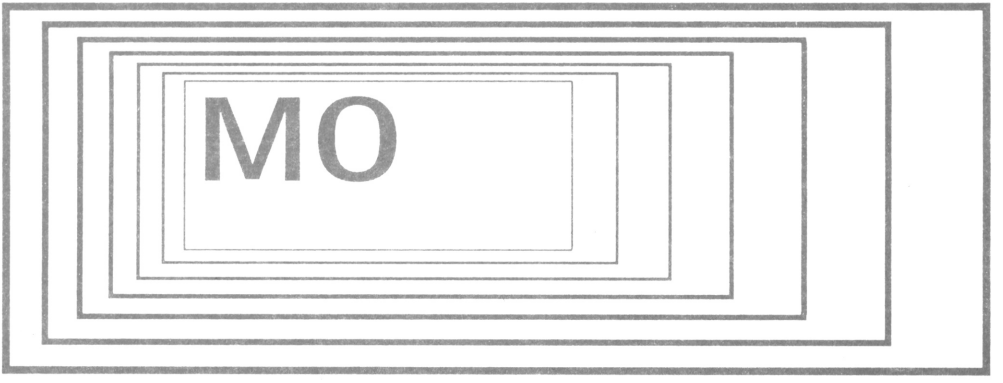
[dokumenty-10] 40 let matematické olympiády (v Československu)



1950 – 1991

40 let
matematické olympiády

(v Československu)

40 let
matematické
olympiády

(v Československu)

za přispění autorů

edičně zpracoval Karel Horák

Jednota českých matematiků a fyziků

Praha 1993

ISBN 80-7015-396-2

Předmluva

V roce 1991 skončil v naší republice 40. ročník matematické olympiády, první předmětové olympiády na našich školách. Podobně jako při 30. výročí vzniku této zajímavé soutěže se i nyní snažil ústřední výbor MO vydat brožurku věnovanou tomuto kulatému jubileu. Rozhodli jsme se věnovat její obsah především úlohám a jejich řešením, a to jednak úlohám samotné MO, jednak úlohám různých korespondenčních seminářů, matematických soustředění apod. Přitom jsme se snažili, aby se uplatnily úlohy pro různé věkové kategorie. Můžete posoudit sami, zda se nám to podařilo.

Jak jsem uvedl, brožurka je věnována úlohám a vzorovým řešením. Nemohu se však v této předmluvě nezmínit o RNDr. Františku Zítkovi, CSc., který převzal v roce 1983 funkci předsedy ÚV MO a vykonával ji až do své náhlé smrti v roce 1988. V matematické olympiádě však pracoval již od roku 1961 a vedl československé družstvo na 18 mezinárodních matematických olympiádách, naposledy v letech 1987 a 1988 na Kubě a v Austrálii. Byl autorem celé řady úloh pro MO, většinou geometrických. Pro edici Škola mladých matematiků napsal brožurku Vytvořující funkce, rukopis další už bohužel nedopsal. Dr. Zítek dosáhl významných vědeckých výsledků ve svém oboru — v teorii pravděpodobnosti a v matematické statistice — pro nás zůstane však jeho jméno spojeno především s matematickou olympiádou.

S novým školním rokem jsme vstoupili do další desítky let MO. Chceme zachovat dosavadní úroveň této soutěže, zaměřit se hlavně na její kvalitu, ne již tak na masovou účast. Přes ekonomické potíže, neujasněnost další organizační struktury MO po zrušení krajů a menší podporu ze strany ministerstva školství věříme, že se podaří matematickou olympiádu udržet. Dáme tím mnoha žákům a studentům možnost naučit se z matematiky něco navíc, prokázat své výborné matematické znalosti a schopnosti a dosáhnout prvních úspěchů v matematice. Jsme si vědomi, že těžiště práce pro matematickou olympiádu spočívá na učitelích základních a středních škol, že jedinou odměnou je jim úspěch jejich žáků. Již předem proto děkujeme všem učitelům, kteří svým žákům umožní se MO zúčastnit, povzbudí je a podpoří.

Leo Boček

Pikomat

Vladimír Burjan
(Bratislava)

Ak vám slovo PIKOMAT neznie príliš slovensky, nemýlite sa. Je to totiž skratka súťaže, ktorej neskrátený názov znie PIoniersky KOrešpondenčný MATematický seminár. K tomuto názvu si dovolíme dve malé poznámky. Prívlastok „pioniersky" bol povinnou daňou režimu, v ktorom seminár na jeseň roku 1983 vznikol, ale aj jednému z hlavných sponzorov súťaže bývalému Socialistickému zväzu mládeže a jeho Pionierskej organizácii. Dnes už je síce neaktuálny, ale organizátorom súťaže sa do zmeny skratky akosi nechce — príliš sa vžila. Druhá poznámka má charakter skoro gramatický: pôvodne bolo slovo PIKOMAT vlastným menom — označovalo jediný seminár pre žiakov 7. a 8. ročníkov základných škôl v Bratislave a Západoslovenskom kraji. Myšlienka takejto súťaže sa však prekvapujúco rýchlo šírila a obdobné semináre začali pracovať v ďalších krajoch a okresoch, najmä v Čechách a na Morave. V niekoľkých prípadoch ich organizátori prevzali nielen organizáciu súťaže a úlohy, ale aj jej názov — PIKOMAT. A tak sa v niektorých rokoch stalo, že PIKOMATov bolo v Československu niekoľko a z pôvodného vlastného mena sa tak stalo všeobecné podstatné meno, označujúce jednu z foriem starostlivosti o žiakov prejavujúcich záujem o matematiku.

Začiatky PIKOMATu v septembri 1983 boli spojené so špeciálnymi triedami so zameraním na matematiku na Gymnáziu A. Markuša v Bratislave. V nich sa sústreďovali nadaní žiaci z Bratislavy a Západoslovenského kraja, aby tu rozvíjali svoj matematický talent. Každoročne boli do matematických tried vyberaní na základe osobitnej talentovej skúšky. A práve snaha prilákať na tieto skúšky čo najviac šikovných mladých matematikov a potenciálnych výborných žiakov školy, bola tým prvotným impulzom, ktorý priviedol organizátorov na myšlienku korešpondenčného seminára pre žiakov základných škôl. (Pre historikov však upresnime, že táto myšlienka bola už v tom čase pomerne stará. Podľa našich informácií k nám prišla zo Sovietského zväzu a ako prvý sa zrodil korešpondenčný seminár pre stredoškolákov vo východoslovenskom kraji. Neskôr pribudli ďalšie a v r. 1980 začal pracovať korešpondenčný seminár pre žiakov základných škôl v stredoslovenskom kraji.) Tento konkrétny cieľ — prilákať do matematických tried kvalitných žiakov ovplyvnil aj vekovú kategóriu, ktorej bol a je PIKOMAT určený, ako aj územie, ktoré pokrýva. Toto sa dodnes takmer nezmenilo: súťažia siedmaci a ôsmaci, občas sa pridá zopár mimoriadne šikovných šiestakov (pre ktorých je však súťaž veľmi ťažká). Zapájajú sa aj žiaci z iných krajov, no iba výnimočne, ako hostia — dnes už má totiž na Slovensku každý žiak ZŠ i SŠ možnosť riešiť vlastný krajský korešp. seminár.

Samotná súťaž prebieha obdobne ako všetky ostatné semináre — odchýlky sú snáď iba v niektorých podrobnostiach. Preto iba stručne: záujemci (ktorých počet z roka na rok kolíše okolo 200 – 400) dostávajú poštou domov (zhruba v šesťtýždenných intervaloch) sady 4 – 5 úloh. Tieto majú do stanoveného termínu vyriešiť, podrobne napísať riešenia (a to nielen výsledky, ale aj celý postup riešenia s odôvodnením jednotlivých krokov) a tieto zaslať organizátorom. Tí riešenia opravujú, pričom jednotlivým žiakom vyznačia v ich postupoch prípadné chyby a pripíšu k nim poznámky, komentáre, ale aj pochvalu, ak ide o pekné, originálne riešenie. Opravené riešenia sa poštou vracajú naspäť účastníkom, pričom každý zároveň dostane vzorové riešenia úloh a podrobnú výsledkovú listinu, z ktorej môže zistiť, ako si s jednotlivými úlohami poradili ostatní účastníci seminára a aké je jeho priebežné umiestnenie.

Takéto série prebehnú zväčša tri v období od septembra do januára a ďalšie tri od februára do júna. Po každých troch sériách úloh (teda vo februári a v júni) sa koná 5–6denné sústredenie, na ktoré je za odmenu (a teda bezplatne) pozvaných 30 až 40 najúspešnejších riešiteľov uplynulého obdobia. Tu majú možnosť osobne spoznať svojich najvážnejších konkurentov v rebríčku, ale najmä samotných organizátorov súťaže a opravovateľov ich riešení. Preto sa tu často vedú diskusie a polemiky nad opravenými riešeniami z predchádzajúcich sérií: žiaci môžu osobne vysvetliť „ako to v tom riešení mysleli“ a opravovatelia môžu dôkladnejšie objasniť, kde tá úvaha alebo riešenie „malo háčik“.

Program týchto sústredení je veľmi pestrý. Matematika je tu podávaná zábavnou, motivačnou formou prostredníctvom rôznych rozprávok, matematických hier a súťaží i večerných besied. Okrem toho sa veľa športuje, hrajú sa rôzne kolektívne hry v klubovni, v lese, na lúke, vo dne i v noci. Nacvičuje sa divadlo, spieva sa pri táboráku, vedú sa vášnivé diskusie o nekonečnosti vesmíru, prenášaní myšlienok, dejinách matematiky, pozitívach a negatívach jednotlivých povolaní a vôbec o všetkom, čo deti tohto veku zaujíma. Program týchto sústredení je zväčša mimoriadne nabitý. Pre organizátorov je to síce veľmi náročné na prípravu i samotnú realizáciu, účinok je však značný: sústredenia pôsobia silno motivačne a vidina možnosti zúčastniť sa ešte raz (alebo dokonca niekoľkokrát) na obdobnom sústredení je silným stimulom pre žiakov pri riešení ďalších sérií úloh seminára.

Spomenuli sme jeden z cieľov, ktorý viedol skupinu poslucháčov MFF UK k založeniu PIKOMATu: skvalitniť príliv uchádzačov o štúdium v matematických triedach v Bratislave. Tento cieľ PIKOMAT od zaačiatku veľmi dobre plnil a dodnes plní: v niektorých rokoch viac než polovica žiakov prijatých do matematických tried pochádzala spomedzi riešiteľov PIKOMATu. Tí sami priznávali jeho vplyv: buď sa o existencii matematických tried dozvedeli na niektorom zo sústredení, alebo tu dozrelo ich rozhodnutie skúsiť šťastie na talentových skúškach (často pod vplyvom podobného rozhodnutia niektorých iných riešiteľov PIKOMATu).

Korešpondenčných matematických seminárov pre žiakov základných i stredných škôl dnes pracuje na Slovensku mnoho. Zväčša sa ich priebeh podobá na to, čo sme napísali o PIKOMATe. Jedným z vhodných „rozlišovacích znakov“ jednotlivých seminárov sú zadávané úlohy. Organizátori seminára musia pri ich výbere zvoliť istú náročnosť, musia sa rozhodnúť pre istý typ úloh (úlohy školského typu, úlohy typu matematickej

olympiády, netradičné úlohy, hlavolamy či hádanky, a pod.), pre istú formu zadávania úloh, zvoliť ich počet, tématiku, prípadnú nadväznosť a mnoho ďalších parametrov. Niekedy sú úlohy pôvodné, inokedy čerpané z rôznych (často zahraničných zdrojov). Toto všetko ovplyvňuje celkovú kvalitu seminára a dodáva mu istú osobitosť, ktorou sa odlišuje od všetkých ostatných. Preto bude asi najcennejšou informáciou, keď uvedieme na ukážku niekoľko úloh, ktoré boli zadané riešiteľom PIKOMATu v uplynulých 7 rokoch.

Úlohy

1. Krivý stôl.

Stolár mal vyrobiť obdĺžnikový stôl rozmerov 100 × 160 cm s nohami dlhými 100 cm. Prvá noha sa mu podarila presne. Keď však rezal k nej protiľahlú, pošmykla sa mu ruka a odrezal ju len 96 cm dlhú. Tretiu spravil o čosi dlhšiu, ale iba 97 cm. Zistite, akú dlhú má spraviť štvrtú nohu, aby stôl stál na všetkých štyroch nohách a aby sa nekýval. (Predpokladáme, že všetky štyri nohy sú kolmé na dosku stola. To, že stôl bude stáť nakrivo, nevadí.)

2. Najväčší súčin.

Napíšte číslo 100 ako súčet niekoľkých prirodzených čísel (počet sčítancov si zvoľte sami) tak, aby súčin týchto čísel bol čo najväčší. (Poznámka: sčítance nemusia byť navzájom rôzne.)

3. Krabica plná gúľ.

Koľko rovnakých gúľ s priemerom 10 cm možno uložiť do krabice s rozmermi 100 × 100 × 10 cm, ak ukladáme iba do jednej vrstvy?

4. Ako najlepšie zbohatnúť?

Hrací automat PIKOTRON funguje nasledovne: po zapnutí sa na jeho obrazovke objaví číslo 1. Od tejto chvíle možno do neho hádzať korunové mince: ak sa vhodia dve mince, automat pripočíta k číslu na obrazovke 3, ak sa vhodí päť mincí, automat vynásobí číslo na obrazovke dvomi. Tieto úkony možno ľubovoľne striedať a kombinovať. Keď nás hra omrzí, stačí stlačiť tlačidlo s nápisom „KONIEC" a z automatu sa vysype toľko peňazí, aké číslo je práve na jeho obrazovke. Predstavte si, že ste prišli k tomuto automatu so 40 korunami vo vrecku a nesmiernou túžbou zbohatnúť. Ako je najvýhodnejšie postupovať aby bol váš čistý zisk čo najväčší?

5. Rezanie štvorca.

Najskôr skúste rozrezať štvorec na 10 štvorcov. Nemusia byť rovnako veľké, ale všetky rezy musia byť priame a rovnobežné so stranami rezaného štvorca. Potom nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré možno rozrezať štvorec na n štvorcov.

6. Veľká a malá guľa.

Vo veľkej prázdnej miestnosti tvaru kvádra naháňa veľká guľa (s polomerom 1 meter) menšiu guľu, ktorú chce rozdrviť. Našťastie existujú v miestnosti miesta, kam keď sa menšia guľa postaví, je pre veľkú nedosiahnuteľná — veľká sa jej môže iba

dotknúť, ale nemôže ju pritlačiť. Zistite, aká veľká môže byť menšia guľa, aby sa ešte v miestnosti zachránila.

7. Vlastnosti mužov.

Podľa štatistík má 70 % mužov hnedé oči, 75 % má tmavé vlasy, 85 % mužov je vyšších ako 178 cm a 90 % mužov váži menej ako 100 kg. Aké percento mužov má zaručene všetky tieto štyri vlastnosti?

8. Kto bol druhý v skoku do výšky?

Adam, Boris a Cyril si spravili súťaž v niekoľkých športoch. Za víťazstvo sa v každom športe udeľovalo a bodov, za druhé miesto b bodov a za tretie miesto c bodov, pričom a, b, c sú prirodzené čísla, pre ktoré platí $a > b > c$. Na koci súťaže mal Adam 10 bodov, Boris 6 bodov a Cyril 5 bodov. Zistite, kto bol druhý v skoku do výšky, ak viete, že Boris vyhral vrh guľou.

9. Chytia vlci zajaca?

V strede štvorcovej záhrady sedí zajac. V každom zo štyroch rohov záhrady sedí jeden vlk. Vlci sa môžu ľubovoľne pohybovať po obvode záhrady, pričom vedia byť až 1,4krát rýchlejší ako zajac. Zajac by rád zo záhrady utiekol. Na prvý pohľad to s ním vyzerá zle, ale ak ovláda trochu matematiky, môže vlkom utiecť. Viete ako?

10. Problém pána riaditeľa.

Riaditeľ firmy vyrábajúcej osviežujúci nápoj PIKO-KOLA krátko pred smrťou rozoslal listy svojim 10 najbližším spolupracovníkom a každému v liste prezradil jednu z 10 prímesí, z ktorých sa vyrába PIKO-KOLA. Po smrti riaditeľa si týchto 10 ľudí chcelo telefonicky vymeniť získané informácie.

a) Koľko najmenej hovorov je potrebných na to, aby sa každý z 10 zamestnancov dozvedel všetkých 10 prímesí?

b) Riešte ten istý problém pre prípad, že by PIKO-KOLA pozostávala zo 100 prímesí, ktoré riaditeľ oznámil 100 najspoľahlivejším spolupracovníkom (každému jednu prímes).

Dokážte, že vtedy by stačilo 196 telefónnych hovorov.

A na záver ukážka série úloh, ktorá mala podobu rozprávky:

Ako rytier PIKOMATKO porazil (alebo neporazil?) draka D-200.
(dramatematický príbeh s otvoreným koncom)

Len čo sa rytier PIKOMATKO dozvedel súradnice jaskyne, v ktorej žije zlý 200hlavý drak D-200, ihneď sa vydal na cestu. V stredu podvečer prišiel na rázcestie tvaru Y, kde mu istý pocestný povedal: „Keď sa chceš dostať ku drakovi, choď touto ľavou cestou, až po ôsmych kilometroch prídeš ku vysokánskemu smreku. Od neho napravo (pod pravým uhlom) vedie cesta priamo ku drakovej jaskyni. Ale môžeš ísť aj touto pravou cestou. Keď prídeš ku jazierku, budeš mať presne polovicu cesty za sebou. Tam sa otoč doľava o 90° a choď stále rovno. Prídeš priamo ku dračej jaskyni.“ PIKOMATKO poďakoval, zamyslel sa, potom si zmeral uhol, ktorý spolu zvierali ľavá a pravá cesta. Vyšiel mu ostrý. Potom chvíľu počítal a kreslil a nakoniec sa vydal kratšou z oboch ciest.

1. úloha: Zistite, ktorá z oboch ciest je kratšia — tá okolo smreka alebo okolo jazierka?

2. úloha: Dokážte, že uhol DSJ (drak — smrek — jazierko) má veľkosť 45°.

Keď PIKOMATKO dorazil ku jaskyni, drak D-200 ho už čakal a jednou zo svojich 200 ohnivých papúľ prehovoril: „Mohol by som ťa zožrať hneď, ale dám ti šancu. Budem si myslieť tri prirodzené čísla a, b, c menšie ako 100. Aj ty si mysli nejaké tri prirodzené čísla x, y, z a povedz mi ich. Ja ti potom prezradím číslo $ax + by + cz$, nič viac. Ak z tohoto čísla uhádneš čísla a, b, c, dovolím ti odísť. Inak sa zúčastníš môjho dnešného obeda ako predjedlo."

3. úloha: Poraďte PIKOMATKOVI, aké čísla x, y, z má drakovi nahlásiť, aby z čísla $ax + by + cz$ mohol jednoznačne určiť čísla a, b, c.

PIKOMATKO úlohu vyriešil a čísla uhádol. No k odchodu sa nemal. Naopak, začal s likvidáciou draka. Spomenul si, ako mu kedysi dávno istá baba korenárka prezradila, že každý drak skamenie, keď sa pozrie na magický útvar. To je taký rovinný útvar, ktorý nemá žiadnu os súmernosti, ani žiadny stred súmernosti, ale pritom pri otočení o istý uhol (menší ako 360 stupňov) prechádza sám do seba (t.j. keby sme ho vystrihli, zdvihli a pootočili, zapadol by znovu do vystrihnutej diery). A tak začal PIKOMATKO horúčkovite vymýšľať nejaký magický útvar.

4. úloha: Nakreslite nejaký magický útvar.

Tentokrát PIKOMATKO nič múdreho nevymyslel, a tak mu ostala jediná možnosť: použiť svoje tri zázračné meče Sek, Šmyk a Fik. Keď sa rozoženie Sekom, odsekne drakovi naraz 48 hláv, lenže mu hneď 33 nových hláv narastie. Keď sa rozoženie Šmykom, odšmykne drakovi 21 hláv a žiadna nová mu nenarastie. A konečne keď sa rozoženie Fikom, odfikne drakovi jednu hlavu a namiesto nej mu ihneď narastie 73 nových. Každý meč možno použiť iba vtedy, ak má drak aspoň toľko hláv, koľko ten meč zotína. Akonáhle raz drak príde o všetky hlavy, už mu žiadne nové nenarastú.

5. úloha: Zistite, ako dopadol súboj PIKOMATKA s 200hlavým drakom D-200. Ak si myslíte, že PIKOMATKO draka „odhlavil", popíšte, v akom poradí pritom použil jednotlivé meče. Ak si naopak myslíte, že to s tými mečmi nie je možné, dokážte to.

Úlohy MO kategorií A, B a C

Leo Boček
(MFF UK Praha)

Na několika příkladech chceme ukázat tématiku úloh matematické olympiády v kategoriích A, B, C v posledních deseti letech, obtížnost jedněch i snadnost jiných úloh.

V kategorii B 39. ročníku MO jsme použili pěknou sérii úloh od dlouholetého pracovníka v MO dr. Jiřího Sedláčka, CSc., z Matematického ústavu ČSAV v Praze. V 1. kole to byla úloha:

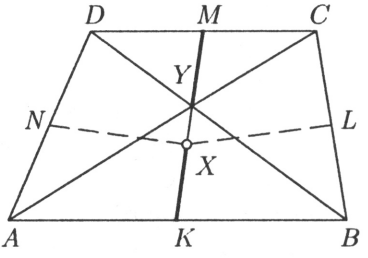
Je dáno liché přirozené číslo n, najděte aspoň jednu dvojici přirozených čísel x, y tak, aby $D(x,y) = n$ a současně $D(xy+x, xy+y) = 2n$. Přitom $D(u,v)$ značí největší společný dělitel přirozených čísel u, v.

V klauzurní části 1. kola to byla úloha *nalézt ke každému přirozenému číslu n přirozená čísla x, y tak, aby $D(x,y) = D(xy+x, xy+y) = n$.* V krajském, tedy 2. kole, bylo třeba *k libovolnému přirozenému číslu n najít nesoudělná přirozená čísla x, y s vlastností $D(xy+x, xy+y) = n$.*

Ukážeme si stručně **řešení** všech tří úloh. V první úloze je nasnadě zkusit $x = n$, $y = kn$, kde k je přirozené číslo. Je pak $D(x,y) = n$, $xy + x = n(kn+1)$, $xy + y = n(kn+k)$. Číslo k musíme zvolit tak, aby největším společným dělitelem čísel $kn+1$, $kn+k$ bylo číslo 2. Pak musí být dělitelný dvěma také jejich rozdíl $k-1$. Zkusíme položit $k = 3$, čísla $x = n$, $y = 3n$ skutečně splňují podmínky úlohy, neboť $xy+x = n(3n+1)$, $xy+y = n(3n+3)$. Jelikož je číslo n liché, jsou čísla $3n+1$, $3n+3$ sudá, tedy dělitelná dvěma. A číslo 2 je také jejich největším společným dělitelem, protože největší společný dělitel těchto čísel dělí také jejich rozdíl, tedy číslo 2. Je tedy $D(3n+1, 3n+3) = 2$ a $D(3n^2+n, 3n^2+3n) = 2n$. Řešením úlohy klauzurní části je například dvojice $x = 2n$, $y = 3n$. Je pak totiž $xy+x = 2n(3n+1)$, $xy+y = 3n(2n+1)$. Čísla $3n+1$, $2n+1$ jsou nesoudělná, neboť jejich společný dělitel musí dělit i číslo $3(2n+1) - 2(3n+1) = 1$.

