Vlastimil Pták

Компактные множества в выпуклых топологических линейных пространствах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 1, 51–74

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100099

Чехословацкий математический журнал, т. 4 (79) 1954

КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА В ВЫПУКЛЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ВЛАСТИМИЛ ПТАК (Vlastimil Pták), Прага.

(Поступило в редакцию 23/IV 1953 г.)

Известно, что в полном униформном пространстве замыкание каждого прекомпактного множества компактно. Легко удостовериться также в том, что в случае метрического пространства требование полноты эквивалентно требованию, чтобы замыкание каждой его прекомпактной части было компактно. Это свойство было принято как определение полноты *Й. ф. Нейманом*. В этой статье покажем, что указанное свойство перестает быть эквивалентным полноте, если мы ходим за рамки униформных пространств,со счетным характером. Основным является исследование прекомпактных множеств в выпуклых топологических линейных пространствах. Мы показываем, что система множеств полярных к прекомпактным частям данного пространства порождает именно минимальную топологию двойственного пространства такую, что она тождественна слабой топологии во всех множествах вида U^*. Далее, мы строим неполное выпуклое топологическое линейное пространство X такое, что для каждого прекомпактного $A \subset X$ также и пополнение A^{**} компактно. С этим тесно связано понятие B-полноты, которому посвящен третий параграф. На основании предыдущих результатов построим затем пример полного выпуклого топологического линейного пространства, которое не является B-полным.

Настоящая работа является продолжением исследований автора, опубликованных в сообщении о полных топологических линейных пространствах [7]*). В упомянутой работе было показано, что элементы пополнения данного выпуклого топологического пространства X по существу тождественны почти непрерывным функционалам на пространстве Y, двойственном X, то есть линейным функциям на Y, которые не должны быть непрерывны, но являются непрерывными на каких-то слабо компакт-

*) Замечание (1/III 1954 г.). Автору стало дополнительно известным, что некоторые теоремы § 3 работы [7] можно легко вывести из результатов которые получил A. Grothendieck, Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe, Comptes Rendus *230* (1950), 605—606. Метод доказателств в указанной работе значительно лишается от нашего.

ных частях пространства Y. В этой работе мы ставим вопрос, насколько надо ослабить топологию на Y, чтобы при новой, более слабой топологии непрерывными функционалами были именно почти непрерывные функционалы. С этой целью мы введем простое понятие. Симметричное выпуклое тело $V \subset Y$ назовем почти окрестностью нуля, если оно почти замкнуто и вместе с тем на всяком U^* отсекает слабую окрестность нуля. Прежде всего легко докажем, что множество, полярное к прекомпактному подмножеству пространства X, является почти окрестностью нуля. Так как почти окрестности нуля, почти замкнутые в Y, не должны быть замкнутыми, мы должны исследовать полярные множества к почти окрестностям нуля не в X, а в пополнении R пространства X. Потом докажем, что для каждой почти окрестности нуля соответсгвующее полярное множество в R является компактным.

Частный случай этой теоремы был (разумеется, в другом виде) для пространств со счетным характером доказан *Дьедонне* и *Л. Шварцом* [3] методом, который по существу опирается на одну идею *Банаха*. Но этот метод существенным образом использует то обстоятельство, что данное пространство имеет счетную полную систему окрестностей нуля. В общем случае, рассматриваемому в этой работе, надо было выбирать другой путь, где можно применить теорему *Тихонова* о произведении компактных пространств. Если затем сформулировать достигнутые результаты другим образом, то получим характеризацию минимальной топологии, которая на каждом U^* порождает слабую топологию.

Из только что проведенных рассуждений следует, как второстепенный результат, известная теорема, что в полном топологическом линейном пространстве симметричная выпуклая замкнутая оболочка прекомпактного множества компактна.

В частности, отсюда следует и известная теорема, что в полном пространстве замыкание прекомпактного множества компактно. Итак, мы могли бы задаться вопросом, не характеризует ли это обстоятельство полные униформные пространства. В самом деле, для метрических пространств это выполнено, как почти непосредственно видно. Метрическое пространство полно тогда и только тогда, если замыкание всякого его прекомпактного подмножества компактно.

Но мы покажем, что в общем униформном пространстве эта эквиваленция уже не сохраняется. А именно, мы покажем, что существует неполное выпуклое топологическое линейное пространство, удовлетворяющее более сильному условию: для каждого прекомпактного множества A также и его оболочка A^{**} компактна.

Для построения пространства, имеющего указанные свойства, воспользуемся пространством всех непрерывных функций на пространстве всех счетных порядковых чисел. Для доказательства мы используем одно интересное свойство счетных порядковых чисел, открытое *Н. Ароншайном*.

Третий параграф этого замечания посвящен более подробному исследованию свойства B. Даем новую интересную характеризацию этого свойства. Затем мы вводим одну специальную топологию выпуклых топологических линейных пространств и объясняем некоторые ее свойства. Как второстепенный результат исследований этого параграфа мы получим интересный случай полного пространства, которое не является B-пространством, и тем самым мы пополним результаты предыдущей работы.

В заключение мы заметим, что в этой статье остаются в силе все обозначения, договоры и определения, введенные в сообщении о полных пространствах [7]. Чтобы избежать лишних повторений, рекомендуем читателю упомянутую работу.

§ 1. ПОЧТИ ОКРЕСТНОСТИ НУЛЯ.

Прежде всего припомним некоторые известные определения и теоремы, касающиеся пространств непрерывных функций. Через T будем обозначать данное вполне регулярное топологическое пространство.

(1,1) Определение *Пусть $A \subset T$, и пусть $M \subset C(T)$. Скажем, что M равностепенно непрерывна на A, если к каждой точке $a \in A$ и каждому $\varepsilon > 0$ найдется окрестность U точки a такая, что*

$$t \in U \cap A,\ x \in M \Rightarrow |x(t) - x(a)| < \varepsilon .$$

Скажем, что M равномерно ограничена на A, если существует $\lambda > 0$ так, что

$$t \in A, \quad x \in M \Rightarrow |x(t)| \leqq \lambda .$$

(1,2) Определение *Пусть X — выпуклое линейное топологическое пространство. Множество $M \subset X$ назовем прекомпактным, если к каждой окрестности нуля U в пространстве X существуют точки $x_1, \ldots, x_n \in X$ такие, что соединение всех $x_i + U$ покрывает M.*

В дальнейшем нам понадобится обобщение известной теоремы Арцела о пространстве непрерывных функций на интервале. Для полноты приведем эту теорему и с доказательством.

