Czechoslovak Mathematical Journal

Ján Jakubík; Milan Kolibiar

О некоторых свойствах пар структур

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 1, 1–27

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100097

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. 4 (79) ПРАГА 30. III. 1954 г. • No 1

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПАР СТРУКТУР

ЯН ЯКУБИК и МИЛАН КОЛИБИАР (Ján Jakubík, Milan Kolibiar),
Кошице-Братислава.

(Поступило в редакцию 15/IV 1952 г.)

В этой работе мы будем изучать пары структур, определенных на одном и том же множестве.[1]) Мы исследуем взаимные соотношения между некоторыми свойствами таких пар структур (свойства A—F, приведенные в пар. 1). Большинство рассуждений относится к дистрибутивным структурам. В работе обобщены некоторые результаты *С. А. Киса* [3].

1. Определения и обозначения.

Если R — разбиение множества M, $x \equiv y(R)$ $(x, y \in M)$ будет означать, что элементы x, y принадлежат одному и тому же классу разбиения R. Пусть R — разбиение структуры S. Если отношение $x \equiv y(R)$ является конгруэнцией на S[2]), то разбиение R называем производящим разбиением S.[3]) Смысл понятий класс разбиения, факторная структура ясен. Если R, R' — два разбиения множества M, то $R \cup R'$ $(R \cap R')$ будет обозначать общее наименьшее увеличение деления (общее наибольшее уплотнение) разбиений R, R'.

Часто будем рассматривать две структуры S_1, S_2, определенные на одном и том же множестве. Эти структуры будем называть совместными. Структурные операции и упорядочение в S_1 (S_2) мы будем обозначать знаками $\cap$, $\cup$; $\subseteqq$ $(\wedge, \vee; \leqq)$.

Интервал в структуре S, наименьшим элементом которого является a, а наибольшим элементом b, будем обозначать $\langle a, b\rangle$, в случае надобности $\langle a, b\rangle(S)$.

Иногда надо будет в тексте отличать множество, на котором определена

1) Работа написана по предложению проф. *О. Борувки*.
2) Понятию конгруэнции придаем здесь обще принятое значение (см. напр. [1], стр. 21).
3) Название производящее разбиение мы вводим в согласии с *О. Борувкой* [6].

структура S, от самой структуры. Это множество мы будем обозначать знаком $|S|$.

Если a — элемент структуры S, и A подмножество в S, то будем пользоваться символами $a \cap A$, $a \cup A$ в смысле обыкновенного умножения комплексов.

Дальнейшие обозначения и понятия объяснены в тексте.

Пусть S_1, S_2 — пара совместных структур. Мы будем исследовать следующие свойства таких пар:

A. Каждое разбиение множества $|S_1| = |S_2|$, которое является производящим разбиением структуры S_1, является также производящим разбиением структуры S_2 и наоборот.

A$_1$. Каждое главное производящее разбиение[4]) структуры S_1, является также главным производящим разбиением структуры S_2 и наоборот.

B. Если множество X является выпуклой подструктурой в S_1, то оно является выпуклой подструктурой также и в S_2 и наоборот.

C. Каждая структурная операция над элементами структуры S_1, дистрибутивна относительно каждой структурной операции над элементами структуры S_2 и наоборот, т. е. имеет место

$$(x \cup y) \vee z = (x \vee z) \cup (y \vee z)\ , \quad (x \vee y) \cup z = (x \cup z) \vee (y \cup z)\ ,$$

и аналогично дальнейшие уравнения.

D. Существуют структуры A, B такие, что

$$S_1 \simeq A \times B, \quad S_2 \simeq \tilde{A} \times B\ .$$

(При этом $\tilde{A}$ означает структуру, двойственную структуре A, символ $\simeq$ означает изоморфизм, $A \times B$ означает прямое произведение структур A, B.)

Если структуры S_1, S_2 дистрибутивны и имеют наибольший и наименьший элемент, то мы можем в таком случае ввести свойство **E**:

E. Существуюг элеметы t, t', где t' дополнение элемента t в структуре S_1, такие, что при произвольных элементах $x, y \in |S_1| = |S_2|$

$$x \vee y = (x \cap y) \cup (y \cap t) \cup (t \cap x)\ , \quad x \wedge y = (x \cap y) \cup (y \cap t') \cup (t' \cap x)\ .$$

Если множество, на котором определены структуры S_1, S_2, конечно, введем свойство F:

F. Графики структур S_1, S_2 изоморфны.

(Более точная формулировка этого свойства помещена в п. 7).

Главные результаты настоящей работы следующие:

В общем случае всегда выполнено $C \Rightarrow B$, $D \Rightarrow A$. Для дистрибутивных структур свойства **A**, **B**, **C**, **D** эквивалентны. Для дистрибутивных структур, содержащих наибольший и наименьший элемент эквивалентны все при-

[4]) Понятие главного производящего разбиения введено в п. 2.4.5.

веденные свойства, кроме свойства **F**. Для конечных структур $D \Rightarrow F$, и для конечных дистрибутивных структур свойства **A**, $\mathbf{A}_1, \ldots,$ **F** эквивалентны.

Импликацию $D \Rightarrow C$ для дистрибутивных структур и $D \Rightarrow F$, для случая, когда множители прямого произведения двойственны себе, доказал С. А. Кис [3].[5])

2. Вспомогательные рассуждения.

Во всем этом параграфе знак S (может быть с индексами) означает дистрибутивную структуру.

2.1. *Пусть J — идеал (дуальный идеал) дистрибутивной структуры S. Положим $x \equiv y$ $(x, y \in S)$ тогда и только тогда, если для какого-нибудь элемента $u \in J$ имеет место*

$$u \cup x = u \cup y \quad (u \cap x = u \cap y) .$$

Тогда отношение $\equiv$ является конгруэнцией в структуре S. Соответствующее производящее разбиение структуры S назовем производящим разбиением по идеалу (дуальному идеалу) J.

Доказательство этого утверждения содержится в доказательстве теоремы 8 в книге Биркгоф [1], стр. 159.

2.2 *Если J — главный идеал (дуальный главный идеал), $J = a \cap S$ $(J = a \cup S)$, где a является элементом структуры S, то производящее разбиение по идеалу (дуальному идеалу) J обозначим R^a (R_a).*

Нетрудно показать, что соотношение $x \equiv y(R^a)$ $(x \equiv y(R_a)$ эквивалентно уравнению $a \cup x = a \cup y$ $(a \cap x = a \cap y)$.

Замечание. Пусть a, b — элементы структуры S и пусть $a \leq b$. Идеал $J = b \cap S$ (дуальный идеал $J' = a \cup S$) является классом производящего разбиения $R^b(R_a)$. Элементы структуры S, одновременно принадлежащие множествам $|J|$ и $|J'|$ образуют интервал $\langle a, b\rangle = A$. Значит, интервал A является классом производящего разбиения $R^b \cap R_a$.

Далее справедливо равенство: $R^a \cap R_b = R_{\min}$,[6]) так как для элементов $x, y \in S$ вытекают из соотношения $x \equiv y(R^a \cap R_b)$ уравнения $a \cup x = a \cup y$, $b \cap x = b \cap y$. Так как $a \leqq b$, то из первого уравнения следует $b \cup x = b \cup y$. Из уравнений $b \cup x = b \cup y$, $b \cap x = b \cap y$ следует $x = y$.[7])

---

[5]) Читая рукопись настоящей работы, проф. *В. Корэюинек* и *В. Вильгельм* обратили наше внимание на то, что некоторые части статьи (отдел 2.5 и 6) в тесной связи с работой *Б. Г. Арнолда* [7]. Поэтому мы в отдел 2.5 поместили заметку, указывающую на эту связь. Смотри также сноску[16]).

[6]) $R_{\min}$ означает разбиение, в котором каждый элемент множества образует особый класс.

[7]) [1], стр. 134.

2.3. *Пусть a, t — элементы дистрибутивной структуры S. Если для элементов $x, y \in S$ положить $x \equiv y$ тогда и только тогда, если справедливо*

$$\text{(i)}\quad (a \cup x) \cap (x \cup t) \cap (t \cup a) = (a \cup y) \cap (y \cup t) \cap (t \cup a)\,,$$

то соотношение $\equiv$ является конгруэнцией в структуре S.

Замечание 1. Уравнение (i) эквивалентно уравнению (ii):

$$\text{(ii)}\quad (a \cap x) \cup (x \cap t) \cup (t \cap a) = (a \cap y) \cup (y \cap t) \cup (t \cap a)\,.$$

Доказательство. Отношение $\equiv$, очевидно, обладает свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности и, значит, определяет разбиение на множестве $|S|$. Это разбиение является производящим, так как из соотношений $x \equiv y$, $z \equiv u (x, y, z, u \in S)$ следует $x \cap z \equiv y \cap u$, $x \cup z \equiv y \cup u$. Первое соотношение следует из уравнения

$$\begin{aligned} &[a \cup (x \cap z)] \cap [(x \cap z) \cup t] \cap (t \cup a) = \\ &= [(a \cup x) \cap (x \cup t) \cap (t \cup a)] \cap [(a \cup z) \cap (z \cup t) \cap (t \cup a)] = \\ &= [(a \cup y) \cap (y \cup t) \cap (t \cup a)] \cap [(a \cup u) \cap (u \cup t) \cap (t \cup a)] = \\ &= [a \cup (y \cap u)] \cap [(y \cap u) \cup t] \cap (t \cup a)\,, \end{aligned}$$

а из замечания 1 видно, что доказательство второго соотношения двойственно ему.

Обозначение. Только что определенное производящее разбиение структуры S, отнесенное к элементам a, t обозначим через R_a^t.

Замечание 2. Если структура S имеет наибольший и наименьший элемент I и 0, то $R_a^{\mathrm{I}} = R^a$, $R_a^0 = R_a$.

2.4. *Пусть S — дистрибутивная структура, и пусть R_a^t — производящее разбиение, введенное в пар.* 2.3.

2.4.1. *Множество J элементов z структуры S, при которых $z \equiv a \cap t(R_a^t)$ ($z \equiv a \cup t(R_a^t)$) является идеалом (дуальным идеалом) структуры S.*

Доказательство. Пусть J есть множество элементов $z \in S$, для которых имеет место $z \equiv a \cap t(R_a^t)$. Если z_1, z_2 — элементы множества $|J|$, то $z_1 \equiv a \cap t$, $z_2 \equiv a \cap t(R_a^t)$, откуда следует $z_1 \cup z_2 \equiv a \cap t$, т. е. $z_1 \cup z_2 \in J$. Далее элемент $v \in S$, $v \leqq a \cap t$, удовлетворяет соотношению

$$(a \cap v) \cup (v \cap t) \cup (t \cap a) = t \cap a = [a \cap (a \cap t)] \cup [(a \cap t) \cap t] \cup (t \cap a)\,,$$

т. е. $v \equiv a \cap t(R_a^t)$. Для элементов $u \in S$, $z \in J$ тогда верно соотношение $u \cap z \equiv u \cap a \cap t \equiv a \cap t$, т. е. $u \cap z \in J$.

