

60. ročník Matematické olympiády na středních školách

Zdeněk Dvořák (editor); Zbyněk Falt (editor); Karel Horák (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 60. ročník Matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2010/2011. 52. Mezinárodní matematická olympiáda. 5. Středoevropská matematická olympiáda. 23. Mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405207>

Terms of use:

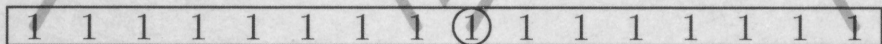
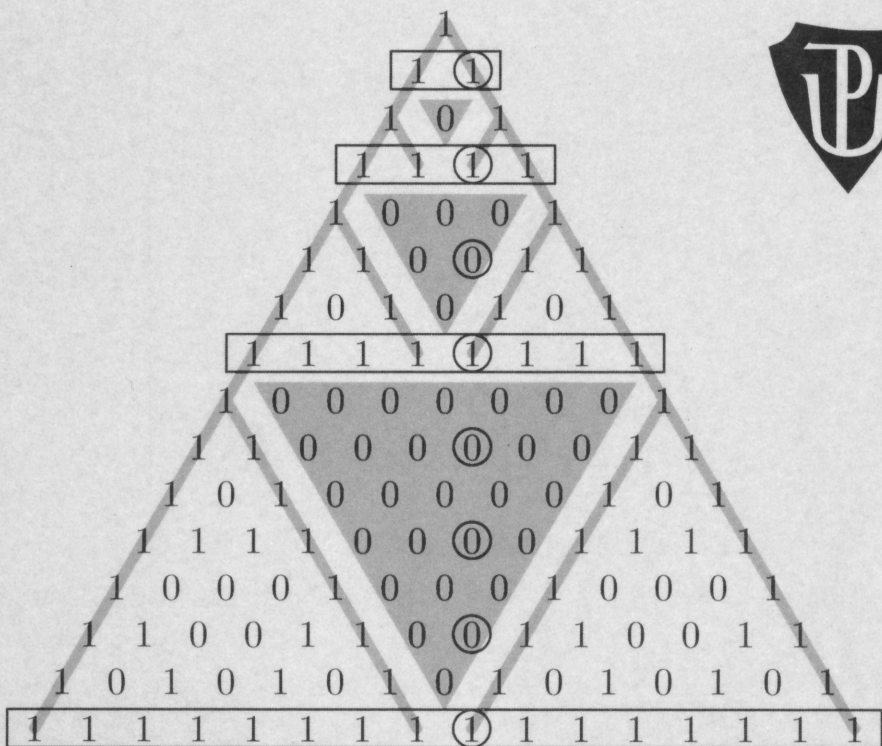
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

**60. ročník matematické olympiády
na středních školách**



ŠEDESÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2010/2011

MEZINÁRODNÍ STŘETNUTÍ ČESKO-POLSKO-SLOVENSKÉ

52. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

5. STŘEDOEVROPSKÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

23. MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE



UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI

Vydání této publikace je spolufinancováno Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky v rámci projektu OPVK MATES
(reg. č. CZ.1.07/2.3.00/09.0017)

Za přispění spolupracovníků zpracovali

Mgr. Zdeněk Dvořák, Ph.D., Mgr. Zbyněk Falt,
RNDr. Karel Horák, CSc., Mgr. Peter Novotný, Ph.D., Mgr. Martin Panák, Ph.D.,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.

© Karel Horák, editor, 2015

ISBN 978-80-244-4482-6

Obsah

O průběhu 60. ročníku matematické olympiády	5
Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P	12
Výsledky ústředního kola 60. ročníku MO kategorie A	26
Výsledky ústředního kola 60. ročníku MO kategorie P	27
Kategorie C	29
Texty úloh	29
Řešení úloh	32
Kategorie B	44
Texty úloh	44
Řešení úloh	47
Kategorie A	58
Texty úloh	58
Řešení úloh	62
Kategorie P	100
Texty úloh	100
Kategorie Z5	125
Texty úloh	125
Kategorie Z6	128
Texty úloh	128
Kategorie Z7	131
Texty úloh	131
Kategorie Z8	134
Texty úloh	134
Kategorie Z9	137
Texty úloh	137
Přípravná soustředění před 52. MMO	142
Úlohy zadané na přípravném soustředění	143
Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské	146
Texty soutěžních úloh	147
Řešení úloh	148
52. mezinárodní matematická olympiáda	153
Texty soutěžních úloh	157
Řešení soutěžních úloh	158
5. střeoevropská matematická olympiáda	167
Texty soutěžních úloh	169
Řešení úloh	171
18. střeoevropská olympiáda v informatice	184
23. mezinárodní olympiáda v informatice	186

O průběhu 60. ročníku matematické olympiády

Šedesátý ročník matematické olympiády se uskutečnil v České republice ve školním roce 2010/11. Hlavním pořadatelem soutěže bylo (stejně jako v předchozích letech) Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, dále Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd ČR. Průběh soutěže zajišťovala stejně jako v předešlých ročnících soutěže Ústřední komise MO (ÚK MO), které předsedal doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., s místopředsedy RNDr. *Jaroslavem Švrčkem*, CSc. (pro kategorie A, B, C), RNDr. *Vojtěchem Žádníkem*, Ph.D. (pro kategorie Z9–Z5) a doc. RNDr. *Pavlem Töpferem*, CSc. (pro kategorii P). Tajemníkem ÚK MO byl RNDr. *Karel Horák*, CSc.

Přípravou a výběrem úloh pro jednotlivé kategorie a soutěžní kola byly pověřeny Ústřední komisí MO dvě úlohové komise (jedna pro kategorie A, B, C a druhá pro kategorie Z). Obě komise se sešly na svých pracovních seminářích dvakrát ročně (v prosinci 2010 a v květnu 2011). Ve spolupráci se slovenskými kolegy zabezpečují obě komise s více než ročním předstihem výběr úloh pro další ročník MO v České republice i na Slovensku. Garanty výběru úloh pro tento ročník soutěže byli Jaroslav Švrček (kategorie A), Martin Panák (kategorie B) a Ján Mazák (kategorie C).

Krajská (II.) kola v jednotlivých kategoriích se uskutečnila ve stanovených termínech: 18. 1. 2011 v kategorii A, 5. 4. 2011 v kategoriích B a C a 11. 1. 2011 v kategorii P. Celkové počty účastníků v jednotlivých krajích každé z uvedených kategorií jsou uvedeny v tabulkách, které tvoří přílohu této zprávy. V průběhu 60. ročníku MO se na základě účinné podpory projektu OPVK MATES CZ.1.07/2.3.00/09.0017 v moravských regionech uskutečnily pravidelné semináře určené řešitelům MO. Konaly se na PřF UP v Olomouci, dále v Jihlavě a ve Zlíně. Lektorsky se na nich podíleli především řešitelé projektu MATES.

Ústřední kolo 60. ročníku Matematické olympiády v kategorii A se uskutečnilo 27.–30. března 2011 v Brně, na ně pak navázalo ústřední kolo kategorie P (30. března–2. dubna). Organizace závěrečného kola

soutěže se v tomto roce ujala Krajská komise MO Jihomoravského kraje spolu s Gymnáziem v Brně na tř. Kpt. Jaroše.

Záštitu nad závěrečnou částí soutěže v kategoriích A a P převzal *Michal Hašek*, hejtmán Jihomoravského kraje. Slavnostní zahájení soutěže se uskutečnilo v neděli 27. března 2011 večer v aule brněnského gymnázia na tř. Kpt. Jaroše. Kromě soutěžících, členů ÚK MO a garantů se zahájení soutěže zúčastnili rovněž pozvaní hosté, mezi nimiž nechyběli zástupci společenského života v Brně, Masarykovy univerzity v Brně a zástupci sponzorů (skupina ČEZ, Microsoft, Seznam, Kofola a další). Soutěžící a členové Ústřední komise MO byli ubytováni v hotelu Amphone přímo naproti pořádající škole. Vlastní soutěž se pak konala v učebnách Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně.

Na základě jednotné koordinace úloh krajského (II.) kola v kategorii A pozvala ÚK MO k účasti ve III. kole 40 nejlepších řešitelů z celé České republiky. Svého zástupce v ústředním kole tentokrát neměl pouze Karlovarský kraj. Soutěžními dny byly 28. a 29. březen 2011. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící vyhrazeno po 4,5 hodinách čistého času a za každou úlohu mohli získat maximálně 7 bodů.

Brněnští organizátoři připravili pro soutěžící a pro členy ÚK MO atraktivní doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu byl pro všechny účastníky III. kola uspořádán společný zájezd do Moravského krasu spojený s návštěvou Punkevních jeskyní a propasti Macocha. Večer strávili soutěžící i členové ÚK MO v příjemném prostředí brněnského divadla Radost, kde shlédli představení *Jak to dělají andělé aneb Stvoření světa*. Druhé volné odpoledne po soutěži měli možnost zájemci navštívit významné kulturní a historické památky v centru Brna.

Slavnostní vyhlášení výsledků a předání cen nejlepším soutěžícím se uskutečnilo ve středu 30. března 2011 dopoledne opět v aule pořádající školy za přítomnosti představitelů města Brna, zástupců MU v Brně a zástupců skupiny ČEZ. Předseda ÚK MO doc. *Jaromír Šimša* ve svém závěrečném projevu poděkoval předsedovi Krajské komise MO v Jihomoravském kraji a řediteli Gymnázia Brno na tř. Kpt. Jaroše — RNDr. *Jiřímu Hermanovi*, Ph.D., a také všem jeho spolupracovníkům z pořádající školy, kteří zajišťovali zdárný průběh ústředního kola kategorií A a P jubilejního ročníku MO.

Na ústřední kolo kategorie A bezprostředně navázalo ústřední kolo kategorie P. K účasti v závěrečném kole této soutěže bylo tentokrát pozváno 33 nejlepších řešitelů krajského kola, finále soutěže se však zúčastnilo pouze 29 z nich.

Soutěžními dny ústředního kola v kategorii P byly 31. březen a 1. duben 2011. První soutěžní den řešili soutěžící tři úlohy teoretické, celý druhý soutěžní den byl vyhrazen řešení dvou praktických úloh. Za každou teoretickou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 10 bodů, za řešení každé praktické úlohy pak 15 bodů — celkově tedy nejvýše 60 bodů. Na přípravě soutěžních úloh v kategorii P se podíleli pracovníci Katedry matematické informatiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Devět z jedenácti vítězů soutěže v kategorii A bylo pozváno k výběrovému soustředění v Kostelci nad Černými lesy před 52. mezinárodní matematickou olympiádou. Ta se uskutečnila v červenci 2011 v Amsterdamu, hlavním městě Nizozemí. Kromě toho bylo vybráno také družstvo pro 5. ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO), který se konal 1.–7. září 2011 v chorvatském Varaždínu. Družstvo pro tuto mezinárodní soutěž tvořila šestice úspěšných řešitelů ústředního kola kategorie A, kteří se nezúčastnili 52. MMO. V polské Gdyni proběhl 18. ročník Středoevropské olympiády v informatice (CEOI, 7.–12. 7. 2011). V červenci se pak české reprezentační družstvo zúčastnilo 23. ročníku Mezinárodní olympiády v informatice v Thajsku ve městě Pattaya City. Podrobnější zprávy o mezinárodních soutěžích jsou uvedeny na konci ročenky.

Ústřední komise MO se během 60. ročníku soutěže sešla na dvou pravidelných jednáních, a to 10. prosince 2010 v Matematickém ústavu AV ČR v Praze a dále 28. března 2011 v Brně u příležitosti ústředního kola MO.

Pro 40 nejlepších řešitelů krajského kola 60. ročníku MO v kategoriích B a C uspořádala ÚK MO v červnu 2011 tradiční soustředění v Jevíčku, organizované ředitelem tamějšího gymnázia, dr. Dagem Hrubým. Lektorsky chod soustředění zabezpečovali doc. Calda, dr. Švrček, dr. Panák, dr. Calábek, dr. Leischner a dr. Hrubý. Počátkem září téhož roku se konalo v Janských Lázních na chatě Lovrana ještě výběrové soustředění nejlepších řešitelů kategorie A. Na tomto soustředění jednotlivé semináře vedli doc. Šimša, dr. Horák, dr. Švrček, dr. Panák, dr. Calábek, dr. Zhouf a Michal Rolínek.

Závěrem děkujeme všem nadšeným učitelům matematiky, kteří nad své pracovní povinnosti připravovali své talentované žáky pro soutěž v tomto ročníku. Bez nich si lze jen těžko představit úspěšný průběh nejstarší předmětové soutěže v České republice, kterou je právě matematická olympiáda.

**Projev předsedy Ústřední komise MO
při slavnostním zahájení ústředního kola 60. ročníku MO
v Brně**

Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,

dovolte mi, dříve než pronesu očekávanou větu spojenou na sportovních olympiádách se zažehnutím olympijského ohně, malé zamyšlení nad jubileem naší soutěže.

Dovedu si představit, jak bujaře mohli slavit šedesáté narozeniny staří Babylóňané, pokud se vysokého základu své číselné soustavy vůbec dožívali. Dnes u nás tento životní mezník spadá ještě do etapy pracovní aktivity člověka. Budme optimisté a věrme, že k tomu více přispívá náš zdravý způsob života nežli zhoršená ekonomická situace.

Věnujme se však dále samotné matematické olympiádě. Ta letos po 43 letech vrcholí opět v Brně, když předchází (a zároveň první) taková přestávka trvala jen 5 let. V poslední větě jsem řekl dvě prvočísla a vy můžete dále počítat, kolikrát ještě do konce projevu řeknu nějaké slovo libovolného druhu, v jehož základě bude prvočíslo. Jako matematik bych navrhl říkat takovým slovům *prvočíslova*, ale i bez toho hrozí, že se budu při čtení zadr-zadržávat.

Přestávka 43 let je nápadně dlouhá, když cílová místa matematické olympiády putovala a putují po všech krajích dřívějšího Československa a dnešní České republiky. Vysvětlení je nasnadě: Jihomoravský kraj měl dříve větší rozlohu, a tak 27. a 39. ročník vrcholily v tomto kraji, i když ne v Brně, nýbrž v obou případech v Jihlavě. Uvedené dvě číslovky 27 a 39 sice nejsou prvočísla, ale mají dohromady pouze dva prvočinitele, což není zrovna moc.

Obraťme však teď pozornost na první léta matematické olympiády. Teprve v 11. ročníku bylo vyvráceno tvrzení, že naše soutěž vrcholí vždy v Praze. Po pražském období se stalo už jenom jednou, že se ceny vítězům matematické olympiády udělovaly několik let, konkrétně tři roky po sobě, ve stejném městě. Stalo se tak bezprostředně poté, co skončila 41letá historie MO v důsledku rozpadu společného státu Čechů a Slováků. Naši slovenští kolegové tak zrovna dnes zahajují své 19. samostatné ústřední kolo MO. Mnozí z přítomných vědí, že časová shoda termínů soutěže v obou státech není náhodná. Čeští i slovenští olympionici totiž i nadále řeší stejné úlohy, které pro ně připravujeme společně se slovenskými kolegy.

Zmíněným, mohu-li tak říct, repetičním městem bylo Jevíčko, poprvé v roce 1993, rok poté tam naše soutěž opět vrcholila, to už byl její 43. ročník, a do třetice se tak stalo hned v příštím roce 1995. Nejde sice o prvočíslo, ale je to zajímavý součin většiny z první sedmice prvočísel. Její zbylá tři prvočísla mají součin 2 431 a kde se v tomto roce bude konat olympiáda, není ještě známo.

Tříleté jevíčské období má kromě rozpadu Československa ještě jedno pádné vysvětlení. Naše školství se v devadesátých letech nacházelo stejně jako celá naše společnost v neklidném období porevolučních změn. Matematická olympiáda tehdy proto nebyla zrovna středem zájmu školských i jiných státních institucí, řešících palčivější problémy, a tak naše soutěž ráda našla útulný azyl v pohostinném městě na malé Haně.

Dnes už je naštěstí reformní období za námi, situace ve školství se zklidnila a stabilizovala, ničím nerušená náročná a současně pro žáky přitažlivá výuka se na všude řídí na míru šitými školními vzdělávacími programy a letos už snad proběhnou (dokonce naostro) státní maturity.

Zpátky však k naší soutěži. Chtěl bych se ve svém projevu také zmínit o pracovnících, kteří svým úsilím výrazně ovlivnili úspěšný chod různých etap dlouhé historie naší olympiády. Uvědomil jsem si však, jak je to nesnadný úkol. Má vůbec smysl jmenovat nějaké představitele ústředí MO, když o úspěchu soutěže patrně více rozhodovala obětavost desítek a dnes jistě již stovek bývalých i současných učitelů matematiky, kteří své žáky pro účast v naší soutěži získali a pak jim v přípravě na ni vydatně pomáhali? Tak jsem se rozhodl, že z osobností, které dnes už nejsou mezi námi, vzpomenu jedinou, a to jednoho ze zakladatelů MO, který v prvních ročnících soutěže, kdy se teprve utvářela její struktura, věnoval přípravě olympiády nejvíce času a energie ze všech zainteresovaných. Tím člověkem byl pan Rudolf Zelinka, vědecký pracovník Matematického ústavu v Praze, který prvních 13 ročníků zastával funkci ústředního jednatele naší soutěže. V pomyslné síni slávy MO, do níž by kromě vítězů jednotlivých ročníků měli být uvedeni i takoví lidé, jako byl Rudolf Zelinka, by k jeho jménu stačilo připojit jedinou větu: Zasloužil se o matematickou olympiádu.¹

Mám velkou radost, že na dnešním slavnostním zahájení jsou přítomny tři významné postavy historie naší soutěže. Především bych vám

¹ Při projevu nezazněla pozdější informace L. Bočka, že tuto větu o R. Zelinkovi jako první vyslovil doc. Jan Vyšín, který v letech 1959–1983 působil ve 13 ročnících matematické olympiády jako její ústřední místopředseda a v 11 ročnících jako ústřední předseda.

rád představil člověka, který 11 + 7 let zastával funkci ústředního místopředsedy MO. Je jím matematik světového jména, pan profesor Miroslav Fiedler. Dobu výkonu funkce pana Fiedlera v MO jsem vyjádřil součtem dvou prvočísel, protože se skutečně jednalo o dvě období, oddělená přestávkou kratší než 7 a delší než 5 let. Druhou vynikající osobností, po které jsem před 11 lety převzal funkci ústředního předsedy MO, je pan docent Leo Boček. Pan docent byl předsedou 13 let, když předtím 11 let vykonával funkci ústředního tajemníka. Třetím matematikem, kterému jsem to doufám také dobře spočítal, je rekordman, který už 29 let působí jako ústřední tajemník naší soutěže. Je jím vynikající redaktor všech textů MO, pan doktor Karel Horák.

Závěr mého zamyšlení nad jubileem naší soutěže mi usnadní jedna vzpomínka na významného brněnského matematika 20. století, akademika Otakara Borůvku. Nebudu mluvit o jeho vědeckém díle, pojmu to odlehčeně, už tím, že kuriózně zmíním jeho funkci ústředního místopředsedy MO, kterou zastával sice jediný rok, letopočet 1953 se však v mém projevu počítá.² Akademik Borůvka jednou při oslavě něčích narozenin prohlásil, že šedesátiny jsou významnějším životním jubileem než tolik vyzdvihované padesátiny. Proč? Prostě proto, že číslo 60 spočívá v objetí prvočíselných dvojčat 59 a 61.

Tím moje svérazné ohlédnutí za historií matematické olympiády končí. Prohlašuji ústřední kolo 60. ročníku matematické olympiády za zahájené.

² Zkouška pozornosti posluchačů, neboť 1953, ač zapsáno dvěma prvočíslly, je zřejmě násobek čísla 9.

Tabulka 1

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 60. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	85	73	82	69	134	111	23	15	324	268
Středočeský	75	37	43	12	50	21	9	7	177	77
Jihočeský	68	37	32	14	69	32	5	3	174	86
Plzeňský	48	31	41	20	55	18	9	5	153	74
Karlovarský	8	5	12	2	21	9	0	0	41	16
Ústecký	26	19	44	17	68	24	8	5	146	65
Liberecký	21	10	11	6	25	13	5	5	62	34
Královéhradecký	24	15	30	14	28	13	0	0	82	42
Pardubický	32	21	24	15	20	15	6	3	82	54
Vysočina	72	50	54	24	63	42	3	0	192	116
Jihomoravský	106	74	52	36	81	66	7	7	246	183
Zlínský	68	30	56	19	90	27	2	2	216	78
Olomoucký	29	19	14	7	38	21	2	2	83	49
Moravskoslezský	58	42	89	61	95	64	15	7	257	174
ČR	720	463	584	316	837	476	94	61	2 235	1 316

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 60. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	52	29	26	13	55	24	15	4	148	70
Středočeský	36	12	12	3	20	1	7	2	75	18
Jihočeský	36	16	10	3	31	4	3	2	80	25
Plzeňský	30	14	18	7	18	3	5	5	71	29
Karlovarský	4	3	2	1	9	1	0	0	15	5
Ústecký	19	9	17	3	24	1	5	4	65	17
Liberecký	9	5	5	1	11	3	5	4	30	13
Královéhradecký	15	9	14	3	13	2	0	0	42	14
Pardubický	20	10	12	4	13	1	3	1	48	16
Vysočina	37	14	14	1	27	4	0	0	78	19
Jihomoravský	71	39	32	9	62	8	6	4	171	60
Zlínský	28	10	18	8	27	4	2	1	75	23
Olomoucký	19	15	7	2	21	8	2	1	49	26
Moravskoslezský	28	21	23	8	27	3	7	3	85	35
ČR	404	206	210	66	358	67	60	31	1 032	370

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

v kategoriách A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie jsou dle dostupných výsledků uvedeni všichni úspěšní řešitelé, kteří skončili do desátého místa. Označení G znamená gymnázium.

Kraj Praha

Kategorie A

1. *Tomaš Zeman*, G J. Keplera, Praha 6
2. *Martin Töpfer*, G Praha 7, Nad Štolou
- 3.–4. *Hana Dlouhá*, G J. Keplera, Praha 6
Dan Šafka, G J. Keplera, Praha 6
- 5.–8. *Tadeáš Dohnal*, G Ch. Dopplera, Praha 5
Dominik Steinhäuser, G J. Keplera, Praha 6
Dominik Teiml, Anglické G, Praha 8
Jakub Zíka, G Praha 6, Nad Alejí
9. *Matouš Hruběš*, G J. Heyrovského, Praha 5
- 10.–14. *Jan Grebík*, G J. Nerudy, Praha 1
Vojtěch Havlíček, G Ch. Dopplera, Praha 5
Vít Henych, G Praha 6, Nad Alejí
Anna Chejnovská, G Ch. Dopplera, Praha 5
Lukáš Zavřel, G Praha 9, Chodovická

Kategorie B

1. *Hana Dlouhá*, G J. Keplera, Praha 6
- 2.–3. *Adam Láf*, G Ch. Dopplera, Praha 5
Martin Čech, G Praha 6, Nad Alejí
4. *Ondřej Basler*, G J. Keplera, Praha 6
5. *Martin Sýkora*, G Praha 6, Nad Alejí

6. *Klára Schováňková*, G E. Krásnohorské, Praha 4
7. *Martin Španěl*, Akad. G Praha 2, Korunní
- 8.–12. *Jan Jeliga*, G Ch. Dopplera, Praha 5
Luisa Černochová, G Praha 6, Nad Alejí
Ondřej Cířka, G Praha 6, Nad Alejí
Vojtěch Nižňanský, G Praha 6, Španielova
Dominik Teiml, Anglické G, Praha 8

Kategorie C

1. *Jakub Rosler*, G Praha 1, Truhlářská
2. *Aranka Hrušková*, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 3.–5. *David Černý*, G Ch. Dopplera, Praha 5
Ondřej Hübsch, G Praha 6, Arabská
Jan Pulec, G Praha 4, Písnická
- 6.–7. *Jelizaveta Lopatina*, G Praha 6, Arabská
Vladimír Gasanov, G J. Keplera, Praha 6
8. *Barbora Hudcová*, PORG Praha 8
9. *Dominik Smrž*, G E. Krásnohorské, Praha 4
10. *Milan Pultar*, G J. Keplera, Praha 6

Kategorie P

1. *Jakub Zíka*, G Praha 6, Nad Alejí
2. *Ondřej Hübsch*, G Praha 6, Arabská
- 3.–4. *Jiří Setnička*, G Praha 9-Čakovice
Ondřej Cířka, G Praha 6, Nad Alejí

• • • • • **Středočeský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Tomáš Reichel*, GaSPgŠ Čáslav
- 2.–4. *Jan Vítek*, G Čáslav
Dominik Pěnkava, G Kladno
Jiří Tábořský, G Mladá Boleslav
5. *Tomáš Martínek*, G Vlašim

- 6.–7. *Martin Procházka*, G V. B. Třebízského, Slaný
Jindřich Škripko, G Kladno
 8. *Jan Musil*, G Kolín
 9.–10. *Jan Mikeš*, G Kolín
Anna Zavadilová, Klasické G Říčany

Kategorie B

1. *Anna Zavadilová*, Klasické G Říčany
 2. *Adéla Nguyenová*, G Benešov
 3. *Linda Tichá*, G Benešov

Kategorie C

1. *Pavel Majtán*, G V. B. Třebízského, Slaný

Kategorie P

- 1.–2. *Jan Mašek*, G Benešov
Petr Bělohávek, G J. Barranda Beroun

• • • • • Jihočeský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *David Krška*, G J. V. Jirsíka, České Budějovice
 2. *Křištof Pučejdl*, G J. V. Jirsíka, České Budějovice
 3. *Michal Hruška*, G J. V. Jirsíka, České Budějovice
 4. *Jaromír Vaněček*, G Strakonice
 5. *Vlastimil Labský*, SPŠ a VOŠ Písek
 6.–7. *Martin Mach*, G České Budějovice, Jírovcova
Josef Válek, G Třeboň
 8.–11. *František Nesveda*, G Strakonice
František Petrouš, G České Budějovice, Jírovcova
Štěpán Sršeň, G Český Krumlov
Lenka Stará, G České Budějovice, Jírovcova

Kategorie B

1. *Moskovka Alexij*, G České Budějovice, Jírovcova
2. *Mička Ondřej*, G České Budějovice, Jírovcova
3. *Kroft Patrik*, G České Budějovice, Česká

Kategorie C

1. *Skříšovský Emil*, G České Budějovice, Česká
2. *Steinhauserová Anna*, G Dačice
- 3.–4. *Guth Jiří*, G České Budějovice, Jírovcova
Punčochář Michal, G České Budějovice, Jírovcova

Kategorie P

1. *David Krška*, G J. V. Jirsíka, České Budějovice
2. *Filip Matzner*, G J. V. Jirsíka, České Budějovice

• • • • • Plzeňský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Filip Hlásek*, G Plzeň, Mikulášské nám.
2. *Michael Bílý*, G J. Vrchlického, Klatovy
3. *Dung Le Anh*, G Tachov
- 4.–5. *David Hruška*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Michal Nožička, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 6.–8. *Martin Bucháček*, G L. Pika, Plzeň
Jan Kotrbatý, G Plzeň, Mikulášské nám.
Filip Štědranský, G Plzeň, Mikulášské nám.
9. *Jiří Němeček*, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 10.–11. *Stanislav Skoupý*, Masarykovo G, Plzeň
Jakub Suchý, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 12.–14. *Michaela Kochmanová*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Martin Prudek, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jakub Ševčík, Masarykovo G, Plzeň

Kategorie B

- 1.–2. *David Hruška*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Dung Le Anh, G Tachov
3. *Juda Kaleta*, G J. Vrchlického, Klatovy
4. *Michal Nožička*, G Plzeň, Mikulášské nám.
5. *David Kubeš*, Gymnázium L. Píka, Plzeň
6. *Anna Doležalová*, Masarykovo G, Plzeň
7. *Thi Tuyet Trang Nguyen*, G J. Vrchlického, Klatovy

Kategorie C

1. *Martin Hora*, G Plzeň, Mikulášské nám.
2. *Jan Holeček*, G Plzeň, Mikulášské nám.
3. *Lukáš Bystřický*, G Plzeň, Mikulášské nám.

Kategorie P

1. *Filip Hlásek*, G Plzeň, Mikulášské nám.
2. *Juda Kaleta*, G J. Vrchlického, Klatovy
3. *Jan Škoda*, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 4.–5. *Michael Bílý*, G J. Vrchlického, Klatovy
Filip Štědronský, G Plzeň, Mikulášské nám.

• • • • • **Karlovarský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Josef Hazi*, G Cheb
2. *Dung Le Quang*, G Cheb
3. *Viet Luu Tran*, G Cheb

Kategorie B

1. *Jan Kučera*, Svobodná chebská škola, Cheb

Kategorie C

1. *Milena Těžká*, G Cheb

• • • • • Ústecký kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Štěpán Šimsa*, G J. Jungmanna, Litoměřice
2. *Zuzana Boršiová*, G Teplice, Čs. Dobrovolců
3. *Lukáš Vacek*, G Teplice, Čs. Dobrovolců
4. *Michal Mojžík*, SPŠ a VOŠ Chomutov
5. *Jan Bok*, G J. Jungmanna, Litoměřice
- 6.–9. *František Kaván*, G Česká Kamenice
Kristýna Pilneyová, G J. Jungmanna, Litoměřice
Otakar Zich, SPŠ a VOŠ Chomutov
Martin Zuckerstein, G Lovosice

Kategorie B

1. *Štěpán Šimsa*, G J. Jungmanna, Litoměřice
2. *Daniel Kolář*, G dr. V. Šmejkal, Ústí nad Labem
3. *Martin Šmíd*, G Teplice, Čs. Dobrovolců

Kategorie C

1. *Hana Turčinová*, G J. Jungmanna, Litoměřice

Kategorie P

1. *Štěpán Šimsa*, G J. Jungmanna, Litoměřice
2. *Michal Mojžík*, SPŠ a VOŠ Chomutov
- 3.–4. *Daniel Stahr*, G J. Jungmanna, Litoměřice
Ondřej Fiedler, G J. Jungmanna, Litoměřice

Kategorie A

1. *Jakub Hrnčír*, G F. X. Šaldy, Liberec
2. *Matěj Hudec*, G Liberec, Jeronýmova
3. *Jan Polášek*, G Turnov
4. *Jiří Erhart*, G F. X. Šaldy, Liberec
5. *Petr Kuc*, G F. X. Šaldy, Liberec

Kategorie B

1. *Jan Baborák*, G Česká Lípa

Kategorie C

1. *Tomáš Novotný*, G Česká Lípa
- 2.–3. *Jiří Štrincl*, G Jablonec nad Nisou, Dr. Randy
Jaroslav Kňap, G Turnov

Kategorie P

1. *Jan Polášek*, G Turnov
2. *Martin Zikmund*, G Turnov
3. *Karolína Burešová*, G Česká Lípa
4. *Tomáš Dlask*, G Turnov

Kategorie A

1. *Pavel Potoček*, G Dobruška
- 2.–5. *Martina Bekrová*, G Trutnov
Petr Jurčo, G Trutnov
Kateřina Medková, Biskupské G B. Balbína, Hradec Králové
Jan Šimbera, Jiráskovo G, Náchod
6. *Anetta Sternwaldová*, Biskupské G B. Balbína, Hradec Králové
7. *Jakub Konrád*, G a SOŠ Jaroměř

8. *Josefina Mádrová*, G Dobruška
9. *Eliška Bucharová*, G a SOŠ Hostinné

Kategorie B

1. *Vojtěch Erbrt*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
- 2.–3. *Filip Hautpffleisch*, G F. M. Pelcla, Rychnov nad Kněžnou
Dominik Vach, Biskupské G B. Balbína, Hradec Králové

Kategorie C

1. *Stanislav Valtera*, G Dobruška
2. *Vendula Zíková*, Lepařovo G, Jičín

• • • • • **Pardubický kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Miroslav Koblížek*, G Žamberk
Filip Lux, G Žamberk
3. *Tomáš Kubelka*, G Žamberk
4. *Aleš Hrabalík*, G Litomyšl
- 5.–7. *Tomáš Felcman*, G Žamberk
Jan Novotný, G Pardubice, Dašická
Ondřej Tobek, G Litomyšl
- 8.–9. *Dominik Dušek*, G Lanškroun
Petr Mareška, G Česká Třebová
10. *Petr Kouba*, G Pardubice, Dašická

Kategorie B

- 1.–2. *Kateřina Jarkovská*, G Jevíčko
Kristýna Kohoutová, G Žamberk
3. *Jan Baláš*, G Žamberk
4. *Filip Jeniš*, G Jevíčko

Kategorie C

1. *Radovan Švarc*, G Česká Třebová

Kategorie P

1. *Dominik Dušek*, G Lanškroun

• • • • • **Kraj Vysočina** • • • • •

Kategorie A

1. *Ondřej Bartoš*, G Žďár nad Sázavou
2. *Petr Louša*, G Havlíčkův Brod
3. *Jan Kuchařík*, G Jihlava
- 4.–5. *Jan Klusáček*, G Třebíč
Jakub Krásenský, G Jihlava
- 6.–7. *Jan Dvořák*, G V. Makovského, Nové Město na Moravě
Adam Kučera, G Chotěboř
8. *Eva Havelková*, G Žďár nad Sázavou
- 9.–10. *Lukáš Řídký*, G Telč
Vojtěch Veselý, G Telč

Kategorie B

1. *Filip Murár*, G Třebíč

Kategorie C

1. *Viktor Němeček*, G Jihlava
2. *Jiří Janek*, G O. Březiny a SOŠ, Telč
3. *Anežka Kvasničková*, G Jihlava
4. *Marie Charvátová*, G Jihlava

Kategorie A

1. *Hynek Jemelík*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 2.–4. *Jan Sopoušek*, G Brno-Řečkovice
Jan Stopka, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Helena Valouchová, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 5.–6. *Dominik Tělupil*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jakub Vančura, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 7.–13. *David Bainer*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Aleš Dostál, G Blansko
František Fiala, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jiří Kozlák, G Hodonín
Gabriela Kubíčková, Cyrilometodějské G Brno, Lerchova
Jana Novotná, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jana Sotáková, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie B

1. *Jana Novotná*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 2.–3. *Mark Karpilovsky*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jakub Vančura, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Tomáš Novotný*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
5. *Tadeáš Kučera*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
6. *David Bainer*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 7.–8. *Kristián Kozák*, G Matyáše Lercha, Brno
Magdalena Šefferová, G Brno-Řečkovice
9. *Albert Stehlík*, Biskupské G Brno

Kategorie C

1. *Ondřej Muller*, G Břeclav
- 2.–3. *Veronika Ambrozová*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Eliška Špačková, Biskupské G Brno
- 4.–6. *Pavel Broušek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Nella Fedorowyczová, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Pavel Hranáč, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

- 7.–8. *Kristýna Bukvišová*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Daniel Maršálek, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie P

1. *Hynek Jemelík*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2.–3. *Vojtěch Hlávka*, G a ZUŠ Šlapanice
Bedřich Said, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Vojtěch Příkryl*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

• • • • • **Zlínský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Petr Pecha*, SPŠS Vsetín
2. *Michal Opler*, Masarykovo G, Vsetín
3. *Adam Vyškovský*, Masarykovo G, Vsetín
4. *Jan Mikel*, G Rožnov pod Radhoštěm
5. *Daniel Viktorín*, G Zlín, nám. TGM
6. *Matěj Kocián*, G Zlín, Lesní čtvrť
7. *Jakub Náplava*, G Uherské Hradiště
8. *Martin Maňas*, G J. A. Komenského, Uherský Brod
9. *Tomáš Trčka*, G Zlín, Lesní čtvrť

Kategorie B

- 1.–2. *Michal Buráň*, G J. A. Komenského, Uherský Brod
Jan Mikel, G Rožnov pod Radhoštěm
3.–4. *Jitka Janíková*, G Uherské Hradiště
Barbora Kociánová, G Zlín, Lesní čtvrť
5. *Petr Hloušek*, G J. A. Komenského, Uherský Brod
6. *Jan Mrázek*, G Kroměříž
7.–8. *Michal Janoušek*, G Zlín, nám. TGM
Jakub Konečný, G Uherské Hradiště

Kategorie C

1. *Tomáš Lysoněk*, G Uherské Hradiště

6. *Tomáš Kremel*, G J. Škody, Přerov
7. *Vojtěch Hamala*, G Zábřeh
8. *Ondřej Skácel*, G Šternberk

Kategorie P

1. *Jiří Eichler*, Slovanské G Olomouc
2. *Petr Laitoch*, G Olomouc-Hejčín

• • • • • Moravskoslezský kraj • • • • •

Kategorie A

- 1.–2. *Lukáš Folwarczný*, G Havířov, Komenského
Jakub Solovský, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Michal Kopf*, Slezské G Opava
- 4.–6. *Jiří Biolek*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Ondřej Bouchala, G Havířov, Komenského
Helena Svobodová, G Frýdlant nad Ostravicí
7. *Jiří Skácel*, G Příbor
- 8.–9. *Adam Sikora*, G Český Těšín
Ondřej Vejpustek, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
10. *Pavel Trutman*, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie B

- 1.–2. *Kateřina Solovská*, G M. Koperníka, Bílovec
Josef Svoboda, G Frýdlant nad Ostravicí
3. *Matěj Vaněk*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
4. *Václav Kapsia*, G M. Koperníka, Bílovec
- 5.–6. *Albert Štěrbá*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Tereza Štefková, G Rýmařov
- 7.–8. *Martin Poloch*, Matiční G, Ostrava
Magdaléna Žváčková, G Rýmařov

Kategorie C

1. *Martin Raszyk*, G Karviná
- 2.–3. *Tadeáš Kmenta*, G Frýdlant nad Ostravicí
Daniel Štěřba, Mendelovo G, Opava

Kategorie P

1. *Lukáš Folwarczný*, G Havířov, Komenského
2. *Martin Raszyk*, G Karviná
3. *Ondřej Bouchala*, G Havířov, Komenského
4. *Pavel Trutman*, G M. Koperníka, Bílovec

Výsledky ústředního kola 60. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	<i>Anh Dung Le</i> , 3/6 G Tachov	41 b.
2.	<i>Tomáš Zeman</i> , 8/8 G J. Keplera, Praha 6	37 b.
3.	<i>Michael Bílý</i> , 8/8 G J. Vrchlického, Klatovy	34 b.
4.	<i>Miroslav Koblížek</i> , 8/8 G Žamberk	28 b.
5.	<i>Jan Kuchařík</i> , 3/4 G Jihlava	25 b.
6.–9.	<i>Tadeáš Dohnal</i> , 8/8 G Ch. Dopplera, Praha 5	23 b.
	<i>Filip Hlásek</i> , 8/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	23 b.
	<i>Jakub Solovský</i> , 4/4 G M. Koperníka, Bílovec	23 b.
	<i>Štěpán Šimsa</i> , 6/8 G J. Jungmanna, Litoměřice	23 b.
10.–11.	<i>Ondřej Bartoš</i> , 7/8 G Žďár nad Sázavou	22 b.
	<i>Dan Šafka</i> , 8/8 G J. Keplera, Praha 6	22 b.

Další úspěšní řešitelé

12.–13.	<i>Jiří Biolek</i> , 6/6 G P. Bezruče, Frýdek-Místek	21 b.
	<i>Lubomír Grund</i> , 6/8 G Zábřeh	21 b.
14.	<i>Jan Sopoušek</i> , 8/8 G Brno-Řečkovice	20 b.
15.–20.	<i>Hana Dlouhá</i> , 6/8 G J. Keplera, Praha 6	19 b.
	<i>Matěj Hudec</i> , 4/4 G Liberec, Jeronýmova	19 b.
	<i>Dominik Steinhauser</i> , 3/4 G J. Keplera, Praha 6	19 b.
	<i>Jan Stopka</i> , 3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	19 b.
	<i>Helena Svobodová</i> , 6/6 G Frýdlant nad Ostravicí	19 b.
	<i>Dominik Teiml</i> , 4/6 Anglické G, Praha 8	19 b.

Výsledky ústředního kola 60. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1. <i>Hynek Jemelík</i> , 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	45 b.
2. <i>Lukáš Folwarczný</i> , 7/8 G Havířov, Komenského	37 b.
3. <i>Filip Hlásek</i> , 8/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	36 b.
4. <i>Jakub Zíka</i> , 8/8 G Praha 6, Nad Alejí	33 b.
5. <i>Vojtěch Přikryl</i> , 4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	29 b.
6.–7. <i>David Krška</i> , 4/4 G České Budějovice, J. V. Jirsíka	27 b.
<i>Michal Mojžík</i> , 4/4 SPŠ a VOŠ Chomutov	27 b.

Další úspěšní řešitelé

8. <i>Jiří Setnička</i> , 6/6 G Praha 9-Čakovice	26 b.
9. <i>Jan Polášek</i> , 8/8 G Turnov	25 b.
10. <i>Štěpán Šimsa</i> , 6/8 G J. Jungmanna, Litoměřice	24 b.
11.–12. <i>Daniel Stahr</i> , 8/8 G J. Jungmanna, Litoměřice	23 b.
<i>Martin Zikmund</i> , 7/8 G Turnov	23 b.
13. <i>Martin Raszyk</i> , 1/4 G Karviná	22 b.
14. <i>Vojtěch Hlávka</i> , 6/8 G a ZUŠ Šlapanice	19 b.
15. <i>Ondřej Hübsch</i> , 1/4 G Praha 6, Arabská	18 b.

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

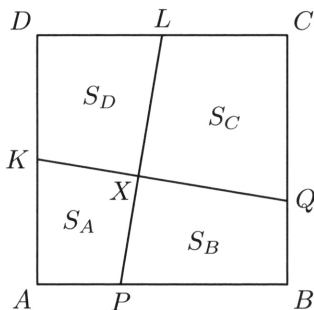
Lucie napsala na tabuli dvě nenulová čísla. Potom mezi ně postupně vkládala znaménka plus, mínus, krát a děleno a všechny čtyři příklady správně vypočítala. Mezi výsledky byly pouze dvě různé hodnoty. Jaká dvě čísla mohla Lucie na tabuli napsat? *(Peter Novotný)*

C – I – 2

Dokažte, že výrazy $23x + y$, $19x + 3y$ jsou dělitelné číslem 50 pro stejné dvojice přirozených čísel x , y . *(Jaroslav Zhouf)*

C – I – 3

Máme čtverec $ABCD$ se stranou délky 1 cm. Body K a L jsou středy stran DA a DC . Bod P leží na straně AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na straně BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL se protínají v bodě X . Obsahy čtyřúhelníků $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupně S_A , S_B , S_C , S_D (obr. 1).



Obr. 1

- a) Dokažte, že $S_B = S_D$.
 b) Vypočítejte rozdíl $S_C - S_A$.
 c) Vysvětlete, proč neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$. (*Peter Novotný*)

C – I – 4

Ve skupině n žáků spolu někteří kamarádi. Víme, že každý má mezi ostatními aspoň čtyři kamarády. Učitelka chce žáky rozdělit do dvou nejvýše čtyřčlenných skupin tak, že každý bude mít ve své skupině alespoň jednoho kamaráda.

- a) Ukažte, že v případě $n = 7$ lze žáky požadovaným způsobem rozdělit.
 b) Zjistěte, zda lze žáky takto rozdělit i v případě $n = 8$. (*Tomáš Jurík*)

C – I – 5

Dokažte, že nejmenší společný násobek $[a, b]$ a největší společný dělitel (a, b) libovolných dvou kladných celých čísel a, b splňují nerovnost

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab.$$

Zjistěte, kdy v této nerovnosti nastane rovnost. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Je dán lichoběžník $ABCD$. Střed základny AB označme P . Uvažujme rovnoběžku se základnou AB , která protíná úsečky AD , PD , PC , BC postupně v bodech K , L , M , N .

- a) Dokažte, že $|KL| = |MN|$.
 b) Určete polohu přímky KL tak, aby platilo i $|KL| = |LM|$. (*Jaroslav Zhouf*)

C – S – 1

Po okruhu běhají dva atleti, každý jinou konstantní rychlostí. Jestliže běží opačnými směry, potkávají se každých 10 minut, jestliže běží stejným směrem, potkávají se každých 40 minut. Za jakou dobu uběhne okruh rychlejší atlet? (*Vojtech Bálint*)

C – S – 2

Je dán čtverec se stranou délky 6 cm. Najděte množinu středů všech příček čtverce, které ho dělí na dva čtyřúhelníky, z nichž jeden má obsah 12 cm^2 . (Příčkou čtverce rozumíme úsečku, jejíž krajní body leží na stranách čtverce.)

(Pavel Leischner)

C – S – 3

Nechť x, y jsou kladná celá čísla taková, že obě čísla $3x+5y$ a $5x+2y$ jsou dělitelná číslem 60. Zdůvodněte, proč číslo 60 dělí také součet $2x+3y$.

(Jaromír Šimša)

C – II – 1

Na tabuli jsou napsána právě tři (ne nutně různá) reálná čísla. Víme, že součet libovolných dvou z nich je tam napsán také. Určete všechny trojice takových čísel.

(Ján Mazák)

C – II – 2

Najděte všechna kladná celá čísla n , pro která je číslo $n^2 + 6n$ druhou mocninou celého čísla.

(Vojtech Bálint)

C – II – 3

Lichoběžník $ABCD$ má základny AB a CD po řadě délek 18 cm a 6 cm. Pro bod E strany AB platí $2|AE| = |EB|$. Těžiště K, L, M trojúhelníků po řadě ADE, CDE, BCE tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

a) Dokažte, že přímky KM a CM svírají pravý úhel.

b) Vypočtěte délky ramen lichoběžníku $ABCD$.

(Pavel Calábek)

C – II – 4

Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla. Ukažte, že čísla $x+y+z-xyz$ a $xy+yz+zx-3$ nemohou být záporná současně.

(Stanislava Sojáková)

Řešení úloh

C – I – 1

Označme hledaná čísla a, b . Protože $b \neq 0$, je nutně $a + b \neq a - b$. Každé z čísel $a \cdot b, a : b$ je proto rovno buď $a + b$, anebo $a - b$. Stačí tedy rozebrat čtyři případy a v každém z nich vyřešit soustavu rovnic. Ukážeme si trochu důmyslnější postup.

Kdyby platilo

$$a + b = a \cdot b \quad \text{a} \quad a - b = a : b$$

anebo

$$a + b = a : b \quad \text{a} \quad a - b = a \cdot b,$$

vynásobením rovností bychom v obou případech dostali $a^2 - b^2 = a^2$, což odporuje podmínce $b \neq 0$. Proto jsou čísla $a \cdot b$ a $a : b$ buď obě rovna $a + b$, anebo obě rovna $a - b$. Tak či tak musí platit $a \cdot b = a : b$, odkud po úpravě $a(b^2 - 1) = 0$. Protože $a \neq 0$, nutně $b \in \{1, -1\}$.

Pokud je tedy $b = 1$, jsou čtyři výsledky postupně $a + 1, a - 1, a, a$, což jsou pro libovolné a tři různé hodnoty.

Pro $b = -1$ dostáváme výsledky $a - 1, a + 1, -a, -a$. To budou dvě různá čísla, právě když $a - 1 = -a$ anebo $a + 1 = -a$. V prvním případě dostáváme $a = \frac{1}{2}$, ve druhém $a = -\frac{1}{2}$.

Lucie mohla na začátku na tabuli napsat buď čísla $\frac{1}{2}$ a -1 , anebo čísla $-\frac{1}{2}$ a -1 .

C – I – 2

Předpokládejme, že pro dvojici přirozených čísel x, y platí $50 \mid 23x + y$. Potom pro nějaké přirozené číslo k platí $23x + y = 50k$. Z této rovnosti dostaneme $y = 50k - 23x$, tedy $19x + 3y = 19x + 3(50k - 23x) = 150k - 50x = 50(3k - x)$, takže číslo $19x + 3y$ je rovněž násobkem čísla 50.

Podobně to funguje i z druhé strany. Jestliže pro nějakou dvojici přirozených čísel x, y platí $50 \mid 19x + 3y$, je $19x + 3y = 50l$ pro nějaké přirozené číslo l . Z této rovnosti vyjádříme číslo y ; dostaneme $y = (50l - 19x)/3$ (další postup by byl podobný, i kdybychom vyjádřili x místo y). Po dosazení vyjde

$$23x + y = 23x + \frac{50l - 19x}{3} = \frac{69x + 50l - 19x}{3} = \frac{50 \cdot (x + l)}{3}.$$

O výsledném zlomku víme, že je to přirozené číslo. Čítec toho zlomku je dělitelný číslem 50. Ve jmenovateli je jen číslo 3, které je s 50 nesoudělné, proto se číslo 50 nemá s čím ze jmenovatele zkrátit, tudíž číslo $23x + y$ je dělitelné 50.

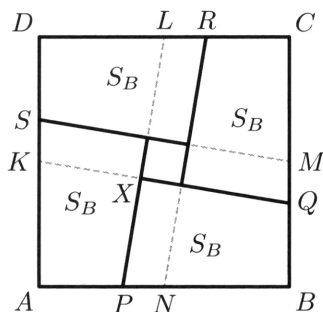
Jiné řešení. Zřejmě $3 \cdot (23x + y) - (19x + 3y) = 50x$, proto jestliže 50 dělí jedno z čísel $23x + y$ a $19x + 3y$, dělí i druhé z nich.

C – I – 3

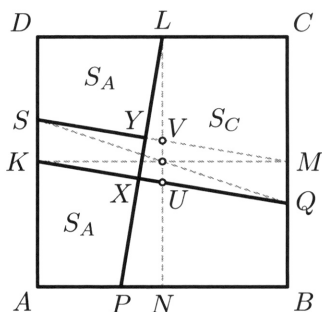
a) Čtyřúhelníky $ABQK$ a $DAPL$ jsou shodné (jeden z nich je obrazem druhého v otočení o 90° se středem ve středu čtverce $ABCD$). Proto mají i stejný obsah, tedy $S_A + S_B = S_A + S_D$. Z toho hned dostáváme $S_B = S_D$.

b) Snadno se nám podaří vypočítat obsah pravoúhlého lichoběžníku $ABQK$, neboť známe délky základů i výšku. Dostaneme $S_A + S_B = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \text{ cm}^2$. Podobně výpočtem obsahu lichoběžníku $PBCL$ dostaneme $S_C + S_B = (\frac{1}{2} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12} \text{ cm}^2$. Odečtením první získané rovnosti od druhé dostáváme $S_C - S_A = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6} \text{ cm}^2$.

c) Nerovnost mezi obsahy $S_A + S_C$ a $S_B + S_D$ (jejichž přímé výpočty jsou nad síly žáků 1. ročníku) můžeme zdůvodnit následujícím způsobem. Součet těchto dvou obsahů je 1 cm^2 , takže se nerovnají, právě když je jeden z nich menší než $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$. Bude to obsah $S_B + S_D$ (rovný $2S_B$, jak už víme), když ukážeme, že obsah S_B je menší než $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$. Uděláme to tak, že do celého čtverce $ABCD$ umístíme bez překrytí čtyři exempláře dotyčného čtyřúhelníku $PBQX$. Jak, to je patrné z obr. 2, kde M, N značí středy stran BC, AB a R, S body, jež dělí strany CD, DA v poměru 1 : 2.