(1,3) *Пусть T — вполне регулярное топологическое пространство, $M \subset C(T)$. Множество M является прекомпактным тогда и только тогда, если одновременно*

1. *для каждого компактного $K \subset T$ множество M равномерно ограничено на K,*

2. *для каждого компактного $K \subset T$ множество M является равностепенно непрерывным на K.*

Доказательство: Пусть прежде всего M прекомпактно. Пусть фиксировано компактное $K \subset T$. Обозначим $U = U(K, 1)$. В силу предположения, существуют $x_1, \ldots, x_n \in C(T)$ так, что каждая $m \in M$ поддается аппроксимации некоторой из функций x_i с ошибкой степени U. Значит, если мы обозначим через λ наибольшее из чисел $1 + \max\limits_{t \in K} |x_i(t)|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то видим что M на K равномерно ограничена числом λ. Чтобы доказать что M равностепенно непрерывна на K, выберем произвольно $t_0 \in K$ и $\varepsilon > 0$. Теперь существуют $x_1, \ldots, x_n \in C(T)$ так, что к каждому $m \in M$ существует хотя бы одно x_i такое, что

$$\max_{t \in K} |m(t) - x_i(t)| \leqq \tfrac{1}{3}\varepsilon . \tag{1}$$

Так как все x_i являются непрерывными в точке t_0, и всех x_i только конечное число, то существует окрестность V точки t_0 так, что при всех i

$$t \in V \Rightarrow |x_i(t) - x_i(t_0)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon . \tag{2}$$

Теперь утверждаю, что

$$m \in M\,, \quad t \in V \cap K \Rightarrow |m(t) - m(t_0)| < \varepsilon .$$

Действительно, пусть дано $m \in M$. Выберем прежде всего i так, чтобы было выполнено (1). Если потом дано $t \in V \cap K$, то получаем требуемое неравенство при помощи (1) и (2) из оценки

$$|m(t) - m(t_0)| \leqq |m(t) - x_i(t)| + |x_i(t) - x_i(t_0)| + |x_i(t_0) - m(t_0)| .$$

Пусть, наоборот, множество M удовлетворяет указанным условиям. Мы должны доказать, что оно прекомпактно. Итак, пусть имеем $U = U(K, \varepsilon)$. Так как M равностепенно непрерывна на K, то существуют множества $G_1, \ldots, G_r$, относительно открытые в K, которые составляют покрытие множества K и для которых имеет место

$$m \in M\,, \quad t, t' \in G_i \Rightarrow |m(t) - m(t')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon . \tag{3}$$

Фиксируем еще в каждом G_i какую-нибудь точки t_i. Если теперь m пробегает множество M и точка t множество K, то все значения $m(t)$ остаются в каком-то определенном ограниченном интервале I числовой оси. Пусть $H_1, \ldots, H_s$ — интервалы длины меньшей $\frac{1}{3}\varepsilon$, которые покрывают I. Пусть P обозначает множество всех r-членных последовательностей $p = (p_1 \ldots p_r)$, членами которых являются натуральные числа $1 \leqq p_i \leqq s$. Значит, множество P конечно. Для каждого $p \in P$, для которого существует $m \in M$ так, что $m(t_i) \in H_{p_i}$, возьмем одно такое m и обозначим его через m_p. Таким образом некоторым (по крайней мере, одному) $p \in P$ соответствуют $m_p \in M$. Пусть теперь $m \in M$. Тогда существует $p \in P$ так, что $m(t_i) \in H_{p_i}$. Следовательно, символ m_p имеет смысл. Пусть, далее, $t \in G_i$.

Справедливо неравенство

$$|m(t) - m_p(t)| \leqq |m(t) - m(t_i)| + |m(t_i) - m_p(t_i) + |m_p(t_i) - m_p(t)| .$$

В этой оценке первое и последнее слагаемое $< \frac{1}{3}\varepsilon$ в силу (3). Среднее слагаемое также $< \frac{1}{3}\varepsilon$, так как $m(t_i) \in H_{p_i}$, $m_p(t_i) \in H_{p_i}$, а длина интервала H_{p_i} меньше $\frac{1}{3}\varepsilon$. Так как множества G_i покрывают K, то этим доказано, что $m - m_p \in U$. Но так как функций m_p только конечное число, то этим доказано, что M прекомпактно.

Чтобы объяснить определение, которое помещено ниже, докажем прежде всего следующую простую теорему:

(1,4) *Пусть имеем выпуклое топологическое линейное пространство* (X, u) *и его пополнение* (R, u). *Тогда слабая топология* u_R^* *на* Y *порождает на каждом* U^* *такую же топологию, как и* u_X^*.

Доказательство: Очевидно, $u_R^* \leqq u_X^*$. Пусть, наоборот, $M \subset U^*$ Возьмем теперь $u_R^* M$. Мы знаем, что U^* u_R^*-компактно*). Значит будет также $u_R^* M$ компактно в топологии u_R^*. Но так как $u_R^* \leqq u_X^*$, то $u_R^* M$ также компактно в топологии u_X^*.

Так как $M \subset u_R^* M$, а это последнее множество u_X^* — компактно, то будет $u_X^* M \subset u_R^* M$. Значит, $u_X^* M = u_R^* M$.

Итак, мы видим, что топологию u_X^* можно сделать более слабой так, что новая более слабая топология поролждает на каждом U^* такую же топологию, как и первоначальная u_X^*. Естественно возникает вопрос, в какой наибольшей мере можно ослабить топологию u_X^*, чтобы все же сохранилось только что высказанное свойство. Чтобы мы могли это установить, введем следующее определение:

(1,5) Определение: *Почти замкнутое симметричное выпуклое тело* $V \subset Y$ *назовем почти окрестностью нуля, если оно отсекает от каждого* U^* *слабую окрестность нуля.*

То-есть, точнее говоря, *если для каждого* U^* *существует слабая окрестность нуля* W *так, что*

$$W \cap U^* \subset V \cap U^* .$$

Кажется, будет здесь уместным припомнить, что понятие почти окрестности нуля в Y зависит от выбора топлогии в X. Чем более сильную топологию в X мы возьмем, тем больше мы получим в Y почти окрестностей нуля.

Прежде чем приступить к исследованию свойств почти окрестностей нуля, прибавим еще одно интересное замечание, которое нам это понятие объяснит с другой стороны.

Пусть R означает пространство всех последовательностей действительных чисел $x = \{x_k\}_k$ таких, что ряд $\Sigma |x_k|$ сходится. В пространстве R пусть топология дана нормой

$$|x| = \Sigma |x_k| ,$$

---

*) См. [7], теорема (3,7).

так что R полно. Пусть теперь X означает подпространство всех x таких, что $x_k = 0$ при почти всех k. Значит, пространство X плотно в R и, следовательно, неполно.

