 \cdot 35 - 59 = 11$ takových, kteří vyřešili obě tyto úlohy. Stačí tudíž libovolného z nich přidat k žákovi A.

Jiné řešení. „Vyřešit úlohu“ bude znamenat totéž co v předchozím řešení.

Za všech 7 úloh dohromady bylo uděleno aspoň $95 \cdot 7 = 665 > 60 \cdot 11$ bodů, takže některý žák získal aspoň 12 bodů, a tudíž vyřešil aspoň pět úloh (žák, který vyřešil právě k úloh, získal totiž nejvýše $2k + (7 - k) = k + 7$ bodů). Vyberme tedy žáka A a 5 konkrétních úloh z těch, které vyřešil. Za zbylé dvě úlohy získalo zbylých 59 žáků aspoň $2 \cdot (95 - 2) = 186 > 3 \cdot 59$ bodů, takže jeden z nich, řekněme žák B, získal 4 body, a tudíž vyřešil obě úlohy. Dvojice žáků A, B má požadovanou vlastnost.

B – II – 3

Lichoběžníky $ABLD$ a $KLDM$ jsou rovnoramenné, protože jsou třetivové. Odtud vyplývá shodnost ramen $|AD| = |BL|$ a shodnost úhlopříček $|KD| = |LM|$ (obr. 21). Střední příčka KL dělí rovnoběžník $ABCD$ na dva shodné rovnoběžníky, pro jejichž úhlopříčky platí $|KD| = |BL|$. Úsečka ML je střední příčkou trojúhelníku ACD , proto $|AC| = 2 \cdot |ML|$. Spojením výše uvedených rovností máme $|AC| = 2 \cdot |ML| = 2 \cdot |KD| = 2 \cdot |BL| = 2 \cdot |AD|$.



Obr. 21

Jiné řešení. Budeme postupovat stejně jako ve druhém řešení třetí úlohy domácího kola (na domácí kolo se lze odvolat bez dalšího důkazu): Protože $ABLD$ je třetivový (a tudíž rovnoramenný) lichoběžník, je $|KD| = |BL| = |AD|$. Podobně je i lichoběžník $KLDM$ rovnoramenný, takže $|MK| = |DL|$ a $|DB| = 2|MK| = 2|DL| = |DC| = |AB|$. Z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků AKD a DAB (shodují se v úhlu u vrcholu A svých základů) pak plyne, že $|AK|/|AD| = |DA|/|AB|$, odkud po dosazení $|AK| = \frac{1}{2}|AB|$ vychází $|DB| = |AB| = \sqrt{2} \cdot |AD|$. Nyní využijeme známou rovnoběžníkovou rovnost $|AC|^2 + |BD|^2 = 2 \cdot |AB|^2 + 2 \cdot |AD|^2$. Dosazením za $|AB|$ a $|DB|$ dostaneme $|AC|^2 + 2 \cdot |AD|^2 = 4 \cdot |AD|^2 + 2 \cdot |AD|^2$ a odtud $|AC|^2 = 4 \cdot |AD|^2$ čili $|AC| = 2 \cdot |AD|$.

B – II – 4

Označíme-li a, b, c, d prvočísla, jejichž součinem je číslo n , platí rovnost

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = abcd + 2886.$$

Kdyby byla všechna čísla a, b, c, d lichá, bylo by na levé straně této rovnosti sudé číslo, kdežto na pravé straně číslo liché. Proto je některé

z prvočísel a, b, c, d (například a) rovno dvěma. Dosazením dostaneme

$$3(b+1)(c+1)(d+1) = 2bcd + 2886.$$

Protože čísla $3(b+1)(c+1)(d+1)$ i 2886 jsou dělitelná třemi, musí být dělitelné třemi i $2bcd$. Proto je některé z prvočísel b, c, d (například b) rovno třem. Dosazením dostaneme $12(c+1)(d+1) = 6cd + 2886$, po vydělení šesti $2(c+1)(d+1) = cd + 481$ a po dalších úpravách $cd + 2c + 2d = 479$, $(c+2)(d+2) = 483 = 3 \cdot 7 \cdot 23$. Předpokládáme-li $c \leq d$, máme vzhledem k nerovnosti $c+2 > 3$ dvě možnosti:

1. $c+2 = 7$, $d+2 = 69$, odtud $c = 5$, $d = 67$.

2. $c+2 = 21$, $d+2 = 23$, odtud $c = 19$, $d = 21$, což nevyhovuje, neboť 21 není prvočíslo.

Jediné vyhovující n je tedy $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 = 2010$.

Poznámka. Závěrečné úvahy lze také provést pomocí vyjádření

$$d = \frac{479 - 2c}{c + 2} = \frac{483}{c + 2} - 2;$$

$c+2$ tak musí být některý z dělitelů čísla 483, který je větší než 3, tedy $c+2 \in \{7, 21, 23, 69, 161, 483\}$ a $c \in \{5, 19, 21, 67, 159, 481\}$. Protože c i d jsou prvočísla, vyhovují pouze možnosti $c = 5$, $d = 67$ nebo $c = 67$, $d = 5$.

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sqrt{x^2 - y} = z - 1,$$

$$\sqrt{y^2 - z} = x - 1,$$

$$\sqrt{z^2 - x} = y - 1.$$

(*Radek Horenský*)

A – I – 2

Kosočtverci $ABCD$ je vepsána kružnice. Uvažujme její libovolnou tečnu protínající obě strany BC , CD a označme po řadě R , S její průsečíky s přímkami AB , AD . Dokažte, že hodnota součinu $|BR| \cdot |DS|$ na volbě tečny nezávisí.

(*Leo Boček*)

A – I – 3

Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 33$. V jednom kroku zvolíme na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je dělitelem druhého, obě smažeme a na tabuli napíšeme jejich (celočíslný) podíl. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen čísla, z nichž žádné není dělitelem jiného. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je číslem 1.) Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat?

(*Peter Novotný*)

A – I – 4

V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O , V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S , právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost 60° .

(*Tomáš Jurík*)

A – I – 5

V kádi je r_0 ryb, společný úlovek n rybářů. Přicházejí pro svůj díl jednotlivě, každý si myslí, že se dostavil jako první, a aby si vzal přesně n -tinu aktuálního počtu ryb v kádi, musí předtím jednu z ryb pustit zpět do moře. Určete nejmenší možné číslo r_0 v závislosti na daném $n \geq 2$, když i poslední rybář si aspoň jednu rybu odnese. (Dag Hrubý)

A – I – 6

Pro dané prvočíslo p určete počet (všech) uspořádaných trojic (a, b, c) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$, které splňují vztah

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot c,$$

kde $[x, y]$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y . (Tomáš Jurík)

A – S – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x - y^2} &= z - 1, \\ \sqrt{y - z^2} &= x - 1, \\ \sqrt{z - x^2} &= y - 1.\end{aligned}$$

(Radek Horenský)

A – S – 2

Najděte všechny možné hodnoty podílu

$$\frac{r + \varrho}{a + b},$$

kde r je poloměr kružnice opsané a ϱ poloměr kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami délek a a b . (Tomáš Jurík)

A – S – 3

Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 33$. V jednom kroku zvolíme několik čísel napsaných na tabuli (aspoň dvě), jejichž součin je druhou mocninou

přirozeného čísla, zvolená čísla smažeme a na tabuli napíšeme druhou odmocninu z jejich součinu. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen taková čísla, že součin žádných z nich není druhou mocninou. Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat? *(Peter Novotný)*

A – II – 1

Dokažte, že rovnice $x^2 + p|x| = qx - 1$ s reálnými parametry p, q má v oboru reálných čísel čtyři řešení, právě když platí $p + |q| + 2 < 0$. *(Jaromír Šimša)*

A – II – 2

Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC . Na jeho úhlopříčce AC v polovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP , právě když úsečky AB a BD jsou shodné. *(Jaroslav Švrček)*

A – II – 3

Určete všechna celá kladná čísla m, n taková, že n dělí $2m - 1$ a m dělí $2n - 1$. *(Tomáš Szaniszló)*

A – II – 4

V libovolném trojúhelníku ABC označme O střed kružnice vepsané, P střed kružnice připsané ke straně BC a D průsečík osy úhlu CAB se stranou BC . Dokažte, že platí

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}.$$

(Kružnicí připsanou ke straně BC rozumíme takovou kružnici, která se dotýká jednak strany BC , jednak obou polopřímek opačných k polopřímám BA a CA .) *(Pavel Leischner)*

A – III – 1

Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b , pro něž platí

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

(Martin Panák)

A – III – 2

Kruhový terč o poloměru 12 cm zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7 cm.

(Vojtech Bálint, Jaromír Šimša)

A – III – 3

Rumburak unesl na svůj hrad 31 členů strany A, 28 členů strany B, 23 členů strany C, 19 členů strany D a každého zavřel do samostatné kobky. Po práci se občas mohli procházet po dvoře a povídat si. Jakmile si spolu začali povídat tři členové tří různých stran, Rumburak je za trest přeregistroval do čtvrté strany. (Nikdy si spolu nepovídali více než tři unesení.)

- Mohlo se stát, že po určitém čase byli všichni unesení členy jedné strany? Které?
- Určete všechny čtveřice celých kladných čísel, jejichž součet je 101 a které jako počty unesených členů čtyř stran umožňují, aby se Rumburakovou péčí časem všichni stali členy jedné strany.

(Vojtech Bálint, Jaromír Šimša)

A – III – 4

Je dána kružnice k s tětívou AC , jež není průměrem. Na její tečně vedené bodem A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D průsečík kružnice k s vnitřkem úsečky XC (pokud existuje). Trojúhelník ACD doplníme na lichoběžník $ABCD$ vepsaný kružnici k . Určete množinu průsečíků přímk BC a AD odpovídajících všem takovým lichoběžníkům.

(Pavel Leischner)

A – III – 5

Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, ..., 33. V jednom kroku zvolíme na tabuli některá dvě čísla, jejichž součin je druhou mocninou přirozeného čísla, obě zvolená čísla smažeme a na tabuli napíšeme druhou odmocninu z jejich součinu. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen taková čísla, že součin žádných dvou z nich není druhou mocninou. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je týmž číslem.) Dokažte, že na tabuli zůstane aspoň 16 čísel.

(Peter Novotný)

A – III – 6

Najděte minimum výrazu

$$\frac{a + b + c}{2} - \frac{[a, b] + [b, c] + [c, a]}{a + b + c},$$

kde proměnné a, b, c jsou libovolná celá čísla větší než 1 a $[x, y]$ označuje
nejmenší společný násobek čísel x, y . (Tomáš Jurík)

Řešení úloh

A – I – 1

Levé strany daných rovnic mají (jako odmocniny) nezáporné hodnoty, proto z pravých stran plynou po řadě nerovnosti $z \geq 1$, $x \geq 1$ a $y \geq 1$.

Odmocnin v rovnicích se zbavíme jejich umocněním:

$$x^2 - y = (z - 1)^2, \quad y^2 - z = (x - 1)^2, \quad z^2 - x = (y - 1)^2,$$

umocněné rovnice sečteme a výsledek upravíme:

$$\begin{aligned}(x^2 - y) + (y^2 - z) + (z^2 - x) &= (z - 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2, \\(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) &= (z^2 + x^2 + y^2) - 2(z + x + y) + 3, \\x + y + z &= 3.\end{aligned}$$

Protože však z odvozených nerovností $x \geq 1$, $y \geq 1$ a $z \geq 1$ sečtením plyne $x + y + z \geq 3$, může být rovnost $x + y + z = 3$ splněna jedinečně tak, že $x = y = z = 1$. Zkouškou dosazením se přesvědčíme, že trojice $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ je skutečně řešením (a to jediným, jak plyne z našeho postupu).

Dodejme, že pokud si nerovností $x, y, z \geq 1$ předem nepovšimneme, avšak vztah $x + y + z = 3$ po sečtení umocněných rovnic odvodíme, můžeme pak určenou hodnotu součtu $x + y + z$ uplatnit při sečtení původních (neumocněných) rovnic, a získat tak rovnici

$$\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y^2 - z} + \sqrt{z^2 - x} = 0$$

s jasným důsledkem: každá z odmocnin musí být rovna nule.

Jiné řešení. Protože pro trojice (x, y, z) , (y, z, x) a (z, x, y) vyjde soustava zadaných rovnic nastejno, stačí hledat pouze taková řešení (x, y, z) , v nichž je první složka maximální, tj. platí $x \geq y$ a $x \geq z$.¹ Stejně jako v původním řešení si uvědomme, že $x, y, z \geq 1$ (dále nám postačí pouze fakt, že $x, y, z \geq 0$).²

Z předpokládané nerovnosti $x \geq z$ plyne pro pravé strany první a druhé nerovnice srovnání $x - 1 \geq z - 1$, takže stejnou nerovnost musí

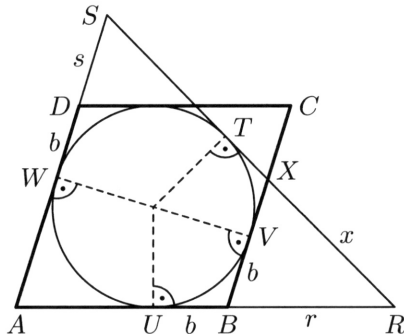
¹ Nerovnost $y \geq z$ ovšem předem zaručit nemůžeme. Pořadí neznámých x, y, z totiž nemůžeme měnit libovolně, ale pouze *cyklicky*.

² Nezápornost využijeme k ekvivalencím typu $a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a \geq b$.

splňovat i odmocniny na levých stranách, tedy i příslušní odmocněnci: $y^2 - z \geq x^2 - y$ neboli $x^2 - y^2 \leq y - z$. Levá strana té poslední je nezáporná (díky předpokladu $x \geq y$), takže je taková i pravá strana: $y - z \geq 0$ neboli $y \geq z$. To ještě upravíme na nerovnost $y - 1 \geq z - 1$ mezi pravými stranami první a třetí rovnice, takže podle jejich levých stran dostaneme $z^2 - x \geq x^2 - y$ neboli $z^2 - x^2 \geq x - y$. Odtud a z předpokladu $x \geq y$ máme $z^2 - x^2 \geq 0$ neboli $z \geq x$. Dohromady tak platí $x \geq y \geq z \geq x$, musí tedy být $x = y = z$. Tehdy se zadaná soustava redukuje na jedinou rovnici $\sqrt{x^2 - 1} = x - 1$. Je snadné ukázat, že její jediné řešení v oboru reálných čísel je $x = 1$.

A – I – 2

Nechť U, V, W, T jsou body dotyku vepsané kružnice po řadě se stranami AB, BC, DA a s uvažovanou tečnou RS , jejíž průsečík se stranou BC pojmenujeme X (obr. 22). Označme $a = |AB| = |AD|$, $b = |BU| = |BV| = |DW|$ pevné délky a $r = |BR|$, $s = |DS|$ proměnné délky závislé na volbě tečny RS . Naším cílem je ukázat, že zadaný součin $r \cdot s = |BR| \cdot |DS|$ má stálou hodnotu $a \cdot b$.



Obr. 22

Trojúhelníky ARS, BRX jsou stejnohlé podle středu R , neboť jejich strany AS a BX leží na rovnoběžných přímkách. Navíc kružnice vepsaná prvnímu trojúhelníku ARS je připsána straně BX druhého trojúhelníku BRX . Protože body dotyku vepsané a připsané kružnice jsou souměrné sružené podle středu strany, na které oba body leží, můžeme usoudit, že poměru $|SW| : |AR|$ v trojúhelníku ARS odpovídá poměr $|BV| : |BR|$ v trojúhelníku BRX . To vede k rovnosti, kterou v zavedeném označení

zapišeme jako

$$\frac{b+s}{a+r} = \frac{b}{r}, \quad \text{odkud} \quad r \cdot s = a \cdot b.$$

Tím je důkaz hotov a úloha vyřešena.

Jiné řešení. Užijeme stejné označení jako v předchozím řešení. Označme ještě $|RX| = x$ a vyjádřeme délky stran obou stejnohlých trojúhelníků ARS , BRX na základě triviálního poznatku o rovnosti úseků tečen z daného bodu k dané kružnici. Pro trojúhelník ARS je to snadné: platí $|AR| = a + r$, $|AS| = a + s$ a

$$|RS| = |RT| + |TS| = |RU| + |WS| = (b + r) + (b + s) = 2b + r + s.$$

V trojúhelníku BRX předně máme $|BR| = r$ a délku třetí strany BX vyjádříme takto:

$$\begin{aligned} |BX| &= |BV| + |VX| = b + |TX| = b + (|RT| - |RX|) = \\ &= b + |RU| - x = b + (b + r) - x = 2b + r - x. \end{aligned}$$

Pro strany podobných trojúhelníků ARS a BRX tedy platí úměra

$$(a + r) : (2b + r + s) : (a + s) = r : x : (2b + r - x).$$

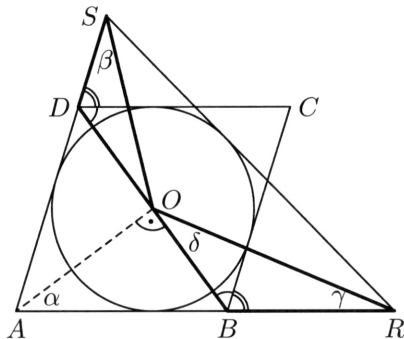
Odtud je možné eliminovat x a pak objevit závislost $rs = ab$. Místo takového postupu si však povšimněme, že obvod druhého trojúhelníku nezávisí na x , proto porovnáme poměry obvodu k první straně (na x nezávislé) v každém z obou trojúhelníků:

$$\begin{aligned} \frac{(a + r) + (2b + r + s) + (a + s)}{a + r} &= \frac{r + x + (2b + r - x)}{r}, \\ 2 + \frac{2(b + s)}{a + r} &= 2 + \frac{2b}{r}, \\ rs &= ab. \end{aligned}$$

Potřebná rovnost je dokázána.

Jiné řešení. Překvapivě jednoduchý důkaz tvrzení úlohy podala studentka *Lenka Polcerová* z Gymnázia Křenová v Brně, když ukázala, že jsou podobné trojúhelníky ODS a RBO , kde O je střed kružnice vepsané kosočtverci $ABCD$ (obr. 23). Z této podobnosti totiž plyne úměra

$|DS| : |DO| = |BO| : |BR|$ neboli $|BR| \cdot |DS| = |BO| \cdot |DO|$, což je konstantní hodnota (na volbě tečny nezávislá).



Obr. 23

Protože zmíněné trojúhelníky ODS a RBO se zřejmě shodují ve vnitřních úhlech při vrcholech D a B , stačí k důkazu jejich podobnosti ověřit shodnost úhlů $\beta = |\sphericalangle OSD|$ a $\delta = |\sphericalangle ROB|$. Zavedeme-li ještě úhly $\alpha = |\sphericalangle BAO|$ a $\gamma = |\sphericalangle ARO|$, pak z faktu, že kružnice vepsaná kosočtverci $ABCD$ je zároveň vepsána trojúhelníku ARS , plyne, že vnitřní úhly tohoto trojúhelníku jsou 2α , 2β , 2γ , takže platí $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Protože úhel AOB je pravý, vnitřní úhly trojúhelníku AOR mají velikost α , γ , $\delta + 90^\circ$, takže $\alpha + \gamma + \delta = 90^\circ$. Porovnáním obou uvedených rovností pro součet tří úhlů dostáváme kýženou rovnost $\beta = \delta$ a celý důkaz je hotov.

A – I – 3

Na tabuli zřejmě budou stále jen čísla z množiny $M = \{1, 2, \dots, 33\}$. Prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 tam budou napsána pořád, a to každé jedenkrát, protože nemají žádného dělitele různého od 1 a množina M ani neobsahuje žádný jejich násobek (takže nikdy nemohou z tabule zmizet ani se objevit v dalším exempláři).

Vysvětlíme nyní, proč na tabuli budou kromě uvedených pěti prvočísel napsána vždy ještě některá dvě další čísla. Součin S všech čísel zapsaných na tabuli je na počátku roven

$$S = 33! = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31. \quad (1)$$

V každém kroku zvolíme nějakou dvojici čísel (x, y) s vlastností $x \mid y$, tedy čísla tvaru $x = a$ a $y = ka$, a nahradíme je jedním číslem $y/x = k$.

Součin všech čísel na tabuli se přitom změní z dosavadní hodnoty S na novou hodnotu S/a^2 , neboť dva činitelé x, y o součinu $xy = ka^2$ přejdou v jeden nový činitel k (a ostatní činitelé se nezmění). Je jasné, že při změně $S \rightarrow S/a^2$ se exponent libovolného prvočinitele p z rozkladu čísla S buďto zachová (pokud $p \nmid a$), nebo sníží o sudé číslo (rovné exponentu p v rozkladu čísla a^2). V žádném případě se tedy nezmění *parita* (sudost či lichost) exponentu žádného z prvočinitelů. Proto každé z prvočísel, které mělo na počátku v rozkladu (1) *lichý* exponent, bude mít lichý exponent v rozkladu měnícího se S i po libovolném počtu kroků. Taková jsou (kromě 17, 19, 23, 29 a 31) rovněž prvočísla 2, 3, 5 a 11. Znamená to, že na tabuli budou stále zastoupena (ne nezbytně čtyři různá) čísla, která jsou těmito jednotlivými čtyřmi prvočísly dělitelná. Nemůže to být ovšem jediné číslo (neboť $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 > 33$), takže to musí být aspoň dvě čísla, například 10 a 33 (nebo 11 a 30 či 15 a 22, jiné možnosti při celkovém počtu sedmi čísel na tabuli neexistují). Tak jsme dokázali, že na tabuli bude skutečně vždy napsáno nejméně 7 čísel.

Zbývá popsat nějakou posloupnost kroků, po níž na tabuli 7 čísel zůstane. Existuje mnoho možností, můžeme například dát „stranou“ prvočísla 17, 19, 23, 29, 31 a čísla 10 a 33, a se zbylými čísly provést následující kroky:

$$\begin{aligned} 32, 16 &\rightarrow 2, & 30, 15 &\rightarrow 2, & 28, 14 &\rightarrow 2, & 26, 13 &\rightarrow 2, & 24, 12 &\rightarrow 2, \\ 22, 11 &\rightarrow 2, & 27, 9 &\rightarrow 3, & 21, 7 &\rightarrow 3, & 18, 6 &\rightarrow 3, & 25, 5 &\rightarrow 5, \\ 20, 4 &\rightarrow 5, & 8, 2 &\rightarrow 4, & 5, 5 &\rightarrow 1, & 4, 2 &\rightarrow 2, & 3, 3 &\rightarrow 1, \\ 3, 3 &\rightarrow 1, & 2, 2 &\rightarrow 1, & 2, 2 &\rightarrow 1, & 2, 2 &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Po těchto krocích už je na tabuli (kromě sedmi čísel stranou) už jen 7 jedniček, které všechny odstraníme šesti kroky $1, 1 \rightarrow 1$ a posledním krokem např. $10, 1 \rightarrow 10$.

A – I – 4

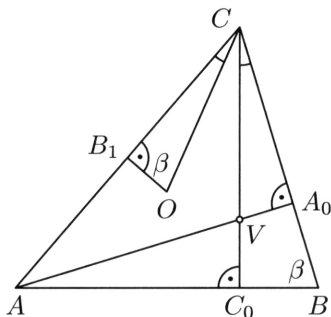
Nejprve ukážeme, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC platí

$$\gamma = 60^\circ \iff |CO| = |CV|. \quad (1)$$

K tomu uvážíme trojúhelníky CVA_0 a COB_1 , kde A_0 je pata výšky z vrcholu A a B_1 je střed strany AC (obr. 24). Z pravoúhlého trojúhelníku ACA_0 plyne

$$\gamma = 60^\circ \iff |CA_0| = \frac{|AC|}{2} \iff |CA_0| = |CB_1|.$$

Poslední je rovnost délek odvěsen pravoúhlých trojúhelníků CVA_0 a COB_1 , jejichž vyznačené vnitřní úhly VCA_0 a OCB_1 mají shodnou velikost $90^\circ - \beta$. (Pro úhel VCA_0 to plyne z pravoúhlého trojúhelníku BCC_0 , kde C_0 je pata výšky z vrcholu C na stranu AB , pro úhel OCB_1 to plyne z rovnoramenného trojúhelníku ACO , který má u hlavního vrcholu O úhel 2β díky větě o obvodovém a středovém úhlu v opsané kružnici.) Proto je shodnost odvěsen CA_0 , CB_1 ekvivalentní se shodností přepon CO a CV , což dokazuje (1).



Obr. 24

Nyní zapojíme do úvah střed S kružnice vepsané. Ze zmíněné shodnosti úhlů VCA_0 a OCB_1 plyne, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC je polopřímka CS nejen osou úhlu ACB , ale také osou úhlu OCV . Tato osa je v případě $\gamma = 60^\circ$, kdy jak víme $|CO| = |CV|$, osou základny OV rovnoramenného trojúhelníku OVC (body O a V jsou různé, neboť podle zadání úlohy je trojúhelník ABC různoramenný), takže střed S na ose úsečky OV skutečně leží. Stejně tak tomu je i v případech $\alpha = 60^\circ$, resp. $\beta = 60^\circ$.

Připusťme nyní, že střed S leží na ose úsečky OV , avšak žádný z úhlů α , β , γ není 60° . Podle (1) tudíž platí $|AO| \neq |AV|$, $|BO| \neq |BV|$ a $|CO| \neq |CV|$. Podívejme se znovu na trojúhelník OVC , v němž tedy osa CS vnitřního úhlu OCV nesplývá s osou protější strany OV , takže jejich jediný společný bod S leží na kružnici trojúhelníku OVC opsané. Jinak řečeno, bod C leží na kružnici opsané trojúhelníku OVS . Ze stejných důvodů na této kružnici leží i body A a B , takže se jedná o kružnici opsanou trojúhelníku ABC , která však nikdy svým středem O neprochází. Tak jsme dostali spor, který ukazuje, že připuštěná situace nemůže nastat. Tím je řešení celé úlohy u konce.

Poznámka 1. Z druhé části řešení vyplývá tento poznatek: má-li úhel γ (ostroúhlého) trojúhelníku ABC velikost 60° , leží vrcholy A a B na jedné kružnici s průsečíkem výšek, středem opsané kružnice i středem vepsané kružnice. To ostatně plyne i z vyjádření jednotlivých úhlů v trojúhelníku.

Poznámka 2. Klíčovou ekvivalenci (1) z podaného řešení lze rovněž dokázat trigonometricky. Platí totiž vzorce

$$|CO| = \frac{c}{2 \sin \gamma} \quad \text{a} \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg} \gamma}, \quad (2)$$

podle kterých jsou úsečky CO a CV shodné, právě když je úhel γ řešením rovnice $2 \sin \gamma = \operatorname{tg} \gamma$, která je zřejmě ekvivalentní s rovnicí $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, jež má v intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$ jediné řešení $\gamma = 60^\circ$. První ze vzorců (2) plyne z tzv. rozšířené sinové věty

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC , druhý vzorec ve (2) dostaneme dvojnásobným vyjádřením délky $|CA_0| = b \cos \gamma = |CV| \sin \beta$, kam ze sinové věty dosadíme $\sin \beta = (b/c) \sin \gamma$.

Poznámka 3. Ekvivalenci (1) z podaného řešení můžeme dokázat i bez velkého počítání: průsečík výšek daného trojúhelníku totiž vždy leží na kružnici souměrně sdružené s kružnicí trojúhelníku opsanou podle přímky AB (v našem případě). Vzhledem k tomu, že taková kružnice je zároveň obrazem kružnice opsané v posunutí o vektor $\mathbf{CV}$, závisí velikost $|CV|$ v dané opsané kružnici jen na velikosti tětiny AB (či odpovídajícím obvodovém úhlu), a nikoliv na poloze bodu C . Proto rovnost $|CV| = r = |CO|$ nastane, právě když zmíněná sdružená kružnice prochází středem O kružnice trojúhelníku opsané, tj. právě když příslušná strana leží proti (obvodovému) úhlu velikosti 60° .

A – I – 5

Pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ označme r_k počet ryb v kádi poté, co si k -tý rybář odnese svůj díl. Tyto počty jsou podle zadání určeny počáteční hodnotou r_0 a rekurentními vztahy

$$r_{k+1} = \frac{n-1}{n}(r_k - 1) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Zapišme je ve výhodném tvaru

$$r_{k+1} = q \cdot r_k + d, \quad \text{kde } q = \frac{n-1}{n} \text{ a } d = \frac{1-n}{n}. \quad (1)$$

Rekurentní rovnice $r_{k+1} = q \cdot r_k + d$ (kde q, d jsou konstanty) je poměrně obvyklá v řadě aplikací. Odvodíme proto nejprve, jaké přímé vyjádření má každý člen r_k takové posloupnosti $r_0, r_1, r_2, \dots$ při obecných q, d a dané počáteční hodnotě r_0 . Teprve poté se vrátíme k naší úloze a do výsledku dosadíme hodnoty q, d připsané v (1).

Všimněme si předně, že v případě $q = 1$ dostáváme rovnici $r_{k+1} = r_k + d$, podle které je zkoumaná posloupnost aritmetická s diferencí d , takže její obecný člen má vyjádření $r_k = r_0 + kd$. V případě $q \neq 1$ z rekurentní rovnice postupně dostaneme

$$r_1 = qr_0 + d,$$

$$r_2 = qr_1 + d = q(qr_0 + d) + d = q^2r_0 + (q + 1)d,$$

$$r_3 = qr_2 + d = q(q^2r_0 + (q + 1)d) + d = q^3r_0 + (q^2 + q + 1)d,$$

$$r_4 = qr_3 + d = q(q^3r_0 + (q^2 + q + 1)d) + d = q^4r_0 + (q^3 + q^2 + q + 1)d,$$

⋮

Takto nacházíme vyjádření

$$r_k = q^k r_0 + (q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1)d.$$

Uplatníme-li známý vzorec pro součet k členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q \neq 1$, dojdeme k závěru, že pro každé $k \geq 0$ je člen r_k dán přímým vzorcem

$$r_k = q^k r_0 + \frac{(q^k - 1)d}{q - 1} = q^k \left(r_0 + \frac{d}{q - 1} \right) - \frac{d}{q - 1}.$$

V našem konkrétním případě platí

$$\frac{d}{q - 1} = \frac{\frac{1 - n}{n}}{\frac{n - 1}{n} - 1} = n - 1,$$

odkud nacházíme vyjádření jednotlivých hodnot r_k ve tvaru

$$r_k = \frac{(n - 1)^k (r_0 + n - 1)}{n^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Vzhledem k nesoudělnosti dvojice čísel $(n - 1)^k, n^k$ jsou takové hodnoty r_k celočíselné, právě když je číslo $r_0 + n - 1$ dělitelné všemi zastoupenými

mocninami n^k , z nichž nejvyšší je mocnina n^n . Hledaná nutná i postačující podmínka má proto tvar: pro některé celé j platí $r_0 + n - 1 = j \cdot n^n$ neboli $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Pomocí tohoto parametru j pak mají všechny členy r_k vyjádření

$$r_k = j \cdot (n - 1)^k \cdot n^{n-k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Zbývá zjistit nejmenší celé $j \geq 1$, při kterém jsou všechna čísla r_k daná vztahy (2) kladná. Protože tato čísla zřejmě tvoří klesající posloupnost, nejmenší z nich je číslo $r_n = j \cdot (n - 1)^n - n + 1$, což je při $n \geq 3$ číslo kladné již při $j = 1$ (tehdy $r_0 = n^n - n + 1$), zatímco při $n = 2$ to platí až při $j = 2$ (tehdy $r_0 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$).

Odpověď: Hledaný nejmenší počet ryb je $r_0 = 7$ pro $n = 2$ a $r_0 = n^n - n + 1$ pro každé $n \geq 3$.

Jiné řešení. Posloupnost $r_0, r_1, \dots, r_n$ můžeme počítat i „odzadu“, tj. pomocí posledního členu r_n vyjadřovat členy předchozí. S využitím rekurentního vztahu

$$r_k = q r_{k+1} + 1, \quad \text{kde} \quad q = \frac{n}{n-1}$$

(kvocient q má nyní převrácenou hodnotu oproti hodnotě v původním řešení), postupně pro $k = n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$ dostáváme:

$$\begin{aligned} r_{n-1} &= q r_n + 1, \\ r_{n-2} &= q r_{n-1} + 1 = q^2 r_n + q + 1, \\ r_{n-3} &= q r_{n-2} + 1 = q^3 r_n + q^2 + q + 1, \\ r_{n-4} &= q r_{n-3} + 1 = q^4 r_n + q^3 + q^2 + q + 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podobně jako v původním řešení (sčítání členů geometrické posloupnosti a následné dosazení kvocientu q zde vynecháme) tak dospějeme ke vzorcům

$$r_{n-k} = \frac{n^k (r_n + n - 1)}{(n - 1)^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (3)$$

Protože čísla n^k a $(n - 1)^k$ jsou nesoudělná, hodnoty r_{n-k} jsou vesměs celočíselné, právě když $(n - 1)^n \mid r_n + n - 1$, neboli $r_n = j \cdot (n - 1)^n - n + 1$, čemuž odpovídá (podle vzorce (3) pro $k = n$) počáteční hodnota

$r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Tak jsme došli ke stejnému závěru jako při původním postupu.

Poznámka. Nalezení vzorců pro členy r_k se při obou postupech značně zjednoduší, když si všimneme, že pozměněná posloupnost tvořená čísly $r'_k = r_k + n - 1$ je geometrická.

A – I – 6

V zadané rovnici bude výhodné přejít od nejmenších společných násobků k největším společným dělitelům, a to pomocí známého vztahu $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$. Označme proto $u = (a, c)$, $v = (b, c)$ a levou stranu rovnice přepíšme takto:

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{ac/u + bc/v}{a + b} = \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v} \right) \cdot \frac{c}{a + b}.$$

Zadanou rovnici lze proto (po vynásobení zlomkem $(a + b)/c$) zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot (a + b). \quad (1)$$

Porovnejme odhady velikosti výrazů v (1). Protože $p^2 > 0$, pro zlomek na pravé straně (1) zřejmě platí

$$\frac{1}{2} < \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} < 1,$$

takže v důsledku (1) musí být

$$\frac{a + b}{2} < \frac{a}{u} + \frac{b}{v} < a + b. \quad (2)$$

Díky levé nerovnosti nemohou být obě přirozená čísla u, v větší než 1, neboť z nerovností $u \geq 2$ a $v \geq 2$ bychom dostali

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Aspoň jedno z čísel u, v je tedy rovno jedné. Pravá nerovnost v (2) však vylučuje případ $u = v = 1$. Číslo 1 se tudíž rovná právě jedno z čísel u, v . S ohledem na symetrii rozebereme pouze případ $u = 1$ a $v \geq 2$.