Navazující úloha z 2. kola je obtížnější. Jelikož $xy+x$, $xy+y$ mají být dělitelná číslem n, musí to platit i pro jejich rozdíl $y-x$. Zkusme položit $y = x+n$. Pak je $xy+x = x(x+n+1)$, $xy+y = x(x+n+1)+n$. Obě tato čísla mají být dělitelná číslem n, avšak čísla x, $x+n$ mají být nesoudělná. Proto musejí být nesoudělná i čísla x, n. Pak musí číslo n dělit číslo $x+n+1$. Položme tedy na příklad $x = n-1$, je pak $y = 2n-1$. Jsou to čísla nesoudělná, $xy+x = n(2n-2)$, $xy+y = n(2n-1)$. Největším společným dělitelem posledních dvou čísel je číslo n, protože čísla $2n-1$, $2n-2$ jsou nesoudělná. V případě $n = 1$ není však číslo x přirozené, stačí ale pro $n = 1$ položit $x = 1$, $y = 2$.

V 37. a 38. ročníku MO byly dvě na sebe navazující úlohy o lichoběžníku. V 37. ročníku to byla v kategorii C úloha: *V lichoběžníku $ABCD$ určete bod X tak, aby měly čtyřúhelníky $XKBL$, $XLCM$, $XMDN$, $XNAK$ stejný obsah, přičemž K, L, M, N jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA.*



Obr. 1

Řešení. Jsou-li AB, CD základny lichoběžníku, pak spojnice jejich středů K, M dělí lichoběžník na dva lichoběžníky stejného obsahu (obr. 1). Proto musí bod X nutně ležet na úsečce KM. Kdyby totiž ležel uvnitř lichoběžníku $KBCM$, byl by součet obsahů čtyřúhelníků $XKBL$, $XLCM$ menší než polovina obsahu lichoběžníku $ABCD$, což by bylo ve sporu s podmínkou úlohy. Uvažujme tedy bod X uvnitř úsečky KM. Obsahy trojúhelníků DNX, ANX jsou stejné, protože N je střed úsečky AD. Aby se sobě rovnaly i obsahy čtyřúhelníků $XNAK$, $XMDN$, musejí se rovnat obsahy trojúhelníků MDX, AKX, tedy poměr vzdáleností bodu X od přímek AK a DM musí být právě obrácený, než je poměr délek úseček AK, DM, tj. poměr $|AB| : |CD|$. Průsečík Y úhlopříček AC, BD leží na KM a poměr jeho vzdáleností od přímek AB, CD je právě $|AB| : |CD|$. Sestrojíme tedy bod Y a X je pak ten bod na úsečce KM, pro který platí $|MX| = |KY|$, je pak též $|KX| = |MY|$. Tento bod X splňuje podmínku úlohy.

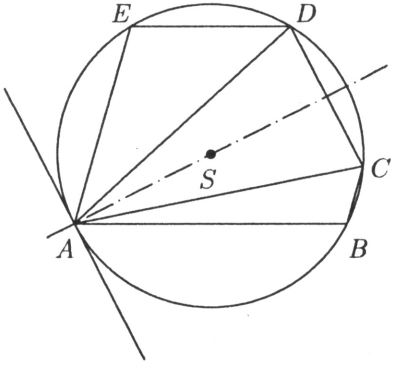
V dalším ročníku dokazovali titíž žáci, jenže již o rok starší, že *neexistuje v lichoběžníku $ABCD$ bod X tak, aby se sobě rovnaly obsahy trojúhelníků ABX, BCX, CDX, DAX.* Důkaz vedli sporem třeba takto: Předpokládejme, že pro bod X lichoběžníku $ABCD$ se obsahy uvedených trojúhelníků rovnají. Označme p vzdálenost bodu X od přímky AB a q jeho vzdálenost od přímky CD, $a = |AB|$, $c = |CD|$. Rovnost obsahů trojúhelníků ABX, CDX, z nichž se každý rovná jedné čtvrtině obsahu celého lichoběžníku, nám dává pro p, q, a, c podmínky $4ap = 4cq = (a+c)(p+q)$. Vyloučením p, q dostaneme $(a-c)^2 = 0$. To je však spor, neboť pro lichoběžník je $a \neq c$.

Do 36. ročníku byla zařazena tato geometrická úloha: *Je dán trojúhelník ABC. Zvolte na stranách AB, AC po řadě body M, N tak, aby $|BM| = |CN|$ a aby se obsah trojúhelníku AMN rovnal polovině obsahu ABC.* K vyřešení úlohy stačí umět řešit kvadratickou rovnici a znát vzorec $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ pro obsah trojúhelníku (b, c jsou délky stran AC, AB, α je velikost jimi sevřeného úhlu). Označme $x = |BM| = |CN|$. Podle podmínek úlohy má pro x platit $2(b-x)(c-x)\sin\alpha = bc\sin\alpha$. Jelikož $\sin\alpha \neq 0$, dostáváme pro x kvadratickou rovnici $2x^2 - 2(b+c)x + bc = 0$. Kořen $\frac{1}{2}(b+c+\sqrt{b^2+c^2})$ nevyhovuje, protože je větší než b i c, vyhovuje druhý kořen $\frac{1}{2}(b+c-\sqrt{b^2+c^2})$, který je kladný a menší než b i c. Úsečku délky $\frac{1}{2}(b+c-\sqrt{b^2+c^2})$ dovedeme též snadno pravítkem a kružítkem sestrojit z délek b, c.

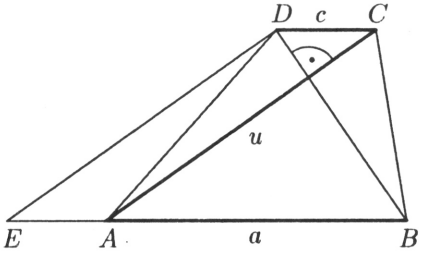
V 33. ročníku MO byla v krajském kole kategorie C lehká úloha, jejíž text zní: *Žák měl spočítat délku tětivy kružnice o poloměru r, jestliže se vzdálenost tětivy od středu rovnala d. Domníval se, že se délka tětivy počítá jako $d + r$, přesto dostal správný výsledek. Jaký vztah musel platit mezi d a r?* Odpověď je jednoduchá, musí

platit $d + r = 2\sqrt{r^2 - d^2}$, po úpravě a vyřešení kvadratické rovnice dostaneme $\frac{d}{r} = \frac{3}{5}$.

Je všeobecně známo, že větší obtíže činí žákům úlohy geometrické, ať již jde o úlohy konstruktivní, nebo důkazové. Do krajského kola kategorie C 37. ročníku MO byla zařazena úloha: *Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ je vepsán kružnici k, přičemž AB je rovnoběžná s ED a BC je rovnoběžná s AE. Dokažte, že přímka CD je rovnoběžná s tečnou kružnice k v bodě A.* K důkazu stačí znát větu o obvodových úhlech a o úhlech v tětivovém čtyřúhelníku. Označíme-li $\alpha = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle AED|$, je $|\sphericalangle ADC| = \pi - \alpha$, neboť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Stejně tak je $|\sphericalangle ACD| = \pi - \alpha$, takže je trojúhelník ACD rovnoramenný se základnou CD. Proto prochází osa úsečky CD bodem A a samozřejmě též středem S kružnice k (obr. 2). Tečna kružnice k v bodě A je na tuto osu kolmá a tedy rovnoběžná s CD. Je to úloha velmi pěkná, avšak pro žáky 1. ročníku střední školy jsou důkazové úlohy přece jenom obtížnější. Více



Obr. 2



Obr. 3

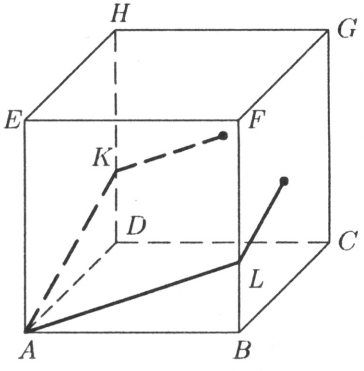
se jim líbí úlohy, při kterých mají něco spočítat. Například v úloze 2. kola kategorie C 36. ročníku MO to byl *obsah lichoběžníku, jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé, jedna z nich má délku u a jsou ještě dány délky a, c obou základen* (obr. 3). **Řešení** spočívá v převedení lichoběžníku na trojúhelník stejného obsahu. Bodem D vedeme rovnoběžku s úhlopříčkou AC ($|AC| = u$) a její průsečík s AB označíme E (AB je rovnoběžno s CD). Trojúhelníky CDB a AED mají stejný obsah, protože $|CD| = |AE|$ a výšky k těmto stranám jsou rovněž stejné, rovnají se vzdálenosti přímek AB, CD. Proto se obsah lichoběžníku rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníku EDB, který je $\frac{1}{2}(u\sqrt{(a+c)^2 - u^2})$.

Pěkné jsou úlohy na určení nejkratší cesty po povrchu tělesa z jednoho jeho bodu do druhého. Uvedeme si dva příklady.

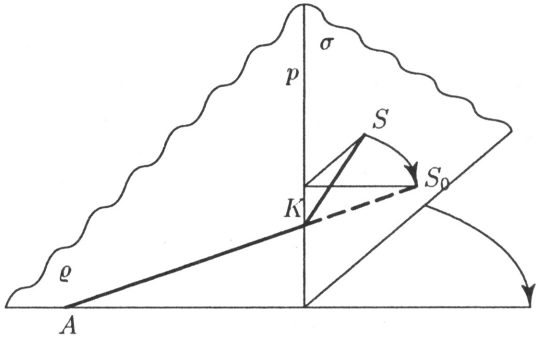
1. kolo kategorie B 33. ročníku MO — *Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a. Vrchol A je spojen po povrchu krychle nejkratší čarou se středem stěny $BCGF$ a rovněž se středem stěny $DCGH$. První lomená čára má s hranou BF společný bod L, druhá má s hranou DH společný bod K. Určete obsah trojúhelníku AKL (obr. 4).*

1. kolo kategorie C 37. ročníku MO — *Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$ s podstavnou hranou délky a a výškou v. Označme S střed stěny $BCC'B'$*

a K, L ty body na hranách BB', CC', pro něž jsou lomené čáry AKS, ALS nejkratší. Vypočítejte poměr objemů jehlanu $AKLS$ a daného hranolu.



Obr. 4

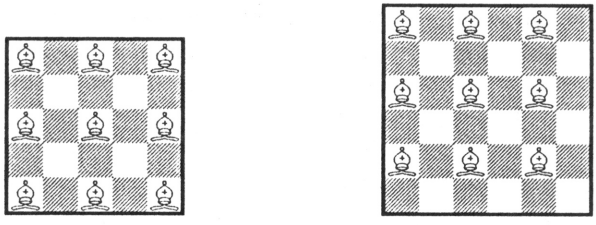


Obr. 5

Řešení obou úloh je jednoduché, uvědomíme-li si dále popsaný princip. Uvažujme roviny ϱ a σ, jež se protínají v přímce p, bod A leží v rovině ϱ, bod S v rovině σ a nechť K je ten bod přímky p, pro který je součet $|AK| + |KS|$ nejmenší. Pak po otočení roviny σ do roviny ϱ kolem přímky p tak, že jsou poloroviny pA a pS_0 opačné (S_0 je otočená poloha bodu S), leží bod K na úsečce AS_0 (obr. 5). Pro vaši kontrolu uvádíme výsledky obou úloh: $\frac{1}{6}a^2\sqrt{11}$; $\frac{1}{18}$.

Další skupinu úloh tvoří úlohy o šachovnicích. Příkladem je úloha 1. kola kategorie B 37. ročníku MO: *Jaký největší počet figurek lze rozmístit na šachovnici $n \times n$ tak, aby žádné dvě nesousedily? (Za sousední považujeme ta políčka, která mají společný aspoň jeden vrchol).*

Řešení. Je-li n liché, je určitě možné rozmístit aspoň $\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)^2$ figurek, při sudém n je možné umístit aspoň $(\frac{1}{2}n)^2$ figurek, jak ukazuje obr. 6 pro $n = 5$ a $n = 6$. Přesně řečeno, vynecháme každý druhý řádek shora a každý druhý sloupec zleva a stavíme figurky pouze na zbylá políčka. Určitě nebudou pak obsazena žádná dvě sousední políčka. Je to ale opravdu maximální počet figurek? Odpověď je ano. Například při sudém n se šachovnice skládá z $\frac{1}{4}n^2$ šachovnic 2×2. Kdyby se na ni dalo umístit více než $(\frac{1}{2}n)^2$ figurek, musely by aspoň na jedné šachovnici 2×2 stát aspoň dvě figurky, to by ale byly figurky sousední. Při lichém n se určitě nedá předepsaným způsobem rozestavit více figurek, než se dá rozestavit na větší šachovnici $(n+1) \times (n+1)$. A to je podle předcházejícího $\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)^2$.



Obr. 6

Na závěr si uvedeme ještě dvě úlohy na využití zápisu čísel v desítkové soustavě a na dělitelnost. Do 1. kola kategorie B 38. ročníku MO jsme zařadili úlohu: *Dokažte, že rovnice* $S(x+p) = S(x)$, *kde* $S(n)$ *značí ciferný součet čísla* n *zapsaného v desítkové soustavě, má aspoň jedno řešení, právě když je* p *dělitelné devíti.* Úlohu vyřešil velmi pěkně Tomáš Tütz z gymnázia v Brně, tř. kpt. Jaroše. Je-li $S(x+p) = S(x)$ pro nějaké x, dávají čísla $x+p$, x stejný zbytek při dělení devíti. Je-li obráceně $p = 9q$, q přirozené, stačí položit $x = q$. Je pak $x+p = 10q$ a čísla q, $10q$ mají zřejmě stejný ciferný součet.

V krajském kole 39. ročníku MO dokazovali žáci v kategorii C, že *číslo*

$$\underbrace{111\ldots1}_{k}\underbrace{222\ldots22}_{k+1}5,$$

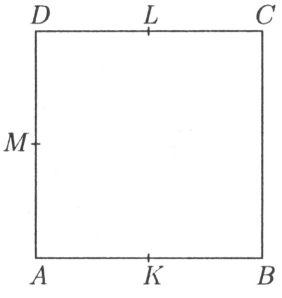
v němž se číslice 1 *vyskytuje* k*-krát a číslice* 2 $(k+1)$*-krát, je druhou mocninou přirozeného čísla, a měli též toto číslo určit.* Snadno se na několika případech odhadne, že jde o číslo $\underbrace{33\ldots3}_{k}5$, v němž se číslice 3 vyskytuje k-krát. Pak se prostě ukáže, že jeho druhá mocnina je dané číslo, a to použitím vzorce $(10a+5)^2 = 100a(a+1)+25$. Stačí položit $a = \underbrace{33\ldots3}_{k}$. Žák František Mala z Dolného Kubína ukázal, že dané číslo je číslo $\dfrac{10^k-1}{9}\cdot 10^{k+2} + \dfrac{10^{k+1}-1}{9}\cdot 2\cdot 10 + 5$, což upravil na tvar $\left(\dfrac{10^{k+1}+5}{3}\right)^2$. Pak mu již stačilo dokázat, že číslo $10^{k+1}+5$ je dělitelné třemi. To však plyne ihned z toho, že jeho ciferný součet je 6.

Dále si uvedeme ještě několik úloh kategorie A, tedy úloh určených pro soutěžící nejvyšších dvou ročníků středních škol. Z 33. ročníku MO si ukážeme 2 úlohy celostátního kola. V první úloze bylo dáno zobrazení f množiny $\mathbb{Z}$ všech celých čísel do téže množiny, které splňuje pro každé $m \in \mathbb{Z}$ podmínku $f(f(m)) = -m$. Soutěžící měli dokázat, že a) f je prosté zobrazení množiny $\mathbb{Z}$ na množinu $\mathbb{Z}$, b) pro každé $m \in \mathbb{Z}$ platí $f(-m) = -f(m)$, c) $f(m) = 0$, právě když je $m = 0$. Na závěr měli ukázat příklad takového zobrazení. Úloha patřila k lehčím úlohám tohoto celostátního kola. Řešení úlohy může například vypadat takto: Nejdříve dokážeme, že zobrazení f je prosté. Předpokládejme, že $f(m) = f(n)$. Pak je $m = -f(f(m)) = -f(f(n)) = n$, takže $f(m) = f(n)$ pouze v případě $m = n$, což znamená, že je f zobrazení prosté. Je to také zobrazení na množinu $\mathbb{Z}$, protože každý prvek $m \in \mathbb{Z}$ je obrazem prvku $f(-m)$. Protože $-m = f(f(m))$, je $f(-m) = f(f(f(m))) = -f(m)$, stačí totiž ve vztahu $f(f(m)) = -m$ dosadit za m číslo $f(m)$. Tím je dokázáno, že pro každé $m \in \mathbb{Z}$ je $f(-m) = -f(m)$. Položíme-li $m = 0$, dostaneme $f(0) = -f(0)$, takže $f(0) = 0$. Protože f je zobrazení prosté, nemůže být $f^2(m) = 0$ pro žádné $m \neq 0$. Musíme ještě ukázat příklad zobrazení f, které má všechny uvedené vlastnosti. Je to například zobrazení f, které je definováno vztahy $f(0) = 0$, $f(2k) = 2k-1$, $f(2k-1) = -2k$, $f(-2k) = -(2k-1)$, $f(-2k+1) = 2k$ pro každé přirozené číslo k.

V druhé úloze se z předpokladu $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta = 0$ pro vnitřní úhly α, β, γ, δ konvexního čtyřúhelníku má dokázat, že čtyřúhelník je rovnoběžník, lichoběžník

nebo čtyřúhelník tětivový. K řešení úlohy je vhodné převést součet na levé straně předpokládané rovnosti na součin. Použitím vzorce $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ a vztahu $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi$ dostaneme $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}$. Tento součin se rovná nule právě tehdy, když je splněna aspoň jedna z podmínek $\alpha+\beta=\pi$, $\alpha+\delta=\pi$, $\alpha+\gamma=\pi$. Jsou-li splněny první dvě podmínky, je čtyřúhelník rovnoběžník, když je splněna jen jedna z nich, je to lichoběžník. Poslední podmínka je splněna, právě když je čtyřúhelník tětivový (když mu lze opsat kružnici).

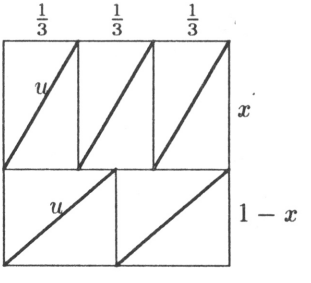
V 37. ročníku MO pokrývali soutěžící kategorie A čtverec kruhy o stejném poloměru. Ve školním kole měli určit nejmenší číslo r, pro které je možné čtverec o straně 10 pokrýt dvěma shodnými kruhy o poloměru r. Mohli postupovat takto: Označit K, L středy stran AB, CD čtverce $ABCD$ o straně 10 (obr. 7). Je pak zřejmé, že kruhy ohraničené kružnicemi opsanými obdélníkům $AKLD$, $KBCL$ pokrývají čtverec $ABCD$, jejich poloměr je $\frac{1}{2}5\sqrt{5}$. Ukážeme, že r nemůže být menší než $\frac{1}{2}5\sqrt{5}$. Předpokládejme, že čtverec je pokryt dvěma kruhy o poloměru $r < \frac{1}{2}5\sqrt{5}$. Aspoň v jednom z nich musí ležet tři z bodů A, B, C, D, K, L. Patří-li do jednoho body A, K, B a do druhého body D, L, C, musí jeden z nich obsahovat též střed M strany AD. Je-li to například kruh s body A, K, B, obsahuje body B, M a jeho průměr se proto rovná aspoň vzdálenosti těchto dvou bodů, tj. $5\sqrt{5}$. Obsahuje-li kruh jen dva body z trojice A, K, B a jeden z trojice D, L, C, dostaneme stejným způsobem spor, rovněž tak při záměně obou trojic. Je tedy $r = \frac{1}{2}5\sqrt{5}$.



Obr. 7

V krajském kole byla navazující úloha: *Jestliže čtyři shodné kruhy o poloměru r pokrývají jednotkový čtverec, je $r \geqq \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Dokažte a zjistěte, zda lze jednotkový čtverec pokrýt pěti shodnými kruhy o menším poloměru.*

Řešení: Předpokládejme, že je čtverec pokryt čtyřmi kruhy o poloměru $r < \frac{1}{4}\sqrt{2} < 1$. Pak v každém kruhu leží právě jeden vrchol čtverce. Aspoň jeden z těchto kruhů obsahuje i střed čtverce, který má od vrcholu čtverce vzdálenost $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, proto je jeho poloměr aspoň $\frac{1}{4}\sqrt{2}$, což je spor s předpokladem $r < \frac{1}{4}\sqrt{2}$.



Obr. 8

K druhé části úlohy rozdělíme čtverec na pět obdélníků podle obr. 8 tak, aby měly stejně velké úhlopříčky délky u. Kruhy, jejichž hraniční kružnice jsou těmto obdélníkům opsány, pokrývají čtverec a jejich poloměr je $\frac{1}{2}u$. Není těžké ukázat, že $u < \frac{1}{2}\sqrt{2}$, takže odpověď na poslední otázku úlohy je ano.

Podle Cauchyovy nerovnosti platí pro každou trojici reálných čísel x, y, z nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq xy + yz + zx.$$

V 39. ročníku MO byla v I. kole kategorie A úloha *najít všechna reálná čísla α s vlastností: Jsou-li x, y, z délky stran trojúhelníku, pak je $x^2+y^2+z^2 \leqq \alpha(xy+yz+zx)$.*

Řešení: Jsou-li x, y, z délky stran trojúhelníku, je $|y-z| < x$, $|z-x| < y$,

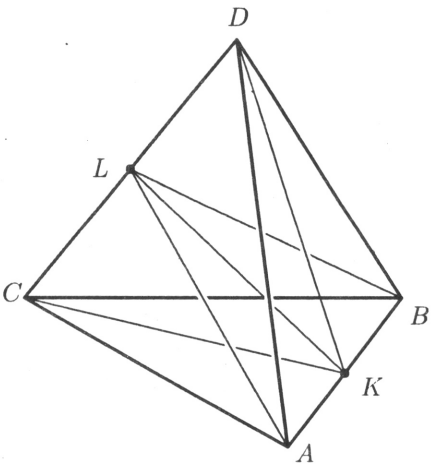
$|x-y| < z$. Umocněním těchto nerovností a jejich sečtením dostaneme $x^2+y^2+z^2 < 2(xy+yz+zx)$, takže podmínku úlohy splňují všechna reálná čísla $\alpha \geqq 2$. Je-li $1 \leqq \alpha < 2$, položíme $x = y = 1$ a z zvolíme z intervalu $(0, \alpha - \sqrt{\alpha^2-(2-\alpha)})$. Pak jsou x, y, z délky stran trojúhelníku a neplatí $x^2+y^2+z^2 < \alpha(xy+yz+zx)$. Podmínku úlohy splňují tedy právě jen všechna čísla $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqq 2$.