Пространство Y, двойственное R, состоит, как известно, из всех последовательностей действительных чисел $y = \{x_k\}_k$ таких, что $\sup |y_k| < \infty$, при чем произведение дано формулой

$$xy = \Sigma x_k y_k .$$

В пространстве Y определяем также, как обще принято, норму, данную соотношением:

$$|y| = \sup |y_k| .$$

Если потом U означает замкнутую единичную сферу пространства X (или R), то полярное множество U^* тождественно именно множеству тех y, норма которых не превосходит 1. Возьмем теперь элемент $r \in R$, данный координатами $r_k = \frac{1}{2^{k-1}}$, так что r не принадлежит X. Введем теперь в пространство Y слабую топологию, принадлежащую пространству X. Теперь r будет линейной функцией на Y, которая не будет непрерывна. Но так как r принадлежит полному пополнению пространства X, то r является почти непрерывным функционалом на Y. Обозначим теперь $Z = \underset{y}{\mathrm{E}} [|ry| \leqq 1]$. Как мы знаем, множество Z почти замкнуто, откуда следует, что множество $Z \cap U^*$ замкнуто. Одновременно, так как r непрерывен на U^*, множество $Z \cap U^*$ должно быть относительно слабой окрестностью нуля U^*. Значит, множество Z является, в силу предыдущего определения, почти окрестностью нуля. Следовательно, существует симметричное выпуклое замкнутое конечно-размерное множество $K \subset X$ так, что

$$K^* \cap U^* \subset Z \cap U^* .$$

Но мы покажем, что равенство не может иметь здесь места ни для какого K.

Действительно, допустим, что для какого-то симметричного выпуклого замкнутого конечно-размерного множества $K \subset X$ выполнено

$$K^* \cap U^* = Z \cap U^* .$$

Обозначим через Q аннигилятор множества K, так что Q будет замкнутое подмножество конечного дефекта в Y. Докажем, что $rQ = 0$. Но таким образом приходим к противоречию, так как из этого отношения следует существование конечного числа элементов $x_1, \ldots, x_m \in X$ таких, что

$$x_i y = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, m \Rightarrow xy = 0 .$$

Но из этой импликации вытекает, что r можно представить как линейную комбинацию элементов x_i, так что $r \in X$.

Итак, чтобы доказать равенство $rQ = 0$, рассмотрим прежде всего точку y_0 пространства Y, определенную координатами $y_{0k} = \frac{1}{2}$, так что $ry_0 = 1$, $|y_0| = \frac{1}{2}$.

Возьмем теперь $q \in Q$. Нам надо доказать, что $rq = 0$. Ясно, что достаточно это доказать для элементов, норма которых меньше $\frac{1}{2}$. Значит, будем предполагать, что $q \in Q$, $|q| < \frac{1}{2}$. Возьмем теперь точку $y = y_0 + q$. Так как $|y_0| = \frac{1}{2}$, то $|y| < 1$. Докажем, что $ry = 1$.

Прежде всего $|y_0| \leqq 1$, $ry_0 = 1$, так что $y_0 \in Z \cap U^* = K^* \cap U^*$, откуда $y_0 \in K^*$. Так как q принадлежит анигиляртору множества K, то выполнено также

$$y = y_0 + q \in K^* .$$

Так как $|y| < 1$, будет, следовательно, $y \in K^* \cap U^* = Z \cap U^*$, так что $|ry| \leqq 1$. Но если бы $|ry| < 1$, то существовало бы $\lambda > 1$ так, что было бы еще $\lambda|y| < 1$, $\lambda|ry| < 1$, откуда бы вытекало, что также $\lambda y \in Z \cap U^* = K^* \cap \cap U^*$. Очевидно, можем предполагать, что $\lambda < 2$.

Но теперь $\lambda y = \lambda y_0 + \lambda q \in K^*$; так как λq принадлежит анигилятору K, то так же и

$$\lambda y_0 = \lambda y - \lambda q \in K^* .$$

Так как $|y_0| = \frac{1}{2}$ и число $\lambda < 2$, то было бы также $\lambda y_0 \in U^*$, значит, и $\lambda y_0 \in \in K^* \cap U^* = Z \cap U^*$, значит, также $|r \, . \, \lambda y_0| \leqq 1$. Но это — противоречие, так как $\lambda > 1$ и $ry_0 = 1$.

Итак мы доказали, что $|r(y_0 + q)| = 1$. Но так же мы могли доказать для каждого $0 \leqq \sigma \leqq 1$, что тоже

$$|r(y_0 + \sigma q)| = 1 .$$

Но потому что выражение $r(y_0 + \sigma q)$ является непрерывной функцией σ и при $\sigma = 0$ принимает значение 1, то также $ry = 1$.

Так как также $ry_0 = 1$, то $rq = r(y - y_0) = 0$.

Этим доказательство завершилось.

Теперь введеное название почти окрестности нуля оправдано следующей леммой:

(1,6) *Пусть* $V \subset Y$ *— почту окрестность нуля. Пусть* r *— линейная функция на* Y, *ограниченная на* V. *Тогда* r *является почти непрерывным функционалом на* Y.

Доказательство: Ясно, что можем предполагать, что $|rV| \leqq 1$. Итак, пусть дано U^* и число $\varepsilon > 0$. По предположению существует конечное множество $K \subset X$ такое, что

$$K^* \cap \frac{2}{\varepsilon} U^* \subset V .$$

Пусть теперь $y_1, y_2 \in U^*$, $y_1 - y_2 \in \varepsilon K^*$. Есть

$$\frac{1}{\varepsilon}(y_1 - y_2) \in K^* \cap \frac{2}{\varepsilon} U^* \subset V ,$$

следовательно,

$$\left| \frac{1}{\varepsilon}(ry_1 - ry_2) \right| \leqq 1 ,$$

так что

$$|ry_1 - ry_2| \leqq \varepsilon .$$

Докажем еще следующую полезную лемму:

(1,7) *Пусть $V \subset Y$ есть почти окрестность нуля. Пусть R — пополнение пространства X. Тогда V замкнуто в слабой топологии на Y, принадлежащей пространству R.*

Доказательство: Достаточно доказать следующее утверждение: Если $y_0 \in Y$, $y_0 \operatorname{non} \in V$, то существует $r \in R$ так что

$$\sup rV < ry_0 .$$

Итак, пусть имеем $y_0 \operatorname{non} \in V$. Обозначим $U^* = \underset{y}{\mathrm{E}}\, [y = \lambda y_0,\ |\lambda| \leqq 1]$. Так как V почти замкнуто, то множество $U^* \cap V$ слабо компактно. Если мы вспомним, что V является телом и, во-вторых, что V не содержит y_0, то видим, что существует число $0 < \omega < 1$ такое, что имеет место

$$\lambda y_0 \in V \Rightarrow |\lambda| \leqq \omega .$$

Заметим далее, что

$$y_0 \operatorname{non} \in \frac{1+\omega}{2\omega} V .$$

Если бы $y_0 = \dfrac{1+\omega}{2\omega} v$, было бы $\dfrac{2\omega}{1+\omega} y_0 \in U^* \cap V$, но, очевидно $\dfrac{2\omega}{1+\omega} > \omega$. Обозначим теперь $W = \dfrac{1+\omega}{2\omega} V$, так что $V \subset W$, $y_0 \operatorname{non} \in W$. В силу теоремы Хан-Банаха, существует отличная от нуля линейная функция f на Y такая, что выполнено соотношение

$$f(W) \leqq f(y_0) .$$

Так как W — тело, и f — отличная от нуля функция, то верхняя грань f на множестве W положительна так что $f(y_0) > 0$. Потому что W симметрично, то сразу же имеем

$$|f(W)| \leqq f(y_0) ,$$

откуда, в силу прежней леммы, непосредственно следует, что f есть почти непрерывный функционал на Y, и, значит, он тождественен какому-то элементу $r \in R$. Покажем, что этот элемент r уже удовлетворяет требуемому соотношению

$$\sup rV < ry_0 .$$

Справедливо равенство $\sup rV = \frac{2\omega}{1+\omega} \sup rW \leqq \frac{2\omega}{1+\omega} ry_0$. Но так как $ry_0 \neq 0$ и $\frac{2\omega}{1+\omega} < 1$, то действительно

$$\sup rV < ry_0 ,$$

что и требовалось доказать

Значение почти окрестности нуля объясняют следующие две теоремы:

(1,8) *Пусть $A \subset X$ прекомпактно. Тогда множество A^* является почти окрестностью нуля в Y.*

Доказательство: Так как A, очевидно, ограничено, то A^* является симметричным выпуклым и замкнутым телом, значит, тем более A^* является почти замкнутым. Пусть теперь дано U^*. По предположению существует теперь конечное число точек $x_1, \ldots, x_n \in X$ таких, что соединение множеств $x_i + \frac{1}{2}U$ покроет A. Обозначим через K множество, состоящее из точек $2x_1, \ldots, 2x_n$. Докажем, что тогда выполнено соотношение.

$$K^* \cap U^* \subset A^* .$$

Итак, пусть $y \in K^* \cap U^*$. Пусть $a \in A$. Тогда существует такой индекс i, что $a \in x_i + \frac{1}{2}U$, значит, $a = x_i + \frac{1}{2}u$. Имеем оценку

$$|ay| \leqq |x_i y| + |\tfrac{1}{2}uy| \leqq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \leqq 1 ,$$

которая доказывает, что $y \in A^*$.

(1,10) *Пусть X — полное пространство. Пусть $V \subset Y$ почти окрестность нуля. Тогда V^* компактно.*

Доказательство этого утверждения разделим на несколько этапов.

1. Прежде всего мы припомним, что из лемм (1,6) и (1,7) вытекает, что множество V является замкнутой окрестностью нуля в минимальной топологии пространства Y.

2. Далее докажем, что для каждого U^* множество V^* равностепенно непрерывно на U^*. Действительно, пусть дано U^* и $\varepsilon > 0$. По предположению существует конечное $K \subset X$ так, что

$$K^* \cap \frac{2}{\varepsilon} U^* \subset V .$$

Пусть теперь $y_1, y_2 \in U^*$, $y_1 - y_2 \in \varepsilon K^*$, $x \in V^*$. Тогда

$$\frac{1}{\varepsilon}(y_1 - y_2) \in K^* \cap \frac{2}{\varepsilon} U^* \subset V ,$$

следовательно,

$$|xy_1 - xy_2| \leqq \varepsilon .$$

3. Так как каждое U^* компактно в слабой топологии, и множество V является окрестностью нулья в минимальной топологии пространства Y, то существует для каждого U^* число $\lambda_U > 0$ такое, что $U^* \subset \lambda_U V$. Из этого вытекает следующее:

$$x \in V^* \Rightarrow |xU^*| \leqq \lambda_U .$$

Значит, множество V^* является для каждого U равномерно ограниченным на U^*.

4. Теперь для каждого U^* возьмем пространство $C(U^*)$, причем U^* рассматриваем в слабой топологии. Обозначим

$$Z = P_U C(U^*) .$$

Для каждого $x \in X$ и каждого U пусть $\varphi_U(x)$ означает частную функцию x на U^*, так что при каждом x есть $\varphi_U(x) \in C(U^*)$. Для каждого $x \in X$ определим

$$\varphi(x) = \{\varphi_U(x)\}_U \in P_U C(U^*) .$$

Для каждого U отображение φ_U является непрерывным линейным отображением X в $C(U^*)$, так что и отображение φ непрерывно. Но оно также открыто, так как

$$\varphi(U) = \mathop{\mathrm{E}}_{z} [z \in \varphi(X) , \quad |z_U| \leqq 1] .$$

5. Значит, результаты второй и третьей части доказательства показывают, что для каждого U множество $\varphi_U(V^*) \subset C(U^*)$ прекомпактно. Если мы еще покажем, что оно замкнуто в $C(U^*)$, то будет этим доказано, что $\varphi_U(V^*)$ компактно при каждом U.

Итак, пусть $z \in \overline{\varphi_U(V^*)}$. (Замыкание разумеется в $C(U^*)$, которое рассматриваем как нормированное пространство). Очевидно, z есть аддитивная и однородная функция на U^*, так что мы можем ее рассматривать как линейную функцию, определенную на $\mathfrak{L}(U^*) \subset Y$. Обозначим

$$\sigma = \sup_{y \in \mathfrak{L}(U^*) \cap V} |zy|$$

Докажем, что $\sigma \leqq 1$. Действительно, допустим, что существует $v \in \mathfrak{L}(U^*) \cap$ $\cap V$ так, что $|zv| > 1$. Обозначим $\varepsilon = \frac{1}{2}(|zv| - 1)$. Так как $v \in \mathfrak{L}(U^*)$, то существует $u^* \in U^*$ и $\lambda > 0$ так, что $v = \lambda u^*$. А теперь существует $x \in V^*$ так, что

$$|\varphi_U(x) - z| \leqq \frac{\varepsilon}{\lambda} .$$

(норма в пространстве $C(U^*)$).

Следовательно, будет $|xu^* - zu^*| \leqq \frac{\varepsilon}{\lambda}$, так что

$$|xv - zv| \leqq \varepsilon .$$

Но так как $x \in V$, то $|xv| \leqq 1$, что противоречит предположению. По теореме Хан-Банаха существует линейная функция r на Y такая, что она является расширением функции z на $\mathfrak{L}(U^*)$ и что выполнено

$$\sup |rV| \leqq 1 .$$

В силу леммы (1,6) будет потом $r \in X$. Значит, мы нашли элемент $r \in V$, удовлетворяющий равенству

$$\varphi_U(r) = z .$$

Следовательно, $z \in \varphi_U(V^*)$, так что $\varphi_U(V^*)$ замкнуто в $C(U^*)$, значит, и компактно.