Protože číslo v jsme zavedli vztahem $v = (b, c)$, je zlomek b/v roven některému přirozenému číslu b_1 . Dosadíme nyní hodnoty $u = 1$ a $b = b_1 v$ do (1) a vzniklou rovnici vyřešíme vzhledem k proměnné a :

$$\begin{aligned} a + b_1 &= \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot (a + b_1 v), \\ (p^2 + 2)(a + b_1) &= (p^2 + 1)(a + b_1 v), \\ a &= b_1((p^2 + 1)v - p^2 - 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Kdyby platilo $v \geq 3$, dostali bychom z poslední rovnosti odhad

$$a \geq (p^2 + 1)v - p^2 - 2 \geq 3(p^2 + 1) - p^2 - 2 = 2p^2 + 1,$$

a to je ve sporu s nerovností $a \leq 2p^2$ danou oborem, ve kterém podle zadání úlohy mají hodnoty a, b, c ležet. Platí tedy opačná nerovnost $v < 3$, která spolu s předpokladem $v \geq 2$ vede k závěru, že nutně $v = 2$. Rovnice (3) tak přechází v rovnici

$$a = b_1(2(p^2 + 1) - p^2 - 2) = p^2 b_1,$$

kterou v zadaném oboru hodnot a , množině $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$, snadno vyřešíme.

Protože je tedy $a \leq 2p^2$, je $b_1 \leq 2$. Přitom z podmínek $u = (a, c) = 1$ a $v = (b, c) = 2$ plyne, že c je sudé číslo s číslem a nesoudělné. Z rovnosti $a = p^2 b_1$ tak plyne, že $b_1 = 1$ a p je *liché* prvočíslo. Je tudíž $a = p^2 b_1 = p^2$ a $b = b_1 v = 1 \cdot 2 = 2$. Pro číslo c to znamená následující zpřesnění: *c je sudé číslo, které není násobkem daného prvočísla p .*

Která $c \in \{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$ takovou podmínku splňují a kolik jich je? Jak už víme, pro $p = 2$ žádné takové c neexistuje. Pro liché p pak ze všech p^2 možných sudých čísel $c = 2, 4, 6, \dots, 2p^2$ vyloučíme všechny násobky čísla p , tedy právě p čísel $2p, 4p, \dots, 2p^2$; vyhovujících hodnot je proto právě $p^2 - p$. Takový je tedy počet všech hledaných trojic $(a, b, c) = (p^2, 2, c)$ v rozebraném případě, kdy $u = 1$ a $v \geq 2$.

Ve druhém možném případě, kdy naopak $v = 1$ a $u \geq 2$, existuje s ohledem na symetrii stejný počet $p^2 - p$ vyhovujících trojic, které jsou tentokrát všechny tvaru $(2, p^2, c)$. (Popis vyhovujících trojic zahrneme i do odpovědi, přestože to zadání úlohy nevyžaduje.)

Odpověď: V případě $p = 2$ žádné vyhovující trojice neexistují, v případě lichého prvočísla p je jich právě $2(p^2 - p)$ a všechny jsou tvaru

$$(a, b, c) = (p^2, 2, c) \quad \text{nebo} \quad (a, b, c) = (2, p^2, c),$$

kde $c \in \{1, 2, \dots, 2p^2\}$ je libovolné sudé číslo, které není násobkem p .

Jiné řešení. Definujme přirozená čísla u, v, m, n vztahy $u = (a, c)$, $v = (b, c)$, $a = mu$ a $b = nv$. Pak $[a, c] = mc$, $[b, c] = nc$ a po dosazení do zadané rovnice po malé úpravě včetně zkrácení číslem c dostaneme

$$(p^2 + 2)(m + n) = (p^2 + 1)(mu + nv).$$

Díky nesoudělnosti čísel $p^2 + 1$ a $p^2 + 2$ existuje přirozené číslo k takové, že

$$m + n = k(p^2 + 1) \quad \text{a} \quad mu + nv = k(p^2 + 2). \quad (1)$$

Vyřešme nyní soustavu rovnic (1) pro neznámé m a n , pokládaje u a v za parametry. Zřejmě $u \neq v$, předpokládejme tedy dále, že $u > v$ (případ $u < v$ se díky symetrii rozebere stejně). Soustava (1) má jediné řešení

$$m = \frac{k(p^2 + 2 - v(p^2 + 1))}{u - v} \quad \text{a} \quad n = \frac{k(u(p^2 + 1) - p^2 - 2)}{u - v}.$$

Z nerovností $u - v > 0$ a $m > 0$ plyne $p^2 + 2 - v(p^2 + 1) > 0$ neboli

$$v < \frac{p^2 + 2}{p^2 + 1} = 1 + \frac{1}{p^2 + 1} < 2,$$

takže nutně platí $v = 1$ a vzorce pro m, n přejdou do tvaru

$$m = \frac{k}{u - 1} \quad \text{a} \quad n = \frac{k(u(p^2 + 1) - p^2 - 2)}{u - 1} = m(u(p^2 + 1) - p^2 - 2).$$

Kdyby pro číslo $u > 1$ platilo $u \geq 3$, měli bychom z poslední rovnosti

$$n \geq u(p^2 + 1) - p^2 - 2 \geq 3(p^2 + 1) - p^2 - 2 = 2p^2 + 1,$$

což je ve sporu s tím, že $n = nv = b \leq 2p^2$. Je tedy nutně $u = 2$ a vzorce pro m, n získávají definitivní podobu

$$m = k \quad \text{a} \quad n = kp^2,$$

tudíž (s ohledem na nerovnost $n \leq 2p^2$) musí být buď $k = 1$, nebo $k = 2$.

Je-li $k = 1$, máme $a = mu = 2$, $b = nv = p^2$ a číslo c splňuje podmínky $(a, c) = (2, c) = 2$ a $(b, c) = (p^2, c) = 1$. Taková čísla c existují, jen když je prvočíslo p liché, a v zadaném intervalu jich je právě $p^2 - p$.

Je-li $k = 2$, máme $a = 4$ a $b = 2p^2$ a číslo c splňuje podmínky $(a, c) = (4, c) = 2$ a $(b, c) = (2p^2, c) = 1$. Žádné takové c (které by bylo sudé i liché) zřejmě neexistuje.

V případě $u < v$ s ohledem na symetrii existuje rovněž $p^2 - p$ vyhovujících trojic, takže jejich celkový počet je $2(p^2 - p)$ (je-li ovšem $p = 2$, žádná zkoumaná trojice neexistuje).

A – S – 1

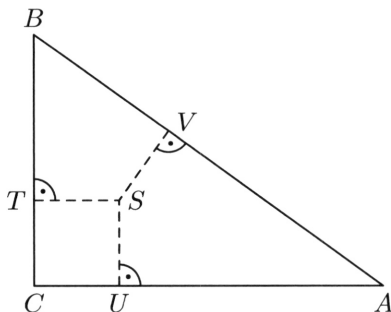
Hodnoty odmocnin jsou vždy nezáporné a odmocňované hodnoty také, proto neznámé x, y, z musejí splňovat podmínky $x, y, z \geq 1$, $x \geq y^2$, $y \geq z^2$ a $z \geq x^2$. Z posledních tří nerovností máme $\max\{x, y, z\} \geq \max\{y^2, z^2, x^2\}$, opačná (neostrá) nerovnost platí díky tomu, že $t \leq t^2$ pro každé $t \geq 1$. Proto $\max\{x, y, z\} = \max\{y^2, z^2, x^2\} = 1$, tedy $x = y = z = 1$ a obě strany všech tří rovnic soustavy jsou rovny nule (to je zároveň zkouška).

Obměna postupu: namísto úvahy o maximech můžeme po zjištění z první věty řešení pokračovat následovně: platí $x \geq y^2 \geq y \geq z^2 \geq z \geq x^2$, nerovnost mezi krajními výrazy $x \geq x^2$ již znamená $x = 1$, takže i hodnoty y, z z uvedeného řetězce šesti členů jsou rovny 1.

Závěr. Soustava má jediné řešení $x = y = z = 1$.

A – S – 2

Pro délky úseků stran obecného trojúhelníku ABC k bodům dotyku vepsané kružnice (označeným podle obr. 25) platí vzorec



Obr. 25

$$|AU| = |AV| = \frac{b + c - a}{2}, \quad |BV| = |BT| = \frac{a + c - b}{2},$$

$$|CT| = |CU| = \frac{a + b - c}{2},$$

kteřé lze snadno získat vyřešením soustavy rovnic

$$|AV| + |BV| = c, \quad |AU| + |CU| = b, \quad |BT| + |CT| = a.$$

Body C , T , U spolu se středem S vepsané kružnice jsou obecně vrcholy deltoidu, který je v případě pravého úhlu ACB čtvercem o straně $\varrho = |SU| = |SV|$. Porovnání s výše uvedenými vzorci pro délky úseků CT , CU vede ke vztahu

$$\varrho = \frac{a + b - c}{2};$$

podle Thaletovy věty v takovém pravoúhlém trojúhelníku navíc platí $r = \frac{1}{2}c$. Dohromady dostáváme

$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Zkoumaný podíl $(r + \varrho)/(a + b)$ má proto v libovolném pravoúhlém trojúhelníku jedinou možnou hodnotu, rovnou číslu $\frac{1}{2}$.

Uvedený postup lze obměnit zejména tak, že namísto obecných vzorců pro úseky stran vyjdeme z rovností $|CT| = |CU| = \varrho$, z nichž plyne $|AV| = |AU| = b - \varrho$ a $|BV| = |BT| = a - \varrho$, tudíž

$$2r = c = |AB| = |AV| + |BV| = (b - \varrho) + (a - \varrho),$$

odkud je již závěr nasnadě.

Jiné řešení. Pro obsah P obecného trojúhelníku ABC platí vzorec

$$2P = \varrho(a + b + c);$$

k jeho odvození stačí sečíst obsahy trojúhelníků ABS , ACS a BCS se shodnou výškou ϱ ke stranám původního trojúhelníku. V případě $\gamma = 90^\circ$ je ovšem $2P = ab$ a kromě toho, jak už jsme zmínili výše, $r = \frac{1}{2}c$. Spolu s Pythagorovou větou $c^2 = a^2 + b^2$ tak dostáváme

$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{ab}{a + b + c} = \frac{ac + bc + c^2 + 2ab}{2(a + b + c)} = \frac{ac + bc + a^2 + b^2 + 2ab}{2(a + b + c)} =$$

$$= \frac{(a + b)c + (a + b)^2}{2(a + b + c)} = \frac{(a + b)(a + b + c)}{2(a + b + c)} = \frac{a + b}{2},$$

a docházíme tak ke stejnému závěru jako v původním řešení.

A – S – 3

Součin všech čísel zapsaných na tabuli je roven

$$S = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31.$$

Přítomnost lichých exponentů znamená, že S není druhou mocninou. Proto nemůžeme smazat v prvním kroku všechna napsaná čísla, prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 dokonce nesmažeme nikdy. Ze všech ostatních čísel, která se účastnit úprav mohou, vznikne vždy neprázdný soubor čísel, takže na tabuli bude pořád alespoň $5 + 1 = 6$ čísel. Ukažme, že 6 je hledaný nejmenší počet popisem jednoho (z řady možných) postupů.

Kvůli lichým exponentům u prvočísel 2, 3, 5 a 11 vyčleníme nejdříve například skupinu čísel $A = \{2, 9, 11, 22, 25\}$ a všechna ostatní čísla různá od 17, 19, 23, 29 a 31 zařadíme do skupiny

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33\}.$$

V prvním kroku vybereme všechna čísla z A a nahradíme je číslem

$$n = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 22 \cdot 25} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11.$$

Protože součin všech čísel z B je $2^{31-2} \cdot 3^{15-2} \cdot 5^{7-2} \cdot 7^4 \cdot 11^{3-2} \cdot 13^2 = 2^{29} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2$, vybereme v druhém kroku číslo n spolu se všemi čísly z B a nahradíme je číslem

$$\sqrt{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11) \cdot (2^{29} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2)} = 2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13.$$

Pak už zůstane na tabuli pouze šest čísel, což je, jak jsme vysvětlili, nejmenší možný počet.

A – II – 1

Ze zadání je patrné, že číslo 0 není řešením dané rovnice, ať jsou parametry p, q jakékoliv. Zbavme se proto absolutní hodnoty v rovnici konstatováním, že všechna její řešení jsou *kladné* kořeny rovnice

$$x^2 + px = qx - 1 \quad \text{neboli} \quad x^2 + (p - q)x + 1 = 0, \quad (1)$$

spolu se *zápornými* kořeny rovnice

$$x^2 - px = qx - 1 \quad \text{neboli} \quad x^2 - (p + q)x + 1 = 0. \quad (2)$$

Protože každá kvadratická rovnice má nejvýše dva kořeny, zkoumaná situace celkového počtu čtyř řešení nastane, právě když rovnice (1) bude mít dva *různé kladné* kořeny a zároveň rovnice (2) bude mít dva *různé záporné* kořeny. Rozborem těchto podmínek se nyní budeme zabývat.

Předně je jasné, že oba diskriminanty $(p-q)^2 - 4$ a $(p+q)^2 - 4$ rovnic (1) a (2) musejí mít kladné hodnoty, což vede na nutné podmínky

$$(p-q)^2 > 4 \quad \text{a} \quad (p+q)^2 > 4. \quad (3)$$

Jsou-li splněny, stačí zkoumat otázku, kdy *menší* kořen rovnice (1) je *kladný* a zároveň *větší* kořen rovnice (2) *záporný*. Podle vzorců pro kořeny kvadratické rovnice to lze zapsat nerovnostmi

$$\frac{q-p-\sqrt{(p-q)^2-4}}{2} > 0 \quad \text{a} \quad \frac{p+q+\sqrt{(p+q)^2-4}}{2} < 0. \quad (4)$$

(Znaménka pro menší, resp. větší kořen jsme vybrali na základě toho, že jmenovatelé obou zlomků se rovnají *kladnému* číslu 2.) Z první nerovnosti zapsané v ekvivalentním tvaru

$$q-p > \sqrt{(p-q)^2-4} \quad (5)$$

plyne $q-p > 0$, takže první nerovnost v (3) lze zpřesnit na $q-p > 2$. Pak už nerovnost (5) zřejmě platí, neboť

$$q-p = \sqrt{(p-q)^2} > \sqrt{(p-q)^2-4}.$$

Tak jsme ukázali, že rovnice (1) má dva různé kladné kořeny, právě když platí $q-p > 2$, což je první z podmínek

$$p-q+2 < 0, \quad p+q+2 < 0. \quad (6)$$

Stejným postupem ověříme, že druhá podmínka v (6) vyjadřuje existenci dvou různých záporných kořenů rovnice (2). Stačí upravit druhou nerovnost z (4) do tvaru

$$\sqrt{(p+q)^2-4} < -(p+q) \quad \text{(odkud plyne } p+q < 0)$$

a pro záporné číslo $p+q$ tak získat konečnou podmínku ve tvaru $p+q < -2$, což je druhá z nerovností (6), které tak přesně vymezují zkoumanou situaci.

K dokončení celého řešení zbývá zdůvodnit ekvivalenci

$$(p - q + 2 < 0 \wedge p + q + 2 < 0) \Leftrightarrow p + |q| + 2 < 0.$$

To je snadné, protože ze zřejmé rovnosti $|q| = \max\{-q, q\}$ plyne

$$p + |q| + 2 = \max\{p - q + 2, p + q + 2\}$$

a maximum ze dvou reálných čísel je záporné, právě když jsou obě záporná.

Jiné řešení. Nejprve postupujme shodně s původním řešením až do odvození nerovností (3), které, připomeňme, zaručují existenci dvou různých reálných kořenů rovnice (1), resp. rovnice (2). Označíme je po řadě $x_{1,2}$ a $x_{3,4}$ a zapíšeme jejich vztah ke koeficientům rovnic, vyjádřený známými Viètovými vzorci

$$x_1 + x_2 = -(p - q), \quad x_1 x_2 = 1, \quad x_3 + x_4 = p + q, \quad x_3 x_4 = 1. \quad (7)$$

Z rovnosti $x_1 x_2 = 1$ plyne, že kořeny $x_{1,2}$ mají stejné znaménko. Jsou tedy kladné, právě když je kladný jejich součet, který je ovšem podle první rovnosti v (7) roven $-(p - q)$. Získanou nerovnost $p - q < 0$ lze spolu s podmínkou $(p - q)^2 > 4$ vyjádřit jedinou nerovností $p - q < -2$ (neboli $p - q + 2 < 0$), která je tudíž kritériem toho, kdy rovnice (1) má dva různé kladné kořeny. Podobně pro existenci dvou záporných kořenů rovnice (2) dostaneme kritérium $p + q + 2 < 0$. Závěrečný převod obou nerovností na jednu ekvivalentní nerovnost s absolutní hodnotou zdůvodníme stejně jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozích postupech přejdeme k rovnicím (1) a (2), které jsou obě téhož typu $x^2 + rx + 1 = 0$. Existenci dvou různých kladných či záporných kořenů takové rovnice nyní posoudíme úvahou o příslušné kvadratické funkci $f(x) = x^2 + rx + 1$ s parametrem r , jejímž grafem je parabola rozevřená vzhůru. Proto má funkce f dva různé nulové body, řekněme u a v , právě když má alespoň jednu zápornou hodnotu, navíc takové hodnoty se nabývají právě v bodech, které leží mezi u a v . Všimněme si ještě, že bez ohledu na hodnotu parametru r pro případné nulové body u, v funkce f platí $uv = f(0) = 1$, takže to jsou dvě navzájem převrácená čísla, jež jsou zároveň kladná či zároveň záporná. Jsou tedy obě kladná (resp. záporná), právě když mezi nimi leží číslo 1 (resp. číslo -1). Pro první případ tak dostáváme jedinou podmínku $f(1) < 0$

(neboli $2+r < 0$), pro druhý případ jedinou podmínku $f(-1) < 0$ (neboli $2-r < 0$). Zbývá dodat, že v rovnici (1) je $r = p - q$ a v rovnici (2) je $r = -(p + q)$, takže znovu dostáváme dvojici nerovností (6).

A – II – 2

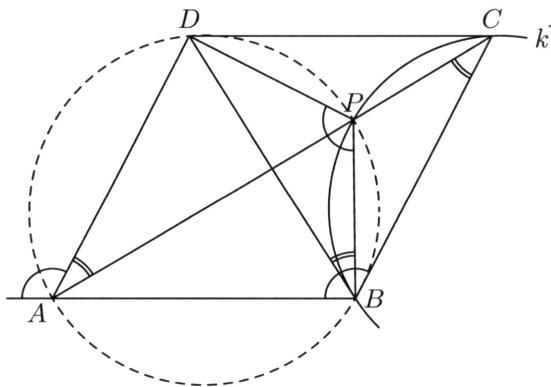
Pro lepší přehlednost zmiňme úvodem zřejmé vlastnosti obecného rovnoběžníku $ABCD$, které v řešení využijeme: součet úhlů BAD a ABC je úhel přímý, zatímco úhly DAC a ACB jsou shodné, stejně jako strany AB a CD .

Podle zadání úlohy přímka BD odděluje body A a P , přičemž platí

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ,$$

čtyřúhelníku $ABPD$ lze tudíž opsat kružnici (obr. 26). V ní jsou proto shodné obvodové úhly DBP a DAP , z čehož vyplývá

$$|\sphericalangle DBP| = |\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle BCP|.$$



Obr. 26

Protože přímka BP odděluje body C a D , lze uplatnit větu o obvodovém a úsekovém úhlu pro tětivu BP kružnice k opsané trojúhelníku BCP : Z odvozené shodnosti úhlů BCP a DBP vyplývá, že přímka BD je tečnou ke kružnici k (s bodem dotyku B). Po tomto zjištění již snadno dokážeme obě požadované implikace.

(i) Je-li přímka CD tečnou ke kružnici k , ze symetrie obou tečen CD a BD plyne $|CD| = |BD|$ neboli $|AB| = |BD|$.

(ii) Platí-li naopak $|AB| = |BD|$ neboli $|CD| = |BD|$, leží bod D na ose tětiny BC kružnice k , takže její tečnou je nejen přímka BD , ale i souměrně sdružená přímka CD .

A – II – 3

Hledáme právě ty dvojice celých kladných čísel m a n , pro něž existují celá kladná čísla k a l taková, že

$$2m - 1 = kn \quad \text{a} \quad 2n - 1 = lm. \quad (1)$$

Pohlédneme na čísla k, l jako na parametry a řešme soustavu lineárních rovnic (1) pro neznámé m, n . Když například k dvojnásobku první rovnice přičteme k -násobek druhé rovnice, eliminujeme tím neznámou n a po úpravě dostaneme první z rovnic

$$(4 - kl)m = k + 2 \quad \text{a} \quad (4 - kl)n = l + 2; \quad (2)$$

druhou rovnicí získáme analogicky. Protože pravé strany rovnic (2) jsou kladné, plyne z tvaru levých stran podmínka $4 - kl > 0$ neboli $kl < 4$. To je pro celá kladná čísla k, l natolik omezující, že jednotlivé možné případy $kl = 1$, $kl = 2$ a $kl = 3$ snadno postupně rozebereme.

V případě $kl = 1$ musí být $k = l = 1$ a z rovnic (2), které přejdou do tvaru $3m = 3$ a $3n = 3$, nacházíme první vyhovující dvojici $m = n = 1$.

Případ $kl = 2$ vůbec rozebírat nemusíme, protože podle levých stran rovnic (1) vidíme, že čísla k, l, m, n z pravých stran musí být (v každém, nejen v tomto případě) lichá.

V případě $kl = 3$ je nutně $\{k, l\} = \{1, 3\}$, což po dosazení do rovnic (2) dává řešení $m = 5$ a $n = 3$, nebo naopak $m = 3$ a $n = 5$.

Závěr. Všechny hledané dvojice (m, n) jsou $(1, 1)$, $(3, 5)$ a $(5, 3)$.

Jiná řešení. Nerovnostní úvahy vedoucí k úplnému vyřešení úlohy můžeme různými způsoby obměňovat. Podívejme se tedy, jakými cestami se lze od výchozích předpokladů $m \mid 2n - 1$ a $n \mid 2m - 1$ ubírat.

První postup. Kdyby neplatilo $m = 2n - 1$ ani $n = 2m - 1$, byla by čísla $2n - 1$ a $2m - 1$ alespoň dvojnásobky po řadě čísel m a n , tudíž by platily nerovnosti $2n - 1 \geq 2m$ a $2m - 1 \geq 2n$. Ty se však navzájem vylučují, neboť znamenají $2n > 2m$, resp. $2m > 2n$. Proto musí platit

aspoň jedna z rovností $m = 2n - 1$ či $n = 2m - 1$. Je-li $m = 2n - 1$, pak $2m - 1 = 4n - 3$ a zbylá podmínka $n \mid 2m - 1$ tak přechází do tvaru $n \mid 4n - 3$ neboli $n \mid 3$. To splňují pouze čísla $n = 1$ a $n = 3$, kterým podle vzorce $m = 2n - 1$ odpovídají po řadě hodnoty $m = 1$ a $m = 5$. Druhý případ, kdy $n = 2m - 1$, se od prvního liší jen záměnou rolí m a n , takže při něm dostaneme ještě třetí vyhovující dvojici $m = 3$ a $n = 5$.

Druhý postup. S ohledem na symetrii můžeme předpokládat, že platí $m \leq n$, z čehož plyne $2m - 1 \leq 2n - 1 < 2n$. Číslo $2m - 1$ je tak násobkem čísla n menším než $2n$, musí to tudíž být samo číslo n . Tak jsme odvodili rovnost $2m - 1 = n$. Zbytek úvah je už stejný jako při prvním postupu.

Třetí postup. Všimněme si, že číslo $2m + 2n - 1$ je dělitelné každým z obou čísel m a n , která jsou navíc nesoudělná, neboť např. číslo m je dělitel čísla $2n - 1$, jež je s číslem n zřejmě nesoudělné. Proto je číslo $2m + 2n - 1$ dělitelné i součinem mn , takže platí nerovnost $mn \leq 2m + 2n - 1$ neboli $(m - 2)(n - 2) \leq 3$. Odtud vyplývá, že obě čísla m , n nemohou být větší než 3; s ohledem na symetrii rozebereme pouze případ $m \leq 3$. Pro $m = 1$ z podmínky $n \mid 2m - 1$ plyne $n = 1$, pro $m = 2$ je podmínka $m \mid 2n - 1$ nesplnitelná, pro $m = 3$ máme podmínky $3 \mid 2n - 1$ a $n \mid 5$, které splňuje jediné $n = 5$.

A – II – 4

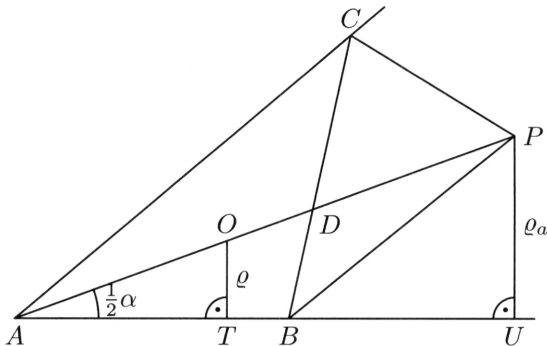
Označme obvyklým způsobem délky stran a velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC . Pro poloměry ϱ , ϱ_a kružnice vepsané, resp. připsané straně BC trojúhelníku ABC o obsahu S platí známé vzorce

$$\varrho = \frac{2S}{a + b + c} \quad \text{a} \quad \varrho_a = \frac{2S}{b + c - a}.$$

(K jejich odvození stačí uvážit rovnosti $S = S_{BCO} + S_{ABO} + S_{ACO}$, resp. $S = S_{ACP} + S_{ABP} - S_{BCP}$ a uvážit, že ϱ , resp. ϱ_a je společná výška zastoupené trojice trojúhelníků ke stranám původního trojúhelníku.)

Protože středy O , P leží na ose vnitřního úhlu BAC , jsou ϱ , ϱ_a odvěsnami protilehlými k úhlu $\frac{1}{2}\alpha$ pravoúhlých trojúhelníků s přeponami AO , resp. AP (obr. 27), takže platí $\varrho = |AO| \sin \frac{1}{2}\alpha$ a $\varrho_a = |AP| \sin \frac{1}{2}\alpha$. Dohromady dostáváme vyjádření pravé strany dokazované rovnosti ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} &= \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\varrho} + \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\varrho_a} = \\ &= \frac{((a + b + c) + (b + c - a)) \sin \frac{1}{2}\alpha}{2S} = \frac{(b + c) \sin \frac{1}{2}\alpha}{S}. \end{aligned}$$



Obr. 27

Na druhé straně je obsah S součtem obsahů trojúhelníků ABD a ACD , které vyjádříme pomocí délek jejich stran z vrcholu A a sinu jimi sevřeného (shodného) úhlu $\frac{1}{2}\alpha$:

$$S = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{c|AD| \sin \frac{1}{2}\alpha}{2} + \frac{b|AD| \sin \frac{1}{2}\alpha}{2} = \frac{(b+c)|AD| \sin \frac{1}{2}\alpha}{2}.$$

Odtud snadno obdržíme vyjádření

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{(b+c) \sin \frac{1}{2}\alpha}{S},$$

z něhož vidíme, že obě strany dokazované rovnosti mají stejnou hodnotu. Tím je celý důkaz hotov. Dodejme, že díky vzorci $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = bc \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha$ lze získaný výsledek zapsat ve tvaru

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{b+c}{bc \cos \frac{1}{2}\alpha}.$$

Jiné řešení. Využijeme rovnosti $|AT| = \frac{1}{2}(b+c-a)$ a $|AU| = \frac{1}{2}(a+b+c)$ pro body T, U dotyku polopřímky AB s vepsanou, resp. připsanou kružnicí.³ Vzhledem k rovnostem $|AT| = |AO| \cos \frac{1}{2}\alpha$ a $|AU| = |AP| \cos \frac{1}{2}\alpha$ dostaneme následující vyjádření pravé strany dokazované rovnosti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} &= \frac{|AO| + |AP|}{|AP|} \cdot \frac{1}{|AO|} = \frac{|AT| + |AU|}{|AU|} \cdot \frac{1}{|AO|} = \\ &= \frac{b+c}{\frac{1}{2}(a+b+c)} \cdot \frac{1}{|AO|} = \frac{2(b+c)}{a+b+c} \cdot \frac{1}{|AO|}. \end{aligned}$$

³ Tyto rovnosti jsou dobře známe a snadno plynou z rovností délek úseků tečen od vrcholů trojúhelníku k bodům dotyku s příslušnou kružnicí.

Vidíme, že k dokončení důkazu požadované rovnosti stačí ukázat, že

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{a + b + c}{b + c}.$$

Z vlastností osy úhlu však víme, že bod D dělí stranu BC v poměru délek stran AB a AC , tedy $|BD|/|DC| = c/b$, takže $|CD| = ab/(b+c)$. Podobně ovšem bod O osy úhlu ACD dělí protější stranu AD trojúhelníku ACD v poměru

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Odtud

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{|AO| + |OD|}{|AO|} = 1 + \frac{a}{b+c} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Jiné řešení. Uvedeme trigonometrický postup založený na užití sinové věty v trojúhelnících ABO , ABD a ABP .⁴ Je zřejmé, že tyto trojúhelníky mají u vrcholu B po řadě úhly $\frac{1}{2}\beta$, β a $90^\circ + \frac{1}{2}\beta$, zatímco u vrcholů O , D , P mají po řadě úhly $90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$, $\gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\frac{1}{2}\gamma$. Proto sinová věta přináší rovnosti

$$\frac{|AB|}{|AO|} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\beta}, \quad \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{\sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin \beta}, \quad \frac{|AB|}{|AP|} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\beta},$$

když jsme dvakrát využili vzorec $\sin(90^\circ + \delta) = \cos \delta$. Po dosazení do dokazované rovnosti tak docházíme k ekvivalentní úloze dokázat pro vnitřní úhly libovolného trojúhelníku ABC rovnost

$$\frac{2 \sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin \beta} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\beta} + \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\beta}.$$

Po uplatnění vzorce $\sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta$ a následném vynásobení obou stran nenulovým výrazem $\sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta$ přecházíme k úkolu ověřit jednodušší rovnost

$$\sin\left(\gamma + \frac{1}{2}\alpha\right) = \cos \frac{1}{2}\gamma \cdot \cos \frac{1}{2}\beta + \sin \frac{1}{2}\gamma \cdot \sin \frac{1}{2}\beta.$$

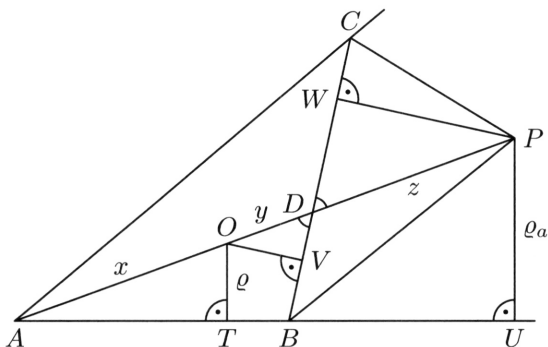
⁴ Se stejným úspěchem lze využít i trojici trojúhelníků ACO , ACD a ACP .

To je už docela snadné: výraz napravo je totiž roven $\cos(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma)$ a rovnost typu $\sin \delta = \cos \varepsilon$ je zaručena, platí-li $\delta + \varepsilon = 90^\circ$. V našem případě je ovšem $\delta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$, tudíž

$$\delta + \varepsilon = \gamma + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90^\circ$$

a celý důkaz je tak hotov.

Jiné řešení. Položme $x = |AO|$, $y = |OD|$ a $z = |DP|$ a podle obr. 28 označme body dotyku T, U, V, W vepsané a připsané kružnice s přímkami AB, BC . Podle věty *uu* jsou dvojice trojúhelníků AOT, APU



Obr. 28

a DOV, DPW podobné, přitom v obou případech je koeficient podobnosti roven poměru poloměrů obou kružnic. Odtud pro přepony zmíněných čtyř trojúhelníků plyne úměra⁵

$$\frac{x}{x + y + z} = \frac{y}{z}. \quad (1)$$

Protože $x + y + z > z$, a tedy rovněž $x > y$, uvedeným dvěma zlomkům se rovná i třetí zlomek sestavený z (kladných) rozdílů číselitelů a jmenovatelů. Platí tedy

$$\frac{x}{x + y + z} = \frac{x - y}{(x + y + z) - z} = \frac{x - y}{x + y} = \frac{2x}{x + y} - 1.$$

⁵ Její platnost je zaručena i v případě $D = V = W$, kdy druhý pár podobných trojúhelníků degeneruje na dvojici úseček — poloměrů zkoumaných kružnic.

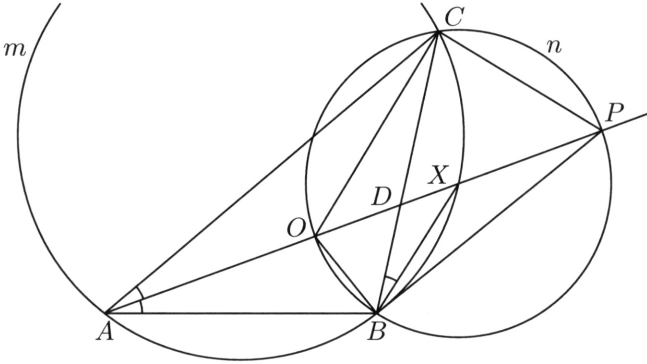
Odtud po vydělení kladnou hodnotou x dostaneme

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{2}{x+y} - \frac{1}{x}$$

a po převodu druhého zlomku z pravé strany na levou již obdržíme dokazovanou rovnost, neboť

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{|AP|}, \quad \frac{2}{x+y} = \frac{2}{|AD|} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{|AO|}.$$

Jiné řešení. Body A, O, D, P leží na ose úhlu BAC . Body O, P navíc leží na vnitřní a vnější ose úhlu ABC , které jsou na sebe kolmé, takže úhly OBP a OCP jsou pravé. Body O, B, P, C proto leží na kružnici n , jejíž střed X je středem úsečky OP (obr. 29), takže zároveň platí $|AP| + |AO| = 2|AX|$. Vzhledem k mocnosti bodu A ke kružnici n



Obr. 29

tak dostáváme

$$\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{|AP| + |AO|}{|AP||AO|} = \frac{2|AX|}{|AX|^2 - |BX|^2}.$$

Odtud plyne, že místo vztahu

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}$$

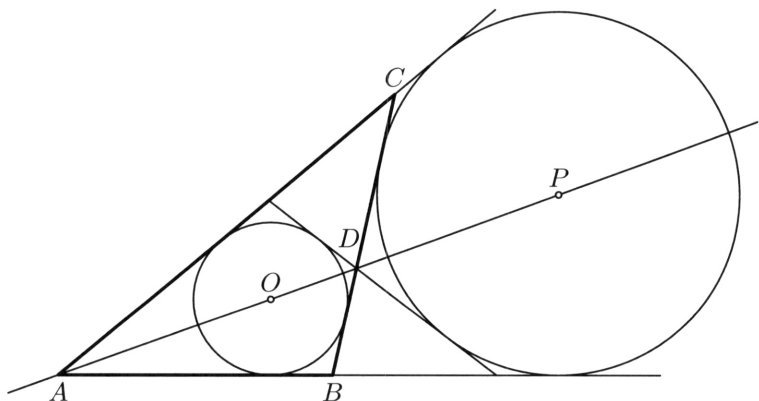
stačí dokázat rovnost $|AD| \cdot |AX| = |AX|^2 - |BX|^2$ neboli $|BX|^2 = |AX|(|AX| - |AD|) = |AX| \cdot |DX|$. Poslední rovnost však plyne z podobnosti trojúhelníků AXB a BXD , které se shodují ve společném vnitřním

úhlu u vrcholu X a v odpovídajících úhlech při vrcholech A, B , jež jsou zároveň obvodovými úhly příslušnými oblouku CX kružnice m .