V celostátním kole téhož ročníku pak navazovala úloha do jisté míry obrácená — *najít všechna reálná čísla α, pro která má každá trojice kladných čísel x, y, z splňující nerovnici*

$$x^2+y^2+z^2 \leqq \alpha(xy+yz+zx)$$

tu vlastnost, že to jsou délky stran nějakého trojúhelníku. **Řešení:** Jestliže je pro nějaké α uvedená nerovnice splněna pro některou trojici kladných čísel x, y, z, jež nemohou být délkami stran trojúhelníku, například pro trojici x, y, z s vlastností $z = x+y$, pak α nepatří mezi hledaná čísla. Položíme-li $x = y = 1$, $z = 2$, vidíme, že úloze nevyhovují čísla $\alpha \geqq \frac{6}{5}$. Ukážeme, že čísla menší než $\frac{6}{5}$ vyhovují. Jinými slovy chceme ukázat, že z platnosti $x^2+y^2+z^2 < \frac{6}{5}(xy+yz+zx)$ pro kladná čísla x, y, z plyne $x < y+z$, $y < x+z$, $z < x+y$. Dokážeme to sporem. Nechť pro kladná čísla x, y, z platí $x^2+y^2+z^2 < \frac{6}{5}(xy+yz+zx)$, ale jedna z předcházejících tří nerovnic splněna není, že například platí $z \geqq x+y$. Položme $t = z-x-y \geqq 0$. Dosadíme-li $z = t+x+y$ do předpokládané nerovnosti, dostaneme po úpravě $t^2 + \frac{4}{5}t(x+y) + \frac{4}{5}(x-y)^2 < 0$, což nemůže platit, neboť t je nezáporné číslo.

Na závěr si uveďme ještě dvě úlohy ze stereometrie, které byly pro 39. ročník převzaty z maďarské matematické olympiády. *Mezi všemi čtyřstěny $ABCD$ s danými délkami a, c hran AB, CD a danou vzdáleností d středů hran A, CD je třeba* v první úloze *určit ten, který má největší objem,* v druhé úloze *ten, který má největší povrch.*



Obr. 9

První úloha, která je lehčí, byla zařazena do klauzurní části I. kola. Čtyřstěn $ABCD$ rozdělíme na dva čtyřstěny $ABLC$ a $ABLD$, kde L je střed hrany CD (obr. 9). Označme ještě K střed hrany AB. Obsah trojúhelníku ABL se rovná nejvýše $\frac{1}{2}ad$, výšky čtyřstěnů $ABLC$ a $ABLD$ na stěnu ABL jsou stejné a rovnají se nejvýše $\frac{1}{2}c$, takže objem čtyřstěnu $ABCD$ je nejvýše $\frac{1}{6}acd$. Rovná se této hodnotě právě tehdy, když je $KL \perp AB$ a $CD \perp ABL$, takže tehdy, když je KL kolmá na kolmé přímky AB, CD. Ačkoliv výsledek druhé úlohy je stejný, je důkaz mnohem obtížnější. Označme $|KD| = p$, $|KC| = q$ a P, Q obsahy trojúhelníků ABD, ABC. Je $P+Q \leqq \frac{1}{2}a(p+q)$. Z trojúhelníků CLK a DLK plyne pomocí kosinové věty $p^2+q^2 = \frac{1}{2}c^2+2d^2$. Dále je $(p+q)^2 \leqq 2(p^2+q^2)$, rovnost platí pouze při $p = q$. Máme tedy

$$P+Q \leqq \frac{1}{2}a\sqrt{2(p^2+q^2)} = \frac{1}{2}a\sqrt{c^2+4d^2},$$

rovnost

$$P + Q = \frac{1}{2} a\sqrt{c^2 + 4d^2}$$

platí právě tehdy, když je $p = q$, tj. $CD \perp KL$, a souměrně DK a CK kolmé na AB.

Podobný výsledek bychom mohli odvodit pro součet $R + S$ obsahů trojúhelníků CAD, CDB. Největší povrch má tedy čtyřstěn, pro který je přímka KL kolmá na AB i CD a tyto dvě přímky jsou rovněž kolmé. Jeho povrch je $\frac{1}{2} a\sqrt{c^2 + 4d^2} + \frac{1}{2} c\sqrt{a^2 + 4d^2}$.

Kategorie P

Pavel Töpfer
(MFF UK Praha)

Od 35. ročníku byla matematická olympiáda obohacena o novou soutěžní kategorii, která byla nazvána kategorie P (programování). Kategorie P byla vytvořena v době, kdy v celé naší společnosti a zejména mezi mládeží výrazně sílil zájem o počítače a programování a kdy vznikala i řada jiných programátorských soutěží. Nová kategorie MO si kladla za cíl stát se vrcholnou soutěží pro talentované studenty středních škol, kteří se zajímají právě o matematiku a programování. Programování přitom chtěla ukázat ne ze stránky technického zvládnutí práce s počítačem a používání programovacích jazyků, jak je to obvyklé u jiných soutěží, ale zaměřit se na samotnou podstatu věci. Její náplní se proto staly úlohy na analýzu a tvorbu algoritmů, úlohy, pro jejichž úspěšné vyřešení nestačí pouze běžné praktické programátorské dovednosti, ale které navíc vyžadují od řešitele kus matematického a algoritmického myšlení. Ohlas, který kategorie P rychle získala, a stále rostoucí zájem o účast v soutěži svědčí o tom, že se tyto cíle úspěšně podařilo splnit.

V současné době řeší úlohy MO kategorie P každoročně téměř 500 studentů všech ročníků středních škol z celé republiky. Zájem o soutěž začínají projevovat i nejlepší žáci základních škol, kteří někdy dosahují překvapivě dobrých výsledků, a to i v celostátním kole. Po odborné stránce je kategorie P zajišťována vysokoškolskými pedagogy z kateder informatiky. Vedle tradičních tří odborných center působících od samého vzniku soutěže na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, přírodovědecké fakultě Masarykovy Univerzity v Brně a na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Komenského v Bratislavě se v současné době úspěšně jedná i o zapojení dalších vysokých škol.

Z celé řady zajímavých soutěžních úloh, které se v historii kategorie P objevily, jsme zde pro vás vybrali alespoň tři. Společným rysem všech tří úloh je to, že jsou zdánlivě velmi snadné. Skutečně, nalézt nějaký algoritmus řešící daný problém vám asi nedá mnoho práce. Zde je však úkolem sestrojit algoritmus co možná nejlepší a nejrychlejší, a to již vyžaduje značně delší a hlubší přemýšlení.

Úlohy

1. Největší čísla (MO–P 39–II–1)

Je dáno pole $A[1..n, 1..n]$ obsahující n^2 navzájem různých kladných celých čísel. Navrhněte co nejrychlejší algoritmus, který vytiskne n největších čísel uložených v poli

A. Původní obsah pole A nemusí být po ukončení výpočtu zachován.

2. Jedničkový obdélník (MO–P 38–II–2)

Je dáno dvojrozměrné pole A (matice) velikosti $n \times m$, jehož prvky jsou pouze čísla 0 nebo 1. Navrhněte algoritmus, který v daném poli A nalezne maximální „obdélník" obsahující samé jedničky (maximální ve smyslu „obsahující co nejvíc jedniček"). Výsledkem práce algoritmu bude čtveřice čísel i, j, k, l takových, že $A_{i,j}$ je prvek v levém horním rohu a $A_{k,l}$ prvek v pravém dolním rohu nalezeného maximálního obdélníka.

3. Nejdelší rostoucí podposloupnost (MO–P 39–II–2)

Je dána konečná posloupnost celých čísel délky n, $n \geq 1$. Prvky této posloupnosti označíme po řadě $X(1), X(2), \ldots, X(n)$. Podposloupností délky k vybranou ze zadané posloupnosti budeme rozumět libovolnou konečnou posloupnost tvaru $X(i_1), X(i_2), \ldots, X(i_k)$, kde $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ (tzn., že ze zadané posloupnosti je vybráno libovolných k čísel, přičemž je zachováno jejich pořadí).

Navrhněte algoritmus, který určí délku nejdelší rostoucí podposloupnosti vybrané z dané posloupnosti. To znamená, že určí maximální k takové, že $X(i_1) < X(i_2) < \ldots < X(i_k)$ pro nějaké indexy $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. Zdůvodněte správnost algoritmu.

Např. pro posloupnost 4, 2, 7, 6, 4, 5, 3, 9, 8, 5, 9 je $k = 5$, neboť maximální vybraná rostoucí podposloupnost 2, 4, 5, 8, 9 má délku 5.

Řešení

1. Algoritmus s optimální kvadratickou časovou složitostí je založen na často užívaném postupu: nejprve se provede vhodný předvýpočet, jeho výsledky se uloží do pomocného pole a poté teprve následuje vlastní výpočet výsledných hodnot s využitím předem připraveného pomocného pole.

Zavedeme pomocné pole $SlMax[1..n]$, které bude obsahovat informace o poloze maximálních hodnot v jednotlivých sloupcích pole A. Bude tedy platit $SlMax[j] = i$ právě tehdy, jestliže $A[i, j]$ je největší ze všech čísel uložených v j-tém sloupci pole A.

Nejprve provedeme počáteční zaplnění pole $SlMax$ odpovídajícími hodnotami. Výběr n největších čísel uložených v poli A potom proběhne v n krocích následujícího postupu:

– pomocí pole $SlMax$ nalezneme největší hodnotu ze sloupcových maxim; tuto hodnotu získáme jako maximum z čísel $A[SlMax[j], j]$ pro j od 1 do n; nechť je to číslo $A[i, k]$

– číslo $A[i, k]$ je tedy největším z čísel uložených v poli A; vytiskneme ho a vypustíme ho z pole A dosazením nuly do $A[i, k]$

– obnovíme informaci o poloze sloupcového maxima ve sloupci, v němž došlo ke změně, tzn. spočteme novou hodnotu $SlMax[k]$.

Správnost algoritmu přímo plyne z úvodního rozboru. V každém kroku výpočtu je nalezena a vytištěna největší hodnota z maxim v jednotlivých sloupcích, což je jistě největší číslo momentálně se nacházející v poli A. Přepsáním tohoto čísla nulou je

vytisknuté číslo z pole A vynecháno (všechna čísla v poli A jsou podle zadání kladná!) a v dalším kroku se tedy bude vyhledávat největší ze všech zbývajících čísel. Celkem po n krocích se vytiskne skutečně n největších čísel uložených původně v poli A. Výpočet je konečný, počet kroků výpočtu je předem určen hodnotou n.

Popsaný algoritmus má kvadratickou časovou složitost. Přečtení n^2 čísel ze vstupu i počáteční zaplnění pole *SlMax* jistě vyžadují řádově n^2 operací. Vlastní výpočet je pak tvořen n kroky, přičemž v každém z nich je nejprve pomocí pole *SlMax* vybráno maximum z n čísel a po jeho vypsání a smazání je opět výběrem maxima z n čísel obnoveno správné zaplnění pole *SlMax*. Počet provedených operací je tedy úměrný hodnotě n^2.

2. V první fázi řešení provedeme pomocný výpočet, při kterém určíme délky souvislých sloupců jedniček v dané matici A. Výsledky tohoto výpočtu si uložíme přímo do pole A tak, že položíme $A_{i,j} = k$, jestliže prvek $A_{i,j}$ sám a dalších přesně $k-1$ prvků pod ním mělo původně hodnotu 1, tzn. jestliže v původní matici A platilo $A_{p,j} = 1$ pro $p = i, i+1, \ldots, i+k-1$ a navíc buď $i+k-1 = n$ nebo $i+k-1 < n$ a přitom $A_{i+k,j} = 0$ (kde n je počet řádků matice A). Údaje v zadaném poli A tím pozměníme, ale pouze tak, že v případě potřeby by bylo snadné zrekonstruovat původní podobu pole A (neboť žádná nula v poli A neubyla ani nepřibyla, nenulová čísla jsou uložena na místech původních jedniček). Výsledek první pomocné fáze výpočtu si ukážeme na příkladu:

ze zadané matice:	dostaneme upravenou matici:
1 1 0 1 0	3 4 0 1 0
1 1 1 0 1	2 3 2 0 3
1 1 1 1 1	1 2 1 1 2
0 1 0 0 1	0 1 0 0 1

Ve druhé fázi výpočtu již budeme hledat v poli A maximální obdélník tvořený jedničkami (nyní po úpravě nenulovými čísly). Postupně budeme zkoumat všechny možné pozice levého horního rohu takového obdélníka. Pro zvolený levý horní roh $A_{i,j} > 0$ musíme vyzkoušet všechny přípustné polohy pravého horního rohu $A_{i,l}$. Prvek $A_{i,l}$ může být pravým horním rohem obdélníka s levým horním rohem $A_{i,j}$, jestliže všechna čísla $A_{i,q}$ pro $q = j, j+1, \ldots, l$ jsou nenulová.

Velikost maximálního obdélníka, který je v původní matici A tvořen samými jedničkami a jehož levý a pravý horní roh mají souřadnice $[i,j]$, resp. $[i,l]$, nyní již snadno určíme pomocí hodnot, které jsme si předem připravili v první fázi výpočtu. Takový obdélník má totiž šířku $(l-j+1)$ a jeho výška je rovna minimu z hodnot $A_{i,q}$ pro $q = j, j+1, \ldots, l-1, l$.

Uvedený výpočet je možno opakovat pro všechny možné volby levého horního rohu obdélníka a přitom si v pomocné proměnné udržovat velikost maximálního již nalezeného obdélníka tvořeného v zadané matici samými jedničkami. V dalších čtyřech pomocných proměnných si musíme zaznamenávat souřadnice levého horního a pravého dolního rohu nalezeného maximálního obdélníka. Tyto proměnné budou po ukončení výpočtu udávat požadovaný výsledek úlohy.

Správnost algoritmu plyne z uvedeného rozboru. Pokud zadaná matice obsahuje samé nuly, algoritmus nenalezne žádný přípustný levý horní roh obdélníka $A_{i,j} > 0$, čímž je tato situace detekována. Jestliže matice obsahuje alespoň jednu jedničku, musí obsahovat také nějaký maximální obdélník tvořený jedničkami. Dvojice proměnných i, j během výpočtu nabyde hodnot odpovídajících souřadnicím levého horního rohu tohoto maximálního obdélníka, neboť pomocí indexů i, j algoritmus postupně prochází všechny prvky pole A. Proměnná l potom jistě nabyde také hodnoty sloupcového indexu pravého horního rohu maximálního obdélníka z jedniček a tím bude tento maximální obdélník nalezen a uloží se údaje o jeho velikosti a souřadnicích. Jestliže lze v zadané matici A nalézt více různých obdélníků ze samých jedniček této maximální velikosti, vyhledá algoritmus souřadnice rohů jednoho z nich (toho, který byl nalezen jako první).

Výpočet podle uvedeného algoritmu je jistě konečný, neboť počet průchodů každým z cyklů je předem omezen některým z rozměrů zadané matice. Načtení hodnot matice A ze vstupu a modifikace obsahu pole A v první fázi výpočtu vyžadují provedení nm operací. Ve druhé fázi výpočtu se nm způsoby volí levý horní roh zkoumaného obdélníka (indexy i, j) a pro každou takovou volbu se provádí nejvýše m voleb sloupcového indexu pravého horního rohu (proměnná l). Celkem se tedy provede řádově nm^2 výběrů horních rohů obdélníka. Kdybychom pro každou takto vybranou trojici i, j, l hledali v naší upravené matici A maximální jedničkový obdélník s levým horním rohem $A_{i,j}$ a s pravým horním rohem $A_{i,l}$ zvlášť, potřebovali bychom vykonat vždy až m operací na nalezení minima z čísel $A_{i,q}$ pro $q = j, j+1, \ldots, l$. Celý algoritmus by pak měl časovou složitost $O(nm^3)$. Tento výběr minima neboli určování velikosti maximálního jedničkového obdélníka je ovšem možné provádět zároveň s postupným výběrem indexu l, čímž dosáhneme celkové časové složitosti algoritmu $O(nm^2)$.

3. Zadanou posloupnost čísel X budeme procházet po jednotlivých číslech odpředu dozadu. V i-tém kroku výpočtu budeme sledovat, jak mohou vypadat rostoucí podposloupnosti vybrané z počátečního úseku posloupnosti X délky i, tzn. z posloupnosti $X(1), \ldots, X(i)$. Pro dosažení co nejúspornějšího a nejrychlejšího řešení úlohy si zavedeme pomocné pole $M[1..n]$, do něhož si budeme průběžně ukládat následující informaci: prvek $M[j]$ je v každém okamžiku roven minimální dosud známé hodnotě posledního prvku vybrané rostoucí podposloupnosti délky j. Další průběžně aktualizovaná proměnná k udává délku nejdelší dosud nalezené rostoucí podposloupnosti. V poli M jsou tedy definovány hodnoty $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Po provedení i-tého kroku výpočtu budou tudíž splněny následující podmínky:

1) $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq k \leqq i$,
2) k je délka nejdelší rostoucí podposloupnosti vybrané z posloupnosti $X(1), X(2), \ldots, X(i)$,
3) pro každé $j = 1, \ldots, k$ platí

$$M_j = \min\{X(i_j);\ \text{existují indexy } 1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leqq i \text{ takové, že } X(i_1) < X(i_2) < \ldots < X(i_j)\}$$

Z poslední uvedené podmínky zřejmě plyne platnost nerovnosti $M_1 < \ldots < M_k$. Pokud totiž rostoucí vybraná podposloupnost délky j může končit číslem M_j, pak

existuje také vybraná podposloupnost délky $j-1$, která vznikne z předchozí uvažované podposloupnosti vynecháním posledního členu. Její poslední člen bude ovšem jistě menší než M_j, a tedy skutečně platí $M_{j-1} < M_j$.

Po provedení všech n kroků výpočtu bude proměnná k obsahovat délku maximální rostoucí podposloupnosti vybrané z celé zadané posloupnosti $X(1), \ldots, X(n)$, a právě to je požadovaný výsledek úlohy.

Zbývá ukázat, jakým způsobem provedeme aktualizaci hodnot proměnné k a údajů uložených v poli M při jednom kroku výpočtu. Uvažujme i-tý krok výpočtu a zpracování čísla $X(i)$ ze zadané posloupnosti. Je-li $X(i)$ větší než M_k, je možné prodloužit dosud nejdelší nalezenou rostoucí podposloupnost o číslo $X(i)$. Zvětšíme tedy hodnotu proměnné k o jedničku a pro nové k definujeme údaj M_k jako hodnotu čísla $X(i)$. V opačném případě není možné dosud nejdelší vybranou podposloupnost prodloužit a hodnota k se tedy nezmění. Může se ovšem stát, že číslo $X(i)$ nám umožní snížit některou z dříve stanovených hodnot M_j. Jak jsme již uvedli, platí stále nerovnost $M_1 < \ldots < M_k$. Je tedy možné najít takový index j, že

$$\begin{array}{llll} \text{buď} & j = 1 & \text{a} & X(i) \leqq M_1, \\ \text{nebo} & 1 < j \leqq k & \text{a} & M_{j-1} < X(i) \leqq M_j. \end{array}$$

Nastane-li ostrá nerovnost $X(i) < M_j$, můžeme snížit hodnotu M_j. Existuje totiž rostoucí vybraná podposloupnost délky $j-1$ končící číslem M_{j-1}, a protože $X(i) > M_{j-1}$, číslo $X(i)$ tuto podposloupnost prodlužuje na rostoucí podposloupnost délky j. Jejím posledním prvkem je právě číslo $X(i)$.

Uvedený rozbor je zároveň zdůvodněním správnosti navrženého algoritmu. Výpočet je jistě konečný, neboť je tvořen přesně n kroky představujícími zpracování jednotlivých prvků posloupnosti X. Konečnost každého z těchto kroků hned ukážeme. Při vhodné organizaci výpočtu lze dosáhnout časové složitosti algoritmu $O(n \log n)$. V každém z n kroků se totiž kromě jednoduchých akcí s konstantní časovou složitostí musí vyhledávat v poli M index j výše uvedené vlastnosti. Pokud bychom index j hledali prostým sekvenčním průchodem polem M, potřebovali bychom provést v každém kroku výpočtu až n operací, což by vedlo k celkové časové složitosti algoritmu $O(n^2)$. Vzhledem k uspořádání prvků pole M podle velikosti je zde ovšem možné určit index j binárním prohledáváním (půlením intervalů) a tedy s časovou složitostí $O(\log n)$. Odtud plyne časová složitost celého algoritmu $O(n \log n)$.

Matematické korespondenční semináře na severní Moravě

Josef Molnár, Jaroslav Švrček
(Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci)

Každý jsme jiný a ne každý umí předvést své znalosti a dovednosti v danou chvíli. Snad proto mnoha mladým matematikům vyhovuje právě forma matematického korespondenčního semináře (MKS). Jeho smysl — vyhledávání a výchova matematických talentů — je stejný jako v případě matematické olympiády, využívá přitom jiných forem a metod práce.

Nejinak je tomu také v případě olomouckého MKS, který navázal na tradici korespondenčního semináře organizovaného učiteli a studenty gymnázia M. Koperníka v Bílovci. Po vzniku tříd gymnázií se zaměřením na matematiku ve školním roce 1974/75 se hledaly různé formy mimoškolní činnosti. V Bílovci tak vznikl například sborník článků, jejichž autory byli žáci matematických tříd, s názvem Matematika a po vzoru slovenských kolegů inicioval profesor gymnázia M. Koperníka Dr. Jiří Váňa v roce 1980 korespondenční seminář, který fungoval pět let. Jeho úlohy řešilo vždy přibližně 60 studentů středních škol z celé republiky. Pro 30 nejlepších řešitelů se konalo v období jarních prázdnin soustředění finančně kryté z prostředků MŠ ČSR a JČSMF. Při soustředěních s přednáškami pomáhali učitelé moravských vysokých škol, chod semináře přitom zajišťovali studenti bílovského gymnázia sami pod vedením prof. Váni.

Seminář organizovaný na přírodovědecké fakultě UP v Olomouci vznikl z iniciativy posluchačů oboru matematická analýza a učitelů kateder matematiky na PřF UP. Začal pracovat ve školním roce 1986/87. Za pět let své existence proplul mnoha úskalími ekonomických, administrativních i personálních problémů. Svou činností však přispěl k vyhledávání a rozvoji matematických talentů, a to nejen na Moravě. Vždyť v jednotlivých ročnících se ho zúčastnilo vždy 150–200 řešitelů z celé naší republiky.

U jeho zrodu stáli Jarmila Ranošová a Petr Adámek, v té době studenti PřF UP, a učitelé PřF UP Dr. Jaroslav Švrček a Dr. Josef Molnár, který byl vedoucím všech pěti ročníků MKS. Spolupořadateli byli mj. Sm KV MO, olomoucká pobočka JČSMF, ODDM Olomouc, UP Olomouc a její mládežnické organizace.

Korespondenční část obsahovala v jednotlivých ročnících 4–5 zpravidla monotematických sérií po šesti úlohách různé obtížnosti. Každý řešitel si mohl vybrat úlohy podle svých shopností, navíc prémiové body částečně vyrovnávaly handicap mladších řešitelů a studentů „nematematických" tříd.