Obr. 2



Obr. 3

Jiné řešení části c). Tentokrát místo nerovnosti $S_B + S_D < \frac{1}{2} \text{ cm}^2$ dokážeme ekvivalentní nerovnost $S_A + S_C > \frac{1}{2} \text{ cm}^2$. Proto se pokusíme „přemístit“ čtyřúhelník $APXK$ tak, aby ležel při čtyřúhelníku $XQCL$ a aby se jejich obsahy daly i geometricky sečíst. Úhly AKQ a DLP jsou shodné a $|AK| = |DL|$, proto můžeme čtyřúhelník $APXK$ přemístit ve čtverci $ABCD$ do jeho „rohu“ D tak, že se ke čtyřúhelníku $XQCL$ „přimkne“ podél strany LX svou stranou LY , kde Y je průsečík úseček SM a PL z původního řešení (obr. 3). Obsah $S_A + S_C$ je pak obsahem šestiúhelníku $DSYXQC$. Proč je větší než $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$, lze zdůvodnit například takto:

Úsečka spojující bod L se středem U úsečky KQ protne úsečku SM v jejím středu V . Čtyřúhelník $UQMV$ má obsah rovný polovině obsahu rovnoběžníku $KQMS$, tedy rovný obsahu trojúhelníku KMS . Proto má šestiúhelník $DSVUQC$ obsah rovný obsahu čtyřúhelníku $KMCD$, tj. polovině obsahu čtverce $ABCD$. Obsah $S_A + S_C$ je ještě větší, a to o obsah čtyřúhelníku $XUVY$. Je tedy vskutku $S_A + S_C > \frac{1}{2} \text{ cm}^2$.

C – I – 4

a) Jediný způsob, jak rozdělit 7 žáků na dvě nejvýše čtyřčlenné skupiny, je mít jednu trojčlennou a jednu čtyřčlennou skupinu. Každý žák ze čtyřčlenné skupiny přitom bude mít ve své skupině kamaráda při jakémkoli rozdělení, protože se nemůže stát, že by všichni jeho kamarádi byli v trojčlenné skupině (jsou aspoň čtyři).

Takže stačí rozdělit žáky tak, aby každý v trojčlenné skupině v ní měl kamaráda. Proto do ní dáme kteréhokoli ze žáků a k němu některé dva jeho kamarády.

b) Vezměme si jakékoli rozdělení 8 žáků na dvě čtyřčlenné skupiny (skupiny s jiným počtem žáků nepřipadají v úvahu). Jestliže toto rozdělení nevyhovuje učitelčině záměru, máme nějakého žáka X , jenž je *zle zařazen* — má všechny své čtyři kamarády A, B, C, D ve druhé skupině. Ukážeme, že umíme vyměnit X a některého ze žáků A, B, C, D tak, že celkový počet zle zařazených žáků v nově vzniklých skupinách se oproti původnímu stavu zmenší.

Po libovolné ze čtyř výměn přicházejících do úvahy přestane být X zle zařazen a všichni tři žáci, kteří se s ním octnou ve skupině, budou dobře zařazení, neboť jsou to jeho kamarádi. Žáci K, L, M , kteří byli před výměnou ve skupině s X , mohou být po výměně zle zařazení jen tehdy, pokud byli zle zařazení i předtím (neboť X není kamarádem ani jednoho

z nich). Protože žák K má čtyři kamarády a nekamarádí se s X , musí mít aspoň jednoho kamaráda Y i ve skupině obsahující žáky A, B, C, D . Právě tento žák Y se hodí pro zamýšlenou výměnu s žákem X , neboť po ní i on bude mít ve své nové skupině kamaráda — totiž žáka K .

Ukázali jsme tedy, že výměnou žáků X a Y počet zle zařazených žáků klesne. Dostaneme nějaké nové rozdělení; jestliže v něm je aspoň jeden žák zle zařazen, můžeme zopakovat předchozí postup a opět snížit počet zle zařazených žáků. Po nejvýše osmi krocích dostaneme rozdělení, v němž už nejsou žádní zle zařazení žáci.

Jiné řešení části b). Uvažujme všechna možná rozdělení osmi žáků do dvou čtyřčlenných skupin. Rozdělení, kde někdo nemá ve své skupině žádného kamaráda, budeme nazývat *zlá*, zbylá budou *dobrá*.

Kolik je zlých rozdělení? Jestliže má žák X aspoň pět kamarádů, aspoň jeden z nich musí být v jeho skupině. Jestliže má žák X jen čtyři kamarády a jsou-li všichni ve druhé skupině, máme jen jedno jediné rozdělení s touto vlastností. Celkově tedy k danému žákovi X existuje nejvýše jedno rozdělení, jež je zlé. Za X můžeme vzít jednoho z 8 různých žáků, proto zlých rozdělení je nejvýše 8 (některá možná počítáme víckrát). Přitom všech rozdělení je $\binom{7}{3} = 35$, tedy aspoň 27 z nich je dobrých.

C – I – 5

Nerovnost by bylo lehké dokázat, kdyby některý ze dvou sčítanců na levé straně byl sám aspoň roven pravé straně. Číslo $[a, b]$ je zjevně násobkem čísla a .

Jestliže $[a, b] \geq 2a$, pak $b[a, b] \geq 2ab$ a v dané nerovnosti platí dokonce ostrá nerovnost, neboť číslo $a(a, b)$ je kladné.

Jestliže $[a, b] < 2a$, tak nezůstává jiná možnost než $[a, b] = a$. To však nastane, jen když $b \mid a$. V tomto případě $(a, b) = b$ a v dané nerovnosti nastane rovnost.

Jiné řešení. Označme $d = (a, b)$, takže $a = ud$ a $b = vd$ pro nesoudělná přirozená čísla u, v . Odtud hned plyne, že $[a, b] = uv d$. Protože

$$\begin{aligned} a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] &= ud^2 + uv^2d^2 = u(1 + v^2)d^2, \\ 2ab &= 2uv d^2, \end{aligned}$$

je vzhledem k nerovnosti $ud^2 > 0$ nerovnost ze zadání ekvivalentní s nerovností $1 + v^2 \geq 2v$, tedy $(v - 1)^2 \geq 0$, což platí pro každé v . Rovnost nastane, právě když $v = 1$, tedy $b \mid a$.

Jiné řešení. Označme $d = (a, b)$. Je známo, že $[a, b] \cdot (a, b) = ab$. Po vyjádření $[a, b]$ z tohoto vztahu, dosazení do dané nerovnosti a ekvivalentní úpravě dostaneme ekvivalentní nerovnost $d^2 + b^2 \geq 2bd$, která platí, neboť $(d - b)^2 \geq 0$. Rovnost nastává jen pro $d = b$, tedy pokud $b \mid a$.

C – I – 6

a) Přímký AB , CD a KL jsou rovnoběžné, proto v dané situaci dovedeme najít vícero dvojic trojúhelníků podobných vždy podle věty *uu*. Tyto podobnosti lze výhodně zapsat pomocí poměrů vzdáleností, což využijeme v důkazu toho, že úsečky KL a MN mají stejnou délku.

Označme x vzdálenost přímký AB a KL a y vzdálenost přímký KL a CD . Pomocí těchto vzdáleností nyní vyjádříme koeficienty podobnosti odpovídajících trojúhelníků.

Trojúhelníky APD a KLD jsou podobné, proto

$$\frac{|KL|}{|AP|} = \frac{y}{x + y}.$$

Trojúhelníky BPC a NMC jsou podobné, proto

$$\frac{|MN|}{|PB|} = \frac{y}{x + y}.$$

Spojením obou rovností dostáváme

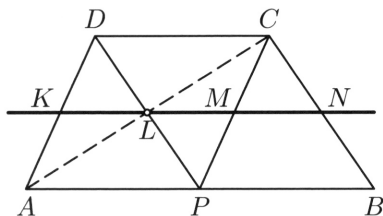
$$\frac{|KL|}{|AP|} = \frac{y}{x + y} = \frac{|MN|}{|PB|},$$

a protože $|AP| = |PB|$, plyne odtud $|KL| = |MN|$.

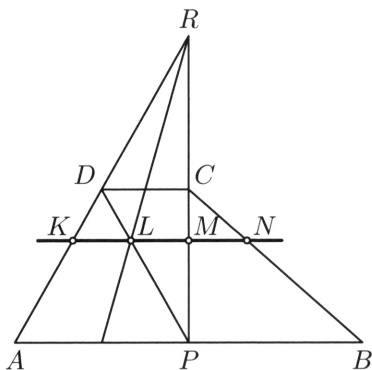
b) Chceme sestavit bod L úsečky PD takový, že $|KL| = |LM|$. Rozebereme dva případy podle toho, zda je či není přímký PC rovnoběžná s přímkou AD .

Jestliže je přímký PC rovnoběžná s AD , je $APCD$ rovnoběžník a jediný vyhovující bod L je střed úsečky PD neboli průsečík úhlopříček rovnoběžníku $APCD$ (podmínka $|KL| = |LM|$ tu vyjadřuje shodnost trojúhelníků KLD a MLP , která nastane, právě když $|LD| = |LP|$, obr. 4).

Jestliže se přímký PC a AD protínají v nějakém bodě R (obr. 5), bude bod L průsečíkem úsečky DP s přímkou, na níž leží těžnice trojúhelníku APR z vrcholu R . Plyne to z poznatku, že s úsečkou AP jsou podle



Obr. 4



Obr. 5

středu R stejnohlé všechny v úvahu připadající úsečky KM , a proto středy všech těchto úseček leží na přímce jdoucí bodem R a středem úsečky AP .

Z uvedených konstrukcí plyne, že vyhovující bod L je vždy jediný, existuje tudíž právě jedna rovnoběžka s přímkou AB s požadovanými vlastnostmi.

Poznámka. Jak jsme uvedli v řešení, pokud jsou přímky PC a AD rovnoběžné, je hledaným bodem L , pro který platí $|KL| = |LM|$, průsečík úhlopříček rovnoběžníku $APCD$. Pokud přímky PC a AD rovnoběžné nejsou, tj. $APCD$ je lichoběžník, je i v tomto případě průsečík jeho úhlopříček výborným kandidátem pro takový bod L . Výpočtem s využitím podobnosti se dá ukázat, že tomu tak vskutku je, takže hledaným bodem L je v každém případě průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $APCD$.

C – S – 1

Označme rychlosti běžců v_1 a v_2 tak, že $v_1 > v_2$ (rychlosti udáváme v okruzích za minutu). Představme si, že atleti vystartují ze stejného místa, ale opačným směrem. V okamžiku jejich dalšího setkání po 10 minutách bude součet délek obou proběhnutých úseků odpovídat přesně délce jednoho okruhu, tedy $10v_1 + 10v_2 = 1$.

Jestliže běží atleti ze stejného místa stejným směrem, dojde k dalšímu setkání, jakmile rychlejší atlet zaběhne o jeden okruh víc než ten pomalejší. Proto $40v_1 - 40v_2 = 1$.

Dostali jsme soustavu dvou lineárních rovnic s neznámými v_1, v_2 :

$$10v_1 + 10v_2 = 1,$$

$$40v_1 - 40v_2 = 1,$$

kteřou vyřešíme například tak, že ke čtyřnásobku první rovnice přičteme druhou, čímž dostaneme $80v_1 = 5$ neboli $v_1 = \frac{1}{16}$. Zajímá nás, jak dlouho trvá rychlejšímu běžci proběhnout jeden okruh, tedy hodnota podílu $1/v_1$. Po dosazení vypočtené hodnoty v_1 dostaneme *odpověď*: 16 minut.

Poznámka. Úlohu lze rovněž řešit úvahou: za 40 minut uběhnou atleti dohromady 4 okruhy (to plyne z první podmínky), přitom rychlejší o 1 okruh více než pomalejší (to plyne z druhé podmínky). To tedy znamená, že první za uvedenou dobu uběhne 2,5 okruhu a druhý 1,5 okruhu, takže rychlejší uběhne jeden okruh za $40/2,5$ neboli 16 minut.

C – S – 2

Jestliže příčka dělí čtverec na dva čtyřúhelníky, musejí její koncové body ležet na protilehlých stranách čtverce. V takovém případě jsou oba čtyřúhelníky lichoběžníky nebo pravoúhelníky (pro potřeby tohoto řešení budeme pravoúhelník považovat za speciální lichoběžník). Označme daný čtverec $ABCD$, koncové body příčky označme K a L . Předpokládejme, že bod K leží na straně AD , potom bod L leží na straně BC . Jeden ze čtyřúhelníků $KABL$ a $KDCL$ má podle zadání obsah 12 cm^2 ; nechť je to např. lichoběžník $KABL$.

Obsah lichoběžníku vypočteme jako součin jeho výšky s délkou střední příčky. Výška je v našem případě rovna délce strany čtverce, tedy 6 cm. Jeho střední příčka má tudíž délku 2 cm. Z toho plyne, že střed úsečky KL musí ležet na ose strany AB ve vzdálenosti 2 cm od středu strany AB . Platí to i naopak: jestliže střed úsečky KL leží v popsané poloze, bude čtyřúhelník $KABL$ lichoběžník s obsahem 12 cm^2 .

Budeme-li místo lichoběžníku $KABL$ uvažovat lichoběžník $KDCL$, vyjde střed příčky KL na osu úsečky CD ve vzdálenosti 2 cm od středu strany CD .

Pokud příčka KL spojuje body na stranách AB a CD , dostaneme další dva možné body ležící na spojnici středů úseček AD a BC . Hledanou množinu tedy tvoří čtyři body, které leží na příčkách spojujících středy protilehlých stran čtverce ve vzdálenosti 1 cm od jeho středu.

Na základě předpokladu ze zadání víme, že existují kladná celá čísla m a n , pro která platí

$$3x + 5y = 60m,$$

$$5x + 2y = 60n.$$

Na tyto vztahy se můžeme dívat jako na soustavu lineárních rovnic s neznámými x a y a parametry m a n . Vyřešit ji umíme libovolnou standardní metodou, například od dvojnásobku první rovnice odečteme pětinásobek druhé a vyjádříme x , potom dopočítáme y . Dostaneme

$$x = \frac{60(5n - 2m)}{19}, \quad y = \frac{60(5m - 3n)}{19}.$$

Protože čísla 19 a 60 jsou nesoudělná, jsou obě čísla x a y dělitelná 60. Proto i součet $2x + 3y$ je dělitelný 60.

Jiné řešení. Víme, že $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$. Přitom čísla 3, 4, 5 jsou po dvou nesoudělná, proto na důkaz dělitelnosti 60 stačí dokázat dělitelnost jednotlivými čísly.

Protože číslo $3x + 5y$ je dělitelné 5, je i x dělitelné 5. Podobně z relace $5 \mid 5x + 2y$ plyne $5 \mid y$. Proto 5 dělí i $2x + 3y$.

Protože číslo $3x + 5y$ je dělitelné 3, je y dělitelné 3. A protože $3 \mid 5x + 2y$, je také $3 \mid 5x$, a tedy $3 \mid x$. Proto 3 dělí i $2x + 3y$.

Protože $4 \mid 3x + 5y$ a $4 \mid 5x + 2y$, je $4 \mid (3x + 5y) + (5x + 2y) = 8x + 7y$, takže $4 \mid y$. A protože například $4 \mid 3x + 5y$, je také $4 \mid 3x$ neboli $4 \mid x$. Proto 4 dělí i $2x + 3y$.

Jiné řešení. Vyjádříme výraz $2x + 3y$ pomocí $3x + 5y$ a $5x + 2y$. Budeme hledat čísla p a q taková, že $2x + 3y = p(3x + 5y) + q(5x + 2y)$ pro každou dvojici celých čísel x, y . Jednoduchou úpravou dostaneme rovnici

$$(2 - 3p - 5q)x + (3 - 5p - 2q)y = 0. \quad (*)$$

Budou-li hledaná čísla p a q splňovat soustavu

$$3p + 5q = 2,$$

$$5p + 2q = 3,$$

bude zřejmě rovnost $(*)$ splněna pro každou dvojici x, y . Vyřešením soustavy dostaneme $p = 11/19$, $q = 1/19$. Dosazením do $(*)$ dostáváme vyjádření

$$19(2x + 3y) = 11(3x + 5y) + (5x + 2y),$$

z něhož plyne, že spolu s čísly $3x + 5y$ i $5x + 2y$ je současně dělitelné 60 i číslo $2x + 3y$, protože čísla 19 a 60 jsou nesoudělná.

C – II – 1

Označme čísla napsaná na tabuli a, b, c . Součet $a + b$ se též nalézá na tabuli, je tedy roven jednomu z čísel a, b, c . Kdyby $a + b$ bylo rovno a nebo b , byla by na tabuli aspoň jedna nula. Rozebereme proto tři případy podle počtu nul napsaných na tabuli.

Jsou-li na tabuli aspoň dvě nuly, snadno se přesvědčíme, že součet každých dvou čísel z tabule je tam rovněž. Dostáváme, že trojice $t, 0, 0$ je pro libovolné reálné číslo t řešením úlohy.

Je-li na tabuli právě jedna nula, je tam trojice $a, b, 0$, kde a i b jsou nenulová čísla. Součet $a + b$ tudíž není roven ani a , ani b , musí tedy být roven 0. Dostáváme tak další trojici $t, -t, 0$, která je řešením úlohy pro libovolné reálné číslo t .

Jestliže na tabuli není ani jedna nula, součet $a + b$ není roven ani a , ani b , proto $a + b = c$. Ze stejných důvodů je $b + c = a$ a $c + a = b$. Dostali jsme soustavu tří lineárních rovnic s neznámými a, b, c , kterou můžeme vyřešit. Ovšem hned z prvních dvou rovnic po dosazení vyjde $b + (a + b) = a$ neboli $b = 0$. To je ve sporu s tím, že na tabuli žádná nula není.

Závěr. Úloze vyhovují trojice $t, 0, 0$ a $t, -t, 0$ pro libovolné reálné číslo t a žádné jiné.

C – II – 2

Zřejmě $n^2 + 6n > n^2$ a zároveň $n^2 + 6n < n^2 + 6n + 9 = (n + 3)^2$. V uvedeném rozmezí leží jen dvě druhé mocniny celých čísel: $(n + 1)^2$ a $(n + 2)^2$.

V prvním případě máme $n^2 + 6n = n^2 + 2n + 1$, tedy $4n = 1$, tomu však žádné celé číslo n nevyhovuje.

V druhém případě máme $n^2 + 6n = n^2 + 4n + 4$, tedy $2n = 4$. Dostáváme tak jediné řešení $n = 2$.

Jiné řešení. Budeme zkoumat rozklad $n^2 + 6n = n(n + 6)$. Společný dělitel obou čísel n a $n + 6$ musí dělit i jejich rozdíl, proto jejich největším společným dělitelem mohou být jen čísla 1, 2, 3 nebo 6. Tyto čtyři možnosti rozebereme.

Kdyby byla čísla n a $n + 6$ nesoudělná, muselo by být každé z nich druhou mocninou. Rozdíl dvou druhých mocnin přirozených čísel však nikdy není 6. Pro malá čísla se o tom snadno přesvědčíme, a pro $k \geq 4$ už je rozdíl byt i jen sousedních čtverců k^2 a $(k - 1)^2$ aspoň 7. Vlastnost, že 1, 3, 5 a 7 jsou čtyři nejmenší rozdíly dvou druhých mocnin, využijeme i dále.

Je-li největším společným dělitelem čísel n a $n + 6$ číslo 2, je $n = 2m$ pro vhodné m , které navíc není dělitelné třemi. Jestliže $n(n + 6) = 4m(m + 3)$ je čtverec, musí být i $m(m + 3)$ čtverec. Čísla m a $m + 3$ jsou však nesoudělná, musí proto být každé z nich druhou mocninou přirozeného čísla. To nastane jen pro $m = 1$ neboli $n = 2$. Snadno ověříme, že $n(n + 6)$ je pak vskutku druhou mocninou celého čísla.

Je-li největším společným dělitelem čísel n a $n + 6$ číslo 3, je $n = 3m$ pro vhodné liché m . Jestliže $n(n + 6) = 9m(m + 2)$ je čtverec, musejí být nesoudělná čísla m a $m + 2$ rovněž čtverce. Takové dva čtverce však neexistují.

Je-li největším společným dělitelem čísel n a $n + 6$ číslo 6, je $n = 6m$ pro vhodné m . Jestliže $n(n + 6) = 36m(m + 1)$ je čtverec, musejí být čtverce i obě nesoudělná čísla m a $m + 1$, což nastane jen pro $m = 0$, my však hledáme jen kladná čísla n .

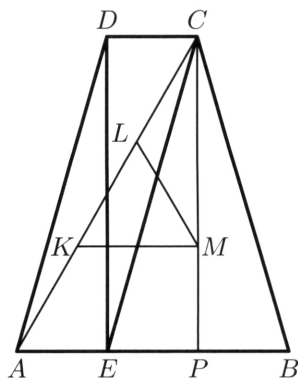
Úloze vyhovuje jedině $n = 2$.

C – II – 3

Čtýřúhelník $AECD$ je rovnoběžník, protože jeho strany AE a CD jsou rovnoběžné a stejně dlouhé (obě měří 6 cm). Na jeho úhlopříčce AC tak leží těžnice trojúhelníku ADE z vrcholu A i těžnice trojúhelníku CDE z vrcholu C , a proto na této přímce leží i body K a L (obr. 6). Navíc víme, že těžiště trojúhelníku dělí jeho těžnice v poměru 2 : 1, proto jsou úsečky AK , KL a LC stejně dlouhé.

Bod L je středem úsečky KC , proto na ose souměrnosti úsečky KM leží nejen výška rovnostranného trojúhelníku KLM , ale i střední příčka trojúhelníku KMC . Proto je přímka CM kolmá na KM .

Zbývá vypočítat délky ramen lichoběžníku $ABCD$. Označme P střed úsečky EB . Protože CM je kolmá na KM , je těžnice CP kolmá na



Obr. 6

EB , takže trojúhelník EBC je rovnoramenný, a tudíž i daný lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný. Délku ramene BC nyní vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku PBC , v němž známe délku odvěsny PB . Pro druhou odvěsnu CP zřejmě platí

$$|CP| = \frac{3}{2}|CM| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|KM|,$$

jak snadno plyne z vlastností trojúhelníku KMC . A protože $|KM| = \frac{2}{3}|AP|$ z podobnosti trojúhelníků KMC a APC , je (počítáno v centimetrech)

$$|CP| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|KM| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}|AP| = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}|AB| = 12\sqrt{3}.$$

Potom

$$|BC| = \sqrt{|PB|^2 + |PC|^2} = \sqrt{36 + 12^2 \cdot 3} = 6\sqrt{1 + 12} = 6\sqrt{13}.$$

Ramena daného lichoběžníku mají délku $6\sqrt{13}$ cm.

Alternativní důkaz kolmosti přímek KM a CM : Protože bod L je středem úsečky KC a zároveň $|LK| = |LM|$, neboť trojúhelník KLM je rovnostranný, leží bod M na Thaletově kružnici nad průměrem KC , takže trojúhelník KMC je pravoúhlý.

C – II – 4

Ukážeme, že je-li číslo $xy + yz + zx - 3$ záporné, je číslo $x + y + z - xyz$ kladné.

Jestliže $xy + yz + zx < 3$, je aspoň jedno z čísel xy , yz , zx menší než 1, např. xy . Pak $x + y + z - xyz = x + y + z(1 - xy)$ je zjevně součet tří kladných čísel.

Jiné řešení. Ukážeme, že je-li číslo $x + y + z - xyz$ záporné, pak číslo $xy + yz + zx - 3$ je kladné.

Předpokládejme, že $x + y + z < xyz$. Tím spíš $x < xyz$. Po zkrácení kladného čísla x dostaneme $yz > 1$. Podobně odvodíme odhady $xy > 1$ a $zx > 1$. Nyní je stačí sečíst a máme $xy + yz + zx > 3$.

Jiné řešení. Tvrzení úlohy dokážeme sporem. Předpokládejme, že $x + y + z < xyz$ a zároveň $xy + yz + zx < 3$. Obě tyto nerovnosti jsou

symetrické, proto můžeme předpokládat, že čísla x, y, z jsou označena tak, že z je nejmenší. Z druhé nerovnosti dostaneme, že $xy < 3$. Potom však $x + y + z < xyz < 3z$, tedy $x + y < 2z$. To je však spor s tím, že číslo z je nejmenší.

Jiné řešení. Jsou-li oba výrazy záporné, je $x + y + z$ menší než 3 a $xy + yz + zx$ menší než xyz . To jsou nerovnosti mezi kladnými čísly, jejich vynásobením dostaneme, že $3xyz$ spolu se šesti dalšími kladnými členy je menší než $3xyz$, což je spor.

Poznámka. Dá se dokázat dokonce víc: jestliže $x + y + z < xyz$, pak $xy + yz + zx > 9$. Při důkazu využijeme nerovnost

$$t + \frac{1}{t} \geq 2,$$

která platí pro všechna kladná reálná čísla t , neboť pro taková t je ekvivalentní s nerovností $(t - 1)^2 \geq 0$.

Když si povšimneme, že platí

$$x + y + z - xyz = xyz \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} - 1 \right),$$

seznáme, že uvedené tvrzení plyne z obecně platné nerovnosti

$$\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) (xy + yz + zx) \geq 9.$$

Poslední nerovnost dokážeme roznásobením levé strany:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) (xy + yz + zx) &= 3 + \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} = \\ &= 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \geq \\ &\geq 3 + 3 \cdot 2 = 9. \end{aligned}$$

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

V oboru reálných čísel vyřešte soustavu

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= z + 1, \\ \sqrt{y^2 + z^2} &= x + 1, \\ \sqrt{z^2 + x^2} &= y + 1.\end{aligned}$$

(Tomáš Jurík)

B – I – 2

Uvažujme vnitřní bod P daného obdélníku $ABCD$ a označme po řadě Q , R obrazy bodu P v souměrnostech podle středů A , C . Předpokládejme, že přímka QR protne strany AB a BC ve vnitřních bodech M a N . Sestrojte množinu všech bodů P , pro něž platí $|MN| = |AB|$.

(Jaroslav Švrček)

B – I – 3

Nechť a , b , c jsou reálná čísla, jejichž součet je 6. Dokažte, že aspoň jedno z čísel

$$ab + bc, \quad bc + ca, \quad ca + ab$$

není větší než 8.

(Ján Mazák)

B – I – 4

Najděte všechna celá čísla n , pro něž je zlomek

$$\frac{n^3 + 2010}{n^2 + 2010}$$

roven celému číslu.

(Pavel Novotný)

B – I – 5

Zabývejme se otázkou, které trojúhelníky ABC s ostrými úhly při vrcholech A a B mají následující vlastnost: Vedeme-li středem výšky z vrcholu C tři přímky rovnoběžné se stranami trojúhelníku ABC , protnou je tyto přímky v šesti bodech ležících na jedné kružnici.

- Ukažte, že vyhovuje každý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C .
- Vysvětlete, proč žádný jiný trojúhelník ABC nevyhovuje.

(Jaromír Šimša)

B – I – 6

Určete počet desetimístných čísel, v nichž lze škrtnout dvě sousední číslice, a dostat tak číslo 99krát menší.

(Ján Mazák)

B – S – 1

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = p$$

s neznámou x a reálným parametrem p .

(Vojtech Bálint)

B – S – 2

Podél kružnice je rozmístěno 16 reálných čísel se součtem 7.

- Dokažte, že existuje úsek pěti sousedních čísel se součtem aspoň 2.
- Určete nejmenší k takové, že v popsané situaci lze vždy nalézt úsek k sousedních čísel se součtem aspoň 3.

(Ján Mazák)

B – S – 3

Vně daného trojúhelníku ABC jsou sestrojeny čtverce $ACDE$, $BCGF$. Dokažte, že $|AG| = |BD|$. Dále ukažte, že středy obou čtverců spolu se středy úseček AB a DG jsou vrcholy čtverce.

(Pavel Leischner)

B – II – 1

Součin kladných reálných čísel a , b , c je 60 a jejich součet je 15. Dokažte nerovnost

$$(a + b)(a + c) \geq 60$$

a zjistěte, pro která taková čísla a , b , c nastane rovnost.

(*Jaromír Šimša*)

B – II – 2

Najděte všechny dvojice kladných celých čísel a , b , pro něž číslo b je dělitelné číslem a a současně číslo $3a + 4$ je dělitelné číslem $b + 1$.

(*Pavel Novotný*)

B – II – 3

Nechť M , N jsou po řadě vnitřní body stran AB , BC rovnostranného trojúhelníku ABC , pro něž platí $|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = 2 : 1$. Označme P průsečík přímek AN a CM . Dokažte, že přímky BP a AN jsou navzájem kolmé.

(*Jaroslav Švrček*)

B – II – 4

Zapišeme všechna pětímístná čísla, v nichž se každá z číslic 4, 5, 6, 7, 8 vyskytuje právě jednou. Pak jedno (libovolné z nich) škrtneme a všechna zbývající sečteme. Jaké jsou možné hodnoty ciferného součtu takového výsledku?

(*Šárka Gergelitsová*)

Řešení úloh

B – I – 1

Umocněním a odečtením prvních dvou rovností dostaneme $x^2 - z^2 = (z + 1)^2 - (x + 1)^2$, což upravíme na $2(x^2 - z^2) + 2(x - z) = 0$ neboli

$$(x - z)(x + z + 1) = 0. \quad (1)$$

Analogicky bychom dostali další dvě rovnice, jež vzniknou z (1) cyklickou záměnou neznámých $x \rightarrow y \rightarrow z$. Vzhledem k této symetrii (daná soustava se nezmění dokonce při libovolné permutaci neznámých) stačí rozebrat jen následující dvě možnosti:

Pokud $x = y = z$, přejde původní soustava v jedinou rovnici $\sqrt{2x^2} = x + 1$, jež má dvě řešení $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Každá z trojic $(1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2})$ je zřejmě řešením i původní soustavy.

Pokud jsou naopak některá dvě z čísel x, y, z různá, například $x \neq z$, plyne z (1) rovnost $x + z = -1$. Dosazením $x + 1 = -z$ do druhé rovnice soustavy dostáváme $y = 0$ a poté ze třetí rovnice vyjde $x^2 + (x + 1)^2 = 1$ neboli $x(x + 1) = 0$. Poslední rovnice tak má dvě řešení $x = 0$ a $x = -1$, jimž odpovídají $z = -1$ a $z = 0$. Snadno ověříme, že obě nalezené trojice $(0, 0, -1)$ a $(-1, 0, 0)$ jsou řešením dané soustavy stejně jako trojice $(0, -1, 0)$, kterou dostaneme jejich permutací.

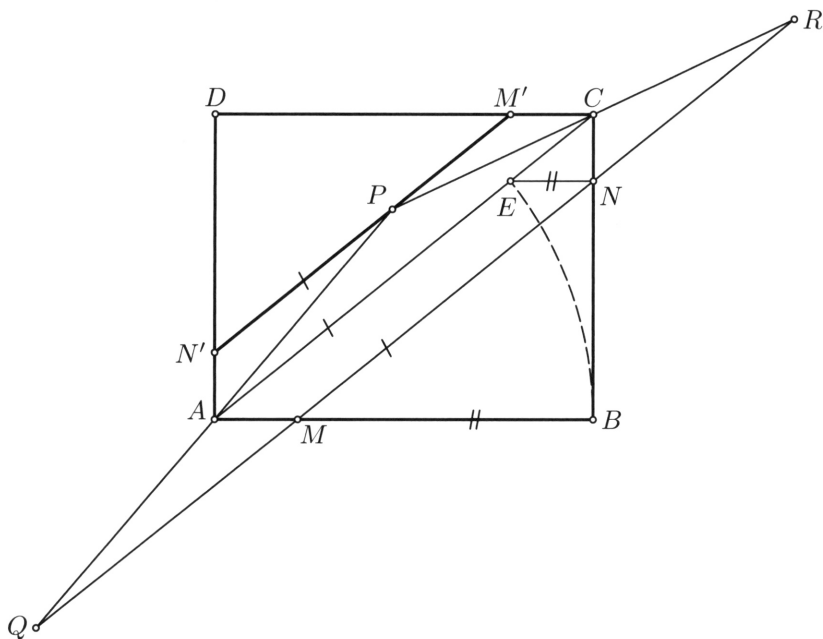
Daná soustava má celkem pět řešení:

$$(0, 0, -1), (0, -1, 0), (-1, 0, 0), \\ (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) \quad \text{a} \quad (1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}).$$

B – I – 2

Úhlopříčka AC daného obdélníku $ABCD$ je ze zadání střední příčkou v trojúhelníku PQR , a tedy $AC \parallel QR$, jinak řečeno $AC \parallel MN$. Úsečka MN je tak jednoznačně určena tím, že je rovnoběžná s AC , leží v opačné polorovině určené přímkou AC než bod P a pro její délku platí $|MN| = |AB|$. Konstrukci bodů M a N lze provést několika způsoby. Lze k tomu například využít rovnoběžník $AMNE$ (obr. 7), v němž platí $|AE| = |MN| = |AB|$.

Protože úsečka MN zároveň určuje přímku, na níž leží strana QR trojúhelníku PQR , je zřejmé, že vrchol P musí ležet na přímce p , jež je



Obr. 7

obrazem přímky MN v osově souměrnosti podle přímky AC (obsahující střední příčku trojúhelníku PQR). Přímka p má s vnitřkem daného obdélníku společný vnitřek úsečky $M'N'$ (jež je navíc obrazem nalezené úsečky MN ve středové souměrnosti podle středu daného obdélníku).

Snadno vidíme, že i naopak ke každému vnitřnímu bodu P úsečky $M'N'$ leží odpovídající body Q, R na přímce MN a body M, N jsou tak průsečíky přímky QR se stranami AB, BC , takže vyhovují podmínkám úlohy.

Závěr. Hledanou množinou všech bodů P dané vlastnosti je tedy vnitřek výše popsané úsečky $M'N'$.

B – I – 3

Jistě stačí ukázat, že součet zkoumaných tří čísel nepřevyšuje 24:

$$(ab + bc) + (bc + ca) + (ca + ab) = 2(ab + bc + ca) \leq \frac{2}{3}(a + b + c)^2 = 24,$$

kde nerovnost je důsledkem nerovnosti

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 = 36,$$

která je ekvivalentní nerovnosti $0 \leq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, jež je splněna pro každá tři reálná a, b, c .

Jiné řešení. S ohledem na symetrii předpokládejme, že platí $a = \min\{a, b, c\}$. Z rovnosti $a+b+c = 6$ pak plyne $a \leq 2$ a $b+c \geq 4$. Proto třetí zkoumané číslo, rovné $a(b+c)$, má stejné znaménko jako číslo a , takže je zaručeně menší než 8, platí-li $a \leq 0$. Je-li naopak $0 < a \leq 2$, všimneme si, že ze zřejmé nerovnosti $0 \leq (u-v)^2$, platné pro libovolná reálná u, v , plyne úpravou odhad $4uv \leq (u+v)^2$; dosadíme-li sem $u = 2a$ a $v = b+c$, dostaneme

$$8a(b+c) \leq (2a+b+c)^2 = (a+6)^2 \leq 8^2 = 64,$$

odkud po dělení osmi vychází kýžená nerovnost $a(b+c) \leq 8$.

B – I – 4

Zlomek

$$\frac{n^3 + 2010}{n^2 + 2010} = n - \frac{2010(n-1)}{n^2 + 2010}$$

je celé číslo, právě když $n^2 + 2010$ je dělitel čísla $2010(n-1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67(n-1)$.

Není-li n násobek prvočísla 67, jsou čísla $n^2 + 2010$ a 67 nesoudělná, proto $n^2 + 2010$ musí být dělitelem čísla $30(n-1)$. Protože $|30(n-1)| < n^2 + 2010$, vyhovuje jenom $n = 1$.

Nechť $n = 67m$, kde m je celé. Potom

$$\frac{2010(n-1)}{n^2 + 2010} = \frac{30(67m-1)}{67m^2 + 30}.$$

Není-li m násobkem pěti, musí být číslo $67m^2 + 30$ dělitelem čísla $6(67m-1)$. Pro $|m| \leq 4$ tomu tak ale není, zatímco pro $|m| \geq 6$ je už $|6(67m-1)| < 67m^2 + 30$. Je tedy $m = 5k$, kde k je celé. Potom

$$\frac{30(67m-1)}{67m^2 + 30} = \frac{6(335k-1)}{335k^2 + 6}.$$

Pro $|k| \geq 7$ je absolutní hodnota tohoto zlomku nenulová a menší než 1. Ze zbylých čísel vyhovují $k = 0$ a $k = -6$.

Číslo

$$\frac{n^3 + 2010}{n^2 + 2010}$$

je tedy celé, právě když je celé n některé z čísel 0, 1 nebo -2010 .

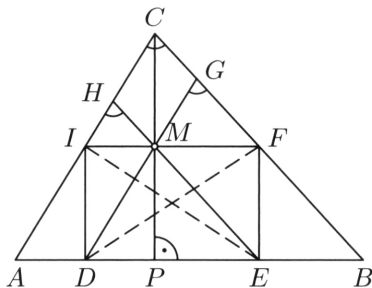
B – I – 5

I když doporučujeme řešit obě části úlohy odděleně (tj. nejprve analyzovat situaci v pravoúhlém trojúhelníku), popíšeme rovnou jejich společné řešení. Celou úlohu lze totiž formulovat jako důkaz tvrzení, že sestrojených šest bodů leží na kružnici, právě když je úhel ACB pravý.

Uvažujme tedy libovolný trojúhelník ABC s ostrými úhly α , β a označme M střed výšky CP a D , E , F , G , H , I uvažované průsečíky tak, aby s vrcholy A , B , C a patou výšky P ležely na hranici trojúhelníku v pořadí

$$A, D, P, E, B, F, G, C, H, I.$$

Z konstrukce plyne, že body M , D , I jsou středy stran pravoúhlého trojúhelníku ACP a body M , E , F jsou středy stran pravoúhlého trojúhelníku BCP . Oba čtyřúhelníky $PMID$ a $PMFE$ jsou tedy pravoúhelníky, takže i $DEFI$ je pravoúhelník (obr. 8). Jeho vrcholy D , E , F , I proto *vždy* leží na jedné kružnici a úsečky DF a EI jsou její průměry. Naší úlohou je proto zjistit, kdy na této kružnici leží i body G a H . To lze podle Thaletovy věty vyjádřit podmínkou, že úhly DGF a EHI jsou pravé. Protože $DG \parallel AC$ a $EH \parallel BC$, jsou oba úhly DGF a EHI shodné s úhlem ACB a ekvivalence s podmínkou pravého úhlu ACB je tak dokázána.



Obr. 8

B – I – 6

Nechť n je číslo splňující podmínky zadání. Škrtnutím dvou posledních číslic zmenšíme n alespoň stokrát, proto se můžeme omezit na škrtnutí číslic, které nejsou poslední. Po škrtnutí dvou sousedních číslic zůstanou

z čísla n dvě části, přitom první část může být prázdná, pokud jsme škrtnli jeho první dvě číslice.

Nechť a je číslo určené první částí čísla n (nula v případě, že první část je prázdná), b je číslo určené vyškrtnutými dvěma číslicemi a c je určeno poslední částí čísla n (počet číslic této části označme k). Podle zadání platí

$$99(a \cdot 10^k + c) = a \cdot 10^{k+2} + b \cdot 10^k + c,$$

po úpravě $98c = 10^k(a + b)$. Protože $c < 10^k$, musí být $98 > a + b$. Navíc číslo 49 dělí $a + b$, neboť je samo nesoudělné s 10^k . Kladný celočíselný podíl $(a + b)/49$ je menší než 2, musí tedy být roven 1, takže $a + b = 49$. Odtud vyplývá rovnost

$$c = \frac{10^k}{2} = 5 \cdot 10^{k-1},$$

kde číslo k je zároveň určeno počtem číslic čísla a (označíme-li l počet číslic čísla a , je $k = 10 - l - 2$, přičemž v případě $a = 0$ klademe přirozeně $l = 0$).

Z uvedeného postupu plyne, že pro každé $a \in \{0, 1, 2, \dots, 49\}$ a $b = 49 - a$ existuje právě jedno číslo c , pro něž popsané číslo n splňuje podmínky zadání, a že jiná vyhovující n neexistují. Ukážeme, že všech 50 takových n (končících sedmi, šesti, nebo pěti nulami) je navzájem různých.

Sestrojené n končící sedmi nulami je jediné ($a = 0$). Šesti nulami končí 9 sestrojených čísel ($a \in \{1, 2, \dots, 9\}$) a jsou navzájem různá, neboť začínají různými číslicemi. Pěti nulami končí 40 sestrojených čísel ($a \in \{10, 11, \dots, 49\}$) a jsou navzájem různá, neboť začínají různými dvojčíslími.

Pro názornost vypišme ještě několik čísel vyhovujících zadání tak, jak je dostaneme pomocí našich úvah: pro $a = 0$ máme $b = 49$, $c = 50\,000\,000$ a $n = 4\,950\,000\,000$, pro $a = 1$ je $b = 48$, $c = 5\,000\,000$ a $n = 1\,485\,000\,000$, pro $a = 2$ je $n = 2\,475\,000\,000$, ..., pro $a = 9$ je $n = 9\,405\,000\,000$, pro $a = 10$ je $b = 39$, $c = 500\,000$ a $n = 1\,039\,500\,000$, ..., pro $a = 49$ je $b = 0$, $c = 500\,000$ a $n = 4\,900\,500\,000$.

Závěr. Existuje 50 čísel, jež vyhovují zadání.

B – S – 1

Aby byla levá strana rovnice definována, musejí být oba výrazy pod odmocninami nezáporné, což je splněno právě pro všechna $x \geq 0$. Pro

nezáporná x je pak $p = \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \geq \sqrt{3}$, rovnice může tedy mít řešení pouze pro $p \geq \sqrt{3}$.

Upravme nyní danou rovnici:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + \sqrt{x+3} &= p, \\ 2x + 3 + 2\sqrt{x(x+3)} &= p^2, \\ 2\sqrt{x(x+3)} &= p^2 - 2x - 3, \\ 4x(x+3) &= (p^2 - 2x - 3)^2, \\ 4x^2 + 12x &= p^4 + 4x^2 + 9 - 4p^2x - 6p^2 + 12x, \\ x &= \frac{(p^2 - 3)^2}{4p^2}.\end{aligned}$$

Protože jsme danou rovnici umocňovali na druhou, je nutno se přesvědčit zkouškou, že vypočtené x je pro hodnotu parametru $p \geq \sqrt{3}$ řešením původní rovnice:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{(p^2 - 3)^2}{4p^2}} + 3 + \sqrt{\frac{(p^2 - 3)^2}{4p^2}} &= \\ &= \sqrt{\frac{p^4 - 6p^2 + 9 + 12p^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2 - 3)^2}{4p^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(p^2 + 3)^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2 - 3)^2}{4p^2}} = \frac{p^2 + 3}{2p} + \frac{p^2 - 3}{2p} = p.\end{aligned}$$

Při předposlední úpravě jsme využili podmínku $p \geq \sqrt{3}$ (a tedy i $p^2 - 3 \geq 0$ a $p > 0$), takže $\sqrt{(p^2 - 3)^2} = p^2 - 3$ a $\sqrt{4p^2} = 2p$.

Poznámka. Místo zkoušky stačí ověřit, že pro nalezené x jsou všechny umocňované výrazy nezáporné, tedy vlastně jen že

$$p^2 - 2x - 3 = \frac{(p^2 - 3)(p^2 + 3)}{2p^2} \geq 0.$$

Pro $p \geq \sqrt{3}$ tomu tak opravdu je.

B – S – 2

a) Mezi 16 čísla napsanými podél kružnice se nachází právě 16 úseků pěti sousedních čísel (vybereme-li libovolně jedno z napsaných čísel a od

něj označíme čísla podél kružnice postupně jako první, druhé, ..., šestnácté, bude první úsek tvořen prvním až pátým číslem, druhý úsek pak druhým až šestým číslem, ... a poslední šestnáctý úsek bude tvořen šestnáctým, prvním, druhým, třetím a čtvrtým číslem).

Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že uvažované tvrzení neplatí, tedy že čísla v každém z 16 úseků mají součet menší než 2. Celkový součet S_5 všech 16 součtů čísel v jednotlivých pěticích je tak menší než $16 \cdot 2 = 32$. Ovšem každé číslo na kružnici je součástí právě pěti úseků pěti sousedních čísel, tudíž každé z 16 čísel je v uvedeném součtu započteno právě pětikrát. Proto je součet S_5 zároveň roven pětinasobku součtu všech čísel na kružnici, což je 35. To je ve sporu s odvozenou nerovností $S_5 < 32$. Na kružnici tedy musí existovat pět po sobě jdoucích čísel, jejichž součet je alespoň 2 (dokonce více než 2).

b) Nejprve ukažme, že nemůže být $k \leq 6$. K tomu stačí podél kružnice rozmístit 16 shodných čísel se součtem 7. Součet čísel v libovolném úseku k čísel tak bude

$$k \cdot \frac{7}{16} \leq \frac{42}{16} < 3.$$

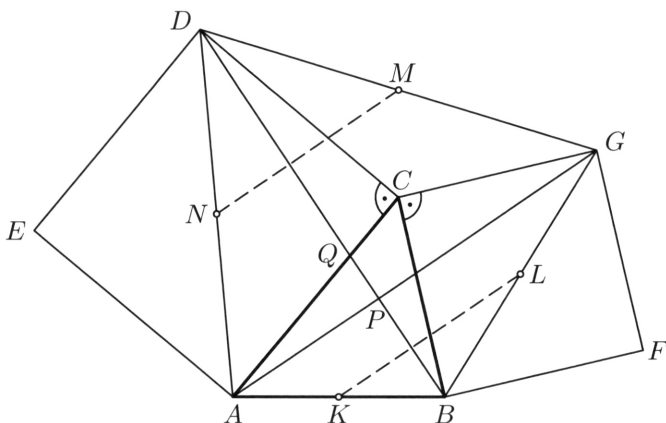
Nechť nyní $k = 7$. Zopakováním úvahy z části a) dokážeme, že vhodný úsek už existuje: Předpokládejme naopak, že součet libovolných sedmi po sobě jdoucích čísel (z daných šestnácti) je menší než tři. Takových úseků je podél kružnice šestnáct (jejich počet na čísla k nezávisí!), takže součet S_7 všech 16 součtů čísel v jednotlivých sedmicích je menší než $16 \cdot 3 = 48$. Každé z daných 16 čísel je v součtu S_7 započteno sedmkrát, tedy $S_7 = 7 \cdot 7 = 49$, což odporuje předchozímu odhadu $S_7 < 48$.

Hledaným číslem k je číslo 7.

B – S – 3

Protože oba úhly BCG a DCA jsou pravé, uvažujme otočení kolem vrcholu C daného trojúhelníku, v němž bod B přejde do bodu G . V něm je zřejmě obrazem bodu D bod A a obrazem úsečky BD úsečka GA (obr. 9). Odtud plyne, že $|AG| = |BD|$, a také, že úsečky AG a BD jsou navzájem kolmé.

Označme po řadě K , L , M , N středy stran čtyřúhelníku $ABGD$. (Body N a L jsou tedy středy uvažovaných čtverců.) Vzhledem k tomu, že úsečka KL je střední příčkou trojúhelníku AGB a úsečka MN střední příčkou trojúhelníku AGD , je $|KL| = \frac{1}{2}|AG| = |KL|$ a zároveň $MN \parallel AG \parallel KL$. Podobně $|KN| = \frac{1}{2}|BD| = |LM|$ a zároveň $KN \parallel BD \parallel$



Obr. 9

$\parallel LM$. To znamená, že $KLMN$ je rovnoběžník. Protože však víme, že $|AG| = |BD|$ a navíc $AG \perp BD$, je $KLMN$ čtverec. Tím jsou všechna tvrzení úlohy dokázána.

Jiné řešení. Úlohu vyřešíme bez úvahy o otočení. Pro důkaz rovnosti $|AG| = |BD|$ ukážeme, že trojúhelníky ACG a DCB jsou shodné podle věty *sus*. Skutečně, $|AC| = |DC|$, $|CG| = |CB|$ a $|\sphericalangle ACG| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCG| = |\sphericalangle ACB| + 90^\circ = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCB|$.

Úsečky AG a BD jako strany shodných trojúhelníků tedy mají stejnou délku. Abychom ověřili, že jsou navíc navzájem kolmé, označíme P jejich průsečík a porovnáme vnitřní úhly v trojúhelnících APQ a DCQ , kde Q je průsečík úseček AC a BD . Při vrcholech A a D jsou úhly shodné díky ověřené shodnosti trojúhelníků ACG a DCB , úhly při vrcholu Q se rovněž shodují (jakožto úhly vrcholové), takže se shodují i jejich úhly při vrcholech P a C , jsou tedy oba pravé.

Z dokázané shodnosti i kolmosti úseček AG a BD odvodíme, že $KLMN$ je čtverec stejně jako v původním řešení.

Poznámka. Poznamenejme ještě, že jsme vlastně ukázali, že středy stran libovolného konvexního čtyřúhelníku tvoří vrcholy rovnoběžníku, jehož strany jsou rovnoběžné s úhlopříčkami daného čtyřúhelníku. Tohoto rovnoběžníku se říká Varignonův rovnoběžník. Je tedy čtyřúhelník $KLMN$ Varignonův rovnoběžník čtyřúhelníku $ABGD$.