Jiné řešení. Obě kružnice jsou stejnohlé podle středů A i D . Obě stejnohllosti mají až na znaménko stejné koeficienty a zobrazují bod O na bod P (obr. 30). Odtud

$$\frac{|DP|}{|DO|} = \frac{|AP|}{|AO|} \quad \text{neboli} \quad \frac{|AP| - |AD|}{|AD| - |AO|} = \frac{|AP|}{|AO|}.$$

Úpravou poslední rovnosti dostáváme $2|AP||AO| = |AD|(|AP| + |AO|)$ a po vydělení nenulovým součinem $|AP| \cdot |AO| \cdot |AD|$ vyjde vztah, který jsme chtěli dokázat.



Obr. 30

A – III – 1

Z rovnice plyne, že b^2 je sudé číslo větší než 4^a , tudíž b je sudé číslo větší než sudé číslo 2^a . Musí proto platit $b \geq 2^a + 2$, odkud

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2 \geq (2^a + 2)^2 = 4^a + 4 \cdot 2^a + 4.$$

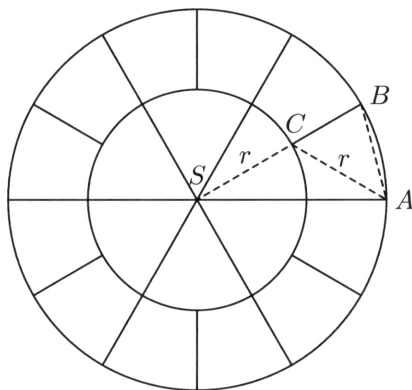
Porovnáním krajních výrazů dostaneme $a^2 \geq 2^a$, což znamená, že $a \leq 4$. Dokážeme totiž indukcí, že opačná nerovnost $a^2 < 2^a$ platí pro každé celé $a \geq 5$. Pro $a = 5$ je to tak ($25 < 32$); platí-li $a^2 < 2^a$ pro některé $a \geq 5$, pak po vynásobení dvěma dostaneme $2a^2 < 2^{a+1}$, takže kýžená nerovnost $(a+1)^2 < 2^{a+1}$ je důsledkem nerovnosti $a^2 < 2^a$, která je

zřejmá, neboť je ekvivalentní s nerovností $1 < a(a-2)$, jež platí triviálně, ať je $a \geq 5$ jakékoli. Tím je důkaz indukci hotov.

Ukázali jsme, že v každé hledané dvojici (a, b) musí platit $a \leq 4$. Postupným dosazením hodnot $a = 1, 2, 3, 4$ do rovnice $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ zjistíme, že úloha má právě dvě řešení, a to $(a, b) = (2, 6)$ a $(a, b) = (4, 18)$.

A – III – 2

Označme $r = 4\sqrt{3}$ cm a celý terč o daném poloměru $r\sqrt{3}$ rozdělme na 18 částí. Prvních šest částí budou shodné výseče o středovém úhlu 60° v kruhu o poloměru r uprostřed terče. Zbylé mezikruží rozdělíme na 12 shodných „mezivýsečí“ o středovém úhlu 30° (obr. 31).



Obr. 31

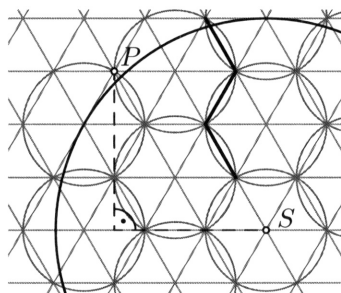
Označme podle obrázku S střed terče a A, B, C vrcholy jedné ze zmíněných mezivýsečí. Protože kružnice ohraničující tyto části mají poloměry r a $r\sqrt{3}$ a protože $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, je zřejmě trojúhelník SAC rovnoramenný, takže $|AC| = r$; navíc je AC nejdelší stranou v trojúhelníku ABC , který má vnitřní úhly 45° , 75° a 60° . Proto je maximální vzdálenost dvou bodů jedné mezivýseče rovna r stejně jako maximální vzdálenost dvou bodů každé ze 6 výsečí středového kruhu o poloměru r . Podle Dirichletova principu některé dva z 19 zásahů leží ve stejné z 18 vytvořených částí, takže jejich vzdálenost je nejvýše r . Důkaz je hotov, protože platí $4\sqrt{3} < 7$ (neboli $48 < 49$).

Jiné řešení. (Podle Tomáše Zemana z Gymnázia J. Keplera v Praze 6.) Uvažujme v rovině síť rovnostranných trojúhelníků o straně $a = \sqrt{12}$,

jejímž vrcholem je i střed S uvažovaného terče. Kromě kruhu $(S; a)$ budeme uvažovat i šest kruhů o poloměru a se středy ve vrcholech sítě ve vzdálenosti $a\sqrt{3}$ od S a dalších 12 kruhů téhož poloměru se středy ve vrcholech sítě ve vzdálenostech střídavě $3a$ a $2a\sqrt{3}$ od středu S (obr. 32). Označme P jeden z bodů sítě, který už neleží uvnitř útvaru složeného z uvedených devatenácti kruhů a přitom má od středu S nejmenší vzdálenost. Podle Pythagorovy věty je (obr. 32)

$$|PS|^2 = \left(\frac{5}{2}a\right)^2 + \left(3\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = 13a^2 > 12^2.$$

Bod P už tedy leží vně terče.



Obr. 32

Pokud tedy všechny zásahy neleží ve středním kruhu $(S; a)$ (pak není co dokazovat), snadno pomocí vhodného otočení celé sítě okolo středu S dosáhneme toho, že některý ze zásahů bude ležet na vyznačené lomené čáře. V tom případě buď v jednom z obou kruhů, v jejichž průniku leží i příslušná úsečka lomené čáry, leží nějaký další zásah (a to ve vzdálenosti menší než $2a$), anebo už žádný další zásah ani v jednom z obou kruhů neleží. To ovšem znamená, že všech 18 zbývajících zásahů musí ležet ve zbývajících 17 kruzích, a tak podle Dirichletova principu v jednom z nich leží aspoň dva zásahy. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Uvažujme tvrzení: Je-li v kruhu o poloměru $r\sqrt{3}$ vybráno N bodů, je vzdálenost některých dvou z nich nejvýše r . Kdybychom chtěli takové tvrzení dokázat porovnáním součtu obsahů N shodných kruhů o průměru r s obsahem kruhu o průměru $r(1 + 2\sqrt{3})$, podaří se nám to, právě když bude platit

$$N \cdot \frac{\pi r^2}{4} > \frac{\pi r^2 (1 + 2\sqrt{3})^2}{4} \quad \text{neboli} \quad N > 13 + 4\sqrt{3} \doteq 19,9.$$

V situaci dané úlohy, kdy je odhad r vzdálenosti dvou bodů zaměněn větší hodnotou $r_1 = r \cdot 7/4\sqrt{3}$, má podobná podmínka tvar

$$N \cdot \frac{\pi r_1^2}{4} > \frac{\pi(r_1 + 2r\sqrt{3})^2}{4}, \quad \text{po dosazení} \quad N > \left(1 + \frac{24}{7}\right)^2 \doteq 19,6.$$

Proto nelze takto jednoduchým postupem k řešení úlohy dospět.

A – III – 3

a) Označme a, b, c, d (proměnné) počty unesených členů stran A, B, C, D . Počáteční čtveřice $(a, b, c, d) = (31, 28, 23, 19)$ je podle parity čísel typu (l, s, l, l) , kde l, s označují lichá, resp. sudá čísla. Protože při každé přeregistraci se parita všech čísel a, b, c, d změní (tři z nich se totiž zmenší o 1 a čtvrté zvětší o 3), čtveřice typu (l, s, l, l) přejde ve čtveřici (s, l, s, s) a ta pak zase zpět ve čtveřici (l, s, l, l) . Dostaneme-li tedy nakonec čtveřici se třemi nulami, musí být tato čtveřice typu (s, l, s, s) , takže všichni unesení tehdy budou členy strany B.

Následující tabulka změn hodnot a, b, c, d ukazuje, že se všichni unesení mohou opravdu stát členy strany B:

$a:$	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	...	0
$b:$	28	27	26	25	24	23	26	29	32	35	...	101
$c:$	23	22	25	24	27	26	25	24	23	22	...	0
$d:$	19	22	21	24	23	26	25	24	23	22	...	0

b) Ukážeme, že hledané čtveřice (a, b, c, d) jsou právě ty, ve kterých *některá tři čísla dávají při dělení čtyřmi stejný zbytek*.

Z rovnosti $a + b + c + d = 101$ plyne, že tři z čísel a, b, c, d mají stejnou paritu a čtvrté paritu opačnou. S ohledem na symetrii hledejme výchozí čtveřice (a, b, c, d) za předpokladu

$$a \equiv b \equiv c \not\equiv d \pmod{2}$$

a podle řešení části a) zkoumejme, kdy se všichni členové mohou stát členy strany D. Z toho, jak se mění počty a, b, c, d při každé přeregistraci (tři se zmenší o 1 a jedno zvětší o 3), plyne, že rozdíly $a - b, a - c, b - c$ nemění své zbytky při dělení čtyřmi. Má-li nakonec platit $a = b = c = 0$, musí být uvedené tři rozdíly už na počátku dělitelné čtyřmi, takže výchozí počty a, b, c musí splňovat podmínku

$$a \equiv b \equiv c \pmod{4}. \quad (1)$$

Ukažme, že podmínka (1) je pro splnění kýženého cíle $a = b = c = 0$ i postačující. Zřejmě stačí ukázat, že výchozí čtveřici (a, b, c, d) splňující podmínku (1) lze po několika krocích změnit na čtveřici typu (e, e, e, f) , pak už totiž stačí opakovat úpravu $(e, e, e, f) \rightarrow (e - 1, e - 1, e - 1, f + 3)$.

Mějme tedy čtveřici celých kladných čísel (a, b, c, d) se součtem 101, která splňuje podmínku (1), a předpokládejme, že ještě neplatí $a = b = c$. Ukažme, jak v tomto případě povolenými kroky zvětšit hodnotu d (o 1 nebo 2). Protože vždy $d \leq 101$, lze takové zvětšení zopakovat jen několikrát, pak již dosáhneme vytčeného cíle.

Proceduru zvětšení d jistě stačí popsat v případech, kdy $a \geq b \geq c$ a $a > c$, tedy $a - c \geq 4$ díky podmínce (1).⁶ Poradme Rumburakovi dvojici kroků

$$(a, b, c, d) \rightarrow (a - 1, b - 1, c + 3, d - 1) \rightarrow (a - 2, b - 2, c + 2, d + 2),$$

kteřá zvyšuje hodnotu d o 2. Tuto dvojici kroků nelze provést pouze v případě $b = 1$, kdy ovšem z (1) a nerovnosti $b \geq c$ plyne rovněž $c = 1$. Na takovou čtveřici $(a, 1, 1, d)$, kde $a \geq 5$ a $d \geq 2$ (nemůže být ještě $d = 1$, protože d má odlišnou paritu), použije Rumburak trojici kroků

$$(a, 1, 1, d) \rightarrow (a - 1, 4, 0, d - 1) \rightarrow (a - 2, 3, 3, d - 2) \rightarrow (a - 3, 2, 2, d + 1),$$

kteřá zvyšuje hodnotu d o 1.

Tvrzení o tvaru všech vyhovujících čtveřic z první věty řešení b) je tak dokázáno.

A – III – 4

Budeme dále uvažovat jen takové lichoběžníky $ABCD$, ve kterých platí $AB \parallel CD$, u ostatních průsečíků (rovnoběžných) přímk BC a AD neexistuje.

Označme O střed kružnice k , E průsečík jejích tečen vedených body A , C (obr. 33). Jak víme, body A , C leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem OE a jsou podle tohoto průměru souměrně sdružené. Společnou velikost ostrých úhlů při základně AC rovnoramenného trojúhelníku ACE označme φ . Konečně vnitřky kratšího a delšího oblouku AC kružnice k označme k_1 , resp. k_2 .

⁶ Zdůrazněme, že nevylučujeme rovnost $c = 0$. Ke čtveřici s nulovým prvkem nás totiž dovede v další větě popsáná dvojice kroků v případě, kdy $b = 2$.

v přímce. Z $D \in k_1$ plyne existence průsečíku X polopřímky CD s vnitřkem úsečky AE (bod D pak odpovídá bodu X podle konstrukce ze zadání úlohy). Zbývá objasnit, proč $AB \parallel CD$. Protože body O a Y leží na různých obloucích AC kružnice τ a přitom $|AO| = |CO|$, je polopřímka YO osou úhlu AYC , takže přímky $A(D)Y$ a $B(C)Y$ jsou souměrně sdružené podle přímky YO , která je (triviálně) osou souměrnosti kružnice k , neboť prochází jejím středem. Proto podle této osy musí být souměrně sdruženy i průsečíky obou zmíněných přímek $A(D)Y$ a $B(C)Y$ s kružnicí k , tedy (díky určenému pořadí bodů) jednak body A a B , jednak body D a C . Obě úsečky AB a CD jsou proto kolmé na přímkou OY , a jsou tudíž rovnoběžné.

Je-li Y vnitřní bod oblouku AE , sestrojíme body $D \in k_2$ a $B \in k_1$ tak, aby v přímce ležely body v pořadí D, A, Y , resp. C, B, Y . Polopřímka CD protne přímkou AE v potřebném bodě X (protože $D \neq A$, bude jistě $X \neq A$), pokud platí $|\sphericalangle AEC| + |\sphericalangle ECD| < \pi$. To ověříme tak, že užijeme větu o obvodovém a úsekovém úhlu v kružnici k , podle které $|\sphericalangle ECD| = \pi - |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAY|$, a protože $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle AYC|$, je součet $|\sphericalangle AEC| + |\sphericalangle ECD|$ roven součtu dvou úhlů v trojúhelníku ACY . Ze sdruženosti přímek $D(A)Y$ a $C(B)Y$ podle osy OY úhlu AYC pak opět plyne požadovaná rovnoběžnost $AB \parallel CD$.

Závěr. Hledanou množinou je sjednocení vnitřků kratších oblouků CE a AE Thaletovy kružnice τ .

A – III – 5

V jednom kroku nahrazujeme dvě čísla a, b jedním přirozeným číslem $\sqrt{ab}$. Protože pro libovolná $a \leq b$ platí $a \leq \sqrt{ab} \leq b$, je zřejmé, že na tabuli budou stále zapsána pouze čísla z množiny $M = \{1, 2, \dots, 33\}$. Je-li přitom číslo a prvočíslem nebo součinem několika různých prvočísel, musí tato prvočísla být obsažena i v rozkladu čísla $\sqrt{ab}$, takže $\sqrt{ab} = ka$ neboli $b = k^2a$ pro některé přirozené k . Je-li $k = 1$, musí být číslo a na tabuli zapsáno vícekrát. Je-li $k \geq 2$, a tedy $b = k^2a \geq 4a$, musí platit $4a \leq 33$, a proto z $b = k^2a \in M$ plyne i $4a \in M$. Na tabuli tudíž zůstanou až do konce jednak všechna prvočísla, která dělí právě jedno z čísel množiny M , jednak všechna ta $a \in M$, která jsou součinem několika různých prvočísel a zároveň splňují podmínku $4a > 33$ neboli $a \geq 9$. V souhrnu jde celkem o 15 nesmazatelných čísel

10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33.

Ukážeme, že kromě nich bude na tabuli vždy zastoupeno aspoň jedno z čísel množiny $S = \{6, 12, 18, 24\}$ (na začátku tam jsou všechna). Zvolíme-li v jednom kroku čísla a a b , kde např. $a \in S$, a nahradíme je číslem $n = \sqrt{ab}$, musí být i číslo n násobkem šesti, který díky odhadům $a \leq 24$ a $b \leq 33$ splňuje nerovnost $n \leq \sqrt{24 \cdot 33} = 6\sqrt{22} < 30$, takže bude platit $n \in S$. Na tabuli po libovolném počtu kroků tudíž zůstane 15 výše zapsaných čísel a aspoň jedno číslo z S , tedy alespoň 16 čísel, jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Počtu 16 čísel na tabuli lze například dosáhnout 17 kroky, popsanými níže tak, že mazaná čísla v každém řádku jsou šedá, zatímco nově vzniklé číslo je připsáno na konci dalšího řádku:

1–6, 7, 8–27, 28, 29–33;
1–6, 8–13, 14, 15–27, 29–33, 14;
1–4, 5, 6, 8–13, 15–19, 20, 21–27, 29–33, 14;
1–3, 4, 6, 8–13, 15–19, 21–24, 25, 26, 27, 29–33, 14, 10;
1–3, 6, 8, 9, 10, 11–13, 15–19, 21–24, 26, 27, 29–33, 14, 10, 10;
1–3, 6, 8, 9, 11–13, 15–19, 21–24, 26, 27, 29–33, 14, 10, 10;
1–3, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 15–19, 21–24, 26, 27, 29–33, 14, 10;
1–3, 6, 8, 9, 11, 13, 15–19, 21–23, 24, 26, 29–33, 14, 10, 18;
1–3, 8, 9, 11, 13, 15–17, 18, 19, 21–23, 26, 29–33, 14, 10, 18, 12;
1, 2, 3, 8, 9, 11, 13, 15–17, 19, 21–23, 26, 29–33, 14, 10, 12, 18;
1, 3, 8, 9, 11, 13, 15–17, 19, 21–23, 26, 29–31, 32, 33, 14, 10, 12, 6;
1, 3, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 32, 33, 14, 10, 12, 6, 16;
1, 3, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 12, 6, 16;
3, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 12, 6, 4;
9, 11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 6, 4, 6;
11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 6, 6, 6;
11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 6, 6;
11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 6.

A – III – 6

S ohledem na symetrii stačí uvažovat trojice (a, b, c) , ve kterých $a \geq b \geq c$. Pro „nejmenší“ z nich $(2, 2, 2)$, $(3, 2, 2)$, $(3, 3, 2)$, $(3, 3, 3)$ a $(4, 2, 2)$ má daný výraz hodnoty 2, $3/2$, $17/8$, $7/2$, resp. $11/4$. Ukážeme-li, že pro všechny ostatní trojice (a, b, c) , které již splňují podmínku $a + b + c \geq 9$, platí nerovnost

$$\frac{a + b + c}{2} - \frac{[a, b] + [b, c] + [c, a]}{a + b + c} \geq \frac{3}{2},$$

bude to znamenat, že hledaná nejmenší hodnota je rovna $3/2$. Vypsanou nerovnost ekvivalentně upravme:

$$(a+b+c)^2 - 2([a,b] + [b,c] + [c,a]) \geq 3(a+b+c),$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - [a,b]) + 2(bc - [b,c]) + 2(ca - [c,a]) \geq 3(a+b+c).$$

Protože zřejmě platí $xy \geq [x,y]$ pro libovolná x, y , zanedbáme nezáporné dvojnásobky v levé straně poslední nerovnosti a dokážeme (silnější) nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a+b+c). \quad (1)$$

Z předpokladu $a+b+c \geq 9$ a Cauchyovy nerovnosti $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$ plyne

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3(a+b+c) \cdot \frac{a+b+c}{9} \geq 3(a+b+c),$$

a důkaz je hotov.

Poznámky. Místo Cauchyovy nerovnosti jsme mohli přepsat (1) do tvaru

$$\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{27}{4}$$

a tuto nerovnost zdůvodnit umocněním zřejmých nerovností

$$a - \frac{3}{2} \geq \frac{5}{2}, \quad b - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad c - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2},$$

neboť uvažujeme už jen trojice, ve kterých $a \geq 4$, $b \geq c \geq 2$.

Postup z řešení vede rovněž k výsledku, že pro libovolná celá čísla a, b, c větší než 1 platí nerovnost

$$\frac{a+b+c}{2} - \frac{[a,b] + [b,c] + [c,a]}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{6}.$$

Kategorie P

Texty úloh

P – I – 1

Malíř Bonifác

Radní v Kocourkově vypsal nedávno výběrové řízení na velmi odpovědnou a důležitou činnost: malování chodníku před radnicí. Ve výběrovém řízení zvítězil malíř Bonifác (jediný uchazeč a zcela náhodou také starostův bratr).

Jak už to bývá, sotva Bonifác podepsal smlouvu, hned začal dostávat z radnice jeden příkaz za druhým: Tento kus chodníku natřít zelenou barvou, tento růžovou, potom to skoro celé přetřít na bílo... Netrvalo dlouho a Bonifác si všiml, že se některé příkazy překrývají. A když si uvědomil, že ho smlouva zavazuje provést všechny příkazy v tom pořadí, v jakém je dostal, začaly ho obcházet mdloby.

Naštěstí však přišel na geniální nápad. Kdyby věděl, jak má chodník vypadat nakonec po provedení všech příkazů, mohl by ho tak namalovat rovnou a potom se tvářit, že on přece všechny příkazy dodržel. A hlavně potom radnici všechno vyúčtuje podle původních příkazů a ještě na tom pořádně vydělá.

Soutěžní úloha. Chodník před radnicí měří K kocourkovských kroků. Jeden jeho konec bude mít souřadnici 0, opačný konec má souřadnici K . V současnosti má celý chodník asfaltově černou barvu. Bonifác používá F jiných barev, očíslovaných od 1 do F . Postupně dostal N příkazů. Každý z nich zapíšeme ve tvaru $\langle a_i \ b_i \ f_i \rangle$, kde a_i a b_i jsou souřadnice začátku a konce úseku a f_i je barva, kterou se má tento úsek obarvit. Na obarvení jednoho kocourkovského kroku chodníku potřebuje Bonifác jeden litr barvy. Pro každou z barev spočítejte, kolik litrů bude Bonifác potřebovat.

Formát vstupu: Vstupní soubor se jmenuje **bonifac.in**. Na prvním řádku souboru jsou tři celá čísla N (počet příkazů), F (počet barev) a K (délka chodníku) oddělená mezerami ($1 \leq N \leq 100\,000$, $1 \leq F, K \leq$

$\leq 1\,000\,000\,000$). Následuje N řádků, z nichž každý popisuje jeden příkaz, a to v pořadí, v jakém je Bonifác dostal. Přitom i -tý z těchto řádků obsahuje tři celá čísla a_i , b_i a f_i oddělená mezerami ($0 \leq a_i < b_i \leq K$, $1 \leq f_i \leq F$).

Pro 8 z 10 testovacích vstupů bude navíc platit $K \leq 100\,000$. Pro 6 z těchto 8 testovacích vstupů bude navíc $N \leq 1\,000$, a pro 3 z těchto 6 vstupů také $K \leq 1\,000$.

Formát výstupu: Výstupní soubor se jmenuje **bonifac.out**. Pro každou z F barev (v pořadí jejich čísel) zapište do výstupního souboru jeden řádek obsahující jedno celé číslo — kolik litrů této barvy bude Bonifác potřebovat.

Příklad:

Vstupní soubor bonifac.in :	Výstupní soubor bonifac.out :
4 5 7	1
1 5 1	3
2 4 3	1
4 6 4	0
3 6 2	0

P – I – 2

Čokoláda

Mařenka bude mít brzy narozeniny. Její bratr Jeníček dlouho nemohl vymyslet, co by jí jenom mohl k narozeninám dát — až konečně ve své tajné skrýši na půdě objevil zbytek čokolády, kterou si tam kdysi ukryl. Pravda, myši už si vybraly svoji daň, ale i tak z čokolády zůstalo ještě docela dost. Děravé části oláme, aby mu vznikla pěkná čtvercová tabulka, a tu úhledně zabalí. A zbytek samozřejmě sní.

Soutěžní úloha. Je dán původní počet řádků R a sloupců S , které čokoláda kdysi měla. Dále máme matici $R \times S$ nul a jedniček určující, která políčka čokolády zůstala celá. Zjistěte, kolika různými způsoby může Jeníček uskutečnit svůj plán. Jinými slovy řečeno, spočítejte, kolika způsoby je možné ve zbytku čokolády vyznačit čtverec (libovolné velikosti) bez děr. Všechny hrany čtverce musí samozřejmě ležet na hranách políček. Stejně velké čtverce ležící na různých souřadnicích v tabulce čokolády považujeme za různá řešení.

Formát vstupu: Vstupní soubor se jmenuje **cokolada.in**. Na jeho prvním řádku jsou dvě celá celá čísla R a S oddělená mezerou ($1 \leq R, S \leq$

≤ 2500). Následuje R řádků, v r -tém z nich je S mezerami oddělených celých čísel $a_{r,1}, \dots, a_{r,S}$. Je-li políčko čokolády (r, s) celé, je $a_{r,s} = 1$, jinak $a_{r,s} = 0$.

Pro 7 z 10 testovacích vstupů bude navíc platit $R \leq 500$. Pro 5 z těchto 7 testovacích vstupů bude $R, S \leq 100$, a pro 3 z těchto 5 vstupů bude $R, S \leq 20$.

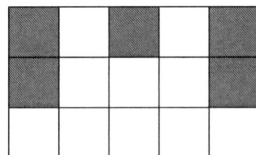
Formát výstupu: Výstupní soubor **cokolada.out** obsahuje jediný řádek a na něm jedno celé číslo — hledaný počet čtverců.

Příklad

Vstupní soubor cokolada.in :	Výstupní soubor cokolada.out :
3 5	12
0 1 0 1 0	
0 1 1 1 0	
1 1 1 1 1	

Na obrázku vpravo je nakreslena čokoláda popsaná ukázkovým vstupem. Šedou barvou jsou vyznačena políčka, která chybějí.

Čtverec 1×1 na ní můžeme vyznačit deseti způsoby a čtverec 2×2 dvěma, což je celkem $10 + 2 = 12$ způsobů.



P – I – 3

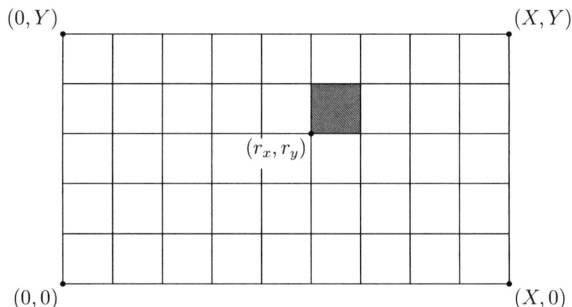
Koláč

Zlá ježibaba drží v kleci Jeníčka a Mařenku a snaží se je vykrmit. Právě pro ně upekla plech ježibabiho koláče. Koláč má tvar obdélníka, celý je odpudivý a navíc je ozdoben ohavnou pečenou ropuchou.

Protože cokoliv je lepší než muset sníst tuto ropuchu, rozhodli se Jeníček s Mařenkou, že si z jedení koláče udělají hru. Mařenka na něm lžičkou nakreslila čáry, čímž ho rozdělila na $X \times Y$ stejných čtverců. Celá ropucha sedí na jednom z těchto čtverců.

Jeníček s Mařenkou se nyní budou pravidelně střídat na tahu. Ten z nich, kdo je na tahu, si vybere některou z vyznačených čar a podél ní koláč rozřízne na dvě obdélníkové části. Následně sní tu část koláče, ve které není ropucha. Kdo bude na tahu v okamžiku, kdy už z koláče zbude

pouze poslední čtverec s ropuchou, prohrál a musí ropuchu sníst. První tah provádí Mařenka.



Soutěžní úloha. Jsou dány rozměry koláče X, Y a souřadnice r_x, r_y levého dolního rohu čtverce, v němž je ropucha.

a) (2 body) Rozhodněte, kdo zvítězí v situaci znázorněné na obrázku — tedy pro $(X, Y) = (9, 5)$ a $(r_x, r_y) = (5, 3)$ — a popište jednu možnou strategii, která mu zabezpečí výhru.

b) (8 bodů) Popište co nejefektivnější algoritmus, který pro dané hodnoty X, Y, r_x a r_y zjistí, které z dětí hru vyhraje, jestliže budou obě hrát optimálně.

Příklady

Vstup:

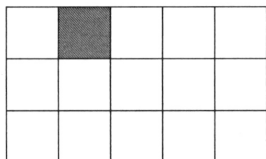
8 1 1 0



V prvním tahu Mařenka provede řez po přímce $x = 3$. Zbude ropucha a okolo ní z každé strany jeden čtverec. Jeníček sní jeden z nich, Mařenka druhý, a Jeníčkovi zůstane ropucha.

Vstup:

5 3 1 2



V druhém příkladu vyhraje Jeníček.

Počítač Kvak

V letošním ročníku olympiády se budeme setkávat se speciálním počítačem nazvaným Kvak. Ve studijním textu uvedeném za zadáním této úlohy je popsáno, jak počítač Kvak funguje a jak se programuje.

Soutěžní úloha.

a) (3 body) V rouře počítače je jedno číslo. Napište program pro Kvak, který vypíše 1, jestliže je to prvočíslo, zatímco v opačném případě vypíše 0.

Plný počet bodů dostanete za libovolné řešení, které bude mít méně než 100 příkazů a pro libovolný vstup vykoná méně než 10 000 kroků.

b) (4 body) V rouře počítače je posloupnost *kladných* čísel. Délka této posloupnosti je menší než 65 000. Napište program pro Kvak, který tuto délku spočítá a vypíše. Plný počet bodů dostanete za řešení, které bude mít lineární časovou složitost.

c) (3 body) Počítač Kvak se nám poškodil, takže dokáže provést příkaz **put** pouze desetkrát a poté se definitivně zastaví. Všechny ostatní příkazy provádí počítač bez problémů.

V rouře počítače je neprázdná posloupnost čísel. Je možné napsat program pro takto poškozený Kvak, který bez ohledu na délku vstupní posloupnosti spočítá a vypíše její maximum? Jestliže ano, napište takový program. V opačném případě dokažte, že to není možné.

V letošním ročníku olympiády se budeme setkávat se speciálním počítačem zvaným Kvak.

Jediný datový typ, se kterým Kvak pracuje, se nazývá **number**, což je celé číslo z rozsahu od 0 do 65 535 včetně.¹ Všechny matematické výpočty provádí Kvak modulo 65 536, takže například hodnotou výrazu $65\,530 + 10$ je 4.

Kvak používá 26 proměnných, které nazýváme *registry*. Registry jsou označeny písmeny **a** až **z** a v každém z nich může být uložena jedna hodnota typu **number**. Na začátku výpočtu jsou ve všech registrech nuly.

Kromě registrů má Kvak ještě jednu *jednosměrnou rouru* neomezené délky, do které se mohou ukládat hodnoty typu **number**. Je to jediná datová struktura, kterou Kvak používá. S rourou lze provádět dvě operace:

▷ vložit do ní číslo z registru X příkazem **put** X ,

¹ $65\,535 = 2^{16} - 1$, typ **number** je tedy přesně to, co znáte jako 16bitové celé číslo bez znaménka.

▷ z opačného konce roury odebrat číslo a uložit ho do registru X příkazem `get X`.

Čísla se v rouře počítače nemohou předbíhat, Kvak je tedy bude odebírat ve stejném pořadí, v jakém je do roury vložil.² Roura má neomezenou kapacitu, lze do ní vložit libovolné množství čísel. Není-li řečeno jinak, roura je na začátku výpočtu prázdná.

Počítač Kvak má také možnost vypisovat čísla (výsledky výpočtu) na výstup.

Příkazy

V následující tabulce jsou shrnuty všechny příkazy, které Kvak umí provádět a které tedy můžete používat v programech.

<i>příkaz</i>	<i>význam příkazu</i>
<code>get X</code>	Kvak odebere jedno číslo z roury a uloží ho do registru X .
<code>put X</code>	Kvak vloží do roury číslo z registru X .
<code>put číslo</code>	Kvak vloží dané číslo do roury.
<code>print</code>	Kvak odebere jedno číslo z roury a vypíše ho na výstup.
<code>add</code>	sčítání: Kvak odebere dvě čísla z roury a vloží do roury jejich součet.
<code>sub</code>	odčítání: Kvak odebere dvě čísla z roury a vloží do roury jejich rozdíl (první minus druhé).
<code>mul</code>	násobení: Kvak odebere dvě čísla z roury a vloží do roury jejich součin.
<code>div</code>	dělení: Kvak odebere dvě čísla z roury a vloží do roury celou část jejich podílu (první lomeno druhé).
<code>mod</code>	zbytek: Kvak odebere dvě čísla z roury a vloží do roury zbytek, který dá první z nich po celočíselném dělení druhým.
<code>label L</code>	návěstí: Toto místo v programu dostane označení L (kde L může být libovolný řetězec). Stejně návěstí nesmí být v programu vícekrát.
<code>jump L</code>	skok: Kvak bude pokračovat v provádění programu od místa, které má označení L .
<code>jz X L</code>	skok jestliže nula: Je-li v registru X nula, Kvak provede příkaz <code>jump L</code> .
<code>jeq X Y L</code>	skok jestliže se rovnají: Je-li v registrech X a Y stejná hodnota, Kvak provede příkaz <code>jump L</code> .

² Takovou datovou strukturu obvykle nazýváme *fronta*.

jgt $X\ Y\ L$ skok jestliže je větší: Je-li v registru X větší hodnota než v registru Y , Kvak provede příkaz **jump** L .
jempty L skok jestliže je prázdná: Není-li v rouře žádné číslo, Kvak provede příkaz **jump** L .

stop konec: Kvak ukončí svůj výpočet.

Pokud se během výpočtu stane, že se pokusíme odebrat číslo z roury počítače a roura přitom bude prázdná, nastane chyba. Chyba nastane také tehdy, když se pokusíme dělit nulou, počítat zbytek po dělení nulou, nebo skočit na neexistující místo v programu. Dojde-li výpočet programu na konec, Kvak po provedení posledního příkazu korektně skončí (jako kdyby na konci programu byl ještě příkaz **stop**.)

V zápisu programu můžeme psát více příkazů na jeden řádek, v takovém případě je od sebe oddělujeme středníkem.

Příklad 1

Následující program spočítá a vypíše součet všech čísel od 1 do 20.

```
put 20
put 0
label start
get a
jz a
end
put a ; put a ; put 1
add
sub
get b ; put b
jump start
label end
print
```

Pokaždé, když se Kvak při provádění programu dostane ke třetímu řádku (**label start**), budou v rouře právě dvě čísla. Jestliže první z nich označíme N , hodnota druhého bude rovna součtu $S = (N + 1) + \dots + 20$. Poté načteme N do registru **a**. Je-li $N = 0$, máme v rouře hledaný součet, můžeme ho vypsát na výstup a skončit. V opačném případě chceme provést dvě věci: Přičíst N k dosud získanému součtu, a následně N zmenšit o 1. Po provedení řádku šest (tři příkazy **put**) máme v rouře postupně čísla: S , N , N , 1. Příkaz **add** sečte první dvě, po jeho provedení bude v rouře trojice čísel N , 1, $N + S$. Po vykonání dalšího příkazu **sub** budou v rouře hodnoty $N + S$ a $N - 1$. To už je téměř to, co potřebujeme, jenom

v opačném pořadí. Proto první z nich načteme do registru **b** a znovu vložíme do roury.