Již pravidlem se stalo konání závěrečného soustředění pro 30 nejlepších řešitelů v turistické základně ODDM Olomouc, která se nachází v malé obci Ochoz u Konice na Hané. Podle anket účastníků jsou ochozská soustředění velkou motivací pro řešitele

zejména svou neopakovatelnou atmosférou, která je dána kontinuálním propojením matematického i nematematického programu, kolektivem vedoucích a charakteristickým rázem jednotlivých soustředění, která se nesla například v duchu antiky, výletu do budoucnosti, „Černých baronů" a podobně. Od třetího ročníku se daří zajišťovat ještě další soustředění pozvaných řešitelů — zpravidla v Jeseníkách, a to v průběhu korespondenční části.

Organizátorům soustředění se osvědčil standardní program: dopoledne je věnováno přednáškám, část odpoledne tráví účastníci v přírodě nebo sportováním a pak do večeře pracují v semináři ch. Je potěšitelné, že i večer dávají účastníci přednost činnostem spojeným s rozvojem logického myšlení a prostorové představivosti. Jeden celý den v rámci soustředění je vždy vyhrazen pro GRAND PRIX — matematickou hru, kterou si oblíbili účastníci i organizátoři soustředění obou našich republik.

Přednášky na soustředění probíhají zpravidla dvě souběžně, takže účastníci mají možnost volby podle zájmu a individuální úrovně. Osvědčenými lektory a organizátory závěrečných soustředění jsou: RNDr. J. Molnár, CSc., RNDr. J. Srovnal, CSc., RNDr. J. Švrček, CSc., z řad studentů vysokých škol pak bývalí úspěšní olympionici a příznivci olomouckého MKS J. Ranošová, P. Adámek, A. Zach, P. Šleich, P. Calábek, V. Skopal, J. Ježková, J. Sedláčková, M. Zmeškalová a další, z nichž mnozí se podílejí také na přípravě textů a oprav úloh korespondenční části semináře.

Závěrem předkládáme čtenářům ukázku čtyř úloh různé obtížnosti, které byly zadány řešitelům olomouckého MKS ve školním roce 1989/90.

Zároveň nám dovolte vyslovit naše upřímné poděkování všem jmenovaným i nejmenovaným nadšencům, kteří se dosud podíleli na úspěšném chodu MKS na severní Moravě a přispěli tak k rozvoji mladých matematických talentů v ČSFR.

Úlohy

1. Rozhodněte, zda existuje trojúhelník, jehož všechny výšky jsou menší než 1 cm a jehož plocha je větší než 1 m^2.

2. Jedenáctičlenná komise má uloženy materiály v trezoru. Jakým nejmenším počtem zámků je nutno opatřit trezor a kolika klíči je třeba vybavit každého člena komise, aby libovolných 6 členů komise trezor otevřelo a přitom aby pro 5 členů komise byl trezor nedostupný?

3. Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla taková, že $ad - bc = 1$. Dokažte, že platí $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geqq \sqrt{3}$.

4. Najděte všechny spojité funkce f takové, že pro všechna reálná x platí $f(2x + 1) = f(x)$.

Řešení

1. Takový trojúhelník existuje, což dokážeme například takto: Uvažujme obdélník $ABCD$, jehož strana AB má délku 1 cm a strana BC délku d cm, kde $d > 40\,000$.

Nechť S je průsečík obou úhlopříček AC a BD. Snadno nahlédneme, že trojúhelník BCS má plochu větší než $10\,000\,\mathrm{cm}^2 = 1\,\mathrm{m}^2$, přitom všechny jeho výšky mají délku menší než 1 cm.

2. Členy komise je nutno vybavit klíči následujícím způsobem: Každým šesti členům komise přidělíme stejný klíč od téhož zámku. Zbývajících pět členů tento klíč nevlastní, tudíž trezor otevřít nemůže. Musí tedy existovat $\binom{11}{6}$ různých typů klíčů a stejný počet zámků u trezoru. Je-li tedy trezor opatřen $\binom{11}{6} = 462$ zámky, musí být od každého k dispozici 6 klíčů, to jest celkem $6 \cdot \binom{11}{6}$ klíčů. Má-li nyní každý člen komise z tohoto celkového počtu stejný počet $\frac{6}{11} \cdot \binom{11}{6}$ různých klíčů, máme zajištěno, že každých šest členů komise trezor otevře, přitom pět členů komise k tomu nestačí. Kdyby totiž existovala šestice členů komise, z nichž každý má $\frac{6}{11} \cdot \binom{11}{6} = \binom{10}{5} = 252$ různých klíčů od $\binom{11}{6} = 462$ zámků, která by neotevřela trezor, znamenalo by to, že pouze zbývajících pět členů vlastní klíč od některého zámku, který nemá k dispozici uvažovaná šestice členů. To je však v rozporu s přidělením klíčů od jednotlivých zámků. Trezor musí být opatřen minimálně 462 zámky, přitom každý člen komise musí být vybaven 252 různými klíči.

3. Podle předpokladu zřejmě platí

$$bc\sqrt{3} - ad\sqrt{3} = -\sqrt{3}.$$

Přičtením tohoto vztahu k nerovnosti $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geqq \sqrt{3}$ dostáváme nerovnost s ní ekvivalentní

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd + bc\sqrt{3} - ad\sqrt{3} \geqq 0. \tag{1}$$

Uvažujeme-li levou stranu nerovnosti (1) jako kvadratickou funkci f proměnné a, máme

$$f(a) = a^2 + (c - d\sqrt{3})a + b^2 + c^2 + d^2 + bd + bc\sqrt{3}.$$

Funkce f nabývá jen nezáporných hodnot, právě když její diskriminant D_f je nekladný. Tudíž nerovnost (1) je ekvivalentní s nerovností

$$D_f = (c - d\sqrt{3})^2 - 4(b^2 + c^2 + d^2 + bd + bc\sqrt{3}) \leqq 0. \tag{2}$$

Uvažujeme-li nyní levou stranu nerovnosti (2) jako kvadratickou funkci g proměnné b, tj.

$$g(b) = -4b^2 - 4(d + c\sqrt{3})b - 3c^2 - 2cd\sqrt{3} - d^2,$$

nabývá g jen nekladných hodnot, právě když je diskriminant D_g rovněž nekladný. Snadným výpočtem však zjistíme, že $D_g = 0$. S ohledem na ekvivalenci uvažovaných vztahů je tím ověřena platnost dokazované nerovnosti.

2. řešení. Uveďme nejprve dvě pomocná tvrzení.

LEMMA 1. Pro libovolná reálná čísla a, b, c, d platí identita

$$(ad - bc)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

LEMMA 2. Pro libovolné reálné x platí

$$2\sqrt{x^2+1}+x \geqq \sqrt{3}.$$

Důkaz prvního lemmatu je triviální, důkaz druhého lemmatu využívá postupné úpravy:

$$\begin{aligned}(2\sqrt{x^2+1}+x)^2 &= 4x^2+4+4x\sqrt{x^2+1}+x^2 = \\ &= (2x+\sqrt{x^2+1})^2+3 \geqq 3.\end{aligned}$$

Užijeme-li dále nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem na dvojici a^2+b^2, c^2+d^2 nezáporných čísel, dostáváme postupně s využitím lemmat 1 a 2

$$\begin{aligned}S &= a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd \geqq 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+(ac+bd) = \\ &= 2\sqrt{(ac+bd)^2+(ad-bc)^2}+(ac+bd) = \\ &= 2\sqrt{(ac+bd)^2+1}+(ac+bd) \geqq \sqrt{3},\end{aligned}$$

což bylo dokázat.

4. Ukážeme nejprve, že pro všechna reálná x platí $f(x) = f(-1)$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje reálné x, pro něž $f(x) \neq f(-1)$. Pro všechna celá nezáporná čísla n položme $a_n = \dfrac{x+1}{2^n} - 1$. Odtud bezprostředně plyne, že $a_n = 2a_{n+1} + 1$. Pro každé celé nezáporné n dle zadání platí $f(a_n) = f(a_0) = f(x)$, tudíž $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x) \neq f(-1)$, zatímco $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2^n}-1\right) = -1$. To je však spor se spojitostí funkce v bodě $x = -1$. Proto musí být $f(x) = f(-1)$ pro každé reálné x. Funkce f je tedy konstantní. Naopak každá konstantní funkce zřejmě zadání úlohy vyhovuje.

Korešpondenčný seminár vo východoslovenskom kraji

Martin Gavalec, Božena Mihalíková, Peter Mihók

História KMS

V školskom roku 1985/86 zavŕšil Korešpondenčný matematický seminár (KMS) vo Východoslovenskom kraji desiaty ročník svojej existencie. KMS je organizovaný od roku 1976 pre študentov stredných škôl skupinou učiteľov a študentov matematiky Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach.

Ako vznikla myšlienka organizovať KMS? V septembri 1976 sa pri Ružínskej priehrade konalo sústredenie vybraných riešiteľov MO, ktoré možno považovať za prvé sústredenie východoslovenského KMS. Boli na ňom uplatnené princípy z organizácie táborov mladých matematikov, ktorých základom je vytvorenie citovej klímy, priaznivej pre rozvoj tvorivého myslenia. Vhodná citová klíma bola vytváraná uplatňovaním zásady dobrovoľnosti a podnecovaním prirodzenej potreby telesného, duševného a societného rastu účastníkov. Matematický program založený na samostatnom experimentovaní a objavovaní, hry s matematickým obsahom, kolektívna súťaživosť a pestrosť denného programu — to všetko spolu s kamarátskym prístupom vedúcich vyvolalo výraznú zmenu klímy sústredenia. Vzrástla aktivita účastníkov na matematickom i nematematickom programe; prejavilo sa to napríklad aj na príprave a priebehu spoločných večerov, po ktorých nasledovali diskusie často do neskorých večerných hodín. Záver poslednej diskusie pri táboráku prekvapujúcim spôsobom demonštroval, akým intenzívnym zážitkom bolo sústredenie: účastníci vyhlásili, že sú do takej miery presvedčení o potrebe pravidelných vzájomných kontaktov, že sú ochotní sami si organizovať podobné sústredenia a zúčastňovať sa ich hoci aj na vlastné náklady. Od vedúcich žiadali pomoc pri zabezpečovaní matematického programu a prevzatia oficiálneho patronátu nad sústredeniami.

Napriek počiatočným ťažkostiam sa sústredenia napokon uskutočnili a teraz tvoria jednu z dvoch základných zložiek KMS. Organizačnej prípravy a vedenia sústredení sa ujala skupina matematikov z Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach. Dôležitým momentom bola podpora Odboru školstva Vsl. KNV, najmä zo strany inšpektora RNDr. Martina Lučivianského, L. Schwartza z Vsl. KV SZM a tiež porozumeniu riaditeľstva gymnázia na Šmeralovej ulici 9 v Košiciach, ktorí pomohli pri riešení problémov hospodárskeho charakteru. Spomedzi samotných stredoškolákov, účastníkov sústredení, vykonal v počiatočnom období pri ich príprave veľký kus práce J. Nižňanský. V školskom roku 1976/77 prebehlo ďalších päť sústredení väčšinou 2–3 dňových, v časových odstupoch 6–8 týždňov. Na sústredenia bol pozývaný stále ten istý kolektív vybraných riešiteľov MO, ktorí sa zúčastnili sústredenia na Ružíne. Sústredenia sa konali podľa zásad osvedčených na prvom sústredení.

Priebeh sústredení ukázal popri očakávaných kladných výsledkoch aj niektoré nedostatky. Došlo k diferencovaniu účastníkov, pričom časť z nich prejavovala o matematiku menší záujem, celková aktivita účastníkov poklesla. Krátky čas sústredení negatívne vplýval na vytváranie citovej klímy v kolektíve, pri problémovom zameraní programu sa riešenia len naznačovali a nedovádzali do konca. Výsledky v krajskom kole 26. ročníka MO ukázali, že olympionici majú ťažkosti s písomnou formuláciou nájdených riešení.

Snaha odstrániť uvedené nedostatky viedla ku vzniku korešpondenčného matematického seminára v takej forme, v akej v podstate pracuje dodnes. Počet sústredení sa znížil na tri ročne, ich dĺžka sa zvýšila na 5–6 dní. Sústredenia boli doplnené korešpondenčnou súťažou, na základe ktorej sa robí výber účastníkov sústredení.

Od roku 1977 sa v korešpondenčnej súťaži zadáva ročne 8–9 sérií úloh (po 4–6 príkladoch) a uskutočňujú sa ročne tri sústredenia. Počet riešiteľov korešpondenčnej súťaže sa pohybuje v rozpätí 50–100 z Východoslovenského kraja a 5–20 mimokrajských. Na sústredenia bolo pozývaných 30–35 účastníkov z Východoslovenského kraja a 4–8 mimokrajských účastníkov. Pre ilustráciu: za 10 rokov pôsobenia KMS bolo opravených približne 20 000 súťažných riešení, uskutočnilo sa 33 sústredení, k 180 úlohám boli napísané a rozmnožené komentáre. Do KMS bolo zapojených okolo 600 študentov z Československa, ale aj z Poľska a Maďarska.

Opravovanie úloh korešpondenčnej súťaže a časť organizačnej práce vykonávajú študenti Prírodovedeckej fakulty UPJŠ, prevažne bývalí účastníci KMS. Študenti PF UPJŠ sa tiež zúčastňujú na sústredeniach KMS a tým prispievajú ku kontinuite klímy. Starostlivosť o odbornú a organizačnú náplň KMS prebrali katedry matematiky PF UPJŠ, od roku 1983 v spolupráci s Krajským domom pionierov a mládeže v Košiciach. V KMS sa podarilo udržať a rozvinúť atmosféru nadšenia pre matematiku. Sústredenia svojou príťažlivou klímou motivujú k systematickej práci v korešpondenčnej súťaži. Tým sa nasledovne rozvíjajú matematické schopnosti žiakov. Výsledky východoslovenských účastníkov v celoštátnom kole MO za obdobie činnosti KMS presvedčivo dokumentujú účinnosť tejto formy práce s matematickými talentami. Napríklad, kým za prvých 25 ročníkov MO získal titul víťaza celoštátneho kola MO jediný účastník z Východoslovenského kraja, od 26. do 35. ročníka MO mal Východoslovenský kraj 17 víťazov kola MO.

Východoslovenský KMS krátko po svojom vzniku našiel nasledovníkov. Od roku začali pracovať podobné KMS v Bratislave, v Severomoravskom kraji (pri gymnáziu v Bílovci). Neskôr bol založený KMS v Stredoslovenskom kraji (1979) a v niektorých krajoch ČSR. Ich vplyv na výchovu matematických talentov je jednoznačne pozitívny.

Posledné sústredenie ...

V maturitnom ročníku pre človeka veľa končí. Pre maturantov-sústredencov začína čosi končiť už v zime. Čaká na nich posledné sústredenie. Alebo oni čakajú naň. Na sústredenie, ktoré sa zaradí k radu predchádzajúcich. Už len horko-ťažko ich dokážu spočítať na prstoch svojich rúk. Zvykli si na ne, a vlastne si ten koniec nevedia dosť dobre predstaviť. Neopakovateľná a predsa sa opakujúca atmosféra, akú len tak ľahko hocikde nepostretnú, starí známi kamaráti a priatelia, s ktorými prerozprávali,

prešarádili či prežužolili nejednu noc, neobyčajne bezprostredné vzťahy medzi nimi, medzi vedúcimi i medzi nimi a vedúcimi — toto všetko má byť o chvíľu minulosťou?

A potom, ani nevedia ako, ocitajú sa uprostred diania na tomto sústredení a na podobné úvahy už nieto času. Je zima, vonku je všade plno snehu, alebo aj nie, zatiaľ čo vnútri sa podľa pravidla najrovnomernejšieho rozdelenia sústredenci rozdeľujú do družín, ktoré budú tvoriť tradičnú a nevyhnutnú štruktúru pre organizáciu života sústredenia. Občas má pravidlo výnimku: jedna družina nie je celkom rovnomerná vo vzťahu k ostatným. V živote na sústredení sa jej, ak už nie vždy, tak určite väčšinou darí. Na čo nestačia jej maturanti, po celý čas tak trochu prenasledovaní tieňom blížiaceho sa konca, to s prehľadom zvládnu mladší, prípadne najmladší. Nevyhne sa síce patričnej dávke namyslenosti a uzavretosti do seba, ale ona si to v tom čase ešte neuvedomuje.

Postupne zožína úspech za úspechom na poli najrozličnejších súťaží poriadaných organizačným výborom sústredenia. Bezpečne vedie v celosústredennom súperení družín, hoci je ešte pred ňou GRAND PRIX — reťaz navzájom viac-menej poprepájaných úloh, ktorá je už takmer neodmysliteľnou súčasťou každého sústredenia. Preto si po krátkej porade svojich členov, môže dovoliť začať GP so slovami: „Je nepodstatné vyhrať, podstatné je zabaviť sa."

A tak sa spoločnými a zároveň rozdelenými silami púšťa do plnenia úloh. 500bodová úloha — naštartovať a doviezť pred ubytovňu bývalý traktor, ktorý parkuje v neďalekom lese a trikrát na ňom zatrúbiť — sa zdala byť v prvom momente nesplniteľná. Aké však je prekvapenie organizačného výboru, ktorý čiastočne oddychuje po úmornej práci spojenej s prípravou GP a čiastočne dokončuje túto prípravu, keď ho z tejto činnosti vyrušil prichádzajúci a trúbiaci traktor, v ktorom sedia jej členovia. S ujom traktoristom sa zoznámili v miestnom pohostinstve, popri prevádzaní sociologického prieskumu medzi miestnym obyvateľstvom. Prieskum pozostáva zo získania maximálneho počtu odpovedí miestnych občanov na otázky organizačného výboru typu: „Ako podľa vás vyzerá živý matematik", „Čo ste urobili preto, aby ste zbavili svet množín", „Čo si myslíte o nás", a tak ďalej. Spočiatku nie je pre družinu jednoduché len tak z ničoho nič zastaviť miestneho občana, zistiť jeho vek, povolanie a získať od neho odpovede; najmä poniektorí jej členovia dovtedy s cudzími ľuďmi nezvykli takmer vôbec komunikovať. Splnenie úlohy si však od nich vyžiada získanie aj tejto schopnosti, čo, hoci to ešte teraz nevedia, v budúcnosti párkrát ocenia.

Cestou späť na ubytovňu družina plní ďalšiu úlohu — komponuje svoju hymnu. A zatiaľ čo sa organizačný výbor dohaduje, či loviť alebo neloviť medveďa na konci GP, družina sa zaň nevedomky rozhodne v poslednej slohe svojej hymny: „Čo je nás po medveďovi / a po jeho veľkej hre, / nie je hlavné, či vyhráme, / hlavne, že sa bavíme".

Večer ešte prednesie spracované výsledky sociologického prieskumu, a potom sa už teší z velikánskej sladkej odmeny. Maturantom sa zdá, že je koniec, svoj smútok i vďaku vyjadrujú zápisom na nástenku prianí a sťažností. V tom čase ešte nevedia, že budúcnosť pre nich pripraví ešte nejedno podobné stretnutie.

Témy KMS v školskom roku 1986/87

1. Stereometrické úlohy
2. Funkcie a zobrazenia
3. Pravdepodobnosť
4. Komplexné čísla
5. Postupnosti a matematická indukcia
6. Planimetria
7. Teória čísiel
8. Aplikácie matematiky

Úlohy

1. Nech a, b sú prirodzené čísla také, že $a^2 + b^2$ je deliteľné číslom 21. Potom $a^2 + b^2$ je deliteľné aj číslom 441. Dokážte.

2. Nájdite všetky prirodzené čísla k, pre ktoré je číslo $2^k + 1\,472$ druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla.

3. Dokážte: ak n je zložené číslo, tak súčin všetkých jeho prirodzených deliteľov nie je menší ako $n^{\frac{3}{2}}$.

4. Dokážte, že číslo $3^{341} - 3$ nie je deliteľné číslom 341.

5. Dokážte, že každé prirodzené číslo a možno jediným spôsobom zapísať vo tvare $a = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_n \cdot n!$, kde $0 \leqq a_k \leqq k$ pre $k = 1, 2, \ldots, n$. Zapíšte v tomto tvare číslo 1 984.

6. Súčet piatich nezáporných čísiel je 1. Dokážte, že ich možno rozostaviť po obvode kruhu tak, aby súčet všetkých piatich súčinov dvoch susedných čísel nebol väčší ako $\frac{1}{5}$.

7. Prirodzené číslo nazveme absolútnym prvočíslom, ak je prvočíslom a ak pri ľubovoľnej permutácii jeho cifier opäť dostaneme prvočíslo. Dokážte, že v zápise absolútneho prvočísla nemôžu byť viac než tri rôzne cifry.

8. Riešte v obore celých čísel rovnicu

$$2x^2 + 3xy + y^2 = 35.$$

9. Dopravný podnik sa rozhodol zrušiť päť zastávok na autobusovej trati. Pôvodne mala trať 18 zastávok vrátane východzej a konečnej. Koľkými spôsobmi možno zrušenie uskutočniť, ak nesmú byť zrušené žiadne dve susedné zastávky, ani východzia a konečná zastávka?

10. Postupnosť $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je tvorená nasledovne: $a_0 = 3$, $a_1 = 13$, pre ďalšie jej členy platí $a_{k+2} = 8a_{k+1} - 15a_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dokážte, že táto postupnosť je rastúca a udajte jej prvý člen prevyšujúci 5^{100}.

11. Dokážte identitu

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k} = n(n-1)(n-2)2^{n-3}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

12. Je daných 12 červených, 9 modrých a 5 bielych gúľ. Gule rovnakej farby sú nerozlíšiteľné. Koľkými spôsobmi môžeme tieto gule rozdeliť dvom osobám, ak každá má dostať práve 13 gúľ?

13. Šachovnica 6×6 je pokrytá kockami domina. Dokážte, že jedna z horizontálnych alebo vertikálnych čiar pretínajúcich šachovnicu nepretína žiadne domino.

14. a) Koľkými spôsobmi môže otec rozdeliť svojim štyrom synom 100 Kčs?
b) O koľko sa počet možností zmenší, ak každý zo synov dostane aspoň 10 Kčs?

15. 15 chlapcov a 15 dievčat tancuje v kruhu tak, že sa striedajú. Koľkými spôsobmi sa takto môžu zoskupiť?

16. Koľkými spôsobmi je možné na *biele* polia šachovnice 8×8 postaviť 8 (rovnakých) veží, aby sa žiadne dve neohrozovali?

17. Dokážte, že ak sa turnaj 23 hráčov odohrá za dva dni, potom existujú štyria hráči, ktorí všetky svoje vzájomné zápasy odohrajú v ten istý deň.

18. Koľkými spôsobmi možno vybrať tri z vrcholov pravidelného n-uholníka ($n \geqq 3$) tak, aby tvorili vrcholy
a) rovnoramenného
b) pravouhlého
c) tupouhlého trojuholníka?