B – II – 1

Pomocí rovností $abc = 60$, $a+b+c = 15$ daný výraz $(a+b)(a+c)$ upravíme a pak odhadneme na základě AG-nerovnosti pro dvojici hodnot a a $4/a$:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) &= a^2 + (b+c)a + bc = a^2 + (15-a) \cdot a + \frac{60}{a} = \\ &= 15a + \frac{60}{a} = 15\left(a + \frac{4}{a}\right) \geq 15 \cdot 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 60.\end{aligned}$$

Nerovnost je dokázána. Rovnost nastane, právě když $a = 4/a$ neboli $a = 2$. Ze vztahů $b+c = 15-a = 13$ a $bc = 60/a = 30$ máme $\{b, c\} = \{3, 10\}$. Rovnost proto splňují právě dvě vyhovující trojice (a, b, c) , a to $(2, 3, 10)$ a $(2, 10, 3)$.

Jiné řešení. Kromě rovností $abc = 60$, $a+b+c = 15$ využijeme AG-nerovnost pro dvojici hodnot bc a $a(a+b+c)$:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) &= bc + a(a+b+c) \geq \\ &\geq 2 \cdot \sqrt{bc \cdot a(a+b+c)} = 2\sqrt{60 \cdot 15} = 60.\end{aligned}$$

Rovnost nastane, právě když $bc = a(a+b+c)$ neboli $60/a = 15a$, odkud $a = 2$, takže závěr je stejný jako v prvním řešení.

B – II – 2

Protože číslo a dělí číslo b , lze psát $b = ka$, kde k je kladné celé číslo. Stačí tedy najít kladná celá čísla a , pro která existuje kladné celé číslo k takové, že číslo $3a+4$ je (kladným) násobkem čísla $ka+1$ ($= b+1$). Z této podmínky dostáváme nerovnost $ka+1 \leq 3a+4$, z níž plyne $k-3 \leq (k-3)a \leq 3$, a tedy $k \leq 6$. Navíc pro $k \geq 3$ je už $2(ka+1) > 3a+4$ pro libovolné $a \geq 1$, takže může být jediné $ka+1 = 3a+4$. Probereme všech šest možností pro číslo k :

$k = 1$: $a+1 \mid 3a+4$, a protože $a+1 \mid 3a+3$, muselo by platit $a+1 \mid 1$, což není možné, neboť $a+1 > 1$.

$k = 2$: $2a+1 \mid 3a+4 = (2a+1) + (a+3)$, tedy $2a+1 \mid a+3$. Protože však pro libovolné přirozené a platí $2 \cdot (2a+1) > a+3$, musí být $2a+1 = a+3$ neboli $a = 2$ a odtud $b = ka = 4$.

$k = 3$: $3a+1 = 3a+4$, což není možné.

$k = 4$: $4a+1 = 3a+4$, tedy $a = 3$, $b = 12$.

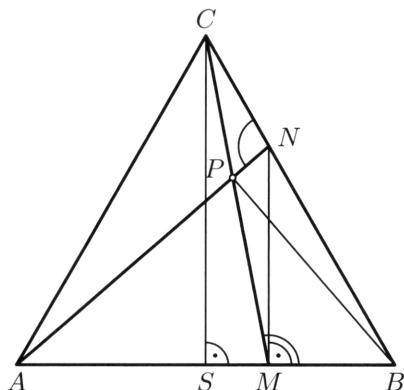
$k = 5$: $5a + 1 = 3a + 4$, což nespĺňuje žádné celé a .

$k = 6$: $6a + 1 = 3a + 4$, tedy $a = 1$, $b = 6$.

Řešením jsou dvojice $(1, 6)$, $(2, 4)$ a $(3, 12)$.

B – II – 3

Ze zadání plyne, že $|BM| = |CN|$, $|AC| = |BC|$ a $|\sphericalangle ACN| = |\sphericalangle CBM| = 60^\circ$, takže trojúhelníky ACN a CBM jsou shodné podle věty *sus*. Proto platí i $|\sphericalangle ANC| = |\sphericalangle CMB|$, takže čtyřúhelník $BNPM$ je tětívový (úhel ANC je doplňkovým úhlem k úhlu ANB , který je protějším úhlem k úhlu CMB ve zmíněném čtyřúhelníku, obr. 10).



Obr. 10

Označme S střed strany AB daného rovnostranného trojúhelníku ABC . Protože $|SB| = \frac{1}{2}|AB|$, je $|SB| : |MB| = 3 : 2$, a protože je i $|CB| : |NB| = 3 : 2$, jsou trojúhelníky SBC a MBN podobné podle věty *sus*. Protože úhel CSB je pravý, musí být pravý i úhel NMB . Kružnice opsaná čtyřúhelníku $BNPM$ je tak Thaletovou kružnicí nad průměrem BN , a tudíž je pravý i úhel BPN , což jsme chtěli dokázat.

B – II – 4

Výsledný ciferný součet je určen jednoznačně a je jím číslo 33.

Pro vyřešení úlohy bude výhodné nejprve zjistit součet S všech pětímístných čísel obsahujících každou z číslic 4, 5, 6, 7, 8. Těchto čísel je zřejmě právě tolik, kolik je různých pořadí uvedených pěti číslic, tedy $5! = 120$. Navíc každá z daných číslic se mezi těmito 120 čísly objevuje

rovnoměrně v každém řádu, tedy 24krát. Součet S tak můžeme rozepsat po jednotlivých řádech jako

$$\begin{aligned} S &= 10^4 \cdot (24 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 8) + \\ &\quad + 10^3 \cdot (24 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 8) + \dots = \\ &= 24 \cdot (4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = \\ &= 24 \cdot 30 \cdot 11\,111. \end{aligned}$$

Obrátme nyní pozornost k možným hodnotám ciferného součtu čísla $S - a$, kde a je pětimístné číslo zmíněného tvaru, tedy $a = 33\,333 + b$, přičemž b je pětimístné číslo obsahující každou z číslic 1, 2, 3, 4, 5. Je tedy

$$S - a = 11\,111 \cdot 24 \cdot 30 - a = 7\,999\,920 - 33\,333 - b = 7\,966\,587 - b.$$

Při odečítání čísla b však nedochází v jednotlivých řádech k přechodu přes desítku, proto je ciferný součet čísla $S - a$ roven $(7 + 9 + 6 + 6 + 5 + + 8 + 7) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 48 - 15 = 33$ pro libovolné pětimístné číslo a obsahující každou z číslic 4, 5, 6, 7, 8.

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Kořeny rovnice $ax^4 + bx^2 + a = 1$ v oboru reálných čísel jsou čtyři po sobě jdoucí členy rostoucí aritmetické posloupnosti. Přitom jeden z těchto členů je zároveň řešením rovnice $bx^2 + ax + a = 1$. Určete všechny možné hodnoty reálných parametrů a, b . (*Peter Novotný*)

A – I – 2

Nechť k, n jsou přirozená čísla. Z platnosti tvrzení „číslo $(n-1)(n+1)$ je dělitelné číslem k “ Adam usoudil, že buď číslo $n-1$, nebo číslo $n+1$ je dělitelné k . Určete všechna přirozená čísla k , pro něž je Adamova úvaha správná pro každé přirozené n . (*Ján Mazák*)

A – I – 3

Jsou dány kružnice k, l , které se protínají v bodech A, B . Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL . Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN . Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětíkový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL . (*Jaroslav Švrček*)

A – I – 4

Mějme $6n$ žetonů až na barvu shodných, po třech od každé z $2n$ barev. Pro každé přirozené číslo $n > 1$ určete počet p_n všech rozdělení takových $6n$ žetonů na dvě hromádky po $3n$ žetonech, kdy žádné tři žetony téže barvy nejsou ve stejné hromádce. Dokažte, že p_n je liché číslo, právě když $n = 2^k$ pro vhodné přirozené k . (*Jaromír Šimša*)

A – I – 5

Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na počátku, aby po konečném počtu vhodných kroků byla na všech stěnách krychle stejná čísla. *(Peter Novotný)*

A – I – 6

Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC s ostrým úhlem při vrcholu C (při obvyklém označení délek stran a velikostí vnitřních úhlů) platí nerovnost

$$(a^2 + b^2) \cos(\alpha - \beta) \leq 2ab.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

(Jaromír Šimša)

A – S – 1

Určete všechna reálná čísla c , pro která má rovnice

$$x^2 + \frac{5}{2}x + c = 0$$

dva reálné kořeny, jež lze s číslem c uspořádat do trojčlenné aritmetické posloupnosti. *(Pavel Calábek, Jaroslav Švrček)*

A – S – 2

Nechť P , Q , R jsou body přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC , pro něž platí $|AP| = |PQ| = |QR| = |RB| = \frac{1}{4}|AB|$. Dokažte, že průsečík M kružnic opsaných trojúhelníkům APC a BRC , který je různý od bodu C , splývá se středem S úsečky CQ . *(Peter Novotný)*

A – S – 3

Dokažte, že pro libovolná dvě různá prvočísla p , q větší než 2 platí nerovnost

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right| > \frac{4}{\sqrt{pq}}.$$

(Jaromír Šimša)

A – II – 1

Rozhodněte, zda mezi všemi osmimístnými násobky čísla 4 je více těch, které ve svém desítkovém zápisu obsahují číslici 1, nebo těch, které číslici 1 neobsahují.

(Ján Mazák)

A – II – 2

Je dán trojúhelník ABC s obsahem S . Uvnitř trojúhelníku, jehož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku ABC , je libovolně zvolen bod U . Označme A' , B' , C' po řadě obrazy bodů A , B , C v souměrnosti se středem U . Dokažte, že šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.

(Pavel Leischner)

A – II – 3

Určete všechny dvojice (m, n) kladných celých čísel, pro něž je číslo $4(mn + 1)$ dělitelné číslem $(m + n)^2$.

(Tomáš Jurík)

A – II – 4

Nechť M je množina šesti navzájem různých kladných celých čísel, jejichž součet je 60. Všechna je napíšeme na stěny krychle, na každou právě jedno z nich. V jednom kroku zvolíme libovolné tři stěny krychle, které mají společný vrchol, a každé z čísel na těchto třech stěnách zvětšíme o 1. Určete počet všech takových množin M , jejichž čísla lze napsat na stěny krychle uvedeným způsobem tak, že po konečném počtu vhodných kroků budou na všech stěnách stejná čísla.

(Peter Novotný)

A – III – 1

Určete velikosti vnitřních úhlů všech trojúhelníků ABC s vlastností: Uvnitř stran AB , AC existují po řadě body K , M , které s průsečíkem L přímk MB a KC tvoří tetivové čtyřúhelníky $AKLM$ a $KBCM$ se shodnými opsanými kružnicemi.

(Jaroslav Švrček)

A – III – 2

Určete všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí

$$(p + 1)(q + 2)(r + 3) = 4pqr.$$

(Jaromír Šimša)

A – III – 3

Reálná čísla x, y, z vyhovují soustavě rovnic

$$x + y + z = 12, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokažte, že platí následující tvrzení:

- a) Každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9, avšak nejvýše 25.
- b) Některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 a jiné z nich je alespoň 5.

(Jaromír Šimša)

A – III – 4

Uvažujme kvadratický trojčlen $P(x) = ax^2 + bx + c$ s reálnými koeficienty $a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2$. Adam a Boris hrají následující hru: Je-li na tahu Adam, vybere jeden z koeficientů trojčlenu a nahradí ho *součtem* zbylých dvou. Pokud je na tahu Boris, vybere jeden z koeficientů a nahradí ho *součinem* zbylých dvou. Adam začíná a hráči se pravidelně střídají. Hru vyhrává ten, po jehož tahu má rovnice $P(x) = 0$ dva různé reálné kořeny. Určete, který z hráčů má vítěznou strategii v závislosti na počátečním trojčlenu $P(x)$.

(Michal Rolínek)

A – III – 5

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB , V průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD . Dokažte, že přímka EP prochází středem úsečky OV .

(Karel Horák)

A – III – 6

Označme $\mathbb{R}^+$ množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x)f(y) = f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy}.$$

(Pavel Calábek)

A – I – 1

Vzhledem k tomu, že rostoucí aritmetickou posloupnost tvoří čtyři navzájem různá reálná čísla, musí mít první z daných rovnic čtyři různé reálné kořeny. Je proto $a \neq 0$.

Označme x_0 společný kořen obou rovnic. Pak je x_0 také kořenem rovnice, která vznikne odečtením druhé z daných rovnic od první, tj. rovnice $ax^4 - ax = 0$. Tu dále upravíme na tvar $ax(x^3 - 1) = 0$. Pro společný reálný kořen x_0 obou daných rovnic odtud plyne $x_0 = 0$ nebo $x_0 = 1$.

Dosazením $x_0 = 0$ do první z daných rovnic dostaneme $a = 1$, takže tato rovnice je tvaru $x^4 + bx^2 = 0$. Tato rovnice však pro žádné reálné číslo b nemá čtyři různé reálné kořeny (číslo 0 je jejím alespoň dvojnásobným kořenem), proto $x_0 \neq 0$.

Jediným společným kořenem obou rovnic je tudíž $x_0 = 1$. Dosazením této hodnoty do kterékoli z obou daných rovnic dostaneme $b = 1 - 2a$. První rovnici pak lze zapsat ve tvaru $ax^4 + (1 - 2a)x^2 + a - 1 = 0$, z něhož je patrné, že má i kořen -1 , a po vytknutí součinu kořenových činitelů $(x - 1)(x + 1)$ dostaneme rovnici

$$(x - 1)(x + 1)(ax^2 - a + 1) = 0. \quad (1)$$

Kvadratický dvojčlen $ax^2 - (a - 1)$ má mít dva různé kořeny, kterými musí být dvě navzájem opačná (nenulová) čísla ξ a $-\xi$. To je splněno, právě když $(a - 1)/a > 0$, tj. právě když $a > 1$ nebo $a < 0$. Volíme-li značení tak, že $\xi > 0$, dostáváme pro aritmetickou posloupnost všech čtyř kořenů dvě možnosti podle toho, zda je $0 < \xi < 1$ nebo $\xi > 1$.

V prvním případě tvoří čtyři kořeny rovnice (1) aritmetickou posloupnost $-1, -\xi, \xi, 1$, která má zřejmě diferencí $\frac{2}{3}$, proto $\xi = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Toto číslo ξ je kořenem rovnice (1), právě když $a = 1/(1 - \xi^2) = \frac{9}{8}$. Potom $b = 1 - 2a = -\frac{5}{4}$.

V druhém případě tvoří čtyři kořeny rovnice (1) aritmetickou posloupnost $-\xi, -1, 1, \xi$ s diferencí 2, proto $\xi = 1 + 2 = 3$. Číslo 3 je kořenem rovnice (1), právě když $a = 1/(1 - 3^2) = -\frac{1}{8}$. Potom $b = 1 - 2a = \frac{5}{4}$.

Závěr. Úloze vyhovují právě dvě dvojice reálných čísel (a, b) , a to

$$(a, b) \in \left\{ \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{4} \right), \left(\frac{9}{8}, -\frac{5}{4} \right) \right\}.$$

Ukážeme, že pro nesoudělná přirozená čísla r a s , kde $r > 2$ a $s > 2$, existuje přirozené číslo n s vlastností

$$r \mid n - 1 \quad \text{a} \quad s \mid n + 1.$$

Pro takové číslo n a číslo $k = rs$ není Adamova úvaha správná, protože z předpokladu, že číslo k dělí číslo $(n - 1)(n + 1)$, neplyne, že k dělí $n - 1$ ani že k dělí $n + 1$. Kdyby totiž $k = rs$ dělilo např. $n - 1$, dělilo by číslo s obě čísla $n + 1$ i $n - 1$, což vzhledem k rovnosti $(n + 1) - (n - 1) = 2$ není možné, neboť $s > 2$.

Existenci čísla n z první věty řešení dokážeme tak, že uvážíme s čísel

$$2, \quad r + 2, \quad 2r + 2, \quad \dots, \quad (s - 1)r + 2.$$

Ta dávají při dělení číslem s vesměs různé zbytky. Kdyby totiž některá dvě z nich, řekněme $ir + 2$ a $jr + 2$ ($0 \leq i < j \leq s - 1$), dávala při dělení číslem s stejný zbytek, potom by číslo s dělilo i jejich rozdíl $(i - j)r$, a vzhledem k nesoudělnosti čísel r a s tudíž i rozdíl $i - j$, což není možné, protože $|i - j| < s$. Uvedených s čísel tedy dává úplnou soustavu zbytků modulo s , proto mezi nimi existuje číslo, které při dělení číslem s dává zbytek 0, nechť je to číslo $lr + 2$. Potom ovšem pro číslo $n = lr + 1$ platí, že r dělí $n - 1$ a s dělí $n + 1$.

Uvědomme si, že každé číslo k dělitelné dvěma lichými prvočísly se dá zapsat jako součin dvou nesoudělných čísel větších než 2. Adamova úvaha může být tedy správná pouze pro ta čísla k , která jsou dělitelná nejvýše jedním lichým prvočíslem. To znamená, že číslo k má jeden z následujících tří tvarů:

$$k = 2^s, \quad k = p^t, \quad k = 2p^t,$$

kde p je liché prvočíslo, s celé nezáporné a t přirozené číslo.

Nechť $k = 2^s$, kde s je celé nezáporné číslo. Pro $s = 0$ není Adamova úvaha správná, protože číslo $k = 2^0 = 1$ dělí každé přirozené číslo, tedy dělí obě čísla $n - 1$ i $n + 1$. Pro $s = 1$ také není Adamova úvaha správná, protože pokud $k = 2^1 = 2$ dělí číslo $(n - 1)(n + 1)$, je jeden z činitelů sudý, ale pak je sudý i druhý činitel. Pro číslo $s = 2$, tedy pro $k = 2^2 = 4$ Adamova úvaha správná je. Pokud totiž 4 dělí číslo $(n - 1)(n + 1)$, je aspoň jeden z obou činitelů sudý, takže jde o dvě po sobě jdoucí *sudá* čísla, z nichž právě jedno je dělitelné čtyřmi. Konečně pro libovolné $s \geq 3$ Adamova úvaha správná není, stačí vzít číslo $n = 2^{s-1} - 1$.

Nechť $k = p^t$, kde p je liché prvočíslo a t přirozené číslo. Potom je Adamova úvaha správná, jelikož obě čísla $n - 1$ a $n + 1$ nemohou být současně dělitelná stejným lichým prvočíslem p , a proto je právě jedno z nich dělitelné číslem $p^t = k$.

Nechť $k = 2p^t$, kde p je liché prvočíslo a t přirozené číslo. Potom je Adamova úvaha také správná: obě čísla $n - 1$ a $n + 1$ jsou nutně sudá a přitom nemohou být současně dělitelná stejným lichým prvočíslem p , proto je právě jedno z nich dělitelné číslem $2p^t = k$.

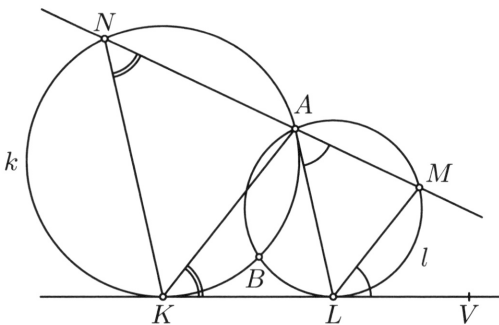
Závěr. Adamova úvaha je správná pro každé přirozené číslo n pouze pro přirozená čísla k jednoho z tvarů

$$k = 4, \quad k = p^t, \quad k = 2p^t,$$

kde p je liché prvočíslo a t přirozené číslo.

A – I – 3

Z rovnosti obvodového a úsekového úhlu příslušného tětívě AK kružnice k plyne (obr. 11) $|\sphericalangle KNA| = |\sphericalangle LKA|$ a podobně z rovnosti obvodového a úsekového úhlu příslušného tětívě AL kružnice l plyne $|\sphericalangle VLM| = |\sphericalangle LAM|$, kde jsme jako V označili nějaký bod polopřímky opačné k polopřímce LK .



Obr. 11

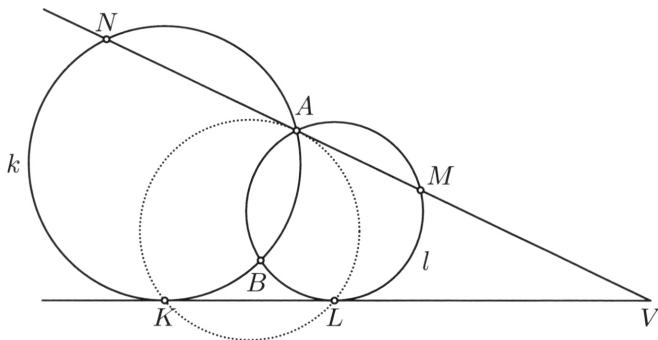
Čtýřúhelník $KLMN$ je tětíkový, právě když $|\sphericalangle KNA| = |\sphericalangle VLM|$ neboli $|\sphericalangle LKA| = |\sphericalangle LAM|$. Poslední rovnost ovšem platí, právě když je $\sphericalangle LAM$ úsekovým úhlem příslušným obvodovému úhlu $\sphericalangle LKA$ tětivy LA kružnice opsané trojúhelníku AKL , tedy právě když je přímka MN tečnou této kružnice.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. Vyřešme úlohu nejprve za předpokladu, že přímky KL a MN jsou rovnoběžné. V takovém případě jsou zřejmě oba trojúhelníky ANK a MAL rovnoramenné, protože osy stran AN , resp. MA procházejí odpovídajícím vrcholem K , resp. L (jinak bodem dotyku tečny rovnoběžné s tětivou AN , resp. MA kružnice k , resp. l). Je tedy $|LA| = |LM|$ a $|KN| = |KA|$. Přitom čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když je to rovnoramenný lichoběžník, tj. $|LM| = |KN|$. To podle předchozí dvojice rovností nastane, právě když je trojúhelník KLA rovnoramenný neboli právě když MN je tečnou jeho kružnice opsané ve vrcholu proti základně KL . (Vzhledem k tomu, že pak jsou trojúhelníky ANK a MAL shodné, uvedená situace nastane, právě když jsou kružnice k , l shodné.)

Předpokládejme dále, že přímky MN a KL jsou různoběžné, a označme V jejich průsečík (obr. 12). Užitím mocnosti bodu V ke kružnicím k a l dostaneme

$$|VK|^2 = |VA| \cdot |VN| \quad \text{a} \quad |VL|^2 = |VM| \cdot |VA|.$$



Obr. 12

Vynásobením obou vztahů obdržíme

$$|VK|^2 \cdot |VL|^2 = |VN| \cdot |VA|^2 \cdot |VM|. \quad (1)$$

Čtyřúhelník $KLMN$ je ovšem tětivový, právě když platí

$$|VK| \cdot |VL| = |VN| \cdot |VM|$$

neboli — s přihlédnutím k (1) — právě když platí

$$|VK| \cdot |VL| = |VA|^2.$$

Poslední rovnost ovšem platí, právě když přímka MN (procházející bodem A) je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL . Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

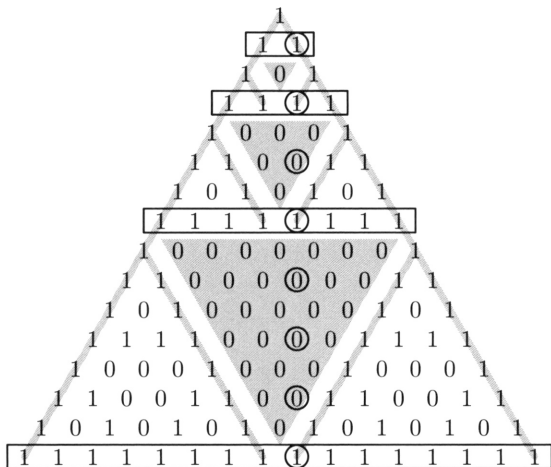
A – I – 4

Žádné tři žetony téže barvy neleží na jedné hromádce, tedy na každé z hromádek leží alespoň jeden žeton zvolené barvy. Každé vyhovující rozdělení žetonů do hromádek je pak charakterizováno tím, na které z nich leží právě jeden ze tří žetonů té které barvy.

Předpokládejme, že v jedné z hromádek je právě l barev zastoupeno jedním žetonem a zbylých $2n - l$ barev dvěma. Jednoduchým výpočtem $l + 2(2n - l) = 3n$ ovšem zjistíme, že toho lze dosáhnout jen při $l = n$. Proto je zkoumaný počet p_n roven počtu rozdělení $2n$ žetonů navzájem různých barev na dvě (neuspořádané) skupiny po n žetonech, tedy

$$p_n = \frac{1}{2} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2(n!)^2} = \frac{2n \cdot (2n-1)!}{2n \cdot (n-1)! n!} = \binom{2n-1}{n}. \quad (1)$$

Zbývá dokázat, že poslední kombinační číslo je liché, právě když je číslo n mocninou dvou. Tento poznatek (a vlastně i metodu jeho důkazu) lze vypořádat z dobře známého schématu všech kombinačních čísel v podobě Pascalova trojúhelníku:



V našem schématu ovšem nejsou samotná kombinační čísla, nýbrž jejich zbytky 0 či 1 při dělení dvěma. K jejich určení není nutné kombinační

čísla vůbec počítat, protože z rekurentních vzorců

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ a } \binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad (2)$$

můžeme postupně po jednotlivých řádcích namísto kombinačních čísel rovnou psát jejich zbytky při dělení jakýmkoli pevným číslem, v našem případě číslem 2.

Všimněme si, co naše schéma napovídá. Některé řádky (vyznačené obdélníčky) jsou sestaveny ze samých jednotek. Díky rekurentním vzorcům (2) pod každým takovým řádkem zřejmě vznikne trojúhelník sestavený ze samých nul (tři takové trojúhelníky jsou vyznačeny šedým podtiskem) a olemovaný zleva i zprava samými jednotkami; bezprostředně pod ním opět leží řádek ze samých jedniček. Protože zbytky všech zkoumaných čísel $\binom{2n-1}{n}$ (v našem schématu vyznačených kroužky) leží v popsaných obdélníčcích nebo trojúhelnících, bude takové kombinační číslo liché, právě když bude mít pozici v některém obdélníčku.

Naše pozorování nyní popíšeme přesněji a rovnou je ověříme matematickou indukcí.

Řádky ze samých jedniček jsou právě řádky s kombinačními čísly $\binom{n-1}{i}$ ($0 \leq i \leq n-1$), kde n je tvaru $n = 2^k$. Tvzení triviálně platí pro $k = 1$. Předpokládejme tedy, že platí pro nějaké $k \geq 1$, a označme P_n prvních $n = 2^k$ řádků schématu. Dalšíh n řádků si můžeme představit jako tři rovnostranné trojúhelníky čísel: první a třetí s n řádky jsou téže velikosti jako P_n , mezi nimi je pak $(n-1)$ -řádkový trojúhelník (vrcholem dolů), který je díky jednotkám v základně trojúhelníku P_n a rekurentním vzorcům (2) sestaven ze samých nul. Proto mají první a třetí trojúhelník jednotky nejen v horních vrcholech a na stranách ležících na hranici celého schématu, ale i na stranách, kterými se přimykají k druhému trojúhelníku, tedy na začátku i konci každého ze svých n řádků. Plyne to opět ze vzorců (2), které pak ovšem vedou k dalšímu, pro nás hlavnímu závěru: První a třetí trojúhelník jsou totožné s trojúhelníkem P_n . Můžeme tedy shrnout, že každý z $n-1$ přidaných řádků obsahuje aspoň jednu nulu, zatímco n -tý řádek (složený ze dvou n -tých řádků trojúhelníku P_n) obsahuje samé jedničky. Tvzení tudíž platí i pro $2n = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ řádků Pascalova trojúhelníku modulo 2, tj. i pro číslo $k+1$.

Vzhledem k tomu, že zkoumané číslo $p_n = \binom{2n-1}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$ leží vždy uprostřed sudých řádků Pascalova trojúhelníku, je zřejmé, že leží buď v některém obdélníčku, anebo v některém šedém trojúhelníku, jež se po-

stupně střídají. Číslo p_n je tedy skutečně liché, právě když n je mocnina dvou.

Jiné řešení. Počet p_n požadovaných rozdělení žetonů určíme stejně jako v původním řešení vzorcem

$$p_n = \frac{(2n)!}{2(n!)^2},$$

který dále upravíme na tvar

$$\begin{aligned} p_n &= 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)(2n)}{2(n!)^2} = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2^n n!}{2(n!)^2} = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2^{n-1}}{n!}. \end{aligned} \quad (3)$$

Pro nejvyšší mocninu 2^a , která dělí $n!$, platí

$$a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2^m} \right\rfloor,$$

kde $2^m \leq n < 2^{m+1}$ a $\lfloor x \rfloor$ značí *dolní celou část čísla x* , tedy největší celé číslo, které není větší než x . Odtud pro exponent a plyne odhad

$$a \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^m} = n \left(1 - \frac{1}{2^m} \right) = n - \frac{n}{2^m} \leq n - 1.$$

Z vyjádření (3) tedy vidíme, že číslo p_n je liché, právě když $a = n - 1$ neboli n je tvaru 2^m .

A – I – 5

V každém kroku se součet všech čísel na stěnách krychle zvětší o 2, jeho parita se tedy nezmění. Jsou-li na všech stěnách krychle stejná čísla, je jejich součet násobkem šesti, a je tudíž dělitelný dvěma. Nutnou podmínkou k tomu, abychom tohoto stavu dosáhli, tedy je, aby i na počátku byl součet všech čísel na stěnách krychle dělitelný dvěma.

Tato podmínka je zároveň postačující. Předpokládejme, že součet všech šesti celých čísel na stěnách krychle je na počátku dělitelný dvěma. Ukážeme, jak po určitém počtu kroků dosáhnout toho, že na všech stěnách krychle budou stejná čísla.

Označme stěny krychle $S_1, S_2, \dots, S_6$, přičemž stěna S_1 je proti stěně S_6 , stěna S_2 proti S_5 a S_3 proti S_4 .¹ Krok, v němž zvětšíme čísla na stěnách S_i, S_j , budeme značit k_{ij} . A protože nás zajímá jen relativní hodnota očíslování stěn, tj. zda a o kolik se liší od nejmenší hodnoty všech šesti čísel, budeme dále pracovat jen s těmito relativními hodnotami (což budou nezáporná celá čísla s nejmenší hodnotou 0).

Posloupností kroků $k_{12}, k_{23}, k_{35}, k_{54}, k_{41}$ zajistíme, že se číslo na každé stěně kromě stěny S_6 zvětší o 2, což vzhledem k naší úmluvě vlastně znamená, že jsme (relativní) hodnotu čísla na stěně S_6 o 2 zmenšili. Podobným způsobem můžeme o 2 „zmenšit“ číslo na libovolné stěně krychle. Je tedy zřejmé, že popsaným způsobem dosáhneme toho, že (relativní) hodnoty čísel na stěnách budou jen 0 nebo 1, nula mezi nimi ovšem musí být aspoň jedna (podle významu relativních hodnot). Nyní již stačí prošetřit následující možnosti (připomeňme, že součet všech šesti čísel je sudý):

- a) Na stěnách krychle jsou vesměs 0; tvrzení pak platí triviálně.
- b) Na stěnách krychle jsou právě dvě 1 (na ostatních 0). Bez ohledu na to, zda jsou obě jedničky na sousedních či protilehlých stěnách, vždy můžeme rozdělit zbývající čtyři stěny s nulami na dvě dvojice sousedních stěn a ve dvou krocích zvětšit jejich čísla o 1.
- c) Na stěnách krychle jsou právě čtyři 1 (na zbývajících dvou stěnách jsou 0). Tento případ vyřešíme tak, že nejprve snížíme (způsobem popsaným výše) hodnotu každé stěny s jedničkou o dva, čímž ovšem (v relativních hodnotách) dostaneme přesně situaci popsanou v b).

Závěr. Dosáhnout toho, že po konečném počtu kroků budou na všech stěnách krychle napsána stejná čísla, lze, právě když je součet (celých) čísel na všech šesti stěnách krychle dělitelný dvěma.

Poznámka. Část c) předchozího řešení lze vyřešit i takto: Jsou-li obě 0 na sousedních stěnách, můžeme je jediným krokem zvětšit na 1. Jsou-li obě 0 na protilehlých stěnách (bez újmy na obecnosti necht' jsou to např. S_1 a S_6), pomocí kroků $k_{12}, k_{36}, k_{15}, k_{46}$, dosáhneme toho, že na všech stěnách krychle budou napsána čísla 2.

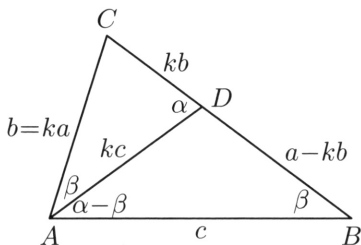
A – I – 6

Je-li $a = b$, je $\alpha = \beta$, takže $\cos(\alpha - \beta) = 1$ a dokazovaná nerovnost platí jako rovnost $a^2 + a^2 = 2a^2$ (dodejme, že bez ohledu na to, zda je

¹ Podobné jsou očíslovány i stěny běžné hrací kostky: součet bodů na protilehlých stěnách dává 7.

úhel γ ostrý či nikoli). Protože dokazovaná nerovnost je symetrická v a , b (kosinus je sudá funkce), můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a > b$ neboli $\alpha > \beta$.

Je-li tedy $\alpha > \beta$, lze úhel BAC velikosti α rozdělit pomocí bodu $D \in BC$ na dva úhly CAD a DAB velikostí β a $\alpha - \beta$ (obr. 13). Trojúhelník DAC je pak zmenšením trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti $k = b : a$, takže $|AD| = bc/a$ a $|DC| = b^2/a$, odkud $|BD| = |BC| - |DC| = (a^2 - b^2)/a$.



Obr. 13

Vyjádření $|AD|$, $|BD|$ dosadíme do rovnosti z kosinové věty pro trojúhelník ABD a upravíme:

$$\begin{aligned} |BD|^2 &= |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB| \cdot |AD| \cos(\alpha - \beta), \\ \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} &= c^2 + \frac{b^2 c^2}{a^2} - \frac{2bc^2 \cos(\alpha - \beta)}{a}, \\ (a^2 - b^2)^2 &= \delta \cdot c^2, \quad \text{kde } \delta = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha - \beta) > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

(Poslední nerovnost plyne z toho, že pro $\alpha \neq \beta$ je $\cos(\alpha - \beta) < 1$.) Vztah (1) spolu s rovností $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ nyní využijeme k úpravě rozdílu $\frac{1}{4}$ pravé a levé strany dokazované nerovnosti, který navíc ještě vynásobíme výrazem $2ab$:

$$\begin{aligned} 2ab \frac{1}{4} &= 2ab(2ab - (a^2 + b^2) \cos(\alpha - \beta)) = \\ &= 4a^2 b^2 - (a^2 + b^2) \cdot 2ab \cos(\alpha - \beta) = \\ &= 4a^2 b^2 - (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - \delta) = \delta(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 = \\ &= \delta(a^2 + b^2) - \delta \cdot c^2 = \delta(a^2 + b^2 - c^2) = \delta \cdot 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

Po vydělení výrazem $2ab$ dostáváme vztah $\frac{1}{4} = \delta \cos \gamma$, takže s ohledem na $\delta > 0$ má výraz $\frac{1}{4}$ stejné znaménko jako $\cos \gamma$ (zopakujme, že za předpokladu $a \neq b$). Odtud plyne, že v případě, kdy $\gamma < 90^\circ$ a $a \neq b$, platí

nerovnost ze zadání úlohy jako *ostrá*. Tím je úloha vyřešena a odpověď na její závěrečnou otázku zní: v dokázané nerovnosti (v zadané situaci, tj. při ostrém úhlu γ) nastane rovnost, právě když $a = b$.

Poznámka 1. Odvozený vztah $\frac{1}{4} = \delta \cos \gamma$ se bez pomocných označení přepíše jako identita

$$2ab - (a^2 + b^2) \cos(\alpha - \beta) = (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha - \beta)) \cos \gamma, \quad (2)$$

která platí pro *libovolný* trojúhelník ABC (k našemu odvození stačí přidat triviální ověření rovnosti (2) v případě $a = b$). Výsledek (2) umožňuje snadnou diskusi o jednotlivých případech relace

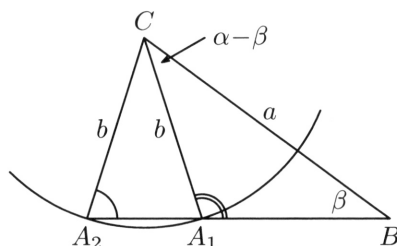
$$(a^2 + b^2) \cos(\alpha - \beta) \leq 2ab,$$

neboť první činitel v pravé straně (2) je vždy nezáporný:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha - \beta) \geq a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0.$$

Relace dopadá takto: rovnost nastane, právě když $a = b$ nebo $\gamma = 90^\circ$; v případě $a \neq b$ pak platí ostrá nerovnost $<$ či $>$ podle toho, zda je $\gamma < 90^\circ$ nebo $\gamma > 90^\circ$.

Jiné řešení. Původní řešení je celé založeno na vztahu (1), proto jeho odlišné odvození nyní uvedeme jako „jiné řešení“. Tvar kladného výrazu δ v (1) je motivací k úvaze o pomocném trojúhelníku, jehož dvě strany mají délky a , b a svírají úhel velikosti $\alpha - \beta$ (opět předpokládáme, že $a > b$). Nás zajímá délka jeho třetí strany, kterou označíme d , takže pro výraz δ ve vztahu (1), který se chystáme dokázat, budeme mít $\delta = d^2$. Ukažme, že takový trojúhelník o stranách a , b , d je — vedle původního trojúhelníku o stranách a , b , c — druhým řešením úlohy *sestrojit trojúhelník ABC , jsou-li dány strany a , b a úhel β* . Konstrukci obou řešení A_1BC a A_2BC vidíme na obr. 14. Součet úhlů při vrcholech A_1 a A_2 (vyznačených ob-



Obr. 14

loučky) je zřejmě 180° . V jednom z trojúhelníků je to úhel α , ve druhém tedy úhel $180^\circ - \alpha$, takže úhel při vrcholu C druhého trojúhelníku je právě $\alpha - \beta$, jak jsme si přáli.² Úsečky A_1B , A_2B tedy mají (v některém pořadí) délky c a d . Z mocnosti bodu B k sestrojené kružnici o středu C a poloměru b vyplývá rovnost

$$cd = a^2 - b^2, \quad (3)$$

z níž po umocnění na druhou dostáváme $c^2d^2 = (a^2 - b^2)^2$. A to je kýžený klíčový vztah (1) z původního řešení, neboť jak už jsme naznačili, podle kosinové věty platí

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha - \beta). \quad (4)$$

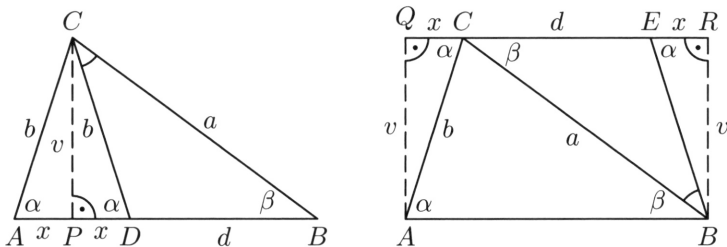
Poznámka 2. V původním řešení jsme ze vztahu (1) odvodili identitu zapsanou v Poznámce 1 jako (2). Právě uvedený alternativní důkaz (1) s využitím konstrukční úlohy (a, b, β) má zajímavý důsledek: díky „rovnoprávnosti“ obou řešení z obr. 14 musí platit i identita

$$2ab - (a^2 + b^2) \cos \gamma = c^2 \cos(\alpha - \beta), \quad (5)$$

získaná z (2) výměnou rolí trojúhelníků s trojicemi stran (a, b, c) a (a, b, d) , kterou lze odvodit i trigonometricky.

Další řešení. Pomocný trojúhelník se stranami a, b ($a > b$) svírajícími úhel $\alpha - \beta$ a třetí stranou d danou vztahem (4) lze využít k řešení úlohy i bez objevu „mocnostní“ rovnosti (3) následujícím postupem.

Zmíněný trojúhelník lze k trojúhelníku ABC vhodně přikreslit dvěma způsoby patrnými z obr. 15. Vlevo je to trojúhelník BCD (ten známe už z předchozího řešení), vpravo to je trojúhelník BCE ; snadno pak ověříme, že oba vyznačené úhly BCD a CBE mají požadovanou velikost $\alpha - \beta$.



Obr. 15

² V případě $\alpha = 90^\circ$ sice platí $A_1 = A_2$, avšak na celé naší úvaze není třeba nic měnit: tehdy totiž $\alpha - \beta = \gamma$ a $c = d$.

(Oba obrázky odpovídají případu $\alpha < 90^\circ$, v úplném řešení by neměl chybět obrázek pro případ $\alpha \geq 90^\circ$, který zde posuzovat nebudeme, protože další postup vyžaduje jen nepatrnou obměnu.) Pomocí délky d ze vztahu (4) nyní upravíme dokazovanou (ostrou) nerovnost:

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2) \cos(\alpha - \beta) &< 2ab, \\(a^2 + b^2) \cdot 2ab \cos(\alpha - \beta) &< 4a^2b^2, \\(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - d^2) &< 4a^2b^2, \\(a^2 - b^2)^2 &< (a^2 + b^2)d^2.\end{aligned}\tag{6}$$

Nakonec využijeme Pythagorovu větu pro dvojice pravoúhlých trojúhelníků z obr. 15; v obou variantách jak s trojúhelníkem BCD , tak s trojúhelníkem BCE pak platí

$$a^2 = (d + x)^2 + v^2 \quad \text{a} \quad b^2 = x^2 + v^2,$$

takže $a^2 - b^2 = d^2 + 2dx = d(d + 2x)$. Po dosazení do levé strany nerovnosti (6) a zkrácení výrazem d^2 dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$(d + 2x)^2 < a^2 + b^2 \quad \text{neboli} \quad c^2 < a^2 + b^2,$$

která (díky kosinové větě) přesně vyjadřuje podmínku $\gamma < 90^\circ$ ze zadání úlohy. Tím je celé její řešení hotovo, protože v případě $a = b$ zřejmě v dokazované nerovnosti nastane rovnost.

Další řešení. Ještě jedním způsobem za předpokladů $\gamma < 90^\circ$ a $a > b$ (neboli $\alpha > \beta$) dokážeme ostrou nerovnost

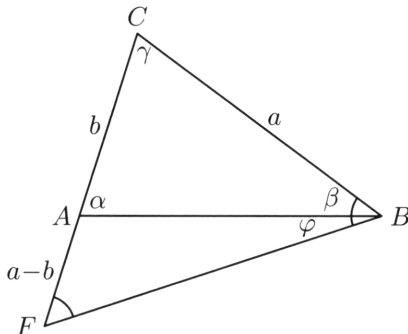
$$(a^2 + b^2) \cos(\alpha - \beta) < 2ab.$$

Nejprve ji ekvivalentně upravíme, když položíme $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) > 0$ a využijeme vzorec $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2 \varphi$:

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(1 - 2\sin^2 \varphi) &< 2ab, \\(a - b)^2 &< 2(a^2 + b^2) \sin^2 \varphi, \\2\left(\frac{a - b}{2\sin \varphi}\right)^2 &< a^2 + b^2.\end{aligned}$$

To je (podle sinové věty) nerovnost $2r^2 < a^2 + b^2$ pro poloměr r kružnice opsané libovolnému trojúhelníku se stranou $a - b$ a protilehlým vnitřním

úhlem φ . Takový trojúhelník dostaneme, když jako na obr. 16 stranu CA trojúhelníku ABC prodloužíme za bod A do bodu F tak, aby platilo



Obr. 16

$|CF| = a$ ($a > b$). Potom má trojúhelník ABF stranu AF délky $a - b$ s protilehlým úhlem ABF , jehož velikost určíme takto: rovnoramenný trojúhelník BCF má při základně BF shodné úhly $90^\circ - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, takže

$$|\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle CBF| - |\sphericalangle CBA| = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \varphi.$$

Proto je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABF skutečně roven zkoumané hodnotě r . Pro ni tak získáme z předpokladu $\gamma < 90^\circ$ odhad

$$r = \frac{|AB|}{2 \sin |\sphericalangle AFB|} = \frac{c}{2 \sin(90^\circ - \frac{1}{2}\gamma)} < \frac{c}{2 \sin 45^\circ} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

neboli $2r^2 < c^2$; ze stejného předpokladu $\gamma < 90^\circ$ ovšem vyplývá (díky kosinové větě pro trojúhelník ABC) další nerovnost $c^2 < a^2 + b^2$. Dohromady dostáváme $2r^2 < c^2 < a^2 + b^2$ a kýžená nerovnost $2r^2 < a^2 + b^2$ je tak dokázána.

Dodejme ještě, že v případě $\gamma > 90^\circ$ ze stejných důvodů platí $2r^2 > c^2 > a^2 + b^2$, což (za předpokladu $a \neq b$) dokazuje opačnou nerovnost

$$(a^2 + b^2) \cos(\alpha - \beta) > 2ab.$$

Poslední řešení. Uvedeme ještě jedno trigonometrické řešení. Pro libovolný trojúhelník ABC platí totiž tzv. *Mollweidův vzorec*

$$\frac{a - b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\gamma},$$

ze kterého plyne následující vyjádření hodnoty $\cos(\alpha - \beta)$:

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = 1 - \frac{2(a-b)^2 \cos^2 \frac{1}{2}\gamma}{c^2}.$$

Dosazením do levé strany dokazované nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \cos(\alpha - \beta) &\leq 2ab, \\ (a^2 + b^2) \left(1 - \frac{2(a-b)^2 \cos^2 \frac{1}{2}\gamma}{c^2} \right) &\leq 2ab, \\ (a-b)^2 &\leq \frac{2(a^2 + b^2)(a-b)^2 \cos^2 \frac{1}{2}\gamma}{c^2}. \end{aligned}$$

Vidíme, že v případě $a = b$ nastane rovnost. V případě $a \neq b$ po dělení kladným výrazem $(a-b)^2$ a další zřejmé ekvivalentní úpravě dostaneme

$$c^2 \leq 2(a^2 + b^2) \cos^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Dosadíme-li sem z rovností

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{a} \quad 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 1 + \cos \gamma,$$

dostaneme po odečtení součtu $a^2 + b^2$ od obou stran nerovnost

$$-2ab \cos \gamma \leq (a^2 + b^2) \cos \gamma \quad \text{neboli} \quad 0 \leq (a+b)^2 \cos \gamma,$$

což díky zadanému předpokladu $\gamma < 90^\circ$ skutečně platí jako ostrá nerovnost. Tím je nerovnost ze zadání úlohy dokázána; rovnost v ní nastane, právě když $a = b$.³

A – S – 1

Předpokládejme, že číslo c má požadovanou vlastnost. Diferenci příslušné aritmetické posloupnosti označme d . Rozlišíme dva případy podle toho, zda číslo c leží mezi kořeny x_1 a x_2 dané kvadratické rovnice, nebo ne:

a) Je-li c prostředním členem předpokládané aritmetické posloupnosti, platí $x_1 = c - d$ a $x_2 = c + d$. Pro součet kořenů tak podle Viètova vztahu dostáváme $-\frac{5}{2} = x_1 + x_2 = 2c$, odkud $c = -\frac{5}{4}$. Navíc pro záporné c

³ I při tomto postupu lze odvodit obecnější závěry uvedené v Poznámce 1 za prvním řešením.

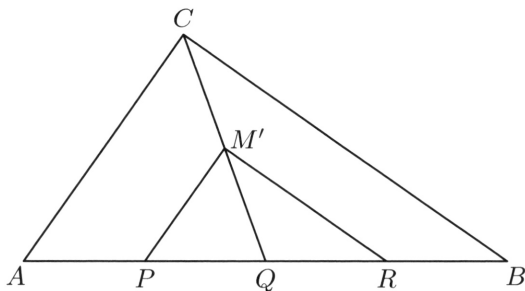
je diskriminant dané rovnice kladný, takže má dva reálné kořeny. (Pro $c = -\frac{5}{4}$ má daná rovnice kořeny $x_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{5}$.)

b) Je-li koeficient c krajním členem předpokládané aritmetické posloupnosti, označme kořeny dané rovnice tak, aby platilo $x_1 = c + d$, $x_2 = c + 2d$. Pro jejich součet tentokrát vychází $-\frac{5}{2} = x_1 + x_2 = 2c + 3d$. Vyjádříme-li odtud $d = -\frac{5}{6} - \frac{2}{3}c$ a dosadíme do vztahů $x_1 = c + d$ a $x_2 = c + 2d$, dostaneme $x_1 = \frac{1}{6}(2c - 5)$, $x_2 = -\frac{1}{3}(c + 5)$. Dosadíme-li oba výrazy do Viètova vztahu $x_1x_2 = c$ pro součin kořenů, obdržíme po úpravě kvadratickou rovnici $2c^2 + 23c - 25 = 0$, která má kořeny 1 a $-\frac{25}{2}$. (Podmínku na diskriminant tentokrát ověřovat nemusíme, neboť uvedeným postupem máme zaručeno, že reálná čísla $x_{1,2}$ odpovídající oběma nalezeným hodnotám c splňují oba Viètovy vztahy, takže jsou skutečně kořeny příslušné rovnice. Pro $c = 1$ má daná kvadratická rovnice kořeny $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -2$; pro $c = -\frac{25}{2}$ má rovnice kořeny $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{5}{2}$.)

Závěr. Úloze vyhovují reálná čísla c z množiny $\{-\frac{25}{2}; -\frac{5}{4}; 1\}$.

A – S – 2

Označme M' střed úsečky CQ (obr.17). Protože PM' a RM' jsou střední příčky trojúhelníků AQC a BQC , které jsou podle Thaletovy věty rovnoramenné se základnami AC a BC , jsou čtyřúhelníky $CAPM'$

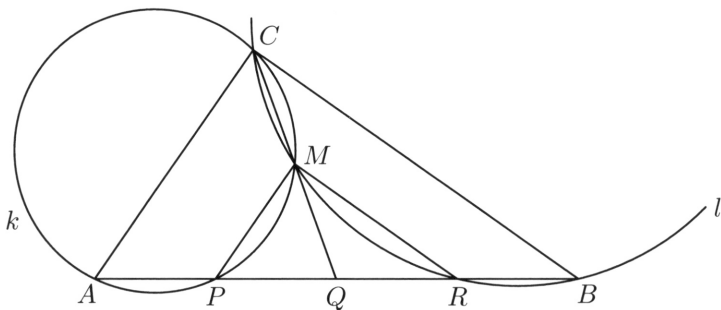


Obr. 17

a $CBRM'$ rovnoramenné lichoběžníky a jim opsané kružnice, jež se protínají v bodech C a M' , jsou zároveň i opsanými kružnicemi uvažovaných trojúhelníků APC a BRC . Je tedy $M = M'$ a tvrzení úlohy je tím dokázáno.