Příklad 2

V rouře je neprázdná posloupnost čísel. Napíšeme program, který spočítá a vypíše na výstup jejich součet. (Přesněji, jeho zbytek po dělení 65 536.)

Budeme stále opakovat následující postup: Zjistíme, zda jsou v rouře aspoň dvě čísla. Jestliže ano, některá dvě z nich sečteme a nahradíme je jejich součtem. Pokud tam už dvě čísla nejsou, zůstalo tam tady už jenom jediné a to zjevně součtem všech původních čísel. V programu pro počítač Kvak můžeme tuto myšlenku implementovat například následovně:

```
label cyklus
get a
jempty konec
put a
add
jump cyklus
```

```
label konec
put a
print
```

Na začátku každé iterace odebereme z roury jedno číslo a vložíme ho do registru **a**. Pokud se tím roura vyprázdnila, máme v registru **a** hledaný součet, stačí ho už jenom vypsát. Pokud ne, číslo z registru **a** vrátíme zpět do roury. V tom okamžiku jsou v rouře alespoň dvě čísla a můžeme tedy bez obav provést příkaz **add**.

Časová složitost tohoto řešení je lineární vzhledem k počtu čísel, která byla na začátku výpočtu v rouře. Každá iterace cyklu totiž provádí jen konstantní počet příkazů a zmenší nám o jedno počet čísel v rouře.

P – II – 1

Aquapark

V aquaparku mají tři tobogany. Správce aquaparku se rozhodl zjistit, nakolik je návštěvníci využívají. Má k dispozici následující informace:

- ▷ Jak dlouho trvá jedna jízda na každém toboganu (časy T_1 , T_2 , T_3).

- ▷ Jak dlouho trvá, než návštěvník dojde od konců toboganů k jejich začátkům (čas D). Tobogany jsou umístěny tak, že cesta od konce libovolného toboganu k začátku libovolného toboganu trvá stejně dlouho.
- ▷ Pro každý tobogan fotobuňkou zaznamenané časy, kdy některý z návštěvníků aquaparku nasedl na tento tobogan.

Z těchto informací se přesný počet návštěvníků využívajících tobogany většinou nedá určit. Můžeme ale určit minimální počet lidí, kteří mohli tobogany využívat tak, aby to odpovídalo zaznamenaným údajům.

Soutěžní úloha. Na základě informací o délce jízdy na toboganech, trvání cesty zpět nahoru a časech jednotlivých nasednutí na tobogany určete minimální možný počet lidí, kteří mohli využívat tobogany.

Jinými slovy, najdete nejmenší číslo K takové, že existuje rozvrh pohybu pro K lidí, podle kterého někdo nasedne v každém ze zaznamenaných časů na příslušný tobogan. Nezapomeňte, že když někdo nasedne na tobogan i v čase T , tak další jízdu (na kterémkoliv z toboganů) může tento člověk začít nejdříve v čase $T + T_i + D$.

Nezapomeňte také zdůvodnit správnost svého algoritmu.

Formát vstupu: Na prvním řádku vstupu jsou tři čísla T_1, T_2, T_3 — délky jízd na jednotlivých toboganech. Na druhém řádku je jedno číslo D — čas potřebný na výstup od konců toboganů nahoru k jejich začátkům. Následují tři řádky s informacemi o uskutečněných jízdách na jednotlivých toboganech. Každý z nich začíná číslem N_i , udávajícím počet jízd, které se na toboganu i uskutečnily. Na řádku pak následuje N_i čísel a_{ij} ($1 \leq j \leq N_i$), která představují časy nasednutí na tento tobogan. Pro každý tobogan je tato posloupnost časů uspořádána vzestupně.

Platí: $0 \leq N_1, N_2, N_3 \leq 1\,000\,000$,

$1 \leq T_1, T_2, T_3, D, a_{ij} \leq 500\,000\,000$.

Formát výstupu: Vypište jediné číslo — minimální počet návštěvníků aquaparku, pro něž mohla zaznamenaná situace nastat.

Příklady

Vstup:

1 2 3

1

2 1 7

3 2 5 11

1 3

Výstup:

2

Jeden možný způsob, jak mohli dva lidé uskutečnit všechny zaznamenané jízdy: první z nich jel na prvním, pak na třetím, a opět na prvním

toboganu (v časech 1, 3 a 7), zatímco druhý člověk absolvoval všechny tři jízdy na druhém toboganu.

Vstup:

4 5 6

10

2 2 3

3 1 7 15

1 5

Výstup:

6

V tomto případě žádný návštěvník nemohl stihnout dvě jízdy, proto jich určitě muselo být šest.

P – II – 2

Oplocení farmy

Přemysl se doslechl, že se v zemědělství točí velké peníze, a rozhodl se, že v něm také začne podnikat. Netrvalo dlouho a už vlastnil rozlehlou farmu, na níž pěstoval množství zajímavých plodin. Přemyslova zemědělská půda má obdélníkový tvar a je rozdělena na $R \times S$ stejně velkých čtvercových políček. Na každém políčku se pěstuje jedna plodina.

Nedávno se farma ocitla v nebezpečí, neboť v jejím okolí se přemnožili zajíci, kteří si rádi pochutnávají na pěstovaných rostlinách. Proto se Přemysl rozhodl, že na farmě nechá postavit plot, který ochrání plody jeho práce.

Jelikož v okolí není velká konkurence v oblasti stavebnictví, Přemyslovi se podařilo sehnat pouze jeden kontakt — firmu Čtverce s.r.o., která se specializuje na stavební práce čtvercového charakteru. Firma Čtverce s.r.o. nabídla, že postaví na farmě plot, který ochrání zvolenou čtvercovou část pozemku.

Soutěžní úloha. Přemysl přemýšlí, kde má nechat plot postavit. Plot může chránit čtvercové území libovolné velikosti. Musí ale vést po hranicích mezi políčky, takže každé políčko ochrání buď celé, nebo vůbec. Přemysl navíc požaduje, aby plot chránil políčka s alespoň dvěma různými plodinami. Chce mít totiž jistotu, že nezůstane na trhu jenom s jedním produktem. Pomozte Přemyslovi zjistit, kolik má možností na postavení plotu.

Formát vstupu: Na prvním řádku vstupu jsou zadány rozměry pozemku — počet řádků R a počet sloupců S , a dále počet plodin K , které je možné na farmě pěstovat. Platí $1 \leq R, S \leq 2\,500$, $1 \leq K \leq 1\,000\,000\,000$.

Na každém z dalších R řádků vstupu je vždy uvedeno S čísel — popis, které plodiny se pěstují na jednotlivých políčkách. Plodiny jsou označeny čísly od 0 do $K - 1$.

Formát výstupu: Vypište jediné číslo — kolika způsoby může Přemysl postavit na farmě plot, který ohradí čtvercovou oblast, na níž se pěstují aspoň dvě různé plodiny.

Příklad

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
3 6 10	8
1 0 0 0 1 7	
2 0 0 0 7 7	
3 0 0 0 7 7	

Máme pět možností, jak lze postavit plot kolem oblasti velikosti 2×2 , a tři možnosti, jak lze postavit plot kolem oblasti velikosti 3×3 .

P – II – 3

Omezovač rychlosti

Společnost Expresní pošta doručuje zásilky po celé Evropě. V poslední době ale její řidiči často přehlíželi dopravní značky a dostávali pokuty za překročení maximální povolené rychlosti. Ředitel společnosti proto rozhodl, že nechá do každého auta namontovat omezovač rychlosti. Ten funguje následovně: řidič si na něm před jízdou nastaví maximální přípustnou rychlost v a přístroj se pak automaticky postará o to, aby auto během celé jízdy nikdy nepřekročilo tuto rychlost. Ředitel společnosti navíc vydal nařízení, že si řidič musí před každou jízdou nastavit takové omezení rychlosti, aby na trase, kterou pojede, nepřekročil žádnou maximální povolenou rychlost.

Soutěžní úloha. Je dána silniční síť, po níž jezdí řidiči společnosti Expresní pošta. Tato silniční síť obsahuje N měst, mezi nimiž vede celkem M různých cest. Každá cesta spojuje dvě města, přičemž cesty se mimo města kříží pouze mimoúrovňově (tzn. mimo města nelze odbočit z jedné cesty na jinou). Pro každou cestu známe její délku (v kilometrech) a maximální povolenou rychlost (v kilometrech za hodinu).

Pro danou dvojici měst x a y může existovat více způsobů, jak lze po cestách dojet z města x do města y . Napište program, který pro všechny dvojice měst x a y určí minimální čas potřebný na cestu z města x do

města y při použití omezovače rychlosti a dodržení nařízení ředitele společnosti.

Formát vstupu: První řádek obsahuje dvě kladná celá čísla N , M ($1 \leq N \leq 50$, $1 \leq M \leq 1\,000$) — počet měst a počet cest mezi nimi. Jednotlivá města jsou na vstupu označena čísly 1 až N .

Každý z následujících M řádků popisuje jednu cestu a obsahuje čtyři čísla i , j , d , m . Ta udávají, že cesta spojující města i a j má délku d kilometrů a maximální povolenou rychlost m kilometrů za hodinu. Všechny cesty jsou obousměrné. Mezi dvěma městy může být postaveno více cest různé délky a s různou maximální povolenou rychlostí.

Můžete předpokládat, že mezi každou dvojicí měst existuje aspoň jedna trasa (která může být tvořena více navazujícími cestami).

Všechny vzdálenosti a rychlosti jsou na vstupu uvedeny s přesností nejvýše na 3 desetinná místa. Pro každou vzdálenost d platí $1 \leq d \leq 1\,000\,000$, pro každou maximální povolenou rychlost m platí $5 \leq m \leq 100\,000$.

Formát výstupu: Výstup bude tvořen N řádky, z nichž každý obsahuje N čísel. Číslo v i -tém řádku a j -tém sloupci určuje minimální čas (v hodinách) potřebný na jízdu mezi městy i a j . Výsledek uveďte s přesností na tři desetinná místa.

Při práci s reálnými čísly v počítači mohou vznikat zaokrouhlovací chyby. Tuto skutečnost můžete ve svém řešení ignorovat — postupujte, jako kdyby všechny výpočty, které provádíte, byly přesné.

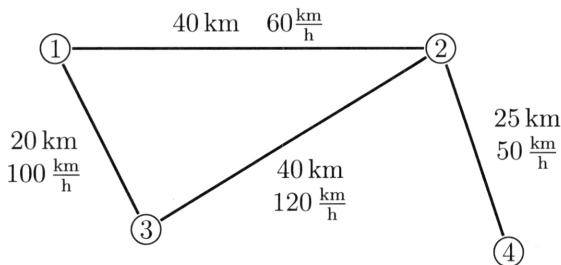
Příklad

Vstup:

```
4 4
1 2 40.0 60.0
1 3 20.0 100.0
2 3 40.0 120.0
2 4 25.0 50.0
```

Výstup:

```
0.000 0.600 0.200 1.300
0.600 0.000 0.333 0.500
0.200 0.333 0.000 1.300
1.300 0.500 1.300 0.000
```



Z města 1 do města 2 se nejrychleji dostaneme přes město 3: pojedeme celkem 60 kilometrů rychlostí 100 km/h. Nejrychlejší cesta z města 1 do města 4 ovšem vede po trase 1–2–4, nikoliv 1–3–2–4.

P – II – 4

Počítač Kvak

K úloze se vztahuje studijní text z úlohy P–I–4.

Soutěžní úloha.

a) (*3 body*) Lucasova čísla jsou definována následovně: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ a pro každé $n \geq 2$ platí $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$.

V rouře počítače je jedno číslo n . Napište program pro počítač Kvak, který spočítá a vypíše hodnotu $(L_n \bmod 65\,536)$.

b) (*3 body*) V rouře počítače je neprázdná posloupnost *kladných* čísel. Napište program pro počítač Kvak, který zjistí, zda se v této posloupnosti vyskytuje číslo 47, a podle toho vypíše buď číslo 1 (pokud ano), nebo číslo 0 (pokud tam není).

c) (*4 body*) V rouře počítače je neprázdná posloupnost *kladných* čísel. Napište program pro počítač Kvak, který na výstup vypíše všechna sudá čísla obsažená ve vstupní posloupnosti. Nezáleží přitom na pořadí, v jakém je vypíše, ale každé sudé číslo musí vypsát přesně tolikrát, kolikrát se vyskytlo na vstupu.

P – III – 1

Znovu čokoláda

Jeníček bude mít zanedlouho narozeniny. Jeho sestra Mařenka si ještě dobře pamatuje na olámanou čokoládu, kterou od Jeníčka dostala před několika měsíci. Rozhodla se proto, že mu dá k narozeninám podobný dárek. Zaslala do sklepa a ze své tajné skrýše vzala čokoládu, kterou si tam kdysi ukryla. Myši již stihly ohryzat i tuto čokoládu, ale to Mařence nevadilo — stačí přece ohryzané části olámat.

Mařenka je ovšem šikovnější než Jeníček a uvědomila si, že nemusí lámáním vytvořit čtverec. Čokolády mají přece často obdélníkový tvar. Tím získá mnoho nových možností, jak lze vyrobit dárek pro Jeníčka.

Soutěžní úloha. Je dán původní počet řádků R a počet sloupců S čokolády a matice $R \times S$ nul a jedniček udávající, která políčka čokolády zůstala zachována celá. Určete, kolika způsoby může Mařenka uskutečnit svůj plán. Jinými slovy, spočítejte, kolika způsoby lze ve zbytku čokolády

vyznačit obdélník bez děr. Všechny hrany obdélníka musí samozřejmě ležet na hranách políček. Stejně velké obdélníky umístěné na různých místech původní čokolády považujeme za různá řešení.

Formát vstupu: Na prvním řádku vstupu jsou dvě celá čísla R a S oddělená mezerou. Následuje R řádků, přičemž na r -tém z nich je S mezerami oddělených celých čísel $a_{r,1}, \dots, a_{r,S}$. Je-li políčko čokolády na souřadnicích (r, s) celé, bude $a_{r,s} = 1$, v opačném případě $a_{r,s} = 0$.

Formát výstupu: Program vypíše na výstup jediné číslo — hledaný počet obdélníků.

Příklad:

Vstup:

3 5

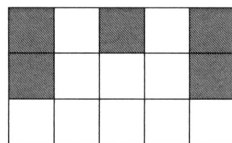
0 1 0 1 0

0 1 1 1 0

1 1 1 1 1

Výstup:

33



Na obrázku vpravo je zobrazena čokoláda popsaná na vstupu. Šedou barvou jsou vyznačena políčka, která už myši stihly poškodit.

Obdélník 1×1 lze na této čokoládě vyznačit deseti způsoby, 2×1 pěti, 1×2 šesti, 3×1 dvěma, 1×3 čtyřmi, 1×4 dvěma, 2×2 dvěma, 1×5 jedním, a 2×3 také jedním způsobem.

P – III – 2

Šachovnice

„Šach-mat,“ oznámil s úšklebkem Jeníček. Mařenka měla sice dosud šachy velmi ráda, ale už ji to přestává bavit: právě s Jeníčkem prohrála sedmnáctou partii po sobě. Vymyslela si proto novou, vlastní hru, v níž Jeníčka určitě porazí.

Hracím plánem je šachovnice, která je směrem doprava a nahoru nekonečná. Každé políčko této šachovnice můžeme označit dvojicí nezáporných celých čísel (x, y) . Políčko v levém dolním rohu šachovnice má označení $(0, 0)$, směrem doprava roste souřadnice x , směrem nahoru vzrůstá souřadnice y .

Na šachovnici je rozmístěno N šachových koní. Na začátku i kdykoliv během hry může stát více koní na téže políčku. Koně se pohybují podle šachových pravidel. Jsou povoleny pouze takové tahy, při nichž kůň neopustí šachovnici a navíc klesne součet obou souřadnic (viz obrázek na následující straně).

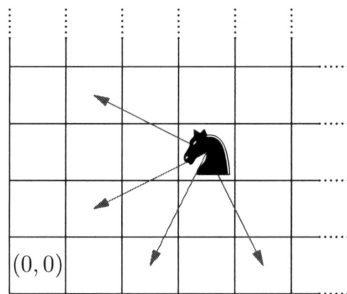
Hráč, který je na tahu, si vybere několik koní (může si jich vybrat, kolik chce, ale musí vždy aspoň jednoho) a každým z nich provede jeden tah. Hráči se ve hře pravidelně střídají. Prohrává ten, kdo nemůže provést další tah (tzn. nemůže pohnout podle pravidel žádným koněm).

Mařenka si už napsala program, který za ni bude hrát tuto hru optimálním způsobem. Jeníček ale programovat neumí, a proto by přivítal vaši pomoc.

Soutěžní úloha. Je dán počet koní N a jejich počáteční rozmístění na šachovnici. První tah provádí Jeníček.

Napište program, který zjistí, kdo vyhraje, když budou oba hráči hrát optimálně. Pokud zvítězí Jeníček, váš program by mu měl také poradit první tah libovolné vyhrávající strategie.

Jestliže úlohu nedokážete vyřešit pro obecné N , část bodů dostanete i v případě, že ji vyřešíte pro jednoho koně, případně pro dva koně začínající na souřadnicích mezi $(0, 0)$ a $(100, 100)$.



Všechny povolené tahy koněm na souřadnicích $(3, 2)$

Formát vstupu: První řádek vstupu obsahuje počet koní N . Na každém z následujících N řádků jsou dvě čísla r_i a s_i , která určují řádek a sloupec, kde se nachází i -tý kůň na začátku hry.

Formát výstupu: První řádek výstupu bude obsahovat jméno hráče, který vyhraje (**Jeníček** nebo **Marenka**). Jestliže vyhraje Jeníček, vypište pro každého koně, kterým má Jeníček v úvodním tahu táhnout, řádek s čísly r_a , s_a , r_b , s_b — původní a nová poloha koně. Na pořadí těchto řádků nezáleží.

Příklad 1:

Vstup:

1

0 4

Výstup:

Marenka

Jeníček musí táhnout na $(1, 2)$, odtud Mařenka táhne koněm na $(0, 0)$ a vyhraje.

Příklad 2:

Vstup:

2

3 1

2 1

Výstup:

Jenicek

3 1 1 0

2 1 0 0

Po uvedeném tahu Jeníčka Mařenka ihned prohraje, neboť ani jedním koněm už nemůže pohnout.

Všimněte si, že kdyby Jeníček nechal koně z políčka $(3, 1)$ na původním místě, prohraje. Prohrál by i v případě, že by tohoto koně přesunul na políčko $(1, 2)$, bez ohledu na to, zda by druhým koněm pohnul, nebo ne.

P – III – 3

Počítač Kvak

K úloze se vztahuje studijní text z úlohy P–I–4.

Soutěžní úloha.

a) (3 body) V rouře počítače je posloupnost kladných celých čísel. Označme si je $a_1, a_2, \dots, a_N$ v pořadí, v němž se v rouře nacházejí. Napište program, který zkontroluje, zda je tato posloupnost rostoucí. Pokud ano, program ukončí výpočet, aniž by cokoli vypsal. Jestliže posloupnost není rostoucí, program zjistí a vypíše nejmenší i takové, že $a_i \geq a_{i+1}$.

b) (7 bodů) V rouře počítače je posloupnost kladných celých čísel. Víte, že jedno z těchto čísel má v rouře nadpoloviční většinu — toto číslo se tedy v rouře vyskytuje vícekrát, než všechna ostatní čísla dohromady. Napište program, který toto číslo najde a vypíše.

P – III – 4

Mravenci

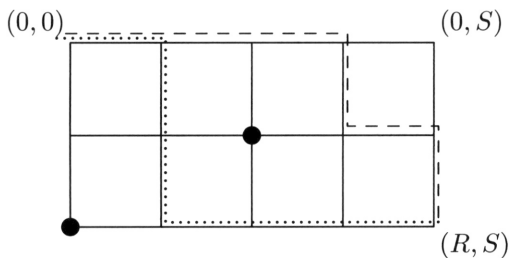
Program: mravenci.pas / mravenci.c / mravenci.cpp

Vstup: mravenci.in

Výstup: mravenci.out

Právě začíná jedna velmi podivná soutěž. Porota si připravila N stejných mřížek obdélníkového tvaru. Mřížka je tvořena $R + 1$ vodorovnými a $S + 1$ svislými čarami. Každý soutěžící dostane jednu mřížku a několik

překážek. Jeho úkolem je rozmístit všechny překážky, které dostal, na různé mřížové body. Takto upravenou mřížku pak odevzdá porotě.



Příklad mřížky pro $R = 2$ a $S = 4$
Jsou vyznačeny 2 z 5 cest mravenců.

Porota do levého horního rohu mřížky vypustí speciální druh mravenců. Tito mravenci se pohybují pouze směrem dolů a doprava, a to jen po čarách tvořících mřížku. Mravenci se navíc navzájem nemají rádi, a proto žádní dva nepůjdou úplně stejnou cestou. Do pravého dolního rohu dorazí tudíž přesně tolik mravenců, kolik existuje různých cest mezi levým horním a pravým dolním rohem mřížky. Jelikož tento počet může být velký, při vyhodnocování soutěže se uvažuje jenom zbytek, který dostaneme po dělení tohoto počtu číslem $10^9 + 9$.

Soutěžní úloha. Je dáno N mřížek, všechny mají $R + 1$ vodorovných a $S + 1$ svislých čar. Pro každou mřížku je dán počet rozmístěných překážek a jejich souřadnice. Vaším úkolem je určit pro každou mřížku hodnotu $X \bmod 1\,000\,000\,009$, kde X je počet různých způsobů, jimiž se lze dostat z levého horního do pravého dolního rohu příslušné mřížky.

Poznámka. Je možné, že v některých výpočtech bude potřeba používat 64bitová celá čísla (typ `long long` v C/C++, `int64` v Pascalu).

Formát vstupu: Na prvním řádku vstupního souboru `mravenci.in` jsou tři kladná celá čísla R , S a N oddělená mezerami. Následuje N popisů jednotlivých mřížek.

Každý popis mřížky začíná řádkem obsahujícím jedno nezáporné celé číslo K , které představuje počet překážek rozmístěných na této mřížce. Dalších K řádků popisuje polohy překážek. Každý z nich obsahuje dvě mezerou oddělená čísla r_i , s_i ($0 \leq r_i \leq R$, $0 \leq s_i \leq S$), přičemž r_i je souřadnice řádku a s_i souřadnice sloupce, kde leží i -tá překážka. Žádné dvě překážky neleží na stejných souřadnicích a žádná překážka neleží na souřadnicích $(0, 0)$, kde mravenci začínají.

Omezení velikosti proměnných:

V testovacích datech budou proměnné R , S , N a K rovny nejvyšše hodnotám uvedeným v následující tabulce:

č. testu	R	S	N	K
1	5	5	5	5
2	7	7	7	7
3	10	10	10	10
4	100	100	50	15
5	1 000	1 000	50	15
6	1200	100 000	1	15
7	1 000	1 000	1 000	2
8	1 000	1 000	1 000	10
9	2 000	2 000	200	15
10	15 000	15 000	50	10
11	1 000	1 000	1 000	50
12	2500	2500	200	100
13	20 000	10 000	200	50
14	100 000	100 000	2	30
15	100 000	100 000	100	50

Formát výstupu: Pro každou mřížku vypište jeden řádek s jedním celým číslem do souboru **mravenci.out**: hodnotu X mod 1 000 000 009, kde X je počet různých způsobů, jimiž lze dojít z levého horního do pravého dolního rohu této mřížky.

Příklad:

Vstup:

2 4 2

2

1 2

2 0

2

0 1

1 1

Výstup:

5

1

První mřížka je zobrazena na obrázku.

Ve druhé mřížce vede jediná možná cesta bodem (2, 0).

Hurikán

Program: `hurikan.pas / hurikan.c / hurikan.cpp`
Vstup: `hurikan.in`
Výstup: `hurikan.out`

Souostroví Kiribati je tvořeno N ostrovy. Ještě předevčírem byla mezi těmito ostrovy postavena celá síť mostů, po nichž se dalo pohodlně přejet z každého ostrova na libovolný jiný. Včera se ale přehnal přes Kiribati hurikán Hermano a mnohé mosty zničil, takže jich zbylo pouze M . A co je ještě horší, K z těchto M mostů má narušenou statiku. Místní statik zjistil, že v každém z následujících K dní spadne jeden z těchto K poškozených mostů.

Místní vláda potřebuje zajistit, aby se obyvatelé i nadále mohli dostat každý den z libovolného ostrova na libovolný jiný. Rozhodla se proto najmout několik převozníků. Každý převozník zabezpečí dopravu mezi jednou konkrétní přidělenou dvojicí ostrovů.

Soutěžní úloha. Program dostane na vstupu popis mostů, které zůstaly zachovány po řádění hurikánu, a pořadí, v němž spadnou ty z nich, které jsou poškozeny. Program určí pro dnešek i pro každý z následujících K dní, jaký nejmenší počet převozníků stačí na příslušný den najmout.

Formát vstupu: První řádek vstupního souboru `hurikan.in` obsahuje dvě celá čísla N a M ($2 \leq N$, $1 \leq M$), která udávají počet ostrovů a počet mostů. Ostrovy jsou očíslovány od 1 do N .

Každý z následujících M řádků popisuje jeden most. Most je určen dvojicí celých čísel $a_i b_i$ ($1 \leq a_i, b_i \leq N$, $a_i \neq b_i$) — čísla ostrovů, které daný most spojuje. Mosty si očíslovujeme od 1 po M v pořadí, v němž jsou zadány na vstupu. Jednu dvojici ostrovů může spojoovat i více mostů.

Následuje řádek obsahující celé číslo K ($1 \leq K \leq M$), které představuje počet poškozených mostů. Na posledním řádku vstupu je K mezerami oddělených čísel — čísla poškozených mostů v pořadí, v jakém spadnou.

Omezení velikosti proměnných:

Ve všech testovacích vstupech bude platit $M, N \leq 200\,000$. V sadách testovacích dat 1 až 4 bude platit $N \leq 1\,000$. V sadách 1 až 7 bude platit $K \leq 100$.

Formát výstupu: Program vypíše do souboru `hurikan.out` $K + 1$ řádků obsahujících vždy jedno celé číslo. Číslo na i -tém řádku výstupu

udává minimální počet převozníků, kteří jsou zapotřebí, když spadne prvních $i - 1$ poškozených mostů.

Příklad:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
4 4	0
1 2	0
3 2	1
1 3	2
3 4	
3	
2 4 3	

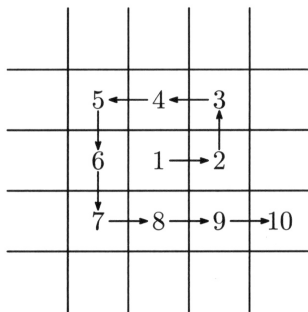
Dnes je ještě možné přejít po mostech mezi každými dvěma ostrovy. Bude to možné i zítra, až spadne most 3–2. Až pozítří spadne most 3–4, bude již třeba najmout jednoho převozníka, aby nebyl ostrov 4 izolovaný od ostatních. Po pádu mostu 1–3 zůstane stát jediný most 1–2. Tehdy už bude zapotřebí zaměstnávat dva převozníky.

Kategorie Z5

Texty úloh

Z5 – I – 1

Housenka Leona spadla doprostřed čtvercové sítě. Rozhodla se, že poleze „do spirály“ tak, jak je naznačeno na obr. 35; na žádném čtverečku nebude dvakrát a žádný čtvereček nevynechá.



Obr. 35

Z prvního čtverečku na druhý lezla směrem na východ, z druhého na třetí směrem na sever, ze třetího na čtvrtý směrem na západ, ze čtvrtého na pátý rovněž na západ, z pátého na šestý na jih... Kterým směrem lezla z 81. na 82. čtvereček?
(M. Petrová)

Z5 – I – 2

Míša si z papíru vystříhla dva stejné čtverce, jeden obdélník o rozměrech 10 cm × 24 cm a ještě jeden obdélník. Jaké rozměry mohl mít tento obdélník, pokud šlo ze všech čtyř útvarů složit čtverec, aniž by se jednotlivé díly překrývaly? Takových obdélníků lze nalézt několik, uveď alespoň čtyři.
(L. Šimůnek)

Z5 – I – 3

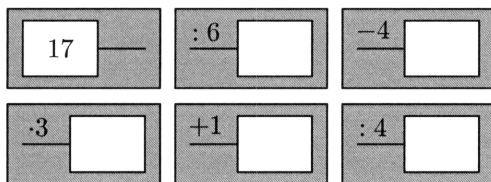
Vyřeš následující algebrogram a najdi všechna řešení. Stejná písmena nahraď stejnými číslicemi, různá různými.

$$\begin{array}{r} OSEL \\ SEL \\ EL \\ L \\ \hline 1\ 0\ 0\ 3\ 4 \end{array}$$

(M. Volfová)

Z5 – I – 4

Nina dostala od paní učitelky následující kartičky:



Má z nich všech sestavit příklad pro své spolužáky. Pomoz Nině a sestav jeden takový příklad tak, aby každé dělení vyšlo beze zbytku. Jaký bude výsledek?

(M. Petrová)

Z5 – I – 5

Naše tři třídy, celkem 84 žáků, šly do kina. Lístek sice stál 50 Kč, ale každý 12. žák měl poloviční slevu a každý 35. vstup zdarma. Kolik stálo vstupné pro všechny žáky?

(M. Volfová)

Z5 – I – 6

Kluci našli starý plán minového pole (obr. 36). Čísla jsou na polích, kde žádné miny nejsou, a udávají počet zaminovaných sousedících polí. Urči, kolik je v poli celkem min a kde jsou. (Pole sousedí tehdy, mají-li společný vrchol nebo stranu.)

(M. Volfová)

1		2		2
	3		3	
3				3
	2			
			2	

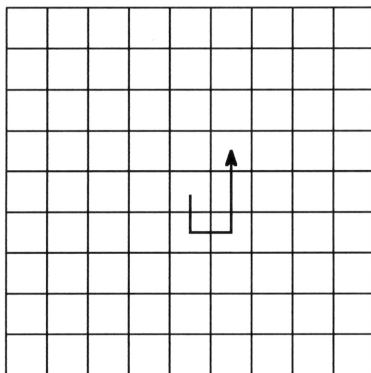
Obr. 36

Z5 – II – 1

Matěj a jeho kamarádi šli koledovat. Kromě jablíček, oříšků a perníků dostal každý z chlapců i pomeranče. Jarda dostal jeden pomeranč, Milan také. Po dvou pomerančích dostali Radek, Patrik, Michal a Dušan. Matěj dostal dokonce čtyři pomeranče, což bylo nejvíc ze všech chlapců. Ostatní chlapci dostali po třech pomerančích. Kolik chlapců šlo na koledu, když všichni dohromady dostali 23 pomerančů? *(M. Volfová)*

Z5 – II – 2

Ruměnice Josefína dopadla na stůl doprostřed čtvercové sítě tvořené 81 čtverečky (obr. 37). Rozhodla se, že z ní nepoleze pryč přímo, ale násle-



Obr. 37

dujícím způsobem: nejprve jeden čtvereček na jih, pak jeden na východ, dále dva na sever, poté dva na západ a opět jeden na jih, jeden na východ, dva na sever, dva na západ... Na kterém čtverečku byla těsně předtím, než slezla z této sítě? Po kolika čtverečcích této sítě lezla? *(M. Petrová)*

Z5 – II – 3

Jura má tyčky délek 2 cm, 3 cm, 3 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 5 cm, 5 cm, 6 cm, 6 cm a 9 cm. Skládá z nich strany trojúhelníků tak, že žádná tyčka není součástí strany dvou a více trojúhelníků. Může použít tolik tyček, kolik chce, ale nesmí je lámat a použité tyčky musí ležet celé na hranici trojúhelníku. Jura tvrdí, že se dají použít na poskládání stran tří trojúhelníků se stejnými obvody. Má pravdu? Jaký největší obvod by měly tyto trojúhelníky?

(M. Dillingerová)

Kategorie Z6

Texty úloh

Z6 – I – 1

Jeníček s Mařenkou chodí k babičce, která má cukrárnu a prodává perníky. Oba dva jí samozřejmě pomáhají, hlavně se zdobením. Za dobu, kdy babička ozdobí pět perníků, ozdobí Mařenka tři a Jeníček dva. Při poslední návštěvě ozdobili všichni tři dohromady pět plných táců. Mařenka s babičkou zdobily po celou dobu, Jeníček kromě zdobení rovnal perníky po dvanácti na jeden tác a odnášel je do spíže. Všichni tři ve stejnou dobu začali i skončili.

1. Kolik perníčků ozdobil Jeníček?
2. Jak dlouho jim celá práce trvala, když babička ozdobí jeden perníček za 4 minuty?
3. Jak dlouho pomáhal Jeníček zdobit? (M. Petrová)

Z6 – I – 2

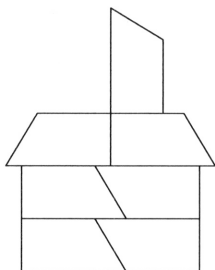
Čtyřmístný PIN kód Rastislavova mobilu je zajímavý:

- ▷ jednotlivé číslice tvoří prvočísla,
- ▷ 1. a 2. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočísla,
- ▷ 2. a 3. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočísla,
- ▷ 3. a 4. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočísla.

Rastislav zapomněl svůj PIN kód, ale pamatuje si všechny výše uvedené vlastnosti a snaží se zaktivovat vypnutý mobil. Která čísla by měl vyzkoušet? (M. Petrová)

Z6 – I – 3

Na následujícím obr. 38 je útvar složený ze sedmi stejných čtyřúhelníkových dílků stavebnice. Jaký je obvod tohoto útvaru, jestliže obvod jednoho čtyřúhelníkového dílku je 17 cm? (K. Pazourek)



Obr. 38

Z6 – I – 4

Tatínek se rozhodl, že bude dávat svému synovi Mojžírovi vždy jedenkrát za měsíc kapesné. První kapesné dostal Mojžír v lednu. Tatínek každý měsíc kapesné zvyšoval vždy o 4 Kč. Kdyby Mojžír neutrácel, měl by po dvanáctém kapesném před Vánocemi 900 Kč. Kolik Kč dostal Mojžír při prvním kapesném v lednu? *(L. Hozová)*

Z6 – I – 5

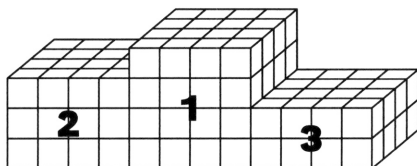
Doplňte místo hvězdiček číslce tak, aby součet výsledků následujících dvou příkladů byl 5842:

$$\begin{array}{r} *2*7 \\ 3*4* \\ \hline 4*00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2*9* \\ -*2*4 \\ \hline *54* \end{array}$$

(M. Dillingerová)

Z6 – I – 6

Na školní olympiádu vytvořili žáci 6.B stupně vítězů z dřevěných krychlí (obr. 39). Kolik krychlí celkem použili?