19. Dané sú reálne čísla a, b. Koľko existuje rôznych 100-členných aritmetických postupností, ktorých členmi sú a, b?

20. Ráno boli všetky izby v hoteli obsadené. V priebehu dňa prišlo jednotlivo 15 nových hostí a 20 hostí izby uvoľnilo. Koľkými spôsobmi mohli prichádzať na recepciu hostia tak, aby nikto nemusel čakať, kým sa niektorá izba uvoľní? (Uvažujeme jednoposteľové izby.)

21. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x.$$

22. Určte, pre aké hodnoty parametra a má rovnica

$$x^3 - ax + 2a + 32 = 0$$

tri reálne korene.

23. Riešte nerovnicu

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}.$$

24. Riešte nerovnicu

$$\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3).$$

25. Riešte nerovnicu

$$\log_{x^3} \frac{|x - 5|}{6x} + \frac{1}{3} \geqq 0.$$

26. Nájdite všetky reálne čísla x spĺňajúce rovnicu

$$|x| - |x - 8| = |a + 4| + |4 - a|,$$

kde a je dané reálne číslo.

27. Pre ktoré hodnoty parametra a platia pre korene x_1, x_2 kvadratickej rovnice

$$2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$$

podmienky $x_1 < 1$, $x_2 > 1$?

28. Nájdite všetky reálne riešenia x, y sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 3y &= 0, \\ ax - y - 3 &= 0, \end{aligned}$$

kde a je dané reálne číslo.

29. Riešte rovnicu

$$\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = \frac{a \cos x + b}{b \sin x + a},$$

kde $a \neq 0$, $b \neq 0$.

30. Určte hodnoty $\sin x$, $\cos x$ v závislosti od parametra a, keď viete, že $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = a$.

31. V rovine $\mathbb{R}^2$ je daný konvexný štvoruholník $ABCD$ taký, že vzdialenosť každého vrcholu od každej strany, na ktorej neleží, je aspoň $\frac{3}{2}\sqrt{5}$. Dokážte, že obsahuje aspoň tri mrežové body.

32. Nájdite všetky hodnoty reálneho parametra λ, pre ktoré ležia všetky body konvexného obalu množiny $\{(0,0)\} \cup \mathsf{M}_\lambda$ na jednej priamke, kde M_λ je množina riešení sústavy

$$-x^2 + y \geqq 0, \quad x^2 + (y - \lambda)^2 \leqq 1, \quad x = \lambda.$$

33. Súčet množín je definovaný vzťahom $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \{a + b : a \in \mathsf{A}, b \in \mathsf{B}\}$. Ak A je neprázdna množina reálnych čísel s vlastnosťou $\mathsf{A} + \mathsf{A} = \mathsf{A}$, tak v A existuje nulová postupnosť (tj. postupnosť, ktorej limita je 0). Dokážte a zistite, či množina A musí obsahovať 0, ak obsahuje kladné aj záporné čísla.

34. Ak A je neprázdna konvexná množina bodov v rovine s vlastnosťou $\mathsf{A} + \mathsf{A} = \mathsf{A}$, tak v A existuje postupnosť $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že postupnosť $\{x_n^2 + y_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová. Dokážte a zistite, či je pravdivé tvrdenie, že ak $\mathsf{A} + \mathsf{A} = \mathsf{A}$ a v A existuje nulová postupnosť, tak A je konvexná množina.

35. Nech a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka, potom existuje trojuholník, ktorého strany majú dĺžku $\frac{a}{a+1}$, $\frac{b}{b+1}$, $\frac{c}{c+1}$. Dokážte.

36. Určte aký môže byť obsah trojuholníka so stranami $a \geqq b \geqq c$ v nasledujúcich prípadoch: 1) $a \leqq 1$; 2) $b \leqq 1$; 3) $c \leqq 1$. Pre ktoré trojuholníky dosiahne obsah nájdenú hodnotu?

37. Dokážte, že ak štvorec S je vpísaný do trojuholníka T tak, že jedna strana štvorca S leží na obvode T, potom obsah S je najviac polovica obsahu T. Určte všetky prípady, kedy nastane rovnosť.

38. Medzi všetkými trojuholníkmi s daným obsahom nájdite trojuholník s najmenším obvodom a trojuholník s najväčším obvodom.

39. Pre dĺžky strán a, b, c a pre obsah P ľubovoľného trojuholníka platí $a^2+b^2+c^2 \geqq \geqq 4P\sqrt{3}$. Dokážte a určte, kedy nastáva rovnosť.

40. Nech bod E je vnútorným bodom strany AC trojuholníka ABC. Rovnobežka s priamkou AB cez bod E pretne stranu BC v bode F, rovnobežka s priamkou AC cez bod F pretne stranu AB v bode G. Nájdite všetky body E také, že priamka EG je rovnobežná s priamkou BC.

41. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, ak sú dané súčty $b+c=p$, $c+a=q$ jeho strán a, b, c. Urobte diskusiu vzhľadom na p, q.

42. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom priesečník V jeho výšok delí výšku prechádzajúcu vrcholom A na polovicu, ak je daná veľkosť strany $|AB| = c$ a uhol $\alpha = |\sphericalangle CAB|$. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom k veľkosti uhla α.

43. Nech kružnice k_1, k_2, k_3 majú stredy vo vrcholoch ostroúhleho trojuholníka ABC a prechádzajú priesečníkom V jeho výšok. Dokážte, že po dvojiciach sa k_1, k_2, k_3 pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

Riešenia

1. Využime pomocné tvrdenia: ak $3 \mid a^2+b^2$ ($7 \mid a^2+b^2$), potom $9 \mid a^2+b^2$ ($49 \mid a^2+b^2$). Dôkaz sa najčastejšie robí úvahou o zvyškoch pri delení a, b číslami 3 a 7; tak dospejeme k tomu, že $3 \mid a$, $3 \mid b$, $7 \mid a$, $7 \mid b$. Zaujímavý je dôkaz pomocou malej Fermatovej vety (ak p je prvočíslo a p nedelí c, potom $p \mid c^{p-1}-1$). Pre $p=7$ platí: ak 7 nedelí a ani b, potom $7 \mid a^6-b^6-2=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)-2$, čo je spor s $7 \mid a^2+b^2$. Ak $7 \mid a$, $7 \mid b$, tvrdenie platí triviálne.

Analogicky pre $p=3$.

2. Mnohí riešitelia dosadzovaním $k=1,2,\ldots$, prišli na to, že spomedzi týchto čísel vyhovuje iba $k=7$ ($2^7+1\,472=40^2$). Bolo však potrebné dokázať, že je to riešenie jediné (tj., že pre $k \geqq 8$ číslo $2^k+1\,472=2^k+2^6\cdot 23=2^6(2^{k-6}+23)$ už nemôže byť štvorcom žiadneho prirodzeného čísla). Keby $2^6(2^{k-6}+23)$ bolo štvorcom, muselo by byť štvorcom aj číslo 2^n+23, $n \geqq 2$, čo znamená, že by existovalo také prirodzené číslo m, pre ktoré $2^n+23=(5+m)^2$.

Úpravou dostávame: $2^n+23=25+10m+m^2$, odkiaľ vyplýva, že m je párne číslo, $m=2p$, a teda $2^n-4p^2-20p=2$. Ale pretože $n \geqq 2$, je číslo na ľavej strane deliteľné štyrmi, čo je hľadaný spor (pravá strana štyrmi deliteľná nie je). Vyhovuje teda jediné prirodzené číslo $k=7$.

3. Nech $d_1, \ldots, d_k$ sú všetky navzájom rôzne delitele čísla n. Ku každému z týchto deliteľov d_i priraďme združený deliteľ $\frac{n}{d_i}$. Dá sa ľahko dokázať, že $\{d_1, \ldots, d_k\} = \left\{\frac{n}{d_1}, \ldots, \frac{n}{d_k}\right\}$, čo znamená, že

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = \frac{n}{d_1} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{d_k},$$

odkiaľ

$$d_1^2 \cdot d_2^2 \cdot \ldots \cdot d_k^2 = n^k.$$

Pre súčin všetkých prirodzených deliteľov čísla n teda platí

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = n^{\frac{k}{2}},$$

a ak je n zložené, tak $k \geqq 3$, a teda

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = n^{\frac{k}{2}} \geqq n^{\frac{3}{2}}.$$

4. Je potrebné si uvedomiť, že číslo $3^{341} - 3$ má príliš veľa cifier na to, aby bolo vhodné riešiť úlohu tak, že ho budeme číslom 341 deliť! Najvtipnejší je asi nasledovný postup: upravme $341 = 11 \cdot 31$ a $3^{341} - 3 = (3^{341} - 3^{331}) + (3^{331} - 3)$. Keďže

$$3^{331} - 3 = 3 \cdot (3^{330} - 1) = (3^{11} - 3)(3^{320} + 3^{310} + \ldots + 1),$$
$$3^{331} - 3 = 3 \cdot (3^{330} - 1) = (3^{31} - 3)(3^{300} + 3^{270} + \ldots + 1),$$

podľa známej malej Fermatovej vety (ak p je prvočíslo, tak $a^p - a$ je deliteľné číslom p) je $3^{331} - 3$ deliteľné 11-timi aj číslom 31, teda i číslom 341. Keby bolo číslo $3^{341} - 3$ deliteľné číslom 341, muselo by aj číslo $3^{341} - 3^{331}$ byť deliteľné 11-timi a 31-kou. Ale číslo $3^{341} - 3^{331} = 3^{330}(3^{11} - 3)$ je deliteľné iba 11-timi, ale nie číslom 31, čo bolo potrebné dokázať.

5. Najskôr ukážeme jednoznačnosť takéhoto zápisu. Nech

$$a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_n \cdot n! = a = b_1 \cdot 1! + b_2 \cdot 2! + \ldots + b_n \cdot n!,$$

kde $0 \leqq a_i, b_i \leqq i$, a nech existuje taký index j, že $a_j \neq b_j$. Označme $k = \min\{i : a_i \neq b_i\}$, tj. pre všetky $i < k$ je $a_i = b_i$. Potom

$$\begin{aligned} a_k \cdot k! + a_{k+1} \cdot (k+1)! + a_{k+2} \cdot (k+2)! + \ldots + a_n \cdot n! = \\ = b_k \cdot k! + b_{k+1} \cdot (k+1)! + b_{k+2} \cdot (k+2)! + \ldots + b_n \cdot n! \end{aligned} \tag{1}$$

Môžeme predpokladať $a_k > b_k$. Keďže $0 < a_k \leqq k$, platí $a_k \cdot k! \mid m!$ pre $k+1 \leqq m \leqq n$. Potom z (1) máme, že

$$a_k \cdot k! \cdot A = b_k \cdot k! + a_k \cdot k! \cdot B,$$

kde A, B sú celé. Z toho vyplýva, že $a_k \cdot k! \mid b_k \cdot k!$, ale $a_k \cdot k! > b_k \cdot k!$, čo je spor. Tým je jednoznačnosť ukázaná. Ďalej ukážeme existenciu takéhoto zápisu. Nech $a \geqq 1$ je ľubovoľné prirodzené číslo. Nájdime také n, pre ktoré je $n! \leqq a < (n+1)!$. Potom a vieme napísať vo tvare $a = a_n n! + p_n$, kde $0 \leqq a_n \leqq n$, $0 \leqq p_n \leqq n!$, a_n, p_n sú celé čísla.

Ďalej

$$\begin{aligned}
p_n &= a_{n-1}(n-1)! + p_{n-1}, \quad \text{kde} \quad 0 \leqq a_{n-1} \leqq n-1, \quad 0 \leqq p_{n-1} < (n-1)!,\\
p_{n-1} &= a_{n-2}(n-2)! + p_{n-2}, \quad \text{kde} \quad 0 \leqq a_{n-2} \leqq n-2, \quad 0 \leqq p_{n-2} < (n-2)!,\\
&\vdots\\
p_3 &= a_2 \cdot 2!, \quad \text{kde} \quad 0 \leqq a_2 \leqq 2, \quad 0 \leqq p_2,\\
p_2 &= a_1 \cdot 1!, \quad \text{kde} \quad 0 \leqq a_1 \leqq 2,
\end{aligned}$$

a teda

$$a = a_n n! + a_{n-1}(n-1)! + \ldots + a_2 \cdot 2! + a_1 \cdot 1!,$$

pričom $0 \leqq a_k \leqq k$, pre $k = 1, 2, \ldots, n$. Pomocou uvedeného postupu máme

$$1\,984 = 2 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 0 \cdot 1!.$$

6. Nech a, b, c, d, e sú nezáporné čísla, také že $a + b + c + d + e = 1$. Vychádzame z nerovnosti medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom nezáporných čísel

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{5}} \geqq \frac{a + b + c + d + e}{5} = \frac{1}{5}.$$

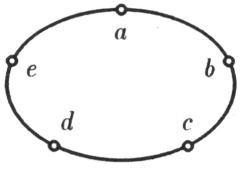
Po umocnení (obidve strany sú nezáporné) a úprave máme $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqq \frac{1}{5}$, teda

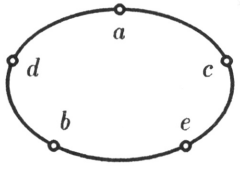
$$(a + b + c + d + e)^2 - 2(ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de) \geqq \frac{1}{5}.$$

Odtiaľ využitím rovnosti $a + b + c + d + e = 1$ dostaneme

$$(ab + bc + cd + de + ea) + (ac + ce + eb + bd + da) \leqq \frac{2}{5}.$$

Teda aspoň jeden z výrazov v zátvorkách nie je väčší než $\frac{1}{5}$. Hľadaným usporiadaním je jedno z týchto usporiadaní.





7. Zrejme absolútne prvočíslo nemôže obsahovať číslice 0, 2, 4, 6, 8 kvôli deliteľnosti dvoma a číslicu 5 kvôli deliteľnosti piatimi. Ukážeme, že ak číslo obsahuje každú z číslic 1, 3, 7, 9, tak nie je absolútnym prvočíslom. Všimnime si, že čísla 1 379, 1 793, 9 137, 1 739, 1 397, 1 973 dávajú pri delení siedmimi zvyšky postupne 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Nech číslo A obsahuje každú z číslic 1, 3, 7, 9 a číslicu $b \geqq 0$. Pomocou permutácie jeho cifier môžeme utvoriť číslo $B = 10\,000 \cdot b + 1\,379$. Ak teraz $10\,000 \cdot b$ dáva pri delení siedmimi zvyšok z, vyberme takú permutáciu p čísla 1 379, ktorá pri delení siedmimi dáva zvyšok $7 - z$, potom číslo $C = 10\,000 \cdot b + p$ vzniklo z A permutáciou jeho cifier a je deliteľné siedmimi. Teda A nie je absolútne prvočíslo, z čoho vyplýva, že každé absolútne prvočíslo obsahuje najviac tri rôzne cifry.

8. Rovnicu upravíme na tvar $(2x + y)(x + y) = 35$. Keďže rovnicu riešime v obore celých čísel, sú aj $2x + y$, $x + y$ celé. Pre rozklad čísla 35 na súčin dvoch celých čísel máme 8 možností: $35 = 1 \cdot 35 = 35 \cdot 1 = (-1)(-35) = (-35)(-1) = 7 \cdot 5 = 5 \cdot 7 = (-5)(-7) = (-7)(-5)$, ktorým zodpovedá 8 riešení rovnice. Tieto získame riešením sústavy dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych. Sú to riešenia $(-34, 69)$, $(34, -69)$, $(34, -33)$, $(-34, 33)$, $(2, 3)$, $(-2, -3)$, $(-2, 9)$, $(2, -9)$.

9. Po zrušení 5 zastávok ostalo na trati 13 zastávok, medzi nimi 12 medzier. Keďže nebola zrušená ani prvá ani posledná zastávka, tak zrušené zastávky pochádzajú z týchto 12 medzier, pričom z každej najviac jedna (lebo neboli zrušené žiadne dve susedné). Stačí teda určiť, koľkými spôsobmi možno vybrať 5 medzier z 12 (v nich sú zrušené zastávky), a to je $\binom{12}{5} = 792$.

10. Časť riešiteľov nenašla explicitný vzorec, preto pracovali s rekurentným zadaním postupnosti. Indukciou, väčšinou však veľmi ťažkopádne, dokazovali, že postupnosť je rastúca. Jedine M. Foltin si všimol, že $3a_k < a_{k+1}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$, a dokázal to triviálnou indukciou: je $3a_0 < a_1$ a z predpokladu $3a_k < a_{k+1}$ vyplýva, že

$$a_{k+2} - 3a_{k+1} = 8a_{k+1} - 15a_k - 3a_{k+1} = 5(a_{k+1} - 3a_k) > 0,$$

teda $a_{k+2} > 3a_{k+1}$.

Druhú časť úlohy nevyriešil v tejto skupine riešiteľov nikto, najsilnejší výsledok dosiahol opäť M. Foltin: dokázal, že pre všetky $k \in \mathbb{N}$ je $a_{k+1} < 5a_k$, potom zrejme $a_k < 3 \cdot 5^k$, teda prvý člen ktorý by mohol prevýšiť 5^{100} je a_{100}, lebo $a_{99} < 3 \cdot 5^{99} < 5^{100}$.

Väčšina riešiteľov dokázala explicitný vzorec $a_k = 3^k + 2 \cdot 5^k$, z ktorého ľahko vyplýva monotónnosť aj to, že hľadaný člen je a_{100}. Niektorí vzorec odpozorovali z prvých niekoľkých členov, iní uviedli aj spôsob určenia takéhoto explicitného predpisu z rekurentného zadania postupnosti.[1])

11. Riešitelia využili rovnosť

$$2^{n-3} = (1 + 1)^{n-3} = \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-3}{k-3}$$

[1]) Explicitný vzorec nájdeme tak, že hľadáme geometrické postupnosti, ktoré spĺňajú daný rekurentný vzťah. Dosadením takej postupnosti $c\lambda^k$ do rekurencie dostaneme kvadratickú rovnicu $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0$, ktorá má korene $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Potom platí, že všeobecné riešenie danej rekurentnej rovnice má tvar $a_k = A \cdot 3^k + B \cdot 5^k$. Z počiatočnej podmienky $a_0 = 3$, $a_1 = 13$ dostaneme $A = 1$, $B = 2$.

a fakt, že pre $n = 0, 1, 2$ sú obe strany uvažovanej identity nulové. Potom úpravami dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k} = \sum_{k=3}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k(k-1)(k-2) =$$

$$= \sum_{k=3}^{n} \frac{(n-3)!n(n-1)(n-2)}{(k-3)!(n-k)!} =$$

$$= n(n-1)(n-2) \sum_{k=3}^{n} \binom{n-3}{k-3} = n(n-1)(n-2)2^{n-3}.$$

Iné riešenie poslal M. Engliš. Ten využil rovnosť

$$(z+2)^n = (z+1+1)^n.$$

Koeficienty pri z^m na oboch stranách rovnosti sa musia rovnať; z binomickej a trinomickej vety dostávame

$$\binom{n}{m} \cdot 2^{n-m} = \frac{n!}{i!j!m!},$$

kde $i + j + m = n$. Položme $n - i = k$, potom po úpravách pre $k = 0, 1, \ldots, n$ vyjde

$$\binom{n}{m} 2^{n-m} = \sum_{m \leqq k \leqq n} \binom{n}{k} \binom{k}{m},$$

odkiaľ pre $m = 3$ dostaneme

$$\binom{n}{3} 2^{n-3} = \sum_{m=3}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{3}$$

a po vynásobení oboch strán číslom 6 máme dokazovanú identitu.

I. Tereščák použil 3. deriváciu polynómu

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

a dostal

$$n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k}x^{k-3},$$

čo pre $x = 1$ dáva požadovanú rovnosť.

12. Najčastejším typom riešenia bolo hľadanie všetkých možností pomocou rôznych systémov. Najekonomickejšie bolo rozdeliť si prípady podľa toho, koľko bielych gúľ dostane prvá osoba. V šiestich možnostiach (0, 1, 2, 3, 4, 5 bielych gúľ) vyšlo postupne $9 + 10 + 10 + 10 + 10 + 9 = 58$ možností.

Iné riešenia využíva vytvárajúcu polynomickú funkciu: počet rozdelení je rovný koeficientu pri x^{13} v polynóme $(1+x+\ldots+x^5)(1+x+x^2+\ldots+x^9)(1+x+x^2+\ldots+x^{13})$. Je možné odvolať sa tiež na výsledky zo ŠMM č. 29 a 45.

P. Krtouš riešil úlohu takto: Je $6 \cdot 10 = 60$ možností, ako môže jedna z osôb dostať biele a modré gule. Vo všetkých prípadoch okrem 0+0 a 5+9 možno kombináciu doplniť červenými guľami do 13. Výsledok je teda $60 - 2 = 58$.

13. Nech je šachovnica ľubovoľne pokrytá 18 kockami domina. Každá z desiatich priamok (5 horizontálnych, 5 vertikálnych), ktorá pretína šachovnicu, ale nepretína žiadne pole tejto šachovnice, rozdelí šachovnicu na dve časti tak, že v každej z týchto častí je *párny* počet polí. Preto, ak čiara pretína domino, musí preťať vždy *párny* počet domín (aspoň dve). Keďže čiar je desať a domín iba 18, podľa Dirichletovho princípu musí existovať čiara, ktorá nepretína žiadne domino.

14. a) Uložme 100 jednokorunových mincí do radu. Troma paličkami ich rozdeľme na 4 podmnožiny, ktoré predstavujú peniaze pripadajúce jednotlivým synom. (Uvážte, aká pozícia paličiek určuje sumu 0 Kčs pre niektorého syna.) Teda ide o to vybrať zo 101 medzier (99 medzier medzi mincami a pozícia pred a za mincami) tri miesta pre paličky, pričom vybrané miesta sa môžu opakovať. To je možné urobiť $\binom{3+101-1}{3} = 176\,851$ spôsobmi.

b) Úlohu prevedieme na predchádzajúci prípad: Otec dá vopred každému synovi po 10 Kčs a rovnakým spôsobom ako v a) rozdeľuje zvyšných 60 Kčs. Tým sa počet možností zmenší o 137 140.

15. 15 chlapcov môžeme do radu postaviť 15! spôsobmi. Pri postavení do kruhu, ak rozostavenia vzniknuté pootočením kruhu považujeme za rovnaké, je zrejme 15-krát menej možností, teda 14!. Ak sa chlapci majú v rozostavení s dievčatami striedať, môžeme teraz do medzier medzi chlapcami (je ich 15) rozostaviť dievčatá 15! spôsobmi. Celkový počet spôsobov je teda $14! \cdot 15!$.

16. Predpokladali sme, že dve veže sa podľa šachových pravidiel ohrozujú, ak stoja v tom istom riadku alebo stĺpci šachovnice. (Samozrejme inak je počet spôsobov rozostavenia 8 veží $\binom{32}{8}$). Úloha je veľmi ľahká. Stačí si totiž uvedomiť, že ak označíme riadky a stĺpce šachovnice zaužívaným spôsobom, navzájom sa ohrozujú iba veže z riadkov 1, 3, 5, 7 (respektíve 2, 4, 6, 8) a stĺpcov a, c, e, g (respektíve b, d, f, h). Keďže máme 8 veží, v každom riadku i stĺpci bude stáť práve jedna veža. Ak postavíme vežu ľubovoľne do 1. riadku na biele pole, máme 4 možnosti, ale potom do 3. riadku ju môžeme postaviť iba 3 spôsobmi, do piateho riadku dvoma spôsobmi a v 7. riadku je už postavenie veže vynútené (1 spôsob). Využijúc pravidlo súčinu dostávame 4! možností. Analogicky to platí pre veže umiestnené v riadkoch 2, 4, 6, 8. Celkovo teda môžeme rozmiestniť veže $(4!)^2 = 576$ spôsobmi.