Jiné řešení. Označme c délku přepony AB daného pravoúhlého trojúhelníku ABC . Kružnice opsané trojúhelníkům APC a BRC označme

po řadě k , l (obr. 18). Vzhledem k tomu, že $|QP| \cdot |QA| = |QR| \cdot |QB| = \frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{2}c$, má střed Q přepony AB stejnou mocnost $m = \frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{2}c$ k oběma kružnicím k i l , a leží proto na jejich chordále CM . Navíc podle Thaletovy věty platí $|QC| = |QA| = \frac{1}{2}c$. Z rovnosti $|QM| \cdot |QC| = m$ tak plyne $|QM| = \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}|QC|$, takže M je středem úsečky CQ .



Obr. 18

A – S – 3

Protože p , q jsou různá *lichá* prvočísla, je $|p - q| \geq 2$. Pro levou stranu dané nerovnosti tudíž platí

$$L = \left| \frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right| = \left| \frac{p^2 - q^2}{pq} \right| = \frac{|p - q| \cdot (p + q)}{pq} \geq \frac{2(p + q)}{pq}.$$

Abychom dokázali požadovanou nerovnost

$$L > \frac{4}{\sqrt{pq}},$$

stačí dokázat nerovnost $p + q > 2\sqrt{pq}$. To je ovšem nerovnost, jež je triviálním důsledkem nerovnosti $(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 > 0$, která platí pro libovolná dvě různá kladná čísla p , q . Tím je daná nerovnost dokázána.

A – II – 1

Nejprve určíme počet u všech osmimístných čísel dělitelných čtyřmi. Každé takové číslo má ve svém zápisu na prvním místě zleva nenulovou číslici. Máme tak 9 možností. Na následujících pěti místech má libovolnou číslici desítkové soustavy, tj. pro každou pozici máme 10 možností, a končí

dvojčíslem, které je dělitelné čtyřmi, tj. 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, ..., 96, celkově tedy 25 možností. Proto je

$$u = 9 \cdot 10^5 \cdot 25 = 22\,500\,000.$$

Podobnou úvahu lze provést i při hledání počtu v všech osmimístných čísel dělitelných čtyřmi, která ve svém desítkovém zápisu *neobsahují* číslici 1. Pro první pozici zleva máme nyní 8 možností a pro každou další z pěti následujících pozic máme 9 možností. Na posledních dvou místech zprava musí být dvojčíslí dělitelné čtyřmi, které však neobsahuje číslici 1. Jsou to všechna dvojčíslí z předchozího odstavce kromě 12 a 16, tedy 23 možností. Proto

$$v = 8 \cdot 9^5 \cdot 23 = 10\,865\,016.$$

Závěr. Protože $u > 2v$, je mezi osmimístnými násobky čísla 4 více těch, které ve svém (desítkovém) zápisu číslici 1 obsahují, než těch, které ji neobsahují.

Poznámka. Počet u všech osmimístných násobků lze také určit jednoduchou úvahou: nejmenší násobek je $A = 10\,000\,000$, největší je $B = 99\,999\,996$, takže hledaný počet je $\frac{1}{4}(B - A) + 1 = \frac{1}{4}(B + 4 - A) = 22\,500\,000$.

K důkazu nerovnosti $u > 2v$ není nutné v vyčíslit, protože podíl

$$\frac{u}{v} = \frac{9 \cdot 10^5 \cdot 25}{8 \cdot 9^5 \cdot 23} = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^5 \cdot \frac{25}{23}$$

lze dobře odhadnout pomocí binomické věty

$$\left(\frac{10}{9}\right)^5 = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^5 > 1 + 5 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{9^2} = \frac{136}{81} = \frac{8 \cdot 17}{9^2},$$

tudíž

$$\frac{u}{v} = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^5 \cdot \frac{25}{23} > \frac{9}{8} \cdot \frac{8 \cdot 17}{9^2} \cdot \frac{25}{23} = \frac{17 \cdot 25}{9 \cdot 23} = \frac{425}{207} > 2.$$

A – II – 2

Označme T trojúhelník s vrcholy ve středech stran BC , CA , AB daného trojúhelníku ABC . Obsah trojúhelníku XYZ budeme značit symbolem S_{XYZ} .

The diagram illustrates a tetrahedron $ABCA'$ with vertices A, B, C, C' and A', B' . A shaded triangle OPN is located inside the tetrahedron. Points K, L, M, P, N, O are marked on the edges. A dashed triangle $A_0B_0C_0$ is shown in the background, representing the original tetrahedron.

Protože trojúhelník $A'B'C'$ je obrazem trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti podle středu U , jsou navzájem si odpovídající strany rovnoběžné a v těže souměrnosti si odpovídají dvojice bodů K a N , L a O i M a P . Proto podle věty uu je každý z trojúhelníků AKP , LBM , ONC podobný trojúhelníku ABC . Označme k_1 , k_2 , k_3 koeficienty podobnosti, jež zobrazí trojúhelník ABC postupně na trojúhelníky AKP , LBM , ONC . Obrazy trojúhelníků AKP , LBM , ONC ve středové souměrnosti se středem U jsou po řadě trojúhelníky $A'NM$, $OB'P$, LKC' . Ty jsou rovněž podobné trojúhelníku ABC , přičemž odpovídající koeficienty podobnosti, které na ně převedou trojúhelník ABC , jsou opět k_1 , k_2 , k_3 . Označíme-li c délku strany AB , platí pro délky úseků na straně AB

79

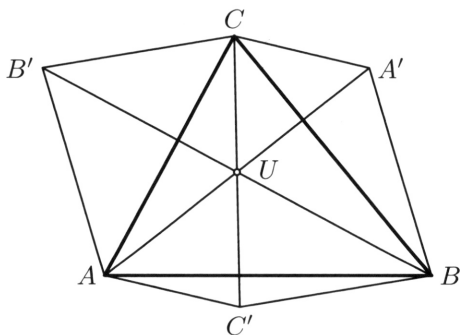
Z podobnosti trojúhelníků ABC a LKC' dále plyne, že velikost výšky z vrcholu C' ke straně AB v trojúhelníku ABC' je rovna $k_3 v_c$, kde v_c je velikost výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC . Je tudíž

$$S_{ABC'} = \frac{1}{2}c \cdot k_3 v_c = k_3 \left(\frac{1}{2}c v_c \right) = k_3 S.$$

Analogicky $S_{BCA'} = k_1 S$ a $S_{CAB'} = k_2 S$. Pro obsah S' šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ tak platí

$$S' = S_{ABC} + S_{BCA'} + S_{CAB'} + S_{ABC'} = (1 + k_1 + k_2 + k_3)S = 2S.$$

Jiné řešení. (Podle Karla Beneše z Gymnázia Kojetín.) Šestiúhelník $AC'BA'CB'$ je středově souměrný podle zvoleného bodu U (obr. 20).



Obr. 20

Každá z jeho úhlopříček AA' , BB' , CC' tudíž dělí tento šestiúhelník na dva shodné čtyřúhelníky, a proto například platí

$$S_{AC'BA'CB'} = 2 S_{AC'BA'}.$$

Stačí tedy dokázat, že čtyřúhelník $AC'BA'$ má stejný obsah S jako trojúhelník ABC . Protože úsečka AU je těžnicí v trojúhelníku CAC' , platí

$$S_{AUC'} = S_{AUC}. \quad (1)$$

Podobně úsečka BU je těžnicí v trojúhelnících ABA' a BCB' , platí tudíž

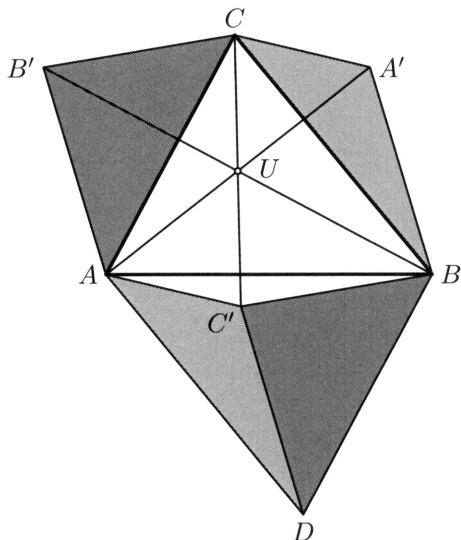
$$S_{BUC'} = S_{BUC} \quad \text{a} \quad S_{BUA'} = S_{BUA}. \quad (2)$$

Sečtením všech tří rovností ze vztahů (1) a (2) dostaneme

$$S_{AC'BA'} = S_{AUC'} + S_{BUC'} + S_{BUA'} = S_{AUC} + S_{BUC} + S_{BUA} = S,$$

což dokazuje platnost daného tvrzení.

Jiné řešení. (Podle Pavla Polcera z *G v Brně*, Křenová, Kateřiny Medkové z *BG Bohuslava Balbína v Hradci Králové* a Zuzany Boršiové z *G v Teplicích*.) Doplňme nejprve trojúhelník ABC na rovnoběžník $ADBC$ (obr. 21). Vzhledem k tomu, že také $AC'A'C$ je rovnoběžník, je v po-



Obr. 21

sunutí určeném vektorem $\mathbf{CA}$ obrazem trojúhelníku CBA' trojúhelník ADC' . Rovněž $BCB'C'$ je rovnoběžník, a proto v posunutí určeném vektorem $\mathbf{CB}$ je obrazem trojúhelníku ACB' trojúhelník DBC' . Platí tedy rovnosti

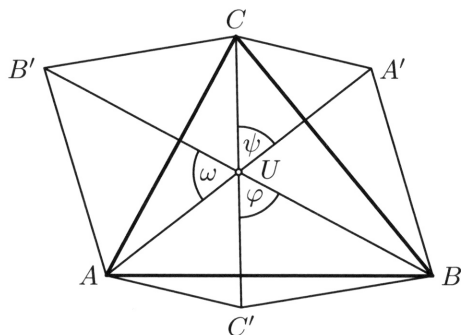
$$S_{CBA'} = S_{ADC'} \quad \text{a} \quad S_{ACB'} = S_{DBC'},$$

které zřejmě znamenají, že obsah zkoumaného šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ je roven obsahu rovnoběžníku $ADBC$, tudíž dvojnásobku obsahu S daného trojúhelníku ABC .

Jiné řešení. (Podle Dominika Lachmana z *G v Olomouci-Hejčíně*.) Ve shodě s obr. 22 označme $\varphi = |\sphericalangle BUC'|$, $\psi = |\sphericalangle CUA'|$ a $\omega = |\sphericalangle AUB'|$.

S ohledem na rovnost sinů vedlejších úhlů lze obsah S trojúhelníku ABC (rovný součtu obsahů trojúhelníků ABU , BCU a CAU) vyjádřit následujícím způsobem

$$S = \frac{1}{2} |AU| \cdot |BU| \sin \omega + \frac{1}{2} |BU| \cdot |CU| \sin \varphi + \frac{1}{2} |CU| \cdot |AU| \sin \psi.$$



Obr. 22

Obsah Q šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ je roven (díky souměrnosti podle středu U) dvojnásobku obsahu čtyřúhelníku $AC'BA'$, který vyjádříme jako součet obsahů trojúhelníků $AC'U$, $C'BU$ a $BA'U$. Dostaneme tak

$$Q = 2 \left(\frac{1}{2} |AU| \cdot |C'U| \sin \psi + \frac{1}{2} |C'U| \cdot |BU| \sin \varphi + \frac{1}{2} |BU| \cdot |A'U| \sin \omega \right).$$

A protože $|UA| = |UA'|$, $|UB| = |UB'|$ a $|UC| = |UC'|$, dostáváme konečně

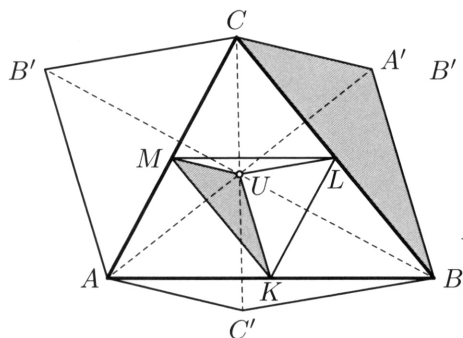
$$\begin{aligned} Q &= 2 \left(\frac{1}{2} |AU| \cdot |BU| \sin \omega + \frac{1}{2} |BU| \cdot |CU| \sin \varphi + \frac{1}{2} |CU| \cdot |AU| \sin \psi \right) = \\ &= 2S, \end{aligned}$$

což bylo třeba dokázat.

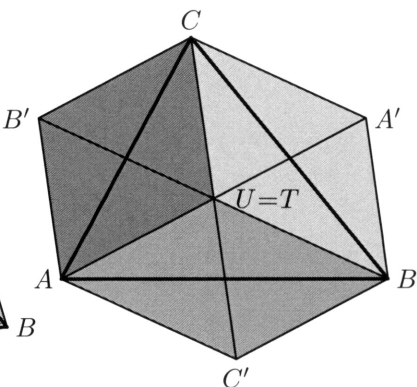
Jiné řešení. Označme K , L , M středy stran AB , BC , CA . Stejnolehlост se středem A a koeficientem 2 zobrazí trojúhelník MKU na trojúhelník CBA' (obr. 23), proto $S_{CBA'} = 4 \cdot S_{MKU}$. Podobně $S_{ACB'} = 4 \cdot S_{KLU}$ a $S_{BAC'} = 4 \cdot S_{LMU}$. Odtud

$$S_{CBA'} + S_{ACB'} + S_{BAC'} = 4 \cdot S_{KLM} = S,$$

takže šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.



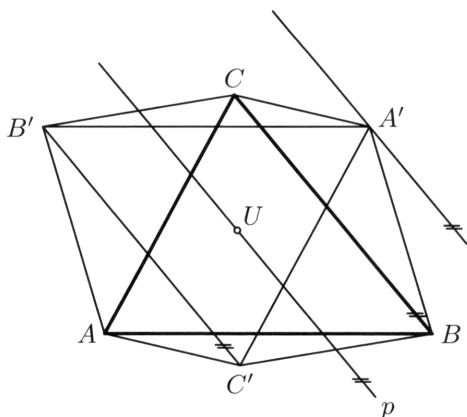
Obr. 23



Obr. 24

Jiné řešení. Je-li bod U totožný s těžištěm T trojúhelníku ABC ($U = T$), je tvrzení úlohy splněno, neboť $S_{A'BC} = S_{TBC}$, $S_{B'CA} = S_{TCA}$ a $S_{C'AB} = S_{TAB}$ (obr. 24).

Předpokládejme nyní, že se bod U pohybuje uvnitř trojúhelníku T po přímce p rovnoběžné se stranou BC , a ukažme, že se obsah šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ nemění. Body A' , B' a C' leží totiž na rovnoběžkách s přímkou p , a proto se nemění obsah trojúhelníku $A'BC$ ani obsahy rovnoběžníku $BCB'C'$ a trojúhelníku $B'C'A$ (obr. 25). Obsah šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ tedy na poloze bodu U na přímce p nezávisí. Podobně lze ukázat, že se obsah šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ nemění, pohybuje-li se bod U po rovnoběžce se stranou AC .



Obr. 25

Libovolný vnitřní bod U trojúhelníku T přitom získáme jako obraz těžiště T trojúhelníku ABC v zobrazení složeném ze dvou posunutí, a to z posunutí ve směru rovnoběžném se stranou BC a z posunutí ve směru rovnoběžném se stranou AC . Proto pro každý bod U uvnitř trojúhelníku T má šestiúhelník $AC'BA'CB'$ stejný obsah jako šestiúhelník odpovídající bodu $U = T$, tedy obsah $2S$, jak jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Označme U' libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC . Protože obsah zkoumaného šestiúhelníku je roven součtu obsahů tří čtyřúhelníků $AC'BU'$, $BA'CU'$ a $CB'AU'$, bude tvrzení úlohy zřejmě platit, dokážeme-li bod U' vybrat tak, aby všechny tři zmíněné čtyřúhelníky byly rovnoběžníky. Protože

$$U = \frac{A + A'}{2} = \frac{B + B'}{2} = \frac{C + C'}{2},$$

mají body A' , B' , C' vyjádření

$$A' = 2U - A, \quad B' = 2U - B, \quad C' = 2U - C,$$

takže potřebné rovnosti

$$\frac{A + B}{2} = \frac{C' + U'}{2}, \quad \frac{B + C}{2} = \frac{A' + U'}{2}, \quad \frac{C + A}{2} = \frac{B' + U'}{2}$$

budou splněny, právě když bod U' bude mít vyjádření $U' = A + B + C - 2U$ neboli $U' = 3T - 2U$, kde $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$ je těžiště trojúhelníku ABC . Odvozená rovnost zapsaná ve tvaru $U' - T = 2(T - U)$ znamená, že kýžený bod U' je určen jako obraz bodu U ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2 . V ní je ovšem obrazem trojúhelníku T výchozí trojúhelník ABC , takže vnitřní bod U trojúhelníku T se skutečně zobrazí na vnitřní bod U' trojúhelníku ABC , jak jsme potřebovali dokázat.

A – II – 3

Předně si uvědomme, že s každou dvojicí (m, n) kladných celých čísel, která úloze vyhovuje, jí vyhovuje i dvojice (n, m) . Proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $m \geq n$.

Pokud kladné celé číslo $A = (m + n)^2$ dělí kladné celé číslo $B = 4(mn + 1)$, nutně platí

$$(m + n)^2 \leq 4(mn + 1) \quad \text{neboli} \quad (m - n)^2 \leq 4.$$

Proto $0 \leq m - n \leq 2$. Nastane tedy právě jedna ze tří následujících možností:

- ▷ $m = n$, pak $A = 4n^2$, $B = 4n^2 + 4$ a A dělí B , právě když $4n^2$ dělí 4, tedy $n = 1$. Dostáváme jedno řešení $(m, n) = (1, 1)$.
- ▷ $m = n + 1$, pak $A = 4n^2 + 4n + 1$, $B = 4n^2 + 4n + 4 = A + 3$. Číslo A dělí B , právě když $4n^2 + 4n + 1$ dělí 3. Ovšem pro kladná celá čísla n platí $4n^2 + 4n + 1 \geq 4 + 4 + 1 = 9$, proto v tomto případě nemá úloha řešení.
- ▷ $m = n + 2$, pak $A = 4n^2 + 8n + 4$, $B = 4n^2 + 8n + 4$. Vidíme, že $A = B$, tedy každá dvojice $(m, n) = (n + 2, n)$ kladných celých čísel je řešením zadané úlohy.

Závěr. Úloze vyhovuje dvojice $(1, 1)$ a dále (s ohledem na symetrii neznámých m, n) rovněž každá z dvojic $(n + 2, n)$ a $(m, m + 2)$, kde m a n jsou libovolná kladná celá čísla.

A – II – 4

Označme stěny krychle $S_1, S_2, \dots, S_6$ tak, že stěna S_1 je protilehlá stěně S_6 , stěna S_2 je proti S_5 a S_3 je proti S_4 . Číslo na stěně S_i označme c_i . Zřejmě libovolný vrchol krychle patří vždy právě jedné z dvojic protilehlých stěn. To znamená, že se v každém kroku zvětší o 1 i hodnota součtů $c_1 + c_6$, $c_2 + c_5$ a $c_3 + c_4$ čísel na protilehlých stěnách. Má-li tedy na konci platit $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6$, a tedy také

$$c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4, \quad (1)$$

musejí být součty čísel na protilehlých stěnách krychle stejné už na počátku (a zůstanou stejné i po každém kroku).

Ukážeme, že podmínka (1) je zároveň postačující. Nechť tedy čísla na stěnách krychle splňují (1). Popíšeme posloupnost kroků, po nichž budou na všech stěnách krychle stejná čísla. Krok, v němž zvětšíme čísla na stěnách S_i, S_j, S_m , označme k_{ijm} . Bez újmy na obecnosti nechť $c_1 = p$ je největší ze šesti čísel na krychli. Nyní provedeme $(p - c_2)$ -krát krok k_{246} a $(p - c_3)$ -krát krok k_{356} . Dosáhneme tak toho, že na stěnách S_1, S_2, S_3 budou stejná čísla p . Díky podmínce (1) je teď i na stěnách S_4, S_5, S_6 totéž číslo, jehož hodnotu označme q . Pokud ještě není $p = q$, stačí nyní jen $(p - q)$ -krát provést krok k_{456} , je-li $p > q$, resp. $(q - p)$ -krát krok k_{123} , je-li $q > p$.

Naší úlohou je tedy určit počet takových množin $M = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ navzájem různých přirozených čísel, pro něž platí

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 60 \quad \text{a} \quad c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4.$$

Odtud plyne $3(c_1 + c_6) = 60$, tedy

$$c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4 = 20. \quad (2)$$

Bez újmy na obecnosti můžeme zřejmě předpokládat, že $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5 < c_6$ neboli (vzhledem k rovnostem (2))

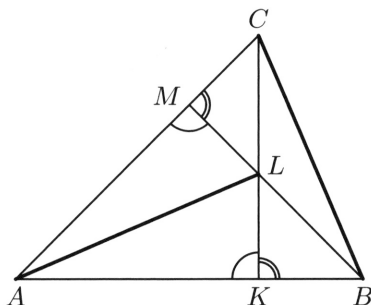
$$c_1 < c_2 < c_3 < 10 < c_4 < c_5 < c_6.$$

Přitom ke každé trojici (c_1, c_2, c_3) splňující $c_1 < c_2 < c_3 < 10$ zbylá čísla c_4, c_5, c_6 dopočteme z (2). Počet všech vyhovujících množin M je tedy roven počtu různých trojic přirozených čísel (c_1, c_2, c_3) , jež vyhovují podmínce $c_1 < c_2 < c_3 < 10$, což je

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$$

A – III – 1

Čtyřúhelník $KBCM$ je tětíkový, právě když $|\sphericalangle CMB| = |\sphericalangle CKB|$ neboli $|\sphericalangle AKL| = |\sphericalangle AML|$ (obr. 26). Přitom čtyřúhelník $AKLM$ je tětíkový, právě když $|\sphericalangle AKL| + |\sphericalangle AML| = 180^\circ$. Ve zkoumaném případě proto musí být všechny čtyři zmíněné úhly pravé, K a M jsou tak paty výšek v trojúhelníku ABC , který je tudíž ostroúhlý, a bod L je průsečíkem jeho výšek. Kružnice opsaná čtyřúhelníku $KBCM$ je Thaletovou kružnicí nad průměrem BC a kružnice opsaná čtyřúhelníku $AKLM$ je Thaletovou kružnicí nad průměrem AL .



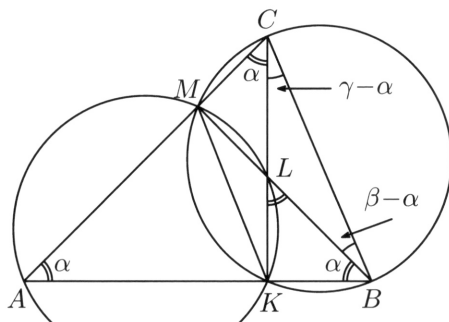
Obr. 26

Kružnice opsané uvedeným čtyřúhelníky jsou shodné, právě když jsou shodné jejich průměry BC a AL . Označme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α, β, γ . Pravoúhlé trojúhelníky CKB a AKL jsou podobné, protože pro jejich úhly při odpovídajících vrcholech C a A platí $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle BCK| = 90^\circ - \beta$. Zřejmě proto platí $|BC| = |AL|$, právě když $|AK| = |CK|$, tedy AKC je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

Vidíme, že trojúhelník ABC vyhovuje podmínkám úlohy, právě když je ostroúhlý s úhlem $\alpha = 45^\circ$. Pro *ostré* úhly β a γ pak platí $\beta + \gamma = 135^\circ$.

Závěr. Řešením jsou právě všechny trojice úhlů $(\alpha, \beta, \gamma) = (45^\circ, 45^\circ + \varphi, 90^\circ - \varphi)$, kde $\varphi \in (0^\circ, 45^\circ)$.

Jiné řešení. Necht K, M jsou vnitřní body stran AB, AC trojúhelníku ABC , jež vyhovují podmínkám úlohy. Vzhledem k tomu, že kružnice opsané čtyřúhelníky $AKLM, KBCM$ jsou shodné, shodují se i příslušné obvodové úhly nad společnou tětivou KM obou kružnic⁴ (obr. 27).



Obr. 27

Odtud $|\sphericalangle MBC| = \beta - \alpha$ a $|\sphericalangle KCB| = \gamma - \alpha$, tudíž α je nejmenším vnitřním úhlem uvažovaného trojúhelníku.

Protože čtyřúhelník $AKLM$ je tětivový, je vnitřní úhel při vrcholu A shodný s vnějším úhlem u protějšího vrcholu L , což je zároveň vnější úhel trojúhelníku BCL , takže platí

$$\alpha = (\beta - \alpha) + (\gamma - \alpha) \quad \text{neboli} \quad 3\alpha = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha.$$

Odtud vychází $\alpha = 45^\circ$. Trojúhelník ABM je tedy stejně jako trojúhelník ACK rovnoramenný pravoúhlý, takže CK a BM jsou výšky trojúhelníku

⁴ Dvě shodné kružnice se společnou tětivou mohou být buď totožné, anebo souměrně sdružené podle společné tětivy; první možnost zde nepřichází v úvahu.

ABC a bod L je jeho průsečíkem výšek. A protože bod L leží uvnitř trojúhelníku ABC , je trojúhelník ABC ostroúhlý.

Vzhledem k tomu, že $\alpha = 45^\circ$ je nejmenším z vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , snadno nahlédneme, že hledané trojice (α, β, γ) mají tvar $(45^\circ, 45^\circ + \varphi, 90^\circ - \varphi)$, kde pro parametr φ platí $0^\circ < \varphi < 45^\circ$.

Naopak v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC s úhlem 45° při vrcholu A , pro jehož další úhly platí $\beta + \gamma = 135^\circ$, mají zřejmě paty výšek K, M z vrcholů C a B požadované vlastnosti, protože oba čtyřúhelníky $AKLM, KBCM$ jsou tětíkové podle Thaletovy věty a z rovnosti úhlů $|\sphericalangle KCM| = |\sphericalangle KAM| = 45^\circ$ nad společnou tětívou KM plyne, že jim opsané kružnice jsou shodné.

A – III – 2

Ukážeme, že dané rovnici vyhovují právě tři trojice prvočísel (p, q, r) , a to $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$.

Danou rovnici nejprve upravíme do tvaru

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{2}{q}\right)\left(1 + \frac{3}{r}\right) = 4.$$

Protože $3^3 < 4 \cdot 2^3$, musí být aspoň jeden ze tří činitelů na levé straně upravené rovnice větší než $\frac{3}{2}$. Pro prvočísla p, q, r tak nutně platí $p < 2$ nebo $q < 4$ nebo $r < 6$. Vzhledem k tomu, že neexistuje žádné prvočíslu menší než 2, zbývá vyšetřit následujících pět možností: $q \in \{2, 3\}$ a $r \in \{2, 3, 5\}$. Ty nyní rozebereme jednotlivě, přitom uvažovanou hodnotu q či r vždy dosadíme do dané rovnice, kterou pak (v oboru prvočísel) vyřešíme pro zbývající dvě neznámé.

- ▷ Pro $q = 2$ dostaneme $(p + 1)(r + 3) = 2pr$, odkud plyne $r = 3 + 6/(p - 1)$, což je celé číslo pouze pro prvočísla $p \in \{2, 3, 7\}$. Jim však odpovídají $r \in \{9, 6, 4\}$, která nejsou prvočíslly.
- ▷ Pro $q = 3$ dostaneme $5(p + 1)(r + 3) = 12pr$, odkud plyne, že $p = 5$ nebo $r = 5$. Pro $p = 5$ dostaneme řešení $(5, 3, 3)$ a pro $r = 5$ řešení $(2, 3, 5)$.
- ▷ Pro $r = 2$ dostaneme $5(p + 1)(q + 2) = 8pq$, odkud plyne, že $p = 5$ nebo $q = 5$. Pro $p = 5$ nedostaneme žádné řešení v oboru prvočísel, zatímco pro $q = 5$ dostáváme třetí řešení dané rovnice, kterým je trojice $(7, 5, 2)$.
- ▷ Pro $r = 3$ dostaneme $(p + 1)(q + 2) = 2pq$, odkud $q = 2 + 4/(p - 1)$, což je celé číslo pouze pro prvočísla $p \in \{2, 3, 5\}$. Mezi odpovídajícími

hodnotami $q \in \{6, 4, 3\}$ je jediné prvočíslo, pro něž dostáváme řešení $(p, q, r) = (5, 3, 3)$, které již známe.

- ▷ Pro $r = 5$ dostaneme $2(p+1)(q+2) = 5pq$, odkud plyne, že $p = 2$ nebo $q = 2$. Pro $p = 2$ dostáváme už známé řešení $(2, 3, 5)$, zatímco pro $q = 2$ vychází $p = 4$.

Jiné řešení. Pro každé prvočíslo q platí nerovnost $q + 2 \leq 2q$. Pro prvočísla p a r tak dostaneme nerovnici $2(p+1)(r+3) \geq 4pr$, kterou upravíme na tvar $(p-1)(r-3) \leq 6$. Protože $p-1 \geq 1$, musí být $r-3 \leq 6$ neboli $r \leq 9$. Odtud plyne, že nutně $r \in \{2, 3, 5, 7\}$. Postupným rozбором každé z těchto čtyř možností dospějeme (analogicky jako v předchozím řešení) ke třem trojicím prvočísel (p, q, r) : $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$, které jsou jedinými řešeními úlohy.

Jiné řešení. Rovnici upravíme na tvar $(1+1/p)(1+2/q)(1+3/r) = 4$. Kdyby bylo $p \geq 5$, $q \geq 5$, $r \geq 5$, platilo by

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{2}{q}\right) \left(1 + \frac{3}{r}\right) \leq \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{8}{5} < 4.$$

Proto aspoň jedno z čísel p, q, r je z množiny $\{2, 3\}$. Stačí tedy prozkoumat šest možností:

- ▷ $p = 2$: Rovnici $3(q+2)(r+3) = 8qr$ upravíme na $(5q-6)(5r-9) = 144$, v oboru prvočísel je řešením $q = 3$, $r = 5$.
- ▷ $p = 3$: Rovnici $4(q+2)(r+3) = 12qr$ upravíme na tvar $(q-1) \cdot (2r-3) = 9$, v oboru prvočísel nemá řešení.
- ▷ $q = 2$: Rovnici $4(p+1)(r+3) = 8pr$ upravíme na tvar $(p-1)(r-3) = 6$, v oboru prvočísel nemá řešení.
- ▷ $q = 3$: Rovnici $5(p+1)(r+3) = 12pr$ upravíme na tvar $(7p-5) \cdot (7r-15) = 180$, v oboru prvočísel jsou řešeními $p = 5$, $r = 3$ a $p = 2$, $r = 5$.
- ▷ $r = 2$: Rovnici $5(p+1)(q+2) = 8pq$ upravíme na tvar $(3p-5) \cdot (3q-10) = 80$, v oboru prvočísel je řešením $p = 7$, $q = 5$.
- ▷ $r = 3$: Rovnici $6(p+1)(q+2) = 12pq$ upravíme na tvar $(p-1) \cdot (q-2) = 4$, v oboru prvočísel je řešením $p = 5$, $q = 3$.

Závěr. V oboru prvočísel jsou řešením dané rovnice následující trojice (p, q, r) : $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$.

Poznámka. V oboru kladných celých čísel má rovnice až 28 řešení, z toho 13 v oboru celých čísel větších než 1: $(2, 2, 9)$, $(2, 3, 5)$, $(2, 6, 3)$, $(2, 30, 2)$, $(3, 2, 6)$, $(3, 4, 3)$, $(3, 10, 2)$, $(4, 2, 5)$, $(5, 3, 3)$, $(5, 6, 2)$, $(7, 2, 4)$, $(7, 5, 2)$, $(15, 4, 2)$.

A – III – 3

a) Dle zadání platí $(x + y)^2 = (12 - z)^2$ a $x^2 + y^2 = 54 - z^2$, tedy

$$2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = (12 - z)^2 - (54 - z^2) = 2((z - 6)^2 + 9), \quad (1)$$

a tudíž

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 54 - z^2 - 2((z - 6)^2 + 9) = \\ &= -3((z - 4)^2 - 4). \end{aligned} \quad (2)$$

Z (1) plyne $xy = (z - 6)^2 + 9 \geq 9$, z (2) nerovnost $(z - 4)^2 \leq 4$ neboli $2 \leq z \leq 6$. Proto $(z - 6)^2 \leq (2 - 6)^2 = 16$, což spolu s (1) dává $xy = (z - 6)^2 + 9 \leq 25$. S ohledem na symetrii platí odvozené nerovnosti $9 \leq xy \leq 25$ i pro součiny yz , zx na místě xy .

b) Z dané soustavy rovnic dostáváme

$$xy + yz + zx = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \frac{12^2 - 54}{2} = 45.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} (x - 3)(y - 3) + (y - 3)(z - 3) + (z - 3)(x - 3) &= \\ = xy + yz + zx - 6(x + y + z) + 27 &= 45 - 6 \cdot 12 + 27 = 0. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že čísla $x - 3$, $y - 3$, $z - 3$ nemohou být současně všechna kladná, alespoň jedno z čísel x , y , z je tedy nejvýše 3. Podobně ze vztahu

$$\begin{aligned} (x - 5)(y - 5) + (y - 5)(z - 5) + (z - 5)(x - 5) &= \\ = xy + yz + zx - 10(x + y + z) + 75 &= 45 - 10 \cdot 12 + 75 = 0 \end{aligned}$$

vidíme, že čísla $x - 5$, $y - 5$, $z - 5$ nemohou být současně všechna záporná, proto alespoň jedno z čísel x , y , z je nejméně 5.

Jiné řešení. Obtížnější obrat v části b) předchozího řešení můžeme nahradit důkazem implikací

$$(x > 3) \wedge (y > 3) \Rightarrow z < 3 \quad \text{a} \quad (x < 5) \wedge (y < 5) \Rightarrow z > 5.$$

Uvažujme kvadratický trojčlen $F(t) = (t - x)(t - y)$. Jsou-li oba jeho kořeny x a y větší než 3, platí $F(3) > 0$. Ovšem podle zadání a (1) platí

$$0 < F(3) = 3^2 - 3(x + y) + xy = 9 - 3(12 - z) + (z - 6)^2 + 9 = (z - 3)(z - 6).$$

Z této nerovnosti a z odhadu $z \leq 6$ dokázaného v části a) předchozího řešení tak dostáváme požadovaný odhad $z < 3$. Podobně, jsou-li obě čísla x a y menší než 5, potom platí $F(5) > 0$. Ovšem podle zadání a (1) platí

$$0 < F(5) = 5^2 - 5(x+y) + xy = 25 - 5(12-z) + (z-6)^2 + 9 = (z-2)(z-5).$$

Z této nerovnosti a odhadu $z \geq 2$ dokázaného v části a) předchozího řešení tak dostáváme požadovaný odhad $z > 5$.

Jiné řešení. a) Dosazením z první rovnice do druhé dostaneme

$$x^2 + y^2 + xy - 12x - 12y + 45 = 0$$

a odtud

$$x = \frac{12 - y \pm \sqrt{-3y^2 + 24y - 36}}{2}.$$

Proto $-3y^2 + 24y - 36 \geq 0$, takže $2 \leq y \leq 6$. Dále máme

$$2xy = 12y - y^2 \pm y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36}.$$

Připustme, že $2xy < 18$. Potom $12y - y^2 - y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36} < 18$ neboli

$$0 < 12y - y^2 - 18 < y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36},$$

odkud po umocnění a úpravě dostaneme $(y-3)^4 < 0$, což není možné.

Podobně z nerovnosti $2xy > 50$ by vyplývalo

$$\begin{aligned} 12y - y^2 + y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36} &> 50, \\ y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36} &> y^2 - 12y + 50 > 0, \end{aligned}$$

a po umocnění a úpravě $(y^2 - 2y + 25)(y-5)^2 < 0$, což rovněž neplatí.

Je proto $9 \leq xy \leq 25$ a vzhledem na symetrii i $9 \leq yz \leq 25$ a $9 \leq zx \leq 25$.

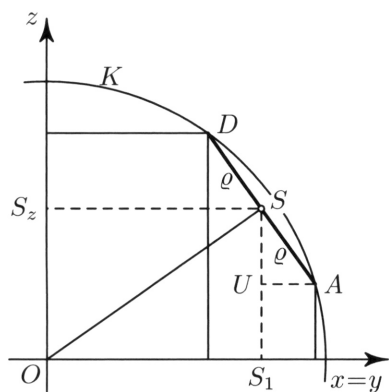
b) Položme $x = 4 + a$, $y = 4 + b$, $z = 4 + c$. Potom $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|a| \geq |b| \geq |c|$. Čísla a a b mají pak opačná znaménka a $a^2 \geq 2$, proto $|a| \geq \sqrt{2}$ (dokonce lze dokázat $|a| \geq \sqrt{3}$), a tedy $x \leq 4 - \sqrt{2} < 3$ nebo $x \geq 4 + \sqrt{2} > 5$. Z nerovnosti $|b| < 1$ by vyplývalo $|c| < 1$, ale potom $|a| \leq |b| + |c| < 2$ a $a^2 + b^2 + c^2 < 6$; proto $|b| \geq 1$. Mohou tedy nastat dva případy:

▷ Pokud $a > 0$, je $b < 0$, tedy $b \leq -1$; proto $x > 5$ a $y \leq 3$.

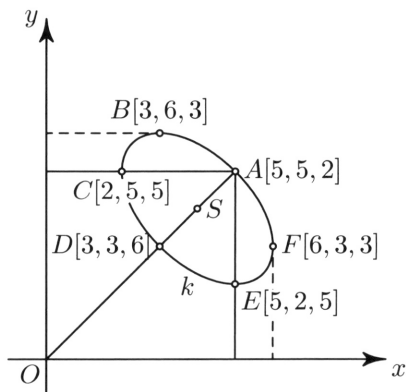
▷ Pokud $a < 0$, je $b > 0$, tedy $b \geq 1$; proto $x < 3$ a $y \geq 5$.

Jiné řešení. Vyřešíme část b) geometricky. V kartézské soustavě souřadnic s počátkem O a osami x, y, z určuje první rovnice rovinu σ , která prochází bodem $S = [4, 4, 4]$ a je kolmá k úsečce OS , zatímco druhá rovnice je rovnicí kulové plochy $K(O, r = \sqrt{54})$. Průnikem obou útvarů je kružnice $k(S, \varrho)$. Určíme nejprve její poloměr a průsečíky kružnice s rovinou, podle níž jsou osy x a y souměrně sdružené.

Označme S_x, S_y a S_z kolmé průměty bodu S do souřadnicových os x, y a z . Na obr. 28 je řez rovinou OSS_z . Platí $|OS_1| = 4\sqrt{2}$, $|OS| = 4\sqrt{3}$ (stěnová a tělesová úhlopříčka krychle o hraně délky 4) a $|OA| = \sqrt{54}$. Z pravoúhlého trojúhelníku OAS pomocí Pythagorovy věty určíme $\varrho = |SA| = \sqrt{6}$ a z podobnosti trojúhelníků $SAU \sim OSS_1$ dostaneme $|US| = 2$ a $|AU| = \sqrt{2}$. Odtud $A = [5, 5, 2]$ a (díky symetrii podle S) $D = [3, 3, 6]$.



Obr. 28



Obr. 29

Analogickým rozбором pro roviny OSS_y a OSS_x (nebo jen cyklickou záměnou, kterou lze vzhledem k symetrii uplatnit) nalezneme jejich průsečíky s kružnicí k :

$$B = [3, 6, 3], \quad E = [5, 2, 5] \quad \text{a} \quad C = [2, 5, 5], \quad F = [6, 3, 3].$$

Nalezené body A, B, C, D, E, F rozdělují kružnici k na šest oblouků (obráz. 29 znázorňuje pohled na kružnici k ve směru osy z), pro jejichž

body zřejmě platí:

$$\begin{aligned}
 [x, y, z] \in \widehat{AB} &\Rightarrow 2 \leq z \leq 3, \quad 5 \leq y \leq 6, \quad 3 \leq x \leq 5, \\
 [x, y, z] \in \widehat{BC} &\Rightarrow 2 \leq x \leq 3, \quad 5 \leq y \leq 6, \quad 3 \leq z \leq 5, \\
 [x, y, z] \in \widehat{CD} &\Rightarrow 2 \leq x \leq 3, \quad 5 \leq z \leq 6, \quad 3 \leq y \leq 5, \\
 [x, y, z] \in \widehat{DE} &\Rightarrow 2 \leq y \leq 3, \quad 5 \leq z \leq 6, \quad 3 \leq x \leq 5, \\
 [x, y, z] \in \widehat{EF} &\Rightarrow 2 \leq y \leq 3, \quad 5 \leq x \leq 6, \quad 3 \leq z \leq 5, \\
 [x, y, z] \in \widehat{FA} &\Rightarrow 2 \leq z \leq 3, \quad 5 \leq x \leq 6, \quad 3 \leq y \leq 5.
 \end{aligned}$$

Tím je ovšem tvrzení b) dokázáno.

A – III – 4

Pokud Adam nahradí koeficient u lineárního členu, získá trojčlen $ax^2 + (a+c)x + c$, který má dva různé reálné kořeny, právě když je jeho diskriminant $(a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2$ kladný. To nastane, právě když $a \neq c$. V tomto případě výše popsaným tahem vítězí Adam. Pokud Adam nahradí koeficient u absolutního členu, získá trojčlen $ax^2 + bx + (a+b)$ se dvěma různými reálnými kořeny, právě když je jeho diskriminant $b^2 - 4a(a+b) = (b(1+\sqrt{2})+2a)(b(\sqrt{2}-1)-2a)$ kladný. Vzhledem k podmínkám úlohy to nastane, právě když $b(\sqrt{2}-1) > 2a$. Jelikož diskriminant kvadratického trojčlenu je symetrická funkce koeficientů u kvadratického a absolutního členu, nastane stejná situace i v případě, kdy Adam nahradí koeficient u kvadratického členu.

Shrňme úvahy z předchozího odstavce. Pokud $a \neq c$ nebo $b > 2a/(\sqrt{2}-1) = 2(\sqrt{2}+1)a$, může Adam prvním tahem vyhrát.

Předpokládejme, že $a = c$ a současně $b \leq 2(\sqrt{2}+1)a$. Po Adamovi je na tahu Boris, který bude nahrazovat koeficienty u jednoho z trojčlenů

$$a) \quad ax^2 + bx + (a+b) \quad \text{nebo} \quad (a+b)x^2 + bx + a, \quad b) \quad ax^2 + 2ax + a.$$

a) Pokud v tomto případě nahradí Boris koeficient u lineárního členu, dostane jeden z trojčlenů $ax^2 + a(a+b)x + (a+b)$ nebo $(a+b)x^2 + a(a+b)x + a$, jež mají oba diskriminant $a^2(a+b)^2 - 4a(a+b) = a(a+b)(a(a+b)-4)$, který je vzhledem k podmínkám $a \geq 2$, $b \geq 2$ kladný. Proto Boris tímto tahem zvítězí.

b) Pokud Boris nahradí koeficient u lineárního členu, dostane kvadratický trojčlen $ax^2 + a^2x + a$, který má dva reálné kořeny, právě když je jeho diskriminant $a^4 - 4a^2 = a^2(a+2)(a-2)$ kladný. Vzhledem k podmínkám úlohy to nastane, právě když $a > 2$. Kdyby Boris v případě $a = 2$

nahradil koeficient u kvadratického nebo absolutního členu, zanechal by Adamovi jeden z trojčlenů $8x^2 + 4x + 2$ nebo $2x^2 + 4x + 8$. Z úvah v prvním odstavci plyne, že v takovém případě by zvítězil Adam. Proto v případě $a = 2$ musí Boris, aby neprohrál, nahradit koeficient u lineárního členu, a zanechá tak Adamovi trojčlen $2x^2 + 4x + 2$.

Z odstavců a) a b) plyne: Pokud Adam nemůže zvítězit prvním tahem, může svým tahem zvítězit Boris, právě když $a \neq 2$. V případě $a = 2$ svým prvním tahem Boris neprohráje, jen když zanechá soupeři trojčlen $2x^2 + 4x + 2$.

Zatím tedy neznáme vítěznou strategii některého z hráčů, pokud po prvním Borisově tahu zůstane trojčlen $2x^2 + 4x + 2$. Z úvah v prvním odstavci vyplývá, že Adam neprohráje, pokud nahradí koeficient u lineárního členu, takže zanechá soupeři stejný trojčlen. Na tento trojčlen musí Boris, aby neprohrál, reagovat náhradou koeficientu u lineárního členu, tudíž i on zanechá stejný trojčlen a hra v tomto případě nemá při správné hře obou hráčů vítěze.

Závěr. Pro trojčlen $ax^2 + bx + c$ platí:

- ▷ Pokud $a \neq c$ nebo $b > 2(\sqrt{2}+1)a$, má vítěznou strategii Adam a může prvním tahem vyhrát.
- ▷ Pokud $a = c > 2$ a $b \leq 2(\sqrt{2}+1)a$, má vítěznou strategii Boris a může prvním tahem vyhrát.
- ▷ Pokud $a = c = 2$ a $b \leq 2(\sqrt{2}+1)a$, musejí oba hráči, aby neprohráli, v každém tahu zanechávat trojčlen $2x^2 + 4x + 2$. V tomto případě žádný z hráčů nemá vítěznou strategii.

A – III – 5

Je-li trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB , leží celá úsečka OV na přímce EP a tvrzení platí triviálně. Můžeme tedy předpokládat, že $|AC| \neq |BC|$, takže přímky CV , CO jsou různé.

Jak známo, bod V' souměrně sdružený s průsečíkem výšek V podle strany AB uvažovaného trojúhelníku ABC leží na kružnici tomuto trojúhelníku opsané, proto je bod P středem úsečky VV' (obr. 30). Trojúhelník $CV'O$ je rovnoramenný s hlavním vrcholem O , a protože střed E úsečky CD je současně středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku CPD s přeponou CD , je i trojúhelník CPE rovnoramenný. Oba rovnoramenné trojúhelníky $CV'O$ a CPE jsou přitom stejnohlé (se středem stejnohllosti v bodě C) — shodují se totiž ve společném úhlu

přímce, stačí podle Menelaovy věty použité na trojúhelník VOC ukázat, že součin

$$s = \frac{|VS|}{|SO|} \cdot \frac{|OE|}{|EC|} \cdot \frac{|CP|}{|PV|} \quad (1)$$

je roven 1. Avšak $|VS| = |SO|$, a pokud označíme P' patu kolmice spuštěné z bodu O na příčku $A'B'$, plyne z podobnosti trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ rovnost $|CP| : |VP| = |C'P'| : |OP'|$ (neboť O je průsečíkem výšek trojúhelníku $A'B'C'$). Navíc $|EC| = |DE|$, takže po dosazení do (1) dostáváme

$$s = 1 \cdot \frac{|OE|}{|DE|} \cdot \frac{|C'P'|}{|OP'|} = 1.$$

Poslední rovnost platí díky tomu, že bod O dělí každou úsečku s jedním krajním bodem na straně AB a druhým na příčce $A'B'$ (rovnoběžné s AB) ve stejném poměru, tj. $|OE| : |DE| = |OP'| : |C'P'|$.

Jiné řešení. Použijme označení bodů zavedené v předešlém řešení. Odlišným způsobem ukážeme, že součin (1) je roven 1. Označíme-li velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC obvyklým způsobem, bude $|\sphericalangle COA'| = \alpha$, $|\sphericalangle O A'E| = 90^\circ - \beta$, $|\sphericalangle E A'C| = \beta$, $|\sphericalangle O C A'| = 90^\circ - \alpha$, takže ze sinových vět v trojúhelnících EOA' a ECA' máme

$$\frac{|OE|}{|EC|} = \frac{\frac{|EA'|}{\sin \alpha} \cdot \sin(90^\circ - \beta)}{\frac{|EA'|}{\sin(90^\circ - \alpha)} \cdot \sin \beta} = \cotg \alpha \cdot \cotg \beta.$$

Avšak $|\sphericalangle AVP| = \beta$, odkud $|VP| = |AP|/\operatorname{tg} \beta$; a zároveň $|CP| = |AP| \cdot \operatorname{tg} \alpha$, tedy $|CP| : |VP| = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$. Dohromady dostáváme

$$s = 1 \cdot \cotg \alpha \cdot \cotg \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 1.$$

Jiné řešení. Zvolme v rovině kartézskou soustavu souřadnic s počátkem v bodě P , a s x -ovou osou na přímce AB . Je tedy $P = [0, 0]$ a pro vhodná $a < 0$, $b > 0$ a $c > 0$ platí $A = [a, 0]$, $B = [b, 0]$, $C = [0, c]$. Postupně vypočítáme souřadnice bodů V , O , D , E a středu S úsečky VO (zřejmě žádný ze jmenovatelů není nulový):

$$V = \left[0, -\frac{ab}{c}\right], \quad O = \left[\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right], \quad D = \left[\frac{c^2(a+b)}{c^2-ab}, 0\right],$$

$$E = \left[\frac{c^2(a+b)}{2(c^2-ab)}, \frac{c}{2}\right], \quad S = \left[\frac{a+b}{4}, \frac{c^2-ab}{4c}\right].$$

Ověření, že bod S leží na přímce PE , se tak redukuje na ověření triviální identity

$$\frac{c^2(a+b)}{2(c^2-ab)} : \frac{c}{2} = \frac{a+b}{4} : \frac{c^2-ab}{4c}.$$

Jiné řešení. Zvolme v rovině kartézskou soustavu souřadnic tak, že $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [c_1, c_2]$, přičemž $c_2 > 0$, $0 < c_1 < 1$. Potom

$$O = \left[\frac{1}{2}, \frac{c_1^2 - c_1 + c_2^2}{2c_2} \right], \quad V = \left[c_1, \frac{c_1 - c_1^2}{c_2} \right], \quad S = \left[\frac{c_1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{c_2^2 + c_1 - c_1^2}{4c_2} \right],$$

$$P = [c_1, 0], \quad D = \left[\frac{c_1^2 + c_2^2 - c_1^3 - c_1 c_2^2}{c_2^2 + c_1 - c_1^2}, 0 \right], \quad E = \left[\frac{2c_1^2 - 2c_1^3 + c_2^2}{2(c_1 - c_1^2 + c_2^2)}, \frac{c_2}{2} \right].$$

Stačí už jen ověřit lineární závislost vektorů $S - P$ a $E - P$, tedy rovnost

$$\frac{\frac{1}{4} - \frac{c_1}{2}}{\frac{c_2^2 + c_1 - c_1^2}{4c_2}} = \frac{\frac{2c_1^2 - 2c_1^3 + c_2^2}{2(c_1 - c_1^2 + c_2^2)} - c_1}{\frac{c_2}{2}}.$$

Jiné řešení. Je-li $b = |AC| = |BC| = a$, leží všechny čtyři body P , E , O , V na jedné přímce a na ní leží i střed úsečky OV .