Доказательство второй части утверждения двойственно доказательству первой части.

2.4.2. *Если z_1, z_2 — элементы интервала $\langle a \cap t,\, a \cup t \rangle$, то соотношение $z_1 \equiv z_2 (R_a^t)$ выполнено тогда и только тогда, если $z_1 = z_2$.*

Доказательство. Для элементов $z_1, z_2 \in \langle a \cap t, a \cup t \rangle$ имеет место

$$(a \cup z_1) \cap (z_1 \cup t) \cap (t \cup a) = [z_1 \cup (a \cap t)] \cap (t \cup a) = z_1 \cap (t \cup a) = z_1 ,$$

и аналогично $(a \cup z_2) \cap (z_2 \cup t) \cap (t \cup a) = z_2$. Из соотношения $z_1 \equiv z_2(R^t_a)$ следует $z_1 = z_2$. Обратная импликация очевидна.

2.4.3. *Для производящих разбиений R^t_a, $R^{a\cap t}$, $R_{a\cup t}$ справедливо*

$$R^{a\cap t} \cap R_{a\cup t} = R_{\min}, \quad R^{a\cap t} \cup R_{a\cup t} = R^t_a .$$

Доказательство. Первое соотношение следует из замечания в пар. 2.2. Второе соотношение получим следующим образом:

Если выполнено $x \equiv y(R^{a\cap t})$, $(a \cap t) \cup x = (a \cap t) \cup y$, т. е. $(a \cup x) \cap \cap (x \cup t) = (a \cup y) \cap (y \cup t)$, откуда следует $(a \cup x) \cap (x \cup t) \cap (t \cup a) = (a \cup y) \cap \cap (y \cup t) \cap (t \cup a)$, т. е. $x \equiv y(R^t_a)$.

Значит, верно неравенство $R^{a\cap t} \leqq R^t_a$. Двойственно докажется $R_{a\cup t} \leqq R^t_a$. Отсюда следует $R^{a\cap t} \cup R_{a\cup t} \leqq R^t_a$.

Далее, если $x \equiv y(R^t_a)$, то

$$(a \cup x) \cap (x \cup t) \cap (t \cup a) = (a \cup y) \cap (y \cup t) \cap (t \cup a) .$$

Из уравнений

$$\begin{gathered}(a \cap t) \cup x = (a \cap t) \cup [(a \cap t) \cup x] ,\\ (a \cup t) \cap [(a \cap t) \cup x] = (a \cup t) \cap [(a \cap t) \cup y] ,\\ (a \cap t) \cup y = (a \cap t) \cup [(a \cap t) \cup y]\end{gathered}$$

вытекает

$$\begin{gathered}x \equiv (a \cap t) \cup x(R^{a\cap t}) ,\\ (a \cap t) \cup x \equiv (a \cap t) \cup y(R_{a\cup t}) ,\\ (a \cap t) \cup y \equiv y(R^{a\cap t}) ,\end{gathered}$$

откуда следует

$$x \equiv y(R^{a\cap t} \cup R_{a\cup t}) .$$

Значит, верно также $R^t_a \leqq R^{a\cap t} \cup R_{a\cup t}$, чем доказательство и закончилось.

2.4.4. *Факторная структура S' классов производящего разбиения R^t_a структуры S изоморфна интервалу $\langle a \cap t,\ a \cup t \rangle$.*

Доказательство. Определим отображение **e** структуры S на интервал $A = \langle a \cap t, a \cup t \rangle$ следующим образом: элементу $x \in S$ поставим в отображении **e** в соответствие элемент x',

$$x' = (a \cup x) \cap (x \cup t) \cap (t \cup a) = (a \cap x) \cup (x \cap t) \cup (t \cap a) \in A .$$

Отображение **e** является эндоморфизмом.

Действительно, пусть x_1, x_2 — элементы структуры S, и x_1', x_2' — их образы в отображении **e**. Образ элемента $x_1 \cup x_2$ есть

$$\begin{gathered}(x_1 \cup x_2)' = [a \cap (x_1 \cup x_2)] \cup [(x_1 \cup x_2) \cap t] \cup (t \cap a) =\\ = [(a \cap x_1) \cup (x_1 \cap t) \cup (t \cap a)] \cup [(a \cap x_2) \cup (x_2 \cap t) \cup (t \cap a)] = x_1' \cup x_2' .\end{gathered}$$

Двойственно докажется $(x_1 \cap x_2)' = x_1' \cap x_2'$.

Множество X элементов структуры S, образом которых служит элемент $x' \in A$, является классом производящего разбиения R_a^t, так как $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ тогда и только тогда, если $x_1' = x_2' = x'$, т. е. $x' = (a \cup x_1) \cap (x_1 \cup t) \cap \cap (t \cup a) = (a \cup x_2) \cap (x_2 \cup t) \cap (t \cup a)$, т. е. $x_1 \equiv x_2(R_a^t)$.

Отсюда следует, что структура классов изоморфна интервалу A, и доказательство на этом закончилось.

Замечание. Нетрудно также доказать, что факторная структура классов производящего разбиения R^a (R_a) изоморфна подструктуре J порожденной элементами $x \in S$, при которых $x \geqq a$ $(x \leqq a)$. Соответствующий эндоморфизм **e** дан следующим образом: $x \to a \cup x$ $(x \to a \cap x)$.

2.4.5. Определение. *Если структура S имеет наименьший и наибольший элемент, и элемент $t \in S$ имеет дополнение t', то разбиение R_a^t будем называть главным производящим разбиением.*

2.5. *Введем в дальнейшие рассуждения тернарьную операцию*

$$(a, b, c) = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)\ .[8]$$

Замечание. Пусть b — фиксированный элемент структуры S. Обозначим $(x, b, y) = x * y$. Определенная таким образом операция имеет следующие свойства[9])

P1. $x * x = x$ при всех $x \in S$;

P2. $x * y = y * x$ при всех $x, y \in S$;

P3. $x * (y * z) = (x * y) * z$ при всех $x, y, z \in S$;

P4. Операция $*$ дистрибутивна с операциями $\cup$, $\cap$.

Свойства **P1**, **P2** очевидны. Свойство **P3** следует из уравнения

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= (x, b, (y, b, z)) = (x \cup b) \cap \{b \cup [(y \cup b) \cap (b \cup z) \cap (z \cup y)]\} \cap \\ &\cap \{[(y \cup b) \cap (b \cup z) \cap (z \cup y)] \cup x\} = \\ &= (x \cup b) \cap (y \cup b) \cap (b \cup z) \cap (b \cup y \cup z) \cap (b \cup x \cup y) \cap (b \cup x \cup z) \cap \\ &\cap (x \cup y \cup z) = (x \cup y \cup z) \cap [(x \cap y \cap z) \cup b] \end{aligned}$$

и из уравнения, полученного аналогичным образом

$$(x * y) * z = (x \cup y \cup z) \cap [(x \cap y \cap z) \cup b]\ .$$

Докажем еще свойство **P4**. Имеет место

$$\begin{aligned} x \cap (y * z) &= x \cap [(y \cap b) \cup (b \cap z) \cup (z \cap y)] = \\ &= [(x \cap y) \cap b] \cup [b \cap (x \cap z)] \cup [(x \cap z) \cap (x \cap y)] = \\ &= (x \cap y) * (x \cap z)\ , \end{aligned}$$

---

[8]) Эту операцию в алгебре Буля изучает *А. А. Грау* [2]. Для дистрибутивных структур ввел операцию *С. А. Кис* [3], [4]. Сравни также *Г. Биркгоф* [1].

[9]) Дистрибутивные структуры с третьей операцией $*$, имеющей свойства **P1**—**P4**, изучает *Арнолд* [7]. Заметим, что операция $x * y = (x, b, y)$ может не иметь свойства Арнолда **P5**.

$$\begin{aligned} x * (y \cap z) &= (x \cup b) \cap [b \cup (y \cap z)] \cap [(y \cap z) \cup x] = \\ &= (x \cup b) \cap (b \cup y) \cap (b \cup z) \cap (y \cup x) \cap (z \cup x) = \\ &= [(x \cup b) \cap (b \cup y) \cap (y \cup x)] \cap [(x \cup b) \cap (b \cup z) \cap (z \cup x)] = \\ &= (x * y) \cap (x * z) . \end{aligned}$$

Уравнения

$$x \cup (y * z) = (x \cup y) * (x \cup z) , \quad x * (y \cup z) = (x * y) \cup (x * z)$$

доказываются с помощью двойственности.

2.5.1. Лемма. *Пусть S — дистрибутивная структура с наибольшим и наименьшим элементом, соотв. I, 0. Пусть t — элемент структуры S, имеющий дополнение t'.*

1. Если определим

$$\begin{aligned} a \vee b &= (a \cup b) \cap (b \cup t) \cap (t \cup a) = (a, t, b) , \\ a \wedge b &= (a \cup b) \cap (b \cup t') \cap (t' \cup a) = (a, t', b) , \end{aligned}$$

то множество $|S|$ с операциями $\vee$, $\wedge$, будет дистрибутивной структурой S^*, содержащей в качестве наибольшего элемента t, а в качестве наименьшего элемента t'.[10])

2. Элементы I, 0 являются в структуре S^* взаимно дополнительными.

3. Наоборот, операции $\cup$, $\cap$ структуры S могут быть заданы уравнениями

$$\begin{aligned} a \cup b &= (a \vee b) \wedge (b \vee \mathrm{I}) \wedge (\mathrm{I} \vee a) , \\ a \cap b &= (a \vee b) \wedge (b \vee 0) \wedge (0 \vee a) . \end{aligned}$$

Доказательство 1-ого утверждения можем легко провести так, что покажем, что операции $\vee$, $\wedge$ удовлетворяют постулатам о дистрибутивных структурах. Доказателство утверждений 2,3 не представляет ни каких затруднений.

2.5.2. Обозначения. *Дистрибутивную структуру S^* с операциями $\vee$, $\wedge$ построенную с помощью дистрибутивной структуры S в пар.* 2.5.1, *обозначим через S^t.*

Если S, S^* — совместные дистрибутивные структуры с наибольшим и наименьшим элементом и существует элемент $t \in S$ такой, что $S^* = S^t$, то будем писать $S^* \overset{0}{\sim} S$. Соотношение $S^* \overset{0}{\sim} S$ будем называть o-эквиваленцией.

2.5.3. *Пусть совместные дистрибутивные структуры S, S^* с наибольшим и наименьшим элементом удовлетворяют соотношению $S^* \overset{0}{\sim} S$. Тогда, если элемент x' служит дополнением элемента x в одной из структур S, S^*, то он является дополнением этого элемента и во второй структуре.*

---

[10]) Сравни [5]. В частном случае, если S — алгебра Буля, то отношение $x \leqq y$ тождественно отношению xRy (теорема 6 цит. работы), если возьмем $t = b$.