17. Pri riešení tejto úlohy je výhodné použiť Dirichletov princíp (pozri ŠMM č. 25). Priraďme hráčom vrcholy a zápasom hrany úplného grafu s 23 vrcholmi, pričom hranu zafarbíme bielou (resp. čiernou) farbou, ak príslušní hráči odohrali vzájomný zápas prvý (resp. druhý) deň. Zvoľme ľubovoľný vrchol A; podľa Dirichletovho princípu existuje aspoň jedenásť vrcholov , ktoré sú s ním spojené hranou tej istej farby. Ľahko sa dokáže, že nemôže nastať taká situácia, aby sa v každom vrchole schádzalo práve 11 bielych a práve 11 čiernych hrán (zdôvodnite!), a preto musí existovať taký vrchol A_0, ktorý je spojený s aspoň 12 vrcholmi tej istej farby. Ďalej sa už pokračuje tak, ako v príklade 34 (ŠMM 25, str. 48). Niektorí dokázali, že už pri turnaji 20 hráčov musí uvedená situácia nastať. Dá sa dokázať, že štvorica hráčov danej vlastnosti musí existovať aj pri turnaji 18 hráčov, pričom je možné turnaj 17 hráčov vyžrebovať tak, že žiadna štvorica hráčov neodohrá vzájomné zápasy v ten istý deň. Nájdenie takého

rozlosovania je však veľmi náročné.

18. Pri diskusii je treba uvážiť vždy niekoľko možností. Keďže postup riešenia je v podstate jednoduchý, uvedieme iba výsledky:

a) Z vrcholov pravidelného n-uholníka možno vybrať tri vrcholy tak, aby tvorili rovnoramenný trojuholník r_n spôsobmi, kde

(i) $r_n = \frac{1}{2}n(n-2)$, ak n je párne a nie je deliteľné tromi,
(ii) $r_n = \frac{1}{2}n(n-2) - \frac{2}{3}n$, ak n je párne a je deliteľné tromi,
(iii) $r_n = \frac{1}{2}n(n-2)$, ak n je nepárne a nie je deliteľné tromi,
(iv) $r_n = \frac{1}{2}n(n-2) - \frac{2}{3}n$, ak n je nepárne a je deliteľné tromi.

b) Ak je n párne, je možné utvoriť $\frac{1}{2}n(n-2)$ pravouhlých trojuholníkov; ak n je nepárne, žiaden z trojuholníkov, ktoré tvoria vrcholy, nie je pravouhlý.

c) Ak je n párne, možno vybrať $\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}n-1\right)\left(\frac{1}{2}n-2\right)$ rôznych tupouhlých trojuholníkov; ak je n nepárne, je hľadaný počet $\frac{1}{2}n \cdot \frac{1}{2}(n-1)\left(\frac{1}{2}(n-1)-2\right)$.

19. n-člennou aritmetickou postupnosťou rozumieme takú usporiadanú n-ticu reálnych čísel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, pre ktorú platí $a_{i+1} - a_i = d$ (diferencia), pre každé $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Z definície ľahko vyplýva, že ak sú dané dva členy $a_i = a$, $a_j = b$, $i \neq j$, tejto postupnosti, všetky ostatné členy sú už jednoznačne určené. Stačí teda dokázať, že ak $a \neq b$, tak existuje práve toľko rôznych postupností, koľkými spôsobmi môžeme vybrať spomedzi čísel 1, 2, ..., n indexy i, j tak, že $a_i = a$ a $a_j = b$. (Odôvodnite pomocou diferencie d.) Potom je už zrejmé, že v prípade $a \neq b$ existuje práve $100 \cdot 99$ rôznych 100 členných postupností, ktorých členmi sú a, b.

Ak $a = b$, tak jedine konštantná postupnosť $d = 0$ vyhovuje zadaniu úlohy, pretože vtedy musí postupnosť obsahovať to isté číslo na dvoch rôznych miestach.

20. Za jeden spôsob príchodu pokladáme usporiadanú 35-ticu, v ktorej udalosť, že hosť prišiel, označíme 1, a že odišiel 0 (čiže nám nezáleží na konkrétnom hosťovi). Celkový počet príchodov je $\binom{35}{20}$, od ktorého však musíme odčítať počet tých 35-tíc, v ktorých pred nejakým miestom je väčší počet 1 ako 0.

Vezmime jednu nevyhovujúcu 35-ticu. Nech i je prvé z miest, kde hosť musí čakať, teda pred ním je rovnaký počet 0 a 1. Vytvorme 36-ticu, ktorá na prvom mieste bude mať 0 a ďalej bude mať našu 35-ticu. Vymeňme navzájom 0 a 1 v 36-tici až po pôvodné i-te miesto (včítane). Počet núl a jednotiek sa nezmenil (prečo?). Z tejto 36-tice dokážeme získať každú 36-ticu, ktorá má na 1. mieste jednotku takto: v 36-tici je 15 jednotiek a 21 núl — tj. musí na j-tom mieste nastať prípad, že pred ním bude rovnaký počet 1 a 0 a na j-tom mieste bude 0. Opäť vymeníme navzájom 0 a 1 až po j-te miesto včítane. Vynechajme prvú nulu — dostaneme nevyhovujúcu 35-ticu. Takže počet nevyhovujúcich 35-tíc sa rovná počtu všetkých usporiadaných 36-tíc (15 jedničiek, 21 núl), ktoré majú na prvom mieste 1 a tých je $\binom{35}{21}$. Počet príchodov hostí je teda $\binom{35}{20} - \binom{35}{21} = 927\,983\,760$.

21. Z počiatočných podmienok

$$x \geqq 0, \quad a + x \geqq 0, \quad a = \sqrt{a+x}$$

plynie $a = 0$ alebo $a \geqq 1$. Ak označíme $\sqrt{a+x} = y$, dostaneme rovnice

$$a + x = y^2,$$
$$a - y = x^2.$$

Ak ich od seba odčítame a upravíme, vyjde

$$(y - x - 1)(y + x) = 0.$$

Do rovnice $y - x - 1 = 0$ dosadíme za y a vypočítame

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}.$$

Keďže $x_2 = \frac{1}{2} - 1 - \sqrt{4a-3}$ nespĺňa podmienku $x \geqq 0$, je riešením danej rovnice iba

$$x = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}.$$

Často riešitelia robia tú chybu, že do rovnice $x = -y$ dosadia za y. To je však nekorektné, lebo $x \geqq 0$, $-y \leqq 0$. Rovnosť platí len v prípade, že $x = -y = 0$, $\sqrt{a+x} = 0$, takže $a = 0$.

Elegantnejšie riešenie dostaneme, ak rovnicu umocníme (tým dostaneme podmienku $a \geqq x^2$) a opäť umocníme, takže $a^2 - a(2x^2+1) + x^4 - x = 0$. Riešime ju ako kvadratickú rovnicu v a, ktorej korene sú

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2+1)^2 - 4(x^4 - 1)}}{2} = \begin{cases} x^2 + x + 1, \\ x^2 - x. \end{cases}$$

Vzhľadom na podmienku $a \geqq x^2$ dostaneme pre $a = a_1$ rovnicu $x^2 + x + 1 - a = 0$, ktorú sme riešili v predchádzajúcom odstavci, pre $a = a_2$ potom vychádza $a = x = 0$.

22. Z tvaru krivky kubickej paraboly vyplýva, že rovnica má tri korene, ak o funkcii $f(x) = x^3 - ax + 2a + 32 = 0$ platí: existujú $x_1 < x_2$ také, že

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0, \quad f(x_1) > 0, \quad f(x_2) < 0.$$

Ak položíme prvú deriváciu rovnú nule, dostaneme kvadratickú rovnicu $3x^2 - a = 0$, čiže

$$x_1 = -\sqrt{\frac{a}{3}}, \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{a}{3}}, \qquad a > 0.$$

Je $f(x_1) > 0$ pre všetky a (o tom sa presvedčíme dosadením do funkcie). Aby bolo $f(x_2) < 0$, musí byť (opäť po dosadení za x do f)

$$3a + 48 < a\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

a) Ak $a > 48$, potom $\sqrt{\frac{a}{3}} > 4$, teda $a\sqrt{\frac{a}{3}} > 4a > 3a + 48$.

b) Ak $a \leqq 48$, potom $\sqrt{\frac{a}{3}} \leqq 4$, teda $a\sqrt{\frac{a}{3}} \leqq 4a \leqq 3a + 48$.

Odtiaľ vyplýva. že rovnica má tri rôzne korene pre $a > 48$.

23. Ak x je riešením danej nerovnice, tak

$$x \neq 0, \quad \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \geq 0, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{2} > 0.$$

Z týchto podmienok vyplýva, že

$$x \in \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right\rangle \tag{1}$$

Po umocnení a úprave (ktorá je pri podmienke (1) ekvivalentná) máme $x \in \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right\rangle \cap$ $\cap\, (1, \infty)$. Takže nerovnici vyhovujú všetky $x \in \left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right\rangle$.

24. Ak x je riešením tejto nerovnice, potom vzhľadom na to, že v nej vystupuje $\log_2 x$, musí byť $x > 0$. Pri tejto podmienke je[2])

$$\log_{\frac{1}{2}} x^2 = 2 \log_{\frac{1}{2}} x = 2 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -2 \log_2 x$$

a podobne $\log_4 x^2 = \log_2 x$. Potom pôvodnú nerovnicu môžeme písať vo tvare

$$\sqrt{5} \log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3 > \sqrt{5}(\log_2 x - 3).$$

Vzhľadom na odmocninu musí byť

$$\log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3 \geq 0, \quad \text{tj.} \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle \cup (8, \infty).$$

Ak je $\sqrt{5}(\log_2 x - 3) < 0$, tj. ak $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$, nerovnosť platí. Inak môžeme obe strany nerovnice umocniť; potom

$$(\log_2 x - 4)(\log_2 x - 3) < 0, \quad \text{tj.} \quad x \in (8, 16).$$

Nerovnici teda vyhovujú všetky $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle \cup (8, 16)$.

25. Ak x je riešením nerovnice, tak

$$x > 0, \qquad x \neq 1, \qquad x \neq 5. \tag{1}$$

Nerovnicu upravíme na tvar

$$\log_{x^3} \frac{|x-5|}{6x} \geq \log_{x^3} \frac{1}{x}. \tag{2}$$

Ďalej sa úloha rozpadá na dve časti: pre $x > 1$ sa odlogaritmovaním znamienko nerovnosti v (2) nemení a dostávame $x \geq 11$, v druhom prípade pre $0 < x < 1$ sa nerovnosť obráti a dostávame $x \in (0, 1)$. Nerovnici teda vyhovujú všetky $x \in (0, 1) \cup \langle 11, \infty)$.

[2]) logaritmovaním rovnosti $x = a^{\log_a x}$ dostávame $\log_b x = \log_a x \log_b a$ (uvedený vzťah dostaneme pre $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$)

26. Keďže pre každé reálne čísla a, b platia nerovnosti

$$|a-b| \geqq |a| - |b| \qquad \text{a} \qquad |a+b| \leqq |a| + |b|,$$

dostávame odhad

$$8 = |x-(x-8)| \geqq |x| - |x-8| = |a+4| + |4-a| \geqq |(a+4)+(4-a)| = 8,$$

a teda rovnici môžu vyhovovať len tie hodnoty parametra a a neznámej x, pre ktoré nastáva rovnosť, teda musí platiť

$$|a+4| + |4-a| = 8 \qquad \text{a tiež} \qquad |x| - |x-8| = 8.$$

Odtiaľ hneď vyplýva riešenie. Riešením rovnice pre každé $a \in \langle -4, 4\rangle$ je každé $x \in \langle 8, \infty)$. Pre iné hodnoty parametra a nemá rovnica žiadne riešenie.

27. Pre $a = 0$ má rovnica len jeden koreň, ktorý nemôže byť súčasne väčší aj menší ako 1.

Nech $a \neq 0$. Parabola $f(x) = 2ax^2 - 2x - 3a - 2$ rozdelí rovinu na tri množiny

$$\mathsf{M}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < f(x)\},$$
$$\mathsf{M}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\},$$
$$\mathsf{M}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > (x)\}.$$

Podmienky úlohy hovoria, že ak $x_1 < x_2$ sú korene danej rovnice, tak $1 \in \langle x_1, x_2\rangle$. Teda pre $a > 0$ musí byť $(1,0) \subset \mathsf{M}_3$ a pre $a < 0$ zas $(1,0) \subset \mathsf{M}_1$. Vyšetrením týchto podmienok získame nutnú a postačujúcu podmienku požadovanú v zadaní.

Ak $a > 0$, potom platí $0 > 2a-2-3a-2 = -4-a$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou $a > -4$, čiže vyhovuje interval $(0, \infty)$.

Ak $a < 0$, potom $0 < 2a - 2 - 3a - 2 = -4 - a$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou $a < -4$, čiže vyhovuje interval $(-\infty, -4)$.

Podmienky zo zadania platia práve vtedy, ak $a \in (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$.

28. Dosadením výrazu $y = 3 - ax$ do prvej rovnice dostávame

$$x^2 + (3-ax)^2 - 2x - 3(3-ax) = 0.$$

Ekvivalentnými úpravami dostaneme rovnicu

$$(a^2+1)x^2 - (3a+2)x = 0$$

s koreňmi

$$x_1 = 0 \qquad \text{a} \qquad x_2 = \frac{3a+2}{a^2+1},$$

pričom $x_1 \neq x_2$ pre $a \neq -\frac{2}{3}$. Po dosadení x_1 do 2. rovnice dostaneme riešenie $(0,3)$, po dosadení x_2 dostaneme riešenie $\left(\frac{3a+2}{a^2+1}, \frac{3-2a}{a^2+1}\right)$.

Riešením sústavy rovníc pre $a \neq -\frac{2}{3}$ sú usporiadané dvojice

$$(0,3), \qquad \left(\frac{3a+2}{a^2+1}, \frac{3-2a}{a^2+1}\right).$$

Riešením sústavy rovníc pre $a = -\frac{2}{3}$ je usporiadaná dvojica $(0,3)$. Keďže úpravy boli ekvivalentné, skúška nie je potrebná.

29. Ide o rovnicu s parametrami a, b. Upravme ju na tvar

$$(\sin x - \cos x)\big(a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x)\big) = 0,$$

odkiaľ dostávame

$$\sin x = \cos x \tag{1}$$

alebo

$$a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) = 0. \tag{2}$$

Musí však platiť $(b\cos x + a)(b\sin x + a) \neq 0$ (inak daná rovnica nemá zmysel). Rovnica (1) má riešenie $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, kým rovnica (2) riešenie nemá, pretože $\frac{a^2+b^2}{|ab|} \geqq 2$, zatiaľ čo $|\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right| \leqq \sqrt{2}$. Dostávame teda, že ak $(b\cos x + a)(b\sin x + a) \neq 0$, potom má rovnica riešenie $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

30. Je $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = a$ práve vtedy, keď

$$\frac{1}{\cos x \cdot \sin x} = a. \tag{1}$$

Keďže $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, po umocnení (1) jednoduchou úpravou dostaneme pre $a \neq 0$ rovnicu

$$\sin^4 x - \sin^2 x + \frac{1}{a^2} = 0.$$

Po substitúcii $\sin^2 x = y$ riešime kvadratickú rovnicu

$$y^2 - y + \frac{1}{a^2} = 0. \tag{2}$$

Jej riešenia pre $|a| \geqq 2$ sú

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{a^2-4}}{|a|}\right),$$

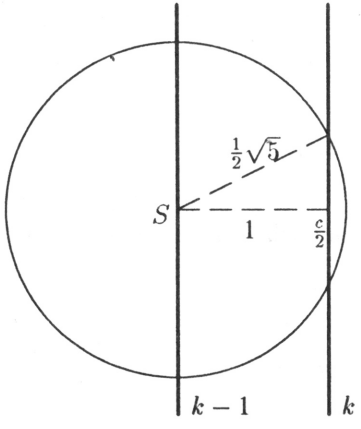
pre $|a| < 2$ rovnica (2) nemá reálne riešenie. Keďže pre $|a| \geqq 2$ je $0 \leqq y_1 \leqq 1$ a $0 \leqq y_2 \leqq 1$, dostávame $\sin x = \pm\sqrt{y_1}$, $\sin x = \pm\sqrt{y_2}$. Podobne môžeme vyjadriť hodnoty $\cos x$.

Keďže úpravy neboli ekvivalentné, je potrebné urobiť skúšku správnosti. Dostaneme riešenia:

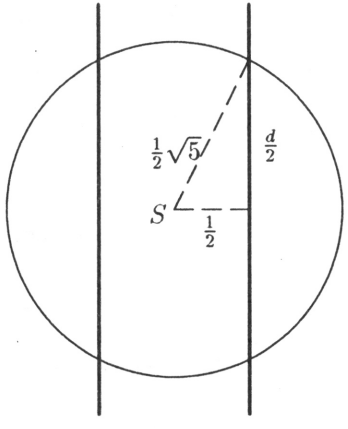
$$\begin{array}{lll}
\text{pre } a \geqq 2 & \sin x = \sqrt{y_1}; & \cos x = \sqrt{y_2}; \\
& \sin x = -\sqrt{y_1}; & \cos x = -\sqrt{y_2}; \\
& \sin x = \sqrt{y_2}; & \cos x = \sqrt{y_1}; \\
& \sin x = -\sqrt{y_2}; & \cos x = -\sqrt{y_1}; \\
\text{pre } a \leqq -2 & \sin x = \sqrt{y_1}; & \cos x = -\sqrt{y_2}; \\
& \sin x = -\sqrt{y_1}; & \cos x = \sqrt{y_2}; \\
& \sin x = \sqrt{y_2}; & \cos x = -\sqrt{y_1}; \\
& \sin x = -\sqrt{y_2}; & \cos x = \sqrt{y_1}.
\end{array}$$

31. Zo zadania štvoruholníka vyplýva, že pre jeho šírku s platí $s \geqq \frac{3}{2}\sqrt{5}$. Podľa Blaschkeovej vety doň môžeme vpísať kruh o polomere $r = \frac{1}{3}s$, čiže $r \geqq \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Dokážeme, že kruh o polomere $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ obsahuje vždy aspoň tri celočíselné body.

Stred kruhu leží medzi rovnobežnými priamkami $x = k$, $x = k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Hraničná kružnica vytne na nich dve úsečky a my dokážeme, že na kratšej leží aspoň jeden a na dlhšej aspoň dva celočíselné body. Hraničná kružnica vytne na hraničnej priamke $x = k$ najmenšiu kratšiu úsečku vtedy, keď stred leží na priamke $x = k - 1$. Z Pythagorovej vety (obr. 10) plynie, že kratšia úsečka má dĺžku 1, a teda obsahuje vždy aspoň jeden celočíselný bod.



Obr. 10



Obr. 11

Hraničná kružnica vytne na hraničnej priamke najmenšiu dlhšiu úsečku, ak jej stred leží na osi uvedeného pásu (obr. 11). Z Pythagorovej vety potom vychádza, že v tomto prípade majú obe úsečky dĺžku 2, dlhšia úsečka tedy obsahuje vždy aspoň dva celočíselné body.

Polomer kruhu vpísaného do $ABCD$ je $r \geqq \frac{1}{2}\sqrt{5}$ a o ňom sme dokázali, že obsahuje aspoň tri celočíselné body.

32. Množina bodov, ktoré vyhovujú nerovnosti $y \geqq x^2$, je parabola so svojím vnútrom; množina $x^2 + (y - \lambda)^2 \leqq 1$ je kruh so stredom $(0, \lambda)$ a polomerom 1, $x = \lambda$ je priamka rovnobežná s osou y vo vzdialenosti λ; M_λ je podmnožinou priamky $x = \lambda$. Konvexný obal množiny $\{(0,0)\} \cup \mathsf{M}_\lambda$ leží na priamke, iba ak $\lambda = 0$ alebo M_λ je prázdna alebo jednobodová množina. (Ak je M_λ viacbodová, tak jej body ležia na priamke $x = \lambda$, ktorá neprechádza bodom $(0,0)$).

Ak $\lambda \notin \langle -1, 1\rangle$, prienik priamky a kruhu je prázdny, takže $\mathsf{M}_\lambda = \emptyset$. Ak $\lambda \in \langle -1, 1\rangle$, je y-ová súradnica prieniku paraboly s priamkou rovná λ^2 a y-ová súradnice prieniku kruhu s priamkou sú rovné $\lambda \pm \sqrt{1 - \lambda^2}$. Množina M_λ je prázdna alebo jednoprvková množina, iba ak $\lambda^2 \geqq \lambda \pm \sqrt{1 - \lambda^2}$ (prečo?). To môže nastať iba pre $\lambda = 1$ alebo pre $\lambda < 0$. Po umocnení dostaneme nerovnicu $(\lambda - 1)(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1) \geqq 0$ a príslušná kubická rovnica má jediný reálny koreň $\lambda_0 < 0$. Úlohe potom vyhovujú všetky $\lambda \in$ $\in (-\infty, \lambda_0) \cup \langle 1, \infty)$. Ak využijeme napríklad Cardanov vzorec, dostaneme, že $\lambda \in$ $\in \left(-\infty, \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{17 + \sqrt{297}} + \sqrt[3]{17 - \sqrt{297}} - 1\right)\right) \cup \langle 1, \infty)$.

33. Zaoberajme sa len takými množinami A, ktoré neobsahujú 0 (inak v nich nulová postupnosť existuje evidentne).

a) Nech všetky čísla v A majú rovnaké znamienko (nech je to +, v prípade − je dôkaz rovnaký). Definujme postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ takto: ak máme prvok $x_k \in \mathsf{A}$, existujú prvky (keďže $\mathsf{A} + \mathsf{A} = \mathsf{A}$) $y, z \in \mathsf{A}$ také, že $y + z = x_k$. Všetky tri čísla sú kladné, takže aspoň jedno z čísel y, z je menšie alebo rovné $\frac{x_k}{2}$. Položme $x_{k+1} = \min\{y, z\}$. Pre takú postupnosť, v ktorej pre všetky $k \in \mathbb{N}$ je $x_{k+1} \leqq \frac{x_k}{2}$, ľahko dokážeme indukciou, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \leqq \frac{x_0}{2^n}$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x_0}{2^n} = 0$.

b) Nech existujú v A čísla kladné i záporné (tj. existujú $a, b \in \mathsf{A}$ také, že $a < 0 < b$). Definujme postupnosti $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, a $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, pre ktoré o ich ľubovoľných členoch ($n \geqq 0$) platí $x_n < 0 < y_n$, $x_n + y_n \in \mathsf{A}$, $x_n + y_n \neq 0$ (prečo?).