Obr. 39

Sestavené stupně natřeli po celém povrchu (kromě podstavy) na bílo a po vyhlášení výsledků svůj výtvar rozebrali. Kolik krychlí mělo 6, kolik 5, 4, 3, 2, 1 či žádnou stěnu bílou? (*M. Dillingerová, M. Volfová*)

Z6 – II – 1

Určete obsah obdélníku, když víte, že šířka je rovna $\frac{2}{3}$ jeho délky a obvod měří 148 cm. (*M. Volfová*)

Z6 – II – 2

Myslím si čtyřmístné číslo, jehož každá číslice je jiná. Když škrtnu poslední dvě číslice v tomto čísle, dostanu prvočíslo. Stejně tak dostanu prvočíslo i v případě, kdy vyškrtnu druhou a čtvrtou číslici, a dokonce i v případě, kdy vyškrtnu prostřední dvě číslice. Mé myšlené číslo ovšem prvočíslo není — můžeme ho beze zbytku dělit třemi. Čísel, která mají tyto vlastnosti, je víc. To mé je ale největší z nich. Které číslo si myslím? (*M. Petrová*)

Z6 – II – 3

Krabička tvaru krychle o hraně 4 cm je zcela naplněna srovnanými hracími kostkami, krychličkami s hranou délky 1 cm. Vymyslete všechny různé krabičky tak, aby měly čtvercové dno a do každé z nich se všechny kostky přesně vešly. Napište jejich rozměry. (*M. Krejčová*)

Kategorie Z7

Texty úloh

Z7 – I – 1

Do prodejny vína se v noci vloupal kocour. Vyskočil na polici, na níž byly v dlouhé řadě vyrovnány lahve s vínem — první třetina lahví zkraje stála po 160 Kč, následující třetina lahví stála po 130 Kč a poslední třetina po 100 Kč. Nejprve kocour shodil na zem lahev za 160 Kč, která stála úplně na začátku řady, a pak postupoval dále a shazoval bez vynechání jednu lahev za druhou. Než ho to přestalo bavit, srazil 25 lahví a ty se všechny rozbily. Ráno majitel zalitoval, že kocour nezačal se svým řádním na druhém okraji police. I kdyby totiž rozbil stejný počet lahví, byla by škoda o 660 Kč menší. Kolik lahví bylo původně na polici?

(*L. Šimůnek*)

Z7 – I – 2

Na tabuli jsou napsaná tři přirozená čísla a , b , c , pro která platí:

- ▷ největší společný dělitel čísel a , b je 15,
- ▷ největší společný dělitel čísel b , c je 6,
- ▷ součin čísel b , c je 1 800,
- ▷ nejmenší společný násobek čísel a , b je 3 150.

Která to jsou čísla?

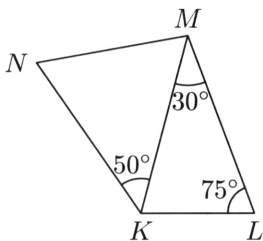
(*L. Šimůnek*)

Z7 – I – 3

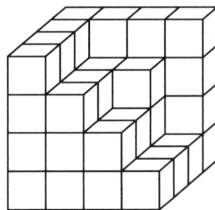
Ve čtyřúhelníku $KLMN$ známe vyznačené úhly a víme, že platí $|KN| = |LM|$ (obr. 40). Jaká je velikost úhlu KNM ? (*L. Hozová*)

Z7 – I – 4

Krychle byla složena z 64 krychlíček o hraně 2 cm. Pak bylo několik krychlíček z viditelné strany odebráno (obr. 41).



Obr. 40



Obr. 41

1. Jaký je objem a jaký povrch získaného tělesa?
2. Těleso bylo po celém povrchu natřeno červeně, pak rozebráno na původní krychličky. Kolik z nich mělo 6, kolik 5, 4, 3, 2, 1 či žádnou stěnu červenou? *(M. Volfová)*

Z7 – I – 5

Na číselné ose jsou znázorněna čísla $12x$ a $-4x$ (obr. 42). Znázorni na této ose nulu a číslo x . *(M. Petrová)*



Obr. 42

Z7 – I – 6

Doplňte místo hvězdiček číslice tak, aby součet výsledků následujících dvou příkladů byl 5 842:

$$\begin{array}{r} *2*7 \\ 3*4* \\ \hline 4*0* \end{array} \quad \begin{array}{r} 2*9* \\ -*254 \\ \hline *5** \end{array}$$

Úloha má více řešení, určete alespoň dvě. *(M. Dillingerová)*

Z7 – II – 1

Křemílek a Vochomůrka našli bedničku s pokladem. Každý z nich si nabral do jedné kapsy stříbrné mince a do druhé kapsy zlaté mince. Křemílek měl v pravé kapse díru a cestou polovinu svých zlatek ztratil. Vochomůrka měl díru v levé kapse a cestou domů ztratil polovinu svých stříbrňáků. Doma věnoval Vochomůrka třetinu svých zlatek Křemílkovi

a Křemílek čtvrtinu svých stříbrňáků Vochomůrkovi. Každý potom měl přesně 12 zlatek a 18 stříbrňáků. Kolik zlatek a kolik stříbrňáků si vzal každý z nich z nalezeného pokladu? *(M. Dillingerová)*

Z7 – II – 2

Na tabuli jsou napsána tři přirozená čísla x , y a z . Určete která, pokud víte, že současně platí:

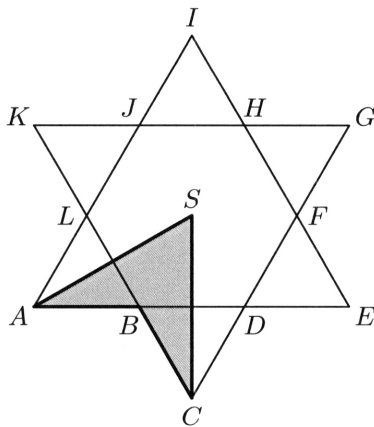
- ▷ x je z nich největší,
- ▷ nejmenší společný násobek čísel x a y je 200,
- ▷ nejmenší společný násobek čísel y a z je 300,
- ▷ nejmenší společný násobek čísel x a z je 120.

(L. Šimůnek)

Z7 – II – 3

Pravidelná šesticípá hvězda $ABCDEFGHIJKL$ se středem S , znázorněná na obr. 43, vznikla sjednocením dvou rovnostranných trojúhelníků, z nichž každý měl obsah 72 cm^2 . Vypočítejte obsah čtyřúhelníku $ABCS$.

(S. Bednářová)



Obr. 43

Kategorie Z8

Texty úloh

Z8 – I – 1

Napište číslo 75 jako součet několika po sobě bezprostředně jdoucích přirozených čísel. Najděte aspoň čtyři řešení. (M. Volfová)

Z8 – I – 2

Tři kamarádky se sešly na chalupě a vyrazily na houby. Našly celkem 55 hřibů. Po návratu si udělaly smaženici, rozdělily ji na čtyři stejné porce a pozvaly na ni kamaráda Pepu. Líba dala na smaženici šest ze svých hřibů, Maruška osm a Šárka pět. Každé pak zbyl stejný počet hřibů. Pepa jim daroval bonboniéru, kde bylo 38 bonbonů, a řekl, že se mají spravedlivě rozdělit podle toho, jak přispěly na jeho jídlo.

1. Kolik hřibů našla každá?

2. Jak se měly podle Pepy podělit?

(M. Volfová)

Z8 – I – 3

Sedadla v divadelním sálu jsou rozdělena do tří kategorií podle jejich vzdálenosti od jeviště. „I. místa“ jsou nejbližší jevišti, tvoří dvě pětiny kapacity sálu a prodávají se za 220 Kč. „II. místa“ tvoří další dvě pětiny sálu a prodávají se za 200 Kč. Zbývající „III. místa“ se prodávají za 180 Kč. Před zahájením předprodeje na slavnostní premiéru bylo rozdáno 150 vstupenek zdarma zvaným hostům. Vstupenky byly rozdávány postupně od předních míst sálu dozadu. Všechny ostatní vstupenky pak byly prodány. Kdyby se však volné vstupenky rozdávaly postupně od zadních míst dopředu, byla by tržba o 4 320 Kč větší. Kolik míst bylo v sálu? (L. Šimůnek)

Z8 – I – 4

Dostali jsme krychli, která měla délku hrany vyjádřenou v centimetrech celým číslem. Všechny její stěny jsme obarvili na červenou a poté jsme ji rozřezali beze zbytku na krychličky o hraně 1 cm.

- ▷ Lukáš tvrdí, že krychlíček se dvěma obarvenými stěnami je desetkrát více než těch se třemi obarvenými stěnami.
- ▷ Martina říká, že krychlíček se dvěma obarvenými stěnami je patnáctkrát více než těch se třemi obarvenými stěnami.

Pravdu má však pouze jeden — kdo? A kolik měřila hrana původní krychle?

(L. Šimůnek)

Z8 – I – 5

Ze čtverce o straně 6 cm odřízneme od každého vrcholu shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky tak, aby se obsah čtverce zmenšil o 32 %. Jakou velikost mají odvěsny?

(M. Krejčová)

Z8 – I – 6

Ve dvou místnostech vzdělávacího centra se konaly přednášky. Průměrný věk osmi lidí přítomných v první místnosti byl 20 let, průměrný věk dvanácti lidí ve druhé místnosti byl 45 let. V průběhu přednášky odešel jeden účastník a tím se průměrný věk všech osob v obou místnostech zvýšil o jeden rok. Kolik let bylo účastníkovi, který odešel?

(L. Hozová)

Z8 – II – 1

Průměrný věk rodiny Kebulových, kterou tvoří otec, matka a několik dětí, je 18 let. Přitom průměrný věk rodiny bez tatínka, kterému je 38 let, je 14 let. Kolik dětí mají Kebulovi?

(L. Hozová)

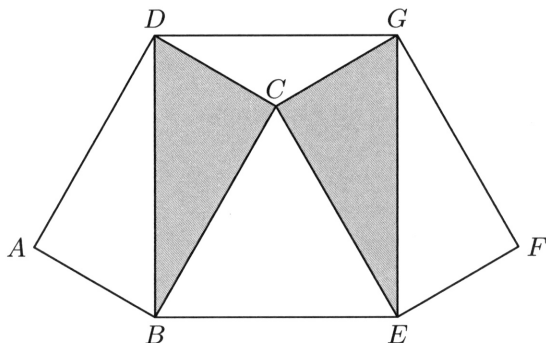
Z8 – II – 2

Kolik existuje šestimístných přirozených čísel, která mají na místě statisíců číslici 1, na místě tisíců číslici 2 a na místě desítek číslici 3 a jsou beze zbytku dělitelná číslem 45?

(L. Šimůnek)

Z8 – II – 3

Na obr. 44 je šestiúhelník $ABEFGD$. Čtyřúhelníky $ABCD$ a $EFGC$ jsou shodné obdélníky a čtyřúhelník $BEGD$ je také obdélník. Určete poměr obsahů bílé a šedé části šestiúhelníku, jestliže $|AB| = 5$ cm a trojúhelník BEC je rovnostranný. (K. Pazourek)



Obr. 44

Kategorie Z9

Texty úloh

Z9 – I – 1

Dostal jsem zadána dvě přirozená čísla. Poté jsem je obě zaokrouhlil na desítky. Určete, která čísla jsem měl zadána, pokud víte, že:

- ▷ podíl zaokrouhlených čísel je stejný jako podíl čísel původních,
- ▷ součin zaokrouhlených čísel je o 295 větší než součin původních čísel,
- ▷ součet zaokrouhlených čísel je o 6 větší než součet původních čísel.

(L. Šimůnek)

Z9 – I – 2

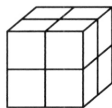
Pat a Mat byli na výletě. Vyšli ráno po osmé hodině, kdy velká a malá ručička na Patových hodinkách ležely v opačných polopřímkách. V opačných polopřímkách byly ručičky Patových hodinek, i když se oba přátelé před polednem vrátili. Mat dobu výletu měřil na stopkách. Určete i vy s přesností na sekundy, jak dlouho trvala cesta. Předpokládejte, že Patovy hodinky a Matovy stopky šly přesně.

(M. Volfová)

Z9 – I – 3

Na obr. 45 je krychle o hraně 2 cm tvořená osmi krychličkami s hranou 1 cm. Osm stěn krychlíček je obarveno černě, ostatní jsou bílé. Přitom z nich lze složit krychli, jejíž povrch je bílý. Kolika způsoby mohou být krychličky obarveny? Předpokládejte, že stejně obarvené krychličky nedokážeme odlišit, mohou se tedy zaměnit.

(K. Pazourek)



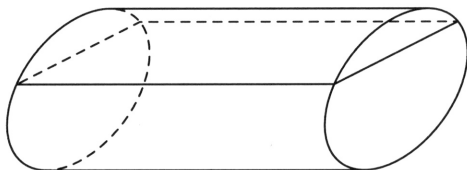
Obr. 45

Z9 – I – 4

Adam a Eva dostali košík, ve kterém bylo 31 jablek. První den snědla Eva tři čtvrtiny toho, co snědl Adam. Druhý den snědla Eva dvě třetiny toho, co snědl též den Adam. Druhého dne večer byl košík prázdný. Kolik jablek snědla z košíku Eva? (Adam i Eva jablka jedí celá a nedělí se o ně.)
(*L. Hozová*)

Z9 – I – 5

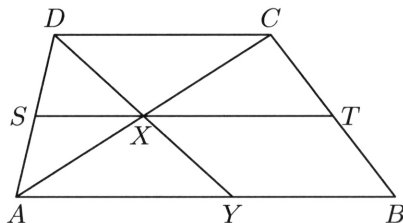
Řidič převáží mléko v cisterně tvaru válce. Průměr podstavy je 180 cm, délka cisterny je 4 m. Kolik hl mléka je v cisterně, jestliže je naplněna do tří čtvrtin průměru (obr. 46)?
(*M. Krejčová*)



Obr. 46

Z9 – I – 6

V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD délky 7 cm a 4 cm jsou body S a T středy stran AD a BC (obr. 47). Bod X je průsečík úseček AC a ST , bod Y je průsečík úsečky AB a přímky DX . Obsah čtyřúhelníku $AYCD$ je 12 cm^2 . Vypočítejte obsah lichoběžníku $ABCD$.
(*M. Dillingerová*)

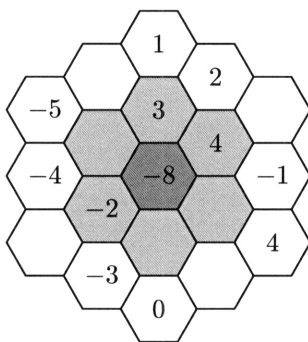


Obr. 47

Z9 – II – 1

Doplňte do prázdných políček obr. 48 čísla tak, aby v každém políčku byl součet čísel ze všech s ním přímo sousedících světlejších políček. Tedy ve světle šedém políčku je součet čísel ze všech bílých sousedních políček, v tmavě šedém políčku je součet čísel ze všech světle šedých sousedních políček.

(S. Bednářová)



Obr. 48

Z9 – II – 2

Šárka nalila džus do skleničky a hrnku a obě nádoby doplnila vodou. Hrněk měl dvakrát větší objem než sklenička. Poměr džusu a vody ve skleničce byl $2 : 1$ a v hrnku $4 : 1$. Poté přelila obsah skleničky i obsah hrnku do džbánu. Jaký byl poměr džusu a vody ve džbánu?

(L. Hozová)

Z9 – II – 3

Dostal jsem zadána dvě dvojčíselná přirozená čísla. Poté jsem je obě zaokrouhlil na desítky. Určete, která čísla jsem měl zadána, jestliže současně platí:

- ▷ rozdíl zaokrouhlených čísel je stejný jako rozdíl čísel původních,
- ▷ součin zaokrouhlených čísel je o 184 větší než součin čísel původních.

(L. Šimůnek)

Z9 – II – 4

Do rovnostranného trojúhelníku ABC je vepsán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$ tak, že body K, L leží na straně AB , body M, N leží na

straně BC a body O, P leží na straně AC . Vypočtete obsah šestiúhelníku $KLMNOP$, jestliže obsah trojúhelníku ABC je 60 cm^2 . (*K. Pazourek*)

Z9 – III – 1

Paní učitelka potřebovala vymyslet příklady na rovnice do písemky. Proto si vypsalala všechny rovnice tvaru

$$a \cdot x + b = 13,$$

kde a a b jsou jednomístná přirozená čísla. Ze všech vybrala ty rovnice, jejichž kořen x byl 3. Do každé skupiny dala jednu rovnici. Kolik skupin mohlo být nejvíce? (*K. Pazourek*)

Z9 – III – 2

Do naší školy se žáci dopravují různě. Domácí chodí pěšky. Počet domácích a dojíždějících žáků je v poměru 3 : 1. U dojíždějících je poměr počtu těch, kteří využívají veřejnou dopravu, a těch, kteří jezdí sami na kole nebo s rodiči autem, 3 : 2. U veřejné dopravy je poměr počtu těch, kteří jezdí vlakem, a těch, kteří jezdí autobusem, 7 : 5. Dále víme, že poměr počtu těch, kteří dojíždějí na kole, k počtu těch, které vozí rodiče autem, je 5 : 3. O kolik více žáků dojíždí vlakem oproti těm, které vozí rodiče, když veřejnou dopravou jich jezdí 24? Kolik žáků má naše škola? (*M. Volfová*)

Z9 – III – 3

Dostali jsme krychli, která měla délku hrany vyjádřenou v centimetrech celým číslem větším než 2. Všechny její stěny jsme obarvili na žluto a poté jsme ji rozřezali beze zbytku na krychličky o hraně délky 1 cm. Tyto krychličky jsme roztrídili do čtyř hromádek. V první byly krychličky s jednou žlutou stěnou, ve druhé se dvěma žlutými stěnami a ve třetí se třemi. Ve čtvrté hromádce pak byly krychličky bez žluté stěny. Určete délku hrany původní krychle, pokud víte, že aspoň jedno z následujících tvrzení je pravdivé:

- ▷ Počty kostek v první a čtvrté hromádce byly v poměru 4 : 9.
- ▷ V první hromádce bylo třikrát více kostek než ve druhé.

(*L. Šimůnek*)

Z9 – III – 4

Do rovnostranného trojúhelníku ABC je vepsán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$ tak, že body K , M , O leží po řadě ve středech stran AB , BC a AC . Vypočtěte obsah šestiúhelníku $KLMNOP$, jestliže obsah trojúhelníku ABC je 60 cm^2 .

(*K. Pazourek*)

Přípravná soustředění před 51. MMO

V průběhu 59. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 12. do 16. dubna 2010 v Kostelci nad Černými lesy nedaleko Prahy. Na soustředění bylo pozváno 11 nejlepších řešitelů III. kola kategorie A. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující přehled:

David Klaška	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	94
Miroslav Olšák	8/8 G Budánka, Praha 5	87
Tomáš Zeman	7/8 G J. Keplera, Praha 6	76
Jáchym Sýkora	4/4 G Ch. Dopplera, Praha 5	67
Petr Ryšavý	8/8 G J. Heyrovského, Praha 5	63
Radek Marciňa	4/4 G Ch. Dopplera, Praha 5	60
Filip Hlásek	7/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	58
Lukáš Zavřel	7/8 G Praha 9, Chodovická	58
Michael Bílý	7/8 G J. Vrchlického, Klatovy	53
Jakub Solovský	3/4 G M. Koperníka, Bílovec	48

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentativního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás částečně (bohužel museli být povoláni dva náhradníci) reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:

dr. *Martin Panák* (12. 4.),

dr. *Jaroslav Zhouf* (13. 4.),

dr. *Karel Horák* (14. 4.),

dr. *Jaroslav Švrček* (15. 4.),

a doc. *Jaromír Šimša* (16. 4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Posloupnost $(a_n)_{n \geq 1}$ je definována vztahy $a_1 = 3$, $a_2 = 11$ a $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ pro $n \geq 3$. Dokažte, že každý člen této posloupnosti je tvaru $a^2 + 2b^2$ pro nějaká celá kladná a , b (ne nutně různá).

2. Nechť A_n značí pro libovolné celé kladné n množinu všech pořadí $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ splňujících

$$k \mid 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \quad \text{pro libovolné } 1 \leq k \leq n.$$

V závislosti na n určete počet prvků A_n .

3. Řešte rovnici

$$m! + n! = m^n$$

v oboru celých kladných čísel.

4. Máme k dispozici a) šest, b) sedm různých barev a čtverečkový papír. Najděte nejmenší počet čtverečků, které musíme barvami označit (každý čtvereček jinou barvou) tak, aby pro každé dvě různé barvy existovaly dva čtverečky se společnou stranou označené těmito barvami.

5. Je dán trojúhelník ABC a střed M strany AB . Na polopřímce opačné k polopřímce MC zvolíme bod N (zde ho pro zjednodušení volme pouze tak, aby $|MN| < |MC|$). Bodem N vedeme přímkou, která protne vnitřek úsečky AM v bodě P a vnitřek strany AC v bodě Q . Průsečík přímek QM a NB označme R , průsečík přímek AB a CR označme S . Dokažte rovnost $|PM| = |MS|$.

6. Nechť pro kladná reálná čísla a , b , c , $a \neq c$ platí rovnost $a + \sqrt{b + \sqrt{c}} = c + \sqrt{b + \sqrt{a}}$. Dokažte, že pak platí $40ac < 1$.

7. Nechť P je mnohočlen s reálnými koeficienty, pro který platí

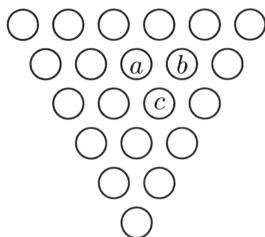
$$P(n) = 1^{2010} + 2^{2010} + \dots + n^{2010}$$

pro každé přirozené číslo n . Určete $P(-\frac{1}{2})$.

8. Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1 , k_2 , přičemž poloměr k_2 je dvojnásobkem poloměru k_1 . Do kružnice k_1 je vepsán čtyřúhelník $A_1A_2A_3A_4$. Jestliže postupně označíme B_1 , B_2 , B_3 , B_4 průsečíky polopřímek A_4A_1 , A_1A_2 , A_2A_3 a A_3A_4 s kružnicí k_2 , bude dvojnásobek obvodu $A_1A_2A_3A_4$ nejvýše roven obvodu $B_1B_2B_3B_4$. Dokažte.

9. V ostroúhlém trojúhelníku ABC je nad výškou BK jako průměrem sestrojena kružnice k . Označme E, F její průsečíky se stranami AB, BC . Tečny sestrojené ke kružnici k v bodech E a F se protínají na těžnici trojúhelníku ABC z vrcholu B . Dokažte.

10. Zjistěte, zda je možno rozmístit přirozená čísla od 1 do 21 do jednadvaceti kroužků na obrázku tak, aby v libovolném řádku kromě prvního bylo každé z čísel rovno absolutní hodnotě rozdílu obou čísel nad ním (tj. $c = |a - b|$).



11. Vrcholy pětiúhelníku $ABCDE$ se shodnými stranami AB a AE leží na kružnici k . Označme P průsečík přímk AD, CE a Q průsečík přímk AC, BD . Průsečíky přímk PQ s kružnicí k označme X a Y . Dokažte, že platí $|AX| = |AY|$.

12. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{a + 3c}{a + 2b + c} + \frac{4b}{a + b + 2c} - \frac{8c}{a + b + 3c},$$

kde a, b, c jsou libovolná kladná čísla.

13. V konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou splněny následující podmínky: $|AD| = |BC| + |EF|$, $|BE| = |AF| + |CD|$ a $|CF| = |DE| + |AB|$. Dokažte, že platí

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CD|}{|AF|} = \frac{|EF|}{|BC|}.$$

14. Kružnice vepsaná rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se dotýká jeho ramena BC v bodě M a protíná vnitřky úseček AM, DM po řadě v bodech K, L . Najděte všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{|AM|}{|AK|} + \frac{|DM|}{|DL|}.$$

15. Najděte podmínku na čísla $a, b \in \mathbb{R}$ nutnou i postačující k tomu, aby rovnice $Ax + B[x] = Ay + B[y]$ měla v oboru $\mathbb{R}$ i jiná řešení než $x = y$.

16. V dekadickém zápise některých N přirozených čísel vystupují pouze číslice 3 a 0, součet těchto N čísel je roven číslu zapsanému 2010 pětkami. Najděte nejmenší možné N .

17. Určete nejmenší kladné číslo k , při kterém platí nerovnost

$$|(a-b)(a-c)(b-c)| < k \cdot s^3$$

pro strany a, b, c libovolného trojúhelníku s obvodem $2s$ ($= a + b + c$).

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již čtvrté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 51. MMO v Kazachstánu.

Soutěž se uskutečnila ve dnech 21.–22. 6. 2010 v severomoravském Bílovci. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 20. 6. 2010. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícími byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.–2.	Damian Orlef	POL	7 7 7 7 7 0	35
	Martin Vodička	SVK	7 7 7 7 7 0	35
3.	Piotr Suwara	POL	7 6 7 7 0 2	29
4.	Szymon Kanonowicz	POL	6 7 7 7 0 0	27
5.	Jakub Konečný	SVK	7 1 7 7 0 0	22
6.–9.	Martin Bachratý	SVK	7 0 7 7 0 0	21
	Filip Borowiec	POL	7 7 7 0 0 0	21
	Jáchym Sýkora	CZE	7 7 0 0 0 7	21
	Michał Zajac	POL	7 7 0 7 0 0	21
10.–11.	Ladislav Bačo	SVK	7 5 7 1 0 0	20
	Miroslav Olšák	CZE	6 0 7 7 0 0	20
12.	Michal Hagara	SVK	7 0 7 0 0 0	14
13.	Marián Hornák	SVK	6 0 0 7 0 0	13
14.	Michał Miśkiewicz	POL	7 0 0 0 0 5	12
15.	Radek Marciňa	CZE	7 0 0 1 0 0	8
16.–17.	Petr Ryšavý	CZE	7 0 0 0 0 0	7
	Jakub Solovský	CZE	7 0 0 0 0 0	7
18.	Petr Boroš	CZE	0 0 0 0 0 0	0

Na výsledku českého družstva se bohužel projevila neúčast dvou reprezentantů, vítěze celostátního kola Davida Klášky a dále Tomáše Zemana.

Návrh všech šesti úloh (a jejich vzorová řešení) připravili členové úlohové komise z České republiky — dr. *Jaroslav Švrček* a doc. *Jaromír Šimša*. Úlohy koordinovala mezinárodní komise ve složení *Jaromír Šimša*, *Jaroslav Švrček*, *Pavel Calábek* a *Martin Panák* za Českou republiku, *Peter Novotný* a *Ján Mazák* za Slovensko a *Jerzy Bednarczuk*, *Andrzej Grzesik* a *Michał Pilipczuk* za Polsko.

Texty soutěžních úloh

1. Určete všechny trojice (a, b, c) kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$a\sqrt{b} - c = a,$$

$$b\sqrt{c} - a = b,$$

$$c\sqrt{a} - b = c.$$

(*Michal Takács*)

2. V kruhu o poloměru 1 uvažujme libovolných 60 bodů. Dokažte, že na hranici kruhu existuje takový bod, že součet jeho vzdáleností od všech 60 uvažovaných bodů není větší než 80.

(*Jaromír Šimša*)

3. Necht p je prvočíslo. Dokažte, že na šachovnici o rozměrech $p^2 \times p^2$ je možno zvolit p^3 polí tak, že středy žádných čtyř z nich nejsou vrcholy pravoúhelníku se stranami rovnoběžnými s okraji šachovnice.

(*Bartłomiej Bzdęga*)

4. Určete největší celé číslo k , pro něž platí následující tvrzení: Je dáno 2010 libovolných nedegenerovaných trojúhelníků. Strany každého trojúhelníku jsou obarveny tak, že jedna je modrá, jedna je červená a jedna je bílá. Pro každou barvu zvlášť uspořádáme délky stran. Dostaneme tak posloupnosti

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{2010} \quad \text{pro délky modrých stran,}$$

$$r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{2010} \quad \text{pro délky červených stran,}$$

a

$$w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{2010} \quad \text{pro délky bílých stran.}$$

Pak existuje k indexů j takových, že lze zkonstruovat nedegenerovaný trojúhelník se stranami délek b_j, r_j, w_j . Dokažte.

(*Michal Rolínek*)

5. Necht x, y, z jsou libovolná kladná reálná čísla, pro něž platí $x + y + z \geq 6$. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{y}{z^2 + x + 1} + \frac{z}{x^2 + y + 1}.$$

(Ján Mazák)

6. Necht $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, pro který platí

$$|AB| + |CD| = \sqrt{2} \cdot |AC| \quad \text{a} \quad |BC| + |DA| = \sqrt{2} \cdot |BD|.$$

Dokažte, že $ABCD$ je rovnoběžník.

(Jaromír Šimša)

Řešení úloh

1. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a = \max\{a, b, c\}$. Z první rovnice soustavy dostaneme

$$c(\sqrt{b} - 1) \leq a(\sqrt{b} - 1) = c, \quad \text{tedy} \quad b \leq 4.$$

Podobně máme z druhé rovnice soustavy

$$b(\sqrt{c} - 1) = a \geq b, \quad \text{tedy} \quad c \geq 4.$$

Použitím těchto nerovností dohromady s třetí rovnicí dostaneme

$$4 \leq c \leq c(\sqrt{c} - 1) \leq c(\sqrt{a} - 1) = b \leq 4,$$

odkud plyne $a = b = c = 4$.

Odpověď. Jediným řešením soustavy je trojice $(a, b, c) = (4, 4, 4)$.

2. Do hraniční kružnice vepíšme rovnostranný trojúhelník PQR . Jestliže dokážeme, že libovolný bod X nalézající se v kruhu splňuje nerovnost

$$|PX| + |QX| + |RX| \leq 4, \tag{1}$$

dostaneme sečtením nerovností (1) pro $X = X_k$, $1 \leq k \leq 60$,

$$\sum_{k=1}^{60} |PX_k| + \sum_{k=1}^{60} |QX_k| + \sum_{k=1}^{60} |RX_k| \leq 4 \cdot 60 = 240.$$

Z toho plyne, že aspoň jedna suma na levé straně je menší nebo rovna $240 : 3 = 80$, tedy aspoň jeden z bodů P, Q, R má požadovanou vlastnost.

S ohledem na symetrii stačí (1) dokázat pro případ, kdy X leží ve výseči PSQ , kde S označuje střed kruhu. Ukážeme, že v takovém případě platí

$$|PX| + |QX| \leq 2, \quad (2)$$

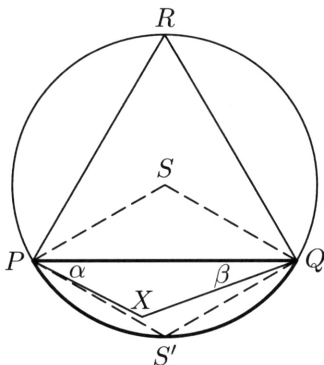
což dohromady s triviální nerovností $|RX| \leq 2$ dává (1).

Označme S' střed kratšího oblouku PQ (obr. 49). Čtyřúhelník $PS'QS$ je zřejmě kosočtverec, stačí tedy nerovnost (2) dokázat pro body X v úseči $PS'Q$ (ohraňené úsečkou PQ a obloukem $PS'Q$).

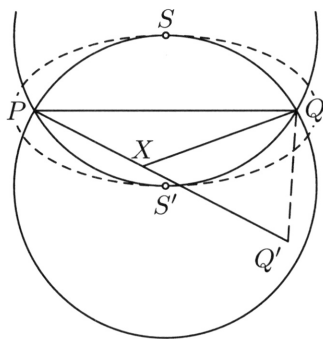
Jestliže $\alpha = |\sphericalangle XPQ|$, $\beta = |\sphericalangle XQP|$, pak $\alpha + \beta \leq 60^\circ$ a ze sinové věty v trojúhelníku PQX máme

$$\begin{aligned} |PX| + |QX| &= \frac{|PQ|(\sin \alpha + \sin \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{3} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} \leq \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2, \quad \text{neboť} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} \leq 30^\circ. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali (2).¹



Obr. 49



Obr. 50

Poznámka. Ve druhé části řešení lze postupovat i takto: Pro libovolný bod X v uvedené úseči uvažujme takový bod Q' na polopřímce PX mimo úsečku PX , že $|XQ'| = |XQ|$. Protože úhel QXQ' má nejvýše 60° , máme

¹ Pro úplnost je potřeba dodat, že pokud bod X leží na úsečce PQ , tj. trojúhelník PQX neexistuje, a nelze tedy použít sinovou větu, je $|PX| + |QX| = \sqrt{3} < 2$.

$|\sphericalangle XQQ'| = |\sphericalangle XQ'Q| \geq 60^\circ$, takže Q' leží v kruhu, který je obrazem daného kruhu v osově souměrnosti podle PQ (obr. 50). Proto

$$|PX| + |XQ| = |PX| + |XQ'| = |PQ'| \leq 2.$$

Další možností je využít skutečnost, že výseč PSQ leží v oblasti ohraničené elipsou s ohnisky P a Q , která je množinou všech bodů X splňujících $|PX| + |XQ| \leq |PS'| + |QS'| = |PS| + |QS| = 2$.

3. Označme p^2 rádků šachovnice dvojicemi (a, b) , kde $a, b \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Každý řádek tak bude označen jinou dvojicí.² Podobně označme takovými dvojicemi i všech p^2 sloupců.

Políčko ležící v řádku (a, b) a v sloupci (c, d) budeme nazývat *pěkné*, právě když

$$ac \equiv b + d \pmod{p}. \quad (1)$$

Ke každé dvojici (a, b) existuje zřejmě právě p dvojic (c, d) splňujících (1).³ V každém řádku je tudíž p pěkných políček a na celé šachovnici jich je p^3 .

Stačí dokázat, že žádná čtyři pěkná políčka nemají vlastnost popsanou v zadání. Předpokládejme sporem, že čtyři políčka ležící na průniku rádků $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ se sloupci $(c_1, d_1) \neq (c_2, d_2)$ jsou všechna pěkná. Potom

$$a_i c_j \equiv b_i + d_j \pmod{p} \quad \text{pro libovolná } i, j \in \{1, 2\}. \quad (2)$$

Odečtením dvou kongruencí (2) s daným i (v jedné položíme $j = 2$, ve druhé $j = 1$) získáme

$$a_i(c_2 - c_1) \equiv d_2 - d_1 \pmod{p} \quad \text{pro } i \in \{1, 2\} \quad (3)$$

a po odečtení obou kongruencí (3) vyjde

$$(a_2 - a_1)(c_2 - c_1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Proto $a_1 = a_2$ nebo $c_1 = c_2$. Vzhledem k symetrii můžeme předpokládat, že $c_1 = c_2$. Potom z (3) plyne $d_1 = d_2$, a tedy $(c_1, d_1) = (c_2, d_2)$, což je spor.