Nechť tedy například $b > a$. Platí $|\sphericalangle ACO| = |\sphericalangle PCB| = 90^\circ - \beta$, a tedy $|\sphericalangle DCP| = \beta - \alpha$. Bod E je střed přepony CD pravoúhlého trojúhelníku CDP , proto $|\sphericalangle DPE| = |\sphericalangle PDE| = 90^\circ + \alpha - \beta$.

Označme r poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC , S střed úsečky OV a F , G paty kolmic z bodů O , S na přímku AB . Potom $|OF| = r \cos \gamma = \frac{1}{2}c \cot \gamma$, $|PB| = a \cos \beta$, $|PV| = a \cos \beta \cot \alpha$, $|SG| = \frac{1}{2}(|OF| + |PV|) = \frac{1}{4}c \cot \gamma + \frac{1}{2}a \cos \beta \cot \alpha$, $|GP| = \frac{1}{2}(|FB| - |PB|) = \frac{1}{4}c - \frac{1}{2}a \cos \beta$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} |\sphericalangle GPS| &= \frac{|SG|}{|GP|} = \frac{\frac{1}{4}c \cot \gamma + \frac{1}{2}a \cos \beta \cot \alpha}{\frac{1}{4}c - \frac{1}{2}a \cos \beta} = \\ &= \frac{\frac{1}{4}c \cot \gamma + \frac{1}{2} \frac{c}{\sin \gamma} \cos \beta \cos \alpha}{\frac{1}{4}c - \frac{1}{2} \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} \cos \beta} = \frac{\cos \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta}{\sin \gamma - 2 \sin \alpha \cos \beta} = \\ &= \frac{-\cos(\alpha + \beta) + 2 \cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha \cos \beta} = \cot(\beta - \alpha) = \operatorname{tg} |\sphericalangle DPE|; \end{aligned}$$

odtud $|\sphericalangle GPS| = |\sphericalangle DPE|$, a tudíž body S , P a E leží na jedné přímce.

A – III – 6

Ukážeme, že jediná funkce f , která splňuje podmínky úlohy, je

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Ze zadání plyne, že $f(y) \neq 0$ pro libovolné $y > 0$, tudíž

$$f(x f(y)) = f(x) - \frac{1}{xy f(y)}. \quad (1)$$

Označme $f(1) = a > 0$. Volbou $x = 1$, resp. $y = 1$ v rovnici (1) postupně dostaneme

$$f(f(y)) = f(1) - \frac{1}{y f(y)} = a - \frac{1}{y f(y)} \quad (y \in \mathbb{R}^+), \quad (2)$$

$$f(ax) = f(x) - \frac{1}{ax} \quad (x \in \mathbb{R}^+). \quad (3)$$

Volbou $x = 1$ v rovnici (3) obdržíme

$$f(a) = f(1) - \frac{1}{a} = a - \frac{1}{a}. \quad (4)$$

Volbou $x = a$ v rovnici (1) a užitím (4) dostaneme

$$f(a f(y)) = f(a) - \frac{1}{ay f(y)} = a - \frac{1}{a} - \frac{1}{ay f(y)} \quad (y \in \mathbb{R}^+),$$

zatímco pomocí vztahů (3) a (2) můžeme levou stranu předchozí rovnice upravit na tvar

$$f(a f(y)) = f(f(y)) - \frac{1}{a f(y)} = a - \frac{1}{y f(y)} - \frac{1}{a f(y)}.$$

Porovnáním pravých stran předchozích dvou rovnic vypočítáme

$$f(y) = 1 + \frac{a-1}{y} \quad (y \in \mathbb{R}^+). \quad (4)$$

Pokud tedy existuje řešení dané rovnice, musí mít tvar (4). Dosazením do rovnice v zadání a následnou úpravou zjistíme, že pro všechna kladná reálná x a y má platit $(a-1)^2 = 1$. Vzhledem k předpokladu $a > 0$

je tato rovnice splněna, právě když $a = 2$. Tímto krokem jsme zároveň provedli zkoušku správnosti nalezeného řešení.

Jiné řešení. Vztahy (1) a (2) z předchozího řešení můžeme využít i následujícím způsobem. Pro libovolné reálné číslo t je $f(t) > 0$. Volbou $x = f(t)$ v rovnici (1) obdržíme pomocí (2)

$$f(f(t)f(y)) = f(f(t)) - \frac{1}{f(t)yf(y)} = a - \frac{1}{tf(t)} - \frac{1}{f(t)yf(y)}, \quad t, y \in \mathbb{R}^+.$$

Záměnou proměnných t a y odtud získáme

$$f(f(y)f(t)) = a - \frac{1}{yf(y)} - \frac{1}{f(y)tf(t)} \quad (t, y \in \mathbb{R}^+).$$

Jelikož výrazy na levých stranách předchozích dvou rovnic jsou shodné, musí být shodné i výrazy na pravých stranách, takže platí

$$a - \frac{1}{tf(t)} - \frac{1}{f(t)yf(y)} = a - \frac{1}{yf(y)} - \frac{1}{f(y)tf(t)} \quad (t, y \in \mathbb{R}^+).$$

Úpravou dostaneme

$$t(f(t) - 1) = y(f(y) - 1) \quad (t, y \in \mathbb{R}^+).$$

Volbou $t = 1$ v předchozí rovnici získáme rovnost

$$f(y) = 1 + \frac{a-1}{y} \quad (y \in \mathbb{R}^+),$$

kterou využijeme stejně jako v předešlém řešení.

Kategorie P

Texty úloh

P – I – 1

Indiana a poklad

Po dlouhé a nebezpečné cestě plné dobrodružství se konečně před Indianou rozprostřel pohled na starodávné pohřebiště aztéckých králů. Byl to hrob vedle hrobu podél dlouhé cesty, některé se lišily výškou, ale jinak byly stejné. Na prvním kameni byl následující nápis:

Jsi-li moudrý, pochopíš,
kde můj poklad našel skrýš.
Se zlou však se potáže,
kdo špatný hrob ukáže.

Výklad těchto veršů je prostý: pokud otevřete hrob s pokladem, tak tento poklad získáte, v opačném případě nezískáte nic a nejspíš vás něco rozmáčkne. Verše našťěstí pokračovaly:

Kdo volí z prostředních, neprohloupí,
pokud si nakonec největší koupí.

No a teď už je jistě jasné i vám, kde se poklad nachází. Stačí jen najít největší z prostředních výšek hrobů a poklad bude objeven.

Soutěžní úloha. Je zadána posloupnost N kladných celých čísel $v_1, v_2, \dots, v_N$ a celé liché číslo K . Vaším úkolem je najít maximum ze všech mediánů souvislých podposloupností délky K . Medián získáte pro danou podposloupnost tak, že všechna její čísla seřadíte podle velikosti a zvolíte prostřední prvek (tzn. $\frac{1}{2}(K + 1)$ -tý prvek). Například pro posloupnost výšek hrobů 4, 5, 1, 3, 2, 4 a $K = 3$ tak získáte posloupnost mediánů 4, 3, 2, 3, a hledaným výsledkem je tedy číslo 4.

Formát vstupu: Program načte vstupní data ze standardního vstupu. První řádek vstupu obsahuje dvě celá čísla N a K , počet hrobů a délku uvažovaných podposloupností, $1 \leq N \leq 1\,000\,000$ a $1 \leq K \leq 10\,000$.

Každý z následujících N řádků obsahuje výšku jednoho z hrobů (v pořadí $v_1, v_2, \dots, v_N$). Výšky jsou přirozená čísla menší než 1 000 000 000. Můžete předpokládat, že pro 40 % vstupů platí $K < 100$.

Formát výstupu: Na standardní výstup vypíšte jedno číslo, které je rovno maximu ze všech mediánů souvislých úseků délky K v posloupnosti čísel zadaných na vstupu.

Příklad:

Vstup: *Výstup:*

6 3

4

4

5

1

3

2

4

P – I – 2

Poklad podruhé

Poté co Indiana našel největší z prostředních hrobů, zjistil, že nápis nebyl úplně přesný. Místo pokladu však byl pod kamenem jen vchod do další chodby. Ta byla vydlážděna čtvercovými dlaždicemi a hned na první dlaždici byl vyrytý tento nápis:

Šlápněš-li na každou z nás právě jednou,
Tvé ruce nad hlavu poklady zvednou.
Tou hlavou však zaplatit musíš,
když sestru s lebkou poškádlit zkusíš.

Chodba měla na šířku přesně 3 dlaždice a dlouhá byla, kam až oko dohlédlo. Na některých z dlaždic byly namalované lebky, na jiných dlaždících pak ležely skutečné lebky (pravděpodobně předchozích archeologů).

Indiana velmi rychle nápis pochopil — musí na každou dlaždici (kromě těch zakázaných) šlápnout právě jednou, jen tak vede cesta k pokladu. V tu chvíli ale začal litovat toho, že má tak velké nohy. Ať se snažil, jak chtěl, nikdy se mu nepodařilo stoupnout jenom na jednu dlaždici, ale vždycky stoupnul na dvě sousední. To úkol samozřejmě zkomplikovalo.

Soutěžní úloha. Na vstupu je dána délka chodby N , tzn. chodbu tvoří $3 \times N$ dlaždic. Z těchto dlaždic je K zakázaných, na které Indiana nesmí

vstoupit. Vaším úkolem je určit, kolika způsoby lze tuto chodbu pokrýt stopami velikosti 1×2 dlaždice tak, aby každá nezakázaná dlaždice byla pokryta právě jednou stopou a žádná zakázaná dlaždice nebyla pokryta. Protože výsledné číslo může být velmi velké, vypište zbytek po dělení tohoto čísla zadaným číslem L .

Formát vstupu: Program načte vstupní data ze standardního vstupu. Na prvním řádku jsou zadána přirozená čísla N , K a L , $1 \leq N \leq 10\,000\,000$, $1 \leq K \leq \min(3N - 1, 1\,000\,000)$ a $2 \leq L \leq 1\,000\,000$. Následuje K řádků, přičemž na každém z nich je dvojice čísel X_i a Y_i , $1 \leq X_i \leq 3$ a $1 \leq Y_i \leq N$, které udávají souřadnice i -té zakázané dlaždice. Vždy bude platit, že $Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_K$.

Můžete předpokládat, že 20 % vstupů bude splňovat $1 \leq N \leq 40$.

Formát výstupu: Na standardní výstup vypište jediný řádek, který obsahuje počet možností, kolika způsoby lze chodbu pokrýt. Toto číslo je uvedeno modulo L . Všimněte si, že pro některé vstupy nemusí existovat žádné řešení — v takovém případě vypište nulu.

Příklad:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
5 3 13	3
3 1	
1 2	
2 4	

P – I – 3

Řeka

Za devatero horami se nachází rozsáhlý prales, kterým protéká dlouhá řeka. I přes svou obrovskou délku nemá řeka žádné přítoky a ani se nikde nerozvětjuje.

V pralese roste mnoho vzácných druhů stromů, a proto není divu, že u řeky leží dřevorubecké tábory. Vždy, když dřevorubci pokácí dostatečné množství stromů, sestaví z nich vor a pošlou ho dolů po řece.

Kromě dřevorubeckých táborů se u řeky také nacházejí pily. Zaměstnanci každé pily sledují řeku, a když k nim dorazí vor, odchyťí ho a všechno dřevo spotřebují. Občas je pila zavřena kvůli údržbě, v té době ignoruje vory a nechává je plout dále po řece.

Zaměstnancům pil vadí, že nevědí dopředu, kdy mají očekávat doávku dřeva a zbytečně tráví čas pozorováním řeky. Pomozte jim a na-

pište program, který jim bude posílat upozornění na blížící se zásilku dřeva.

Soutěžní úloha. Řeka má délku N kilometrů a pozice bodů na ní budeme označovat vzdáleností od pramene. V každém z bodů $1, \dots, N$ se nachází buď dřevorubecký tábor, nebo pila. Umístění pil na řece je dáno na začátku výpočtu. Víte, že pil je poměrně mnoho vzhledem k délce řeky; můžete předpokládat, že počet pil P je řádově stejný jako délka řeky.

Váš program bude dostávat události následujícího typu: „pila v bodě b zahajuje údržbu“, „pila v bodě b je opět v provozu“ a „z tábora v bodě t byl odeslán vor“. Pro každý odeslaný vor váš program odpoví, ve které pile bude zpracován. Předpokládejte, že řeka teče natolik rychle, aby mezi odesláním voru a jeho zachycením nebyla v žádné pile zahájena ani ukončena údržba.

Formát vstupu: Program načte vstupní data ze standardního vstupu. První řádek obsahuje přirozená čísla N , P a M , udávající délku řeky, počet pil na řece a počet událostí ($1 \leq N \leq 100\,000$, $1 \leq P \leq N$ a $1 \leq M \leq 1\,000\,000$). Na následujících P řádcích jsou popsány polohy pil: na i -tém z těchto řádků se nachází číslo n_i ($1 \leq n_i \leq N$), udávající, že i -tá pila se nachází ve vzdálenosti n_i od pramene řeky. Můžete předpokládat, že $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_P \leq N$.

Dále následuje M řádků popisujících události v chronologickém pořadí. Na každém z těchto následujících řádků se nachází popis jedné události:

- ▷ písmeno U následované mezerou a přirozeným číslem d ($1 \leq d \leq N$) — pila ve vzdálenosti d od pramene zahajuje údržbu. Můžete předpokládat, že číslo d je jedno z čísel $n_1, \dots, n_P$.
- ▷ písmeno K následované mezerou a přirozeným číslem d ($1 \leq d \leq N$) — pila ve vzdálenosti d od pramene končí údržbu. Můžete předpokládat, že číslo d je jedno z čísel $n_1, \dots, n_P$.
- ▷ písmeno V následované mezerou a přirozeným číslem t ($1 \leq t \leq N$) — z tábora ve vzdálenosti t od pramene řeky je odeslán vor. Můžete předpokládat, že t je odlišné od všech čísel $n_1, \dots, n_P$.

Formát výstupu: Program vypíše na standardní výstup tolik řádků, kolik vorů bylo celkem odesláno. Každý řádek bude obsahovat jedno celé číslo, které udává vzdálenost pily, která zpracuje vor, od pramene řeky. Pokud vor nebude zpracován žádnou pilou na řece, vypište 0.

Grafový počítač

V tomto ročníku olympiády budeme pracovat se speciálním grafovým počítačem. V následujícím studijním textu je popsáno, jak takový počítač funguje a jak se programuje.

Běžné počítače počítají s čísly. Železniční inženýři v Tasmánii si jednoho dne všimli, že většina problémů, které potřebují řešit, se týká grafů. Proto během jedné polední přestávky vynalezli grafovou jednotku, která umí provádět všechny běžné operace s grafy, a to dokonce v konstantním čase. Sice zatím nevymysleli, jak ji sestavit, ale i tak si můžeme v tomto ročníku olympiády vyzkoušet, jak se na takovém *grafovém počítači* programuje.

Nejdříve definujeme, s čím grafový počítač pracuje.

Graf si můžeme představovat třeba jako body v rovině (těm budeme říkat *vrcholy* grafu), jejichž některé dvojice jsou spojeny hranou. Může to tedy třeba být mapa železniční sítě: vrcholy jsou zastávky, dvě zastávky jsou spojeny hranou, pokud mezi nimi vede přímá trať. Pokud se hrany kříží, předpokládáme, že se jedná o mimoúrovňová křížení.

Řečeno formálně, graf je dvojice (V, E) taková, že V je libovolná konečná množina (jejím prvkům se říká vrcholy) a E je množina neuspořádaných dvojic prvků z V (tedy hran).

Upřesněme ještě, že mezi dvěma různými vrcholy může vést maximálně jedna hrana a že nejsou povoleny hrany, jejichž oběma konci je tentýž vrchol.

Dále ke grafu můžeme přidat *ohodnocení*. Vrcholům a hranám může být přiřazeno nezáporné celé číslo. V případě hran může znamenat například délku kolejí, v případě vrcholů může popisovat mytné, které se platí za průjezd. Někdy jím také můžeme značit různé vlastnosti: například u našeho železničního příkladu může být vrchol odpovídající stanici ohodnocen jedničkou, zatímco vrcholy v zastávkách dvojkou.

Příklad:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
6 3 9	2
2	4
4	6
6	4
V 1	2
V 3	0
V 5	
U 2	
V 1	
K 2	
V 1	
U 6	
V 5	

Reprezentace grafu

Grafový počítač ukládá grafy tak, že vrcholy jsou určeny přirozenými čísly od 1 do počtu vrcholů. Těmto číslům budeme říkat *identifikátory* (zkráceně *id*) vrcholů.

Hrany budeme vždy identifikovat pomocí čísel vrcholů, které hrana spojuje.

Každý vrchol a každá hrana mají své ohodnocení. To má buď hodnotu nezáporného celého čísla nebo speciální hodnotu **undef** (tzn. nedefinováno). Aby se to nepletlo, budeme číslům na hranách říkat *váhy hran*, zatímco těm ve vrcholech *značky vrcholů*.

K programování grafového počítače použijeme běžný programovací jazyk, například Pascal nebo C, který rozšíříme o několik datových typů a funkcí. Zde je budeme ukazovat v syntaxi Pascalu, v C budou obdobné.

Datové typy

- ▷ Typ **Graph** — do tohoto typu se dá uložit jeden (celý, libovolně velký) graf. Mezi proměnnými a hodnotami tohoto typu funguje obvyklé přiřazování a porovnávání na rovnost.
- ▷ Typ **Value** popisuje ohodnocení vrcholu nebo hrany. Lze do něj ukládat nezáporná celá čísla a konstantu **undef**. Hodnoty tohoto typu různé od **undef** jsou kompatibilní s pascalským typem **Integer**, v případě jazyka C s typem **int**.

Operace se strukturou grafu

- ▷ Konstanta **EmptyG**. V této konstantě je uložen prázdný graf. To je takový, který nemá žádné vrcholy (tedy ani hrany).
- ▷ Funkce **AddV(G,z)** přidá do grafu G nový vrchol ohodnocený značkou z . Do přidaného vrcholu zatím nevedou žádné hrany. Nový vrchol bude zařazen jako poslední, tedy jeho *id* bude nejvyšší. Funkce vrátí toto *id*.
- ▷ Procedura **DelV(G,id)** smaže vrchol s daným *id*. Zbývající vrcholy „sraží doleva“, aby nevznikla díra (tedy z $id + 1$ se stane *id*, z $id + 2$ se stane $id + 1$ atd.). Zároveň odstraní všechny hrany, které končily ve smazaném vrcholu.
- ▷ Procedura **AddE(G,x,y,w)** vytvoří hranu mezi vrcholy s *id* x a y , ohodnocenou vahou w . Hrana nesmí před voláním této procedury existovat.
- ▷ Procedura **DelE(G,x,y)** odstraní hranu mezi vrcholy x a y (nesmí být volána, pokud hrana neexistuje).
- ▷ Funkce **TestE(G,x,y)** zjistí, jestli mezi vrcholy x a y vede hrana.

Manipulace s ohodnocením

- ▷ Funkce **GetV**(G, id) vrací značku zadaného vrcholu.
- ▷ Procedura **SetV**(G, id, z) nastaví značku zadaného vrcholu.
- ▷ Procedura **SetAllV**(G, z) ji nastaví všem vrcholům grafu.
- ▷ Procedura **ReplaceV**($G, zold, znew$) všem vrcholům, které měly značku *zold*, ji změní na *znew*.
- ▷ Obdobně fungují **GetE**(G, x, y), **SetE**(G, x, y, w), **SetAllE**(G, w) a **ReplaceE**($G, wold, wnew$). Pracují s vahami hran místo značek vrcholů. Pro identifikaci hrany se používají *id* vrcholů *x* a *y*, mezi kterými vede. Procedura **SetE** hranu založí, pokud ještě neexistuje.

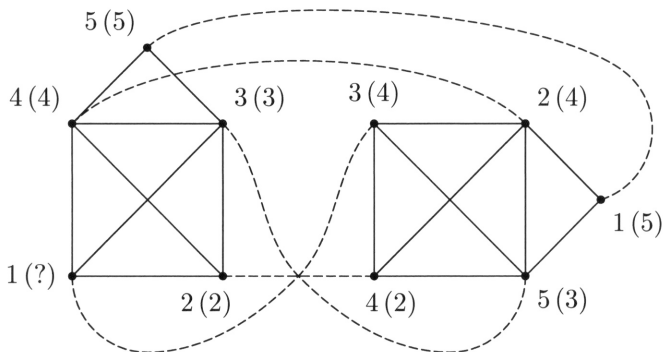
Statistické funkce

- ▷ Funkce **CountV**(G) odpoví, kolik vrcholů se nachází v grafu.
- ▷ Funkce **SumV**(G) vrací součet značek všech vrcholů, přičemž **undef** se počítá jako 0. Pokud graf nemá žádné vrcholy, vrací 0.
- ▷ Funkce **CountE**(G) a **SumE**(G) fungují obdobně pro hrany a jejich váhy.

Globální operace

- ▷ Funkce **Iso**(G, H, veq, eq) zjistí, jestli jsou grafy G a H *isomorfní*. Isomorfismem myslíme, že lze jednomu z grafů přecíslovat vrcholy tak, aby se shodoval s druhým grafem. Dva grafy jsou shodné, pokud mají stejné množiny vrcholů i hran; navíc se jim musí shodovat značky vrcholů a váhy hran podle toho, jak určují parametry *veq* (pro vrcholy) a *eq* (pro hrany). Tyto parametry mohou nabývat následujících hodnot:
 - * **any** — libovolné dva vrcholy/hrany se rovnají (na ohodnocení se nehledí).
 - * **value** — odpovídající si vrcholy/hrany musejí mít stejné ohodnocení. Hodnotu **undef** ale považujeme za „žolíka“, který se rovná libovolné hodnotě.
 - * **value_strict** — vrcholy/hrany musejí mít stejné ohodnocení, **undef** se rovná jen **undefu**.
 - * **value_defined** — vrcholy/hrany musejí mít stejné ohodnocení, ale **undef** se nerovná ničemu, ani **undefu**.
 - * **id** — vrcholy musejí mít stejná *id* (toto lze aplikovat jen na vrcholy, neboť hrany nemají *id*). Jinými slovy, zakazujeme přecíslovávat vrcholy, ale na jejich ohodnocení nehledíme.
 - * **none** — žádné dva vrcholy/hrany nejsou identické. Ač to vypadá neužitečně, tuto možnost použijeme v dalších funkcích.

Jak isomorfismus funguje, je vidět na následujícím obrázku. Čísla před závorkami jsou *id* vrcholů, v závorkách jejich značky (otazník značí **undef**). Všechny hrany mají váhu **undef**. Grafy jsou isomorfní (čárkované čáry ukazují, který vrchol odpovídá kterému), pokud *veq* nastavíme na **value** nebo **any** a *eeq* na **any**, **value** nebo **value_strict**. V ostatních případech isomorfní nejsou.

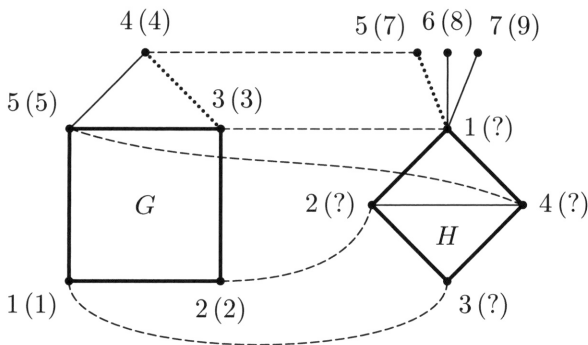


- ▷ Funkce **Find**(*G*, *H*, *veq*, *eeq*) najde podgraf grafu *G* (tedy takový graf, který lze získat z *G* odstraněním některých vrcholů a hran) isomorfní s grafem *H*. Výsledkem funkce bude tento podgraf, přičemž vrcholy budou očíslované podle grafu *H* a ohodnocení vrcholů a hran bude pocházet z grafu *G*. Pokud hledaný podgraf neexistuje, funkce vrátí **EmptyG**. Parametry *veq* a *eeq* určují stejně jako u funkce **Iso**, jak se chová isomorfismus.

Pokud existuje více isomorfních podgrafů, funkce **Find** nalezne nejlehčí z nich (takový, který má nejmenší součet vah hran, jak by ho spočítala funkce **SumE**). Pokud i tak existuje více řešení, **Find** vrátí libovolné z nich.

- ▷ Funkce **Common**(*G*, *H*, *veq*, *eeq*) najde největší společný podgraf grafů *G* a *H*. Přesněji, najde graf, který je isomorfní (podle *veq* a *eeq*) s některým podgrafem *G* i některým podgrafem *H*. Ze všech možných řešení si navíc vybere takové, které má největší možný počet vrcholů, a z takových pak to s největším počtem hran. Pokud i těch je více, vybere si libovolně.

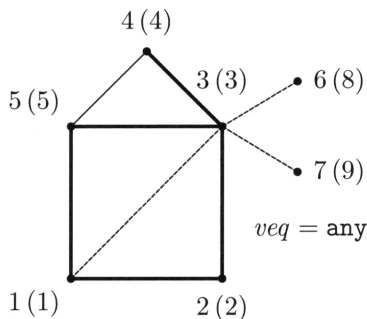
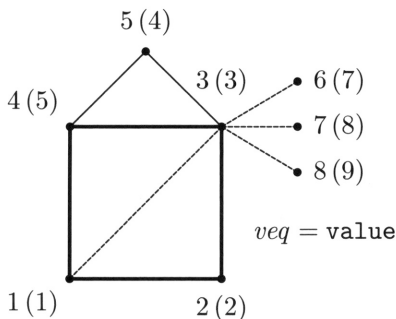
Výsledný graf bude mít *id* vrcholů ve stejném pořadí, jako je měl odpovídající podgraf v *G* (jen „sražená k sobě“). Ohodnocení vrcholů a hran bude také zděděno z grafu *G*.



Dvojice grafů na předchozím obrázku má největší společný podgraf při $veq = \text{value}$ obtažený tučně. Čárkovaně je naznačeno jedno z možných přiřazení vrcholů. Při $veq = \text{any}$ přibude do společné části ještě vrchol 5 a tečkovaná hrana $\{3, 4\}$ nalevo, která může odpovídat kterékoli z hran $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$ a $\{1, 7\}$ napravo.

- ▷ Funkce $\text{Join}(G, H, veq, eq)$ sloučí grafy G a H . Můžete si to představit tak, že je „slepí za jejich největší společný podgraf.“ Udělá to tak, že nejprve nalezne největší společný podgraf (tak jako ve funkci **Common**), pak k němu doplní zbývající vrcholy grafu G a nakonec vrcholy grafu H (*id* vrcholů výsledného grafu tedy budou v tomto pořadí). Hrany, váhy a značky přitom zdědí z obou grafů, přičemž pokud se nějaký vrchol nebo hrana vyskytují v obou grafech, řídí se ohodnocením z grafu G .

Join grafů z předchozího obrázku vypadá následovně:



Tučně je vyznačena společná část (všimněte si rozdílů v *id* vrcholů), tenké nepřerušované hrany pocházejí z grafu G , čárkované hrany

z grafu H . (Zde jsme nakreslili jeden z možných výsledků, ostatní se budou lišit tím, který vrchol v grafu H je ve společné části, případně otočením nebo překlopením čtyřúhelníku.)

Všechny operace předpokládají, že dostanou korektní vstup — není tedy například povoleno volat je s *id* neexistujícího vrcholu nebo upravovat grafovou proměnnou, do které jste ještě nepřiradili, a podobně.

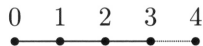
Všechny grafové operace trvají konstantní čas.

Abychom vám usnadnili ladění programů, vytvořili jsme simulátor grafového počítače. Najdete ho od září na webových stránkách olympiády.

Příklad 1: Tvorba cesty

Ukážeme, jak vytvořit cestu délky n . To je graf o $n + 1$ vrcholech a n hranách, ve kterém je každý vrchol spojen hranou s následujícím. Zajisté bychom cestu mohli vytvářet postupně, například takto:

```
function cesta(n: Integer): Graph;
var
  i, posledni, novy: Integer;
  g: Graph;
begin
  g := EmptyG;
  posledni := AddV(g, 0);
  for i := 1 to n do begin
    novy := AddV(g, 0);
    AddE(g, posledni, novy, undef);
    posledni := novy;
  end;
  cesta := g;
end;
```



Začínáme s jediným vrcholem (má *id* 1) a pak n -krát přidáme nový vrchol a hranu do něj. (Vrcholům dáváme značky 0, hranám nedefinované váhy, což se bude hodit později.) Celý postup tedy trvá lineárně dlouho a vytvoří cestu začínající ve vrcholu s *id* 1 a končící vrcholem s *id* $n + 1$. Nešlo by to rychleji?

Představme si na chvilku, že máme v g již část cesty, řekněme o k vrcholech. Pomocí `Join(g, g, none, none)` vytvoříme nový graf, který obsahuje dvě kopie této cesty (jednu s *id* $1, \dots, k$, druhou s *id* $k + 1, \dots, 2k$). Stačí tedy přidat hranu z k do $k + 1$ a máme cestu délky $2k$. Toho využijeme v následujícím (rekurzivním) řešení úlohy:

```
function cesta(n: Integer): Graph;
var
```

```

vysledek: Graph;
pulka: Integer;
begin
  if n = 0 then begin { Cesta délky 0 je snadná }
    vysledek := EmptyG;
    AddV(vysledek, 0);
  end else begin
    { Rekurzivně vytvoříme cestu poloviční délky }
    pulka := (n-1) div 2;
    vysledek := cesta(pulka);
    { Vyrobíme 2 kopie a spojíme je }
    vysledek := Join(vysledek, vysledek, none, none);
    AddE(vysledek, pulka+1, pulka+2, undef);
    { Když polovina nevyšla celočíselně, přidáme ještě hranu }
    if n mod 2 = 0 then begin
      AddV(vysledek, 0);
      AddE(vysledek, n, n+1, undef);
    end
  end;
  cesta := vysledek;
end;

```



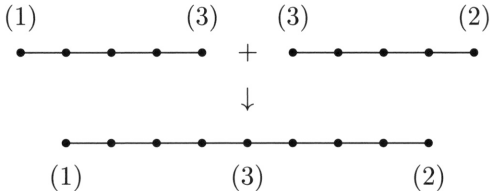
Při každém rekurzivním volání se n zmenší alespoň dvakrát, časová složitost tohoto řešení je tedy $\mathcal{O}(\log n)$.

Ukážeme ještě jedno řešení, tentokrát založené na spojování cest za vrchol. Budeme vytvářet cesty, jejichž počáteční vrchol bude mít značku 1, koncový vrchol značku 2 a všechny ostatní vrcholy **undef**. Když chceme dvě cesty spojit do jedné, přeznačíme koncový vrchol první a počáteční vrchol druhé na 3 a zavoláme **Join** s $veg = \text{value_defined}$. Tím způsobíme, že se vrcholy označené trojkou ztotožní a vznikne cesta dvojnásobné délky (kdybychom místo **value_defined** použili **value**, ztotožnily by se i vnitřní vrcholy cest, což nechceme). Pak ještě odstraníme pomocnou značku 3 a přepíšeme ji na **undef**. Program tentokrát pro jednoduchost napíšeme pouze pro $n = 2^k$:

```

function cesta(n: Integer): Graph;
var
  g, t1, t2: Graph;
begin
  if n = 1 then begin
    g := EmptyG;
    AddV(g, 1);
    AddV(g, 2);

```




```

    AddE(g, 1, 2, undef);
end else begin
    t1 := cesta(n div 2);
    t2 := t1;
    ReplaceV(t1, 2, 3);
    ReplaceV(t2, 1, 3);
    g := Join(t1, t2, value_defined, any);
    ReplaceV(g, 3, undef);
end;
cesta := g;
end;

```

Časová složitost tohoto řešení je opět logaritmická.

Příklad 2: Obchodní cestující

Všichni známe vykutálené obchodníky. Prodávají kdovíco a nejraději by, kdyby je po prodeji kupující již nikdy nenašel.

Představme si takového obchodníka. Nyní se nachází ve městě (vrcholu) číslo 1. Chce projet celou zemi (graf) po silnicích (hranách) tak, aby navštívil každé město právě jednou a pak se vrátil domů. Navíc při tom chce najezdit co nejméně, takže by celková váha použitých hran měla být co možná nejmenší.

Na obvyklém počítači tento problém neumíme vyřešit v polynomiálním čase, ale pokud máme k dispozici grafový počítač, půjde to velice efektivně.

Stačí totiž vyrobit cyklus z n hran a funkcí **Find** nalézt jeho nejlehčí výskyt v grafu popisujícím mapu. Cyklus vytvoříme tak, že podle předchozího příkladu vytvoříme cestu o $n - 1$ hranách očíslovanou $1, \dots, n$ a poté spojíme hranou její první vrchol s posledním. To bude trvat logaritmicky dlouho a funkce **Find** pak konstantně. I program bude jednoduchý:

```

function cestujici(mapa: Graph): Graph;
var trasa: Graph;
begin
    trasa := cesta(CountV(mapa)-1);
    AddE(trasa, 1, CountV(mapa), undef);
    cestujici := Find(mapa, trasa, any, any);
end;

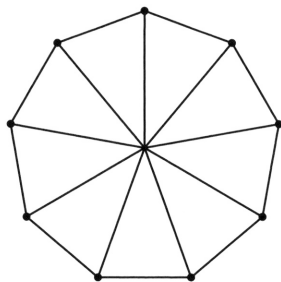
```

Soutěžní úloha.

a) (*5 bodů*) *Loukoťové kolo* je graf, který vznikne z cyklu o n vrcholech přidáním jednoho vrcholu (osy) spojeného s každým vrcholem cyklu

hranami (loukotěmi). Loukoťové kolo velikosti n má tedy $n + 1$ vrcholů a $2n$ hran.

Napište funkci pro grafový počítač, která pro zadané n takové kolo zkonstruuje. Na obrázku vpravo vidíte příklad takového kola pro $n = 9$.



b) (5 bodů) Mějme graf popisující silniční síť: vrcholy jsou města, hrany silnice ohodnocené nezápornými vzdálenostmi v kilometrech. Silnice jsou propojeny pouze ve městech, všechna ostatní křižení jsou mimoúrovňová. Bude nás zajímat, jakou nejmenší vzdálenost musíme ujet, abychom se dostali z města x do města y . Jinými slovy, máme v grafu nalézt cestu mezi x a y , na které bude celkový součet vah hran nejmenší.

Napište funkci pro grafový počítač, která dostane na vstupu graf silniční síť a identifikátory dvou různých vrcholů x , y , a odpoví vzdáleností mezi těmito vrcholy.

P – II – 1

Vlak

Na nákladním nádraží stál vlak. Sice bez lokomotivy, ale tu měli vzápětí připojit, když tu přišel přednosta stanice, prohlédl si seřazené vagóny a oznámil železničářům nepříjemnou zprávu. Nový předpis mu přikazuje poslat do cílové stanice zprávu, v jakém pořadí budou ve vlaku vagóny řazeny, ale neví, kolikrát vlak na cestě změní směr, takže potřebuje, aby vypadal stejně v obou směrech.

Navíc železničáři nesmí vagóny vyměňovat. Jediné, co mohou, je vagón vyřadit (to jim nařizuje jiný předpis). Dopravce chce zároveň na každém vlaku vydělat co nejvíce, což znamená, že je třeba do jednoho vlaku zařadit co nejvíce vagónů.

Soutěžní úloha. Na vstupu dostanete posloupnost písmen. Každé z těchto písmen představuje typ vagónu. Výstupem vašeho programu bude výpis pozic vagónů (písmen), které musejí být odstraněny, aby výsledný vlak (posloupnost písmen) po jejich odstranění byl stejný při čtení zepředu i zezadu (tedy aby výsledný řetězec písmen byl palindromem).

Pokud existuje více možností, nalezněte a vypište tu, kde je třeba odstranit nejmenší možný počet vagónů. Pokud je takových možností více, můžete vypsát libovolnou z nich.

Formát vstupu: Vstup je tvořen dvěma řádky. První obsahuje celé číslo N ($1 \leq N \leq 50\,000$), které udává původní počet vagónů vlaku. Druhý řádek pak obsahuje posloupnost N znaků, které reprezentují jednotlivé typy vagónů.

Formát výstupu: Výstup je tvořen dvěma řádky. První obsahuje jediné číslo K ($0 \leq K \leq N - 1$), které udává, kolik vagónů je potřeba z vlaku odstranit, aby vlak vypadal stejně z obou směrů. Druhý řádek pak obsahuje K různých čísel od 1 do N určujících pořadí vagónů, které mají být z vlaku odstraněny. Pokud posloupnost znaků na vstupu je stejná při čtení zepředu i zezadu, pak na první řádek vypište číslo 0 a druhý řádek bude prázdný.

Příklady:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
6	1
ABCDBA	3

Odstraněním třetího písmene vznikne vlak s vagóny ABDBA. Jiné optimální řešení je odstranit čtvrté písmeno, kdy vznikne vlak s vagóny ABCBA.

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
7	2
ABECEDA	2 6

Odstraněním druhého a šestého písmene vznikne vlak s vagóny AECEA.

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
7	4
ABECADA	3 4 6 7

Odstraněním třetího, čtvrtého, šestého a sedmého písmene vznikne vlak s vagóny ABA. V tomto případě je však optimálních řešení mnohem více.

P – II – 2

Jabloňový sad

V jednom malém království vyrostl strom se zlatými jablky. Král byl praktický člověk, a tak přikázal zahradníkům, ať z takových jabloní vypěstují celý sad. Ale k jejich nemilému překvapení většina stromů urodila jen obyčejná kyselá jablka. Alchymisté však objevili zvláštní formulí, která říkala, kdy a kam zasadit semínko stromu, aby měl opět zlatá jablka. Prvních N stromů, které takto zasadili, bylo skutečně zlatých, a tak si

král nechal vypracovat seznam, podle něhož má stromy v příštích letech sázet.

Ač stromy rostly překvapivě rychle, ruce nenechavců a zlodějíčků byly ještě rychlejší. Dlouho netrvalo a král začal se stavbou oplocení. Odhad účtu za pletivo byl však zdrcující. Poddaní se totiž rozhodli oplotit čtvrt království, aby všechny stávající i budoucí stromy rostly uvnitř. Krále napadlo, že zřejmě bude lepší oplotit jen nynější stromy a pak podle potřeby rozšiřovat plot i na nové stromy. Aby se ušetřilo, část stávajícího oplocení se rozebere a použije spolu s nově nakoupeným množstvím pletiva. Král si tedy sehnal Vás coby projektanta a netrpělivě očekává vyhotovený rozpočet za pletivo na příštích deset let. Vám je jasné, co musíte spočítat nejdříve: kolik pletiva musíte koupit na počátku a potom se zasazením každého nového stromu. Alchymisté, vidouce Vaše zděšení, Vám však ještě dali jednu radu: Minimální nutná délka plotu se s přidáním nového stromu nikdy nezmenší.

Soutěžní úloha. Na začátku dostanete kartézské souřadnice N bodů (jabloní) v rovině ($[X_1, Y_1], \dots, [X_N, Y_N]$) a musíte zjistit nejmenší možný obvod obrazce, který je všechny bude obsahovat (tj. délka oplocení). Postupně obdržíte M dalších bodů zadaných souřadnicemi v rovině. Tyto body budete přidávat ke stávajícím v pořadí od prvního do M -tého (sázejí se nové stromy). Po přidání každého z nich musíte spočítat, o kolik se zvětšil obvod nejmenšího obrazce, který obsahuje všechny původní i dosud přidané body. Výsledkem může být i 0, pokud nově přidaný bod již leží uvnitř obrazce obklopujícího dříve přidané body. Vámi spočítaný údaj tedy odpovídá tomu, kolik pletiva je třeba přikoupit.

M očekávejte jako velké číslo, takže abyste králi mohli dát rozpočet včas, musíte umět potřebnou délku nového pletiva po přidání stromu spočítat rychle. Bude tedy dobrý nápad při přidání každého bodu využít dříve spočítané hodnoty.

Formát vstupu: Na prvním řádku vstupu bude číslo N , které udává počáteční počet jabloní (bodů). Následuje N řádků, kde na i -tém řádku ($1 \leq i \leq N$) jsou dvě čísla X_i a Y_i oddělená mezerou (souřadnice již zasazených stromů). Další řádek obsahuje číslo M . Následuje M řádků, kde na i -tém řádku ($1 \leq i \leq M$) jsou dvě čísla X'_i a Y'_i oddělená mezerou, která udávají souřadnice nově vysazovaných stromů.

Formát výstupu: Na výstupu vypíšete celkem $M+1$ řádků. Na prvním řádku bude počáteční délka oplocení, tj. obvod nejmenšího obrazce, který obsahuje všechny body $[X_1, Y_1], \dots, [X_N, Y_N]$. Následuje M řádků, na

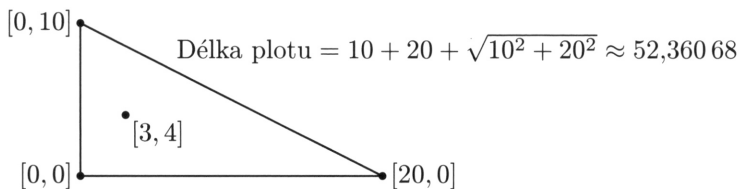
j -tém z nichž ($1 \leq j \leq M$) bude uvedeno, o kolik se musí obvod obrazce zvětšit po přidání bodu $[X'_j, Y'_j]$ k předchozím (tj. kolik nového pletiva je zapotřebí). Výsledky vypisujte s přesností na 5 desetinných míst.

Program musí výstup vypisovat průběžně. Pokaždé, když ze vstupu přečte polohu dalšího vysazovaného stromu, musí vydat příslušný řádek výstupu, aniž by čekal, až budou zadány všechny stromy.

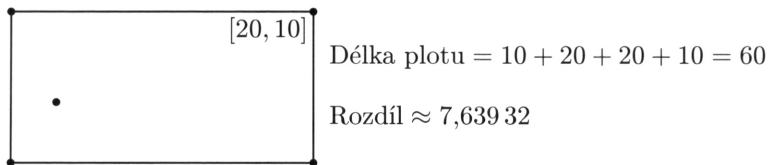
Příklad:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
4	52.36068
0 0	7.63932
0 10	4.14213
20 0	
3 4	
2	
20 10	
-5 5	

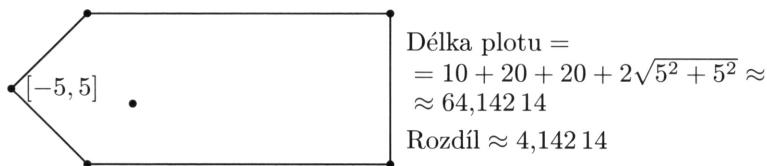
Počáteční situace:



Po přidání bodu [20, 10]:



Po přidání bodu [-5, 5]:



Mažoretky

Kromě stromů se zlatými jablky mají v království ještě jednu zvláštnost. Příchod každého dne slaví v hlavním městě průvodem N mažorettek. V průvodu kráčí mažoretky v jedné řadě za sebou.

Aby se poddaní nenudili, tak v každém dni v roce pochodují mažoretky v jiném pořadí. A protože rok má v království přesně $N! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot N$ dní, tak během roku pochodují v každém svém možném pořadí právě jednou.

Pořadí, v jakém mažoretky pochodují, se určují během roku následovně. Každá mažoretká má své číslo od 1 do N . Jejich pořadí v konkrétním dnu si tedy můžeme představit jako posloupnost N navzájem různých čísel od 1 do N . Pokud $(a_1, \dots, a_N)$ a $(b_1, \dots, b_N)$ jsou dvě takové posloupnosti, pak mažoretky pochodují v pořadí $(a_1, \dots, a_N)$ v jednom roce dříve než v pořadí $(b_1, \dots, b_N)$, jestliže pro nejmenší index i s $a_i \neq b_i$ platí $a_i < b_i$. Pokud například $N = 4$, pak v pořadí $(3, 1, 2, 4)$ budou mažoretky pochodovat dříve, než v pořadí $(3, 4, 1, 2)$.

Pro $N = 3$, budou mažoretky v jednom roce pochodovat postupně v pořadí $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ a $(3, 2, 1)$.

Soutěžní úloha. Vstup obsahuje dva řádky. Na prvním řádku je jedno celé číslo $N \geq 2$, které udává počet mažorettek. Druhý řádek obsahuje N navzájem různých celých čísel od 1 do N . Tato čísla určují pořadí mažorettek. Na výstup vypište dva řádky, které obsahují:

- (3 body) pořadí mažorettek v následující den,
- (7 bodů) pořadí mažorettek přesně za půl roku.

Příklad:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
5	1 4 3 2 5
1 4 2 5 3	4 1 2 5 3

Grafový počítač na kliku

K úloze se vztahuje studijní text z úlohy P–I–4.

Soutěžní úloha. a) Napište funkci pro grafový počítač, která pro zadané číslo n zkonstruuje *úplný graf* K_n . To je graf s n vrcholy, jehož každý

vrchol je spojený hranou s každým. Pokud to neumíte pro obecné n , vyřešte úlohu alespoň pro ta n , která jsou mocninami dvojky.

b) Napište funkci pro grafový počítač, která spočítá *klikovost* zadaného grafu. To je největší možný počet vrcholů zadaného grafu, které jsou spojeny každý s každým. Jinak řečeno, je to největší n , pro které je K_n podgrafem daného grafu.

P – III – 1

Básník Honzík

Honzík Nerudů si spokojeně hověl v lavici a v duchu se procházel po Malé Straně. „Jene, chytej!“, vytrhl ho ze zadumání výkřik spolužačky Božky Němcové a náraz boty do jeho hlavy. Být to kdokoli jiný, jistě by neušel spravedlivému trestu, jenže Boženka byla jeho tajnou láskou už od třetí třídy. Jak rád by ji pozval na procházku podél Vltavy. Leč když se opovážil požádat ji, se smíchem ho odbyla slovy:

Jelikož jsem romantička,
obměkčí mě jen básnička.
Zveršuj tedy žádost svou,
a projdem se nad Vltavou.

Jenže Honzík měl ze slohu vždycky čtyřku a paní učitelce stoupaly vlasy hrůzou, jen se chopil pera. Naštěstí měl dobrého kamaráda Járu Cimrmána. Ten mu pověděl, že psát básně je strašně jednoduché a stačí jen dosáhnout toho, aby se verše co nejvíce rýmovaly (později bude tato teorie publikována pod názvem absolutní rým). To byla sice dobrá rada, ale hledání co nejvíce se rýmujících slov je často velmi obtížné, a tak požádal o pomoc vás.

Soutěžní úloha. Máte dán seznam obsahující N slov skládajících se z malých písmen anglické abecedy. Vaším úkolem je zodpovídat Honzíkovy dotazy, což znamená, že pro jím zadané slovo s máte najít slovo r ze seznamu, které má největší společný koncový úsek se slovem s . Např. slova **Zbynek** a **pelynek** mají společný koncový úsek **ynek** délky 4.

Pokud je v seznamu více takových slov, vyberte z nich lexikograficky nejmenší (lexikografické uspořádání je to, které se používá ve slovnících: nejdříve podle prvního písmena, pak podle druhého atd.; **ch** uvažujeme jako dvě písmenka). Pokud naopak v seznamu není žádné slovo se společným koncovým úsekem délky alespoň 1, vypište **NELZE**.

Protože dotazů může být hodně, snažte se optimalizovat rychlost odpovědi na dotaz i za cenu delšího předzpracování seznamu slov.

Poznámka: Pokud úlohu nedokážete vyřešit efektivně, zkuste popsat alespoň řešení, které z vyhovujících slov vypíše libovolné namísto lexikograficky nejmenšího.

Formát vstupu: Na prvním řádku budou dvě čísla N a K , po kterých následuje N slov seznamu, každé na samostatném řádku. Následuje K slov, $K \leq 10^4$, opět každé na samostatném řádku, která reprezentují Honzíkovy dotazy. Součet délek všech slov seznamu nepřesáhne 10^6 znaků, tedy speciálně $N \leq 10^6$. Žádné slovo v seznamu ani žádné z K slov k vyhledání nebude mít víc jak 10^4 znaků.

Formát výstupu: Pro každý z K Honzíkových dotazů vypíšte na samostatný řádek slovo s maximálním společným koncovým úsekem (případně lexikograficky nejmenší, pokud jich je víc) mezi slovy v seznamu. Pokud žádné takové slovo neexistuje, vypíšte **NELZE**.

Příklad:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
5 3	NELZE
pluji	lituji
listuji	listuji
lituji	
nepreji	
basnik	
bagr	
kvituji	
dekuji	

Pro slovo **dekuji** máme na výběr mezi slovy **pluji**, **listuji** a **lituji**, která mají stejnou délku společného koncového úseku (určitý společný koncový úsek má i se slovem **nepreji**, ale ten má délku pouze dva); **listuji** je z nich lexikograficky nejmenší.

P – III – 2

Úřad

Úřad pro minimalizaci byrokracie zaměstnává několik tisíc úředníků. Ti jsou pro zvýšení efektivity své práce hierarchicky uspořádání, tj. každý z nich má právě jednoho přímého nadřízeného; jedinou výjimkou je ministr pro minimalizaci byrokracie, který je nejvýše postaveným úřední-

kem a žádného nadřízeného nemá. Každý z úředníků smí vykonávat právě jeden úkon (někteří smí dávat pouze kulatá razítka, někteří pouze hranatá, někteří mají na starosti styk s veřejností, atd.). Výjimkou je opět ministr, o kterém legendy tvrdí, že je schopen vykonávat všechny funkce poskytované úřadem.