Ak $x_n + y_n > 0$, položme $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = x_n + y_n$. Ak $x_n + y_n < 0$, položme $y_{n+1} = x_n$, $x_{n+1} = x_n + y_n$. Zrejme pre všetky prirodzené n je $x_n \leqq x_{n+1} < 0 <$ $< y_{n+1} \leqq y_n$. Dokážeme, že aspoň jedna z postupností $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nulová. Nech to neplatí, teda nech existuje $L > 0$ tak, že pre všetky prirodzené n je x_n, $y_n \notin (-L, L)$. Zoberme teraz najväčšie k prirodzené také, že pre všetky prirodzené n je x_n, $y_n \notin (-kL, kL)$. Existuje $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré $x_n \in (-2kL, 0)$ alebo $y_n \in (0, 2kL)$. Nech existuje napríklad také $n = n_0$, že $y_{n_0} \in (0, 2kL)$, a nech p je najväčšie prirodzené číslo s vlastnosťou $x_{n_0} + py_{n_0} < 0$ (môže sa stať, že $p = 0$). Vidno, že

$$x_{n_0} + py_{n_0} = x_{n_0+p}, \quad y_{n_0} = y_{n_0+p} \quad \text{a} \quad x_{n_0+p} \in (-y_{n_0}, 0).$$

Potom ale platí

$$0 < x_{n_0+p} + y_{n_0+p} = y_{n_0+p+1} < kL,$$

lebo $x_{n_0+p} + y_{n_0} < y_{n_0} - kL < 2kL - kL = kL$. To je spor. Takže aspoň jedna postupnosť je nulová (možno dokázať, že i druhá). Ak by platilo, že A obsahujúca kladné i záporné

čísla musí obsahovať nulu, tak predchádzajúce úvahy by boli zbytočné. Ale odpoveď znie nie: stačí vziať $A = \{a\sqrt{2} - b : a, b \in \mathbb{Q}_+\}$. Platí, že $A + A = A$, ale $0 \notin A \neq \emptyset$.

34. Najprv dokážeme, že A s každým svojím bodom $B = (x, y)$ obsahuje aj bod $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$. Keďže $A + A = A$, existujú body C, $D \in A$, že $C + D = B = (x, y)$. Ak $B = 0$, $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = (0, 0) \in A$. Ak $(x, y) \neq (0, 0)$, označme $S = \frac{0 + B}{2}$. Buď $C = S = D$ a potom $S = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in A$, alebo $C \neq D$ a vtedy S je stred úsečky CD (v prípade, že B, C, D ležia na priamke), lebo $S = \frac{0 + B}{2} = \frac{C + D}{2}$. Ale A je konvexná, takže $S = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in A$. Keďže $A \neq \emptyset$, vezmime ľubovoľný prvok $(a, b) \in A$. Položme $(x_1, y_1) = (a, b)$ a pre všetky prirodzené n nech $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$. Ľahko sa overí, že platí $(x_n, y_n) = \left(\frac{a}{2^{n-1}}, \frac{b}{2^{n-1}}\right)$ a celá postupnosť pozostáva z prvkov množiny A, pričom

$$\lim_{n \to \infty} (x_n^2 + y_n^2) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{2n-2}}(a^2 + b^2) = 0.$$

Druhé tvrdenie neplatí. Jedným z protipríkladov je $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

35. Strany trojuholníka musia spĺňať trojúholníkové nerovnosti a platí pre ne a, b, $c > 0$. Ak čísla $\frac{a}{a+1}$, $\frac{b}{b+1}$, $\frac{c}{c+1}$ majú byť dĺžky strán trojuholníka, musia byť kladné a spĺňať trojúholníkové nerovnosti

$$\frac{a}{a+1} < \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}, \tag{1}$$

$$\frac{b}{b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{c}{c+1}, \tag{2}$$

$$\frac{c}{c+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}. \tag{3}$$

Stačí dokázať ľubovoľnú z nerovností (ostatné dostávame cyklickou zámenou označenia strán).

Ak a, b, c sú kladné čísla, potom aj $\frac{a}{a+1}$, $\frac{b}{b+1}$, $\frac{c}{c+1}$ sú kladné. Ekvivalentnými úpravami vzťahu (1) dostávame

$$a < abc + 2bc + b + c. \tag{4}$$

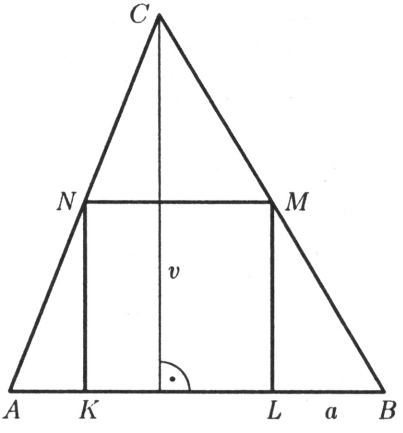
Keďže $a < b + c$ (podľa predpokladu), $abc > 0$ a $bc > 0$, potom je nerovnosť (4) pravdivá. Keďže je ekvivalentná s nerovnosťou (1), čísla $\frac{a}{a+1}$, $\frac{b}{b+1}$, $\frac{c}{c+1}$ sú dĺžky strán trojuholníka.

36. Vyriešime prípad 3) $c \leqq 1$. Veľkosť druhých dvoch strán nie je obmedzená. Ľahko zistíte, že vieme nájsť trojuholník s ľubovoľne veľkým obsahom; neexistuje teda horná hranica pre veľkosť trojuholníka v ktorom je $c \leqq 1$.

Pri riešení prvých dvoch prípadov použijeme poznatok, že obsah trojuholníka závisí priamo úmerne od dvoch nezávislých veličín: od veľkosti strany a veľkosti výšky na túto stranu.

1) $a \leqq 1$. Nech má strana $a = BC$ najväčšiu možnú dĺžku, tj. 1. Bod A musí ležať vo vnútri prieniku kruhov s obvodovými kružnicami $k_1(B, 1)$ a $k_2(C, 1)$ (lebo veľkosti strán b, c sú najviac 1). (Nakreslite si obrázok!) Z obrázku je vidieť, že maximálnu výšku a teda aj maximálny obsah bude mať trojuholník s tretím vrcholom totožným s priesečníkom kružníc k_1, k_2. Bude rovnostranný so stranou 1 a obsahom $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2) $b \leqq 1$. Nech má strana $b = AC$ najväčšiu možnú dĺžku, tj. 1. Bod B musí ležať zároveň vnútri kruhu s obvodovou kružnicou $k_1 = (A, 1)$ (lebo $b \geqq c$). Najväčšia výška na stranu b bude mať dĺžku 1, teda maximálny možný obsah $\frac{1}{2}$ má pravouhlý trojuholník s odvesnami b, c veľkosti 1.



Obr. 12

37. Zo zadania úlohy plynie (obr. 12), že trojuholník ABC je podobný s trojuholníkom NMC. Z podobnosti ďalej vyplýva, že $\frac{v-x}{v} = \frac{x}{a}$, takže $x = \frac{av}{a+v}$. Obsah trojuholníka ABC je $P_1 = \frac{1}{2}av$. Obsah štvorca $KLMN$ je $P_2 = \left(\frac{av}{a+v}\right)^2$. Úloha vyžaduje dokázať platnosť nerovnosti

$$\frac{(av)^2}{(a+v)^2} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}av\right).$$

Tá je ekvivalentná s nerovnosťou $av \leqq \frac{(a+v)^2}{4}$ (keďže $a, v > 0$), tj. s nerovnosťou medzi aritmetickým a geometrickým priemerom. Rovnosť nastáva v prípade $a = v$.

38. Obsah P trojuholníka so stranami a, b, c je podľa Herónovho vzorca

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)}\left(\sqrt[3]{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Z nerovnosti medzi geometrickým a aritmetickým priemerom vyplýva

$$\sqrt[3]{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \leqq \frac{a+b-c+a-b+c-a+b+c}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu dostávame

$$P \leqq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{a+b+c}}{4} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a+b-c = a-b+c = -a+b+c$, čo je ekvivalentné s tým, že $a = b = c$. Najmenší obvod pri danom obsahu P má rovnostranný trojuholník.

Trojuholník s maximálnym obvodom pri danom obsahu neexistuje. To dokážeme sporom: Nech trojuholník s daným obsahom P a najväčším obvodom má strany a, b, c. Potom ale ľubovoľný trojuholník so základňou $a+b+c$ a výškou $\frac{2P}{a+b+c}$ má obsah $\frac{1}{2}(a+b+c)\frac{2P}{a+b+c} = P$ a obvod $o > a+b+c$, a ten je väčší než obvod trojuholníka so stranami a, b, c. To je spor.

39. Z Herónovho vzorca pre obsah trojuholníka dostávame

$$4P\sqrt{3} = \sqrt{3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}. \tag{1}$$

Z trojúholníkovej nerovnosti pre strany a, b, c vyplýva $-a+b+c > 0$, $a-b+c > 0$, $a+b-c > 0$, a teda môžeme použiť nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom týchto troch čísel, z ktorej dostaneme

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leqq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \tag{2}$$

s rovnosťou pre $a = b = c$. Ľahko sa presvedčíme, že platí

$$(a+b+c)^2 \leqq 3(a^2+b^2+c^2) \tag{3}$$

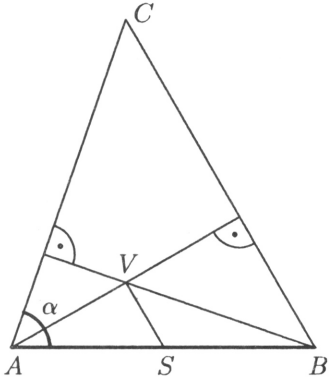
s rovnosťou pre $a = b = c$. Z (1) použitím (2) a (3) dostávame

$$4P\sqrt{3} \leqq \sqrt{3(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} = \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leqq a^2+b^2+c^2,$$

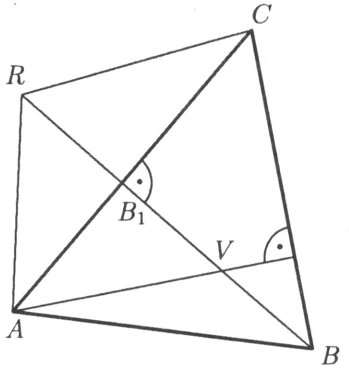
tým je daná nerovnosť dokázaná. Rovnosť v poslednom vzťahu nastane, ak nastane rovnosť v (2) a (3), teda práve vtedy, ak je trojuholník rovnostranný.

40. Ak bod E je taký, ako požaduje úloha, tak EF je rovnobežné s AG, EA s FG, EG s CF a EC s FG, z čoho plynie, že štvoruholníky $AGFE$ a $EGFC$ sú rovnobežníky, teda ich protiľahlé strany sa musia rovnať. Potom platí $|AE| = |FG| = |CE|$, takže bod E musí ležať v strede strany AC.

41. Keďže a, b, c majú byť strany pravouhlého trojuholníka, musí pre ne platiť $a^2 + b^2 = c^2$, čo spolu s rovnosťami $b + c = p$ a $c + a = q$ dáva kvadratickú rovnicu pre c s parametrami p a q. Z jej dvoch riešení vyhovuje úlohe len $c = p + q - \sqrt{2pq}$, strany a, b vyjadríme podobne, je $a = \sqrt{2pq} - p$, $b = \sqrt{2pq} - q$. Teraz už nie je problém zostrojiť žiadaný trojuholník, úsečku dĺžky $\sqrt{2pq}$ zostrojíme podľa niektorej z Euklidových viet a z podmienok $a > 0$, $b > 0$ vyčítame nutné a postačujúce podmienky riešiteľnosti $p < 2q$ a $q < 2p$.



Obr. 13



Obr. 14

42. Nutnou podmienkou existencie riešenia je $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (prečo?).

Predpokladajme, že trojuholník ABC je už zostrojený (obr. 13). Potom V leží na Thalesovej kružnici k nad AS, kde S je stred strany AB (prečo?), navyše leží na v_B. Z toho je už konštrukcia zrejmá. Počet riešení závisí od počtu priesečníkov v_B a k. Ľahko sa zistí, že vzdialenosť výšky v_B od bodu S', stredu kružnice k, je $|S'B| \cos\alpha = \frac{3}{4} c \cos\alpha$, a pretože polomer kružnice k je $\frac{1}{4} c$, dostávame, že pre $0 < \cos\alpha < \frac{1}{3}$ má úloha práve dve rôzne riešenia, pre $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ jediné a pre $\cos\alpha > \frac{1}{3}$ žiadne riešenie.

43. Nech R je priesečník kružníc k_1 a k_3, rôzny od bodu V, kružnica k_1 (resp. k_3) má stred A a polomer $|AV|$ (resp. C a $|CV|$) a označme B_1 priesečník priamok BV a AC, A_1 priesečník priamok AV a BC (obr. 14). Potom trojuholník ARB_1 je zhodný s trojuholníkom AVB_1, ďalej trojuholník AVB_1 je podobný trojuholníku ACA_1 (sú to pravouhlé trojuholníky a majú spoločný uhol pri vrchole A), teda trojuholník ARB_1 je podobný trojuholníku ACA_1, odtiaľ $|\sphericalangle ARB| = |\sphericalangle ACB|$, takže body C, R ležia na tom istom oblúku nad AB, pre ostatné body využijeme cyklickú zámenu.

Pražský korespondenční seminář z programování

Ivan Libicher, Pavel Töpfer

Mezi studenty středních škol získaly v poslední době velkou oblibu různé korespondenční semináře. Po řadě matematických seminářů se objevily semináře fyzikální a v posledních letech také programátorské. Z nich pravděpodobně nejmladší, ale rozsahem své působnosti a počtem účastníků největší je pražský korespondenční seminář z programování. Seminář vznikl na začátku školního roku 1987/88 z iniciativy studentů matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Pokusný „nultý" ročník semináře proběhl nad očekávání úspěšně, a proto se organizátoři rozhodli pokračovat v pořádání semináře i v dalších letech. Dnes má pražský korespondenční seminář z programování každoročně více než 200 účastníků.

Podobně, jako je tomu u jiných korespondenčních seminářů, je i tento organizován v několika kolech. Každé kolo je tvořeno čtyřmi soutěžními úlohami různé obtížnosti, z nichž si studenti mohou vybrat k řešení podle vlastního uvážení jen ty, které zvládnou. Všechny úlohy jsou zaměřené na návrh algoritmů a tvorbu programů. Samotný zápis programu by ale jako řešení úlohy samozřejmě nestačil. Je nutné připojit také slovní popis řešení, vysvětlení způsobu práce algoritmu a zdůvodnění jeho správnosti. Hodnotí se i kvalita navrženého algoritmu, zejména jeho efektivita. Zaslaná řešení úloh opravují organizátoři semináře — studenti informatiky z různých ročníků MFF UK v Praze. Opravené úlohy zasílají zpět soutěžícím spolu s komentáři a se vzorovými řešeními úloh a s výsledkovými listinami. Na závěr každého ročníku semináře připravují pro nejlepší účastníky týdenní soustředění s bohatým programem odborným i oddechovým.

Soutěžní úlohy mají podobný charakter jako úlohy kategorie P matematické olympiády. Z minulých ročníků semináře jsme pro vás vybrali na ukázku tři úlohy. Pro nedostatek místa uvádíme jejich vzorová řešení bez výsledných programů.

Úlohy

1. Největší díra (KSP 1–4–2)

Napište program, který k zadanému celému číslu n, $n \geq 2$, a zadané posloupnosti reálných čísel délky n (která se vejde do paměti!) vytiskne dvě čísla z posloupnosti taková, že žádné číslo z posloupnosti neleží „mezi nimi" (tj. není menší než jedno a větší než druhé z nich) a že absolutní hodnota jejich rozdílu je maximální. Např. pro $n = 4$ a posloupnost 2, 5.3, 2.7, −20.1 program vytiskne dvojici čísel 2, −20.1.

2. Zplodiny (KSP 2–3–3)

Nechť $p_1, \ldots, p_n$ ($n \geqq 0$) je posloupnost celých čísel. *Zplodinovými operacemi* nazveme následující změny posloupnosti: a) vypuštění prvního členu (neprázdné posloupnosti): $p_1, \ldots, p_n \mapsto p_2, \ldots, p_n$, b) přidání libovolného čísla r na konec posloupnosti: $p_1, \ldots, p_n \mapsto p_1, \ldots, p_n, r$, c) změnu některého členu p_i, $1 \leqq i \leqq n$, na libovolné celé číslo r:

$$p_1, \ldots, p_n \mapsto p_1, \ldots, p_{i-1}, r, p_{i+1}, \ldots, p_n.$$

Navrhněte algoritmus, který pro dané posloupnosti celých čísel, $p_1, \ldots, p_n$ ($n \geqq 0$) a $q_1, \ldots, q_m$ ($m \geqq 0$) určí minimální počet zplodinových operací potřebný ke změně $p_1, \ldots, p_n$ na $q_1, \ldots, q_m$. Např. ke změně posloupnosti 5, 2, 4, 1, 12 na 4, 3, 12 jsou třeba nejméně tři zplodinové operace:

$$5, 2, 4, 1, 12 \mapsto 2, 4, 1, 12 \mapsto 4, 1, 12 \mapsto 4, 3, 12.$$

3. Ďábelské mocniny (KSP 2–2–1)

D-číslem nazvěme každé kladné celé číslo takové, že se dá vyjádřit ve tvaru $3^i 4^j 5^k$, kde $i, j, k \geqq 0$ jsou celá čísla. Navrhněte algoritmus, který pro dané kladné celé číslo n vytiskne prvních n D-čísel.

Např. pro $n = 10$ algoritmus vytiskne čísla 1, 3, 4, 5, 9, 12, 15, 16, 20, 25.

Řešení

1. Postup řešení se bude skládat z následujících pěti kroků:

1. Nalezneme minimální a maximální prvek ze zadaných n čísel a označíme je *Min* a *Max*. Platí tedy $Min \leqq a_i \leqq Max$ pro všechna i od 1 do n. To je možné provést velmi snadno jedním sekvenčním průchodem danými n čísly, tedy s lineární časovou složitostí.

2. Spočítáme hodnotu $D = (Max - Min)/(n-1)$. Rozdíl $Max - Min$ udává velikost celkového intervalu na číselné ose, který sledujeme. Údaj $n-1$ určuje, na kolik nejvýše úseků je tento interval rozdělen zadanými n čísly, tzn. kolik existuje „děr" mezi čísly. Hodnota D má proto význam dolního odhadu velikosti maximální díry. Kdyby byla všechna ostatní čísla rozložena mezi *Min* a *Max* zcela rovnoměrně, měly by všechny díry mezi nimi velikost přesně D. Při jakémkoliv jiném rozložení čísel mezi *Min* a *Max* bude některá díra menší, a proto musí být jiná větší než D.

Poznámka. Zvláštním případem je situace, kdy se všech n daných čísel sobě rovná. Potom $Max = Min$ a vyjde nám tedy $D = 0$. Největší díra mezi čísly má nulovou velikost a najdeme ji mezi libovolnou dvojicí zadaných čísel.

3. Rozdělíme nyní celý interval $\langle Min, Max \rangle$ na $n-1$ úseků velikosti D a tyto úseky očíslujeme ve vzestupném pořadí od 1 do $n-1$. Všimněte si, že pro libovolné číslo X z intervalu $\langle Min, Max \rangle$ dokážeme snadno (v konstantním čase) určit, do kterého úseku patří. Pořadové číslo příslušného úseku je dáno výrazem $\lfloor (X - Min)/D \rfloor + 1$, kde závorky $\lfloor$, $\rfloor$ označují dolní celou část z hodnoty výrazu v nich uzavřeného, tzn.

$\lfloor V \rfloor$ je rovno největšímu celému číslu, které je menší nebo rovno hodnotě výrazu V. Poznamenejme ještě, že úseky chápeme jako intervaly zdola uzavřené a shora otevřené. Číslo X ležící přesně na hranici dvou úseků bude tedy zařazeno do vyššího z nich. Pro $X = Max$ dává náš výraz pořadové číslo úseku n. Číslo $X = Max$ bude tvořit samo další, v pořadí n-tý úsek, který je degenerován do jediného bodu.

4. Vytvoříme si dvě pomocná pole velikosti n označená R a S. Tato pole zaplníme tak, aby pro každé i od 1 do n mělo R_i hodnotu minimálního a S_i hodnotu maximálního ze zadaných čísel, které náleží do i-tého úseku (viz bod 3). Pokud do některého z úseků nepadne ani jedno ze zadaných čísel, dosadíme do R_i a S_i zvláštní předem zvolenou hodnotu, která není z intervalu $\langle Min, Max \rangle$, např. $Max + 1$, $Min - 1$. Správné hodnoty polí R a S získáme snadno s lineární časovou složitostí. Pro každé z n zadaných čísel stačí určit, do kterého úseku patří (podle vzorce z bodu 3), a poté toto číslo porovnat s do té doby platnými hodnotami polí R a S odpovídajícími tomuto úseku:

pro každé $i = 1, \ldots, n$ **proveď**
    $R_i := Max + 1$;
    $S_i := Min - 1$;
pro každé $i = 1, \ldots, n$ **proveď**
    $U := \lfloor (a_i - Min)/D \rfloor + 1$; (* číslo úseku *)
    jestliže $a_i < R_U$ **potom** $R_U := a_i$;
    jestliže $a_i > S_U$ **potom** $S_U := a_i$

5. Vzhledem k tomu, že podle bodu 3 nemá žádný z úseků délku větší než D a přitom podle bodu 2 je hodnota D dolním odhadem velikosti maximální díry mezi zadanými čísly, má buď maximální díra velikost právě D, nebo je větší, ale pak nemůže ležet celá uvnitř jediného úseku, musí do ní padnout předěl mezi dvěma sousedními úseky. Výslednou velikost maximální díry proto stačí hledat vždy mezi minimální a maximální hodnotou čísel náležejících do sousedních úseků. Přitom je ještě třeba dávat pozor na ty úseky, které neobsahují žádné ze zadaných n čísel. Předělů mezi úseky je přibližně n, takže i tato část výpočtu má lineární časovou složitost:

$MaxDira := D - 1$; (* dolní odhad velikosti max. díry *)
$i := 1$;
dokud $i < n - 1$ **prováděj**
    (* S_i je začátek právě zkoumané díry *)
    $j := i + 1$;
    dokud $R_j = Max + 1$ **prováděj** $j := j + 1$;
        (* hledáme další neprázdný úsek *)
        (* nehrozí přetečení, neboť $R_n = S_n = Max$ *)
    (* R_j je konec právě zkoumané díry *)
    $Dira := R_j - S_i$;
    jestliže $Dira > MaxDira$ **potom**
        $MaxDira := Dira$;
        $C1 := S_i$; $C2 := R_j$;
    $i := j$
(* $MaxDira$ je velikost maximální díry, $C1$, $C2$ jsou hledaná čísla *)

Správnost algoritmu byla zdůvodněna ve výše uvedeném rozboru. Konečnost výpočtu vyplývá ze skutečnosti, že počet průchodů všemi cykly je omezen počtem zpracovávaných čísel n. Algoritmus má lineární časovou složitost, neboť každý z jeho kroků má buď lineární nebo konstantní časovou složitost a jednotlivé kroky výpočtu následují jeden po druhém.