² Například můžeme označit prvních p rádků dvojicemi tvaru $(0, 0), (0, 1), \dots, (0, p-1)$, dalších p rádků $(1, 0), (1, 1), \dots, (1, p-1)$, atd., až posledních p rádků dvojicemi $(p-1, 0), (p-1, 1), \dots, (p-1, p-1)$. Ve skutečnosti však v našem řešení vůbec nezáleží na pořadí, v němž řádky označíme.

³ Ke každému c existuje právě jedno d splňující (1) a c můžeme zvolit p způsoby.

Poznámka. Řádky (a, b) odpovídají bodům afinní roviny F^2 , kde F je pole o p prvcích, sloupce (c, d) přímkám této roviny o rovnicích $cx - y - d = 0$ (jde o všechny přímky, jež nejsou rovnoběžné s osou y). Pole je pěkné, právě když bod odpovídající jeho řádku leží na přímce odpovídající jeho sloupci. Dvěma různými body nemohou procházet dvě různé přímky.

4. Dokážeme, že hledaná největší hodnota je $k = 1$.

Nejdříve ukážeme, že $b_{2010}, r_{2010}, w_{2010}$ jsou vždy stranami trojúhelníku. Bez újmy na obecnosti necht' $w_{2010} \geq r_{2010} \geq b_{2010}$. Stačí dokázat, že $b_{2010} + r_{2010} > w_{2010}$. Podle zadání existuje trojúhelník se stranami délek w, b, r , které mají postupně bílou, modrou a červenou barvu, přičemž $w_{2010} = w$. Z trojúhelníkové nerovnosti máme $b + r > w$ a vzhledem k danému uspořádání platí $b_{2010} \geq b$ a $r_{2010} \geq r$. Odtud už přímo plyne

$$b_{2010} + r_{2010} \geq b + r > w = w_{2010}.$$

Zbývá sestrojit posloupnost takových trojúhelníků, že w_j, b_j, r_j nejsou pro žádné $j < 2010$ délkami stran trojúhelníku. Pro každé $j = 1, 2, \dots, 2010$ uvažme trojúhelník T_j , který má

- ▷ modrou stranu s délkou $2j$,
- ▷ červenou stranu s délkou j pro $j \leq 2009$ a s délkou 4020 pro $j = 2010$,
- ▷ bílou stranu s délkou $j + 1$ pro $j \leq 2008$, s délkou 4020 pro $j = 2009$ a s délkou 1 pro $j = 2010$.

Protože

$$\begin{array}{lll} (j+1) + j > 2j & > (j+1) - j = 1 & \text{pro } j \leq 2008, \\ 2j + j > 4020 > 2j - j & = j & \text{pro } j = 2009, \\ 4020 + 1 > 2j & > 4020 - 1 = 4019 & \text{pro } j = 2010, \end{array}$$

strany každého trojúhelníku T_j splňují trojúhelníkové nerovnosti. Navíc $w_j = j, r_j = j$ a $b_j = 2j$ pro $1 \leq j \leq 2009$. Odtud

$$w_j + r_j = j + j = 2j = b_j,$$

tedy w_j, b_j a r_j nejsou stranami trojúhelníku pro žádné $1 \leq j \leq 2009$.

5. Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice kladných čísel $x^2/14, x/(y^2 + z + 1)$ a $2(y^2 + z + 1)/49$ máme

$$\frac{1}{14} x^2 + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{2}{49} (y^2 + z + 1) \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x^3}{7^3}} = \frac{3}{7} x.$$

Cyklickou záměnou $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ odvodíme dvě podobné nerovnosti a sečtením všech tří nerovností po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} L &= \frac{11}{98}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{y}{z^2 + x + 1} + \frac{z}{x^2 + y + 1} + \frac{6}{49} \geq \\ &\geq \frac{19}{49}(x + y + z). \end{aligned}$$

Z Cauchyovy nerovnosti (anebo z jednoduché úpravy na součet tří čtverců) plyne

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2 \geq 12.$$

Dohromady tak dostáváme

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{y}{z^2 + x + 1} + \frac{z}{x^2 + y + 1} &= \\ &= \frac{87}{98}(x^2 + y^2 + z^2) + L - \frac{6}{49} \geq \\ &\geq \frac{87}{98}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{19}{49}(x + y + z) - \frac{6}{49} \geq \\ &\geq \frac{87}{98} \cdot 12 + \frac{19}{49} \cdot 6 - \frac{6}{49} = \frac{90}{7}. \end{aligned}$$

Závěr. Nejmenší možná hodnota daného výrazu je $\frac{90}{7}$ a získáme ji pro $x = y = z = 2$.

6. Dané tvrzení triviálně plyne z následujícího poznatku:

Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$(|AB| + |CD|)^2 + (|BC| + |DA|)^2 \geq 2|AC|^2 + 2|BD|^2$$

s rovností, právě když je $ABCD$ rovnoběžník.

Označme $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{DA}$. Jestliže umocníme na druhou trojúhelníkové nerovnosti

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{c}| \geq |\mathbf{a} - \mathbf{c}|, \quad |\mathbf{b}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{b} - \mathbf{d}|, \quad (1)$$

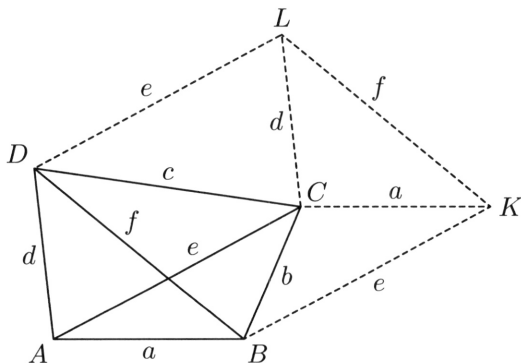
sečteme je a přepíšeme výrazy pomocí skalárního součinu, dostaneme

$$\begin{aligned} (|AB| + |CD|)^2 + (|BC| + |DA|)^2 &\geq \\ &\geq |\mathbf{a} - \mathbf{c}|^2 + |\mathbf{b} - \mathbf{d}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{d}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{d} = \\ &= |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|^2 - 2(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \\ &= 2|AC|^2 - 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BD} = 2|AC|^2 + 2|BD|^2. \end{aligned}$$

Tím je uvedená nerovnost dokázána. Pokud v ní platí rovnost, musejí rovnosti nastat i v (1), což je možné jedině v případě, kdy $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$ a $\mathbf{b} \parallel \mathbf{d}$. Obě dvojice protilehlých stran čtyřúhelníku $ABCD$ jsou tedy rovnoběžné, což je možné jedině pro rovnoběžník.

Naopak, jestliže $ABCD$ je rovnoběžník, je $|AB| = |CD|$, $|BC| = |DA|$ a dokazovaná nerovnost se změní ve známou *rovnoběžníkovou rovnost* (k jejímu důkazu stačí v našem řešení nahradit nerovnosti v (1) rovnostmi).

Jiné řešení. Odlišným způsobem dokážeme úvodní tvrzení předchozího řešení. Strany čtyřúhelníku $ABCD$ označme obvyklým způsobem. Dále necht' $|AC| = e$, $|BD| = f$. Trojúhelníky ABC , ADC doplníme na rovnoběžníky $ABKC$, $ADLC$ (obr. 51).



Obr. 51

Úsečka AC je shodná a rovnoběžná s úsečkami BK a DL , takže $BKLD$ je rovnoběžník a podle rovnoběžníkové rovnosti máme

$$2e^2 + 2f^2 = 2|BK|^2 + 2|BD|^2 = |BL|^2 + |DK|^2.$$

Odtud už s využitím trojúhelníkových nerovností $|BL| \leq b + d$, $|DK| \leq a + c$ plyne

$$2e^2 + 2f^2 \leq (b + d)^2 + (a + c)^2.$$

Rovnost nastane, právě když nastane v použitých trojúhelníkových nerovnostech, tedy právě když body B, C, L leží na jedné přímce a zároveň body D, C, K leží na jedné přímce, což je zřejmě splněno jedině tehdy, je-li $ABCD$ rovnoběžník.

Poznámka. Podmínkám zadání vyhovují (navzájem nepodobné) rovnoběžníky $ABCD$ splňující

$$|AB| = 1, \quad |BC| = t \quad \text{a} \quad \cos \sphericalangle ABC = \frac{t^2 - 1}{2t} \quad (1 \leq t \leq 1 + \sqrt{2}).$$

Jiné řešení. (Podle *Jáchyma Sýkory*.) Užitím vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ z prvního řešení zapíšeme umocněné rovnosti ze zadání ve tvaru

$$\begin{aligned} 2|AC|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{c} + \mathbf{d})^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{c}|)^2, \\ 2|BD|^2 &= (\mathbf{b} + \mathbf{c})^2 + (\mathbf{d} + \mathbf{a})^2 = (|\mathbf{b}| + |\mathbf{d}|)^2. \end{aligned}$$

Po sečtení těchto dvou rovností a úpravách dostaneme

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) = 2(|\mathbf{a}||\mathbf{c}| + |\mathbf{b}||\mathbf{d}|),$$

odkud vzhledem k rovnosti $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ vychází

$$(|\mathbf{a}||\mathbf{c}| + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + (|\mathbf{b}||\mathbf{d}| + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) = 0.$$

Podle Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti jsou ovšem sčítanci v obou závorkách nezáporní, takže se musejí rovnat nule. To znamená, že jak úhel mezi vektory $\mathbf{a}, \mathbf{c}$, tak úhel mezi vektory $\mathbf{b}, \mathbf{d}$ má velikost 180° , tudíž zkoumaný čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník.

51. mezinárodní matematická olympiáda

Padesátý první ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 2. do 14. července 2010 v Kazachstánu. Olympiády se zúčastnilo 522 soutěžících z 98 zemí, méně než v předchozím roce.

České družstvo tvořili tito soutěžící: *David Klaška* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Radek Marciňa* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, *Miroslav Olšák* z Gymnázia Buďánka v Praze, *Petr Ryšavý* z Gymnázia Jaroslava Heyrovského v Praze, *Jáchym Sýkora* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze a *Tomáš Zeman* z Gymnázia Jana Keplera v Praze. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl dr. *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl dr. *Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Kazachstán je devátou největší zemí na světě (co se týče rozlohy) a organizátoři to dali účastníkům pocítit. Vedoucí jednotlivých národních družstev zahajovali program v městě Almaty (dříve Alma-Ata, do roku 1997 hlavní město Kazachstánu). Po výběru úloh a jejich překladu do národních jazyků následoval asi tisícikilometrový letecký přesun do současného hlavního města Astany. Tam proběhlo 5. července v Paláci nezávislosti slavnostní zahájení olympiády, kterého se zúčastnil i kazašský ministr školství a vědy *Zhanseit Tuimebayev*. Zahájení bylo velkolepé, ve stylu nám dobře známých estrád. Na pódiu se vystřídalo několik folklórních souborů oblečených v bohatých kazašských krojích, místní „folk-lór-metalová“ kapela a zpěvák se „zlatým hlasem“. Nechyběla společná píseň všech vystoupivších na závěr. Po zahájení následoval pro vedoucí



delegací půlhodinový přesun do hotelu. Pro soutěžící byl přesun osmihodinový (v autobusech), a to do dětského tábora Baldauren, ležícího v pěkném prostředí národního parku, asi 250 km od Astany. Již o půlnoci před soutěží se dostala většina řešitelů do svých pokojů, ti průbojnější pak dostali i večeri. Aby po takto náročném dni soutěžící náhodou nezaspali, zajistili organizátoři následujícího (prvního soutěžního) dne operativně budíček na půl sedmou, což se setkal s velkým ohlasem.

V Baldaurenu se konala i vlastní soutěž, která jako vždy probíhala ve dvou dnech, přičemž každý den soutěžící řešili během čtyř a půl hodiny tři úlohy. O bezpečnost soutěžících bylo výborně postaráno, tábor strážila policie a nikdo nesměl tam ani ven (k řešitelům nesměli ani pedagogičtí vedoucí, kteří byli ubytováni odděleně). Také podmínky měli řešitelé v podstatě stejné: všem byly odebrány vlastní rýsovací potřeby a každý z účastníků dostal od organizátorů pravítko a kružítko. Pravda, některá kružítká měla místo tradiční konstrukce s jednou špicí a jednou tuhou špice dvě, což někteří řešitelé nelibě nesli. Mnohým proto byla tato novátorská kružítká vyměněna za klasická. O těchto věcech se jury dozvíдалa na začátku obou soutěžních dní v době vyhrazené na otázky soutěžících (na jiných mezinárodních olympiádách bývá zvykem, že soutěžící pokládají zejména otázky související s textem soutěžních úloh).

Na této olympiádě došlo rovněž k výměně v čele Poradního výboru (Advisory Board) mezinárodní matematické olympiády, což je orgán, který zajišťuje fungování mezinárodní olympiády, zvláště pak jedná s těmi zeměmi, které mají o případné uspořádání této soutěže zájem. Kromě výměny řadových členů výboru nastala změna i v osobě předsedy: dlouholetého předsedu *Józsefa Pelikana* z Maďarska nahradil ruský matematik *Nazar Agachanov*.

Dva dny před ukončením olympiády vedoucí i účastníci společně navštívili „dostihové“ závodiště. Nicméně hlavním programem nebyly dostihy, ale vystoupení kazašské artistické skupiny, která na koních předváděla neuvěřitelné dovednosti. Zvláště srdce obdivovatelů krásy koní zaplesalo a zážitek z tohoto vystoupení dal zapomenout na předchozí příhody.

Slavnostní zakončení olympiády se neslo v podobném duchu jako zahájení, dostavil se však i kazašský premiér *Karim Massimov*. Na závěr byla slavnostně předána vlajka Mezinárodní matematické olympiády zástupcům hostitelské země příští olympiády. Ta proběhne v Amsterdamu v Nizozemí.

Ačkoliv české družstvo získalo v tomto roce celkem 84 bodů, což je jen o tři body méně než v roce předchozím, v celkovém pořadí zemí to stačilo

jen na 48. místo (proti čtyřicátému místu na 50. MMO), což nás i tak řadí do první poloviny soutěžního pole. V individuálním hodnocení dosáhli studenti David Klaška a Miroslav Olšák shodným bodovým ziskem na bronzové medaile, Radek Marciňa, Jáchym Sýkora a Tomáš Zeman získali čestná uznání udělovaná za alespoň jednu bezchybně vyřešenou úlohu. Všichni tři vyřešili bezchybně dokonce dvě úlohy, na bronzovou medaili jim však bohužel ještě jeden bod chyběl.

V tradičně sledovaném česko-slovenském duelu jsme tentokrát našim východním bratrům podlehli (umístili se na děleném 39. místě). Zejména stojí za zmínku výkon talentovaného Martina Vodičky z Košic, který coby patnáctiletý získal zlatou medaili.

Závěrem lze říci, že organizátoři vložili do pořádání olympiády nemalé úsilí a ještě více finančních prostředků, což bylo patrné doslova na každém kroku. Buď jak buď, tato olympiáda zanechala u všech účastníků hluboké zážitky, na které budou dlouho vzpomínat.

V následujícím přehledu můžete zjistit celkové absolutní pořadí jednotlivých účastníků českého a slovenského družstva:

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
175.–187. David Klaška	7	1	0	3	7	0	18	III.
267.–313. Radek Marciňa	7	0	0	7	0	0	14	HM
175.–187. Miroslav Olšák	7	2	0	2	7	0	18	III.
446.–461. Petr Ryšavý	6	0	0	0	0	0	6	
267.–313. Jáchym Sýkora	7	0	0	7	0	0	14	HM
267.–313. Tomáš Zeman	7	0	0	7	0	0	14	HM
Celkem	41	3	0	26	14	0	84	

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
200.–226. Ladislav Bačo	7	2	0	7	0	0	16	III.
314.–337. Martin Bachratý	7	3	0	3	0	0	13	HM
227.–266. Michal Hagara	7	0	0	7	1	0	15	III.
352.–366. Marián Horňák	7	1	0	3	0	0	11	HM
367.–386. Jakub Konečný	7	0	0	3	0	0	10	HM
42.–47. Martin Vodička	7	1	0	7	6	6	27	I.
Celkem	42	7	0	30	7	6	92	

V následující tabulce uvádíme neoficiální pořadí jednotlivých zemí.

	I	II	III	body		I	II	III	body
ČLR	6	0	0	197	Bělorusko	0	0	2	80
Rusko	4	2	0	169	Mongolsko	0	0	2	79
USA	3	3	0	168	Slovinsko	0	0	2	78
Korea	4	2	0	156	Srí Lanka	0	0	1	78
Kazachstán	3	2	0	148	Izrael (5)	0	1	1	76
Thajsko	1	5	0	148	Malajsie	0	1	1	75
Japonsko	2	3	0	141	Portugalsko	0	0	1	75
Turecko	1	3	2	139	Tádžikistán	0	1	0	73
Německo	1	3	2	138	Lotyšsko	0	0	2	72
Srbsko	1	3	2	135	JAR	0	0	2	69
Itálie	1	3	2	133	Makedonie	0	1	0	69
Vietnam	1	4	1	133	Bolívie	0	0	0	64
Kanada	2	1	2	129	Arménie	0	0	1	63
Maďarsko	2	2	1	129	Kypr	0	0	1	62
Austrálie	1	3	1	128	Estonsko	0	0	0	61
Írán	0	4	2	127	Kyrgyzstán	0	1	1	61
Rumunsko	2	1	2	127	Kolumbie (4)	0	0	3	60
Peru	1	3	1	124	Kambodža	0	0	0	58
Tchaj-wan	1	3	1	123	Maroko	0	0	1	55
Hongkong	1	2	3	121	Saudská Arábie	0	0	2	55
Bulharsko	1	2	3	118	Bangladéš (5)	0	0	1	54
Singapur	0	4	1	117	Pobřeží slonoviny (5)	0	1	0	54
Ukrajina	1	2	3	117	Island	0	0	0	53
<i>Polsko</i>	2	1	1	116	Finsko	0	0	1	52
Velká Británie	1	1	2	114	Švédsko	0	0	0	52
Uzbekistán	0	4	1	112	Filipíny (3)	0	1	0	45
Belgie	0	2	3	110	Norsko	0	0	0	41
Ázerbájdžán	0	3	2	109	Ekvádor	0	0	1	39
Nový Zéland	0	2	4	106	Trinidad a Tobago (5)	0	1	0	37
Francie	0	3	1	105	Portoriko (2)	1	0	0	34
Indonésie	0	1	4	105	Kostarika (3)	0	0	1	32
Chorvatsko	0	2	3	103	Panama (2)	0	0	2	32
Mexiko	0	1	4	102	Lucembursko (3)	0	0	0	31
Gruzie	0	2	2	101	Tunisko (2)	0	1	0	31
Brazílie	0	2	1	99	Sýrie	0	0	0	29
Indie	0	2	1	98	Nigérie (5)	0	0	1	27
Řecko	0	2	0	95	Kuba (1)	0	1	0	26
Nizozemsko	0	0	5	94	Paraguay (4)	0	0	0	26
Argentina	0	1	2	92	Salvádor (3)	0	0	0	25
Litva	0	1	3	92	Honduras (1)	0	1	0	21
Moldávsko	0	1	3	92	Pákistán (5)	0	0	0	19
<i>Slovensko</i>	1	0	2	92	Irsko	0	0	0	18
Švýcarsko	0	0	3	92	Venezuela (2)	0	0	0	16
Turkmenistán	0	1	2	91	Guatemala (2)	0	0	0	12
Dánsko	1	0	2	90	Albánie (4)	0	0	0	11
Španělsko	0	1	2	89	Bosna a Hercegovina (4)	0	0	0	8
Rakousko	1	0	1	87	Černá Hora (4)	0	0	0	7
<i>Česká republika</i>	0	0	2	84	Kuvajt (5)	0	0	0	2

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

pro libovolná reálná x, y . (Symbol $\lfloor z \rfloor$ značí největší celé číslo nepřevyšující z .) (Francie)

2. Nechť I je střed kružnice vepsané a k kružnice opsané trojúhelníku ABC . Nechť přímka AI protíná kružnici k v bodě D ($D \neq A$). Dále nechť na oblouku BDC je dán bod E a na straně BC bod F tak, že platí

$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CAE| < \frac{1}{2} |\sphericalangle BAC|.$$

Konečně nechť G je středem úsečky IF . Dokažte, že průsečík přímek DG a EI leží na kružnici k . (Hongkong)

3. Nechť $\mathbb{N}$ je množina všech celých kladných čísel. Určete všechny funkce $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná celá kladná m, n je číslo

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

druhou mocninou celého kladného čísla. (USA)

4. Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P . Přímky AP , BP a CP protínají kružnici k opsanou trojúhelníku ABC po řadě v bodech K , L a M (různých od A , B , C). Tečna ke kružnici k v bodě C protíná přímku AB v bodě S . Dokažte, že pokud mají úsečky SC a SP stejnou délku, pak jsou stejně dlouhé i úsečky MK a ML . (Polsko)

5. V každé ze šesti schránek B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 a B_6 je na počátku jedna mince. Se schránkami můžeme provádět následující dvě operace:

- 1) Vybrat neprázdnou schránku B_j , kde $1 \leq j \leq 5$, odebrat z ní jednu minci a přidat dvě mince do schránky B_{j+1} .
- 2) Vybrat neprázdnou schránku B_k , kde $1 \leq k \leq 4$, odebrat z ní jednu minci a navzájem vyměnit obsahy (případně prázdných) schránek B_{k+1} a B_{k+2} .

Rozhodněte, zda je možné pomocí konečného počtu těchto operací dosáhnout toho, aby schránky B_1, B_2, B_3, B_4 a B_5 byly prázdné a schránka B_6 obsahovala právě $2010^{2010^{2010}}$ mincí. (Připomínáme, že $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

(Nizozemsko)

6. Je dána posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ kladných reálných čísel. Necht s je kladné celé číslo takové, že pro všechna $n > s$ platí

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} : 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Dokažte, že pak existují kladná celá N a l ($l \leq s$) taková, že $a_n = a_l + a_{n-l}$ pro všechna $n \geq N$. (Írán)

Řešení soutěžních úloh

1. Dosazením $x = 0$ do dané rovnosti po úpravě dostaneme

$$f(0) \cdot (1 - \lfloor f(y) \rfloor) = 0. \quad (1)$$

Rozebereme dva případy.

Jestliže $f(0) \neq 0$, pak z (1) plyne $\lfloor f(y) \rfloor = 1$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$. Danou rovnost tak můžeme přepsat do tvaru

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}$$

a po dosazení $y = 0$ získáme $f(x) = f(0)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Funkce f je tedy konstantní a vzhledem k rovnosti $\lfloor f(y) \rfloor = 1$ to musí být konstanta z intervalu $(1, 2)$. Snadno ověříme, že všechny funkce $f(x) = c$ pro $1 \leq c < 2$ vyhovují.

Předpokládejme dále, že $f(0) = 0$. Dosazením $x = a$, $y = a$, přičemž $0 < a < 1$, dostaneme

$$0 = f(0) = f(\lfloor a \rfloor a) = f(a) \lfloor f(a) \rfloor.$$

Jestliže $f(a) \neq 0$, je $\lfloor f(a) \rfloor = 0$, a po dosazení $x = 1$, $y = a$ do dané rovnosti vyjde $f(a) = f(1) \lfloor f(a) \rfloor = 0$, což je spor. Je tudíž $f(a) = 0$ pro všechna $0 \leq a < 1$.

Necht z je libovolné reálné číslo. Zřejmě existuje celé číslo m takové, že $0 \leq z/m < 1$.¹ Dosazením $x = m$, $y = z/m$ do původní rovnosti s využitím předchozího poznatku pro každé $z \in \mathbb{R}$ dostaneme

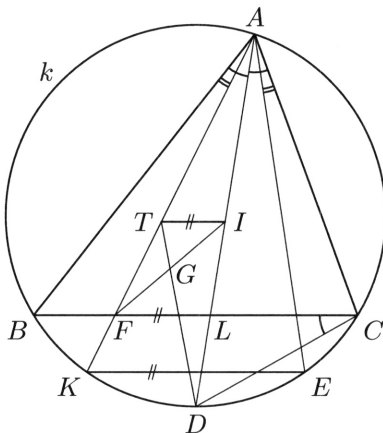
$$f(z) = f\left(m \cdot \frac{z}{m}\right) = f\left(\lfloor m \rfloor \cdot \frac{z}{m}\right) = f(m) \cdot \left\lfloor f\left(\frac{z}{m}\right) \right\rfloor = 0.$$

Je tedy $f(x) = 0$ a snadno se přesvědčíme, že tato funkce vyhovuje.

Závěr. Vyhovují jen konstantní funkce $f(x) = c$, přičemž $c = 0$ nebo $c \in (1, 2)$.

¹ Stačí m zvolit se stejným znaménkem jako z a v absolutní hodnotě větší než z .

2. Průsečík přímky AF s kružnicí k (různý od A) označme K , průsečík přímk AI a BC označme L . Podle zadání $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAE|$, proto mají tětivy BK, CE kružnice k stejnou délku a platí $BC \parallel KE$ (obr. 52).



Obr. 52

Označme T průsečík přímk DG a AF . Podle Menelaovy věty pro trojúhelník AFI a přímku DG máme

$$\frac{|AT|}{|TF|} \cdot \frac{|FG|}{|GI|} \cdot \frac{|ID|}{|DA|} = 1,$$

odkud vzhledem k rovnosti $|FG| = |GI|$ po úpravě plyne

$$\frac{|AT|}{|TF|} = \frac{|DA|}{|ID|}. \quad (1)$$

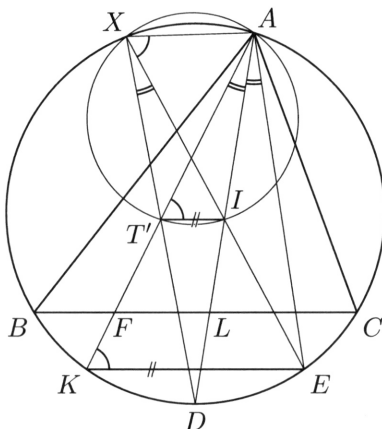
Protože CI je osou úhlu trojúhelníku ALC , dělí jeho stranu AL v poměru $|AI| : |IL| = |CA| : |LC|$. Trojúhelníky ADC a CDL jsou podobné, neboť se shodují ve společném úhlu při vrcholu D a z rovnosti obvodových úhlů plyne $|\sphericalangle DCL| = |\sphericalangle DAB| = \frac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle DAC|$. Je tedy $|CA| : |LC| = |DA| : |DC|$. Je známo, že $|DC| = |ID|$.² Podle (1) tak máme

$$\frac{|AI|}{|IL|} = \frac{|CA|}{|LC|} = \frac{|DA|}{|DC|} = \frac{|DA|}{|ID|} = \frac{|AT|}{|TF|},$$

² To plyne např. z toho, že trojúhelník CID má při vrcholu C i při vrcholu I vnitřní úhel velikosti $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$, takže je rovnoramenný.

což znamená, že $TI \parallel FL$. Odtud vzhledem k rovnoběžnosti $BC \parallel KE$ plyne $TI \parallel KE$.

Průsečík přímky EI s kružnicí k (různý od E) označme X a průsečík přímek DX a AF označme T' (obr. 53). Protože AD je osou úhlu BAC a úhly BAF , CAE mají podle zadání stejnou velikost, je



Obr. 53

také $|\sphericalangle KAD| = |\sphericalangle DAE|$. Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou DE máme $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle DXE|$, proto

$$|\sphericalangle T'AI| = |\sphericalangle KAD| = |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle DXE| = |\sphericalangle T'XI|,$$

a tak body T' , I , A , X leží na jedné kružnici. Z obvodových úhlů nad tětivami IA a EA potom plyne

$$|\sphericalangle AT'I| = |\sphericalangle AXI| = |\sphericalangle AXE| = |\sphericalangle AKE|,$$

odkud $T'I \parallel KE$.

Rovnoběžka s přímkou KE procházející bodem I však může protínat přímkou AF jen v jednom bodě. Proto je $T = T'$, přímka DG je totožná s DT' a bod X leží na přímkách DG , EI i na kružnici k , čímž je úloha vyřešena.

3. Všechny funkce tvaru $g(n) = n + c$, kde c je nezáporné celé číslo, vyhovují, protože tehdy $(g(m) + n)(m + g(n)) = (m + n + c)^2$. Dokážeme, že žádná jiná funkce nevyhovuje. Použijeme při tom následující tvrzení:

Jestliže p je prvočíslo, k, l jsou přirozené čísla a $p \mid g(k) - g(l)$, pak $p \mid k - l$.

Předpokládejme nejprve, že $p^2 \mid g(k) - g(l)$. Potom $g(l) = g(k) + p^2a$ pro nějaké celé číslo a . Vezměme dostatečně velké přirozené číslo d (takové, že $pd > \max\{g(k), g(l)\}$), které není násobkem p , a položíme $n = pd - g(k)$. Čísla

$$n + g(k) = pd \quad \text{a} \quad n + g(l) = pd + (g(l) - g(k)) = p(d + pa)$$

jsou obě násobkem p , ale nejsou dělitelná p^2 . Podle zadání jsou obě čísla $(g(k) + n)(g(n) + k)$ i $(g(l) + n)(g(n) + l)$ čtverce, a protože jsou to násobky p , musejí být dělitelná číslem p^2 . Odtud plyne, že oba činitele $g(n) + k, g(n) + l$ musejí být násobky p , tedy

$$p \mid (g(n) + k) - (g(n) + l) = k - l.$$

Zbývá případ, kdy $p \mid g(k) - g(l)$ a zároveň $p^2 \nmid g(k) - g(l)$. Vezměme stejné d a položíme $n = p^3d - g(k)$. Potom je $g(k) + n = p^3d$ dělitelné číslem p^3 (ne však p^4) a $g(l) + n = p^3d + (g(l) - g(k))$ je dělitelné číslem p (ne však p^2). Analogicky proto dostáváme, že čísla $g(n) + k, g(n) + l$ musejí být násobky p a $p \mid k - l$. Tím je naše úvodní tvrzení dokázáno.

Vraťme se k zadané úloze. Předpokládejme, že $g(k) = g(l)$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$. Podle uvedeného tvrzení je potom $k - l$ dělitelné libovolným prvočíslem, což je možné jedině v případě $k = l$. Funkce g je tudíž prostá.

Podívejme se nyní na čísla $g(k)$ a $g(k+1)$. Protože číslo $(k+1) - k = 1$ není dělitelné žádným prvočíslem, nemůže mít podle uvedeného tvrzení žádného prvočinitele ani číslo $g(k+1) - g(k)$, takže

$$|g(k+1) - g(k)| = 1.$$

Označme $g(2) - g(1) = q \in \{-1, 1\}$. Dokážeme matematickou indukcí, že $g(n) = g(1) + (n-1)q$. Pro $n = 1, 2$ to triviálně platí. Podle indukčního předpokladu pak pro $n > 1$ máme

$$g(n+1) = g(n) \pm q = g(1) + (n-1)q \pm q = \begin{cases} g(1) + nq, \\ g(1) + (n-2)q. \end{cases}$$

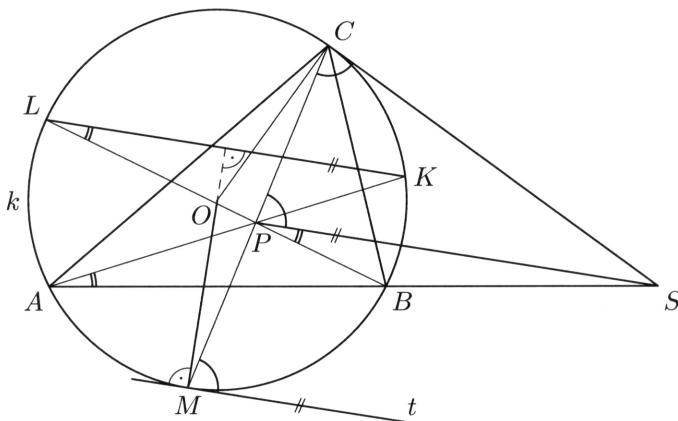
Protože $g(n+1) \neq g(n-1) = g(1) + (n-2)q$, je jedinou možností $g(n+1) = g(1) + nq$ a důkaz indukci je hotov.

Je tedy $g(n) = g(1) + (n-1)q$. Určitě však $q \neq -1$, jinak bychom totiž pro $n \geq g(1) + 1$ dostali $g(n) \leq 0$, což není možné. Je tedy $q = 1$ a $g(n) = g(1) + n - 1 = n + c$, přičemž $c = g(1) - 1 \geq 0$.

4. Bez újmy na obecnosti nechť bod S leží na polopřímce AB . Z mocnosti bodu S ke kružnici k plyne $|SB| \cdot |SA| = |SC|^2 = |SP|^2$, odkud vychází $|SB| : |SP| = |SP| : |SA|$. Trojúhelníky SBP , SPA jsou tedy podobné (úhel při vrcholu S mají společný a odpovídající strany svírající tento úhel mají délky ve stejném poměru). Z této podobnosti a z vlastností obvodových úhlů nad tětivou BK (obr. 54) máme dohromady³

$$|\sphericalangle SPB| = |\sphericalangle SAP| = |\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle BLK|,$$

což znamená rovnoběžnost přímek LK , PS .



Obr. 54

Označme O střed kružnice k . Tečny t a CS kružnice k vedené krajními body tětivy MC zřejmě svírají s MC úhly stejných velikostí⁴ (obr. 54). Stejnou velikost má však i úhel CPS , neboť trojúhelník CPS je podle zadání rovnoramenný. Ze souhlasných úhlů tak dostáváme $PS \parallel t$. Dohromady máme

$$LK \parallel PS \parallel t \perp OM.$$

Tětiva LK je tedy kolmá na poloměr OM kružnice k , z čehož už přímo plyne $|ML| = |MK|$.

³ Rovnost $|\sphericalangle SPB| = |\sphericalangle SAP|$ můžeme odůvodnit i takto: Protože $|SB| \cdot |SA| = |SP|^2$, z mocnosti bodu S ke kružnici opsané trojúhelníku ABP plyne, že SP je tečnou této kružnice. Rovnost úhlů SPB a SAP je tedy rovností úsekového a obvodového úhlu, jež oba přísluší tětivě BP této kružnice.

⁴ Jsou to doplňky do 90° k úhlům při základně rovnoramenného trojúhelníku MCO .

5. Odpověď na otázku ze zadání je „Ano“. Ukážeme, jak postupovat, abychom dosáhli ve schránkách požadovaného počtu mincí. Pro jednoduchost budeme každou konkrétní situaci, tj. kolik se právě nalézá mincí v jednotlivých schránkách, označovat šesticí čísel (každé z čísel bude odpovídat počtu mincí v příslušné schránce).