Доказательство. Для операций, наибольшего и наименьшего элемента структур S, S^* введем обозначение, принятое в 2.5.1. По предложению справедливо равенство $S^* = S^t$.

Если x' — дополнение элемента x в структуре S, то $x \cap x' = 0$, $x \cup x' = \mathrm{I}$. Отсюда получим $x \vee x' = (x \cup x') \cap (x' \cup t) \cap (t \cup x) = \mathrm{I} \cap [(x \cap x') \cup t] = t$. Подобно получим $x \wedge x' = t'$. Значит, элемент x' является дополнением элемента x также в структуре S^*.

Так как взаимное соотношение структур S, S^* симметричное, то дополнение элемента x в структуре S^* является также дополнением этого элемента в структуре S, и этим доказательство закончено.

2.5.4. *Пусть S, S_1, S_2, S_3 — совместные дистрибутивные структуры с наибольшим и наименьшим элементом. Потом*

1. $S \overset{0}{\sim} S$,
2. $S_1 \overset{0}{\sim} S_2$ *влечет за собой* $S_2 \overset{0}{\sim} S_1$,
3. $S_1 \overset{0}{\sim} S_2$, $S_2 \overset{0}{\sim} S_3$ *влечет за собой* $S_1 \overset{0}{\sim} S_3$.

Доказательство.

1. Очевидно, выполнено $S = S^{\mathrm{I}}$ откуда следует $S \overset{0}{\sim} S$.
2. Утверждение 2 следует из 2.5.1.
3. Обозначим наибольший и наименьший элемент структуры S_1, S_2, S_3 соответственно знаками $\mathrm{I}, 0$; t, t'; u, u' и структурные операции этих структур соответственно знаками $\cup, \cap$; $\vee, \wedge$; $\curlyvee, \curlywedge$.

Справедливы равенства $S_2 = S_1^t$, $S_3 = S_2^u$. Утверждение будет доказано, если покажем, что верно равенство $S_3 = S_1^u$.

Для каждых двух элементов x, y структур S_1, S_2, S_3 имеют место уравнения

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} & x \vee y &= (x \cup y) \cap (y \cup t) \cap (t \cup x)\ , \\
& & x \wedge y &= (x \cup y) \cap (y \cup t') \cap (t' \cup x)\ ; \\
&\text{(ii)} & x \curlyvee y &= (x \vee y) \wedge (y \vee u) \wedge (u \vee x)\ , \\
& & x \curlywedge y &= (x \vee y) \wedge (y \vee u') \wedge (u' \vee x)\ ,
\end{aligned}$$

Из уравнений (i) и (ii) получим, произведя надлежащие вычисления

$$\begin{aligned}
x \curlyvee y &= (x \cup y) \cap (y \cup u) \cap (u \cup x)\ , \\
x \curlywedge y &= (x \cup y) \cap (y \cup u') \cap (u' \cup x)\ ,
\end{aligned}$$

откуда следует $S_3 = S_1^u$.

Замечание. В силу только что сказано, отношение $\overset{0}{\sim}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, и следовательно, определяет разбиение множества совместных дистрибутивных структур с наибольшим и наименьшим элементом. Две структуры S_1, S_2 принадлежат одному и тому же классу этого разбиения тогда и только тогда, если $S_1 \overset{0}{\sim} S_2$.

2.5.5 *Если $\tilde{S}$ — структура, двойственная структуре S, с наибольшим и наименьшим элементом* I *и* 0, *выпольнено $\tilde{S} \overset{0}{\sim} S$, так как (как нетрудно доказать) $\tilde{S} = S^0$.*

Если t — элемент структуры S, имеющий дополнение, то, согласно 2.5.4, $S^t \overset{0}{\sim} (\tilde{S})^t$. В силу 3 части доказательства в 2.5.4, $(\tilde{S})^t = S^t$, т. е. структуры S^t, $(\tilde{S})^t$ тождественны. Впрочем, это вытекает также из уравнения

$$(a \cup b) \cap (b \cup t) \cap (t \cup a) = (a \cap b) \cup (b \cap t) \cup (t \cap a)\ .$$

2.5.6. *Приведем еще два замечания, касающиеся главных производящих разбиений. Пусть S — дистрибутивная структура с наибольшим и наименьшим элементом.*

2.5.6.1. Производящее разбиение R^a структуры S^t (т. е. разбиение по главному идеалу $a \wedge S^t$) является, очевидно, главным производящим разбиением структуры S и $R^a = R^t_a$, причем символ в левой части уравнения относится к структуре S^t, символ в правой части к структуре S.

Наоборот, главное производящее разбиение R^t_a структуры S является разбиением структуры S^t по главному идеалу $a \wedge S^t$.

Значим, разбиение R структуры S является главным производящим разбиением этой структуры тогда и толко тогда, когда оно является производящим разбиением по главному идеалу некоторой структуры S^t.

2.5.6.2. *Главное производящее разбиение R^t_a структуры S является также главным производящим разбиением двойственной структуры $\tilde{S}$.*

Действительно, в силу 2.5.6.1 R^t_a является производящим разбиением структуры S^t по главному идеалу. В силу 2.5.5. $S^t = \tilde{S}^t$. По 2.5.6.1 R^t_a является главным производящим разбиением структуры $\tilde{S}$ и утверждение доказано.

3.

Во всем этом параграфе будем под парой структур подразумевать две совместные структуры.

3.1 Теорема. *Пусть пара дистрибутивных структур S_1, S_2 имеет свойство* **A**[11]*, и пусть X — выпуклая подструктура в S_1. Тогда множество $|X|$ также является выпуклой подструктурой в S_2.*

Замечание. Значит, для пары дистрибутивных структур из свойства ***A*** следует свойство ***B***.[11]

Доказательство. а) Пусть x, y — элементы подструктуры X. Образуем разбиение $R^{x \vee y}(S_1) \cap R_{x \wedge y}(S_1)$. При этом разбиении $x \equiv y$ и, значит, также $x \equiv x \wedge y \equiv x \vee y$. Отсюда следует, что элементы $x \wedge y$, $x \vee y$ при-

[11] Свойства ***A***, ***B*** были введены в пар. 1.

надлежат интервалу $\langle x \cap y,\ x \cup y\rangle\ (S_1)$, следовательно, также множеству $|X|$. Следовательно, $|X|$ является подструктурой S_2. б) Пусть для элементов $x, y \in X$, $z \in S_2$ выполнено соотношение $x \leqq z \leqq y$. В разбиении, указанном под а), $x \equiv y$, значит, $x \equiv z$, откуда следует $z \in |\langle x \cap y, x \cup y\rangle\ (S)_1| \subset |X|$. Следовательно, множество $|X|$ является выпуклой подструктурой в S_2, и теорема доказана.

3.2. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы пара структур S_1, S_2 обладала свойством* **B**[11]), *следующее:*

(3.2.1) *При* $a, b, x \in S_1$, $a \subseteqq b$ *имеет место* $a \subseteqq x \subseteqq b \Leftrightarrow a \wedge b \leqq x \leqq \leqq a \vee b$;

(3.2.1′) *для* $a, b, x \in S_1$, $a \leqq b$ *имеет место* $a \leqq x \leqq b \Leftrightarrow a \cap b \subseteqq \subseteqq x \subseteqq a \cup b$.

Доказательство.

а) Условие достаточно. Пусть пара структур S_1, S_2 удовлетворяет (3.2.1), (3.2.1′).

1. Пусть x_1, $x_2 \in S_1$. Из соотношений $x_1 \cap x_2 \subseteqq x_i \subseteqq x_1 \cup x_2$ $(i = 1, 2)$ следует по (3.2.1) $(x_1 \cap x_2) \wedge (x_1 \cup x_2) \leqq x_i \leqq (x_1 \cap x_2) \vee (x_1 \cup x_2)$ $(i = 1, 2)$ и, значит, также

$$(x_1 \cap x_2) \wedge (x_1 \cup x_2) \leqq x_1 \wedge x_2 \leqq (x_1 \cap x_2) \vee (x_1 \cup x_2)\ ,$$
$$(x_1 \cap x_2) \wedge (x_1 \cup x_2) \leqq x_1 \vee x_2 \leqq (x_1 \cap x_2) \vee (x_1 \vee x_2)\ .$$

В силу (3.2.1) потом выполнено

$$(3.2.2) \qquad x_1 \cap x_2 \subseteqq x_1 \wedge x_2 \subseteqq x_1 \cup x_2\ , \quad x_1 \cap x_2 \subseteqq x_1 \vee x_2 \subseteqq x_1 \cup x_2\ .$$

Подобно докажутся соотношения

$$(3.2.2') \qquad x_1 \wedge x_2 \leqq x_1 \cap x_2 \leqq x_1 \vee x_2\ , \quad x_1 \wedge x_2 \leqq x_1 \cup x_2 \leqq x_1 \vee x_2\ .$$

2. Пусть X — выпуклая подструктура в S_1. Для элементов $x_1, x_2 \in X$, в силу (3.2.2.), верно $x_1 \wedge x_2 \in X$, $x_1 \vee x_2 \in X$. Далее, для элементов $a, b \in X$, $x \in S_2$ соотношение $a \leqq x \leqq b$ влечет за собой, согласно (3.2.1′), $a \cap b \subseteqq \subseteqq x \subseteqq a \cup b$, т. е. $x \in X$, значит, множество $|X|$ является выпуклой подструктурой также в структуре S_2.

Аналогично докажется, что если $|X|$ — выпуклая подструктура в S_2, то множество $|X|$ является выпуклой подструктурой также и в S_1.

б) Условие необходимо. Пусть пара S_1, S_2 имеет свойство B.

1. Пусть элементы $a, b, x \in S_1$ выполняют соотношение $a \subseteqq x \subseteqq b$. Будем исследовать выпуклую подструктуру $A = \langle a \wedge b,\ a \vee b\rangle\ (S_2)$. Очевидно, $a \in A$, $b \in A$. Так как множество $|A|$ является выпуклой подструктурой также в S_1, то $x \in A$, т. е. $a \wedge b \leqq x \leqq a \vee b$.

2. Пусть элементы $a, b, x \in S_1$ удовлетворяют соотношениям $a \subseteqq b$, $a \wedge b \leqq \leqq x \leqq a \vee b$. Будем рассматривать выпуклую подструктуру $A = \langle a, b\rangle\ (S_1)$.

По предположению $a \wedge b \in A$, $a \vee b \in A$. Элемент x принадлежит множеству $|A|$, следовательно, $a \subseteqq x \subseteqq b$. Этим доказаны соотношения (3.2.1). Подобным образом доказываются соотношения (3.2.1′).

Следствие. Пусть пара структур S_1, S_2 имеет свойство **B**. Пусть множество X является выпуклой подструктурой в структурах S_1, S_2. Тогда, если множество X является интервалом в S_1, то оно является интервалом также в S_2 и наоборот.