2. Posloupnosti zplodinových operací převádějící $p_1, \ldots, p_n$ na $q_1, \ldots, q_m$ budeme stručně nazývat p-q-posloupnostmi. Pro libovolné posloupnosti $p_1, \ldots, p_n$ a $q_1, \ldots, q_m$ existuje p-q-posloupnost délky $\max(m, n)$:

1) pro $n < m$ tvořená n operacemi c) a $m - n$ operacemi b),
2) pro $n \geqq m$ tvořená $n - m$ operacemi a) a m operacemi c).

Dále je jasné, že každá p-q-posloupnost musí obsahovat nejméně $|n-m|$ operací a) a b), aby se délka změnila z n na m. Z toho plyne, že má-li být nějaká p-q-posloupnost kratší než $\max(m, n)$, musí v ní být méně než $\min(m, n)$ operací c), tj. některé prvky posloupnosti p musí přejít do q beze změny.

Ukážeme, že zplodinové operace v nejkratší p-q-posloupnosti lze přeuspořádat tak, že nejprve se provedou všechny operace a), pak c) a nakonec b): Žádná operace c) jistě nemění člen, který by pozdější operace a) vypustila (pak by totiž p-q-posloupnost nebyla nejkratší); můžeme tedy všechny operace a) přesunout před operace c). Podobně žádná operace c) jistě nemění člen dříve přidaný nějakou operací b) (tyto dvě operace by totiž bylo možné nahradit jedinou operací b)); můžeme tedy operace b) přesunout za operace c). Konečně žádná operace a) jistě nevypouští prvek přidaný dříve operací b) (obě operace by bylo možné vypustit). Hledejme tedy nejkratší p-q-posloupnost ve tvaru

$$\begin{array}{lll} p_1, \ldots, p_n & \mapsto \ldots k \text{ operací a)} \ldots & \mapsto p_{k+1}, \ldots, p_n \\ p_{k+1}, \ldots, p_n & \mapsto \ldots c(k) \text{ operací c)} \ldots & \mapsto q_1, \ldots, q_{n-k} \\ q_1, \ldots, q_{n-k} & \mapsto \ldots m - n + k \text{ operací b)} \ldots & \mapsto q_1, \ldots, q_m, \end{array}$$

kde $\max(n - m, 0) \leqq k \leqq n$ a $c(k)$ je minimální počet operací c) potřebný ke změně $p_{k+1}, \ldots, p_n$ na $q_1, \ldots, q_{n-k}$:

$$c(k) = |\{i;\ 1 \leqq i \leqq n - k, p_{k+i} \neq q_i\}|.$$

Označíme-li d délku nejkratší p-q-posloupnosti, platí

$$d = \min(k + c(k) + (m - n + k)),$$

kde k prochází hodnoty od $\max(n - m, 0)$ do n. Tento vzoreček spolu s definicí $c(k)$ dává kompletní algoritmus pro výpočet d. Jeho správnost vyplývá z odvození.

Paměťová složitost (určená délkou posloupností p a q) je lineární, časová složitost je $O(n^2)$, neboť výpočet $c(k)$ (jehož složitost je $O(n - k)$) se provede nejvýše $(n + 1)$-krát.

3. Všechna D-čísla vzestupně očíslujeme takto: $1 = d_1$, $3 = d_2$, $4 = d_3$, $5 = d_4$, $9 = d_5$, $12 = d_6$, $15 = d_7$, atd.

TVRZENÍ. Nechť $k > 1$, $1 \leqq p, q, r < k$ jsou celá čísla s těmito vlastnostmi:

$$d_p = \min\{d_i;\ 1 \leqq i < k \text{ a } 3d_i > d_{k-1}\},$$
$$d_q = \min\{d_i;\ 1 \leqq i < k \text{ a } 4d_i > d_{k-1}\},$$
$$d_r = \min\{d_i;\ 1 \leqq i < k \text{ a } 5d_i > d_{k-1}\}.$$

Potom platí $d_k = \min\{3d_p, 4d_q, 5d_r\}$.

DŮKAZ. Využijeme toho, že D-čísla větší než jedna jsou právě čísla tvaru $3D$, $4D$ nebo $5D$, kde D je nějaké menší D-číslo (plyne to přímo z definice D-čísla). Číslo $d = \min\{3d_p, 4d_q, 5d_r\}$ je tedy D-číslo. Navíc d je nejmenší z D-čísel větších než d_{k-1}. Kdyby totiž mezi d_{k-1} a d ležela nějaká D-čísla, pak nejmenší z nich by bylo tvaru $3d_i$, $4d_i$ nebo $5d_i$, $1 \leqq i < k$, takže d by nebylo minimální. Tím je důkaz tvrzení proveden.

Známe-li tedy D-čísla $d_1, \ldots, d_{k-1}$ $(k > 1)$ a čísla p, q, r z uvedeného tvrzení, potom $d_k = \min\{3d_p, 4d_q, 5d_r\}$. „Nové" hodnoty čísel p, q, r splňující

$$d_p = \min\{d_i;\ 1 \leqq i \leqq k \text{ a } 3d_i > d_k\},$$
$$d_q = \min\{d_i;\ 1 \leqq i \leqq k \text{ a } 4d_i > d_k\},$$
$$d_r = \min\{d_i;\ 1 \leqq i \leqq k \text{ a } 5d_i > d_k\}$$

získáme úpravou „starých" hodnot takto: pokud $3d_p = d_k$, pak číslo p zvětšíme o jednu, dále pokud $4d_q = d_k$, pak číslo q zvětšíme o jednu, dále pokud $5d_r = d_k$, pak číslo r zvětšíme o jednu.

Tím máme jednak indukční krok pro generování dalšího D-čísla, jednak invariant, který nám zaručí správnost následujícího algoritmu:

```
(* n je počet hledaných D-čísel *)
(* (D_1, ..., D_n) je pole celých čísel *)
D_1 := 1; p := 1; q := 1; r := 1;
pro k = 2, ..., n proveď
    (* D_1, ..., D_{k-1} je prvních k - 1 D-čísel, *)
    (* p, q, r mají vlastnost z výše uvedené úvahy *)
    d_k := min{3d_p, 4d_q, 5d_r};
    jestliže 3d_p = d_k potom p := p + 1;
    jestliže 4d_q = d_k potom q := q + 1;
    jestliže 5d_r = d_k potom r := r + 1;
pro k = 1, ..., n proveď tiskni(d_k)
```

Konečnost algoritmu je zřejmá. Invariant uvedený v komentáři v těle prvního cyklu zaručuje správnost algoritmu.

Časová i paměťová složitost tohoto algoritmu je $O(n)$.

Korespondenční semináře ÚV MO

Karel Horák

Korespondenční semináře mají už poměrně slušnou tradici. Já se do jejich přípravy zapojil v okamžiku, kdy jsem nastoupil aspiranturu v Matematickém ústavu ČSAV a tam se sešel s Tondou Vrbou, který až do svého faux pas s odznakem polské Solidarności na klopě při setkání úspěšných olympioniků se zástupci ministerstva školství někdy v roce 1981 obstarával náplň těchto seminářů i opravovatele úloh a dával do kupy jimi sepsané komentáře. Díky shora uvedenému poklesku svého přítele jsem pak dostal možnost vyšvihnout se na jeho místo s honosným titulem tajemníka ústředního výboru.

V době, kdy jsem se ujal korespondenčního semináře, nebyly třídy se speciálním zaměřením na matematiku ještě příliš obvyklé, proto byl tento seminář zaměřen především na špičkové řešitele mimo Prahu, Brno, Bílovec a Bratislavu. Postupně však začal zcela přirozeně zahrnovat i ostatní nadané studenty a stal se tak jednou z běžných součástí přípravy potenciálních reprezentantů našich zemí na mezinárodní matematické olympiádě. Do opravování úloh se z velké většiny zapojovali zejména bývalí úspěšní olympionici, kteří postupně přecházeli z řad účastníků do řad organizátorů, a někteří v tom vytrvali i po ukončení studia matematicko-fyzikální fakulty (Jan Kratochvíl, Miroslav Engliš).

Korespondenční seminář nikdy neobsahoval nové originální úlohy, nicméně bylo dobrou snahou jeho organizátorů přinést co nejpestřejší výběr úloh nepříliš známých. Velmi bohatým zdrojem takovýchto úloh pro mne od počátku byl Zadačnik sovětského časopisu Kvant, který v každém čísle publikoval pět často původních úloh, což po deseti ročnících v roce 1981 znamenalo už slušnou zásobu 600 kvalitních úloh. A bylo vždy povzbuzující, když naši účastníci našli často originálnější postupy i slabiny původně publikovaných úloh a jejich řešení. Z tohoto výběru si teď můžete pokusit vyřešit pětici úloh použitých koncem 80. let.

Úlohy

1. Je dáno $2n+1$ kladných čísel takových, že rozdíl mezi součtem libovolných $n+1$ daných čísel a součtem zbylých n čísel je kladný. Dokažte, že pro součin B všech $\binom{2n+1}{n+1}$ takových rozdílů a součet A všech $2n+1$ daných čísel platí

$$B^n \leqq A\binom{2n}{n-1}.$$

2. Na večírek přišlo n manželských párů. Při konverzaci vzniklo několik skupinek $c_1, c_2, \ldots, c_k$ takových, že žádní dva manželé nebyli pohromadě v žádné ze skupin, zatímco každá jiná dvojice byla právě v jedné ze skupin. Dokažte, že pro $n \geqq 4$ je $k \geqq 2n$. Platí uvedené tvrzení i pro $n = 3$?

3. Jestliže

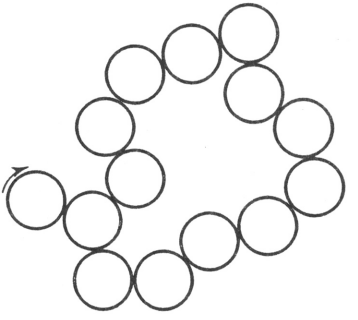
$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

tak

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Dokažte.

4. Uvažujme n stejných mincí, které leží na stole a vytvářejí uzavřený řetěz (každé dvě sousední se dotýkají). Kolik otáček vykoná mince stejného rozměru, jestliže s ní objedeme (bez klouzání) celý řetěz (obr. 15), tj. předpokládáme-li, že pohybující se mince se dotkne každé z daných mincí? Jak se odpověď změní, bude-li mít tato mince k-krát větší poloměr než mince v řetězu?



Obr. 15

5. Dokažte, že na povrchu devatenáctistěnu, který je opsán kouli o poloměru 10, existují dva body, jejichž vzdálenost je větší než 21.

Řešení

1. Označme $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ daná čísla. Pro každé pevné $i \in \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ uvažujme všechny rozdíly tvaru

$$x_i + \sum_{j \in A} x_j - \sum_{j \in B} x_j = x_i + a - b,$$

kde množiny A, B jsou dvě disjunktní n-prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$, $i \notin A \cup B$. Takových rozdílů je $\binom{2n}{n}$ a můžeme je rozdělit do dvojic

$$x_i + a - b, \qquad x_i - a + b,$$

pro něž dostaneme $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ nerovností

$$0 < (x_i + a - b)(x_i - a + b) \leqq x_i^2. \tag{1}$$

Celkem tak (pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$) dostaneme $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}(2n+1)$ nerovností, jejichž vynásobením vyjde

$$B^{n+1} \leqq A^{\binom{2n}{n}},$$

neboť každý z rozdílů $(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n+1}}) - (\ldots)$ se na levé straně vyskytne právě $(n+1)$-krát (pro $i = x_{i_1}$, $i = x_{i_2}$, ..., $i = x_{i_{n+1}}$).

A protože

$$\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n-1},$$

je také zároveň

$$B^n \leqq A^{\binom{2n}{n-1}},$$

což jsme měli dokázat.

Podle počtu tehdy zaslaných řešení šlo o úlohu obtížnější, i když uvedené řešení to zcela nepotvrzuje. U podobných úloh se vždy vyplatí podívat se na triviální případy pro malá n, které mohou napovědět obecné řešení. Došlá řešení se většinou lišila jen v jasnosti argumentace. Kromě nerovnosti (1) bylo možno použít i obecnější nerovnosti pro součin $F(x_i)$ všech rozdílů tvaru $x_i + a - b$, jejichž aritmetický průměr je podle stejné úvahy x_i (I. Martišovitš), takže

$$F(x_i) \leqq x_i^{\binom{2n}{n}}.$$

Je tedy

$$B^{n+1} = \prod_{i=1}^{2n+1} F(x_i) \leqq \left(\prod_{i=1}^{2n+1} x_i\right)^{\binom{2n}{n}} = A^{\binom{2n}{n}}.$$

Řada řešitelů také opomenula zdůraznit, že uvedené nerovnosti lze násobit jen díky tomu, že uvažované rozdíly jsou (dle předpokladu) kladné!

2. Z předpokladů úlohy především plyne, že každé dvě skupinky mají nejvýše jeden společný prvek a každá má nejvýše n členů (jinak by v ní byl aspoň jeden manželský pár). Označme jednotlivé hosty čísly 1, 2, ..., $2n$ a dále označme d_i počet skupinek, ve kterých je host číslo i.

Je-li $d_i = 2$ pro nějaké i, pak musí obě skupiny A, B dohromady obsahovat všechny hosty kromě partnera hosta i (i se v jiných skupinkách nevyskytuje). Je tedy

$$|\mathsf{A} \cup \mathsf{B}| = 2n - 1, \quad |\mathsf{A} \cap \mathsf{B}| = 1, \quad |\mathsf{A}| \leqq n, \quad |\mathsf{B}| \leqq n,$$

takže obě skupiny musí mít právě n členů. Vezmeme-li teď z každé z obou skupin po jednom členu $a \in \mathsf{A}$ a $b \in \mathsf{B}$, $a \neq i \neq b$, tak pokud to nejsou manželé, musí spolu být pohromadě v nějaké skupině c_j, ve které už nikdo jiný z $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ být nemůže. Takových dvojic, a tedy i různých skupin (když odečteme příslušné manželské dvojice) je $(n-1)(n-1) - (n-1) = (n-1)(n-2)$. Proto pro $n \geqq 4$ a pro počet k skupinek platí

$$k \geqq 2 + (n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 4 \geqq 2n.$$

Zbývá vyřešit těžší případ, kdy je $d_i \geqq 3$ pro každé i, $1 \leqq i \leqq 2n$. Přiřaďme každému z hostů nějaké reálné číslo x_i a označme y_j součet těchto čísel pro všechny členy skupinky c_j, tj.

$$y_j = \sum_{i \in \mathsf{c}_j} x_i, \qquad 1 \leqq j \leqq k. \tag{1}$$

Označme ještě $\mathsf{M} = \{\{i,j\};\ i \text{ a } j \text{ jsou manželé}\}$ množinu manželských dvojic. Pak dostaneme následující odhad

$$\sum_{j=1}^{k} y_j^2 = \sum_{i=1}^{2n} d_i x_i^2 + 2 \sum_{\{r,s\} \notin \mathsf{M}} x_r x_s =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{2n} (d_i - 1) x_i^2 - 2 \sum_{\{r,s\} \in \mathsf{M}} x_r x_s =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{2n} (d_i - 2) x_i^2 + \sum_{\{r,s\} \in \mathsf{M}} (x_r^2 + x_s^2 - 2 x_r x_s) \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{2n} (d_i - 2) x_i^2 \geqq \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 .$$

Nejprve jsme využili toho, že každá dvojice $\{r,s\}$, $1 \leqq r < s \leqq 2n$, se vyskytuje právě v jedné skupině c_j, pokud r a s nejsou manželé, a nakonec toho, že dvojice manželů jsou (zpravidla) navzájem disjunktní.

Dostali jsme tak nerovnost

$$\sum_{j=1}^{k} y_j^2 \geqq \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 ,$$

která říká, že pro $y_1 = y_2 = \ldots = y_k = 0$ má soustava rovnic (1) pouze triviální řešení $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n} = 0$. To ovšem znamená, že rovnic musí být rozhodně aspoň tolik co neznámých, tj. musí platit $k \geqq 2n$, což jsme měli dokázat.

Z předchozího řešení (z rozboru případu $d_i = 2$) snadno zjistíme, že tvrzení úlohy pro $n = 3$ neplatí. Označíme-li hosty 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, že i a $7 - i$ jsou manželé, vystačíme se čtyřmi skupinkami $\{1,2,3\}$, $\{1,4,5\}$, $\{6,5,3\}$, $\{6,2,4\}$.

3. Tato úloha je velmi lehká a dá se řešit mnoha způsoby (předpokládáme samozřejmě, že je $a \neq b \neq c \neq a$). Roznásobením a jednoduchou úpravou se můžeme přesvědčit, že platí

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} .$$

Odtud plyne tvrzení úlohy.

Jiné řešení (přirozenější varianta předchozího řešení). Položíme-li $x = b - c$, $y = c - a$, $z = a - b$, bude podle předpokladu $xyz \neq 0$ a

$$ayz + bxz + cxy = 0. \tag{2}$$

Zároveň zřejmě platí

$$x + y + z = 0, \qquad ax + by + cz = 0.$$

Vynásobíme-li rovnost (2) postupně čísly yz, zx a xy, dostaneme rovnosti

$$ay^2z^2 + bxyz^2 + cxy^2z = 0,$$
$$axyz^2 + bx^2z^2 + cx^2yz = 0,$$
$$axy^2z + bx^2yz + cx^2y^2 = 0.$$

Jejich sečtením vyjde

$$ay^2z^2 + bx^2z^2 + cx^2y^2 + xyz\big(a(y+z) + b(z+x) + c(x+y)\big) = 0.$$

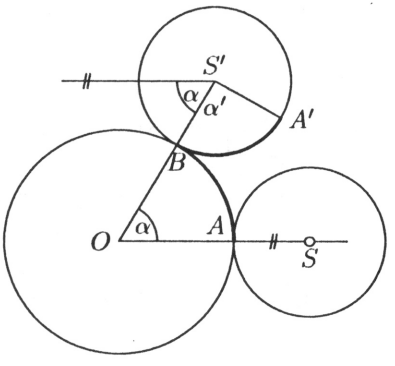
Podle uvedených vztahů přitom ale platí

$$a(y+z) + b(z+x) + c(x+y) = a(y+z) + b(z+x) + c(x+y) + ax + by + cz =$$
$$= (a+b+c)(x+y+z) = 0,$$

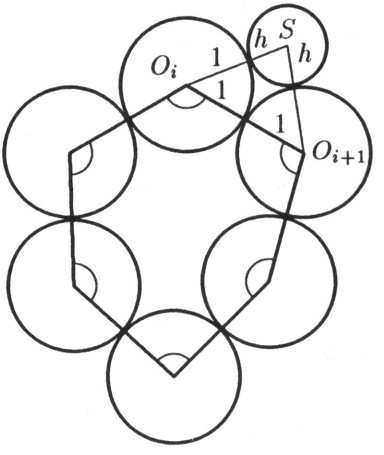
takže dostáváme hledanou rovnost

$$ay^2z^2 + bx^2z^2 + cx^2y^2 = 0.$$

4. Poloměr mincí v řetězu budeme považovat za jednotkový. Z obr. 16 je vidět, že mince o poloměru k se po objetí oblouku délky α otočí kolem svého vlastního středu o úhel $\alpha + \alpha' = \alpha + \frac{1}{k}\alpha = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\alpha$ (odpovídající oblouky AB a $A'B$ mají totiž stejnou délku). Speciálně pro $k = 1$ se mince po „projetí“ oblouku délky α sama otočí o úhel 2α.



Obr. 16



Obr. 17

Najdeme tedy součet délek oblouků, které uvažovaná mince objede. Označme O_1, O_2, ..., O_n středy jednotlivých mincí v řetězu. Pohybující se mince se určitě nebude pohybovat po obloucích ležících uvnitř n-úhelníku $O_1O_2 \ldots O_n$, jejichž celková

délka je $(n-2)\pi$ (součet vnitřních úhlů n-úhelníku). Z celkové délky $2\pi n$ všech n kružnic musíme ovšem ještě odečíst ty části oblouků mezi dvěma sousedními mincemi, kterých se otáčející se mince nikdy nedotkne a jež leží v rovnoramenném trojúhelníku O_iSO_{i+1} (obr. 17). Jednoduchým výpočtem zjistíme, že délka těchto dvou oblouků je mezi každými dvěma mincemi rovna $2\arccos\frac{1}{1+k}$. Celkový součet délek oblouků, po nichž se uvažovaná mince pohybuje, tedy bude

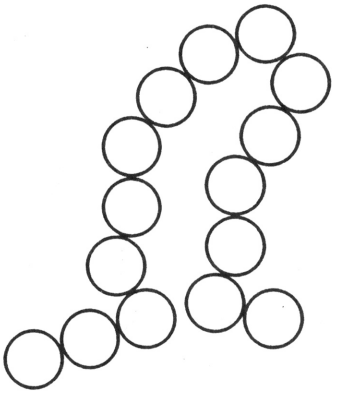
$$2n\pi - (n-2)\pi - 2n\arccos\frac{1}{1+k},$$

čemuž odpovídá

$$\frac{1+k}{2k}\left(n+2-\frac{2}{\pi}n\arccos\frac{1}{1+k}\right)$$

otáček pohybující se mince. Speciálně pro $k=1$ vyjde počet otáček jako $\frac{1}{3}n+2$.

Předpoklad, že otáčející se mince se dotkne všech mincí v řetězu, je důležitý, protože jinak bychom nemohli počet otáček v závislosti na počtu daných mincí určit. Zřetězené mince by totiž mohly vytvořit „záliv" (obr. 18), do kterého by se objíždějící mince vůbec nedostala.



Obr. 18

5. Dokážeme tvrzení úlohy sporem. Předpokládejme, že každé dva body na povrchu devatenáctistěnu mají vzdálenost nejvýše 21. Je-li V_d objem devatenáctistěnu a V objem jemu vepsané koule, je

$$V < V_d.$$

Devatenáctistěn je tvořen 19 jehlany se společným vrcholem ve středu S vepsané koule a jejich podstavy tvoří stěny devatenáctistěnu. Je-li S_i obsah i-té stěny a r poloměr vepsané koule, je

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 < \frac{1}{3}r(S_1+S_2+\ldots+S_{19}) \tag{1}$$

(to je mimochodem vztah mezi povrchem koule a povrchem devatenáctistěnu).

Uvažujme bod X některé stěny devatenáctistěnu a bod S' dotyku této stěny s vepsanou koulí, pak je $|XS'| \leqq \sqrt{21}$. Kdyby totiž bylo naopak $|XS'| > \sqrt{21}$, bylo by také $|XS| > \sqrt{10^2+21} = 11$. Pro druhý bod $Y \neq X$ průniku přímky XS s povrchem devatenáctistěnu potom platí $|YS| \geqq 10$ a $|XY| = |XS| + |YS| > 21$, což je ve sporu s naším předpokladem.

Zjistili jsme, že každá stěna devatenáctistěnu je částí kruhu se středem v bodě dotyku a poloměrem 21. Je tedy

$$S_i \leqq 21\pi, \qquad 1 \leqq i \leqq 19.$$

Rovnost (1) pak pro $r=10$ znamená, že

$$400\pi < 19 \cdot 21\pi, \qquad \text{tj.} \qquad 400 < 399,$$

a to je spor.

Obsah

40 let matematické olympiády
Sborník řešených úloh
K vydání připravil Karel Horák
Vydala jednota českých matematiků a fyziků, Praha 1993
Tisk HBT-Jet Press Neratovice

5755293