Na začátku tedy máme šesticí $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ (v každé schránce je jedna mince). Posloupností dovolených operací chceme dosáhnout šestice $(0, 0, 0, 0, 0, 2010^{2010^{2010}})$. Nejdříve připomeňme, co přesně s mincemi dovolené operace činí. První operací vybereme ze schránky jednu minci, tu „rozdvojíme“ a obě vzniklé mince dáme do schránky vpravo. Při druhé operaci vybereme ze schránky jednu minci, tu „zahodíme“ a vyměníme obsah dvou schránek nalézajících se bezprostředně vpravo od schránky, z níž jsme minci vybrali.

Postupovat můžeme například následovně. Nejdříve použijeme první operaci na 5. schránku (v 5. schránce tedy jedna mince ubude a do 6. dvě přibudou):

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 0, 3).$$

Nyní použijeme druhou operaci na 4. schránku, odebereme tedy minci ze 4. schránky a vyměníme mince mezi 5. a 6. schránkou:

$$(1, 1, 1, 1, 0, 3) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 3, 0).$$

Totéž postupně zopakujeme pro 3., 2. a 1. schránku (ubereme minci a vyměníme obsah schránek napravo):

$$(1, 1, 1, 0, 3, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 3, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 3, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 3, 0, 0, 0, 0).$$

Tak se nám podařilo vyprázdnit všechny schránky až na jednu, kde zůstaly tři mince. Protože chceme do jediné schránky dostat „obrovský“ počet mincí, ukážeme nyní, jak dosáhnout většího počtu mincí v jediné neprázdné schránce (necháváme na čtenáři, aby ověřil, že jde o dovolené operace):

$$\begin{aligned} (0, 3, 0, 0, 0, 0) &\rightarrow (0, 2, 2, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 2, 1, 2, 0, 0) \rightarrow (0, 2, 0, 4, 0, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 4, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 3, 2, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 3, 1, 2, 0) \rightarrow (0, 1, 3, 0, 4, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 2, 4, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 2, 3, 2, 0) \rightarrow (0, 1, 2, 2, 4, 0) \rightarrow (0, 1, 2, 1, 6, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 2, 0, 8, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 8, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 7, 2, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 6, 4, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 1, 5, 6, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 4, 8, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 3, 10, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 1, 2, 12, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 1, 14, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 16, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 0, 16, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 16, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a, 0, 0) &\rightarrow (a-1, 2, 0) \Rightarrow (a-1, 0, 4) \rightarrow (a-2, 4, 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a-2, 0, 8) \rightarrow (a-3, 8, 0) \Rightarrow (a-3, 0, 16) \rightarrow (a-4, 16, 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a-4, 0, 32) \rightarrow (a-5, 32, 0) \Rightarrow \dots \rightarrow (a-(a-1), 2^{a-1}, 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a-(a-1), 0, 2^a) \rightarrow (a-a, 2^a, 0) = (0, 2^a, 0). \end{aligned}$$
[illegible]
$$P_1 = 2, \quad P_2 = 2^2 = 4, \quad P_3 = 2^{2^2} = 2^4 = 16, \quad P_4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65\,536$$

163

následovně:

$$\begin{aligned}
 A &= 2010^{2010^{2010}} < 2048^{2010^{2010}} = (2^{11})^{2010^{2010}} = 2^{11 \cdot 2010^{2010}} < \\
 &< 2^{2010 \cdot 2010^{2010}} = 2^{2010^{2011}} < 2^{2048^{2011}} = 2^{(2^{11})^{2011}} = 2^{2^{11 \cdot 2011}} = \\
 &= 2^{2^{22 \cdot 121}} < 2^{2^{32 \cdot 768}} = 2^{2^{2^{15}}} < 2^{2^{2^{16}}} = 2^{2^{2^{2^2}}} = P_6 < P_{16}.
 \end{aligned}$$

Všechny uvedené nerovnosti jsou zřejmé. Zbývá už jen dokončit přeměnu šestice $(0, 0, 0, P_{16}, 0, 0)$ na šestici $(0, 0, 0, 0, 0, A)$. K tomu stačí mnohokrát použít na čtvrtou schránku druhou operaci, přičemž budeme stále „měnit“ obsahy prázdné páté a šesté schránky, takže se kromě snižování počtu mincí ve čtvrté schránce nebude nic dít. Budeme to dělat až do okamžiku, kdy dostaneme šestici $(0, 0, 0, A/4, 0, 0)$ (zřejmě číslo A je dělitelné čtyřmi a $A/4 < A < P_{16}$, takže takovouto šestici lze opravdu dostat). Nakonec už jen opakovaně použijeme první operaci nejdříve na čtvrtou a poté na pátou schránku, až dostaneme

$$(0, 0, 0, A/4, 0, 0) \Rightarrow (0, 0, 0, 0, A/2, 0) \Rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, A).$$

Tím je úloha vyřešena.

6. (Podle *Martina Vodičky* z Košic.) Podle zadání pro libovolné $n > s$ platí $a_n = a_i + a_j$, přičemž $i \leq j = n - i$. Ukážeme nejprve, že lze najít dokonce takový rozklad, v němž $i \leq s$. Kdyby totiž bylo $a_n = a_{i_1} + a_{j_1}$, kde $i_1 > s$, bylo by podle zadání $a_{i_1} = a_{i_2} + a_{j_2}$, přičemž $i_2 + j_2 = i_1$, tedy $i_2 < i_1$, a navíc zřejmě $a_{j_2+j_1} \geq a_{j_2} + a_{j_1}$, protože $j_2 + j_1 > i_1 > s$. To znamená, že

$$a_n = a_{i_1} + a_{j_1} = a_{i_2} + a_{j_2} + a_{j_1} \leq a_{i_2} + a_{j_2+j_1},$$

ale protože $n = i_2 + (j_2 + j_1)$, platí $a_n \geq a_{i_2} + a_{j_2+j_1}$, tedy nutně $a_n = a_{i_2} + a_{j_2+j_1}$. Kdyby pořád ještě bylo $i_2 > s$, mohli bychom celou úvahu zopakovat a najít $i_3 < i_2$ takové, že $a_n = a_{i_3} + a_{j_3+j_2+j_1}$ atd. Protože proces „zmenšování“ nemůže probíhat donekonečna, najdeme tak index $i = i_r \leq s$ takový, že $a_n = a_{i_r} + a_{j_r+\dots+j_1}$.

Je jasné, že pokud $j > s$, $i_1, \dots, i_r \leq s$, $n = j + i_1 + \dots + i_r$, pak

$$a_n \geq a_j + a_{i_1} + \dots + a_{i_r}, \quad (1)$$

neboť

$$\begin{aligned}
 a_j + a_{i_1} &\leq a_{j+i_1}, \\
 a_{j+i_1} + a_{i_2} &\leq a_{j+i_1+i_2}, \\
 &\vdots \\
 a_{j+i_1+\dots+i_{r-1}} + a_{i_r} &\leq a_{j+i_1+\dots+i_r} = a_n.
 \end{aligned}$$

Vezměme nyní takový index $i \in \{1, \dots, s\}$, pro nějž je hodnota a_i/i maximální (jestliže je takových více, vezmeme libovolný z nich), a označme ho l . Ukážeme, že toto l má spolu s vhodným N vlastnost požadovanou zadáním úlohy.

Zapišme číslo a_n (pro libovolné $n > s$) s opakovaným využitím úvodního tvrzení ve tvaru

$$a_n = a_{i_1} + a_{j_1} = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{j_2} = \dots = a_{i_1} + \dots + a_{i_r} + a_{j_r}, \quad (2)$$

přičemž $i_1, \dots, i_r \leq s$, $j_r > s$ a a_{j_r} už se dá rozložit na součet dvou členů posloupnosti s oběma indexy nejvýše rovnými s . (S rozkladem na součet tedy skončíme právě o jeden krok dřív, než dostaneme všechny indexy nejvýše rovné s . Připouštíme i možnost $r = 0$ neboli $j_r = n$, což by znamenalo, že už první rozklad $a_n = a_{i_1} + a_{j_1}$ splňoval $i_1 \leq j_1 \leq s$.)

Jestliže se v součtu (2) mezi hodnotami $\{i_1, \dots, i_r\}$ nalézá některý index i aspoň l -krát, nahradíme l jeho výskytů i výskyty indexu l . Dostaneme tak množinu indexů $\{i'_1, \dots, i'_{r'}\}$, přičemž zřejmě $i'_1 + \dots + i'_{r'} = i_1 + \dots + i_r$. Protože $a_l/l \geq a_i/i$, máme $i \cdot a_l \geq l \cdot a_i$, takže

$$a_n = a_{i_1} + \dots + a_{i_r} + a_{j_r} \leq a_{i'_1} + \dots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r}.$$

Podle (1) však platí i opačná nerovnost, proto

$$a_n = a_{i'_1} + \dots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r},$$

přičemž aspoň jeden z indexů $i'_1, \dots, i'_{r'}$ je roven l .

Samozřejmě pro dostatečně velké n se v součtu (2) nějaký index musí nacházet aspoň l -krát; stačí vzít například $n > s^2(l-1) + 2s = N$.⁵ Pro každé $n > N$ proto umíme a_n zapsat ve tvaru (po přeuspořádání indexů)

$$a_n = a_l + a_{i'_2} + \dots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r}. \quad (3)$$

Podle (1) (jestliže n nahradíme hodnotou $n-l$) však máme

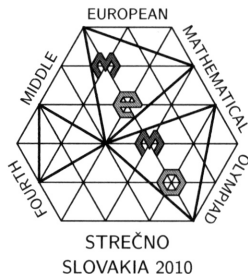
$$a_{n-l} \geq a_{i'_2} + \dots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r},$$

odkud podle (3) plyne $a_n \leq a_l + a_{n-l}$. Ze zadání triviálně platí $a_n \geq a_l + a_{n-l}$, takže musí být $a_n = a_l + a_{n-l}$.

⁵ Různých indexů je jen s , zároveň $j_r \leq 2s$, a kdyby i bylo všech po $l-1$, měli bychom $n = i_1 + \dots + i_r + j_r \leq (1+2+\dots+s)(l-1) + 2s \leq s^2(l-1) + 2s < n$, což je spor.

4. střeoevropská matematická olympiáda

Čtvrtá střeoevropská matematická olympiáda (Middle European Mathematical Olympiad, zkráceně MEMO) se uskutečnila od 9. do 15. září 2010 v obci Strečno na Slovensku za účasti šedesáti studentů z deseti zemí střeoevropského regionu, jmenovitě z Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska. Soutěž je určena studentům středních škol, kteří se v daném kalendářním roce neúčastnili mezinárodní matematické olympiády (MMO) a díky svému věku ještě stále mají šanci zúčastnit se MMO v roce příštím. Výjimku tvoří slovinští účastníci, kteří vzhledem k relativně malému počtu obyvatel své země nejsou předchozí účastí na MMO vázáni.



České družstvo tvořili *Michael Bílý* z Gymnázia Klatovy, *Martin Bucháček* z Gymnázia Luďka Pika v Plzni, *Filip Hlásek* z Gymnázia Plzeň na Mikulášském náměstí, *Martin Töpfer* z Gymnázia Nad Štolou v Praze, *Radek Marciňa* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, *Jakub Solovský* z Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci a *Lukáš Zavřel* z Gymnázia Praha 9 na Chodovické. Vedoucím družstva byl dr. *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem pak dr. *Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci.

Všechny týmy byly ubytovány ve školicím středisku Slovenských železnic, kde se odehrávala i část vlastní soutěže. Olympiáda probíhala podle již zavedeného modelu. První den po příjezdu vybírala jury složená z vedoucích národních delegací příklady pro soutěž, zatímco soutěžící navštívili hrad Strečno. Druhý den byla na pořadu soutěž jednotlivců, která proběhla v přednáškové místnosti zmíněného střediska, kde měli studenti pět hodin času na řešení čtyř úloh. Týmová soutěž pak proběhla další den, tedy v neděli v prostorách Žilinské univerzity. V týmové soutěži má každé národní družstvo k dispozici jednu místnost, kde společně řeší po dobu pěti hodin osm úloh. Již v sobotu večer započala koordinace oprav úloh

(úlohy jsou opraveny jednak vedoucími národních týmů a nezávisle i týmem opravovatelů zajištěným organizátory; při koordinaci se výsledky oprav porovnají a případné neshody se vyřeší) a pokračovala i během neděle. V pondělí dopoledne se jury domluvila na rozdělení medailí, které se řídí podobnými pravidly jako na mezinárodní matematické olympiádě. Odpoledne pak následovala společná plavba s řešiteli na pltích po řece Váhu. V úterý byl program olympiády završen výletem do krásné přírody Malé Fatry a slavnostním zakončením, kterého se zúčastnila mimo jiné významné hosty i rektorka Žilinské univerzity Tatiana Čorejová.

Výsledky českého družstva byly následující: Jakub Solovský a Filip Hlásek získali bronzové medaile (Jakubovi chyběl pouze jeden bod ke stříbrné medaili), Martin Bucháček, Martin Töpfer a Lukáš Zavřel pak získali čestná uznání za jeden bezchybně vyřešený příklad. V týmové soutěži snad lze za úspěch považovat to, že jsme porazili slovenské družstvo.

Umístění		Body za úlohu				Cena
		1	2	3	4	
52.–54.	Michael Bílý	2	1	0	3	6
40.–49.	Martin Bucháček	0	0	0	8	8 H.M.
29.–30.	Filip Hlásek	4	0	0	8	12 bronz
16.–22.	Jakub Solovský	0	0	8	8	16 bronz
40.–49.	Martin Töpfer	0	0	0	8	8 H.M.
40.–49.	Lukáš Zavřel	0	0	0	8	8 H.M.
Celkem		6	1	8	43	58

Detailní výsledky českých studentů včetně bodových zisků za jednotlivé úlohy lze vyčíst z předchozí tabulky, přehled výsledků všech zemí v soutěži jednotlivců je v druhé tabulce. Země jsou v ní seřazeny podle součtu bodů celého družstva podobně jako při neoficiálním pořadí zemí na MMO (číslo v závorce označuje menší počet účastníků).

	I	II	III	HM	body		I	II	III	HM	body
Maďarsko	2	3	1	–	112	Slovensko	1	1	1	1	70
Německo	–	3	3	–	90	Litva	–	1	1	2	63
Polsko	–	2	3	–	83	Rakousko	–	1	1	3	59
Chorvatsko	–	–	4	–	77	Česká republika	–	–	2	3	58
Slovensko	–	–	3	2	70	Švýcarsko (5)	–	–	–	1	19

Nejlépe se tak dařilo družstvům Maďarska, Polska a Německa — Maďarsko vyhrálo jak soutěž družstev, tak soutěž jednotlivců, v níž získalo dvě zlaté medaile. Družstva Polska a Německa zůstala tentokrát bez zla-

tých medailí. Celkové výsledky soutěže družstev jsou uvedeny v následující tabulce.

Umístění	Body za úlohu								Body
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1. Maďarsko	8	0	8	4	8	8	8	8	52
2. Polsko	1	2	8	8	8	0	8	8	43
3. Německo	7	2	1	3	8	8	8	3	40
4. Rakousko	2	8	1	3	8	6	8	1	37
5. Chorvatsko	6	0	8	3	8	0	8	2	35
6. Litva	1	2	0	3	8	8	8	0	36
7. Slovinsko	6	0	7	2	8	0	3	1	27
8. Česká republika	1	2	3	3	8	0	8	1	26
9. Slovensko	2	0	3	4	8	0	5	0	22
10. Švýcarsko	0	0	1	2	0	1	0	0	4

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhl)

Soutěž jednotlivců

1. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y + 1)f(x) + (x + 1)f(y).$$

(Česká republika)

2. Na tabuli jsou napsáni všichni kladní dělitelé kladného celého čísla N . Dva hráči A a B hrají hru, při které se střídají v tazích. V prvním tahu hráč A smaže číslo N . Bylo-li naposled smazáno číslo d , v následujícím tahu je nutno smazat buď dělitele, nebo násobek čísla d . Hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Určete všechna čísla N , pro která hráč A může vyhrát nezávisle na tazích hráče B .

(Polsko)

3. Je dán tětíkový čtyřúhelník $ABCD$ a bod E na jeho úhlopříčce AC takový, že $|AD| = |AE|$ a $|CB| = |CE|$. Necht M je středem kružnice k opsané trojúhelníku BDE . Kružnice k protíná přímku AC v bodech E a F . Dokažte, že přímky FM , AD a BC procházejí týmž bodem.

(Švýcarsko)

4. Nalezňte všechna kladná celá čísla n , která vyhovují následujícím dvěma podmínkám:

- (i) číslo n má alespoň čtyři různé kladné dělitele,
(ii) pro libovolné dva dělitele a, b čísla n takové, že $1 < a < b < n$, dělí jejich rozdíl $b - a$ číslo n .
(Slovensko)

Soutěž družstev

5. Jsou dány tři rostoucí posloupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \dots, \quad b_1, b_2, b_3, \dots, \quad c_1, c_2, c_3, \dots$$

kladných celých čísel. Každé kladné celé číslo je členem právě jedné z těchto tří posloupností. Dále pro každé kladné celé číslo n platí:

- (i) $c_{a_n} = b_n + 1$,
(ii) $a_{n+1} > b_n$,
(iii) číslo $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ je dělitelné dvěma.

Určete čísla a_{2010} , b_{2010} a c_{2010} .
(Litva)

6. Pro každé celé číslo $n \geq 2$ určete největší reálnou konstantu C_n takovou, že pro všechna kladná reálná čísla $a_1, \dots, a_n$ platí

$$\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + C_n(a_1 - a_n)^2.$$

(Švýcarsko)

7. V každém vrcholu pravidelného n -úhelníku stojí pevnost. Ve stejný okamžik každá pevnost vystřelí na jednu ze dvou nejbližších pevností a zasáhne ji. *Výsledkem střelby* rozumíme množinu zasažených pevností, přičemž nerozlišujeme, zda pevnost byla zasažena jednou nebo dvakrát. Označme $P(n)$ počet všech možných výsledků střelby. Ukažte, že pro všechna celá čísla $k \geq 3$ jsou čísla $P(k)$ a $P(k+1)$ nesoudělná.

(Česká republika)

8. Necht n je kladné celé číslo. Čtverec $ABCD$ je rozdělen na n^2 jednotkových čtverců. Každý z nich je dále rozdělen úhlopříčkou rovnoběžnou s BD na dva trojúhelníky. Některé z vrcholů jednotkových čtverců jsou obarveny červeně tak, že každý z $2n^2$ získaných trojúhelníků má alespoň jeden vrchol červený. Určete nejmenší možný počet červených vrcholů takového obarvení.
(Slovensko)

9. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F . Necht bod K je souměrně sdružený s bodem D podle středu vepsané kružnice a přímky DE, FK se protínají v bodě S . Dokažte, že přímky AS a BC jsou rovnoběžné.
(Polsko)

10. Jsou dány body A, B, C, D, E tak, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový a čtyřúhelník $ABDE$ je rovnoběžník. Označme S průsečík úhlopříček AC, BD a F průsečík polopřímek AB, DC . Dokažte, že $|\sphericalangle AFS| = |\sphericalangle ECD|$.
(Chorvatsko)

11. Necht n je nezáporné celé číslo. Označme a_n číslo s desítkovým zápisem

$$1 \underbrace{0 \dots 0}_n 2 \underbrace{0 \dots 0}_n 2 \underbrace{0 \dots 0}_n 1.$$

Ukažte, že $\frac{1}{3}a_n$ lze vyjádřit jako součet dvou třetích mocnin kladných celých čísel, ne však jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.

(Švýcarsko)

12. Je dáno kladné celé číslo n , které není mocninou čísla 2. Dokažte, že existuje kladné celé číslo m s následujícími dvěma vlastnostmi:

- (i) číslo m je součinem dvou po sobě jdoucích kladných celých čísel,
- (ii) desítkový zápis čísla m je tvořen dvěma shodnými bloky n číslic.

(Polsko)

Řešení úloh

1. Dosazením $y = 0$ získáme

$$0 = f(0)(f(x) - x - 2).$$

Snadno lze ověřit, že funkce $f(x) = x + 2$ není řešením, proto $f(0) = 0$. Zvolme nyní v zadané rovnici $x = 1, y = -1$. Dostaneme

$$0 = f(-1)(f(1) - 3),$$

tedy $f(-1) = 0$ nebo $f(1) = 3$.

Jestliže $f(-1) = 0$, po dosazení $x = 2, y = -1$ vyjde $f(-2) = f(1)$. Následně volbou $x = -2, y = 1$ dostaneme $f(-2)f(1) = 3f(-2) - f(1)$, odkud vzhledem k rovnosti $f(-2) = f(1)$ plyne $f(1) \in \{0, 2\}$.

Celkem je tedy $f(1) = a \in \{0, 2, 3\}$. Položíme-li v zadané rovnici $y = 1$, dostaneme pro všechna reálná x

$$f(x+1) = (3-a)f(x) + a(x+1). \quad (1)$$

Volbou $y = 1 + 1/x$, kde $x \neq 0$ je libovolné, pak máme

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) + f(x)f\left(\frac{1}{x} + 1\right) &= \\ &= f(x+1) + \left(\frac{1}{x} + 2\right)f(x) + f\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x+1). \end{aligned}$$

S využitím (1) proto platí

$$\begin{aligned}(3-a)\left(f\left(x+\frac{1}{x}\right)+f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)-(x+1)f\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ = f(x)\left(5-2a-(a-1)\frac{1}{x}\right)+2a+ax.\end{aligned}$$

Odtud s využitím vyjádření, které dostaneme ze zadané rovnice po dosažení $y = 1/x$, po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned}(3-a)\left(a+f(x)\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) &= f(x)\left(5-2a-(a-1)\cdot\frac{1}{x}\right)+2a+ax, \\ f(x)\left(-2+a+\frac{2}{x}\right) &= a^2+ax-a.\end{aligned}$$

Postupným dosazováním $a \in \{0, 2, 3\}$ už snadno odvodíme jednotlivá řešení $f(x) = 0$, $f(x) = x^2 + x$, $f(x) = 3x$.¹ (Zkoušky dosazením do původní rovnice jsou triviální.)

2. Necht $N = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ je prvočíselný rozklad čísla N . V každém tahu hráč smaže nějakého dělitele čísla N , jehož lze reprezentovat k -tici $(b_1, \dots, b_k)$, přičemž $b_i \leq a_i$ (taková k -tice odpovídá číslu $p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$). Podle pravidel hry po k -tici $(b_1, \dots, b_k)$ může následovat $(c_1, \dots, c_k)$, právě když je buď $c_i \leq b_i$ pro všechna i , anebo $a_i \geq c_i \geq b_i$ pro všechna i (samozřejmě jen v případě, že taková k -tice je ještě na tabuli).

Je-li aspoň jedno z čísel a_i liché — bez újmy na obecnosti necht je to a_1 —, má vítěznou strategii hráč B . Tehdy totiž stačí, když na každý tah $(b_1, \dots, b_k)$ hráče A odpoví hráč B tahem

$$(a_1 - b_1, b_2, \dots, b_k).$$

Ukažme, že je to skutečně jeho vítězná strategie: Všechny k -tice odpovídající číslům, která jsou zpočátku na tabuli, lze totiž roztrždit do dvojic uvedeného typu, a pokud A smaže k -tici z nějaké dvojice, B smaže druhou k -tici z téže dvojice ($a_1 - b_1 \neq b_1$, protože a_1 je liché).

Jestliže jsou všechna a_i sudá, má naopak vítěznou strategii hráč A . Pokud B setře k -tici $(b_1, \dots, b_k)$, přičemž aspoň jedno z čísel b_i je menší než a_i ($(b_1, \dots, b_k) \neq (a_1, \dots, a_k)$, neboť to byl první tah hráče A),

¹ Stejný předpis platí vždy i pro hodnotu x z rovnosti $-2 + a + 2/x = 0$, jak lze ověřit podle rovnosti (1), když v ní zaměníme $x + 1$ za x a pro novou hodnotu $x - 1$ využijeme již odvozený předpis.

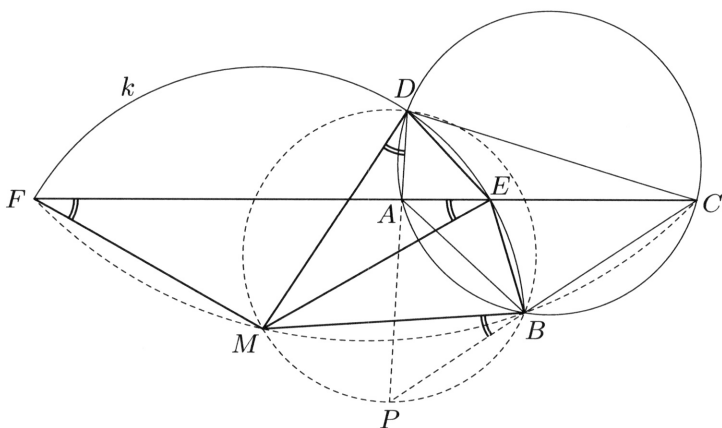
označme j nejmenší index takový, že $b_j < a_j$. Potom strategickou odpovědí hráče A bude k -tice

$$(b_1, \dots, b_{j-1}, a_j - b_j - 1, b_{j+1}, \dots, b_k).$$

I v tomto případě lze všechny původní k -tice (kromě prvního tahu $(a_1, a_2, \dots, a_k)$) roztrždit do dvojic výše popsaného typu, a pokud B smaže nějakou k -tici, A smaže druhou z téže dvojice ($a_j - b_j - 1 \neq b_j$, protože a_j je sudé).

Podmínka, že všechna a_i jsou sudá, je zřejmě splněna právě pro ta N , která jsou druhou mocninou celého čísla. Právě pro ně hráč A tedy může vyhrát bez ohledu na tahy hráče B .

3. Předpokládejme, že bod A leží na úsečce CF (případ, kdy na úsečce AF leží bod C , je analogický). Označme P průsečík přímk BC a AD (obr. 55). Protože $|MB| = |ME|$, $|BC| = |CE|$ a $|ME| = |MF|$, jsou



Obr. 55

trojúhelníky MBC a MEC shodné a trojúhelník EFM rovnoramenný, takže pro velikosti úhlů máme

$$|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle MEC| = 180^\circ - |\sphericalangle MEF| = 180^\circ - |\sphericalangle MFC|.$$

Odtud plyne, že body M, B, C, F leží na jedné kružnici. Protože $|ME| = |MD|$ a $|AE| = |AD|$, jsou trojúhelníky MEA, MDA shodné a $|\sphericalangle AEM| = |\sphericalangle ADM|$, tedy $|\sphericalangle MDP| = |\sphericalangle MBP|$ a čtyřúhelník $MPBD$

je tětívový. Dohromady s tětívovostí čtyřúhelníků $ABCD$, $FMBC$ tak dostáváme

$$\begin{aligned} |\sphericalangle PMB| &= |\sphericalangle PDB| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| = \\ &= |\sphericalangle FCB| = 180^\circ - |\sphericalangle FMB|. \end{aligned}$$

Proto body F , M , P leží v přímce, a přímky AD , BC a FM se tak protínají v jednom bodě (v bodě P).

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení dokážeme, že čtyřúhelník $FMBC$ je tětívový. Protože body M , A leží na ose úsečky DE , platí $|\sphericalangle MDA| = |\sphericalangle MEA|$. Z rovnosti $|ME| = |MF|$ dále plyne $|\sphericalangle MFA| = |\sphericalangle MEA|$, takže čtyřúhelník $MADF$ je tětívový.

Přímky FM , AD , BC jsou tedy chordálami kružnic opsaných tětívovým čtyřúhelníkem $FMBC$, $BCDA$, $ADFM$, z čehož podle známého tvrzení plyne, že se protínají v jednom bodě (který má ke všem třem kružnicím stejnou mocnost).

4. Prvočísla, druhé mocniny prvočísel a číslo 1 nesplňují první podmínku, z dalších úvah je proto vynecháme.

Nejprve předpokládejme, že n je sudé, tj. $n = 2x$ pro nějaké $x \in \mathbb{N}$. Potom podle druhé podmínky $x - 2$ dělí n . Každý dělitel čísla n menší než $x = \frac{1}{2}n$ je nejvýše roven $\frac{1}{3}n$. Proto $x - 2 \leq \frac{1}{3}n = \frac{2}{3}x$, odkud $x \leq 6$. Postupným ověřením všech přípustných hodnot x snadno zjistíme, že vyhovují $n = 6$, $n = 8$ a $n = 12$.

Dále předpokládejme, že n je liché. Necht $n = px$, přičemž p je nejmenší netriviální dělitel čísla n . Číslo p je zřejmě liché prvočíslo a $p+1 \nmid n$, neboť $p+1$ je sudé, proto $x \neq p+1$. Protože $1 < p < x < n$, máme $x - p \mid px$.

Jestliže $p \nmid x$, jsou čísla $x - p$ a x nesoudělná, nutně tedy $x - p \mid p$, odkud $x - p \leq p$. Avšak $x \neq p+1$, tedy $x - p \geq p$ (neboť p je nejmenší netriviální dělitel čísla n). Proto musí platit $x - p = p$, což je ve sporu s tím, že $n = px$ je liché.

Jestliže $p \mid x$, je $x = py$ pro nějaké celé číslo $y > 1$. Z minimálnosti prvočísla p plyne, že $y \geq p$. Podle druhé podmínky $py - p \mid n = p^2y$ neboli $y - 1 \mid py$. Protože $y - 1$ a y jsou nesoudělná, nutně $y - 1 \mid p$, odkud $y \leq p + 1$. Kdyby bylo $y = p + 1$, bylo by y sudým dělitelem čísla n , což nejde. Kdyby bylo $y = p$, bylo by to ve sporu s podmínkou $y - 1 \mid p$ (protože $p \geq 3$). Jiné možnosti vzhledem k nerovnosti $y \geq p$ nejsou.

Odpověď. Oběma podmínkám vyhovují jen čísla 6, 8 a 12.

5. Protože posloupnost (c_n) je rostoucí, platí zřejmě $c_n \geq n$, a proto i $c_{a_n} \geq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Posloupnosti však neobsahují stejné členy, nutně tedy

$$c_{a_n} > a_n \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Posloupnosti budeme „naplňovat“ induktivně. Nejdříve dokážeme, že $a_1 = 1$. Kdyby naopak platilo $a_1 > 1$, muselo by být buď $c_1 = 1$, anebo $b_1 = 1$. Druhá možnost nepřípadá v úvahu, protože podle (i) a (1) máme $b_1 = c_{a_1} - 1 > a_1 - 1$, tedy $b_1 > a_1$ (neboť $b_1 \neq a_1$). Kdyby bylo $c_1 = 1$, bylo by $b_1 \neq 2$ (neboť $b_1 > a_1$), $c_2 \neq 2$ (díky (iii) pro $n = 1$), muselo by tedy být $a_1 = 2$. Potom však $a_2 \neq 3$ (neboť $a_2 > b_1$), $b_1 \neq 3$ (neboť v takovém případě by bylo $c_2 = c_{a_1} = b_1 + 1 = 4$ a neplatilo by (iii) pro $n = 1$) a též $c_2 \neq 3$ (neboť $c_2 = c_{a_1} = b_1 + 1 \neq 3$).

Nyní najdeme v posloupnostech místo pro číslo 2. Kdyby bylo $a_2 = 2$, platilo by podle (ii) $2 = a_2 > b_1$, což není možné. Kdyby bylo $c_1 = 2$, měli bychom podle (i) $2 = c_1 = c_{a_1} = b_1 + 1$, tedy $b_1 = 1$, což také není možné. Zbývá jen možnost $b_2 = 2$. Potom podle (i) dostaneme $c_1 = c_{a_1} = b_1 + 1 = 3$.

n	1	2	3	4	5	...
a_n	1					
b_n	2					
c_n	3					

Díky (iii) je $c_2 \neq 4$. Také $b_2 \neq 4$, neboť jinak by podle (1) a (i) bylo $a_2 < c_{a_2} = b_2 + 1 = 5$ a pro a_2 by už nezůstala žádná hodnota. Je tudíž $a_2 = 4$. Následně podle (ii) máme $a_3 \neq 5$ a také $b_2 \neq 5$, neboť jinak by podle (i) bylo $c_4 = c_{a_2} = b_2 + 1 = 6$ a pro c_2, c_3 by už nezbyly žádné hodnoty. Proto $c_2 = 5$. Stejnou úvahou dostaneme $a_3 \neq 6$, $b_2 \neq 6$, tedy $c_3 = 6$. Dále $a_3 \neq 7$ (podle (ii)), $c_4 \neq 7$ (neboť jinak by podle (i) bylo $7 = c_4 = c_{a_2} = b_2 + 1$ neboli $b_2 = 6$), tedy $b_2 = 7$. Je tudíž $c_4 = c_{a_2} = b_2 + 1 = 8$.

n	1	2	3	4	5	...
a_n	1	4				
b_n	2	7				
c_n	3	5	6	8		

Nyní můžeme znovu zopakovat úvahy z předchozího odstavce: Díky (iii) máme $c_5 \neq 9$. Z (1) a (i) plyne $b_3 \neq 9$ (jinak by bylo

$a_3 < c_{a_3} = b_3 + 1 = 10$ a nezůstala by volná hodnota pro a_3). Proto $a_3 = 9$. Podle (ii) je $a_4 \neq 10$. Z (i) dostaneme $c_9 = c_{a_3} = b_3 + 1$, proto $b_3 \neq 10$ (jinak by nezůstaly volné hodnoty pro $c_5, \dots, c_8$). Je tudíž $c_5 = 10$. Podobně

$$a_4 \neq 11, b_3 \neq 11 \implies c_6 = 11,$$

$$a_4 \neq 12, b_3 \neq 12 \implies c_7 = 12,$$

$$a_4 \neq 13, b_3 \neq 13 \implies c_8 = 13.$$

Konečně, $a_4 \neq 14$ (z (ii)), $c_9 \neq 14$ (jinak by podle (i) bylo $14 = c_9 = c_{a_3} = b_3 + 1$, tedy $b_3 = 13$, což neplatí), tedy $b_3 = 14$ a $c_9 = c_{a_3} = b_3 + 1 = 15$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
a_n	1	4	9							
b_n	2	7	14							
c_n	3	5	6	8	10	11	12	13	15	

Zformulujeme tvrzení, které lze jednoduše dokázat matematickou indukcí. (Formální důkaz, který je triviálním zobecněním předešlých dvou odstavců, vynecháme.) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $i = 1, 2, \dots, 2k - 2$ platí

$$\begin{aligned} a_k &= k^2, & c_{(k-1)^2+i} &= k^2 + i, \\ b_k &= k^2 + 2k - 1, & c_{k^2} &= k^2 + 2k. \end{aligned}$$

Na základě toho už snadno dopočítáme požadované hodnoty:

$$\begin{aligned} a_{2010} &= 2010^2, & b_{2010} &= 2010^2 + 2 \cdot 2010 - 1, \\ c_{2010} &= c_{44^2+74} = 45^2 + 74 = 2099. \end{aligned}$$

6. Pro $1 \leq i < j \leq n$ označme $x_{ij} = a_i - a_j$. Výrazy

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \quad \text{a} \quad \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

budeme zkráceně označovat $\mathcal{K}$ (kvadratický průměr) a $\mathcal{A}$ (aritmetický průměr). Rozdíl jejich čtverců (vyskytující se v zadání) lze po vynásobení číslem n^2 upravit na

$$\begin{aligned} n^2(\mathcal{K}^2 - \mathcal{A}^2) &= n(a_1^2 + \dots + a_n^2) - (a_1 + \dots + a_n)^2 = \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i < j} 2a_i a_j = \\ &= \sum_{i < j} x_{ij}^2 = x_{1n}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} (x_{1i}^2 + x_{in}^2) + \sum_{1 < i < j < n} x_{ij}^2. \end{aligned}$$

Poslední suma je evidentně nezáporná a pro součet uprostřed platí podle triviální nerovnosti $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2$ odhad

$$\sum_{i=2}^{n-1} (x_{1i}^2 + x_{in}^2) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} (x_{1i} + x_{in})^2 = \frac{n-2}{2} \cdot x_{1n}^2.$$

Dohromady tak máme

$$n^2(\mathcal{K}^2 - \mathcal{A}^2) \geq x_{1n}^2 + \frac{n-2}{2} \cdot x_{1n}^2 = \frac{n}{2} \cdot (a_1 - a_n)^2,$$

přičemž rovnost zřejmě nastane, právě když $a_2 = \dots = a_{n-1} = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$. Největší možná hodnota je tudíž

$$C_n = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n}.$$

7. Každou zasaženou pevnost označme černou barvou, zbylé (nezasažené) pevnosti bílou. Protože každá pevnost zasáhne jednu ze sousedních pevností, je vyloučeno, aby některá pevnost měla dva bílé sousedy. Číslo $P(n)$ je tedy počtem takových obarvení n pevností černou a bílou barvou, že neexistují dvě bílé pevnosti, které by mezi sebou měly právě jednu pevnost. Na druhou stranu pokud takové dvě bílé pevnosti neexistují, snadno najdeme odpovídající způsob střelby, který k takovému obarvení vede: stačí zajistit, že do každé černé pevnosti střelí přinejmenším ta pevnost, která s ní sousedí po směru otáčení hodinových ručiček.