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из соотношений (3.2.1) и (3.2.1′).

3.3. *Если пара структур S_1, S_2 имеет свойство* **B**, *то для элементов a, b, $c \in S_1$ выполнено*

(3.3.1) $$a \subseteqq b \Rightarrow a \wedge c \subseteqq b \wedge c\,, \quad a \vee c \subseteqq b \vee c\,,$$

(3.3.1′) $$a \leqq b \quad a \cap c \leqq b \cap c\,, \quad a \cup c \leqq b \cup c\,.$$

Доказательство. В силу 3.2 выполнены для структур S_1, S_2 соотношения (3.2.2), (3.2.2′). Пусть $a \subseteqq b$. Согласно (3.2.2), $a \wedge c \subseteqq a \cup c \subseteqq b \cup c$; аналогично, по (3.2.2′) имеет место

$$\text{(i)} \quad b \wedge c \leqq b \cup c \leqq (a \wedge c) \vee (b \cup c)\,.$$

Из соотношений $a \cap c \subseteqq a \subseteqq b \subseteqq b \cup c$ следует, в силу (3.2.1), $(a \cap c) \wedge \wedge (b \cup c) \leqq b$. По (3.2.2′) $a \wedge c \leqq a \cap c$, откуда следует $(a \wedge c) \wedge (b \cup c) \leqq \leqq (a \cap c) \wedge (b \cup c) \leqq b$. Потому что также $(a \wedge c) \wedge (b \cup c) \leqq c$, следует отсюда

$$\text{(ii)} \quad (a \wedge c) \wedge (b \cup c) \leqq b \wedge c\,.$$

Из соотношений (i), (ii) следует

$$(a \wedge c) \wedge (b \cup c) \leqq b \wedge c \leqq (a \wedge c) \vee (b \cup c)$$

что, в силу (3.2.1), влечет за собой $a \wedge c \subseteqq b \wedge c$.

Соотношение $a \vee c \subseteqq b \vee c$ докажется двойственно. (Достаточно заменит всюду операцию $\wedge$ операцией $\vee$ и наоборот, операцию $\vee$ операцией $\wedge$ и вместо $\leqq$ писать $\geqq$).

Этим доказаны соотношения (3.3.1). Соотношения (3.3.1′) докажутся аналогичным способом.

3.4. Теорема. *Если пара структур S_1, S_2 имеет свойство C (смотри пар. 1), то имеет также свойство* **B**.

Доказательство. Пусть пара структур S_1, S_2 имеет свойство **C**. Пусть a, b, x — элементы структуры S_1 и пусть $a \subseteqq b$.

1. Пусть $a \subseteqq x \subseteqq b$. Тогда $a \cup x = x$, $b \cap x = x$, откуда следует

$$(a \vee b) \cup (a \vee b \vee x) = (a \vee b \vee a) \cup (a \vee b \vee x) = (a \vee b) \vee (a \cup x) = a \vee b \vee x =$$
$$= (a \vee b) \vee (b \cap x) = (a \vee b \vee b) \cap (a \vee b \vee x) = (a \vee b) \cap (a \vee b \vee x)\,.$$

Отсюда следует далее $a \vee b = a \vee b \vee x$, т. е. $x \leqq a \vee b$.

Подобным образом получим $(a \wedge b) \cap (a \wedge b \wedge x) = (a \wedge b) \cup (a \wedge b \wedge x)$ что влечет за собой $a \wedge b = a \wedge b \wedge x$, т. е. $a \wedge b \leqq x$.

2. Пусть $a \wedge b \leqq x \leqq a \vee b$. Тогда $x = (a \wedge b) \vee x = (a \vee b) \wedge x$. Отсюда следует

$$a \vee (a \cap x) = [a \wedge (a \cap b)] \vee (a \cap x) = [a \cap (a \wedge b)] \vee (a \cap x) =$$
$$= a \cap [(a \wedge b) \vee x] = a \cap x = a \cap [(a \vee b) \wedge x] = [a \cap (a \vee b)] \wedge (a \cap x) =$$
$$= [a \vee (a \cap b)] \wedge (a \cap x) = a \wedge (a \cap x) ,$$

что влечет за собой $a = a \cap x$, т. е. $a \subseteqq x$. При помощи двойственности докажется $x \subseteqq b$. Итак для пары S_1, S_2 выполнены соотношения (3.2.1). Аналогично докажется, что выполнены соотношения (3.2.1′). В силу 3.2. пара S_1, S_2 имеет свойство **B**, ч. т. д.

3.5. Теорема. *Если пара дистрибутивных структур имеет свойство* **B**, *то она имеет также свойство* **C**.

Замечание. Для недистрибутивных структур теорема не справедлива, что видно из следующего примера: пусть S — недистрибутивная структура и $\tilde{S}$ — структура, ей двойственная. Пара S, $\tilde{S}$ имеет свойство **B**, но, очевидно, не имеет свойства **C**.

Доказательство теоремы. Пусть пара дистрибутивных структур S_1, S_2 имеет свойство B. В силу симметричности соотношений между структурами S_1, S_2 достаточно доказать уравнения

(3.5.1) $\quad (a \cap b) \wedge c = (a \wedge c) \cap (b \wedge c)$,

(3.5.1a) $\quad (a \cap b) \vee c = (a \vee c) \cap (b \vee c)$,

(3.5.1b) $\quad (a \cup b) \wedge c = (a \wedge c) \cup (b \wedge c)$,

(3.5.1c) $\quad (a \cup b) \vee c = (a \vee c) \cup (b \vee c)$

для элементов $a, b, c \in S$.

Пусть a, b, c — произвольные элементы структуры S_1 (S_2). а) 1. Справедливы соотношения $a \cap b \subseteqq a$, $a \cap b \subseteqq b$, что, согласно 3.3, влечет за собой $(a \cap b) \wedge c \subseteqq a \wedge c$, $(a \cap b) \wedge c \subseteqq b \wedge c$. Из этого следует далее

$$(a \cap b) \wedge c \subseteqq (a \wedge c) \cap (b \wedge c) .$$

2. В силу 3.2 (соотношения (3.2.2)) выполнены уравнения

$$\text{(i)} \quad (a \wedge c) \cap (b \wedge c) \subseteqq (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c ,$$
$$(a \wedge c) \cap (b \wedge c) \subseteqq (a \wedge c) \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c .$$

Далее (по (3.2.2′)) $(a \wedge b) \wedge c \leqq (a \cap b) \wedge c \leqq (a \vee b) \wedge c$, откуда, в силу 3.2 (соотношения (3.2.1′)), следует

$$[(a \wedge b) \wedge c] \cap [(a \vee b) \wedge c] \subseteqq (a \cap b) \wedge c .$$

Последнее соотношение вместе с (i) дает нам $(a \wedge c) \cap (b \wedge c) \subseteqq (a \cap b) \wedge c$.

3. Из результатов раздела 1,2 вытекает уравнение (3.5.1).

б) Пара структур $S_1, \tilde{S}_2$ имеет свойство **B**. Применив результат а) для пары S_1, $\tilde{S}_2$, получим сразу уравнение (3.5.1a).

с) Поступая таким же образом, как в б), докажем уравнения (3.5.1b), (3.5.1c).

4.

Во всем этом параграфе S_1, S_2 означают совместные дистрибутивные структуры.

4.1. *Пусть пара* S_1, S_2 *имеет свойство* **C**. *Пусть* S_1 *имеет наибольший элемент* I *и наименьший элемент* 0. *Тогда* S_2 *имеет также наибольший и наименьший элемент. Далее, если элемент* $t \in S_1$ *имеет в структуре* S_1 *дополнение* t', *то он имеет дополнение* t' *также в структуре* S_2.

Доказательство. а) По теореме 3.4 имеет пара S_1, S_2 свойство **B**. Каждый элемент $x \in |S_1| = |S_2|$ удовлетворяет соотношению $0 \subseteqq x \subseteqq \mathrm{I}$, откуда следует, в силу 3.2, $0 \wedge \mathrm{I} \leqq x \leqq 0 \vee \mathrm{I}$. Значит, элемент $0 \wedge \mathrm{I}$ ($0 \vee \mathrm{I}$) является наименьшим (наибольшим) элементом структуры S_2.

б) Пусть t' — дополнение элемента t в S_1. Из свойства **C** и из уравнений $t \cap t' = 0$, $t \cup t' = \mathrm{I}$ следует

$$(0 \wedge \mathrm{I}) \cap (t \wedge t') = 0 \wedge t \wedge t' = (t \cap t') \wedge t \wedge t' = (t \wedge t') \cap (t \wedge t') = t \wedge t' =$$
$$= (t \wedge t') \cup (t \wedge t') = t \wedge t' \wedge (t \cup t') = t \wedge t' \wedge \mathrm{I} = (0 \wedge \mathrm{I}) \cup (t \wedge t') .$$

Отсюда следует далее, что $t \wedge t' = 0 \wedge \mathrm{I}$. Таким же образом докажется, что $t \vee t' = 0 \vee \mathrm{I}$. В силу результата а) элементы t, t' являются взаимно дополнительными в S_2, и доказательство на этом закончено.

4.2. Теорема. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы пара дистрибутивных структур с наибольшим и наименьшим элементом имела свойство* **E** (*смотри пар.* 1) *следующее: указанная пара имеет свойство* **C**.

Доказательство. Обозначим наибольший и наименьший элемент структуры S_1 (S_2) символами I, 0 соответственно (t, t').

Импликация $E \Rightarrow C$ следует из того, что операции $\wedge$, $\vee$ имеют свойство ***P4*** (пар. 2.5). Докажем импликацию $C \Rightarrow E$.

Пусть пара S_1, S_2 имеет свойство **C**. Элементы t, t' являются, в силу 4.1, взаимно дополнительными в S_1.

По теореме 3.4 имеет пара S_1, S_2 свойство **B**. Применяя свойство **C** и 3.2 [соотношения (3.2.2), (3.2.2')], получаем

$$(x \vee y) \vee [(x \cap y) \cup (y \cap t) \cup (t \cap x)] =$$
$$= [(x \vee y) \vee (x \cap y)] \cup [(x \vee y) \vee (y \cap t)] \cup [(x \vee y) \vee (t \cap x)] =$$
$$= (x \vee y) \cup [(x \vee y) \cap (x \vee y \vee t)] = x \vee y ,$$

$$(x \vee y) \wedge [(x \cap y) \cup (y \cap t) \cup (t \cap x)] =$$
$$= [(x \vee y) \wedge (x \cap y)] \cup [(x \vee y) \wedge (y \cap t)] \cup [(x \vee y) \wedge (t \cap x) =$$
$$= (x \cap y) \cup \{y \cap [(x \vee y) \wedge t]\} \cup \{[(x \vee y) \wedge t] \cap x\} =$$
$$= (x \cap y) \cup [x \cap (x \vee y)] \cup [y \cap (x \vee y)] = (x \cap y) \cup [(x \cup y) \cap (x \vee y)] =$$
$$= (x \cap y) \cup (x \vee y) = x \vee y \,.$$

Отсюда видно, что $x \vee y = (x \cap y) \cup (y \cap t) \cup (t \cap x)$. Одинаковым способом докажется равенство $x \wedge y = (x \cap y) \cup (y \cap t') \cup (t' \cap x)$. Значит, пара S_1, S_2 имеет свойство E, ч. т. д.