Potřebuje-li tedy někdo něco zařídit na úřadě, nejprve si vybere nějakého úředníka, který smí komunikovat s veřejností. Ten už ale nesmí vykonávat žádný jiný úkon, a není mu tedy schopen přímo pomoci. Proto ho pošle za svým nadřízeným. Může-li nadřízený požadovaný úkon provést, učiní tak, jinak zájemce přepošle za svým nadřízeným. A toto se opakuje, dokud zájemce nedorazí k někomu schopnému ho obsloužit.

Teď jsou volby na dohled a voliči si stěžují, že někteří úředníci nic nedělají. Například dává-li úředník a všichni jeho přímí podřízení kulatá razítka, pak se k němu nikdy žádný požadavek nedostane. Obdobně úředník, jehož žádný (ani nepřímý) podřízený nemá na starosti styk s veřejností, nikdy nemusí nic dělat. Potřebovali bychom tedy nalézt všechny takové nezaměstnané úředníky, abychom je mohli povýšit.

Poznamenejme ještě, že ministra nikdy za zbytečného nepovažujeme.

Soutěžní úloha. Úředníci jsou očíslováni přirozenými čísly $1, \dots, N$, kde úředník číslo 1 je ministr. Pro každého z nich až na ministra máme zadáno číslo jeho nadřízeného, které je vždy menší než číslo úředníka. Pro každého úředníka až na ministra také máme zadáno číslo úkonu, který smí vykonávat. Úkony jsou očíslovány přirozenými čísly $1, \dots, M$, kde úkon číslo 1 je styk z veřejností. Vypište čísla všech úředníků, kteří nikdy nic nedělají. Úředník číslo k , který smí vykonávat úkon číslo u , něco dělá, jestliže $u = 1$ nebo existuje posloupnost čísel $k = a_1 < a_2 < \dots < a_t$ taková, že:

- ▷ úředník číslo a_i je přímý nadřízený úředníka a_{i+1} pro $1 \leq i \leq t-1$,
- ▷ úředník a_t má na starosti styk s veřejností,
- ▷ žádný z úředníků $a_2, a_3, \dots, a_{t-1}$ nevykonává úkon u .

Formát vstupu: Program načte vstupní data ze standardního vstupu. První řádek obsahuje přirozená čísla N a M , udávající počet úředníků a počet typů úkonů. Na následujících $N-1$ řádcích jsou popsáni úředníci kromě ministra. Na i -tém z těchto řádků se nachází dvě čísla n_i a u_i ($1 \leq n_i \leq i$, $1 \leq u_i \leq M$), kde n_i je číslo přímého nadřízeného úředníka číslo $i+1$ a u_i je číslo úkonu, který smí vykonávat.

Můžete předpokládat, že počet úkonů M je řádově menší než počet úředníků N .

Formát výstupu: Program vypíše na standardní výstup čísla úředníků, kteří nic nedělají, v libovolném pořadí, oddělená mezerami.

Příklad:

Vstup: *Výstup:*

10 3 2 3 7

1 2

2 3

2 2

2 2

1 2

6 2

6 1

4 1

5 1

P – III – 3

Grafový počítač v potrubí

K úloze se vztahuje studijní text z úlohy P–I–4.

A právě takový počítač umožnil nový způsob komunikace: potrubní poštu. Taková potrubní pošta sestává z mnoha stanic. Některé dvojice stanic jsou propojeny potrubím, které lze použít k přepravě zpráv v obou směrech. Stanice jsou samozřejmě schopné zprávy předávat dál, takže zásilký obvykle putují do cílové stanice několika na sebe navazujícími rourami.

Potrubí bylo postaveno a ještě než došlo k vyřízení všech povolení, nahromadilo se mnoho zpráv, které je třeba doručit. A protože je to systém nový, rozhodli se poštmistři, že začnou posílat od těch nejkratších zpráv, aby zjistili, jestli se v potrubí nezasekávají.

Navíc se po dobu vyřizování formalit v potrubí usadily myši. Myši samozřejmě každé procházející psaní hned zhltnou, proto je potřeba poslat potrubím napřed kočku. Protože však kočka je mnohem těžší než psaní, je také nákladnější ji potrubím profouknout. Proto bylo rozhodnuto, že budou vyčištěny jen některé roury, a to tak, aby jejich celková délka byla co nejmenší a přitom bylo možno poslat psaní z libovolné stanice do libovolné jiné.

Soutěžní úloha. a) (3 body) Napište funkci pro grafový počítač, která seřadí zprávy podle délky. Vstupem funkce bude pole celých čísel — délek

zpráv. Úkolem je toto pole seřadit od nejmenšího po největší. Můžete při tom využít toho, že délky zpráv se vejdou do typu **Value** grafového počítače.

Řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(n \log n)$ může získat nejvýše 1 bod, pomalejší řešení nedostanou žádné body.

b) (7 bodů) Dostanete na vstupu popis potrubí jako souvislý ohodnocený graf (stanice jsou vrcholy, trubky jsou hrany a jejich váhy odpovídají délkám trubek). Vraťte podgraf obsahující právě ty hrany, které mají být vyčištěny. Jinými slovy podgraf, ve kterém vede mezi každou dvojicí vrcholů cesta a který má ze všech takových grafů nejmenší možný součet vah hran.

Pokud vám to pomůže, můžete předpokládat, že neexistuje žádná dvojice stejně dlouhých rour.

I u této podúlohy bude při hodnocení kladen důraz na to, zda je vaše řešení rychlejší než řešení, která se dají naprogramovat na klasickém počítači.

P – III – 4

Asfaltistán

Program: `asfalt.pas / asfalt.c / asfalt.cpp`
Vstup: `asfalt.in`
Výstup: `asfalt.out`

V Asfaltistáně zjistili, že mají jedno velké území dosud nedotčené asfaltem. Rozhodli se to napravit tak, že napříč územím postaví silnici. Nicméně ministr financí si klade podmínky. Silnice musí být sjízdná pro auta a musí být postavena co nejlevněji. Je totiž krize a musí se šetřit.

Projektanti si rozdělili území na $R \times S$ čtverců o straně 1 km a pro zjednodušení si pro každý čtverec spočítali jeho průměrnou nadmořskou výšku. Zjistili, že silnice mezi dvěma sousedními čtverci je sjízdná, pokud je rozdíl jejich nadmořských výšek maximálně 1 obří sáh.

Navíc můžou stavět mosty a tunely — mostem je možno propojit dva čtverce ve stejném sloupci nebo řádku, pokud je jejich nadmořská výška shodná a nadmořská výška všech čtverců mezi nimi je nižší. Tunelem je také možno propojit dva čtverce o stejné nadmořské výšce ve stejném sloupci nebo řádku, jen nadmořská výška všech čtverců mezi nimi musí být vyšší.

Vaším úkolem je najít nejlevnější silnici mezi políčkem $(0, 0)$ a políčkem $(R - 1, S - 1)$. Silnice musí být na políčkách $(0, 0)$ a $(R - 1, S - 1)$ na povrchu, tedy ne na mostě ani v tunelu.

Poznamenejme, že na jednom políčku může jeden most/tunel končit a současně další začínat. Také si všimněte, že je teoreticky možné, že se na optimální cestě budou dva mosty nebo tunely křížovat. To je povolené, šikovní asfaltistášští inženýři to dokáží vyřešit tak, aby se auta nesrážela.

Formát vstupu: Na vstupu dostanete na prvním řádku celá čísla R, S, c_S, c_M a c_T . Čísla c_S, c_M a c_T udávají ceny za postavení jednoho políčka silnice, mostu a tunelu (v asfaltových dolarech).

Cena za políčko mostu nebo tunelu se počítá jen za políčka *uvnitř*, čili začátek a konec tunelu/mostu se nepočítá.

Na každém z dalších R řádků dostanete S čísel $h_{i,j}$ oddělených mezerou — nadmořské výšky jednotlivých políček v obřích sázích. Na i -tém řádku v j -tém sloupci je uvedeno číslo $h_{i,j}$.

Formát výstupu: Na první řádek výstupu vypište celkovou cenu silnice v asfaltových dolarech. Na následující řádky vypište trasu silnice; na každý řádek dvojici (i_k, j_k) udávající políčko, přes které silnice prochází. Políčka, která se nachází pod mostem nebo nad tunelem, vynechte. První souřadnice vždy udává řádek a druhá sloupec. Pokud řešení neexistuje, vypište na jediném řádku výstupu slovo **NEEXISTUJE**.

Všimněte si, že celková cena může být značně velké číslo, které se do 32bitové proměnné nemusí vejít.

Velikost vstupu: Ve všech vstupech použitých při testování platí $1 \leq R, S \leq 1\,000$, $1 \leq c_S, c_M, c_T \leq 1\,000\,000$ a $0 \leq h_{i,j} \leq 1\,000\,000$.

Ve vstupech za alespoň 5 bodů mimo to platí $1 \leq R, S \leq 50$.

Ve vstupech za alespoň 5 bodů také platí, že alespoň jedna z nejlevnějších silnic neobsahuje žádný tunel ani most. Tyto vstupy nemusejí být různé od těch uvedených v předchozím odstavci.

Příklady:

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>	<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
2 7 1 1 20	8	2 7 1 20 1	8
5 1 1 5 5 5 5	0 0	5 1 1 5 5 5 5	0 0
5 5 5 5 9 9 5	0 3	5 5 5 5 9 9 5	1 0
	0 4		1 1
	0 5		1 2
	0 6		1 3
	1 6		1 6

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>	<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
2 7 1 20 20	10	3 3 1 1 1	NEEXISTUJE
5 1 1 5 5 5 5	0 0	42 32 32	
5 5 5 5 9 9 5	1 0	32 22 12	
	1 1	22 12 2	
	1 2		
	1 3		
	0 3		
	0 4		
	0 5		
	0 6		
	1 6		

P – III – 5

Básník Honzík II

Program: **basnik.pas / basnik.c / basnik.cpp**
Vstup: **basnik.in**
Výstup: **basnik.out**

Honzík poté, co jste mu včera pomohli pozvat Boženku na procházku, zjistil, že v sobě ukrývá velký básnický talent, a chtěl by po vás poradit ještě jednou. Rozhodl se totiž, že složí nejkrásnější báseň všech dob. Sousedovic Kája Máchů mu poradil, že v nejkrásnějších básních má každá sloka dva verše. Pak od svého kamaráda Jardy Seifertíka zjistil, že každá správná básnička má mít přesně N slok. Nakonec se od Elišky Hezkořské dozvěděl, že tyto básně mají takzvaný cyklický sdružený rým. To znamená, že mají schéma $ab\ bc\ cd\ de\ ef\ \dots\ yz\ za$, tedy že druhý verš každé sloky se rýmuje s prvním veršem té následující; výjimku tvoří druhý verš poslední sloky, který se rýmuje s prvním veršem první sloky.

Honzík má skutečně bohatou fantazii a navíc i váš včerejší program, takže pro něj nebyl problém vymyslet jednotlivé sloky i jejich pozici v básni. Co ale čert nechtěl, od některých slok vymyslel několik různých variant, které sice vyjadřují stejnou myšlenku, ale obsahují jiné dvojice rýmů.

A právě s výběrem jednotlivých slok do výsledné básně by chtěl pomoci. Pro každou z N výsledných slok dostanete S_i variant, které Honzík vymyslel, a vaším úkolem je sestavit básničku tak, aby měla cyklický sdružený rým.

Abyste si nemuseli lámat hlavu s tím, které verše se rýmují a které ne, očísloval Honzík všechny možné rýmy přirozenými čísly. Každou sloku pak popsal dvojicí (x, y) obsahující čísla rýmů v obou verších. Za slokou (x, y) se tedy může vyskytovat sloka (a, b) právě tehdy, když $y = a$.

Soutěžní úloha. Napište program, který pro každou sloku číslo i ($1 \leq i \leq N$) dostane S_i možných variant a z nich sestaví básničku, která splňuje požadované schéma rýmů.

Formát vstupu: První řádek vstupního souboru obsahuje přirozené číslo N , které udává počet slok básničky. Následuje N skupin řádků, přičemž skupina i začíná řádkem obsahujícím číslo S_i následované S_i řádky, každý s dvěma čísly A a B . Číslo A udává rým, na který končí první verš varianty, a číslo B udává rým, na který končí druhý verš.

Formát výstupu: Program vypíše do výstupního souboru buď řádek s řetězcem **NEEXISTUJE**, pokud básničku sestavit nelze, nebo N řádek, přičemž i -tý řádek bude obsahovat číslo k ($1 \leq k \leq S_i$), které určuje vybranou variantu pro sloku číslo i . Pokud existuje více řešení, vypíše libovolné z nich.

Velikost vstupu: Všechny vstupy použité při testování mají $N \leq 1\,000$, $1 \leq S_i \leq 1\,000$ pro všechna i a $1 \leq A, B \leq 10^9$.

Ve vstupech celkem ohodnocených 5 body mimo to platí $N \leq 10$ a $S_i \leq 10$.

Příklady:

Vstup: *Výstup:*

5 1

1 2

1 1 2

2 1

1 5 2

1 6 *Jednotlivé sloky básničky budou*

2 *mít rýmy 11 16 63 38 81.*

5 2

6 3

1

3 8

3

10 2

8 1

4 2

Vstup:

2

1

2 1

1

1 3

Výstup:

NEEXISTUJE

Kategorie Z5

Texty úloh

Z5 – I – 1

Vítek má napsána dvě čísla, 541 a 293. Z šesti použitých číslic má nejprve vyškrtnout dvě tak, aby součet dvou takto získaných čísel byl největší možný. Poté má z původních šesti číslic vyškrtnout dvě tak, aby rozdíl dvou takto získaných čísel byl nejmenší možný (odečítá menší číslo od většího). Které číslice má vyškrtnout? *(M. Petrová)*

Z5 – I – 2

V Trpasličím království měří vzdálenosti v pohádkových mílech (pm), v pohádkových sázích (ps) a v pohádkových loktech (pl). Na vstupní bráně do Trpasličího království je následující tabulka pro převody mezi jejich jednotkami a našimi:

- ▷ 1 pm = 3,85 m,
- ▷ 1 ps = 105 cm,
- ▷ 1 pl = 250 mm.

Král Trpaslík I. nechal přeměřit vzdálenost od zámecké brány k pohádkovému jezírku. Tři pozvaní zeměměřiči dospěli k těmto výsledkům: první uváděl 4 pm 4 ps 18 pl, druhý 3 pm 2 ps 43 pl a třetí 6 pm 1 ps 1 pl. Jeden z nich se však zmýlil. Jaká je vzdálenost v metrech od zámecké brány k pohádkovému jezírku? O kolik centimetrů se spletl nepřesný zeměměřič? *(M. Petrová)*

Z5 – I – 3

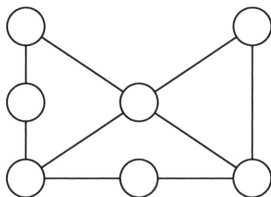
Čtyři kamarádi Adam, Mojmír a dvojčata Petr a Pavel získali v hodinách matematiky celkem 52 smajlíků, každý alespoň 1. Přitom dvojčata dohromady mají 33, ale nejúspěšnější byl Mojmír. Kolik jich získal Adam? *(M. Volfová)*

Z5 – I – 4

Pan Tik a pan Tak prodávali budíky v prodejnách Před Rohem a Za Rohem. Pan Tik tvrdil, že Před Rohem prodali o 30 budíků více než Za Rohem, zatímco pan Tak tvrdil, že Před Rohem prodali třikrát více budíků než Za Rohem. Nakonec se ukázalo, že Tik i Tak měli pravdu. Kolik budíků prodali v obou prodejnách celkem? *(L. Hozová)*

Z5 – I – 5

Do kroužků na obr. 32 doplňte čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7 tak, aby součet čísel na každé vyznačené linii byl stejný. Žádné číslo přitom nesmí být použito víckrát. *(M. Smítková)*



Obr. 32

Z5 – I – 6

Paní Široká čekala večer hosty. Nejprve pro ně připravila 25 chlebičků. Pak spočítala, že by si každý host mohl vzít dva, tři by se však na všechny nedostaly. Řekla si, že kdyby vyrobila ještě 10 chlebičků, mohl by si každý host vzít tři, ale čtyři ne každý. To jí přišlo stále málo. Nakonec uchystala dohromady 52 chlebičků. Každý host by si tedy mohl vzít čtyři chlebičky, ale pět by se na všechny nedostalo. Kolik hostů paní Široká očekávala? Ona sama drží dietu a večer nikdy nejí. *(L. Šimůnek)*

Z5 – II – 1

Mirek vypisoval za sebou do řady výsledky malé násobilky sedmi od 7 do 70. Vypisoval je postupně od nejmenšího po největší a nepsal mezi nimi čárky ani mezery. V takhle vzniklé řadě číslic škrtl jedenáct z těchto číslic. Které největší a které nejmenší číslo mohl dostat? *(M. Petrová)*

Z5 – II – 2

Rytíř Milivoj se chystal do Veselína na turnaj. Ten se koná ve středu. Protože mu ale cesta z Rytířova, kde bydlí, do Veselína bude trvat dva dny, vyrazil už v pondělí. Cesta vede přes další dvě města, Kostín a Zubín. První den jízdy urazil 25 mil a přenocoval v Zubíně. Druhý den, v úterý, šťastně dojel do Veselína. Turnaj s přehledem vyhrál, takže když se ve čtvrtek vracel zpátky, jel rychleji. Ujel o 6 mil více než v pondělí, přenocoval tak v Kostíně. V pátek ujel 11 mil, které mu zbývaly do Rytířova. Urči vzdálenost mezi Zubínem a Veselínem. (M. Petrová)

Z5 – II – 3

Lázeňský správce pan Sluníčko koupil pro lázeňské hosty 58 slunečníků. Některé byly červené a některé žluté. Červené byly baleny v krabicích po devíti kusech, zatímco žluté byly v krabicích po čtyřech kusech. Oba druhy slunečníků nakupoval po celých baleních. Kolik mohlo být žlutých slunečníků? Najdi všechna řešení. (L. Hozová)

Kategorie Z6

Texty úloh

Z6 – I – 1

Když Bořek natíral vrata garáže, přetřel omylem i stupnici nástěnného venkovního teploměru. Trubička se rtutí však zůstala nepoškozená, a tak Bořek původní stupnici přelepil páskem vlastní výroby. Na něj pečlivě vyrýsoval dílky, všechny byly stejně velké a označené číslly. Jeho dílek měl však jinou velikost než původní dílek, který představoval jeden stupeň Celsia, a i nulu Bořek umístil jinam, než kde bylo 0°C . Takto začal Bořek měřit teplotu ve vlastních jednotkách: bořcích. Když by měl teploměr ukazovat teplotu 11°C , ukazoval 2 bořky. Když by měl ukazovat -4°C , ukazoval -8 bořků. Jaká je teplota ve stupních Celsia, vidí-li Bořek na svém teploměru teplotu -2 bořky? (*L. Šimůnek*)

Z6 – I – 2

Začínající písničkář prodával vždy po vystoupení CD se svou hudbou. Ve čtvrtek prodal osm stejných CD. Den nato už nabízel i své nové CD a lidé si tak mohli koupit to samé jako ve čtvrtek nebo nové. V sobotu chtěli všichni posluchači nové CD a písničkář jich prodal ten den šest. V jednotlivých dnech utržil 590 Kč, 720 Kč a 840 Kč, neprozradíme však, která částka patří ke kterému dni.

▷ Kolik stálo starší CD?

▷ Kolik nových CD prodal v pátek?

(*L. Šimůnek*)

Z6 – I – 3

Vojta napsal číslo 2010 stokrát bez mezer za sebou. Kolik čtyřmístných a kolik pětímístných souměrných čísel bylo ukryto v tomto zápise? (Souměrné číslo je takové číslo, které je stejné, je-li čteno zepředu i zezadu, např. 39193.) (*L. Hozová*)

Z6 – I – 4

Součin věků dědy Vendelína a jeho vnoučat je 2010. Součet věků všech vnoučat je 12 a žádná dvě vnoučata nemají stejný počet let. Kolik vnoučat má děda Vendelín? *(L. Hozová)*

Z6 – I – 5

Na táboře se dva vedoucí se dvěma táborníky a psem potřebovali dostat přes řeku a k dispozici měli jen jednu loďku o nosnosti 65 kg. Naštěstí všichni (kromě psa) dokázali loďku přes řeku převézt. Každý vedoucí vážil přibližně 60 kg, každý táborník 30 kg a pes 12 kg. Jak si měli počínat? Kolikrát nejméně musela loďka překonat řeku? *(M. Volfová)*

Z6 – I – 6

Karel obestavěl krabici s obdélníkovým dnem obrubou z krychliček. Použil právě 22 krychliček o hraně 1 dm, které stavěl těsně vedle sebe v jedné vrstvě. Mezi obrubou a stěnami krabice nebyla mezera a celá tato stavba měla obdélníkový půdorys. Jaké rozměry mohlo mít dno krabice? *(M. Krejčová)*

Z6 – II – 1

Paní Hovorková měla 1. července 2010 na svém mobilu kredit 157,0 Kč. Z kreditu se postupně odečítají částky za hovory, a to tak, že za každou započatou minutu se odečte 4,5 Kč. Textové zprávy paní Hovorková nepíše a ani žádné další placené služby nepoužívá. Svůj kredit dobíjí podle potřeby, a to vždy částkou 400 Kč. Dne 31. prosince 2010 byl její kredit 353,0 Kč. Kolikrát minimálně dobíjela paní Hovorková za zmíněný půlrok svůj kredit? *(L. Šimůnek)*

Z6 – II – 2

V obdélníku $KLMN$ je vzdálenost průsečíku úhlopříček od přímky KL o 2 cm menší než jeho vzdálenost od přímky LM . Obvod obdélníku je 56 cm. Jaký je obsah obdélníku $KLMN$? *(L. Hozová)*

V létě se u babičky sjelo šest vnoučat a víme o nich, že

- ▷ Martinka se někdy musí starat o brášku Tomáška, který je o 8 let mladší,
- ▷ Věrka, která je o 7 let starší než Ida, ráda vypráví strašidelné příběhy,
- ▷ s Martinkou se často pere o rok mladší Jaromír,
- ▷ Tomášek je o 11 let mladší než Kačka,
- ▷ Ida často zlobí svého o 4 roky staršího bratra Jaromíra,
- ▷ klukům je dohromady 13 let.

Jak staré jsou všechny zmiňované děti?

(M. Volfová)

Kategorie Z7

Texty úloh

Z7 – I – 1

Součin číslic libovolného vícemístného čísla je vždy menší než toto číslo. Pokud počítáme součin číslic daného vícemístného čísla, potom součin číslic tohoto součinu, poté znova součin číslic nového součinu atd., nutně po nějakém počtu kroků dospějeme k jednomístnému číslu. Tento počet kroků nazýváme *perzistence* čísla. Např. číslo 723 má perzistenci 2, neboť $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ (1. krok) a $4 \cdot 2 = 8$ (2. krok).

1. Najděte největší liché číslo, které má navzájem různé číslice a perzistenci 1.
2. Najděte největší sudé číslo, které má navzájem různé nenulové číslice a perzistenci 1.
3. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má perzistenci 3.

(S. Bednářová)

Z7 – I – 2

Ondra na výletě utratil $\frac{2}{3}$ peněz a ze zbytku dal ještě $\frac{2}{3}$ na školu pro děti z Tibetu. Za $\frac{2}{3}$ nového zbytku ještě koupil malý dárek pro maminku. Z děravé kapsy ztratil $\frac{4}{5}$ zbylých peněz, a když ze zbylých dal půlku malé sestřičce, zůstala mu právě jedna koruna. S jakým obnosem šel Ondra na výlet?

(M. Volfová)

Z7 – I – 3

Šárka prohlásila:

„Jsme tři sestry, já jsem nejmladší, Líba je starší o tři roky a Eliška o osm. Naše mamka ráda slyší, že nám všem (i s ní) je v průměru 21 let. Přitom když jsem se narodila, bylo mamce už 29.“

Před kolika lety se Šárka narodila?

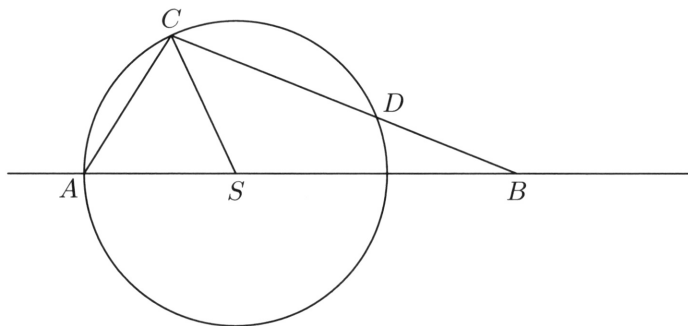
(M. Volfová)

Z7 – I – 4

Jindra měl napsáno čtyřmístné číslo. Toto číslo zaokrouhlil na desítky, na stovky a na tisíce a všechny tři výsledky zapsal pod toto číslo. Všechna čtyři čísla správně sečetl a dostal 5 443. Které číslo měl Jindra napsáno?
(*M. Petrová*)

Z7 – I – 5

Libor narýsoval kružnici se středem S a body A, B, C, D , jak ukazuje obr. 33. Zjistil, že úsečky SC a BD jsou stejně dlouhé. V jakém poměru jsou velikosti úhlů ASC a SCD ?
(*L. Hozová*)



Obr. 33

Z7 – I – 6

Najděte všechna trojmístná přirozená čísla, která jsou beze zbytku dělitelná číslem 6 a ve kterých můžeme vyškrtnout jakoukoli číslici a vždy dostaneme dvojmístné přirozené číslo, jež je také beze zbytku dělitelné číslem 6.
(*L. Šimůnek*)

Z7 – II – 1

Na kartě je napsáno čtyřmístné přirozené číslo, ve kterém můžeme vyškrtnout jakékoli dvě číslice a vždy dostaneme dvojmístné přirozené číslo, jež je beze zbytku dělitelné číslem 5. Kolik takových čtyřmístných přirozených čísel existuje? (Pozor, např. číslo 06 není dvojmístné.)
(*L. Šimůnek*)

Z7 – II – 2

Karel a Vojta zjistili, že kuchyňské hodiny na chalupě se předbíhají o 1,5 minuty za každou hodinu a hodiny v ložnici se o půl minuty každou hodinu zpožďují. V pravé poledne seřídili hodiny na stejný a správný čas. Hodiny v kuchyni i v ložnici mají obvyklý dvanáctihodinový ciferník. Urči, kdy nejdříve budou (bez dalšího opravování)

1. kuchyňské hodiny ukazovat opět přesný čas,
2. hodiny v ložnici ukazovat opět přesný čas,
3. oboje hodiny ukazovat opět stejný (i když možná nesprávný) čas.

(*M. Volfová*)

Z7 – II – 3

V trojúhelníku ABC označíme středy stran CB a CA písmeny K a L . Víme, že čtyřúhelník $ABKL$ má obvod 10 cm a trojúhelník KLC má obvod 6 cm. Vypočítej délku úsečky KL .

(*J. Mazák*)

Kategorie Z8

Texty úloh

Z8 – I – 1

Martin má na papíře napsáno pětímístné číslo s pěti různými číslicemi a následujícími vlastnostmi:

- ▷ škrtnutím druhé číslice zleva (tj. číslice na místě tisíců) dostane číslo, které je dělitelné dvěma,
- ▷ škrtnutím třetí číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné třemi,
- ▷ škrtnutím čtvrté číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné čtyřmi,
- ▷ škrtnutím páté číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné pěti,
- ▷ neškrtně-li žádnou číslici, má číslo dělitelné šesti.

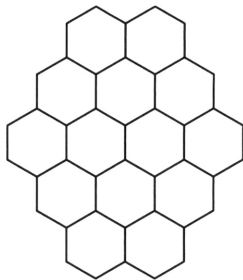
Které největší číslo může mít Martin napsáno na papíře?

(M. Petrová)

Z8 – I – 2

Karel se snažil do prázdných polí na obr. 34 vepsat přirozená čísla od 1 do 14 tak, aby žádné číslo nebylo použito víckrát a součet všech čísel v každé přímé linii byl stejný. Po chvíli si uvědomil, že to není možné. Jak byste Karlovo pozorování zdůvodnili vy? (Přímou linií rozumíme skupinu všech sousedících políček, jejichž středy leží na jedné přímce.)

(S. Bednářová)



Obr. 34

Z8 – I – 3

Cena knížky „Nové hádanky“ byla snížena o 62,5 %. Matěj zjistil, že obě ceny (před snížením i po něm) jsou dvojmístná čísla a dají se vyjádřit stejnými číslicemi, jen v různém pořadí. O kolik Kč byla knížka zlevněna?

(M. Volfová)

Z8 – I – 4

Rozdělte krychli o hraně 8 cm na menší shodné krychličky tak, aby součet jejich povrchů byl pětikrát větší než povrch původní krychle. Jaký bude objem malé krychle a kolik centimetrů bude měřit její hrana?

(M. Volfová)

Z8 – I – 5

Klára, Lenka a Matěj si procvičovali písemné dělení se zbytkem. Jako dělence měl každý zadáno jiné přirozené číslo, jako dělitele však měli všichni stejné přirozené číslo. Lenčin dělenec byl o 30 větší než Klářin. Matějův dělenec byl o 50 větší než Lenčin. Kláře vyšel ve výsledku zbytek 8, Lence zbytek 2 a Matějovi zbytek 4. Všichni počítali bez chyby. Jaký dělitel byl žákům zadán?

(L. Šimůnek)

Z8 – I – 6

V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ jsou úhlopříčky AC a DB na sebe kolmé, jejich délka je 8 cm a délka delší základny AB je také 8 cm. Vypočítejte obsah tohoto lichoběžníku.

(M. Krejčová)

Z8 – II – 1

Na kartičku jsem napsala dvojmístné přirozené číslo. Součet číslic tohoto čísla je dělitelný třemi. Odečtu-li od napsaného čísla číslo 27, dostanu jiné dvojmístné přirozené číslo, psané týmiž číslicemi, ale v opačném pořadí. Která čísla jsem mohla napsat na kartičku?

(L. Hozová)

Z8 – II – 2

Martina si vymyslela postup na výrobu číselné posloupnosti. Začala číslem 52. Z něj odvodila další člen posloupnosti takto: $2^2 + 2 \cdot 5 = 4 + 10 = 14$. Potom pokračovala stejným způsobem dále a z čísla 14 dostala $4^2 + 2 \cdot 1 = 16 + 2 = 18$. Vždy tedy vezme číslo, odtrhne z něj číslici na místě jednotek, tuto odtrženou číslici umocní na druhou a k výsledné mocnině přičte dvojnásobek čísla, které zbylo z původního čísla po odtrhnutí poslední číslice. Jaké je 2011. číslo takto vzniklé posloupnosti?

(M. Dillingerová)

Z8 – II – 3

V kružnici k se středem S a poloměrem 52 mm jsou dány dvě na sebe kolmé tětivy AB a CD . Jejich průsečík X je od středu S vzdálen 25 mm. Jak dlouhá je tětiva CD , je-li délka tětivy AB 96 mm? (*L. Hozová*)

Kategorie Z9

Texty úloh

Z9 – I – 1

Pan Vlk čekal na zastávce před školou na autobus. Z okna slyšel slova učitele:

„Jaký povrch může mít pravidelný čtyřboký hranol, víte-li, že délky všech jeho hran jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly a že jeho objem je...“

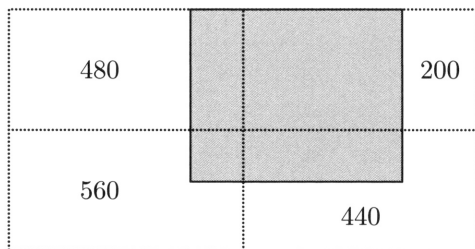
Toto důležité číslo pan Vlk neslyšel, protože zrovna projelo okolo auto. Za chvíli slyšel žáka hlásícího výsledek 918 cm^2 . Učitel na to řekl:

„Ano, ale úloha má celkem čtyři řešení. Hledejte dál.“

Více se pan Vlk už nedozvěděl, neboť nastoupil do svého autobusu. Protože matematika byla vždy jeho hobby, vytáhl si v autobuse tužku a papír a po čase určil i zbylá tři řešení učitelovy úlohy. Spočítejte je i vy.
(*L. Šimůnek*)

Z9 – I – 2

Na obr. 35 jsou tečkovanou čarou znázorněny hranice čtyř stejně velkých obdélníkových parcel. Šedou barvou je vyznačena zastavěná plocha. Ta má tvar obdélníku, jehož jedna strana tvoří zároveň hranice parcel. Za-



Obr. 35

psaná čísla vyjadřují obsah nezastavěné plochy na jednotlivých parcelách, a to v m^2 . Vypočítejte obsah celkové zastavěné plochy. (L. Šimůnek)

Z9 – I – 3

Vlčkovi lisovali jablečný mošt. Měli ho ve dvou stejně objemných soudcích, v obou téměř stejné množství. Kdyby z prvního přelili do druhého 1 litr, měli by v obou stejně, ale to by ani jeden soudek nebyl plný. Tak raději přelili 9 litrů z druhého do prvního. Pak byl první soudek úplně plný a mošt v druhém zaplňoval právě třetinu objemu. Kolik litrů moštu vylisovali, jaký byl objem soudků a kolik moštu v nich bylo původně? (M. Volfová)

Z9 – I – 4

Pan Rychlý a pan Louda ve stejnou dobu vyšli na tutéž turistickou túru, jen pan Rychlý ji šel shora z horské chaty a pan Louda naopak od autobusu dole v městečku na chatu nahoru. V 10 hodin se na trase míjeli. Pan Rychlý spěchal a již ve 12 hodin byl v cíli. Naopak pan Louda postupoval pomalu, a tak dorazil k chatě až v 18 hodin. V kolik hodin pánové vyrazili na cestu, víme-li, že každý z nich šel celou dobu svou stálou rychlostí? (M. Volfová)

Z9 – I – 5

Kružnici se středem S a poloměrem 12 cm jsme opsali pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a vepsali pravidelný šestiúhelník $TUVXYZ$ tak, aby bod T byl středem strany BC . Vypočítejte obsah a obvod čtyřúhelníku $TCUS$. (M. Krejčová)

Z9 – I – 6

Petr a Pavel česali v sadě jablka a hrušky. V pondělí snědl Petr o 2 hrušky více než Pavel a o 2 jablka méně než Pavel. V úterý Petr snědl o 4 hrušky méně než v pondělí. Pavel snědl v úterý o 3 hrušky více než Petr a o 3 jablka méně než Petr. Pavel snědl za oba dny 12 jablek a v úterý snědl stejný počet jablek jako hrušek. V úterý večer oba chlapci zjistili, že počet jablek, která společně za oba dny snědli, je stejně velký jako počet společně snědených hrušek. Kolik jablek snědl Petr v pondělí a kolik hrušek snědl Pavel v úterý? (L. Hozová)

Z9 – II – 1

Čtyřmístným palindromem nazveme každé čtyřmístné přirozené číslo, které má na místě jednotek stejnou číslici jako na místě tisíců a které zároveň má na místě desítek stejnou číslici jako na místě stovek. Kolik existuje dvojic čtyřmístných palindromů, jejichž rozdíl je 3674?

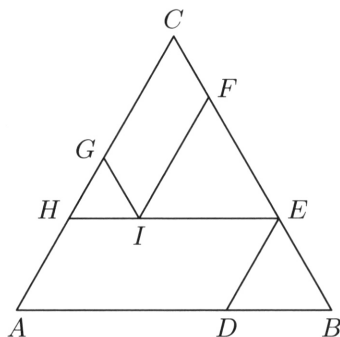
(L. Šimůnek)

Z9 – II – 2

Na následujícím obr.36 jsou rovnostranné trojúhelníky ABC , DBE , IEF a HIG . Obsahy trojúhelníků DBE , IEF a HIG jsou v poměru $9 : 16 : 4$. V jakém poměru jsou

1. délky úseček HI a IE ,
2. obsahy trojúhelníků ABC a HEC ?

(K. Pazourek)



Obr. 36

Z9 – II – 3

Máme čtverce $ABCD$ a $KLMN$. Délky stran obou čtverců jsou v centimetrech vyjádřeny celým číslem. Bod K je vnitřním bodem úsečky AB , bod L leží v bodě B a bod M je vnitřním bodem úsečky BC . Obsah šestiúhelníku $AKNMCD$ je 225 cm^2 . Jaký může být obvod tohoto šestiúhelníku? Najděte všechny možnosti.

(L. Šimůnek)

Z9 – II – 4

Martina si vymyslela postup na výrobu číselné posloupnosti. Začala číslem 128. Z něj odvodila další člen posloupnosti takto: $8^2 + 5 = 64 + 5 = 69$. Potom pokračovala stejným způsobem dále a z čísla 69 dostala $9^2 + 5 = 81 + 5 = 86$. Vždy tedy z předchozího členu posloupnosti vezme číslici na místě jednotek, umocní ji na druhou a k této mocnině přičte konstantu 5.

1. Jaké je 2011. číslo takto vzniklé posloupnosti?
2. Martina opět začala číslem 128, ale místo čísla 5 zvolila jako konstantu jiné přirozené číslo. Tentokrát jí na 2011. místě vyšlo číslo 16. Jakou konstantu zvolila v tomto případě? *(M. Dillingerová)*

Z9 – III – 1

Pořadatelům výstavy „Na Měsíc a ještě dál“ se po prvním výstavním dni zdálo, že mají malou návštěvnost, proto snížili vstupné o 12 Kč. Tím se sice druhý den zvýšil počet návštěvníků o 10 %, ale celková denní tržba se snížila o 5 %. Kolik korun stálo vstupné po slevě? *(M. Petrová)*

Z9 – III – 2

Lichoběžník $ABCD$, kde strana AB je rovnoběžná se stranou CD , je rozdělen úhlopříčkami, které se protínají v bodě M , na čtyři části. Určete jeho obsah, víte-li, že trojúhelník AMD má obsah 8 cm^2 a trojúhelník DCM má obsah 4 cm^2 . *(M. Volfová)*

Z9 – III – 3

Ctibor a Míla počítali ze sbírky tutéž úlohu. Byly zadány tři délky hran čtyřbokého hranolu v milimetrech a úkolem bylo vypočítat jeho objem a povrch. Ctibor nejprve převedl zadané délky na centimetry. Počítalo se mu tak snáze, protože i po převodu byly všechny délky vyjádřeny celými čísly. Oběma vyšly správné výsledky, Míle v mm^3 a mm^2 , Ctiborovi v cm^3 a cm^2 . Mílin výsledek v mm^3 byl o 17 982 větší než Ctiborův výsledek v cm^3 . Mílin výsledek v mm^2 byl o 5 742 větší než Ctiborův výsledek v cm^2 . Určete délky hran hranolu. *(L. Šimůnek)*

Z9 – III – 4

Na tabuli jsou napsána pouze čísla $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ a $\frac{1}{6}$. Na tabuli můžeme připsat součet nebo součin libovolných dvou čísel z tabule. Je možné takovým přiřisováním dosáhnout toho, aby se na tabuli objevila čísla a) $\frac{1}{60}$, b) $\frac{2011}{375}$, c) $\frac{1}{7}$? (V. Bachratá, J. Mazák)

Přípravná soustředění před 52. MMO

V průběhu 60. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 4. do 8. dubna 2011 v Kostelci nad Černými lesy nedaleko Prahy. Na soustředění bylo pozváno 9 nejlepších řešitelů III. kola kategorie A. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Tomáš Zeman	8/8 G J. Keplera, Praha 6	83
Anh Dung Le	3/6 G Tachov	78,5
Michael Bílý	8/8 G J. Vrchlického, Klatovy	76
Miroslav Koblížek	8/8 G Žamberk	68,5
Štěpán Šimsa	6/8 G J. Jungmanna, Litoměřice	65
Dan Šafka	8/8 G J. Keplera, Praha 6	60
Jakub Solovský	4/4 G M. Koperníka, Bílovec	59
Jan Kuchařík	3/4 G Jihlava	57
Ondřej Bartoš	7/8 G Žďár nad Sázavou	56,5

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentativního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:

dr. *Jaroslav Zhouf* (4. 4.)

dr. *Pavel Calábek* (5. 4.)

dr. *Martin Panák* (6. 4.)

dr. *Jaroslav Švrček* (7. 4.)

a doc. *Jaromír Šimsa* (8. 4.)

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Dekadické zápisy přirozených čísel $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{10}$ neobsahují nuly, jedno z druhého se získá pouze změnou pořadí cifer a je

$$a_k \equiv k \pmod{11} \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots, 10.$$

Určete nejmenší možné takové číslo a_0 .

2. Vrcholy krychle máme očíslovat čísly od 1 do 8, každý vrchol jiným číslem, a pro každou hranu vypočítat součin čísel na jejích koncích. Jak mají být vrcholy očíslovány, aby součet 12 uvedených součinů byl co nejmenší?

3. Je dán trojúhelník ABC . Použitím pouze oboustranného přímého pravítka sestrojte nejvýše pomocí sedmi přímek bod D na straně AB takový, aby $|AD| : |BD| = |BC| : |AC|$.

4. Na tabuli na konci vyučovací hodiny zůstal kousek grafu funkce $y = \operatorname{tg} x$ a kousek osy x z kartézské soustavy souřadnic. Pomocí pravítka a kružítka sestrojte úsečku délky 1.

5. Necht $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je funkce, pro niž $f(1) = 1$ a $f(n) = n - f(f(n-1))$ pro libovolné přirozené $n \geq 2$. Dokažte, že pro všechna přirozená n platí $f(n + f(n)) = n$.

6. Necht n je přirozené číslo. Najděte nejmenší hodnotu výrazu

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2,$$

kde $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou navzájem různá celá čísla.

7. Mezi $n + 1$ hromádkami ($n \geq 3$) označenými $A_1, A_2, \dots, A_n$ a O můžeme provádět následující přesuny karet:

- (i) Jestliže na hromádce A_i jsou alespoň tři karty, potom z hromádky A_i tři karty odebereme a na hromádky A_{i-1} , A_{i+1} a O (při označení $A_0 = A_n$, $A_1 = A_{n+1}$) přidáme po jedné kartě.
- (ii) Jestliže na hromádce O je alespoň n karet, potom z hromádky O n karet odebereme a na každou z hromádek A_i po jedné kartě přidáme.

Dokažte, že jestliže na tyto hromádky libovolně rozmístíme alespoň $n^2 + 3n + 1$ karet, můžeme popsány operacemi dosáhnout stavu, kdy na každé z hromádek je alespoň $n + 1$ karet.

8. Necht $\mathbb{R}^+$ je množina všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna kladná reálná čísla x a y platí

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y).$$

9. Necht ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme po řadě D , E , F paty jeho výšek v_a , v_b , v_c , dále označme P jeden z průsečíků kružnice jemu opsané s přímkou EF a poté průsečík přímk BP a FD jako Q . Dokažte, že $|AP| = |AQ|$.

10. Na koncertě bude zpívat postupně 20 zpěváků. Je možné, aby bylo právě 2010 možností uspořádání jejich vystoupení tak, aby bylo vyhověno všem jejich přáním? Přání každého sestává z množiny kolegů (i prázdné), kteří by měli vystupovat před ním.

11. Nekonečná posloupnost $x_1, x_2, \dots$ je dána vztahy $x_1 = 1$ a $x_{2k} = -x_k$, $x_{2k-1} = (-1)^{k+1}x_k$ pro všechna $k \geq 1$. Ukažte, že $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 0$ pro všechna $n \geq 1$.

12. Necht $ABCD$ je tětíkový čtyřúhelník a P průsečík jeho úhlopříček. Označme E , F , G , H po řadě paty kolmic z bodu P ke stranám AB , BC , CD , DA . Dokažte, že přímky EH , BD a FG jsou buď rovnoběžné, nebo se protínají v jednom společném bodě.

13. V rovině je dána kružnice a bod C v její vnější oblasti. Určete množinu průsečíků výšek (ortocenter) všech trojúhelníků ABC , kde AB je průměr dané kružnice.

14. V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník ABC , kde D je středem jeho základny BC . Bod E je takovým vnějším bodem daného trojúhelníku, pro který platí $CE \perp AB$ a současně $|BE| = |BD|$. Necht M je středem úsečky BE a F je takový bod kratšího oblouku AD kružnice opsané trojúhelníku ABD , pro nějž platí $MF \perp BE$. Dokažte, že $ED \perp FD$.

15. Napište příklad kvadratické rovnice s kořenem $\cos \frac{2}{3}\pi$, která má celočíselné koeficienty, popřípadě uveďte „neexistuje“.

16. Vypište všechna řešení $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 3(x^2 + y^2 + z^2) &= 1, \\ x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 &= xyz(x + y + z)^3. \end{aligned}$$

17. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ udejte aspoň jedno řešení $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ rovnice

$$x^3 + y^3 + 1 = 729^{2n+1}.$$

18. Určete nejmenší počet polí, které je nutné označit na čtvercové šachovnici 10×10 , aby žádná čtyři z neoznačených polí nebyla rohovými poli některé podšachovnice $p \times q$, kde $1 < p \leq 10$ a $1 < q \leq 10$.

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již jedenácté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Každou zemi reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali postup na 52. MMO v Nizozemí.

Soutěž proběhla od 19. do 22. června 2011 v polském Krakově. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 19. 6. 2011. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.–2.	Tomasz Cieśla	POL	6 7 4 7 7 0	31
	Martin Vodička	SVK	7 7 7 3 7 0	31
3.–5.	Maciej Duleba	POL	7 7 7 0 7 0	28
	<i>Anh Dung Le</i>	CZE	7 7 7 0 7 0	28
	Teodor Jerzak	POL	7 7 0 7 0 7	28
6.	Filip Borowiec	POL	7 7 6 6 1 0	27
7.	Damian Orlef	POL	7 7 2 7 1 0	24
8.	<i>Štěpán Šimsa</i>	CZE	7 7 0 2 0 0	16
9.	<i>Tomáš Zeman</i>	CZE	7 7 0 0 1 0	15
10.–14.	<i>Michael Bílý</i>	CZE	7 7 0 0 0 0	14
	Marián Horňák	SVK	7 7 0 0 0 0	14
	Ján Hozza	SVK	7 7 0 0 0 0	14
	Matúš Stehlík	SVK	7 4 0 2 1 0	14
	Michal Tóth	SVK	7 7 0 0 0 0	14
15.–16.	<i>Lubomír Grund</i>	CZE	7 6 0 0 0 0	13
	Ondrej Kováč	SVK	7 6 0 0 0 0	13
17.	Wojciech Porowski	POL	7 0 0 5 0 0	12
18.	<i>Miroslav Koblížek</i>	CZE	0 0 0 2 1 0	3

Návrh všech šesti úloh (a jejich vzorová řešení) připravili kolegové z hostitelské země, Pavel Novotný (1. úloha) a Tomáš Jurík (3. úloha). Koordinaci hodnocení zajistila mezinárodní porota, kterou tvořili Pavel Calábek, Karel Horák a Jaromír Šimša z České republiky, Jerzy Bednarczuk, Michał Pilipczuk a Andrzej Grzesik z Polska a Peter Csiba, Pavel Novotný a Peter Novotný ze Slovenska.

Texty soutěžních úloh

1. Necht a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $a^2 < bc$. Dokažte, že $b^3 + ac^2 > ab(a + c)$.

2. Na tabuli je napsáno n nezáporných celých čísel, jejichž největší společný dělitel je 1. V jednom kroku můžeme smazat dvě čísla x, y (označená tak, že $x \geq y$) a nahradit je čísly $x - y, 2y$. Zjistěte, pro které n -tice nezáporných celých čísel se lze popsáním způsobem dostat do situace, kdy na tabuli bude $n - 1$ nul.

3. Necht body A, B, C, D leží na kružnici v uvedeném pořadí, přičemž $AB \nparallel CD$ a délka oblouku $\widehat{AB}$ obsahujícího body C, D je dvakrát větší než délka toho oblouku $\widehat{CD}$, který neobsahuje body A, B . Bod E je v polovině ABC zvolen tak, že $|AC| = |AE|$ a $|BD| = |BE|$. Za předpokladu, že kolmice z bodu E na přímkou AB prochází středem toho z oblouků $\widehat{CD}$, který neobsahuje body A, B , dokažte, že $|\sphericalangle ACB| = 108^\circ$.

4. Necht mnohočlen P s celočíselnými koeficienty splňuje následující podmínku: jestliže pro mnohočleny F, G, Q s celočíselnými koeficienty platí

$$P(Q(x)) = F(x) \cdot G(x),$$

je F nebo G konstantní mnohočlen.

Dokažte, že mnohočlen P musí být konstantní.

5. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme po řadě M a N středy stran AD a BC . Na stranách AB a CD zvolme po řadě body K a L tak, že $|\sphericalangle MKA| = |\sphericalangle NLC|$. Dokažte, že pokud mají přímky BD, KM a LN společný bod, platí

$$|\sphericalangle KMN| = |\sphericalangle BDC| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle LNM| = |\sphericalangle ABD|.$$

6. Je dáno celé číslo a . Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel p , pro něž

$$p \mid n^2 + 3 \quad \text{a} \quad p \mid m^3 - a$$

pro nějaká celá čísla n, m .

Řešení úloh

1. Sečtením tří AG nerovností (každou levou stranu chápeme jako sedm sčítanců)

$$\begin{aligned}4a^3b + b^3c + 2c^3a &\geq 7a^2bc, \\4b^3c + c^3a + 2a^3b &\geq 7b^2ca, \\4c^3a + a^3b + 2b^3c &\geq 7c^2ab\end{aligned}$$

dostaneme

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab. \quad (1)$$

Z předpokladu $bc > a^2$ vynásobením ab plyne $b^2ca > a^3b$, což spolu s (1) dává

$$b^3c + c^3a > a^2bc + c^2ab \quad \text{neboli} \quad b^3 + ac^2 > ab(a + c).$$

Jiné řešení. Využijeme obě následující AG nerovnosti

$$\begin{aligned}\frac{2}{5}b^3 + \frac{3}{5}ac^2 &\geq \sqrt[5]{b^6a^3c^6} = bc\sqrt[5]{a^3bc} > abc, \\ \frac{3}{5}b^3 + \frac{2}{5}ac^2 &\geq \sqrt[5]{b^9a^2c^4} = b\sqrt[5]{a^2b^4c^4} > a^2b,\end{aligned}$$

kam jsme v obou případech dosadili $bc > a^2$. Jejich sečtením získáme hledaný odhad.

2. *Odpověď.* Součet daných čísel musí být mocnina čísla 2.