6. Обозначим теперь $M = P_U \varphi_U(V^*)$, так что M есть компактная часть Z, причем $\varphi(V^*) \subset M$. Пусть имеем теперь $z \in M$ такое, что для произвольной пары U_1 и U_2 верно соотношение

$$y \in U_1^* \cap U_2^* \Rightarrow z_{U_1} y = z_{U_2} y . \tag{4}$$

Пусть дано $y \in Y$. Определим $\tilde{z}y$ как значение $z_U y$ для такого U, для которого $y \in U^*$. Такое U существует, так как соединение всех U^* дает Y. Одновременно импликация (4) показывает, что такое U можем выбрать произвольно. Очевидно, $\tilde{z}$ есть линейная функция на Y. Пусть $v \in V$. Возьмем U^* так, чтобы $v \in U^*$. Тогда существует $x \in V^*$ так, что $\varphi_U(x) = z_U$, значит

$$\tilde{z}v = z_U v = xv$$

так что $|\tilde{z}v| \leqq 1$. Если применим лемму (1,6) и учтем, что X полно, видим, что $\tilde{z} \in V^*$, так что $z = \varphi(\tilde{z}) \in \varphi(V^*)$.

Значит, мы доказали, что каждое $z \in M$, которое имеет свойство (4) уже принадлежит $\varphi(V^*)$. Докажем далее, что $\varphi(V^*)$ замкнуто в M. Пусть $z \in M$, $z \operatorname{non} \in \varphi(V^*)$. Тогда, в силу предыдущего, существуют U_1 и U_2 и точка $y \in U_1^* \cap U_2^*$ так что $z_{U_1} y \neq z_{U_2} y$.

Если мы обозначим

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4} |z_{U_1} y - z_{U_2} y| .$$

$$O(z) = \mathop{\mathrm{E}}_{m} [m \in M, \ |m_{U_i} - z_{U_i}| < \varepsilon, \ i = 1, 2] ,$$

то, очевидно, $O(z)$ является окрестностью точки z в M, которая не пересекается с $\varphi(V^*)$. Значит, множество $\varphi(V^*)$ замкнуто в M и, следовательно, компактно. Так как отображение φ гомеоморфно, то также V^* компактно, что и требовалось доказать.

Прежде чем будем продолжать наши рассуждения, прибавим еще одно почти на первый взгляд ясное замечание: Если X и Y два взаимно двойственные пространства, то почти окрестность нуля в Y мы определили как почти замкнутое симметричное выпуклое тело, пересечение которого с каждым U^* является слабой окрестностью нуля в U^*. Пусть теперь R означает полное пополнение пространства X. По теореме (1,4) слабые топологии на Y, принадлежащие пространствам X и R, тождественны на каждом U^*. Отсюда непосредственно вытекает, что понятие почти окрестности, если рассматриваем пространство X или пространство R, будет в обоих случаях то же самое. Это замечание нам будет полезно для характеризации почти окрестностей нуля.

(1,11) *Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. Множество $V \subset Y$ является почти окрестностью нуля тогда и только тогда, если V является полярным множеством к какому-то прекомпактному подмножеству пространства R.*

Доказательство. Пусть прежде всего V — почти окрествость нуля. По предыдущему замечанию V является также почти окрестностью нуля по отношению к пространству R. Согласно теореме (1,10), множество V^* (полярность в R) компактно. В силу (1,7), V замкнуто в слабой топологии, принадлежащей пространству R, так что $V = V^{**}$. (Первая звездочка означает опять полярность в R). Следовательно, V является множеством, полярным к компактному множеству V^* пространства R.

Пусть наоборот $V = B^*$, где B — прекомпактная часть пространства R. Тогда, в силу (1,8), множество V является почти окрестностью нуля по отношению к R, и, значит, по указанному замечанию также по отношению к X.

Докажем, что верно так же утверждение, обратное теореме (1,8).

(1,9) *Пусть $V \subset Y$ есть почти окрестность нуля. Тогда V^* прекомпактно.*

Доказательство: Возьмем пополнение R пространства X. В силу замечания, помещенного выше, и теоремы (1,10) полярное множество V_R^* в пространстве R компактно. Из равенства

$$V^* = X \cap V_R^*$$

непосредственно вытекает, что V^* прекомпактно.

Теперь мы в состоянии дать ответ на вопрос, поставленный в начале этого параграфа.

(1,12) *Между всеми топологиями на Y, которые на каждом U^* индуцируют слабую топологию u_X^*, существует самая слабая. Это есть именно та топология, система окрестностей нуля которой дана всеми множествами, полярными к компактным подмножествам пространства R.*

Доказательство. Обозначим через v топологию, определенную множествами, полярными к компактным подмножествам пространства R. По предыдущей теореме все окрестности нуля топологии v являются почти окрестностями нуля, так что топология v имеет свойство, в теореме упомянутое. Пусть далее w — выпуклая топология на Y, которая на каждом U^* порождает слабую топологию u_X^*. Пусть W — симметричная, выпуклая w-замкнутая w-окрестность нуля в Y. Сперва припомним, что каждый w-непрерывный функционал на Y почти непрерывен. Так как W есть w-замкнутое и выпуклое множество, то оно также замкнуто в слабой топологии, принадлежащей пространству R. Значит, множество W почти замкнуто, так что является почти окрестностью нуля. Итак, $w \geqq v$, что и требовалось доказать.

Теперь можем привести дальнейшую характеризацию пространств, двойственных полным пространствам.

(1,13) *Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. X полно тогда и только тогда, если каждая почти окрестнлсть нуля в Y замкнута.*

Доказательство: Пусть прежде всего X полно. В силу (1,7), каждая почти окрестность нуля замкнута в какой угодно топологии пространства Y, двойственной полному пополнению R пространства X. Потому что в нашем случае $X = R$, то каждая почти окрестность нуля замкнута. Наоборот, пусть условие выполнено. Пусть $r \in R$. Тогда множество $\underset{y}{\mathrm{E}}\,[|ry| \leqq 1]$, очевидно, является почти окрестностью нуля в Y. По из нашего условия следует, что это множество замкнуто. Значит, r должно быть непрерывно, так что X полно.

§ 2. КОМПАКТНОСТЬ И ПОЛНОТА.

Из рассуждений, содержащихся в предыдущем параграфе, следует в качестве второстепенного результата также следующая теорема (которая, впрочем, может быть легко доказана и непосредственно).

(2,1) *Пусть X — полное выпуклое топологическое линейное пространство, а множество $A \subset X$ прекомпактно. Тогда A^{**} компактно.*

Доказательство: В силу (1,8), множество A^* является почти окрестностью нуля, так что по (1,10) множество A^{**} компактно.

В частности отсюда вытекает известная теорема, что в полном пространстве замыкание прекомпактного множества компактно. Значит, мы могли бы задаться вопросом, не характеризует ли это свойство полные униформные пространства. Действительно, для метрических пространств это верно, как почти непосредственно видно. Метрическое пространство полно тогда и только тогда, если замыкание каждого его прекомпактного подмножества уже компактно.

Но мы покажем, что в общем униформном пространстве эта эквивалентность не остается в силе. А именно, мы покажем, что существует неполное выпуклое топологическое линейное пространство, выполняющее даже более сильное условие: для каждого прекомпактного множества A также и его оболочка A^{**} компактна.