4.3. *Из* 3.4, 3.5 *и* 4.2 *следует, что для пары дистрибутивных структур с наибольшим и наименьшим элементом свойство B равносильно свойству* **E**.

4.4. *Пусть A — выпуклая подструктура структуры S. Тогда каждая выпуклая подструктура структуры A является также выпуклой подструктурой структуры S. Наоборот, если X — выпуклая подструктура S и $|X| \subset |A|$, то X является выпуклой подструктурой структуры A.*

Утверждение очевидно.

4.5. Теорема. *Для пары дистрибутивных структур свойство* **B** *влечет за собой свойство* **A**.

Доказательство. Пусть пара дистрибутивных структур S_1, S_2 имеет свойство **B**. Пусть R — производящее разбиение структуры S_1. Тогда R есть разбиение структуры S_2, и надо показать, что оно является производящим разбиением структуры S_2.

Пусть для элементов x_1, y_1, x_2, y_2 структуры S_2 выполнено

$$\text{(i)} \quad x_1 \equiv y_1(R), \quad x_2 \equiv y_2(R).$$

Обозначим $x_1 \wedge y_1 \wedge x_2 \wedge y_2 = t'$, $x_1 \vee y_1 \vee x_2 \vee y_2 = t$. Согласно 3.2 (следствие), множество элементов интервала $X_2 = \langle t', t\rangle\,(S_2)$ образует в S_1 интервал $X_1 = \langle 0_x, \mathrm{I}_x\rangle\,(S_1)$. Интервалы X_1, X_2 являются совместными дистрибутивными структурами с наибольшим и наименьшим элементом. Ввиду предположения и 4.4, пара структур X_1, X_2 имеет свойство **B** и, в силу 4.3, также свойство E. Следовательно при $a, b \in X_2$

$$a \vee b = (a \cup b) \cap (b \cup t) \cap (t \cup a) \,, \quad a \wedge b = (a \cup b) \cap (b \cup t') \cap (t' \cup a) \,.$$

Так как R есть производящее разбиение структуры S_1, то из соотношений (i) следует

$$x_1 \cup x_2 \equiv y_1 \cup y_2(R) \,, \quad x_2 \cup t \equiv y_2 \cup t(R) \,, \quad t \cup x_1 \equiv t \cup y_1(R) \,,$$
$$x_2 \cup t' \equiv y_2 \cup t'(R) \,, \quad t' \cup x_1 \equiv t' \cup y_1(R)$$

и отсюда

$$x_1 \vee x_2 = (x_1 \cup x_2) \cap (x_2 \cup t) \cap (t \cup x_1) \equiv (y_1 \cup y_2) \cap (y_2 \cup t) \cap (t \cup y_1) =$$
$$= y_1 \vee y_2\,(R) \,,$$
$$x_1 \wedge x_2 = (x_1 \cup x_2) \cap (x_2 \cup t') \cap (t' \cup x_1) \equiv (y_1 \cup y_2) \cap (y_2 \cup t') \cap (t' \cup y_1) =$$
$$= y_1 \wedge y_2\,(R) \,.$$

Значит, разбиение R является производящим разбиением и структуры S_2, и доказательство закончено.

4.6. *Из соотношений* 3.1, 4.5 и 4.3 *следует, что для пары дистрибутивных структур с наибольшим и наименьшим элементом свойство* **E** *эквивалентно свойству* **A**.

5.

Во всем этом параграфе S_1 и S_2 означают совместные дистрибутивные структуры с наибольшим и наименьшим элементом.

5.1. *Пусть S_1 S_2 имеют общий наибольший элемент* I *и наименьший элемент* 0. *Если каждое производящее разбиение по главному идеалу и по дуальному главному идеалу одной из структур S_1, S_2 есть производящим разбиением второй структуры, то структуры S_1, S_2 тождественны.*

Доказательство. Пусть a — произвольный элемент структуры S_1. Главный идеал $a \cap S_1$ определяет производящее разбиение R^a структуры S_1. По предположению является R^a также производящим разбиением структуры S_2. Множество $|a \cap S_1|$ является элементом разложения R^a. Так как наименьший элемент 0 структуры S_2 содержится в множестве $|a \cap S_1|$, то это множество является идеалом также в структуре S_2, следовательно, выполнено[12] $||a \cap S_1| \wedge S_2| = |a \cap S_1|$. Так как $a \in a \cap S_1$, то $|a \wedge S_2| \subset ||a \cap S_1| \wedge S_2| = |a \cap S_1|$. Таким же образом докажется, что $|a \cap S_1| \subset |a \wedge S_2|$. Значит, $|a \cap S_1| = |a \wedge S_2|$.

Пусть для элементов $a, b \in S_1$, $a \subseteqq b$. Потом $a = a \cap b \in |b \cap S_1| = |b \wedge S_2|$, что влечет за собой неравенство $a \leqq b$.

Аналогичным образом покажем, что из $a \leqq b$ следует $a \subseteqq b$. Отсюда вытекает, что структуры S_1, S_2 тождественны, ч. т. д.

5.2. Теорема. *Для пары структур S_1, S_2 свойства* **A** *и* $\mathbf{A}_1$ *равносильны.*

Доказательство. 1. Пусть пара S_1, S_2 обладает свойством **A**, пусть R_a^t — главное производящее разбиение структуры S_1. Согласно 3.1 и 3.5, пара S_1, S_2 обладает свойством **C**. По теореме 4.1 дополнение t' элемента t в обеих структурах одно и то же.

Пара структур S_1^t, S_2^t, согласно 4.6, обладает свойством **A**. В частности отсюда следует, что каждое производящее разбиение по главному идеалу и по дуальному главному идеалу одной из структур S_1, S_2 является производящим разбиением второй. По теореме 5.1 структуры S_1^t, S_2^t тождественны.

По 2.5.6.1 R_a^t есть разбиение S_1^t по главному идеалу, следовательно, оно является также разбиением по главному идеалу структуры S_2^t. По 2.5.6.1 R_a^t

---

[12]) Мы пользуемся обычными символами умножения комплексов.

есть главное производящее разбиение структуры S_2, значит, пара S_1, S_2 обладает свойством $\boldsymbol{A}_1$.

2. Пусть пара S_1, S_2 обладает свойством $\boldsymbol{A}_1$. Пусть I, 0 (t, t') — наибольший и наименьший элементы структуры S_1 (S_2).

I. Прежде всего докажем, что элементы t и t' в структуре S_1 взаимно дополнительны.

а) По предположению производящее разбиение $R^{t \cup t'}$ структуры S_1 является одновременно производящим разбиением структуры S_2. Идеал $(t \cup t') \cap S_1$ есть элемент разбиения $R^{t \cup t'}$. Так как множество $|(t \cup t') \cap \cap S_1|$ содержит наименьший элемент t' структуры S_2, то оно является идеалом в S_2. Потому что в этом множестве содержится и наибольший элемент t структуры S_2, имеет место равенство $|(t \cup t') \cap S_1| = |S_2| = |S_1|$, что влечет за собой $t \cup t' = \mathrm{I}$.

б) По 2.5.6.2, двойственные структуры $\tilde{S}_1$, $\tilde{S}_2$ обладают также свойством $\boldsymbol{A}_1$. Если повторим рассуждение из а) для этого случая, получим $t \cap t' = 0$.

II. Построим структуру S_1^t. Пара структур S_1, S_1^t имеет свойство $\boldsymbol{E}$ и, согласно 4.6, также свойство $\boldsymbol{A}$. В силу первой части доказательства пара S_1, S_1^t, следовательно, и пара S_2, S_1^t обладает свойством $\boldsymbol{A}_1$. Из этого в частности следует, что пара S_2, S_1^t удовлетворяет условиям теоремы в абзаце 5.1 и что, следовательно, структуры S_2, S_1^t тождественны. А так как пара S_1, S_1^t имеет свойство $\boldsymbol{A}$, то и пара S_1, S_2 обладает им.

Этим теорема доказана.

5.3. Следствие.

5.3.1. В дистрибутивной структуре S, содержащей наибольший и наименьший элемент, главные производящие разбиения (и, следовательно, также — в силу 2.4.3 — производящие разбиения по главному идеалу и по дуальному главному идеалу) определяют все производящие разбиения структуры S.

5.3.2. Система производящих разбиений (или главных производящих разбиений) определяет дистрибутивную структуру, содержащую наибольший и наименьший элемент, с точностью до o-эквиваленции.[13]

6. Производящие разбиения и прямое произведение.

Прежде всего в этом разделе докажем импликацию $D \Rightarrow A$ (свойство $\boldsymbol{D}$ смотри в абз. 1.), а то для случая общих структур (в части 6.1). Потом докажем, что для дистрибутивных структур $A \Rightarrow D$ (в части 6.2) таким образом, что построим надлежащее прямое произведение.

6.1.1. *Пусть R_1, R_2 — производящие разбиения структур X, Y. Введем в структуре $X \times Y$ отношение $(x, y) \equiv (x_1, y_1)(R)$ следующим*

[13]) Определение o-эквиваленции смотри в абзаце 2.5.2.

образом: написанное отношение справедливо тогда и только тогда, если $x \equiv x_1(R_1)$, $y = y_1(R_2)$. *Тогда* R *есть производящее разбиение* $X \times Y$.

Доказательство очевидно.

Теперь докажем, что каждое производящее разбиение R структуры $X \times Y$ образовано указанным способом из удобно выбранных производящих разбиений R_1 соответственно R_2 структуры X соответственно Y.

6.1.2. *Пусть* R *— производящее разбиение структуры* $X \times Y$, *пусть* $(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2)(R)$.

Тогда при любых $x \in X$, $y \in Y$ $(x_1, y) \equiv (x_2, y)(R)$, $(x, y_1) \equiv (x, y_2)(R)$.

Доказательство. Из нашего предположения следует, что $(x_1, y_1) \equiv \equiv (x_1 \cap x_2, y_1 \cap y_2) \leq (x_2, y_1) \leq (x_1 \cup x_2, y_1 \cup y_2) \equiv (x_2, y_2)$, следовательно, $(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_1)$. В обеих частях построим пересечение с элементом (x_1, y): $(x_1, y \cap y_1) \equiv (x_1 \cap x_2, y \cap y_1)$. Построим в правой и левой частях соединение с элементом (x_2, y): $(x_1 \cup x_2, y) \equiv (x_2, y)$. Заменив индексы, получим $(x_1 \cup x_2, y) \equiv (x_1, y)$. Отсюда вытекает первое утверждение теоремы. Второе утверждение доказывается аналогичным образом.