Pospojujeme-li nyní pevnosti ob jednu, dostaneme v případě lichého n „kružnici“, na níž žádné dvě *sousední* pevnosti nebudou bílé. V případě sudého n dostaneme takovým spojením „kružnice“ dvě (každé z nich bude patřit právě polovina pevností), na nichž také žádné dvě sousední pevnosti nebudou bílé. Označíme-li $K(m)$ počet obarvení m pevností na kružnici černou a bílou barvou tak, že žádné dvě sousední pevnosti nejsou bílé, bude zřejmě platit $P(n) = K(n)$ pro liché n a $P(n) = K(\frac{1}{2}n)^2$ pro sudé n .

Pro hodnoty $K(n)$ odvodíme rekurentní vztah:

Počet vyhovujících obarvení s n -tou pevností černou je totiž roven počtu vyhovujících obarvení $n - 1$ pevností (jednoduše vložíme černou pevnost mezi první a $(n - 1)$ -ní pevnost) zvětšenému o počet obarvení $n - 1$ pevností nemajících žádné dvě sousední pevnosti bílé kromě první a $(n - 1)$ -ní (vložení černé pevnosti mezi tyto dvě bílé pevnosti získáme vyhovující obarvení). Počet možností v druhém případě je vlastně stejný jako počet vyhovujících obarvení $n - 2$ pevností s první pevností bílou (stačí spojit ony dvě sousední bílé pevnosti do jedné).

Počet vyhovujících obarvení s n -tou pevností bílou je roven počtu takových obarvení $n-1$ pevností, že žádné dvě sousední nejsou bílé a prvá a $(n-1)$ -ní jsou černé (bílou pevnost můžeme vložit jen mezi dvě černé). Tento počet je roven počtu vyhovujících obarvení $n-2$ pevností, v nichž je první černá (opět můžeme dvě sousední černé pevnosti spojit do jedné).

Dohromady tedy

$$\begin{aligned} K(n) &= K(n-1) + K_b(n-2) + K_c(n-2) = \\ &= K(n-1) + K(n-2), \end{aligned}$$

přičemž K_b a K_c je počet vyhovujících obarvení s první pevností bílou, resp. černou.

Přímo dovedeme spočítat hodnoty $K(2) = 3$, $K(3) = 4$, $K(4) = 7$, tedy

$$K(2) = F(4) - F(0), \quad K(3) = F(5) - F(1), \quad K(4) = F(6) - F(2)$$

a indukci snadno dokážeme, že $K(n) = F(n+2) - F(n-2)$, přičemž $F(k)$ je k -tý člen Fibonacciho posloupnosti ($F(0) = 0$, $F(1) = F(2) = 1$, $\dots$). Navíc $(K(2), K(3)) = 1$ a pro $n \geq 3$ máme

$$\begin{aligned} (K(n), K(n-1)) &= (K(n) - K(n-1), K(n-1)) = \\ &= (K(n-2), K(n-1)) = \dots = 1. \end{aligned}$$

Podobně ukážeme, že pro každé sudé $n = 2a$ je číslo $P(n) = K(a)^2$ nesoudělné s oběma čísly $P(n+1) = K(2a+1)$ a $P(n-1) = K(2a-1)$:

$$\begin{aligned} (K(a), K(2a+1)) &= (K(a), F(2)K(2a) + F(1)K(2a-1)) = \\ &= (K(a), F(3)K(2a-1) + F(2)K(2a-2)) = \dots = \\ &= (K(a), F(a+1)K(a+1) + F(a)K(a)) = (K(a), F(a+1)) = \\ &= (F(a+2) - F(a-2), F(a+1)) = \\ &= (F(a+2) - F(a+1) - F(a-2), F(a+1)) = \\ &= (F(a) - F(a-2), F(a+1)) = (F(a-1), F(a+1)) = \\ &= (F(a-1), F(a)) = 1, \\ (K(a), K(2a-1)) &= (K(a), F(2)K(2a-2) + F(1)K(2a-3)) = \\ &= (K(a), F(3)K(2a-3) + F(2)K(2a-4)) = \dots = \\ &= (K(a), F(a)K(a) + F(a-1)K(a-1)) = (K(a), F(a-1)) = \\ &= (F(a+2) - F(a-2), F(a-1)) = (F(a+2) - F(a), F(a-1)) = \\ &= (F(a+2) - F(a+1), F(a-1)) = (F(a), F(a-1)) = 1, \end{aligned}$$

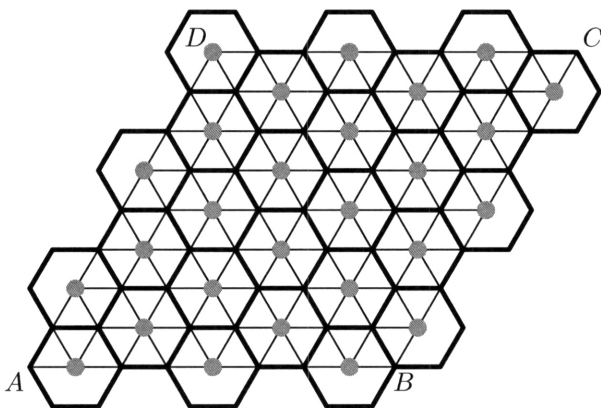
čímž je úloha vyřešena.

8. Nejmenší možný počet červených vrcholů je

$$\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor.$$

Nejdříve ukážeme vyhovující obarvení s tímto počtem. V druhé části dokážeme, že menší počet červených vrcholů není možný.

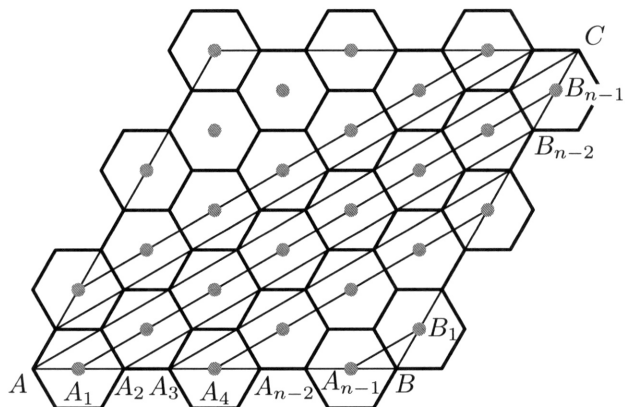
Místo čtverce budeme uvažovat kosočtverec $ABCD$, v němž namísto pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků budou rovnostranné trojúhelníky. Kosočtverec pokryjeme pravidelnými jednotkovými šestiúhelníky tak, aby vrchol A ležel ve vrcholu šestiúhelníku. Střed každého šestiúhelníku obarvíme červenou (na obr. 56 šedou). Zřejmě každý rovnostranný trojúhelník leží v některém šestiúhelníku, a má tedy červený vrchol.



Obr. 56

Označme a_n počet červených vrcholů při tomto obarvení. Stranu AB rozdělme body $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ na n jednotkových úseků. Podobně označme $B_1, \dots, B_{n-1}$ body na BC , $C_1, \dots, C_{n-1}$ na CD a $D_1, \dots, D_{n-1}$ na DA .

Každý z n vrcholů na přímce A_1B_{n-1} je červený (obr. 57). Rovnoběžky A_2B_{n-2} , A_3B_{n-3} nemají žádné červené vrcholy. Rovnoběžka A_4B_{n-4} obsahuje o 3 červené vrcholy méně než A_1B_{n-1} , tj. $n-3$. Podobně leží červené vrcholy na přímkách A_7B_{n-7} , $A_{10}B_{n-10}$, atd. Jejich počet pokaždé klesne o 3. Z druhé strany úhlopříčky AC máme $n-1$ červených vrcholů na C_2D_{n-2} , $n-4$ na C_5D_{n-5} atd.



Obr. 57

Celkový počet červených vrcholů je tedy

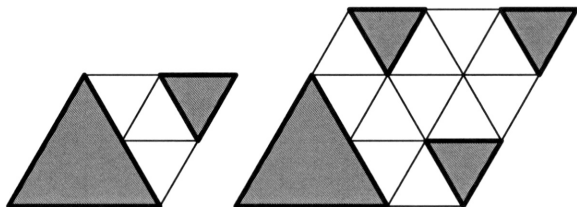
$$a_n = (n + (n - 3) + (n - 6) + \dots) + ((n - 1) + (n - 4) + (n - 7) + \dots).$$

Je-li $n = 3k + 1$, je $a_n = \frac{1}{3}n(n + 2)$, takže pro $n = 3k + 2$ dostaneme $a_n = \frac{1}{3}(n + 1)^2$ a pro $n = 3k + 3$ pak $a_n = \frac{1}{3}n(n + 2)$. Obecně můžeme tento počet vyjádřit vztahem $a_n = \lfloor \frac{1}{3}(n + 1)^2 \rfloor$.

Označme b_n nejmenší možný počet červených vrcholů. Zřejmě $b_1 = 1$. V každém rovnostranném trojúhelníku složeném ze čtyř jednotkových trojúhelníků (obr. 58) musejí být zřejmě obarveny červenou aspoň dva vrcholy. Každý z malých vyznačených trojúhelníků na obr. 59 musí obsahovat aspoň jeden červený vrchol a větší vyznačené trojúhelníky aspoň dva. Proto $b_2 \geq 2 + 1 = 3$ a $b_3 \geq 1 + 1 + 1 + 2 = 5$.



Obr. 58



Obr. 59

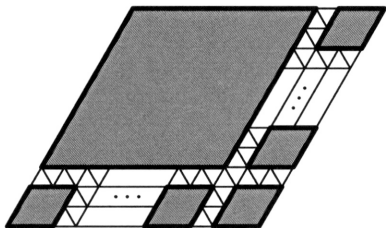
Pro $n \in \{1, 2, 3\}$ jsme ukázali, že $b_n \geq a_n$, nutně tedy $b_n = a_n$. Pro zbylé hodnoty n použijeme matematickou indukci, jejíž první krok jsme už učinili. V druhém kroku dokážeme, že pokud $b_{n-3} = a_{n-3}$, pak $b_n = a_n$.

Nechť $n = 3k + 2$. Jak ukazuje obr. 60a, potřebujeme aspoň $b_{n-3} + (2k + 1)b_2$ červených vrcholů, tj.

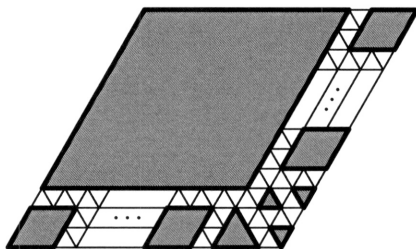
$$b_n \geq b_{n-3} + (2k + 1) \cdot 3 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{3} \right\rfloor + 2n - 1 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = a_n.$$

Je-li $n = 3k + 3$, dostáváme odhad (obr. 60b)

$$\begin{aligned} b_n &\geq b_{n-3} + 2kb_2 + 2 + 1 + 1 + 1 = \\ &= \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{3} \right\rfloor + 2(n-3) + 5 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = a_n. \end{aligned}$$



Obr. 60a

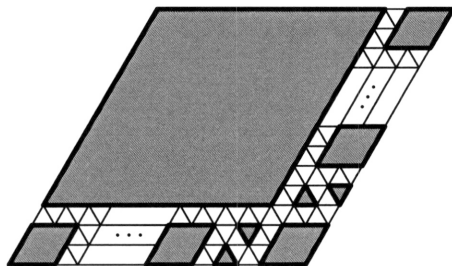


Obr. 60b

Konečně, je-li $n = 3k + 1$, máme podle obr. 60c

$$\begin{aligned} b_n &\geq b_{n-3} + (2(k-1) + 1)b_2 + 1 + 1 + 1 + 1 = \\ &= \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{3} \right\rfloor + 2n - 1 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = a_n. \end{aligned}$$

Ve všech případech platí $b_n \geq a_n$, je tudíž $b_n = a_n$.



Obr. 60c

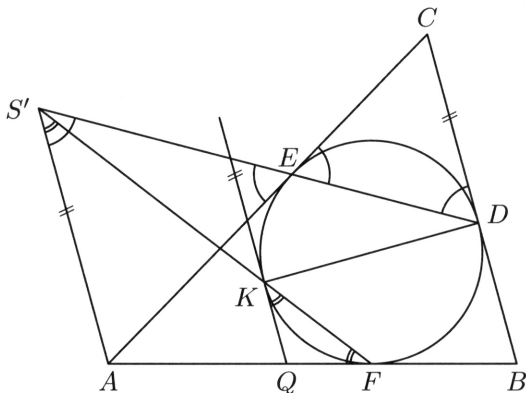
9. Necht S' je průsečík přímky FK a rovnoběžky se stranou BC vedené bodem A . Naší úlohou je dokázat, že body S' , D , E leží na jedné přímce. Průsečík strany AB s tečnou k vepsané kružnici vedenou bodem K označme Q (obr. 61). Zřejmě $KQ \parallel BC$. Proto

$$|\sphericalangle AS'F| = |\sphericalangle QKF| = |\sphericalangle QFK|,$$

odkud $|AS'| = |AF| = |AE|$. Platí též $|DC| = |EC|$ a $BC \parallel AS'$, proto

$$|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CED| = |\sphericalangle AES'| = |\sphericalangle AS'E|,$$

takže body S' , D , E vskutku leží na jedné přímce (příčce rovnoběžek $BC \parallel AS'$).



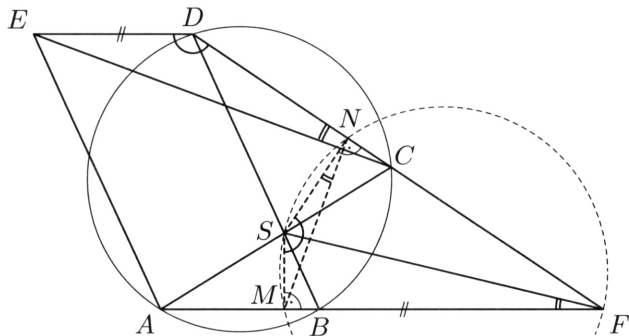
Obr. 61

Jiné řešení. Označme $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ a I střed vepsané kružnice. Pro úhly v tětiovém čtyřúhelníku $IFBD$ platí

$$|\sphericalangle IDF| = |\sphericalangle IFD| = \frac{1}{2}\beta = |\sphericalangle AFS|.$$

Protože $|\sphericalangle FDS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle FIE| = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ ($IEAF$ je rovněž tětiový) a $|\sphericalangle FIA| = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, jsou trojúhelníky AFI a SFD podobné. Pro poměr podobnosti máme $|AF| : |FS| = |IF| : |DF|$, a tak z rovnosti $|\sphericalangle AFS| = |\sphericalangle IFD|$ plyne podobnost trojúhelníků AFS , IFD , odkud $|AF| = |AS| = |AE|$. Z podobnosti trojúhelníků ASE , CDE pak dostáváme $|\sphericalangle SAE| = 180^\circ - \alpha - \beta$, a tedy $|\sphericalangle BAS| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ$.

10. Označme M a N paty kolmic z bodu S na přímky AB a CD . Čtyřúhelník $SMFN$ je tětivistý, protože dva jeho úhly jsou pravé (obr. 62).



Obr. 62

Z obvodových úhlů nad tětivistou SM opsané kružnice plyne $|\sphericalangle AFS| = |\sphericalangle MFS| = |\sphericalangle MNS|$. Potřebujeme dokázat, že $|\sphericalangle MNS| = |\sphericalangle ECD|$. K tomu stačí ukázat podobnost trojúhelníků MSN a EDC .

Protože čtyřúhelník $ABCD$ je tětivistý, trojúhelníky ABS a DCS jsou podobné. Úsečky SM , SN jsou výškami těchto trojúhelníků, proto $|SM| : |SN| = |AB| : |CD| = |ED| : |CD|$. Pro velikosti úhlů navíc máme

$$|\sphericalangle MSN| = 180^\circ - |\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle EDC|,$$

takže trojúhelníky MSN a EDC jsou vskutku podobné.

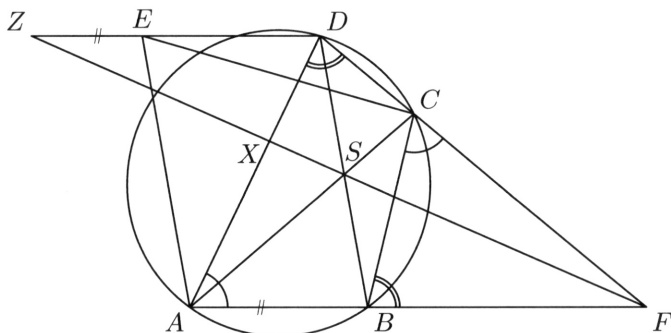
Jiné řešení. Přímka FS protíná přímky AD , DE postupně v bodech, které označíme X a Z (obr. 63). Dále označme $|\sphericalangle BAD| = \alpha$, $|\sphericalangle ADF| = \delta$, $|AB| = a$, $|CD| = c$. Protože $ZD \parallel AF$, stačí dokázat, že trojúhelníky CDE a ZDF jsou podobné. Tyto trojúhelníky mají jeden úhel společný, takže zbývá ukázat, že $|ZD| : |FD| = |CD| : |ED| = c : a$.

Podle sinové věty v trojúhelníku BFC platí $|CF| : |BF| = \sin \delta : \sin \alpha$, neboť

$$\begin{aligned} |\sphericalangle FBC| &= 180^\circ - |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA| = \delta, \\ |\sphericalangle FCB| &= 180^\circ - |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BAD| = \alpha. \end{aligned}$$

Z Cèvovy věty pro trojúhelník AFD a bod S plyne

$$1 = \frac{|DX|}{|XA|} \cdot \frac{|AB|}{|BF|} \cdot \frac{|FC|}{|CD|} = \frac{|DX|}{|XA|} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \alpha}. \quad (1)$$



Obr. 63

Z podobnosti trojúhelníků AFX , DZX máme $|ZD| = |AF| \cdot |DX|/|AX|$ a ze sinové věty v trojúhelníku AFD dostáváme $|FD| = |AF| \cdot \sin \alpha / \sin \delta$. Pro zkoumaný poměr $|ZD| : |FD|$ tak s využitím (1) platí

$$\frac{|ZD|}{|FD|} = \frac{\sin \delta}{\sin \alpha} \cdot \frac{|DX|}{|AX|} = \frac{c}{a}.$$

11. Nejdříve dokážeme, že $\frac{1}{3}a_n$ není pro žádné n součtem dvou čtverců. Druhé mocniny dávají při dělení čtyřmi jen zbytky 0 a 1, takže čísla, která jsou součtem dvou čtverců, mohou po dělení čtyřmi dávat jen zbytky 0, 1 nebo 2. Číslo $\frac{1}{3}a_n$ však dává zbytek 3, neboť a_n dává zbytek 1.²

Po chvíli zkoušení najdeme vztah

$$\frac{a_n}{3} = \left(\frac{10^{n+1} + 2}{3} \right)^3 + \left(\frac{2 \cdot 10^{n+1} + 1}{3} \right)^3,$$

který po triviální úpravě plyne z vyjádření $a_n = 10^{3n+3} + 2 \cdot 10^{2n+2} + 2 \cdot 10^{n+1} + 1$. Obě čísla v závorkách jsou přirozená, neboť $10^{n+1} \equiv 1 \pmod{3}$, takže $\frac{1}{3}a_n$ se dá vždy vyjádřit jako součet dvou třetích mocnin.

12. Podle Mihailescuovy věty³ jediným řešením rovnice $x^a - y^b = 1$ v oboru celých čísel větších než 1 jsou čísla $x = b = 3$, $y = a = 2$.

² Jinou možností, jak určit zbytek $\frac{1}{3}a_n$ po dělení čtyřmi, je uvědomit si, že toto číslo pro $n \geq 1$ vždy končí dvojčíslím 67.

³ Je též známa jako Catalanova hypotéza, dokázána byla v roce 2002.

Proto $10^n + 1$ nemůže být druhou ani vyšší mocninou prvočísla. Podle zadání má n aspoň jednoho lichého dělitele $k \geq 3$. Jestliže $n = kl$, je

$$10^n + 1 = (10^l)^k + 1 = (10^l + 1) ((10^l)^{k-1} - (10^l)^{k-2} + \dots - 10^l + 1),$$

takže $10^n + 1$ má netriviálního dělitele $10^l + 1$, a nemůže to tudíž být prvočíslo. Z uvedeného plyne, že existují nesoudělná čísla a, b větší než 1 taková, že $10^n + 1 = ab$.

Naši úlohou je dokázat existenci takových přirozených čísel t a s , že

$$m = (10^n + 1)t = abt = s(s - 1),$$

příčemž dekadický zápis čísla t obsahuje právě n číslic.

Nejdříve ukážeme, že existuje přirozené číslo s dělitelné číslem a , pro které $s \equiv 1 \pmod{b}$. Čísla $a, 2a, \dots, (b-1)a, ba$ jsou všechna násobky a a vzhledem k nesoudělnosti čísel a, b dávají při dělení číslem b různé zbytky. Proto právě jedno z nich dává zbytek 1 a můžeme ho vzít jako s . Podobně najdeme s' , které je násobkem b a splňuje $s' \equiv 1 \pmod{a}$.

Čísla s, s' jsou kladná a menší než 10^n . Obě čísla $s(s-1)$ a $s'(s'-1)$ jsou dělitelná číslem ab a menší než 10^{2n} . Navíc $s+s' \equiv 1 \pmod{ab}$. Číslo $s+s'$ je větší než 1 a menší než $2 \cdot 10^n$. Nutně tedy $s+s' = ab+1 = 10^n+2$, takže aspoň jedno z čísel s, s' je větší než $5 \cdot 10^{n-1}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je to číslo s . Potom $s(s-1) > 25 \cdot 10^{2n-2}$, takže $s(s-1)$ má právě $2n$ číslic a splňuje všechny potřebné podmínky.

17. středoevropská olympiáda v informatice

Ve dnech 12.–19. 7. 2010 se konal v Košicích na Slovensku 17. ročník Středoevropské olympiády v informatice (CEOI 2010 – Central European Olympiad in Informatics). Soutěže se zúčastnilo 40 studentů – čtyřčlenná družstva ze všech sedmi zemí středoevropského regionu (Česká republika, Chorvatsko, Maďarsko, Německo, Polsko, Rumunsko, Slovensko) a navíc jako hosté družstva z Bulharska a Švýcarska a druhé soutěžní družstvo pořadající země.



Reprezentační družstvo České republiky bylo sestaveno na základě výsledků dosažených soutěžícími v ústředním kole 59. ročníku Matematické olympiády – kategorie P (programování). Zatímco čtyři nejlepší řešitelé ústředního kola MO kategorie P pojedou soutěžit na celosvětovou soutěž IOI 2010 v srpnu do Kanady, pro účast na CEOI 2010 bylo jako obvykle vybráno družstvo složené z dalších úspěšných řešitelů naší národní olympiády, kteří letos ještě nebudou maturovat a na CEOI tak mohou získat cenné zkušenosti, které uplatní v různých programátorských soutěžích v průběhu dalšího školního roku. České družstvo pro 17. středoevropskou olympiádu v informatice mělo následující složení:

Lukáš Folwarczný, student Gymnázia v Havířově,

Filip Hlásek, student Gymnázia na Mikulášském nám. v Plzni,

Michal Mojžík, student SPŠ a VOŠ v Chomutově,

Štěpán Šimsa, student Gymnázia Josefa Jungmanna v Litoměřicích.

Vedoucími české delegace byli jmenováni doc. RNDr. *Daniel Král*, Ph.D., a doc. RNDr. *Pavel Töpper*, CSc., oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Vlastní soutěž CEOI 2010 byla jako obvykle rozdělena do dvou soutěžních dnů, v každém z nich studenti řešili tři soutěžní úlohy a na práci měli vymezen čas 5 hodin. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat programy a odesílat je k vyhodnocení. Výsledné programy

jsou testovány pomocí připravené sady testovacích dat a se stanovenými časovými limity. Tím je zajištěna nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší testy. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů.

Pořadatelé olympiády připravili soutěžní úlohy velmi pečlivě, takže celý proces přípravy úloh, upřesnění jejich formulací a překladu zadání úloh do národních jazyků večer před soutěží probíhal velmi rychle. Soutěžící měli jen minimum dotazů k zadání úloh a neobjevily se ani žádné oprávněné protesty proti hodnocení. Soutěžní úlohy byly dobře navrženy, byly věcně zajímavé, ale byly výrazně obtížnější než obvykle.

Pro všechny účastníky CEOI připravují pořadatelé vždy také doprovodný program. Absolvovali jsme prohlídku historického centra Košic a místních památek, navštívili jsme i zajímavé letecké muzeum v Košicích. Jeden celodenní turistický výlet mířil do oblasti Vysokých Tater a druhý na zámek Krásna Hôrka a do Zádielské doliny. V obou případech si mohl každý účastník sám zvolit jednu ze dvou nabízených variant náročnosti výletu.

Večer před odjezdem se konalo slavnostní zakončení soutěže spojené s vyhlášením výsledků. Každá ze soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkově bylo teoreticky možné získat až 600 bodů. To se ovšem vzhledem k velké náročnosti úloh nikomu nepodařilo, celkový vítěz dosáhl výsledku 460 bodů. Podle pravidel CEOI obdrží na závěr soutěže lepší polovina účastníků některou z medailí, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se udělují přibližně v poměru 1 : 2 : 3 (pochopitelně s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili). Letos byly uděleny 3 zlaté, 7 stříbrných a 10 bronzových medailí. Z reprezentantů České republiky získal medaili pouze Filip Hlášek, který se umístil na 17. místě. Výsledky našich soutěžících:

17. Filip Hlášek	210 bodů	bronz
21. Štěpán Šimsa	125 bodů	–
26.–28. Lukáš Folwarczný	95 bodů	–
Michal Mojžík	95 bodů	–

Zlaté medaile získali reprezentanti Polska, Bulharska a Chorvatska. Středoevropská olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, žádné po-

řadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno. Veškeré informace o soutěži, texty soutěžních úloh i podrobné výsledky všech účastníků lze nalézt na adrese <http://ceoi2010.ics.upjs.sk/>.

Následující, v pořadí 18. ročník CEOI se bude konat v červenci 2011 v Polsku. Tamní organizátoři již nyní pozvali všechny země zúčastněné na CEOI 2010 k účasti v příštím ročníku soutěže. Další střeoevropské olympiády v informatice uspořádají Maďarsko v roce 2012 a Chorvatsko v roce 2013, v následujícím roce 2014 případně pořadatelsví na Českou republiku.

22. mezinárodní olympiáda v informatice

Dvacátý druhý ročník Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2010 se konal od 14. do 21. srpna 2009 ve Waterloo v Kanadě.

Na olympiádu do Waterloo přijely delegace z 84 zemí celého světa.

Z každé země se IOI mohou zúčastnit čtyři soutěžící a dva vedoucí, celkově letos soutěžilo 300 studentů. České družstvo bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola 59. ročníku Matematické olympiády – kategorie P a bylo tvořeno těmito studenty:

Vlastimil Dort, absolvent Gymnázia v Praze 9, Špitálská,
Hynek Jemelík, student Gymnázia v Brně, tř. Kpt. Jaroše,
David Klačka, absolvent Gymnázia v Brně, tř. Kpt. Jaroše,
Jan Polášek, student Gymnázia v Turnově.

Vedoucími české delegace na IOI 2010 byli jmenováni Mgr. *Zdeněk Dvořák*, Ph.D., a Bc. *Zbyněk Falt*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Již tradičně se naši účastníci IOI připravovali na olympiádu společně s reprezentanty vybranými pro Středoevropskou olympiádu v informatice na týdenním soustředění CPSPC (Czech-Polish-Slovak Preparation Camp), které bylo letos pořádáno na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze a zúčastnili se ho vybraní studenti ze všech tří zemí.

Během prvního dne pobytu v Kanadě proběhlo slavnostní zahájení soutěže a studenti měli také příležitost seznámit se podrobně s počítači a se softwarovým prostředím, ve kterém budou pracovat při soutěži. Vlastní soutěž se konala jako obvykle ve dvou dnech, oddělených jedním dnem odpočinku. Po druhém soutěžním dnu následoval jeden den věnovaný výletu k Niagarským vodopádům a v závěrečném dnu pobytu se uskutečnilo slavnostní vyhlášení výsledků.

Soutěž IOI probíhá podobným způsobem, jako praktická část ústředního kola naší Matematické olympiády – kategorie P. Každý soutěžící má přidělen osobní počítač, na kterém řeší zadané úlohy. V každém dni



má na práci vymezen čas 5 hodin. Úlohy je třeba dovést až do tvaru odladěného programu, hotové programy se odevzdávají k vyhodnocení prostřednictvím soutěžního prostředí. Odevzdané programy se testují pomocí předem připravené sady testovacích dat. Prováděné testy jsou navíc omezeny časovými limity, aby se kromě otestování správnosti odlišila i časová efektivita algoritmu použitého jednotlivými účastníky soutěže. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky zcela správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší testy. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů.

Novinkou oproti minulým letům bylo průběžné vyhodnocování výsledků, kdy již během soutěže měli soutěžící možnost si nechat úlohu ohodnotit a ověřit si, kolik bodů za ni získají. Jedná se o podobný systém, jaký používáme v posledních letech u nás v Matematické olympiádě – kategorie P pro praktické úlohy domácího kola. Krátce po odevzdání vypracovaného programu do vyhodnocovacího systému se soutěžící dozví hodnocení svého řešení a má pak ještě možnost řešení opravit a odevzdat řešení téže úlohy opakovaně vícekrát. Divákům (ale nikoliv soutěžícím) pak byla k dispozici i průběžná výsledková listina.

Další změnou bylo rozdělení úloh do několika podúloh, lišících se velikostmi vstupních dat či omezeními na jejich strukturu. Za každou takovou podúlohu bylo možné získat body pouze tehdy, když program odpověděl na všechny její testovací vstupy korektně a v daném časovém limitu. Jedna z podúloh každé úlohy byla záměrně velmi jednoduchá. Soutěžící z programátorsky méně vyspělých zemí tak dostali velmi reálnou šanci vyřešit každý den aspoň část z každé úlohy. To se také projevilo na neobvykle vysokých bodových hranicích nutných pro získání ceny.

Každá z osmi soutěžních úloh byla hodnocena typicky maximálně 100 body. Výjimkou byly dvě úlohy, pro něž není známo optimální řešení a které byly bodovány relativně vůči nejlepšímu řešení známému organizátorům; za ně bylo možno získat až 110 bodů (v jedné z těchto úloh skutečně nejlepší z účastníků překonali hranici 100 bodů). Vítěz soutěže Gennadij Karotkevič z Běloruska dosáhl výsledku 778 bodů. Na základě přesně stanovených pravidel se na IOI podle dosažených bodů rozdělují medaile. Některou z medailí obdrží nejvýše polovina účastníků soutěže, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se udělují přibližně v poměru 1 : 2 : 3 (s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili). Na letošní IOI bylo rozděleno celkem 25 zlatých, 52 stříbrných a 73 bronzových medailí.

Výsledky našich soutěžících:

8.	David Klaška	709 bodů	zlato
16.	Hynek Jemelík	693 bodů	zlato
49.	Vlastimil Dort	656 bodů	stříbro
101.	Jan Polášek	596 bodů	bronz

Mezinárodní olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců a žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno. V neoficiálním pořadí zemí by však letos Českou republiku předstihli pouze USA, Rusko, Čína a Bulharsko. Jedná se o náš nejlepší výsledek dosažený na IOI od roku 1995.

Všechny podrobnosti o soutěži, texty soutěžních úloh i jejich řešení a celkové výsledky lze nalézt na adrese <http://www.ioi2010.org>. Příští ročníky IOI se budou konat v Thajsku (2011), Itálii (2012), Austrálii (2013), Tchaj-wanu (2014) a Kazachstánu (2015). Pořadatelé IOI 2011 z Thajska na místě pozvali všechny delegace zúčastněné na IOI 2010, aby se zúčastnily také následujícího ročníku soutěže. Ten proběhne ve dnech 22.–29. 7. 2011 ve městě Pattaya.

Mgr. Zdeněk Dvořák, Ph.D.,
RNDr. Karel Horák, CSc., RNDr. Daniel Král, Ph.D.,
Mgr. Peter Novotný, Mgr. Martin Panák, Ph.D.,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Svrček, CSc.,
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.,

**PADESÁTÝ DEVÁTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydala Univerzita Palackého v Olomouci,
Biskupské nám. 1, 771 11 Olomouc
Sazbu programem T_EX připravil Karel Horák
Vytisklo Polygrafické středisko
Univerzity Palackého v Olomouci
1. vydání
Olomouc 2012

ISBN 978-80-244-3018-8

NEPRODEJNÁ PUBLIKACE

matematická olympiáda

MO

ISBN 978-80-244-3018-8

ISBN 978-80-244-3018-8



9 788024 430188