В дальнейшем будем пользоваться одним интересным свойством счетных порядковых чисел, которое установил Н. Ароншайн.*) Можно его сформулировать следующим образом:

(2,2) *Пусть T означает множество всех счетных порядковых чисел. Пусть $y(t)$ есть отображение T в T такое, что при каждом $t > 0$*

$$y(t) < t .$$

Тогда существует $t_0 \in T$ так, что найдутся произвольно большие t, при которых $y(t) < t_0$.

Доказательство (принадлежит Н. Ароншайну): Предположим, что утверждение теоремы неверно. Возьмем произвольно $z_1 \in T$. Так как z_1 не имеет свойства, которое должно иметь t_0, то существует z_2 так, что

$$t \geqq z_2 \Rightarrow y(t) \geqq z_1 .$$

Так как и z_2 не имеет требуемого свойства, то существует z_3 так, что

$$t \geqq z_3 \Rightarrow y(t) \geqq z_2 .$$

Таким способом построим последовательность z_n так, что выполнено

$$t \geqq z_{n+1} \Rightarrow y(t) \geqq z_n .$$

Пусть теперь b означает верхнюю грань всех z_n. Для произвольного натурального n тогда имеет место $b \geqq z_{n+1}$, так что из предыдущей импликации следует $y(b) \geqq z_n$. Так как n произвольное, то мы видим, что $y(b) \geqq b$, т. е. мы пришли к противоречию.

(2,3) *Существует неполное выпуклое топологическое линейное пространство X такое, что для него верно: если $B \subset X$ прекомпактно, то множество B^{**} компактно.*

Доказательство: Пусть T означает множество всех счетных порядковых чисел в обыкновенной топологии. Возьмем пространство $C(T)$.**) Прежде всего докажем, что $C(T)$ полно. Итак, пусть $x(t)$ — почти непрерывная функция на T. Сначала докажем что $x(t)$ ограничена. Действительно, если бы она не была ограниченной, то легко можно удостовериться в том, что существовала бы возрастающая последовательность $t_n \in T$ такая, что

$$|x(t_n)| > n .$$

*) Этим свойством пользуется в сущности Дьедонне в работе [2] и отмечает, что оно было ему сообщено *Н. Ароншайном*.

**) Определение топологии пространства $C(T)$ дано в работе [7], § 6.

Если обозначить $t_0 = \lim t_n$, то видим, что x непрерывна на компактном множестве всех $s \leqq t_0$, но это — противоречие. Значит для каждого $t \in T$ имеют смысл следующие выражения:

$$x^*(t) = \sup_{s \geqq t} x(s)$$
$$x_*(t) = \inf_{s \geqq t} x(s) .$$

Обозначим еще

$$x^* = \inf x^*(t)$$
$$x_* = \sup x_*(t) .$$

так что, очевидно, $x_* \leqq x^*$. Докажем прежде всего, что $x_* = x^*$. Предположим наоборот, что $x^* > x_*$. Возьмем числа α^* и α_*, чтобы

$$x^* > \alpha^* > \alpha_* > \alpha_* .$$

Тогда легко построить возрастающую последовательность $t_n \in T$ так, что

$$x(t_1) > \alpha^* , \quad x(t_2) < \alpha_* , \quad x(t_3) > \alpha^* , \ldots$$

Если затем обозначим $t_0 = \lim t_n$, то видим, что функция $x(t)$ не может быть непрерывна на $s \leqq t_0$, но это — противоречие.

Пусть α означает общее значение x^* и x_*. Тогда существуют $t_n \in T$ так, что выполнено

$$t \geqq t_n \Rightarrow |x(t) - \alpha| < \frac{1}{n}.$$

Потом имеет место

$$t \geqq \lim t_n \Rightarrow x(t) = \alpha .$$

Значит, функция $x(t)$ непрерывна на всяком компактном множестве и одновременно постоянна, начиная с некоторого t. Значит, она непрерывна, так что $C(T)$ полно.

Мы теперь докажем следующее утверждение: если $M \subset C(T)$ компактно, то существует t_0 так, что

$$m \in M , \quad t \geqq t_0 \Rightarrow m(t) = m(t_0) .$$

Чтобы это доказать, возьмем сначала произвольную точку $t \in T$ и компактное множество $K = \mathop{\mathrm{E}}_{s} [s \leqq t]$. Легко удостовериться в том, что множество M должно быть равностепенно непрерывным на K. Значит, если мы возьмем фиксированное натуральное n, то существует для каждого $t \in T$, $t > 0$ некоторое $y_n(t) < t$ так, что

$$m \in M, \quad y_n(t) < s \leqq t \Rightarrow |m(s) - m(t)| < \frac{1}{n} .$$

В силу леммы Аронщайна, существует теперь $t_n \in T$ со следующим свойством:

Существуют произвольно большее t, для которых $y_n(t) < t_n$. Обозначим $t_0 = \sup t_n$. Пусть $m \in M$, $t \geqq t_0$. Пусть теперь фиксировано натуральное число n. Из того, что было сказано о точке t_n, мы видим, что существует $t_* \geqq t$, так что $y_n(t_*) < t_n$. Значит

$$y_n(t_*) < t_n \leqq t_0 \leqq t \leqq t_* .$$

Следовательно, верно, во-первых,

$$|m(t_0) - m(t_*)| < \frac{1}{n}$$

и, во-вторых,

$$|m(t) - m(t_*)| < \frac{1}{n} ,$$

откуда непосредственно получаем

$$|m(t) - m(t_0)| < \frac{2}{n} .$$

Так как n было выбрано произвольно, то отсюда следует, что $m(t) = m(t_0)$, что и требовалось доказать.

Теперь возьмем пространство βT. Это, как известно, возникает присоединением к T первого несчетного порядкового числа ω_1. Каждой функции $x \in C(T)$ соответствует тогда некоторое значение $x(\omega_1)$. Этим определена некоторая линейная функция ω_1 на $C(T)$, которая, очевидно, не непрерывна. Но мы покажем, что ω_1 непрерывна на каждой компактной части M пространства $C(T)$.

Действительно, мы только что установили, что каждому компактному множеству M соответвтует некоторое число t_0 так, что все функции $m \in M$ постоянны, начиная с t_0. Но это значит, что каждому компактному множеству M принадлежит некоторый непрерывный линейный функционал t_0 такой, что

$$m \in M \Rightarrow x(\omega_1) = x(t_0) .$$

Пусть Y означает пространство, двойственное $C(T)$, топология которого введена с помощью множеств, полярных к симметричным выпуклым и компактным подмножествам пространства $C(T)$. Видно, что ω_1 является при этой топологии Y почти непрерывным функционалом на $C(T)$. Следовательно, пространство Y неполно. Возьмем нулевую гиперплоскость X функционала ω_1, Так как ω_1 не непрерывен, но является почти непрерывным, то X плотно в $C(T)$, но почти замкнуто. Пусть теперь $B \subset X$ прекомпактно. Так как $C(T)$ полно, то множество B^{**} будет компактным. Так как X почти замкнуто, то $B^{**} \cap X$ также компактно.