Следствие. В структуре X определим отношение $x_1 \equiv x_2(R_1)$ если хоть при одном $y \in Y$ $(x_1, y) \equiv (x_2, y)(R)$, и аналогично отношение R_2 в структуре Y. Согласно предыдущей лемме, отношения R_1, R_2 определяют разбиение структуры X соответственно Y.

Замечание. Предыдущая лемма в общем не справедлива для группоидов. Например: пусть дан $\mathfrak{G}_1 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ при обычном произведении, $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_1$. Производящее разбиение $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ построим следующим образом: $(0, 0) \equiv (0, 1) \equiv (0, 2) \equiv \ldots$, и пусть каждый из элементов (x, y), $x \neq 0$ составляет особый класс. Имеет место $(0, 1) \equiv (0, 2)$, $(1, 1) \not\equiv (1, 2)$. Значит, отношение R_1 не порождало бы разбиение $\mathfrak{G}_1$.

6.1.3. *Разбиения* R_1 *соотв.* R_2 *являются производящими разбиениями структуры* X *соотв.* Y.

Доказательство очевидно.

6.1.4. *Пусть* R, R_1, R_2 *имеют тот же смысл, что в предыдущем следствии леммы* 6.1.2. *При помощи конструкции, приведенной в лемме* 6.1.1, *построим из разбиений* R_1, R_2 *разбиение* R' *структуры* $X \times Y$. *Потом* $R' = R$.

Доказательство заключается в том, что докажем справедливость соотношения $(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2)(R) \Longleftrightarrow (x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2)(R')$. Это без затруднений следует из предыдущих лемм.

6.1.5. *Пусть* R *есть производящее разбиение структуры* X. *Потом* R *есть также производящее разбиение двойственной ей структуры* $\tilde{X}$.

Доказательство очевидно.

6.1.6. *Пусть R — производящее разбиение структуры $X \times Y$. Потом R есть также производящее разбиение структуры $X \times \tilde{Y}$.*

Доказательство. Разбиение R построено при помощи определенных производящих разбиений R_1, R_2 структур X, Y. Так как разбиение R_2 является производящим разложением и структуры $\tilde{Y}$, то R есть производящее разбиение структуры $X \times \tilde{Y}$.

Этим доказано утверждение $D \Rightarrow A$.

В дальнейшей части этого раздела будем заниматься исследованием пары дистрибутивных структур S_1, S_2, определенных на том же множестве и удовлетворяющих условию **A**.

6.2.1. *Пусть $a \subseteqq b$, $a \wedge b = u$, $a \vee b = v$. Потом $u \cap v = a$, $u \cup v = b$.*

Доказательство. В силу теорем 3.1, 3.5 все операции $\cap$, $\cup$, $\wedge$, $\vee$ взаимно дистрибутивны. Следовательно,

$$u \cup v = (a \wedge b) \cup (a \vee b) = [(a \wedge b) \cup a] \vee [(a \wedge b) \cup b] = (a \wedge b) \vee b = b\ .$$

Доказательство второго утверждения проводится двойственным способом.

6.2.2 *Если $a \subseteqq b$, $a \leqq b$, то $\langle a, b\rangle (S_1) = \langle a, b\rangle(S_2)$ (это равенство справедливо не только касательно множеств, но и частичного упорядочения).*

Доказательство. Введем обозначение $\langle a, b\rangle (S_1) = A$, $\langle a, b\rangle (S_2) = B$.

а) Пусть $x \in A$. Построим пересечение производящих разбиений $R_{a \wedge b} \cap R^{a \vee b} (S_2) = R$. В этом разбиении $a = b$. Потому что R есть производящее разбиение структуры S_1, $x = a$. Значит, $x \in B$. Отсюда следует, что $|A| \subset |B|$, аналогичным способом докажем, что $|B| \subset |A|$. В итоге $|A| = |B|$.

б) Пусть $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \subseteqq x_2$. Следовательно, $a \subseteqq x_1 \subseteqq x_2$. Согласно а) $x_2 \in B$, значит, $a \leqq x_2$. Если теперь вместо элементов a, b взять элементы a, x_2 и применить а), то получим $a \leqq x_1 \leqq x_2$.

Мы доказали, что $x_1 \subseteqq x_2 \Rightarrow x_1 \leqq x_2$. Обратную импликацию докажем аналогично.

6.2.3. *Пусть $a \subseteqq b$, $b \leqq a$. Введем обозначения $\langle a, b\rangle(S_1) = A$, $\langle b, a\rangle(S_2) = B$. Потом $A = \tilde{B}$.*

Доказательство вытекает из предыдущей леммы, если в ней вместо структур S_1, S_2 взять структуры S_1, $\tilde{S}_2$.

6.2.4. *Пусть $a \subseteqq b$, $\langle a, b\rangle(S_1) = A$, $a \wedge b = u$, $a \vee b = v$, $\langle u, v\rangle(S_2) = B$. Введем обозначение $\langle a, u\rangle(S_1) = U$, $\langle a, v\rangle(S_1) = V$.*

Потом $A \simeq U \times V$, $B \simeq \tilde{U} \times V$.

Доказательство. а) По 6.2.1, $u \cup v = b$, $u \cap v = a$, следовательно, можем построит интервалы U, V. Согласно 6.2.2 и 6.2.3, $\langle a, v\rangle (S_2) = V$, $\langle u, a\rangle (S_2) = \tilde{U}$.

Теперь применим теорему, доказанную Г. Биркгофом:[14])

Если L — модулярная структура и u, v ее элементы, то соответствием $x \to u \cup x$, $y \to v \cap y$ определен двойственный изоморфизм между $\langle u \cap v, v\rangle$ и $\langle u, u \cup v\rangle$. Этот изоморфизм приводит квоциенты к транспонированным квоциентам.

Теперь обозначим $\langle u, b\rangle (S_2) = V_1$. По предыдущей теореме $V \simeq V_1(i_1)$.

б) Далее применим теорему[15]), которую перефразируем следующим образом: Если S — модулярная структура, $u, v \in S$, то структура A_0 образованная структурами $U = \langle u \cap v, u\rangle$, $V = \langle u \cap v, v\rangle$, изоморфна прямому произведению $U \times V$. При этом паре $(x, y) \in U \times V$ ставим в соответствие элемент $x \cup y \in A_0$.

Обозначим $\langle a, b\rangle (S_1) = A$. Очевидно, $|A_0| \subset |A|$. Пусть z — любой элемент A. Тогда $z \cap u \in U$, $z \cap v \in V$, $(z \cap u) \cup (z \cap v) = z \cap (u \cup v) = z$, следовательно, $z \in A_0$, $A_0 = A$. Значит, $A \simeq U \times V(i_2)$.

Имеет место аналогичное соотношение в S_2 $B \simeq \tilde{U} \times V_1(i_3)$, следовательно, согласно а) $B \simeq \tilde{U} \times V\,(i_4)$.

Замечание 1. Для изоморфизмов (i_2), (i_4) справедливо утверждение: если $z \to (x, y)\,(i_2)$, то $z \to (x, y)\,(i_4)$.

Доказательство: пусть $z \to (x, y)\,(i_2)$. Значит $z = x \cup y$. Найдем сначала образ элемента z в изоморфизме (i_3): если в этом изоморфизме $z \to (x_1, y_1)$, $x_1 \in \tilde{U}$, $x_1 \in V_1$, то $x_1 = z \wedge a = (x \cup y) \wedge a = (x \wedge a) \cup (y \wedge a) = x \cup a$ (ибо $x \in \tilde{U}$, $y \in V$), следовательно, $x_1 = x$. Далее, $y_1 = z \wedge b = (x \cup y) \wedge b = (x \wedge b) \cup (y \wedge b) = u \cup (y \wedge b)$. Потому что $y \wedge b \in V_1$, есть $u \subseteqq y \wedge b$, следовательно, $y_1 = y \wedge b$. Из последнего уравнения следует: если построить изоморфизм (i_1) (относительно S_2) то элемент $y_1 \in V_1$ окажется поставленным в соответствие элементу $y \in V$. Итак $z \to (x, y)\,(i_4)$ ч. т. д.

Замечание 2. Если обозначим $A' = U \times V$, $B' = \tilde{U} \times V$, а структурные операции структур A' соотв. B' $\cap$, $\cup$ соотв. $\wedge$, $\vee$, то очевидно, что $(x, y) \cup (x_1, y_1) = (x \cup x_1, y \cup y_1)$ и аналогично для операций $\cap$, $\vee$, $\wedge$. Очевидно, $|A'| = |B'|$. Итак, на множестве $|A'|$ определены четыре операции $\cap$, $\cup$, $\wedge$, $\vee$. В силу предыдущих рассуждений отображение (i_4) есть изоморфизм относительно всех этих операций.

6.2.5. *Пусть $c \in |S_1|$. Множество всех элементов $x \in S_1$, для которых $c \cap x = c \vee x$, $c \cup x = c \wedge x$, обозначим через X_c. Множество X_c есть подструктура и структуры S_1, и структуры S_2.*

---

[14]) [1], стр. 73, теор. 6.
[15]) [1], стр. 73, теор. 7.

Доказательство. Множество X_c не пусто, потому, что $c \in X_c$. Пусть $x_1, x_2 \in X_c$. Потом $c \cap (x_1 \cap x_2) = (c \cap x_1) \cap (c \cap x_2) = (c \vee x_1) \cap (c \vee x_2) = c \vee (x_1 \cap x_2)$.

Аналогично докажем уравнение $c \cup (x_1 \cap x_2) = c \wedge (x_1 \cap x_2)$, следовательно, $x_1 \cap x_2 \in X_c$. Доказательство утверждения $x_1 \cup x_2 \in X_c$ двойственно проведенному. Значит, X_c есть подструктура структуры S_1. Потому что предположения теоремы симметричны относительно структур S_1, S_2, X_c является также подструктурой структуры S_2.

6.2.6. *Если* $x_1, x_2 \in X_c$, *то* $x_1 \cap x_2 = x_1 \vee x_2$, $x_1 \cup x_2 = x_1 \wedge x_2$.

Доказательство. Введем обозначение $x_1 \cap x_2 \cap c = a$, $x_1 \cup x_2 \cup c = b$. Элементы x_1, x_2, c принадлежат структуре $\langle a, b\rangle (S_1) = A$. Имеет место $a \subseteqq b$, и одновременно $a = (x_1 \cap x_2) \cap c = (x_1 \cap x_2) \vee c \geqq c \geqq (x_1 \cup x_2) \wedge c = (x_1 \cup x_2) \cup c = b$, следствительно, $a \geqq b$. По 6.2.2 $\langle a, b\rangle (S_1) = \langle b, a\rangle (S_2)$, значит, операции $\cap$, $\vee$ соотв. $\cup$, $\wedge$ на приведенных множествах тождественны, ч. т. д.