Označme S celkový součet daných čísel a d jejich největší společný dělitel. Na počátku je $d = 1$, zatímco na konci by mělo být $d = S$, protože součet S všech čísel na tabuli se nemění.

Po každém popsaném kroku se aktuální hodnota největšího společného dělitele buď nezmění, anebo vzroste na dvojnásobek. To plyne z rovnosti $(x - y, y) = (x, y)$ a z toho, že je buď $(a, 2b) = (a, b)$, nebo $(a, 2b) = 2(a, b)$ podle toho, jestli 2 dělí $a/(a, b)$ či nikoli. Vzhledem k tomu, že $(a, b, c) = ((a, b), c)$, snadno uvedený postřeh rozšíříme na největšího společného dělitele všech čísel na tabuli. Zůstane-li tedy nakonec na tabuli jediné nenulové číslo, musí tím číslem být mocnina dvojky.

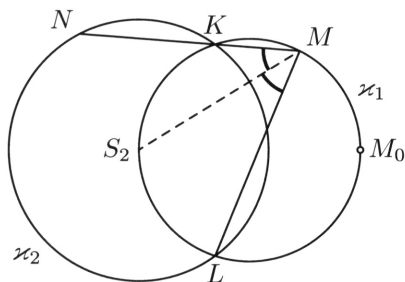
Je-li naopak S mocninou čísla 2, ukážeme jak postupovat, abychom dostali $n - 1$ nul. Zapišme všechna čísla na tabuli v dvojkové soustavě. Pokud jsou na tabuli ještě aspoň dvě nenulová čísla, vezmeme ta dvě z nich, která mají na konci nejméně nul (taková čísla jsou aspoň dvě, protože celkový součet je mocnina dvojky). Po popsané operaci místo nich zřejmě dostaneme dvě čísla, jež mají na konci aspoň o jednu nulu víc. Je tedy jasné, že po konečném počtu kroků musíme skončit tím, že na tabuli bude jediné nenulové číslo.

3. Nejdříve zformulujeme a dokážeme pomocné tvrzení.

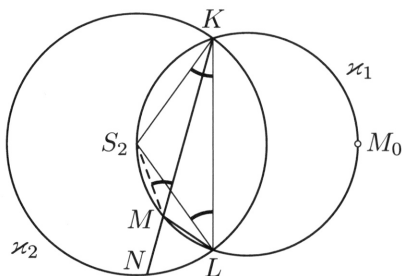
V rovině jsou dány dvě kružnice κ_1 , κ_2 protínající se v bodech K , L , přičemž střed S_2 kružnice κ_2 leží na κ_1 . Pokud $M \in \kappa_1$ ($M \notin \kappa_2$) a přímka KM protíná κ_2 v bodě N (různém od K), je $|MN| = |ML|$.

DŮKAZ. Pokud $M = S_2$, je tvrzení triviální. Zabývejme se tedy případem $M \neq S_2$. Označme ještě M_0 bod kružnice κ_1 , pro nějž je S_2M_0 průměrem κ_1 . Zřejmě nemůže být $M = M_0$, protože v takovém případě by byly MK a ML tečnami kružnice κ_2 . Nejdříve dokážeme, že přímka MS_2 je osou úhlu NML .

Pokud M leží na oblouku KL kružnice κ_1 neobsahujícím S_2 (obr. 37), jsou úhly KMS_2 , S_2ML obvodovými úhly nad shodnými tětivami S_2K , S_2L , mají proto stejnou velikost.



Obr. 37



Obr. 38

Pokud M leží na oblouku KL kružnice κ_1 obsahujícím bod S_2 , můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že leží na oblouku S_2L neobsahujícím bod K (obr. 38). Čtyřúhelník KS_2ML je tětivový, takže $|\sphericalangle S_2MN| = 180^\circ - |\sphericalangle S_2MK| = 180^\circ - |\sphericalangle S_2LK| = 180^\circ - |\sphericalangle S_2KL| = |\sphericalangle S_2ML|$.

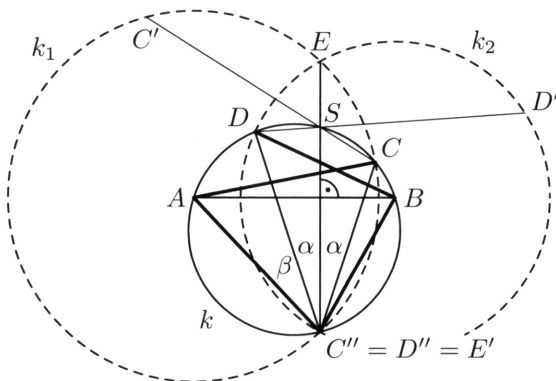
V osové souměrnosti podle přímky MS_2 , v níž se kružnice κ_2 zobrazí sama na sebe (její střed leží na ose souměrnosti), je obrazem přímky ML přímka MN . Ta protíná kružnici κ_2 (pokud $M \neq M_0$) ve dvou bodech K a N . Obrazem bodu $L \in \kappa_2$ nemůže ovšem být bod K , protože KL není pro $M \neq M_0$ kolmé na MS_2 . Je tedy $|MN| = |ML|$, což jsme chtěli dokázat.

Přistupme nyní k řešení úlohy. Označme S průsečík oblouku CD s kolmicí z bodu E na AB . Je-li k_1 kružnice se středem A procházející bodem C a k_2 kružnice se středem B procházející bodem D , je bod E průsečíkem obou kružnic k_1 , k_2 . Kružnici opsanou tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$ označme k . Přímka SC protíná kružnici k_1 v bodě C'

a přímka SD kružnici k_2 v bodě D' . Další průsečík kružnice k_1 s kružnicí k označme C'' ($C'' \neq C$) a podobně D'' další průsečík kružnice k_2 s kružnicí k ($D'' \neq D$). Ukážeme, že $C'' = D''$.

Bod S leží na chordále kružnic k_1, k_2 , proto z jeho mocnosti k těmto kružnicím plyne $|SC| \cdot |SC'| = |SD| \cdot |SD'|$. Protože podle zadání $|SC| = |SD|$, je i $|SC'| = |SD'|$. S využitím úvodního tvrzení tak máme $|SC''| = |SC'| = |SD'| = |SD''|$.

Kdyby body C'', D'' byly různé, byl by trojúhelník $SD''C''$ rovnoramenný a jeho výška z vrcholu S by procházela středem kružnice k stejně jako osa oblouku CD . Čtyřúhelník $CDD''C''$ (resp. $CDC''D''$) by tak byl rovnoramenný lichoběžník ($|SC| = |SD|$). A protože body A, B leží na osách úseček CC'', DD'' , byl by i $ABCD$ rovnoramenný lichoběžník, což odporuje předpokladu $AB \nparallel CD$. Všechny tři uvažované kružnice tak mají společný bod $C'' = D''$, jehož označení dále zjednodušíme na E' .



Obr. 39

Označme $\alpha = |\sphericalangle DE'S| = |\sphericalangle SE'C|$ a $\beta = |\sphericalangle AE'D|$. Pak $|\sphericalangle AE'B'| = 2|\sphericalangle CE'D| = 4\alpha$ (neboť oblouk AB je dvakrát delší než oblouk CD), a proto $|\sphericalangle CE'B| = |\sphericalangle AE'B| - |\sphericalangle AE'C| = 2\alpha - \beta$ (obr. 39). Z rovností $|BD| = |BE'|$, $|AC| = |AE'|$ vyjádříme velikosti zbylých dvou úhlů trojúhelníku ABE' :

$$2\alpha + \beta = |\sphericalangle AE'C| = |\sphericalangle ACE'| = |\sphericalangle ABE'|,$$

$$4\alpha - \beta = |\sphericalangle BE'D| = |\sphericalangle BDE'| = |\sphericalangle BAE'|.$$

Odtud

$$180^\circ = 4\alpha + (2\alpha + \beta) + (4\alpha - \beta) = 10\alpha,$$

tudíž $\alpha = 18^\circ$ a $|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - |\sphericalangle AE'B| = 180^\circ - 4\alpha = 108^\circ$.

4. Dokážeme tvrzení úlohy sporem. Předpokládejme, že P není konstantní, a uvažme nejprve případ, kdy je mnohočlen P lineární, tedy $P(x) = ax + b$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Vezměme $Q(x) = ax^2 + (b+1)x$, pak je

$$P(Q(x)) = a(ax^2 + (b+1)x) + b = a^2x^2 + a(b+1)x + b = (ax+b)(ax+1)$$

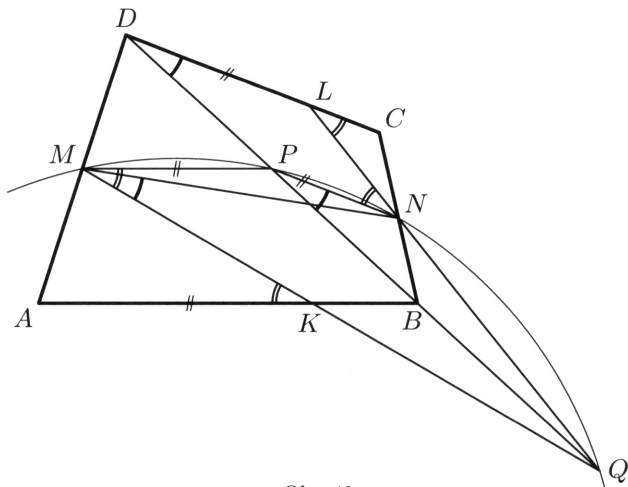
rozklad mnohočlenu $P(Q(x))$ na součin dvou nekonstantních mnohočlenů $ax+b$ a $ax+1$, což odporuje předpokladu úlohy.

Je-li stupeň mnohočlenu P aspoň 2, tedy $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, kde $n > 1$ a $a_n \neq 0$, vezměme mnohočlen $Q(x) = P(x) + x$. Pro mnohočlen $P(Q(x))$, který má stupeň $n^2 > n$, platí

$$P(Q(x)) - P(x) = P(P(x) + x) - P(x) = \sum_{i=0}^n a_i ((P(x) + x)^i - x^i).$$

Z rovností $a^i - b^i = (a-b)(a^{i-1} + a^{i-2}b + \dots + b^{i-1})$ ovšem plyne, že každý z mnohočlenů $(P(x) + x)^i - x^i$ je dělitelný mnohočlenem $P(x)$. Proto i mnohočlen $P(Q(x))$ je mnohočlenem $P(x)$ dělitelný. To vede opět ke sporu, protože stupeň mnohočlenu $P(Q(x))$ je větší než stupeň mnohočlenu P , a ten je tudíž netriviálním dělitelem mnohočlenu $P(Q(x))$. Tím je tvrzení dokázáno.

5. Označme P střed úhlopříčky BD a Q průsečík přímek BD , KM a LN (obr. 40). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod B leží mezi body Q a D . Protože PM a PN jsou střední příčky trojúhelníků ABD a DCB ,



Obr. 40

je $PM \parallel AB$ a $PN \parallel CD$. Je tedy $|\sphericalangle PNL| = |\sphericalangle NLC| = |\sphericalangle MKA| = |\sphericalangle KMP|$, což znamená, že body P, M, Q, N leží na kružnici. Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou NQ tak plyne $|\sphericalangle KMN| = |\sphericalangle QMN| = |\sphericalangle QPN| = |\sphericalangle BDC|$. Podobně vychází $|\sphericalangle LNM| = 180^\circ - |\sphericalangle QNM| = 180^\circ - |\sphericalangle QPM| = |\sphericalangle MPD| = |\sphericalangle ABD|$.

6. Tvzení nejprve dokážeme pro $a = 0$. Tehdy má druhá podmínka tvar $p \mid m^3$, takže je splněna pro každé prvočíslo p volbou $m = p$. Stačí tedy dokázat, že mezi děliteli čísel $n^2 + 3$ ($n \in \mathbb{Z}$) je nekonečně mnoho prvočísel. Připustme, že všech takových prvočísel je naopak konečně mnoho, a označme je $p_1, p_2, \dots, p_r$. Číslo $(3p_1p_2 \dots p_r)^2 + 3 = 3(3p_1^2p_2^2 \dots p_r^2 + 1)$ však má netriviálního dělitele $3p_1^2p_2^2 \dots p_r^2 + 1$, který není dělitelný žádným z prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_r$, což je spor.

Nyní tvrzení dokážeme pro $a \neq 0$. Z rovností

$$(9a^2k^3)^2 + 3 = 3(27a^4k^6 + 1)$$

a

$$(9a^3k^4)^3 - a = a(3^6a^8k^{12} - 1) = a(27a^4k^6 - 1)(27a^4k^6 + 1)$$

plyne, že pro každé k celé je číslo $27a^4k^6 + 1$ společným dělitelem čísel $n^2 + 3$ a $m^3 - a$, kde $n = 9a^2k^3$ a $m = 9a^3k^4$. Stačí tedy dokázat, že pro libovolné dané a mezi děliteli čísel $27a^4k^6 + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) existuje nekonečně mnoho různých prvočísel.

Předpokládejme naopak, že takových prvočísel je jen konečně mnoho, a označme je $p_1, p_2, \dots, p_r$. Pro $k = p_1p_2 \dots p_r + 1$ je však zřejmé, že číslo $27a^4k^6 + 1 > 1$ není dělitelné žádným z prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_r$. Má tedy dalšího prvočinitele $p \notin \{p_i : 1 \leq i \leq r\}$. Dospěli jsme tak ke sporu, který dokazuje tvrzení úlohy.

52. mezinárodní matematická olympiáda

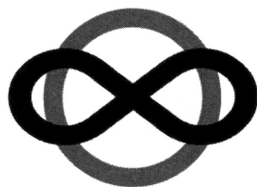
Padesátý druhý ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 12. do 24. července 2011 v Nizozemí. Olympiády se zúčastnilo 564 soutěžících ze 101 zemí.

České družstvo tvořili *Michael Bílý* z Gymnázia Jaroslava Vrchlického v Klatovech, *Miroslav Koblížek* z Gymnázia Žamberk, *Dung Anh Le* z Gymnázia Tachov, *Daniel Šafka* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Štěpán Šimsa* z Gymnázia Josefa Jungmana v Litošovicích a *Tomáš Zeman* z Gymnázia Jana Keplera v Praze. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl dr. *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl dr. *Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Organizace celého průběhu olympiády byla na velmi vysoké úrovni. Ostatně Nizozemí je známo tím, že se zde vše důkladně plánuje. To je dáno i tím, že zhruba třetina území této země leží pod úrovní moře.

Olympiáda začala tradičně zasedáním mezinárodní jury, složené z vedoucích národních delegací. Jedním z úkolů jury je vybrat šest soutěžních úloh z problémů, které navrhly jednotlivé země. Jury má rovněž na starost případné změny regulí olympiády, jednání o budoucích pořadatelích a v neposlední řadě pak vedoucí jednotlivých delegací překládají zadání vybraných úloh do národních jazyků. Poznamenejme, že jako dějiště následujících mezinárodních olympiád byly schváleny tyto země: 2013 – Kolumbie; 2014 – Jihoafrická republika; 2015 – Thajsko (vždy se jednalo o jediné kandidáty). Jednání se odehrávala v areálu bývalého kláštera nedaleko Eindhovenu. Místní univerzita, Technická univerzita Eindhoven, byla jedním z organizátorů a sponzorů celé akce.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí přijeli do Amsterdamu v sobotu 16. července a byli ubytováni v hotelu Novotel, jižně od centra města.



**International
Mathematical
Olympiad Am
sterdam 2011**

V neděli 17. července bylo na programu slavnostní zahájení v kongresovém centru RAI, což je jedno z největších konferenčních zařízení v celém Nizozemí. Tohoto zahájení se zúčastnili i vedoucí delegací, kteří sem byli převezeni pouze na ně. Během zahájení se na pódiu krátce představily všechny výpravy, doprovázené taneční skupinou ISH. Součástí byl i video-pozdrav nizozemské ministryně vzdělávání, kultury a vědy *Janneke Marlene van Bijsterveldtové-Vilegenthartové*.

Ve dnech 18. a 19. července proběhla vlastní soutěž, která jako vždy probíhala ve dvou dnech, přičemž každý den soutěžící měli na tři příklady čtyři a půl hodiny. Během první půlhodiny po zadání úloh mohou soutěžící klást otázky k textům úloh. Ty jsou poté elektronicky odeslány do místa, kde jury zasedá. Vedoucí družstva, jehož žák položí dotaz (v rodném jazyce), přeloží dotaz pro celou jury, navrhne odpověď a ta je pak schválena či upravena a odeslána zpět. Druhý soutěžní den se sešlo 189 otázek, zejména ke čtvrté úloze, jejíž znění nebylo v některých jazycích zcela srozumitelné. Zodpovídání těchto dotazů zabralo přes dvě hodiny. Následně byly vedoucí delegací definitivně přesunuti do Amsterdamu, do stejného hotelu, kde už přebývali pedagogičtí vedoucí a soutěžící.

V dalších dnech pobytu byly pro soutěžící připraveny nejrůznější exkurze (výlet na kolech – typicky pro Nizozemí, plavba na jachtě, návštěva pláže). Vedoucí se pak věnovali opravám řešení. Ta jsou po soutěži zkopírována a nezávisle opravena též koordinátory, což jsou zkušení matematici z celého světa, které zajišťuje pořádající země (v tomto roce bylo přítomno téměř 80 koordinátorů). Po opravách se vedoucí a koordinátoři sejdou, porovnají bodová hodnocení a snaží se dospět ke shodě. Celý proces koordinace trvá tři dny.

Slavnostní zakončení olympiády se konalo opět v centru RAI (v „ráji“, jak říkali čeští a slovenští účastníci). Předávání medailí se z významných osobností zúčastnil i předseda organizačního výboru *Robbert Dijkgraaf*, přední světový a holandský matematik. I při zakončení všechno pěkně klapalo, projevy byly krátké a výstižné, nikdo se nenudil. Na závěr byla předána vlajka IMO pořadatelům příští olympiády. Ta se uskuteční v Mar del Plata v Argentině.

Co se týče výsledků českého družstva, splnil náš tým nelehký úkol získat přesně tolik bodů, kolik bylo zúčastněných zemí. Tento „jedinečný“ výkon nás zařadil na 39. místo v hodnocení zemí, pět míst za Slovenskem (v porovnání s loňským rokem jsme si polepšili o 17 bodů a 9 míst). Žádný z českých účastníků neodjížděl s prázdnou: Anh Dung Le získal stříbrnou medaili, Štěpán Šimsa, Michael Bílý a Tomáš Zeman medaili bronzovou

a konečně Miroslav Koblížek a Daniel Šafka čestné uznání za bezchybné vyřešení alespoň jedné úlohy. Nutno podotknout, že Miroslavu Koblížkovi unikla o jediný bod bronzová medaile a Štěpánu Šimsovi o bod medaile stříbrná.

Absolutní vítězkou olympiády se stala s největším možným bodovým ziskem *Lisa Sauermannová* z Německa, která se tak stala nejúspěšnější účastnicí olympiád všech dob (celkem získala čtyři zlaté a jednu stříbrnou medaili). Dívky tvořily 11 % účastníků, což je na matematickou olympiádu vysoké číslo. Nejúspěšnější zemí se pak již tradičně stala Čína, i když druhé Spojené státy americké jí šlapaly na paty. Velkým překvapením je pak třetí místo Singapuru se slušným náskokem před čtvrtým Ruskem.

V následujícím přehledu můžete najít výsledky celková pořadí členů českého a slovenského družstva. Na zlatou medaili tentokrát stačilo 28 bodů, na stříbrnou 22 bodů a na bronzovou 16.

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
202.–221. Michael Bílý	7	1	0	6	4	0	18	B
83.–112. Anh Dungh Le	5	0	7	7	4	0	23	S
282.–302. Miroslav Koblížek	7	0	0	7	1	0	15	HM
403.–420. Daniel Šafka	7	0	0	1	0	0	8	HM
145.–170. Štěpán Šimsa	7	0	0	7	7	0	21	B
253.–281. Tomáš Zeman	7	0	0	7	2	0	16	B
Celkem	42	1	7	35	18	0	101	

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
316.–320. Marián Horňák	3	1	0	7	2	0	13	HM
222.–252. Natálie Karásková	7	0	0	7	2	1	17	B
74.–82. Ondrej Kováč	7	4	0	6	7	0	24	S
186.–201. Matúš Stehlík	7	0	0	7	5	0	19	B
253.–281. Michal Tóth	7	1	0	7	1	0	16	B
113.–144. Martin Vodička	7	1	0	7	7	0	22	S
Celkem	38	7	0	41	24	1	111	

Pro úplnost uvádíme i tradičně sestavované neoficiální pořadí zemí podle počtu dosažených bodů společně s počty medailí, které získaly (čísla v závorce za názvem země značí počet reprezentantů, pokud byl nižší než šest):

	I	II	III	body		I	II	III	body
ČLR	6	0	0	189	Kolumbie	0	0	1	73
USA	6	0	0	184	Makao	0	0	2	71
Singapur	4	1	1	179	Filipíny (5)	0	0	3	69
Rusko	2	4	0	161	Mongolsko	0	0	2	69
Thajsko	3	2	1	160	Švédsko	0	1	0	69
Turecko	3	2	1	159	Finsko	0	1	0	68
KLDR	3	3	0	157	Gruzie	0	0	2	68
Rumunsko	1	5	0	154	Lotyšsko	0	1	1	68
Tchaj-wan	2	4	0	154	Tádžikistán	0	1	0	68
Írán	2	4	0	151	Norsko	0	1	0	67
Nemecko	1	3	2	150	Bélorusko	0	0	1	64
Japonsko	2	2	2	147	Maroko	0	1	1	64
Korea	2	3	0	144	Slovinsko	0	0	1	64
Hongkong	2	1	3	138	Turkmenistán	0	0	3	64
Ukrajina	1	2	3	136	Uzbekistán (5)	0	0	1	62
<i>Polsko</i>	2	2	1	136	Arménie (5)	0	1	0	61
Kanada	1	2	3	132	Ázerbájdžán	0	1	1	61
Veľká Británie	2	1	2	132	Kostarika (4)	0	1	0	57
Itálie	1	3	1	129	Saudská Arábie	0	0	2	53
Brazílie	0	3	3	121	Kypr	0	0	1	51
Bulharsko	0	2	3	121	Bangladéš	0	0	1	50
Mexiko	0	2	4	120	Srí Lanka	0	0	1	49
Indie	1	1	2	119	Chile	0	0	1	48
Izrael	1	0	4	119	Island	0	0	0	48
Austrálie	0	3	3	116	Lucembursko	0	0	1	48
Maďarsko	0	2	3	116	Tunisko	0	0	1	46
Srbsko	1	2	1	116	Nigérie	0	0	1	40
Nizozemí	0	2	3	115	Makedonie	0	0	1	38
Indonézie	0	2	4	114	Paraguay (5)	0	0	0	38
Nový Zéland	0	2	2	114	Pákistán (4)	0	0	1	35
Belgie	0	2	3	113	Pobreží slonoviny	0	0	0	34
Peru	1	0	2	113	Ekvádor	0	0	1	32
Vietnam	0	0	6	113	Portoriko (4)	0	0	0	32
Francie	0	1	4	111	Trinidad a Tobago	0	0	0	29
<i>Slovensko</i>	0	2	3	111	Uruguay (4)	0	0	0	29
Chorvatsko	0	1	5	110	Irsko	0	0	0	26
Rakousko	0	2	2	110	Albánie	0	0	0	24
Kazachstán	0	1	3	105	Kosovo	0	0	0	22
<i>Česká republika</i>	0	1	3	101	Honduras (3)	0	0	0	21
Řecko	1	0	3	99	Venezuela (2)	0	0	0	21
JAR	0	1	2	93	Bosna a Hercegovina (4)	0	0	0	17
Malajsie	1	1	1	93	Kyrgyzstán (5)	0	0	0	14
Bolívie	0	0	4	88	Sýrie	0	0	0	14
Švýcarsko	0	2	1	88	Černá hora (4)	0	0	0	13
Litva	0	0	4	87	Salvádor (2)	0	0	0	11
Moldavsko	0	1	0	86	Guatemala (4)	0	0	0	8
Portugalsko	1	0	2	86	Panama (1)	0	0	0	6
Španielsko	0	0	3	83	Lichtenštejnsko (1)	0	0	0	4
Argentína	1	0	0	77	Kuvajt (5)	0	0	0	1
Dánsko	0	1	1	76	Spoj. arab. emiráty (5)	0	0	0	1
Estonsko	0	0	2	76					

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Pro libovolnou množinu $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ čtyř (navzájem různých) kladných celých čísel označme s_A součet $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Dále necht n_A značí počet dvojic (i, j) , kde $1 \leq i < j \leq 4$ a $a_i + a_j$ dělí s_A . Určete všechny čtyřprvkové množiny A kladných celých čísel, pro které je hodnota n_A největší možná. (Mexiko)

2. Je dána množina S alespoň dvou bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. *Větrným mlýnem* rozumíme následující proces. Zpočátku zvolíme nějakou přímku l procházející právě jedním bodem $P \in S$. Tou přímkou začneme otáčet ve směru pohybu hodinových ručiček okolo *středu* P , dokud „nenarazí“ na další bod množiny S — označme jej Q . Přímkou nadále otáčíme ve stejném směru, nyní ovšem okolo středu Q , dokud nenarazí na další bod množiny S , a tak dále. Tento proces neustále pokračuje (nekonečně dlouho). Dokažte, že bod $P \in S$ a přímku l procházející bodem P lze zvolit tak, že jimi začínající větrný mlýn bude mít za střed otáčení každý z bodů množiny S nekonečněkrát. (Velká Británie)

3. Necht $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel a necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, jež pro všechna reálná x a y splňuje nerovnost

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

Dokažte, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \leq 0$. (Bělorusko)

4. Necht n je celé kladné číslo. Mějme rovnoramenné váhy a n závaží o hmotnostech $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. V n krocích máme na váhy postupně po jednom umístit všechna závaží. Každý z kroků spočívá ve výběru jednoho ze závaží, které ještě není na miskách vah, a jeho umístění buď na levou, nebo na pravou misku vah tak, aby obsah pravé misky nebyl nikdy těžší než obsah levé. Kolik různých posloupností takovýchto n kroků existuje? (Írán)

5. Necht f je funkce z množiny celých čísel do množiny celých kladných čísel taková, že pro libovolná celá m a n je rozdíl $f(m) - f(n)$ dělitelný číslem $f(m - n)$. Dokažte, že pro libovolná celá m a n taková, že $f(m) \leq f(n)$, je číslo $f(n)$ dělitelné číslem $f(m)$. (Írán)

6. Necht ABC je ostroúhlý trojúhelník a k kružnice mu opsaná. Dále necht t je tečna kružnice k a t_a, t_b, t_c jsou po řadě obrazy přímky t

v osové souměrnosti podle přímek BC , CA , AB . Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami t_a , t_b , t_c se dotýká kružnice k .
(*Japonsko*)

Řešení soutěžních úloh

1. Dvojic (i, j) splňujících $1 \leq i < j \leq 4$ je jen šest. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Potom platí $0 < < a_1 + a_2 < a_3 + a_4$ a také $0 < a_1 + a_3 < a_2 + a_4$, takže

$$a_3 + a_4 < s_A < 2(a_3 + a_4) \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{2}s_A < a_3 + a_4 < s_A$$

a

$$a_2 + a_4 < s_A < 2(a_2 + a_4) \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{2}s_A < a_2 + a_4 < s_A.$$

To znamená, že ani $a_3 + a_4$, ani $a_2 + a_4$ nemůže dělit s_A . Přinejmenším dva ze součtů $a_i + a_j$ tedy nedělí s_A , proto $n_A \leq 4$.

Předpokládejme, že pro nějakou množinu A platí $n_A = 4$. V takovém případě všechny zbylé čtyři součty $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, $a_1 + a_4$, $a_2 + a_3$ už musejí být děliteli s_A . Jelikož ani jeden z nich není roven s_A , musí být každý z nich nejvýše roven $\frac{1}{2}s_A$. Pro součty $a_1 + a_4$, $a_2 + a_3$ to znamená, že $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = \frac{1}{2}s_A$, neboť $(a_1 + a_4) + (a_2 + a_3) = s_A$.

Pro zbylé dva součty pak platí $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_4 = \frac{1}{2}s_A$, a protože oba dělí číslo s_A , musí být

$$a_1 + a_2 = \frac{s_A}{x} \quad \text{a} \quad a_1 + a_3 = \frac{s_A}{y} \quad (1)$$

pro vhodná přirozená čísla x, y , přičemž $x > y \geq 3$. Je tedy

$$2a_1 = (a_1 + a_2) + (a_1 + a_3) - (a_2 + a_3) = \frac{s_A}{x} + \frac{s_A}{y} - \frac{s_A}{2} > 0 \quad (2)$$

neboli

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}.$$

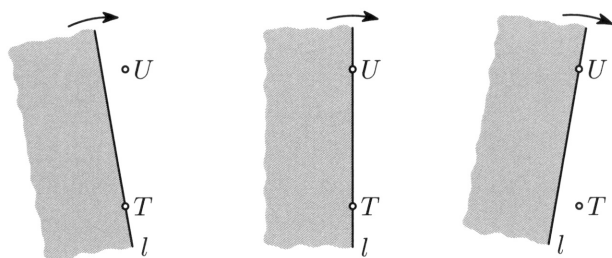
Vidíme, že nemůže být $1/x < 1/y < 1/4$, tudíž $y \leq 3$, což s předchozí opačnou nerovností dává $y = 3$, a $1/x > 1/2 - 1/y = 1/6$ neboli $x \leq 5$. Je tedy $3 = y < x \leq 5$. Těmito nerovnostem vyhovují jen dvě dvojice přirozených čísel: $(x, y) = (4, 3)$ a $(x, y) = (5, 3)$.

Pro $x = 4$ dostáváme z (2) $a_1 = \frac{1}{24}s_A$ a z (1) pak $a_2 = \frac{5}{24}s_A$, $a_3 = \frac{7}{24}s_A$ a konečně z rovnosti $a_1 + a_4 = \frac{1}{2}s_A$ plyne $a_4 = \frac{7}{24}s_A$, je tedy $A = \{k, 5k, 7k, 11k\}$ pro nějaké přirozené číslo k .

Podobně pro $x = 5$ vyjde $A = \{k, 11k, 19k, 29k\}$ pro nějaké přirozené číslo k . Snadno ověříme, že pro každou takovou množinu opravdu $n_A = 4$.

Odpověď. Největší možná hodnota n_A je 4 a nabývá se pro množiny A tvaru $\{k, 5k, 7k, 11k\}$ a $\{k, 11k, 19k, 29k\}$, kde k je libovolné přirozené číslo.

2. Zvolíme-li na dané přímce orientaci, můžeme mluvit o levé a pravé polorovině (v obr. 41 je levá polorovina označena šedou barvou). Všimněme si, že když se během větrného mlýna mění střed otáčení z bodu T na bod U , po změně se bod T nachází v téže polorovině určené přímkou l , v níž se před změnou nacházel bod U (obr. 41). Vidíme, že když pomineme okamžiky, v nichž se mění střed otáčení (l obsahuje právě dva body z S), zůstává počet bodů z S nacházejících se v šedé části stále stejný.



Obr. 41

Dále využijeme toho, že každým bodem množiny S lze vést (orientovanou) přímkou, která obsahuje jediný bod množiny S a dělí její body „napůl“, a to takovým způsobem, že vlevo od ní je stejný počet bodů z S jako vpravo (je-li $n = |S|$ liché), anebo o jeden bod méně než vpravo (v případě sudého n). Stačí si totiž uvědomit, že pokud nějakou orientovanou přímkou v daném bodě otočíme o 180° , vymění se počty bodů nalevo a napravo od dané přímky. Protože při postupném otáčení přímky se počet bodů řekneme vlevo mění vždy o jeden, v jisté poloze tak musí nastat popsaná rovnováha. Nazvěme každou takovou přímkou *půlící*. Vezmeme nyní libovolnou půlící přímkou l a bod P na ní. Vzhledem k tomu, že se během větrného mlýna nemění počty bodů nalevo a napravo od l , bude příslušná přímkou (s výjimkou okamžiku, kdy se mění střed otáčení) stále půlící přímkou. Přitom během otočení o prvních 180° zřejmě nemůže minout žádný z bodů množiny S , a tak se postupně všechny vystřídají v roli středu otáčení. Zároveň je zřejmé i to, že při otáčení o další násobky 180° bude přímkou l procházet znovu všemi body z S ve stejném pořadí jako při prvním otočení. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

3. V dané funkcionální nerovnici se jako argumenty funkce objevují výrazy $x + y$ a x . Abychom se zbavili součtu v argumentu, použijeme substituci $y = t - x$. Pro všechna reálná čísla x, t pak platí

$$f(t) \leq tf(x) - xf(x) + f(f(x)). \quad (1)$$

V dalším kroku eliminujeme člen $f(f(x))$ tak, že do (1) dosadíme nejdříve $t = f(a)$, $x = b$ a potom $t = f(b)$, $x = a$. Dostaneme

$$\begin{aligned} f(f(a)) - f(f(b)) &\leq f(a)f(b) - bf(b), \\ f(f(b)) - f(f(a)) &\leq f(a)f(b) - af(a). \end{aligned}$$

Sečtením dostáváme, že pro všechna a, b platí

$$2f(a)f(b) \geq af(a) + bf(b).$$

Volbou $b = 2f(a)$ dosáhneme, že levá strana poslední nerovnosti bude stejná jako druhý sčítanec na pravé straně. Po jejich odečtení tak zůstane nerovnost $af(a) \leq 0$, která musí být splněna pro všechna $a \in \mathbb{R}$. Proto

$$f(a) \geq 0 \quad \text{pro všechna } a < 0. \quad (2)$$

Pokud by pro nějaké x platilo $f(x) > 0$, byla by pro takovou hodnotu pravá strana nerovnosti (1) v proměnné t rostoucí lineární funkcí, tedy by nabývala na oboru záporných čísel určitě i záporné hodnoty. Pak by však záporné hodnoty na oboru záporných čísel musela nabýt i levá strana, čili funkce f , což je ve sporu s (2). Proto

$$f(x) \leq 0 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Spojením (2) a (3) ihned máme $f(x) = 0$ pro všechna $x < 0$. Zbývá určit hodnotu $f(0)$. Pokud v (1) položíme $t = x < 0$, dostaneme $0 \leq 0 - 0 + f(0)$ neboli $f(0) \geq 0$. Vzhledem k (3) už pak nutně $f(0) = 0$.

Poznámka. Daná funkcionální nerovnice má i netriviální řešení

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^x, & x \geq 0, \end{cases}$$

které je dokonce spojitě.

4. Označme p_n hledaný počet posloupností. Všimněme si, že na vahách nikdy nenastane rovnováha. Každé závaží je totiž (o jedna) těžší než

všechna lehčí závaží dohromady. Závaží o hmotnosti 1 tudíž můžeme položit na libovolnou miskou vah v libovolném kroku, pouze v prvním kroku je musíme položit vlevo. Navíc vynecháme-li v nějaké přípustné posloupnosti kroků závaží o hmotnosti 1, obdržíme přípustnou posloupnost umístěných závaží o hmotnostech $2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$. Takových posloupností je zřejmě p_{n-1} , protože vynásobení hmotností dvěma nemá na (ne)rovnováhu vliv. A naopak do libovolné z takových posloupností můžeme zařadit závaží 1 právě $2n - 1$ různými způsoby, neboť jen v prvním kroku nemáme na vybranou mezi oběma miskami, načež získáme přípustnou posloupnost závaží $1, 2, \dots, 2^{n-1}$. Dostáváme tak rekurentní vztah $p_n = (2n - 1)p_{n-1}$, což spolu se zřejmou hodnotou $p_1 = 1$ dává

$$p_n = (2n - 1)(2n - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = (2n - 1)!!.$$

Jiné řešení. Označme p_n hledaný počet posloupností. Všimněme si, že přípustných způsobů umístění závaží $1, 2, \dots, 2^{n-1}$ je stejně jako přípustných způsobů umístění libovolné sady n závaží, z nichž každé má tu vlastnost, že je těžší než všechna lehčí závaží dohromady. Říkejme takovéto sadě *nevyvážená*. Navíc výběrem libovolného počtu libovolných závaží z nevyvážené sady dostáváme opět nevyváženou sadu.

Způsoby umístění závaží $1, 2, \dots, 2^{n-1}$ rozdělme podle toho, kdy jsme na váhy umístili nejtěžší závaží (musí přijít vždy na levou miskou). Dejme tomu, že se tak stalo v k -tém kroku. Před tím bylo umístěno nějakých $k - 1$ ($n - 1$ zbývajících) závaží tvořících nevyváženou sadu. Ta mohla být umístěna p_{k-1} způsoby. Po položení nejtěžšího závaží již můžeme každé ze zbývajících $n - k$ závaží položit na libovolnou z obou misek. Dostáváme tak rekurentní vztah

$$p_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p_{k-1} 2^{n-k} (n-k)! = \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)! p_{k-1} 2^{n-k}}{(k-1)!}$$

(klademe $p_0 = 1$). Úpravami pak dostáváme

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)! p_{k-1} 2^{n-k}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)! p_{k-1} 2^{n-k}}{(k-1)!} + p_{n-1} = \\ &= 2(n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{((n-1)-1)! p_{k-1} 2^{(n-1)-k}}{(k-1)!} + p_{n-1} = \\ &= 2(n-1)p_{n-1} + p_{n-1} = (2n-1)p_{n-1}, \end{aligned}$$

a dostáváme stejný rekurentní vztah jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Jak už jsme poznamenali v předchozím řešení, nezávisí počet zmíněných posloupností na konkrétních hmotnostech závaží, ale jen na jejich „nevyváženosti“.

Označme p_n hledaný počet posloupností a předpokládejme, že 2^k je hmotnost posledního umístěného závaží ($0 \leq k \leq n-1$). Protože množina $\{1, 2, \dots, 2^{n-1}\} \setminus \{2^k\}$ je zřejmě nevyvážená, existuje v tomto případě celkem p_{n-1} různých posloupností, jak realizovat $n-1$ kroků bez použití závaží o hmotnosti 2^k . Pro jeho umístění v posledním kroku pak máme ke každé z těchto posloupností dvě možnosti, pokud $k < n-1$ (nejtěžší závaží je už na levé misce), anebo možnost jedinou, pokud $k = n-1$, neboť nejtěžší závaží můžeme umístit jedinečně na levou misku, máme-li dodržet podmínku úlohy. Celkově tak dostáváme

$$p_n = (n-1) \cdot 2p_{n-1} + p_{n-1} = (2n-1)p_{n-1}.$$

Odpověď. Hledaný počet způsobů je roven součinu prvních n lichých čísel (zkráceně tento výraz označujeme jako v prvním řešení $(2n-1)!!$ a nazýváme dvojný faktoriál).

5. Pokud $f(m) = f(n)$, není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že pro celá čísla m, n platí $f(m) < f(n)$. Z dané podmínky díky tomu plyne $f(m-n) \leq |f(m) - f(n)| = f(n) - f(m) < f(n)$. Dostáváme tak

$$-f(n) < -f(m-n) < f(m) - f(m-n) < f(m) < f(n).$$

Pro $d = f(m) - f(m-n)$ tudíž platí $|d| < f(n)$, zatímco z dané podmínky plyne

$$f(n) = f(m - (m-n)) \mid d,$$

což ovšem znamená, že $d = 0$ neboli $f(m) = f(m-n)$. Z dané podmínky tak konečně plyne, že $f(m)$ dělí $f(m) - f(n)$, a tedy i $f(n)$, což jsme měli dokázat.

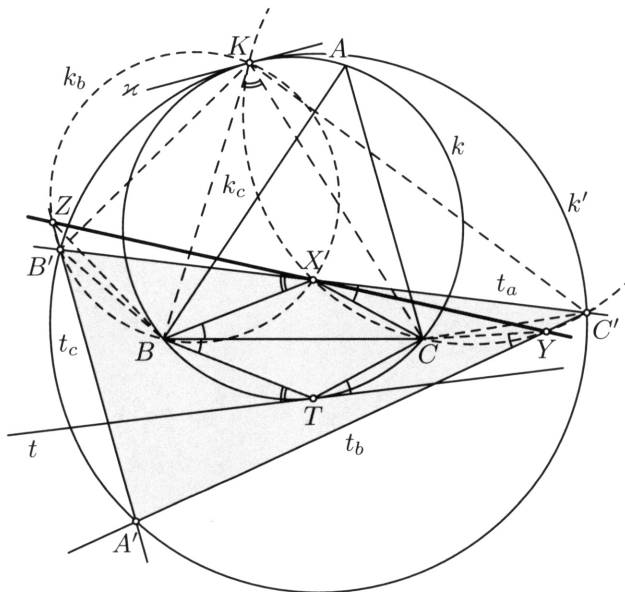
6. Označme T bod dotyku přímky t s kružnicí k a vrcholy trojúhelníku určeného přímkami t_a, t_b, t_c označme následovně: $A' := t_b \cap t_c$, $B' := t_a \cap t_c$ a $C' := t_a \cap t_b$. Pro zjednodušení zápisu budeme pracovat s orientovanými úhly: pro přímky p, q bude $\langle p, q \rangle$ značit úhel, o který je nutno přímku p otočit v kladném smyslu, abychom dostali přímku rovnoběžnou s přímkou q . Orientované úhly počítáme modulo 180° .

Označme po řadě X, Y, Z body souměrně sdružené s bodem T podle přímk BC, CA, AB . Protože kolmé průměty bodu T na tyto tři přímky

leží na Simsonově přímce daného trojúhelníku ABC , leží v přímce i body X, Y, Z coby jejich obrazy ve stejnolehlosti se středem T . Označme $\varphi = \langle t, TC \rangle = \langle BT, BC \rangle$, pak vzhledem k osově souměrnosti dle přímek AC a BC platí

$$\begin{aligned}\langle BC, BX \rangle &= \langle BT, BC \rangle = \varphi, \\ \langle XC, XC' \rangle &= \langle t, TC \rangle = \langle YC, YC' \rangle = \varphi.\end{aligned}$$

Z poslední rovnosti ovšem plyne, že body X, Y, C, C' leží na kružnici, kterou označíme k_c . Podobně zavedeme i kružnice k_a a k_b . Kružnici opsanou trojúhelníku $A'B'C'$ označíme k' (obr. 42). Podle známé Miquelovy věty,¹ kterou použijeme na přímky $A'B', A'C', B'C'$ a XY , nyní platí, že



Obr. 42

všechny čtyři kružnice k' , k_a , k_b , k_c mají společný bod, který označíme K . Jakmile se nám podaří dokázat, že bod K leží i na kružnici k a že obě kružnice k a k' v něm mají společnou tečnu, bude tvrzení úlohy dokázáno.

Ze souměrnosti plyne $|XB| = |TB| = |ZB|$, takže bod B je středem jednoho z oblouků XZ kružnice k_b , je tedy $\langle KB, KX \rangle = \langle XZ, XB \rangle$.

¹ Viz např. Vrba, Horák: Vybrané úlohy matematické olympiády kategorie A, SPN, Praha 1988, řešení úlohy 96.

Podobně platí $\langle KX, KC \rangle = \langle XC, XY \rangle$. Sečtením obou těchto rovností a ze souměrnosti podle přímky BC dostáváme

$$\begin{aligned}\langle KB, KC \rangle &= \langle KB, KX \rangle + \langle KX, KC \rangle = \langle XZ, XB \rangle + \langle XC, XY \rangle = \\ &= \langle XC, XB \rangle = \langle TB, TC \rangle.\end{aligned}$$

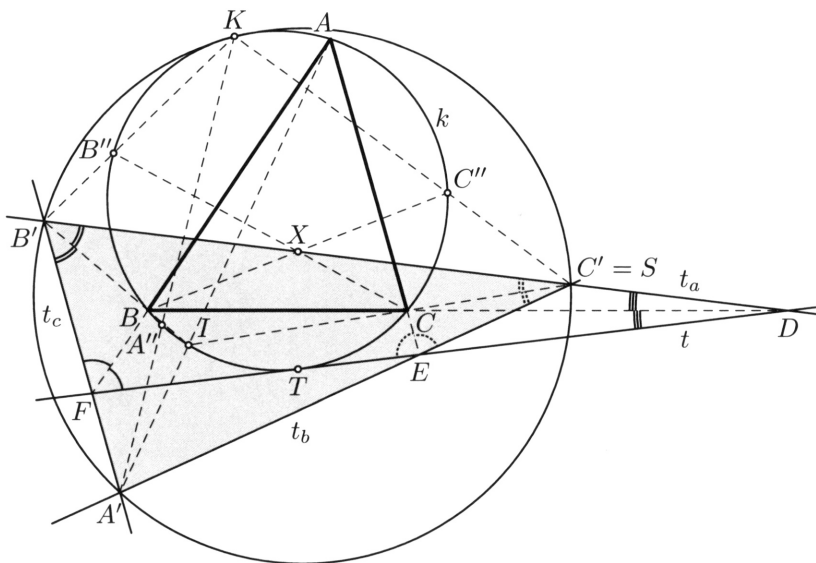
To znamená, že bod K leží na kružnici k .

Označme nyní $\varkappa$ tečnu kružnice k v bodě K . Pak platí

$$\begin{aligned}\langle \varkappa, KC' \rangle &= \langle \varkappa, KC \rangle + \langle KC, KC' \rangle = \langle KB, BC \rangle + \langle XC, XC' \rangle = \\ &= (\langle KB, BX \rangle - \langle BC, BX \rangle) + \varphi = \langle KB', B'X \rangle - \varphi + \varphi = \\ &= \langle KB', B'C' \rangle.\end{aligned}$$

To znamená, že κ je tečnou i kružnice k' .

Jiné řešení. Označme body T , A' , B' , C' jako v předchozím řešení. Zároveň využijeme i tam zavedené značení orientovaných úhlů. Necht A'' je takový bod na kružnici k , že A je středem oblouku TA'' (tj. $|TA| = |AA''|$, bod A'' je různý od T , pokud TA není průměrem). Podobně definujme i body B'' , C'' (obr. 43).



Obr. 43

Protože body B , resp. C jsou středy oblouků TB'' , resp. TC'' , platí:

$$\begin{aligned}\langle t, B''C'' \rangle &= \langle t, TC'' \rangle + \langle TC'', B''C'' \rangle = \\ &= 2\langle t, TC \rangle + 2\langle TC'', BC'' \rangle = \\ &= 2(\langle t, TC \rangle + \langle TC, BC \rangle) = 2\langle t, BC \rangle = \langle t, t_a \rangle.\end{aligned}$$

Přímky t_a a $B''C''$ jsou tudíž rovnoběžné. Podobně jsou rovnoběžné i t_b a $A''C''$ a také t_c a $A'B''$.

Trojúhelníky $A'B'C'$ a $A''B''C''$ tak budou stejnohlé, ukážeme-li, že přímky $B'B''$ a $C'C''$ nejsou rovnoběžné. Zjistíme dokonce, že jejich průsečík — střed zmíněné stejnolehlosti — leží na kružnici k , jež je opsána nejen trojúhelníku ABC , ale i trojúhelníku $A''B''C''$. Tímto středem proto bude procházet i stejnohlá kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$, takže obě kružnice se v něm budou dotýkat, jak jsme měli dokázat.

Existenci a polohu průsečíku přímk $B'B''$ a $C'C''$ vyvodíme ze dvou pomocných tvrzení.

⇒ 1. *Průsečík X přímek $B''C$, BC'' leží na přímce t_a .*

Bod B je středem oblouku TB'' , tedy $|\sphericalangle BCT| = |\sphericalangle BCB''|$ a přímka $B''C$ je obrazem přímky TC v osové souměrnosti podle BC . Podobně je přímka BC'' obrazem přímky BT . Bod X je tudíž obrazem bodu T v této souměrnosti, takže leží na t_a .

⇒ 2. *Průsečík I přímek BB' , CC' leží na kružnici k .*

Uvažme pouze případy, kdy t je různoběžná se všemi stranami trojúhelníku ABC . Zbylé možnosti lze vyřešit limitním přechodem. Označme $D = t \cap BC$, $E = t \cap CA$, $F = t \cap AB$ (obr. 43).

Vzhledem k souměrnosti je přímka BD osou jednoho z úhlů určeného přímkami $B'D$ a FD . Obdobně je přímka BF osou jednoho z úhlů určeného přímkami $B'F$ a DF . Bod B je tak středem kružnice trojúhelníku $B'FD$ vepsané nebo středem některé z kružnic mu připsaných. V každém případě je $\langle BD, DF \rangle + \langle DF, FB \rangle + \langle B'B, B'D \rangle = 90^\circ$, takže platí

$$\begin{aligned}\langle B'B, B'C' \rangle &= \langle B'B, B'D \rangle = 90^\circ - \langle BC, DF \rangle - \langle DF, BA \rangle = \\ &= 90^\circ - \langle BC, AB \rangle.\end{aligned}$$

Obdobně je $\langle C'C, B'C' \rangle = 90^\circ - \langle BC, AC \rangle$. Platí tedy

$$\begin{aligned}\langle BI, CI \rangle &= \langle B'B, B'C' \rangle + \langle B'C', C'C \rangle = \langle BC, AC \rangle - \langle BC, AB \rangle = \\ &= \langle AB, AC \rangle,\end{aligned}$$

což v řeči orientovaných úhlů znamená, že body A, B, I, C leží na kružnici.

Označme K druhý průsečík přímky $B'B''$ s kružnicí k . Důkaz dokončíme použitím Pascalovy věty pro šestici bodů K, B'', C, I, B, C'' na kružnici k . Podle ní leží body $B' = KB'' \cap IB$, $X = B''C \cap BC''$ a $S = CI \cap C''K$ na jedné přímce. Proto $S = C'$, tudíž body K, C'' a C' leží v přímce. Bod K kružnice k je tak průsečíkem přímek $B'B''$ a $C'C''$, jak jsme pro dokončení celého řešení slíbili ukázat.

5. středoevropská matematická olympiáda

Pátá středoevropská matematická olympiáda (Middle European Mathematical Olympiad, zkráceně MEMO) se uskutečnila 1. 9.–7. 9. 2011 v chorvatském Varaždinu za účasti šedesáti studentů z deseti zemí středoevropského regionu, jmenovitě z Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska. Soutěž je určena studentům středních škol, kteří se v daném kalendářním roce neúčastnili mezinárodní matematické olympiády (MMO). Výjimku tvoří slovinští účastníci, kteří vzhledem k relativně malému počtu obyvatel země nejsou kvůli případné účasti na MMO vylučováni.