Так как X плотно в $C(T)$, которое является полным, то X неполно. В то же время, однако, пространство X имеет, как мы только что видели, следующее свойство: симметричная выпуклая замкнутая оболочка каждого прекомпактного множества компактна. Значить, это свойство не характеризует полные пространства.

§ 3. КОМПАКТНОСТЬ И СВОЙСТВО B.

В этом параграфе мы воспользуемся результатами предыдущих исследований для рассмотрения свойства B. Между прочим мы дадим новый пример полного пространства, не имеющего свойства B.

Прежде всего одно замечание относительно обозначения. Часто встретимся со следующим положением: в пространстве Y, двойственном пространству X, будет дано некоторое плотное подпространство Q. Нам надо будет часто исследовать множества, полярные к данному множеству $A \subset X$, причем полярность будем брать один раз в Y, другой раз в Q. Ясно, что обозначение A^* не дает возможности отличить, с какой из полярностей имеем дело. Читатель уже, наверно, видел, что в подобных случаях нам надо было помогать себе пояснительными заметками в тексте. Чтобы избежать этих неприятностей, мы будем в дальнейшем пользоваться обозначением A^Y для множества, полярного в Y и аналогично A^Q для множества, полярного в Q. Очевидно, справедливо

$$A^Q = Q \cap A^Y .$$

Будет удобным ввести еще одно полезное обозначение. Пусть (X, u) означает данное выпуклое топологическое линейное пространство. Пусть v — выпуклая топология на пространстве X такая, что $v \geqq u$. Для каждой окрестности нуля U при топологии u, можно образовать ее замыкание в топологии v. Нетрудно удостовериться в том, что система всех множеств вида vU является полной системой окрестностей нуля некоторой выпуклой топологии на X. Эту топологию мы назовем $v(u)$. Очевидно, что между введенными топологиями имеет место соотношение

$$u \leqq v(u) \leqq v .$$

Объясним теперь, какую связь имеет только что введенная топология $v(u)$ со свойством B. Для этой цели достаточно представить себе, что это значит, что никакая u-окрестность нуля не является неплотной в топологии v. Это свойство, очевидно, эквивалентно условию чтобы для каждого U множество vU было v-окрестностью нуля, т. е. чтобы было $v \leqq v(u)$. Но так как всегда имеет место $v(u) \leqq v$, то введенное свойство эквивалентно равенству $v(u) = v$. Выполнение свойства B значит, что для каждой выпуклой топологии v, для которой $v \geqq u$, из равенства $v(u) = v$ следует равенство $v = u$.

Значит, мы можем определение свойства B сформулировать следующим образом:

Скажем, что выпуклое топологическое линейное пространство (X, u) имеет свойство B, если оно удовлетворяет следующему условию

Для каждой выпуклой топологии v пространства X, для которой $u < v$, выполнено $v(u) < v$.

Прежде чем двинуться вперед, мы исследуем более подробно топологию $v(u)$. Это исследование нам даст возможность существенным образом дополнить теорему (4,5) предыдущей работы, так что мы получим дальнейшую характеристику свойства B.

(3,1) *Пусть (X, u) — выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. Пусть v обозначает выпуклую топологию на X такую, что $v \geqq u$. Обозначим через Q то плотное подпространство пространства Y, которое двойственно пространству (X, v). Тогда следующие два условия взаимно эквивалентны.*

1. $v(u) \sim v$,
2. *пространство Q почти замкнуто.*

Доказательство. Пусть прежде всего выполнено $v(u) \sim v$. Это значить, что для каждого U множество vU является окрестностью нуля в топологии $\underline{v}$. Значить, ее полярное множество в пространстве Q должно быть слабо компактным. Но мы имеем

$$Q \cap U^* = U^Q = (vU)^Q\,,$$

так что множество $Q \cap U^*$ есть слабо компактное множество. Значит, пространство Q является почти замкнутым.

Наоборот, пусть Q — почти замкнутое пространство. Пусть дано U. Так как $Q \cap U^*$ компактно в слабой топологии, соответствующей пространству X, то множество $(Q \cap U^*)^*$ является окрестностью нуля в топологии $\underline{v}$. Но

$$(Q \cap U^*)^* = U^{Q*} = vU\,.$$

Следовательно, мы доказали, что для каждого U множество vU является окрестностью нуля в топологии $\underline{v}$, так что $\underline{v} \leqq v(u)$. Так как одновременно выполнено $v(u) \leqq v$, то $v(u) \sim v$.

То, что в предыдущей лемме эквиваленцию $v(u) \sim v$ невозможно заменить равенством $v(u) = v$, показывают самые простые примеры. Возьмем неполное нормированное пространство (X, u). Пусть Y озчачает двойственное ему пространство. Как мы знаем, существует в Y гиперплоскость Q, которая плотна и почти замкнута. Обозначим через v слабую топологию на X, принадлежащую пространству Q. Пространства (X, v) и Q взаимно двойственны. В силу предыдущей леммы будет $v(u) \sim v$. Но мы докажем, что $v(u) < v$. Если теперь U означает замкнутую единичную сферу пространства X, то топология $v(u)$ определена сферой vU.

Покажем, что ни для какого конечного подмножества $K \subset Q$ не может быть верно

$$K^* \subset vU .$$

Действительно, существует $x \in X$, отличное от нуля и такое, что $xK = 0$. В противном случае простарнство X имело бы конечную размерность и, значить, было бы полным, но оно таким не является. Но тогда при каждом λ элемент $\lambda x \in K^*$, так что при каждом λ есть $\lambda x \in vU$. Так как $vU = (Q \cap U^*)^*$, то должно быть $x(Q \cap U^*) = 0$, так что $xQ = 0$. Но это противоречие, так как гиперплоскость Q плотна, а функционал x непрерывен.

Теперь можем уже высказать усиление теоремы (4,5) предыдущей работы, о котором шла речь выше.

(3,2) *Пусть* (X, u) — *выпуклое топологическое линейное пространство,* Y — *двойственное ему пространство. Тогда следующие условия взаимно эквивалентны.*

(1) *если* $v \geqq u$ *и при этом* $v(u) \sim v$, *то* $v \sim u$,

(2) *если* $v \geqq u$ *и при этом* $v(u) = v$, *то* $v = u$,

(3) *если* $Q \subset\subset Y$ *плотно и почти замкнуто, то* $Q = Y$.

Доказательство: Пусть прежде всего выполнена свойство (1); докажем, что выполнено также свойство (2). Пусть далее имеем выпуклую топологию $v \geqq u$ так, что $v(u) = v$. Следовательно, также $v(u) \sim v$, так что в силу (1) имеем $v \sim u$. Отсюда непосредственно следует, что $v(u) = u$, и из этого, учитывая равенство $v(u) = v$, получаем $u = v$, что и требовалось доказать.

Доказательство того, что свойство (3) является следствием свойства (2) было в сущности проведено в теореме (4,5) предыдущей работы. Достаточно только вспомнить, что равенство $v(u) = v$ есть не что иное, как требование, чтобы никакая u-окрестность нуля не была неплотна в топологии v.