6.2.7. *Множество X_c образует выпуклую подструктуру как в структуре S_1, так и в структуре S_2.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in X_c$, $x_1 \subseteqq x \subseteqq x_2$. Сохраняя обозначение предыдущей леммы, видим, что $x \in \langle a, b\rangle (S_1)$, откуда вытекает наше утверждение.

6.2.8. *Пусть Y_c — множество всех элементов $x \in |S_1|$, которые удовлетворяют соотношениям $x \cap a = x \wedge a$, $x \cup a = x \vee a$. Y_c образует выпуклую подструктуру как в структуре S_1, так и в структуре S_2.*

Доказательство вытекает из предыдущей леммы, если в ней вместо структур S_1, S_2 взять структуры S_1, $\tilde{S}_2$.

Замечание. Множество X_c будем в дальнейшем рассматривать в том же частичном упорядочении, как и S_1. Множество $|X_c|$ с частичным упорядочением как S_2, будем обозначать через $\tilde{X}_c$. Частичное упорядочение множества Y_c одно и то же в S_1 и в S_2; под знаком Y_c будем подразумевать множество с таким именно частичным упорядочением.

6.2.9. *Пусть c', $c \in S_1$. Если $c' \in X_c$, то $X_{c'} = X_c$.*

Доказательство. Пусть $x \in X_c$. По 6.2.6 $x \in X_{c'}$, т. е. $|X_c| \subset |X_{c'}|$. Из условия теоремы далее следует $c' \cap c = c' \vee c$, $c' \cup c = c' \wedge c$, т. е. $c \in X_{c'}$, следовательно, в силу уже доказанного, $|X_{c'}| \subset |X_c|$.

6.2.10. *Множества X_c, $X_{c'}$ либо дизъюнктны, либо тождественны.*

Доказательство. Пусть $x \in X_c$, $x \in X_{c'}$. По предыдущей лемме $X_c = X_x = X_{c'}$.

6.2.11. *Множества Y_c, $Y_{c'}$ либо дизъюнктны, либо тождественны.*

Доказательство двойственно доказательству предыдущей леммы.

6.2.12. *Множества X_c, $Y_{c'}$ имеют один и только один общий элемент.*

Доказательство. а) Пусть элементы x, y содержатся одновременно как в множестве X_c, так и в $Y_{c'}$. В силу утверждения леммы 6.2.6 (и двойственного ему утверждения для структуры Y_c) должно было бы одновременно быть $x \cap y = x \vee y$, $x \cap y = x \wedge y$, значит, $x = y$.

б) Обозначим $c \cap c' = a$, $c \cup c' = b$. Построим разложение структуры $A = \langle a, b \rangle$ (S_1) в прямое произведение по 6.2.4. Множество A в том же частичном упорядочении, что и S_2, обозначим через B. Сохраняя обозначения из 6.2.4, видим, что $A \simeq U \times V$, $B \simeq \tilde{U} \times V$. Пусть при этих изоморфизмах (смотри замечание 1 за 6.2.4) $c \to (u, v)$, $c' \to (u_1, v_1)$, пусть $z \in |A|$ есть тот элемент, которому соответствует пара (u_1, v). Мы утверждаем: $z \in X_c$, $z \in Y_{c'}$. Верно то-есть $z \cup c \to (u_1, v) \ \cup (u, v) = (u \cup u_1, v) = (u \wedge u_1, v \wedge v) = (u_1, v) \wedge (u, v) \to z \wedge c$. Аналогично докажем, что $z \cap c = z \vee c$, следовательно, $z \in X_c$. Далее: $z \cup c' \to (u_1, v) \cup (u_1, v_1) = (u_1, v \cup v_1) = (u_1 \vee u_1, v_1 \vee v) = (u_1, v) \vee (u_1, v_1) \to z \vee c'$ и аналогично $z \wedge c' = z \cap c'$, следовательно, $z \in Y_{c'}$.

Замечание. Из предыдущего доказательства вытекает следующие утверждение: Пусть A — выпуклая подструктура, структуры S_1, пусть a, $b \in A$. Разложим A в прямое произведение по 6.2.4; пусть $a \to (u_1, v_1)$, $b \to (u_2, v_2)$. Если $b \in X_a$, должно быть $v_1 = v_2$. Подобным образом докажем: как только $b \in Y_a$, должно быть $u_1 = u_2$.

6.2.13. *Фиксируем какой-нибудь элемент $c \in |S_1|$ и построим прямое произведение $D = X_c \times Y_c$. Теперь утверждаем: существует взаимно однозначное отображение множества D на множество S_1.*

Доказательство: Элементу $(x, y) \in D$ поставим в соответствие тот элемент $z \in S_1$, который находится одновременно в обоих множествах Y_x и X_y. Элементы x, y назовем координатами элемента z.

Каждый элемент $z \in S_1$ имеет в D свой прообраз. x-тая координата элемента z есть тот элемент, который находится одновременно как в Y_z, так и в X_c; y-тая координата элемента z есть тот элемент, который содержится одновременно в X_z и в Y_c.

Предположим, что элементы (x, y), (x_1, y_1) отображаются на тот же элемент z. Следовательно, $z \in Y_x$, $z \in Y_{x_1}$, откуда следует $Y_x = Y_{x_1}$. Но одновременно $\{x\} = |Y_x| \cap |X_c| = |Y_{x_1}| \cap |X_c| = \{x_1\}$, значит, $x = x_1$. Аналогичным образом доказывается равенство $y = y_1$.

Этим доказано, что данное отображение взаимно однозначно.

6.2.14. *Отображение, определенное в предыдущей лемме, есть изоморфное отображение структуры D на структуру S_1.*

Доказательство. Пусть $(x_1, y_1) \to z_1$, $(x_2, y_2) \to z_2$. Чтобы доказать, что рассматриваемое нами отображение есть на самом деле изоморфизм, мы должны показать, что $(x_1 \cup x_2, y_1 \cup y_2) \to z_1 \cup z_2$ и аналогичное соотношение для пересечения. Значит, прежде всего мы должны доказать, что $z_1 \cup z_2 \in$ $\in |X_{y_1 \cup y_2}| \cap |Y_{x_1 \cup x_2}|$, то есть, что выполняются уравнения

$$(z_1 \cup z_2) \cup (x_1 \cup x_2) = (z_1 \cup z_2) \vee (x_1 \cup x_2)\,, \tag{1}$$

$$(z_1 \cup z_2) \cup (y_1 \cup y_2) = (z_1 \cup z_2) \wedge (y_1 \cup y_2) \tag{2}$$

и аналогичные уравнения для пересечения выражений в скобках.

Обозначим пересечение элементов $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, c$ в S_1 через a, и их соединение через b. Далее обозначим $\langle a, b\rangle (S_1) = A$. Множество $|A|$ является выпуклой подструктурой обеих структур S_1, S_2, следовательно, на множестве $|A|$ определены все четыре операции $\cap, \cup, \vee, \wedge$.

Разложим A в прямое произведение по 6.2.4, $A \simeq U \times V$. Пусть при этом изоморфизме $c \to (u_0, v_0)$; потому что $x_1 \in X_c$, то согласно замечанию за 6.2.12., $x_1 \to (u_1, v_0)$, и аналогично $x_2 \to (u_2, v_0)$. Далее: так как элементы y_1, y_2 содержатся в Y_c, то $y_1 \to (u_0, v_1), y_2 \to (u_0, v_2)$. Из соотношений $x_1 \in Y_{z_1}$, $y_1 \in X_{z_1}$ вытекает $z_1 \to (u_1, v_1)$ и аналогично $z_2 \to (u_2, v_2)$, так что $z_1 \cup z_2 \to$ $\to (u_1 \cup u_2, v_1 \cup v_2)$. Получаем

$$\begin{aligned}(z_1 \cup z_2) \cup (x_1 \cup x_2) &\to (u_1 \cup u_2, v_1 \cup v_2) \cup (u_1 \cup u_2, v_0) = (u_1 \cup u_2, v_1 \cup v_2 \cup v_0) = \\ &= (u_1 \cup u_2, v_1 \vee v_2 \vee v_0) = (u_1 \cup u_2, v_1 \vee v_2) \vee (u_1 \cup u_2, v_0) = \\ &= (u_1 \cup u_2, v_1 \cup v_2) \vee (u_1 \cup u_2, v_0) \to (z_1 \cup z_2) \vee (x_1 \cup x_2)\,.\end{aligned}$$

Этим доказано уравнение (1). Остальные нужные нам уравнения доказываются аналогичным образом (производя вычисления с компонентами u, v). Этим доказана справедливость следующей теоремы:

6.2.15. *Пусть S_1, S_2 — дистрибутивные структуры, определенные на том же множестве M. Для того, чтобы каждое разбиение множества M, которое является производящим разбиением относительно одной из структур S_1, S_2, было одновременно производящим разбиением и относительно второй структуры, необходимо и достаточно: существуют структуры A, B такие, что $S_1 \simeq A \times B$, $S_2 \simeq \tilde{A} \times B$.*

Этим доказана импликация $A \Leftrightarrow D$ для дистрибутивных структур.[16])

Замечание 1. Из доказательства 6.2.14 следует, что структуру A можно построить также следующим образом: возьмем произвольный элемент $c \in M$ и будем рассматривать систему всех элементов $x \in M$, для которых $a \cap x = a \vee x$, $a \cup x = a \wedge x$ с таким же упорядочением, как в S_1. Подобным образом построим структуру B (двойственно относительно $\wedge$, $\vee$).

Замечание 2. Возникает вопрос: Пусть пара структур S_1, S_2, $|S_1| =$ $= |S_2|$ удовлетворяет условию A. Какие предположения мы должны сделать

[16]) Доказательство импликации $A \Rightarrow D$ можно было бы также проводить, опираясь на результаты *Б. Арнолда* ([7], теорема 17), из которых можно получить импликацию $C \Rightarrow D$ (легко проверить, что предположения упомянутой теоремы Арнолда в нашем случае выполнены). Импликация $A \Rightarrow C$ вытекает из 3.1 и 3.5. Мы оставили выше приведенное доказательство потому что оно кажется нам более конструктивным и позволяет более наглядно обозреть положение. Смотри также сноску[5]).

относительно структуры S_1, чтобы из условия A вытекало $S_1 \simeq S_2$? Из предыдущих рассуждений получаем ответ на этот вопрос для случая, когда S_1 можно разложить в прямое произведение конечного числа неразложимых множителей. Сделав такое предположение, получаем необходимое и достаточное условие для того, чтобы $S_1 \simeq S_2$: Каждый из прямых множителей структуры S_1 двойственен себе. Доказательство этого утверждения просто. Далее, при том же предположении справедливо утверждение: для того, чтобы из условия ***A*** вытекало одно из соотношений $S_1 \simeq S_2$, $S_1 \simeq \tilde{S}_2$, необходимо и достаточно:структура S_1 (и, значит, также S_2) содержит не более одного неразложимого множителя, который не является двойственным себе.