České družstvo tvořili *Ondřej Bartoš* z Gymnázia Žďár nad Sázavou, *Lubomír Grund* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, *Jan Kuchařík* z Gymnázia Jana Masaryka v Jihlavě, *Dominik Steinhauser* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Jan Stopka* z Gymnázia Brno na tř. Kpt. Jaroše a *Dominik Teiml* z The English College v Praze. Vedoucím družstva byl dr. *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem pak dr. *Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci.

Město Varaždin je staré chorvatské město, které bývalo dokonce hlavním městem Chorvatska. Jeho populace dnes čítá na 50 tisíc obyvatel. První den olympiády měli soutěžící na programu zábavnou seznamovací hru spojenou s poznáváním památek města, zatímco vedoucí výprav vybírali příklady pro soutěž z návrhů zaslaných jednotlivými účastnickými zeměmi. Večer pak proběhlo v prostorách Fakulty informatiky, varaždinské části Univerzity Záhřeb, slavnostní zahájení soutěže.

Druhý den byla na pořadu soutěž jednotlivců v prostorách jedné z varaždinských základních škol. Každý z účastníků řešil po dobu pěti hodin čtyři příklady. Třetího dne se uskutečnila týmová soutěž, ve které mělo každé národní družstvo k dispozici jednu místnost, kde pak společně řešilo po dobu pěti hodin osm úloh. Již v sobotu večer započala koordinace oprav úloh (úlohy jsou opravovány vedoucími národních týmů a nezávisle

i týmem opravovatelů zajištěným organizátory; při koordinaci se výsledky oprav porovnají a případné neshody se vyřeší) a pokračovala i během neděle. V pondělí dopoledne se jury domluvila na rozdělení medailí, které se řídí podobnými pravidly jako na mezinárodní matematické olympiádě. V úterý byl program olympiády zakončen exkurzí na známý chorvatský hrad Trakošćan a návštěvou městečka Krapina, kde se nacházejí zbytky osídlení neandertálským člověkem. Večerního slavnostního zakončení se zúčastnila řada významných hostů, z nichž jmenujme náměstkyni chorvatského ministra školství Dijanu Vicanovou a rektora Univerzity Záhřeb Aleksu Bjeliše.

Výsledky českého družstva byly následující: Ondřej Bartoš a Dominik Steinhauser získali bronzové medaile, Lubomír Grund a Jan Stopka pak získali čestné uznání za jeden bezchybně vyřešený příklad. V týmovém součtu bodů, které získali jednotliví účastníci daného týmu v individuální soutěži, jsme byli pátí nejlepší. Vlastní týmová soutěž se však českému družstvu příliš nevyvedla, když skončilo osmé. Z vítězství se radoval polský tým, který jako jediný získal maximální možný počet bodů. Plného bodového zisku dosáhl i vítěz soutěže jednotlivců, *Wojciech Nadara*, rovněž z Polska.

Umístění v soutěži jednotlivců	Body za úlohu				Body	Cena
	1	2	3	4		
1. Wojciech Nadara (POL)	8	8	8	8	32	zlato
2. Attila Szabó (HUN)	8	8	7	8	31	zlato
⋮						
27.–30. Ondřej Bartoš	3	3	0	8	14	bronz
Dominik Steinhauser	6	6	2	0	14	bronz
32.–33. Jan Kuchařík	5	0	7	0	12	
38.–40. Jan Stopka	1	0	8	0	9	H.M.
41.–43. Dominik Grund	8	0	0	0	8	H.M.
44.–46. Dominik Teiml	3	0	2	2	7	
Celkem ČR						64

Detailní výsledky českých studentů včetně bodových zisků za jednotlivé úlohy lze vyčíst z předchozí tabulky, přehled výsledků všech zemí v soutěži jednotlivců je v druhé tabulce. Země jsou v ní seřazeny podle součtu bodů celého družstva podobně jako při neoficiálním pořadí zemí na MMO. Výsledky národních družstev v týmové soutěži pak najdete v tabulce následující.

	I	II	III	HM	body		I	II	III	HM	body
Polsko	3	2	1	–	150	Slovensko	–	–	2	2	61
Maďarsko	2	3	1	–	147	Rakousko	–	–	2	–	55
Německo	1	3	1	1	125	Litva	–	–	1	–	50
Chorvatsko	–	2	2	–	95	Slovinsko	–	–	1	1	41
Česká republika	–	–	2	2	64	Švýcarsko	–	–	1	–	31

Umístění v týmové soutěži	Body za úlohu								Body
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1. Polsko	8	8	8	8	8	8	8	8	64
2. Maďarsko	8	0	8	3	8	8	8	8	51
3. Německo	8	0	8	0	8	8	8	8	48
4. Chorvatsko	2	8	8	0	3	8	8	0	37
5. Slovensko	1	0	8	0	8	6	8	0	31
6. Litva	6	0	8	0	8	0	8	0	30
7. Slovinsko	2	0	8	0	4	3	8	0	25
8. Česká republika	2	1	4	0	0	5	8	3	23
9. Rakousko	1	0	6	0	5	2	8	0	22
10. Švýcarsko	2	0	6	0	0	0	8	0	16

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

Soutěž jednotlivců

1. Na tabuli je napsáno číslo 44. Celé číslo a napsané na tabuli můžeme nahradit čtyřmi různými celými čísly a_1, a_2, a_3, a_4 , jejichž aritmetický průměr $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ je roven číslu a . V jednom kroku současně nahradíme všechna čísla na tabuli výše popsaným způsobem. Po 30 krocích dostaneme na tabuli $n = 4^{30}$ celých čísel $b_1, b_2, \dots, b_n$. Dokažte, že

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n} \geq 2011.$$

(Chorvatsko)

2. Je dáno přirozené číslo $n \geq 3$. Jeníček a Mařenka hrají následující hru: Nejdříve Jeníček očíslovuje strany pravidelného n -úhelníku čísly od 1 do n (v libovolném pořadí; každé číslo použije právě jednou). Potom Mařenka zvolí $n - 3$ neprotínajících se úhlopříček rozdělujících daný n -úhelník na trojúhelníky. Všechny zvolené úhlopříčky pak označí číslem 1 a dovnitř každého z trojúhelníků napíše součin čísel na jeho stranách. Součet těchto

$n - 2$ součinů označme S . Jaká bude hodnota součtu S , jestliže snahou Jeníčka je, aby byl součet co největší, a Mařenka se snaží, aby součet byl co nejmenší, přičemž oba dělají nejlepší možné volby? (Chorvatsko)

3. V rovině jsou dány kružnice k_1 a k_2 o středech I_1 a I_2 , jež se protínají ve dvou bodech A a B . Předpokládejme, že úhel I_1AI_2 je tupý. Tečna ke k_1 v bodě A protíná k_2 ještě v bodě C a tečna ke k_2 v bodě A protíná k_1 ještě v bodě D . Označme k_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD . Označme E střed toho oblouku CD kružnice k_3 , který obsahuje bod B . Přímký AC a AD protínají k_3 po řadě ještě v bodech K a L . Dokažte, že přímky AE a KL jsou na sebe kolmé. (Slovinsko)

4. Necht k a m ($k > m$) jsou kladná celá čísla taková, že číslo $km(k^2 - m^2)$ je dělitelné číslem $k^3 - m^3$. Dokažte, že $(k - m)^3 > 3km$. (Polsko)

Soutěž družstev

5. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že rovnost

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x + y) + x^2 + y^2$$

platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel. (Chorvatsko)

6. Necht kladná reálná čísla a, b, c vyhovují vztahu

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Dokažte, že pak

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

(Chorvatsko)

7. Pro přirozené číslo $n \geq 3$ označme $\mathbf{M}$ množinu

$$\{(x, y): x, y \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$$

bodů roviny ($\mathbb{Z}$ značí množinu všech celých čísel). Určete největší možný počet prvků podmnožiny $S \subseteq \mathbf{M}$, ve které žádné tři body netvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku. (Maďarsko)

8. Necht $n \geq 3$ je přirozené číslo. Na soutěž podobnou MEMO přijelo $3n$ účastníků, kteří hovoří n různými jazyky, každý účastník mluví právě třemi různými jazyky. Dokažte, že z nich lze vybrat aspoň $\lceil \frac{2}{9}n \rceil$ jazyků tak, že žádný účastník nehovoří více než dvěma z nich. (Zápis $[x]$ označuje nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno x .) (Chorvatsko)

9. Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má shodné strany. Úhlopříčky AD a EC se protínají v bodě S , přičemž $|\sphericalangle ASE| = 60^\circ$. Dokažte, že pětiúhelník $ABCDE$ má dvě rovnoběžné strany. (Slovensko)

10. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Označme po řadě B_0 a C_0 paty výšek z vrcholů B a C . Necht pro vnitřní bod X trojúhelníku ABC je přímka BX tečnou kružnice opsané trojúhelníku AXC_0 a přímka CX tečnou kružnice opsané trojúhelníku AXB_0 . Dokažte, že přímky AX a BC jsou na sebe kolmé. (Česká republika)

11. Necht pro neprázdné navzájem disjunktní množiny A a B platí $A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Ukažte, že existují čísla $a \in A$ a $b \in B$ tak, že číslo $a^3 + ab^2 + b^3$ je dělitelné 11. (Polsko)

12. Kladné celé číslo n nazveme *úžasným*, jestliže existují kladná celá čísla a, b, c , pro která

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab).$$

Dokažte, že existuje 2011 po sobě jdoucích úžasných čísel. (Zápis (m, n) značí největší společný dělitel přirozených čísel m a n .) (Litva)

Řešení úloh

1. Nahrazením jednoho z čísel na tabuli čtveřicí popsanou v zadání se zvětší aritmetický průměr druhých mocnin čísel na tabuli. Dokážeme, že toto zvětšení je dostatečně velké. Začneme pomocným tvrzením.

LEMMA. Pokud a_1, a_2, a_3, a_4 jsou čtyři navzájem různá celá čísla taková, že jejich aritmetický průměr $a = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ je také celé číslo, tak platí

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4} - a^2 \geq \frac{5}{2}.$$

DŮKAZ. Levá strana dokazované nerovnosti se dá přepsat takto:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4} - a^2 = \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 4a^2}{4} = \\ &= \frac{(a_1 - a)^2 + (a_2 - a)^2 + (a_3 - a)^2 + (a_4 - a)^2}{4}. \end{aligned}$$

Čísla $a_1 - a$, $a_2 - a$, $a_3 - a$, $a_4 - a$ jsou navzájem různá celá čísla se součtem 0. Pokud žádné z nich není nulové, bude součet jejich čtverců alespoň $1^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-2)^2 = 10$. Pokud jedno z nich je nula, musí jiné z nich mít absolutní hodnotu nejméně 3; v tomto případě bude součet čtverců alespoň $3^2 + 1^2 + (-1)^2 = 11$. V obou případech je platnost lemmatu evidentní.

Vraťme se k dokazovanému tvrzení. Označme S_k aritmetický průměr druhých mocnin čísel na tabuli po provedení k kroků. Použijeme-li dokázané lemma na čtveřice čísel vzniklé nahrazením každého ze 4^k čísel, která jsou na tabuli po k krocích, dostaneme, že $S_{k+1} - S_k \geq 5/2$ pro každé $k \geq 0$. Proto

$$S_{30} \geq S_0 + 30 \cdot \frac{5}{2} = 44^2 + 75 = 2011.$$

2. Ukážeme, že $S = \frac{1}{2}(n^2 + 3n - 6)$ pro všechna $n \geq 3$. Pro $n = 3$ je to zjevně pravda, dále budeme uvažovat $n > 3$.

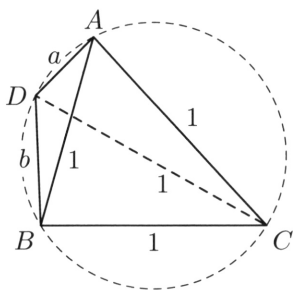
Podívejme se na situaci nejprve z pohledu Mařenky. V každé provedené triangulaci bude přesně $n - 2$ trojúhelníků. Každý z nich bude mít nejvýše dvě strany na obvodu původního mnohoúhelníku a trojúhelníky obsahující dvě strany původního mnohoúhelníku musejí být alespoň dva. Ukážeme, že pro Mařenku je nejlepší zvolit triangulaci, ve které jsou zmiňované trojúhelníky právě dva.

Nazvěme trojúhelník *špatný*, jestliže všechny jeho strany jsou diagonálami původního trojúhelníku. Ukážeme, že Mařenka musí zvolit triangulaci bez špatných trojúhelníků. Předpokládejme, že tomu tak není, tj. že pro Mařenku existuje optimální triangulace, která obsahuje špatný trojúhelník (takové triangulace budeme nazývat *špatné*). Pro každou špatnou triangulaci T označme $d(T)$ délku nejkratší možné strany špatného trojúhelníku v T . Ze všech špatných vícestranných operací s nejmenším možným počtem špatných trojúhelníků vezměme triangulaci T_0 , pro kterou je hodnota $d(T)$ minimální.

Nechť ABC je špatný trojúhelník v T_0 takový, že $|AB| = d(T_0)$. V T_0 máme také trojúhelník ABD pro $D \neq C$. Strana AB je v trojúhelníku ABC nejkratší, tj. úhel ACB je jeho nejmenší, a tedy ostrý. Body A, C, B, D leží na kružnici v tomto pořadí, proto úhel ADB je tupý, a tedy AD i BD jsou kratší než AB . Změňme triangulaci T_0 na T_1 tak, že trojúhelníky ABC a ABD nahradíme trojúhelníky ACD a BCD (obr. 44). Ohodnocení úseček AD a BD nechť jsou a a b . Změnu hodnoty S umíme vyjádřit jako

$$S(T_1) - S(T_0) = a + b - ab - 1 = -(a - 1)(b - 1) \leq 0.$$

Triangulace T_0 však byla optimální, proto i T_1 musí být optimální. Přitom počet špatných trojúhelníků v T_0 byl nejmenší možný, a tedy alespoň jedna z úseček AD a BD je diagonálou. Jelikož jsou obě tyto úsečky kratší než AB , dostáváme spor s volbou T_0 .



Obr. 44

V triangulaci bez špatných trojúhelníků jsou právě dva trojúhelníky obsahující dvě sousední strany původního mnohoúhelníku; všechny ostatní trojúhelníky obsahují přesně jednu stranu původního mnohoúhelníku. Vzhledem k nerovnosti $ab > a + b$, platnou pro každou dvojici přirozených čísel a, b větších než 1, se Mařenka už snadno rozhodne, které dva trojúhelníky budou obsahovat dvě strany původního mnohoúhelníku: jeden z nich bude obsahovat stranu ohodnocenou 1 a sousední stranu různou od 2, druhý zase naopak stranu ohodnocenou 2 a sousední stranu různou od 1. Tímto způsobem Mařenka dovede zaručit, že hodnota S nikdy nebude větší než $3 + 4 + \dots + (n - 2) + 1 \cdot (n - 1) + 2n = \frac{1}{2}(n^2 + 3n - 6)$.

Na druhé straně může Jeníček donutit Mařenku k volbě alespoň takové hodnoty S tím, že ve svém tahu označí strany mnohoúhelníku postupně čísly

$$1, n - 1, 4, n - 3, 5, n - 4, \dots, n - 2, 3, n, 2.$$

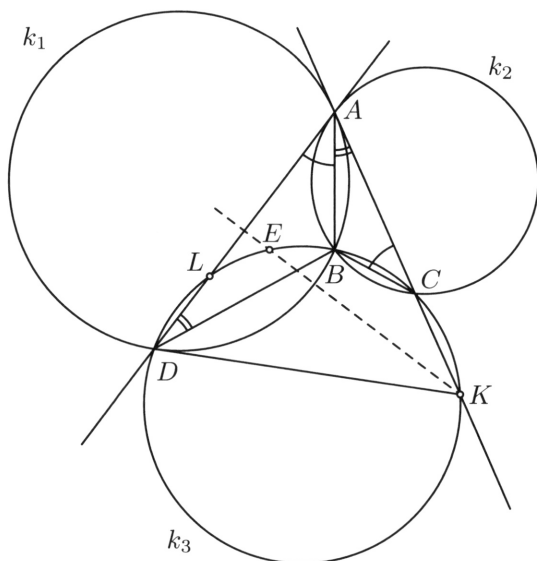
3. Přímka AD je tečnou kružnice k_2 , proto úsekový úhel DAB má stejnou velikost jako úhel BCA . Podobně $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle BDA|$. Proto

$$\begin{aligned} |\sphericalangle DBC| &= 360^\circ - |\sphericalangle DBA| - |\sphericalangle CBA| = \\ &= 2|\sphericalangle DAB| + 2|\sphericalangle CAB| = 2|\sphericalangle DAC|. \end{aligned} \quad (1)$$

Body D, L, E, B, C, K leží na kružnici k_3 . Abychom se vyhnuli diskusi více případů možného pořadí těchto bodů na kružnici, budeme používat orientované úhly. Symbolem $\widehat{XY}$ označíme velikost úhlu XZY takového, že bod Z leží na kružnici k_3 a body X, Z, Y jsou podél kružnice k_3 uspořádány proti směru otáčení hodinových ručiček. Jelikož bod E je středem oblouku CD , platí

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AKE| &= \widehat{EC} = \frac{1}{2}\widehat{DC} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{CD}) = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle DBC|) = \\ &= 90^\circ - |\sphericalangle DAC|. \end{aligned}$$

Proto přímka KE je kolmá na AD (obr. 45). Podobně přímka LE je kolmá na AC , bod E je tudíž průsečíkem výšek trojúhelníku KLA , a přímka AE je tedy kolmá na přímkou KL , což bylo třeba dokázat.



Obr. 45

Jiné řešení. Úhel BCA je shodný nejen s úhlem BAD , ale také s úhlem KDB (díky tětíkovému čtyřúhelníku $DKCB$). Z rovnosti $|\sphericalangle KDB| = |\sphericalangle BAD|$ ovšem plyne, že KD je tečnou kružnice k_1 stejně jako KA . Trojúhelník ADK je tedy rovnoramenný, přičemž KE je jeho osou, neboť pól jeho vnitřní úhel AKD , když bod E pól oblouk CD , což dohromady znamená, že bod E leží na osách obou úseček AD a CD . Jinými slovy bod E je středem kružnice opsané trojúhelníku ADC , takže bod E leží i na ose strany AC . Podobně zjistíme, že přímka LC je tečnou kružnice k_2 neboli že bod L leží na ose strany AC . To dohromady znamená, že přímky LE a KE jsou výškami v trojúhelníku ALK , a tudíž je i $AE \perp KL$, což jsme chtěli dokázat.

4. Označme d největšího společného dělitele čísel k a m . Pro vhodná celá čísla a a b platí $k = da$, $m = db$, přičemž a a b jsou nesoudělná a $a > b$. Číslo

$$\frac{km(k^2 - m^2)}{k^3 - m^3} = \frac{d^4 ab(a^2 - b^2)}{d^3(a^3 - b^3)} = \frac{dab(a + b)}{a^2 + ab + b^2}$$

je podle předpokladu ze zadání celé, proto $a^2 + ab + b^2 \mid dab(a + b)$. Z nesoudělnosti čísel a , b vyplývá, že $a^2 + ab + b^2$ je nesoudělné s a , b i $a + b$; první dvě nesoudělnosti jsou evidentní, třetí dostaneme pomocí Eukleidova algoritmu:

$$(a + b, a^2 + ab + b^2) = (a + b, a(a + b) + b^2) = (a + b, b^2) = 1.$$

Platí tedy $a^2 + ab + b^2 \mid d$, tudíž $d \geq a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab > 3ab$. Odtud

$$(k - m)^3 = d^3(a - b)^3 \geq d^3 > d^2 \cdot 3ab = 3km.$$

5. Po dosazení $y = 0$ dostaneme $x^2 f(0) = x^2$ pro každé reálné číslo x , proto $f(0) = 1$.

Zavedme novou funkci $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že $g(x) = f(x) - 1$, a přepišme danou rovnici s g namísto f :

$$y^2 g(x) + x^2 g(y) = xy g(x + y), \quad (1)$$

přičemž už víme, že $g(0) = 0$.

Každá funkce tvaru $g(x) = cx$ je pro libovolnou reálnou konstantu c řešením rovnice (1). Označme $h(x) = g(x) - g(1)x$. Ukážeme, že $h(x) = 0$ pro každé reálné číslo x .

Funkce h splňuje pro každou dvojici reálných čísel x, y rovnost

$$y^2 h(x) + x^2 h(y) = xy h(x + y); \quad (2)$$

navíc víme, že $h(0) = h(1) = 0$. Po dosazení $x = y = 1$ do (2) dostaneme $h(2) = 0$, po dosazení $x = -1, y = 1$ vyjde $h(-1) = 0$.

Připustíme, že existuje reálné číslo a takové, že $h(a) \neq 0$ (zjevně $a \neq 0$). Dosazením $x = 1, y = a + 1$ do (2) dostaneme $h(a + 1) = (a + 1)h(a + 2)$ a dosazením $x = 2, y = a$ do (2) dostaneme $2h(a) = ah(a + 2)$. Z těchto dvou různých vyjádření hodnoty $h(a + 2)$ vychází

$$\frac{h(a + 1)}{a + 1} = \frac{2h(a)}{a}. \quad (3)$$

Přitom z dosazení $x = 1, y = a$ do (2) vyplývá, že $h(a) = ah(a + 1)$, což spolu se vztahem (3) dává $a = -\frac{1}{2}$. Dosazení $x = y = -\frac{1}{2}$ do (2) nám však díky $h(-1) = 0$ prozradí, že $h(-\frac{1}{2}) = 0$, a to odporuje volbě čísla a .

Jedinými řešeními jsou tedy funkce $f(x) = cx + 1$ pro libovolné reálné číslo c , což snadno ověříme zkouškou.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení zavedeme funkci g a dokážeme, že $g(0) = 0$. Navíc dosazením $y = -x$ do (1) zjistíme, že $g(-x) = -g(x)$. Po dosazení $y = 1$ a $y = -1$ do rovnice (1) dostaneme

$$g(x) + x^2 g(1) = x g(x + 1), \quad (4)$$

$$g(x) + x^2 g(-1) = -x g(x - 1). \quad (5)$$

Přepíšeme-li vztah (5) s $x + 1$ namísto x , dostaneme spolu se vztahem (4) soustavu dvou rovnic s neznámými $g(x + 1), g(x)$. Ze soustavy vyjádříme $g(x)$:

$$g(x)(x^2 + x + 1) = g(1)x(x^2 + x + 1).$$

Protože číslo $x^2 + x + 1$ je vždy kladné, jedinou možností je $g(x) = g(1)x$, a tedy $f(x) = cx + 1$. Zkouškou ověříme, že taková funkce f dané rovnici vyhovuje pro každé reálné číslo c .

6. Zavedme substituci $a = 2x, b = 2y, c = 2z$. Chceme dokázat nerovnost

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}},$$

přičemž platí rovnost

$$\frac{1}{1 + 2x} + \frac{1}{1 + 2y} + \frac{1}{1 + 2z} = 1, \quad (1)$$

která vyplývá z dané podmínky po trojnásobném využití rovnosti

$$\frac{2t}{1+2t} = 1 - \frac{1}{1+2t}.$$

Dokazovaná nerovnost je symetrická, proto můžeme předpokládat, že $x \geq y \geq z$. Snadno nahlédneme, že pak

$$\frac{x-1}{2x+1} \geq \frac{y-1}{2y+1} \geq \frac{z-1}{2z+1} \quad (2)$$

a také

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x}} \geq \frac{2y+1}{\sqrt{y}} \geq \frac{2z+1}{\sqrt{z}}. \quad (3)$$

Nerovnosti (2) jsou ekvivalentní nerovnostem $x \geq y \geq z$, první z nerovností (3) pak snadno převedeme na nerovnost $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(2\sqrt{xy} - 1) \geq 0$. A kdyby bylo $2\sqrt{xy} < 1$ neboli $4xy < 1$, dostali bychom

$$\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} = \frac{2+2x+2y}{1+4xy+2x+2y} > 1,$$

což odporuje předpokladu (1). Stejně dokážeme i druhou nerovnost z (3).

Díky vztahům (2) a (3) můžeme použít Čebyševovu nerovnost:¹

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cykl.}} \frac{x-1}{\sqrt{x}} &= \sum_{\text{cykl.}} \frac{x-1}{2x+1} \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{3} \sum_{\text{cykl.}} \frac{x-1}{2x+1} \sum_{\text{cykl.}} \frac{2x+1}{\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\text{cykl.}} \frac{2x+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\text{cykl.}} \frac{2x+1-3}{2x+1} = 0. \end{aligned}$$

Jiné řešení (trigonometrické). Po substituci $x = 1/(a+1)$, $y = 1/(b+1)$, $z = 1/(c+1)$ je

$$\frac{a}{1+a} = 1-x, \quad \frac{b}{1+b} = 1-y, \quad \frac{c}{1+c} = 1-z,$$

takže platí $x+y+z=1$ a původní proměnné můžeme vyjádřit jako $a = (y+z)/x$, $b = (x+z)/y$, $c = (x+y)/z$. Chceme dokázat nerovnost

$$\sqrt{\frac{x+y}{2z}} + \sqrt{\frac{y+z}{2x}} + \sqrt{\frac{z+x}{2y}} \geq \sqrt{\frac{2x}{y+z}} + \sqrt{\frac{2y}{z+x}} + \sqrt{\frac{2z}{y+x}}.$$

¹ Zkráceným zápisem $\sum_{\text{cykl.}} V(x)$ rozumíme „cyklický“ součet $V(x) + V(y) + V(z)$.

Tato nerovnost platí pro všechny trojice kladných reálných čísel x, y, z . Dokážeme to tak, že nejprve obě strany nerovnosti vynásobíme součinem tří (kladných) sčítanců z její levé strany; dostaneme tak ekvivalentní cyklickou nerovnost

$$\sum_{\text{cykl.}} \frac{x+y}{2z} \sqrt{\frac{y+z}{2x} \cdot \frac{z+x}{2y}} \geq \sum_{\text{cykl.}} \sqrt{\frac{y+z}{2x} \cdot \frac{z+x}{2y}}. \quad (1)$$

Provedme substituci $p = x + y$, $q = y + z$, $r = z + x$. Čísla p, q, r jsou pak délkami stran trojúhelníku a můžeme psát $p = 2R \sin \alpha$, $q = 2R \sin \beta$, $r = 2R \sin \gamma$, kde R je poloměr opsané kružnice a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Tři analogické zlomky z poslední nerovnosti pak mají vyjádření, která odvodíme pouze pro první z nich:

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2z} &= \frac{p}{q+r-p} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha}{2 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma) - 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha} = \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma) - \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma)} = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{2 \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma}, \end{aligned}$$

kde jsme při poslední úpravě využili vzorec pro rozdíl dvou kosinů. Díky těmto třem vyjádřením platí pro odmocniny ze součinu vždy dvou z dané trojice zlomků vzorce, které odvodíme pouze pro jednu z nich:

$$\sqrt{\frac{y+z}{2x} \cdot \frac{z+x}{2y}} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} \beta}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \gamma} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta}} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha}.$$

Po dosazení do (1) vidíme, že je naším úkolem dokázat nerovnost

$$\sum_{\text{cykl.}} \frac{1}{4 \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma} \geq \sum_{\text{cykl.}} \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha},$$

která po vynásobení výrazem $4 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma$ získává tvar

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \geq 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

neboli

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} &\geq \\ &\geq \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right)^2 - \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

Jelikož díky Cauchyově nerovnosti platí

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{1}{3} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right)^2,$$

stačí místo nerovnosti, kterou máme dokázat, ověřit silnější nerovnost

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \geq \frac{2}{3} \cdot \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right)^2.$$

Tu po vydělení levou stranou ještě zjednodušíme na

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Poslední už plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci sinus, jež je na intervalu $(0, \pi)$ konkávní:

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq 3 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{6} = 3 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$

7. Množina

$$S = (\{1\} \times \{2, \dots, n\}) \cup (\{2, \dots, n\} \times \{1\})$$

má $2n - 2$ prvků a žádné tři její body netvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku. Ukážeme, že každá vyhovující množina S má nejvýše $2n - 2$ prvků.

Vezměme vyhovující množinu S . Označme S_1 množinu těch bodů (x, y) z S , které mají unikátní první souřadnici, tj. v S není žádný bod (x, y') pro $y' \neq y$. Podobně označme S_2 množinu bodů z S s unikátní druhou souřadnicí.

Nejprve sporem dokážeme, že $S = S_1 \cup S_2$. Kdyby totiž nějaký bod P patřil do S , ale nepatřil by ani do jedné z množin S_1 nebo S_2 , našli bychom k němu bod P_x se stejnou první souřadnicí i bod P_y se stejnou druhou souřadnicí. Takové tři body P, P_x, P_y však tvoří pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu P .

Pokud $|S_1| = n$, je $S = S_1$, potom však množina S má n prvků, a to je pro každé $n \geq 3$ méně než $2n - 2$. Podobně se vypořádáme s množinami S , pro něž $|S_2| = n$. V každém jiném případě však $|S_1| \leq n - 1$ a $|S_2| \leq n - 1$, množina S má tedy nejvýše $2n - 2$ prvků.

8. Jazyky budeme volit náhodně a ukážeme, že pravděpodobnost příznivé volby je kladná. Z toho ovšem plyne, že existuje požadovaná volba jazyků.

Nechť $p \in [0, 1]$. Každý jazyk bude zvolen s pravděpodobností p ; volby pro jednotlivé jazyky jsou nezávislé. (Formálně: elementární událostí je n -tice $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, kde $a_i = 1$, pokud i -tý jazyk byl zvolen, jinak $a_i = 0$; je-li k počet jednotek v elementární události ω , je její pravděpodobnost rovna $p^k(1-p)^{n-k}$.)

Budeme zkoumat dvě náhodné veličiny A a B , kde A označuje počet zvolených jazyků a B počet účastníků, jejichž všechny tři jazyky byly zvoleny. Vypočítáme střední hodnoty těchto dvou veličin:

$$E(A) = \sum_{\text{jazyk } l} 1 \cdot P(\text{zvolili jsme jazyk } l) = np,$$

$$E(B) = \sum_{\text{student } s} P(\text{všechny jazyky studenta } s \text{ jsou zvoleny}) = 3n \cdot p^3.$$

Dále využijeme nerovnost

$$P(X \geq E(X)) > 0,$$

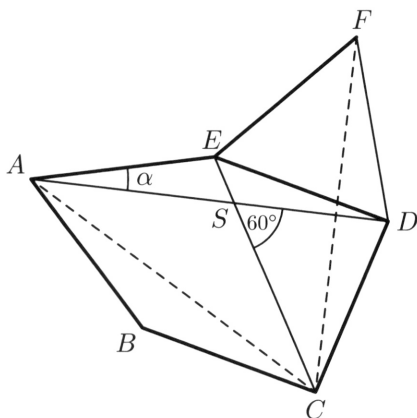
která evidentně platí pro každou náhodnou veličinu X . V našem případě pro $X = A - B$ dostáváme, že

$$P(A - B \geq np - 3np^3) > 0.$$

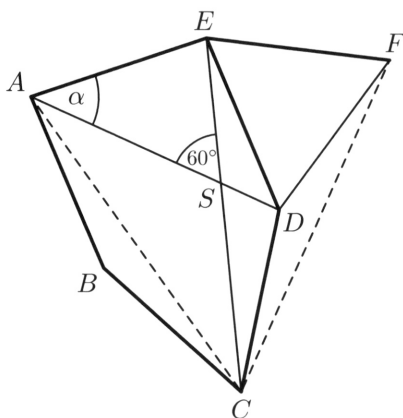
Odtud plyne, že existuje volba jazyků (tj. elementární událost ω) taková, že $A(\omega) - B(\omega) \geq np - 3np^3$. Pro tuto volbu můžeme ze zvolených jazyků odstranit jeden jazyk za každého z účastníků, pro kterého byly zvoleny všechny tři jazyky, jimiž hovoří, a stále zůstane alespoň $A - B$ jazyků. Pro $p = \frac{1}{3}$ je však $A - B \geq \frac{2}{3}n$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

9. Označme α velikost úhlu EAD . Stejnou velikost má i úhel EDA , a z dané velikosti $|\sphericalangle ASE| = 60^\circ$ snadno dopočítáme $|\sphericalangle AEC| = 120^\circ - \alpha$ a $|\sphericalangle DEC| = 60^\circ - \alpha$. Označme F obraz bodu A v osově souměrnosti podle přímky CE . Úhel FED má velikost $(120^\circ - \alpha) - (60^\circ - \alpha) = 60^\circ$, a protože $|EF| = |EA| = |ED|$, je trojúhelník DEF rovnostranný. Rovnoramenné trojúhelníky ABC a FDC jsou tedy shodné podle věty *sss*.

Pokud se bod D nachází mimo trojúhelník ACF (obr. 46), jsou body B a D souměrně sdruženy podle přímky CE , a proto $|EB| = |ED|$, takže čtyřúhelník $BCDE$ je kosočtverec a $BC \parallel DE$.



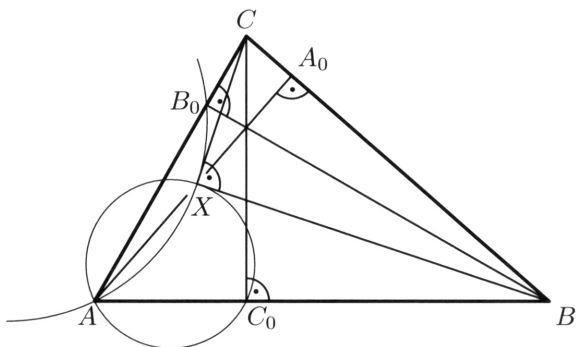
Obr. 46



Obr. 47

Pokud bod D leží v trojúhelníku ACF (obr. 47), jsou body C a F souměrně sduženy podle osy AD , protože úhly ADC i ADF mají velikost $60^\circ + \alpha$ (využili jsme, že $|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle CED| = 60^\circ - \alpha$). Potom však $|AF| = |AC|$, takže trojúhelníky ABC a AEF jsou shodné. Bod E musí ležet mimo trojúhelník ACF , jinak by pětiúhelník $ABCDE$ nebyl konvexní. Ze shodnosti trojúhelníků ABC a AEF pak plyne, že body B a E jsou souměrně sduženy podle přímky AD . Proto $|DB| = |DE|$, tudíž čtyřúhelník $ABDE$ je kosočtverec a platí $AB \parallel DE$.

10. Dotyk přímky s kružnicí můžeme popsat pomocí mocnosti bodu ke kružnici. V našem případě z mocnosti bodu B ke kružnici opsané trojúhelníku AXC_0 plyne $|BX|^2 = |BA| \cdot |BC_0|$. Podobně $|CX|^2 = |CA| \cdot |CB_0|$. Označme A_0 patu výšky z vrcholu A (obr. 48). Čtyřúhelník ACA_0C_0 je



Obr. 48

tětivový, proto pro mocnost bodu B k opsané mu kružnici platí $|BA| \cdot |BC_0| = |BA_0| \cdot |BC|$; podobně dostaneme $|CA| \cdot |CB_0| = |CA_0| \cdot |CB|$. Dohromady tak máme

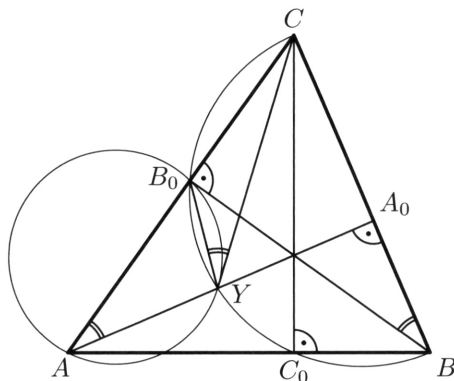
$$\begin{aligned} |BX|^2 + |CX|^2 &= |BA| \cdot |BC_0| + |CA| \cdot |CB_0| = \\ &= |BA_0| \cdot |BC| + |CA_0| \cdot |BC| = |BC|^2, \end{aligned}$$

tj. úhel BXC je pravý (obr. 48). Navíc z rovnosti $|BX|^2 = |BA_0| \cdot |BC|$ podle Eukleidovy věty o odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku BXC vyplývá, že bod A_0 je patou výšky z vrcholu X na přeponu BC . Jinak řečeno, přímky AA_0 a XA_0 jsou totožné, proto je přímka AX kolmá na přímku BC .

Jiné řešení. Z mocností bodů B a C k uvažovaným kružnicím dostáváme

$$|BX|^2 = |BA| \cdot |BC_0|, \quad |CX|^2 = |CA| \cdot |CB_0|.$$

V daném trojúhelníku ABC tyto rovnosti jednoznačně určují vzdálenosti bodu X od vrcholů B a C , a protože o bodu X předpokládáme, že je vnitřním bodem ostroúhlého trojúhelníku, je tím takový bod X jednoznačně určen. Ukážeme, že požadované vlastnosti má průsečík Y výšky trojúhelníku ABC z vrcholu A s Thaletovou kružnicí nad průměrem BC (obr. 49). Tím bude tvrzení úlohy dokázáno.



Obr. 49

Čtýřúhelník BCB_0Y je tětivový, proto $|\sphericalangle CBB_0| = |\sphericalangle CYB_0|$. Potom $|\sphericalangle CAY| = 90^\circ - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CBB_0| = |\sphericalangle CYB_0|$, a podle věty o úsekovém úhlu se přímka CY dotýká kružnice opsané trojúhelníku AYB_0 .

Analogicky můžeme ukázat, že se přímka BY dotýká kružnice opsané trojúhelníku AYC_0 , takže bod Y má obě vlastnosti určující bod X .

11. Stačí ukázat, že existují $a \in A$ a $b \in B$, pro něž $a \equiv 2b \pmod{11}$, protože pro taková a, b platí

$$a^3 + ab^2 + b^3 \equiv 8b^3 + 2b^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Podle zadání je množina $A \cup B$ tvořena právě všemi nenulovými zbytky modulo 11. Zvolme nějaké $c \in B$. Čísla $c, 2c, 2^2c, \dots, 2^9c$ dávají vesměs různé nenulové zbytky modulo 11, z nichž aspoň jeden musí patřit do množiny A (ta je neprázdná). Je-li k nejmenší takové, že zbytek čísla $2^k c$ je v B a zbytek $2^{k+1} c$ je v A , bude pro $b \equiv 2^k c$ zřejmě platit $a \equiv 2^{k+1} c \equiv 2b$.

12. Zvolme nejprve čísla $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$ tak, aby čísla

$$y_1 = x_1^2(x_1 + 2), \quad y_2 = x_2^2(x_2 + 2), \quad \dots, \quad y_{2011} = x_{2011}^2(x_{2011} + 2)$$

byla navzájem nesoudělná. Můžeme například vzít $x_1 = 1$ a pak postupně volit $x_i = y_1 y_2 \dots y_{i-1} - 1$ pro každé $i \in \{2, 3, \dots, 2011\}$. Takto zvolené číslo x_i zabezpečí, že y_i bude nesoudělné se všemi předchozími čísly $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}$.

Důvod volby čísel x_i spočívá v tom, že každé číslo dělitelné číslem tvaru $x^2(x + 2)$ je úžasné. Opravdu, pokud $n = x^2(x + 2)m$, pak pro $a = mx^2, b = mx$ a $c = x$ platí požadovaná rovnost.

Jelikož čísla $y_1, y_2, \dots, y_{2011}$ jsou navzájem nesoudělná, podle čínské zbytkové věty existuje přirozené číslo k takové, že

$$k \equiv -i \pmod{y_i} \quad \text{pro každé } i \in \{1, 2, \dots, 2011\}.$$

Číslo $k + i$ je pak dělitelné číslem y_i pro každé $i \in \{1, 2, \dots, 2011\}$. Čísla $k+1, k+2, \dots, k+2011$ jsou podle předchozího odstavce všechna úžasná, a tvoří tak hledaných 2011 po sobě jdoucích úžasných čísel.

18. střeoevropská olympiáda v informatice



Střeoevropská olympiáda v informatice (CEOI 2011) se konala ve dnech 7.–12. 7. 2011 v polském městě Gdyně.

Vedle sedmi tradičních účastnických střeoevropských států (Česká republika, Chorvatsko, Maďarsko, Německo, Polsko, Rumunsko, Slovensko) se jako hosté zúčastnila také družstva ze Slovinska a Švýcarska. Jako obvykle soutěžilo i druhé družstvo pořadatelské země. Celkem se soutěže zúčastnilo 39 studentů z 9 zemí.

Reprezentační družstvo České republiky bylo sestaveno na základě výsledků dosažených soutěžícími v ústředním kole kategorie P 60. ročníku Matematické olympiády. Na celosvětovou soutěž IOI 2011 v Thajsku byli vysláni čtyři nejlepší studenti z ústředního kola, na střeoevropskou olympiádu byli vybráni další čtyři studenti, kteří ještě nebyli v maturitním ročníku. Naši mladší soutěžící tak dostali příležitost získat na CEOI cenné zkušenosti, které mohou následně využít při případné reprezentaci České republiky na IOI v dalším roce. 18. střeoevropské olympiády v informatice se zúčastnili tito studenti:

Vojtěch Hlávka, student gymnázia a ZUŠ ve Šlapanicích,
Martin Raszyk, student gymnázia v Karvině,
Štěpán Šimsa, student gymnázia v Litoměřicích,
Martin Zikmund, student gymnázia v Turnově.

Vedoucími české delegace byli jmenováni doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc., a Bc. *Josef Pihera*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Naši účastníci obou mezinárodních informatických olympiád se již tradičně připravovali na svoji soutěž společně s reprezentanty Polska a Slovenska na týdenním soustředěním CPSPC (Czech-Polish-Slovak Preparation Camp). Akci tentokrát připravili slovenští organizátoři.

Soutěž CEOI 2011 se tradičně uskutečnila v průběhu dvou soutěžních dnů. V každém dni soutěžící řešili tři úlohy, na které měli vždy pět hodin času. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat

programy a odesílat je k vyhodnocení. Výsledné programy jsou testovány pomocí připravené sady testovacích dat a se stanovenými časovými limity. Tím je zajištěna nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší testy. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů. Večer před soutěží vedoucí všech delegací společně vyberou soutěžní úlohy z návrhů předložených pořadatelskou zemí, upraví podle potřeby jejich formulace a přeloží je pak do mateřského jazyka studentů. Čeští studenti tedy dostali jak anglickou, tak i českou verzi zadání úloh. Kromě vlastní soutěže je pro účastníky CEOI vždy připravován i doprovodný program. Letos měli účastníci možnost prohlédnout si nejen Gdyni, ale prošli si také blízké lázeňské město Sopoty a přístav Gdaňsk. Po skončení soutěže jeli všichni účastníci na celodenní společný výlet spojený s prohlídkou rozsáhlého gotického hradu Malbork a s jízdou historickou parní železnici.

Poslední den proběhlo slavnostní zakončení soutěže s vyhlášením výsledků. Každá ze soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkově bylo teoreticky možné získat až 600 bodů. Vítězem se stal polský reprezentant Krzysztof Pszeniczny, který dosáhl výsledku 550 bodů. Letos bylo uděleno 5 zlatých, 7 stříbrných a 13 bronzových medailí. Tři zlaté medaile získali soutěžící z Polska, kteří však měli určitou výhodu v tom, že jako pořadatelská země mělo Polsko v soutěži dvě soutěžní družstva. Středoevropská olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno.

Naši studenti dosáhli následujících výsledků:

22. Martin Zikmund	180 bodů	bronzová medaile
27. Štěpán Šimsa	158 bodů	–
30. Martin Raszyk	128 bodů	–
36. Vojtěch Hlávka	72 bodů	–

Veškeré informace o soutěži, texty soutěžních úloh i podrobné výsledky všech medailistů lze nalézt na internetové adrese

<http://ceoi2011.mimuw.edu.pl/>.

Zástupci Slovinska projevíli zájem stát se řádnými členy CEOI a slíbili uspořádat soutěž v roce 2014.

23. mezinárodní olympiáda v informatice

Dvacátý třetí ročník Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2011 se konal ve dnech 22.–29. 7. 2011 ve městě Pattaya v Thajsku.

Olympiády se zúčastnilo 81 delegací z celého světa. Z každé země se IOI mohou zúčastnit čtyři soutěžící a dva vedoucí, celkově letos soutěžilo 302 studentů. České družstvo bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola 60. ročníku Matematické olympiády – kategorie P a bylo tvořeno těmito studenty:



Lukáš Folwarczný, student gymnázia v Havířově,
Filip Hlásek, absolvent gymnázia v Plzni, Mikulášském nám.,
Hynek Jemelík, absolvent gymnázia v Brně na tř. Kpt. Jaroše,
Jakub Zíka, absolvent gymnázia v Praze 6, Nad Alejí.

Vedoucími české delegace na IOI 2011 byli jmenováni Mgr. *Zbyněk Falt* z MFF UK a Mgr. *Jan Bulánek* z MFF UK a Matematického ústavu AV ČR.

Již tradičně se naši účastníci IOI připravovali na olympiádu společně s reprezentanty vybranými pro Středoevropskou olympiádu v informatice na týdenním soustředěním CPSPC (Czech-Polish-Slovak Preparation Camp). Přípravné soustředění bylo letos pořádáno v Modre-Harmonii na Slovensku a zúčastnili se ho vybraní studenti ze všech tří zemí.

Během prvního dne pobytu v Thajsku proběhlo slavnostní zahájení soutěže a studenti měli také příležitost seznámit se podrobně s počítači a se softwarovým prostředím, v němž budou při soutěži pracovat. Vlastní soutěž se konala jako obvykle ve dvou dnech, oddělených jedním odpočinkovým dnem, který byl věnován výletu do botanické zahrady Nong Nooch. Po druhém soutěžním dnu následoval druhý odpočinkový den, během kterého byl pro soutěžící uspořádán výlet do muzea Ancient City a pro ostatní členy delegací výlet do Bangkoku. Při cestě zpět z Thajska

byl bohužel zrušen náš navazující let z Paříže, takže se cesta nepříjemně protáhla o jeden den.

Soutěž IOI probíhá podobným způsobem, jako praktická část ústředního kola naší kategorie P. Každý soutěžící má přidělen osobní počítač, na kterém řeší zadané úlohy. V každém dni má na práci vymezen čas 5 hodin. Úlohy je třeba dovést až do tvaru odladěného programu, hotové programy se odevzdávají k vyhodnocení prostřednictvím soutěžního prostředí. Odevzdané programy se testují pomocí předem připravené sady testovacích dat. Prováděné testy jsou navíc omezeny časovými a paměťovými limity, aby se kromě otestování správnosti odlišila časová i paměťová efektivita algoritmu použitého jednotlivými účastníky soutěže. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší testy. Takové řešení je potom ohodnoceno dílčím počtem bodů. Stejně jako v loňském roce měli soutěžící možnost nechat si průběžně vyhodnocovat svoje řešení, takže již během soutěže si mohli soutěžící ověřit, kolik bodů za něj získají. Divákům (ale nikoli soutěžícím) pak byla k dispozici i průběžná výsledková listina. Jedná se o podobný systém, jaký používáme v posledních letech v kategorii P Matematické olympiády pro praktické úlohy domácího kola u nás. Krátce po odevzdání vypracovaného programu do vyhodnocovacího systému se soutěžící dozví hodnocení svého řešení a má pak ještě možnost jej opravit a odevzdat znovu.

Rovněž bylo zachováno rozdělení úloh do několika podúloh, lišících se velikostmi vstupních dat či omezeními na jejich strukturu. Za každou takovou podúlohu bylo možné získat body pouze tehdy, když program odpověděl na všechny její testovací vstupy korektně a v daném časovém limitu. Jedna z podúloh každé úlohy byla záměrně velmi jednoduchá. Soutěžící z programátorsky méně vyspělých zemí tak dostali velmi reálnou šanci vyřešit každý den aspoň část z každé úlohy. Změnou oproti loňskému ročníku bylo snížení počtu úloh zadaných během jednoho soutěžního dne ze čtyř na tři. Tradičně byla jedna z úloh jednodušší než ostatní, aby ji i méně zdatní účastníci mohli vyřešit. Skutečnost, že součástí každé úlohy je několik velmi jednoduchých podúloh, způsobila, že ztratilo smysl zadávat zmíněnou snazší úlohu.

Každá z šesti soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže nejvyšší počet bodů, který bylo možné získat, je 600. Na základě přesně stanovených pravidel se na IOI podle dosažených bodů rozdělují medaile. Některou z medailů obdrží nejvýše polovina účastníků soutěže,

příčemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují přibližně v poměru 1 : 2 : 3 (s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili). Na letošní IOI bylo rozděleno celkem 27 zlatých, 49 stříbrných a 75 bronzových medailí.

Výsledky našich soutěžících:

30. Filip Hlásek	467 bodů	stříbrná medaile
50. Hynek Jemelík	419 bodů	stříbrná medaile
66. Jakub Zíka	391 bodů	stříbrná medaile
177. Lukáš Folwarczný	242 bodů	–

Zisk tří stříbrných medailí pro Českou republiku je mimořádný úspěch. Mezinárodní olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců a žádné pořadí zúčastněných zemí v ní scie není vyhlašováno, ale v neoficiálním pořadí zemí by se letos Česká republika podle celkového počtu bodů umístila na 16. místě.

Všechny podrobnosti o soutěži, texty soutěžních úloh i jejich řešení a celkové výsledky lze nalézt na Internetu na adrese

<http://www.ioi2011.or.th/>.

Příští ročníky IOI se budou konat v Itálii (2012), Austrálii (2013), na Tchaj-wanu (2014) a v Kazachstánu (2015). Pořadatelská země pro rok 2016 dosud nebyla vybrána. Pořadatelé IOI 2012 z Itálie na místě pozvali všechny delegace zúčastněné na IOI 2011, aby se zúčastnily také následujícího ročníku soutěže. Ten proběhne ve dnech 22.–29. 9. 2012 ve městě Sirmione.

Mgr. Zdeněk Dvořák, Ph.D., Mgr. Zbyněk Falt,
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Mgr. Peter Novotný, Mgr. Martin Panák, Ph.D.,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.,

**ŠEDESÁTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydala Univerzita Palackého v Olomouci,
Biskupské nám. 1, 771 11 Olomouc
Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil Karel Horák
Vytisklo Polygrafické středisko
Univerzity Palackého v Olomouci
1. vydání
Olomouc 2015

ISBN 978-80-244-4482-6

**matematická
olympiáda**

MO

ISBN 978-80-244-4482-6

ISBN 978-80-244-4482-6