7. О паре структур, графики которых изоморфны.

В этом разделе будем заниматься следующей проблемой, которую предложил Г. Биркгоф: каким условиям должна удовлетворять (конечная) структура S, чтобы каждая структура S', график которой (рассматриваемый без ориентации) изоморфен графику структуры S, была сама изоморфна структуре S. В нашей работе дано решение этой проблемы для случая дистрибутивных структур.

Сначала дадим точное определение, когда будем графики двух структур считать изоморфными.

7.1. Определение. *Пусть S — структура. Элементы x, $y \in S$ назовем соседними, если либо x покрыт y, либо элемент y покрыт x. Если x, y соседние элементы, то будем писать $x \,\mathrm{s}\, y$. Если $x \,\mathrm{s}\, y$, то пару элементов (x, y) будем называть элементарной парой (сокращенно э. пара).*

Очевидно, $x \,\mathrm{s}\, y \Longleftrightarrow y \,\mathrm{s}\, x$. Каждой э. паре соответствует лишь один простой квоциент.

Если э. пары (x, y), (y, x) будем считать эквивалентными, то каждому простому квоциенту соответствует (с точностью до эквиваленции) лишь одна единственная э. пара.

7.2. Определение. *Пусть S, S' — конечные структуры. Скажем, что их графики изоморфны, если существует взаимно однозначное отображение структуры S на структуру S' такое, что $x \,\mathrm{s}\, y \Leftrightarrow x' \,\mathrm{s}\, y'$, при чем $x, y \in S$, $x', y' \in S'$, и элемент x' соотв. y' есть образ элемента x соотв. y. Обстоятельство, что графики структур S, S' изоморфны, запишем в виде $S \overset{g}{\sim} S'$.*

Отношение $\overset{g}{\sim}$, очевидно, обладает свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Замечание. Пусть $S \overset{g}{\sim} S'$. Не умаляя общности, можно предполагать, что структуры S, S' определены на том же множестве. Структурные операции, символ упорядочения и символ „соседства" элементов в S обозначим $\cap$, $\cup$, $\subset$, s, в S' знаками $\wedge$, $\vee$, $\langle$, s'.

7.3. **а)** *Пусть* $X \overset{g}{\sim} X'$, $Y \overset{g}{\sim} Y'$. *Потом также* $X \times Y \overset{g}{\sim} X' \times Y'$.

б) *для каждой структуры* X *имеет место* $X \overset{g}{\sim} \tilde{X}$.

Доказательство обоих утверждений очевидно.

7.4. *Необходимое условие для того, чтобы для структуры* S *было верным*

(а) $S \overset{g}{\sim} S' \Rightarrow S \simeq S'$

следующее: каждый неразложимый прямой множитель структуры S *двойственен себе.*

Доказательство. Допустим, что данная структура S удовлетворяет условию (а). Разложим структуру S на неразложимые множители $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$. Построим структуру $S' = \tilde{S}_1 \times \prod_{i=2}^{n} S_i$. Согласно 7.3, $S \overset{g}{\sim} S'$, следовательно, в силу (а) $S \simeq S'$. Применив теорему об однозначности разложения структуры в прямое произведение неразложимых множителей, получим $S_1 \simeq \tilde{S}_1$. Этим доказано, что множитель S_1 двойственен себе. Доказательство для остальных множителей одинаково.

Замечание 1. Из уравнения $\widetilde{A \times B} = \tilde{A} \times \tilde{B}$ следует, что в предыдущей теореме можно выпустить слово „неразложимый".

Замечание 2. Обратная теорема к предыдущей теореме в случае общих структур не справедлива. В дальнейших рассуждениях этого раздела будем предполагать, что все рассматриваемые структуры дистрибутивны.

7.5. Определение. *Две э. пары* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *будем называть транспонированными (соотв. проективными), если соответствующие простые квоциенты транспонированы (соотв. проективны). Скажем, что э. пары* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *просто транспонированы, если 1. они транспонированы, и 2. множество* $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ *есть выпуклая подструктура структуры* S.

Замечание. Если э. пары (x_1, y_1), (x_2, y_2) являются просто транспонированными, то, очевидно, либо 1. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (равенство следует понимать в смысле указанной эквиваленции), либо 2. все элементы x_1, y_1, x_2, y_2 отличны один от другого и одновременно (после возможной замены какой-нибудь из э. пар эквивалентной ей э. парой)

$$x_1 \,\mathrm{s}\, y_1 \,\mathrm{s}\, x_2 \,\mathrm{s}\, y_2 \,\mathrm{s}\, x_1 \,. \tag{*}$$

Нетрудно доказать (разбором всех возможных случаев), что верно и обратное утверждение: из соотношения (*) следует, что э. пары (x_1, y_1), (x_2, y_2) являются просто транспонированными.

В абзацах 7.6 и 7.7 мы предполагаен, что $S \overset{g}{\sim} S'$.

7.6. *Если э. пары* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *просто транспонированы в структуре* S, *то они просто транспонированы в структуре* S'.

Доказательство. Если рассматриваемые пары тождественны, то теорема, очевидно, справедлива. Если этот случай не наступает, то по предыдущему замечанию имеет место соотношение (*) и, следовательно, также $x_1 \, \mathrm{s}' \, y_1 \, \mathrm{s}' \, x_2 \, \mathrm{s}' \, y_2 \, \mathrm{s}' \, x_1$, так что пары (x_1, y_1), (x_2, y_2) являются просто транспонированными в S'.

Следствие. Если пары (y_1, y_1), (x_2, y_2) проективны в S, то они проективны и в S'.

Замечание. В утверждении 7.6 можно, очевидно, структуры S, S' заменить одну другой.

7.7. *Каждое разбиение множества* $|S|$, *которое является производящим разбиением относительно* S, *служит в то же время производящим разбиением относительно* S' *и наоборот.*

Доказательство вытекает из следствия леммы 7.6 и из теоремы 10, глава V, [1].

7.8. *Пусть* $S \overset{g}{\sim} S'$, *пусть структуры* S, S' *дистрибутивны. Существуют такие структуры* A, B, *что* $S \simeq A \times B$, $S' \simeq \tilde{A} \times B$. (**)

Доказательство вытекает из 7.7 и из 6.2.15.

Объединив 7.4 и 7.8, получим:

7.9. *Для того, чтобы* $S \overset{g}{\sim} S'$, *где* S *и* S' — *конечные дистрибутивные структуры, необходимо и достаточно, чтобы существовали структуры* A, B *удовлетворяющие соотношению* (**).

7.10. *Пусть* S — *дистрибутивная структура. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы всякая дистрибутивная структура* S', *для которой* $S \overset{g}{\sim} S'$, *была изоморфна структуре* S, *следующее: каждый прямой множитель структуры* S *двойственен себе.*

Доказательство вытекает из 7.4 и из 7.9.

Нетрудно доказать, что требование, чтобы каждый прямой множитель структуры S был двойственен себе, можно заменить равносильным условием, чтобы при каждом элементе $t \in S$, который имеет в S дополнение, была подструктура $\langle 0, t \rangle \, (S)$ двойственна себе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Birkhoff*: Lattice theory, II. Ed., 1948.
[2] *A. A. Grau*: Ternary Boolean Algebra. Bull. Am. Math. Soc. *53* (1947), 567—72.
[3] *S. A. Kiss*: Transformations on lattices and structures of logic, 1947.
[4] *G. Birkhoff* and *S. A. Kiss*: A ternary operation in distributive lattices. Bull. Am. Math. Soc. *53* (1947), 749—52.

[5] *Г. Левиг:* О транзитивных отношениях Буля. Чехосл. мат. журнал *1* (*76*), (1952), 225—228.
[6] *О. Борувка:* Введение в теорию групп. Прага 1952.
[7] *B. H. Arnold*: Distributive lattices with a third operation defined. Pacific J. Math. *1* (1951), 33—41.

Summary.

ON SOME PROPERTIES OF A PAIR OF LATTICES.

J. JAKUBÍK and M. KOLIBIAR, Košice-Bratislava.

(Received April 15, 1952.)

A determining partition on the lattice S is a partition defined by a congruence relation on S. If S is a distributive lattice, a congruence relation Θ may be introduced with respect to every couple of elements $a, t \in S$ by putting $x\Theta y$ if and only if $(a, t, x) = (a, t, y)$, where $(a, b, c) = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a)$. If the lattice S has a greatest and a least element and the above-mentioned element t has a complement, the determining partition defined by that congruence relation is called the principal determining partition.

In this paper lattices S_1, S_2 defined on the same set M are considered. Lattice-operations and ordering in S_1 and S_2 respectively are denoted by $\cap$, $\cup$, $\subseteqq$ and $\wedge$, $\vee$, $\leqq$ respectively. The relations of the following properties of such pairs of lattices have been studied:

A. Every partition of the set M which is determining on the lattice S_1, is also determining on S_2 and vice versa.

B. If the set $X \subset M$ forms a convex sublattice in S_1, then X forms a convex sublattice in S_2, and vice versa.

C. Every lattice-operation of the lattice S_1 is mutually distributive with every lattice-operation of the lattice S_2.

D. There exist lattices A, B for which the relations $S_1 \simeq A \times B$, $S_2 \simeq \tilde{A} \times B$ hold ($\tilde{A}$ means the dual of A, $A \times B$ is the direct product of the lattices A, B, $\simeq$ signifies isomorphism).

If the lattices S_1, S_2 are both distributive and contain the greatest and the least element, we introduce the properties **E**, **A**$_1$:

E. There exist two elements $t, t' \in S_1$, t' being the complement of t in S_1, such that

$$x \vee y = (x, t, y), x \wedge y = (x, t', y) \text{ for arbitrary } x, y \in M.$$

A$_1$. Every principal determining partition on S_1 is a principal determining partition on S_2 and vice versa.

If the set M is finite, we introduce the property:

F. The graphs (unoriented) of the lattices S_1, S_2 are isomorphic.

It is proved that ***C*** implies ***B***, ***D*** implies ***A***. The properties ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** are equivalent for distributive lattices. For distributive lattices with the greatest and the least element all these properties, with the exception of ***F***, are equivalent. For finite S_1, S_2 ***D*** implies ***F*** and for finite distributive lattices all properties given are equivalent. The consequence of the equivalence of the properties ***A***, ***A***$_1$ is that for a distributive lattice with the greatest and the least element, all the determining partitions are defined by the principal determining partitions.

The implication $D \Rightarrow C$ for distributive lattices and $D \Rightarrow F$ for the case that the factors of the direct product are self-dual have been proved by S. A. Kiss in [3]. The implication $C \Rightarrow D$ for distributive lattices may be deduced from results given by B. H. Arnold ([7], Theorem 17).