Наконец, пусть выполнено свойство (3); докажем, что тогда выполнено и (1). Пусть имеем выпуклую топологию v ны X такую, что $v \geqq u$ и $v(u) \sim v$.

Если Q означает по подпространство пространства Y, которое двойственно пространству (X, v), то прежде всего Q плотно в Y. По предыдущей лемме (3,1) оно также почти замкнуто. Так как по предпололжению выполнено свойство (3), то должно быть $Q = Y$, то есть $v \sim u$.

Этим эквивалентность указанных утверждений доказана. Обратимся теперь к изучению топологии $v(u)$ в одном частном случае. Это исследование позволит нам в следующем построить пример полного выпуклого топологического линейного пространства, которое не имеет свойства B.

Пусть X — данное выпуклое топологическое линейное пространство, R — его пополнение. Тогда, как мы знаем, пространства X и R имеют то же самое пространство линейных функционалов. Обозначим его через Y. Пусть u означает топологию на Y, полная система окрестностей нуля которой дана множествами, полярными к симметричным выпуклым компактным подмножествам пространства R, так что R двойственно (Y, u). Пусть аналогично v означает топологию, соответствующую всем симметричным выпуклым и компактным подмножествам пространства X, так что X двойственно к (Y, v). Очевидно, $u \leq v$ и в силу (1,11) ясно, что топология u тождественна топологии, данной всеми почти окрестностями нуля по отношению к X.

Исследуем теперь, какие свойства имеет топология $v(u)$. Докажем, что топология $v(u)$ дана именно множествами, полярными к прекомпактным подмножествам пространства X.

Пусть прежде всего A — прекомпактная часть пространства X. Тогда по (1,8) ее полярное множество является почти окрестностью нуля, которая одновременно v-замкнута, так что A^* является v-замыканием некоторой u-окрестности нуля, значит, A^* является окрестностью нуля в топологии $v(u)$. Наоборот каждая u-окрестность нуля в Y есть множество вида B^*, где B — симметричная, выпуклая и компактная часть R. Тогда

$$vB^* = (B^*)^{XY} = (B \cap X)^Y ,$$

так что vB^* есть множество, полярное к $B \cap X$, а это есть прекомпактная часть пространства X.

Поставим себе теперь вопрос, при каких предположениях имеет место равенство $v(u) = v$. Ответ дает следующая, почти очевидная лемма.

(3,3) *Пусть X — данное выпуклое топологическое линейное пространство, R — его полная оболочка. Пусть Y, u, v имеют выше указанное значение. Тогда следующие свойства взаимно эквивалентны.*

(1) $v(u) = v$,

(2) *пространство X, рассматриваемое как подпространство пространства R, двойственного (Y, u), почти замкнуто.*

(3) *для каждой прекомпактной части A пространства X оболочка A^{YX} компактна.*

Доказательство: Если выполнено $v(u) = v$, то верно также (2), что непосредственно следует из леммы (3,1) . Предположим теперь, что выполняется (2). Пусть имеем прекомпактную часть A пространства X. Множество A^{XR} есть симметричная, вычуклая и компактная часть пространства R. По определению топологии u и пространства Y множество A^{YR} является множеством вида U^*. Так как X является почти замкнутым подпространством пространства R, то пересечение $A^{YR} \cap X$, должно быть замкнуто в A^{YR}, значит, также компактно. Но это пересечение, очевидно тождественно с множеством A^{YX}. Значит, выполнено свойство (3). Наконец, предположим, что выполняется (3) и докажем, что тогда $v(u) = v$. Действительно, пусть имеем произвольную окрестность нуля пространства

Y в топологии $v(u)$. Мы уже знаем, что она имеет вид A^*, где A — некоторая прекомпактная часть пространства X. Но, очевидно,

$$A^* = (Y^{XY})^* ,$$

причем, по предположению, множество A^{XY} компактно. Значит, множество A^* является также окрестностью нуля в топологии v. Значит, мы доказали, что $v(u) \geqq v$, что в соединении с известным нам уже заключением $v(u) \leqq v$ дает требуемое равенство $v(u) = v$. На этом доказательство закончено.

Предыдущая лемма показывает нам путь к построению полного пространства, которое не будет обладать свойством B.

Если мы возьмем неполное пространство X, в котором симметричная выпуклая и замкнутая оболочка всякого прекомпактного множества является компактной, то мы будем иметь, во-первых, $u < v$ так как X неполное, и, во-вторых $v(u) = v$ по предыдущей лемме. Значит, пространство (Y, u) не будет иметь свойства B.

Пространство X с указанными свойствами нам удалось построить в предыдущем параграфе. Но более подробный анализ показывает, что нам это удалось только потому, что пространство (Y, u) не было полным. Но мы покажем, что можно добиться того, чтобы (Y, u) было полным. Нам понадобится еще одна интересная теорема.

Пусть Y означает какое-нибудь линейное пространство в смысле алгебры. Легко удовлетвориться в том, что система всех симметричных выпуклых тел в Y составляет полную систему окрестбостей нуля некоторой выпуклой топологии на Y. Эта топология, очевидно, наиболее слабая из всех выпуклых топологий, которые можно определить на Y. Мы будем ее называть натуральной топологией пространства Y. Если $z(y)$ произвольная линейная функция на Y, то множество

$$\mathop{\mathrm{E}}_{y} [|zy| \leqq 1] ,$$

очевидно, является симметричным выпуклым телом в Y, так что каждая линейная функция на Y непрерывна в натуральной топологии пространства Y.

Недавно доказал *С. Каплан* [5], что всякое линейное пространство является полным в своей натуральной топологии. Мы приведем здесь другое, более короткое доказательство этой теоремы, опирающееся на предыдущие результаты.

(3,4) *Всякое линейное пространство полно в своей натуральной топологии.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Y обозначает произвольное линейное пространство. Легко можно доказать, что тогда Y можно рассматривать как линейное пространство всех последовательностей действительных чисел

$$y = \{y^b\} ,$$

где индекс b пробегает произвольный алгебраический базис B пространства Y, причем почти все члены последовательности y^b равны нулю. Обозначим через X пространство всех последовательностей действительных чисел $x = \{x^b\}$ $(b \in B)$, топологизированных таким же образом, как топологическое произведение прямых. Из одного результата М. Катетова [4] следует, что постранства X и Y являются взаимно двойственными при обыкновенном определении скалярного произведения

$$xy = \Sigma x^b y^b \, .$$

Пусть Q обозначает подпространство тех $x \in X$, для которых почти все x^b равны нулю.

Пусть теперь r — почти непрерывный функционал на X. По теореме (2,8) r будет непрерывным на всякой симметричной выпуклой компактной части пространства X. Значит, в частности, для каждой последовательности неотрицательных чисел $\sigma^b (b \in B)$ r будет непрерывным на множестве

$$Z = \underset{x}{\mathrm{E}} \, [|x^b| \leqq \sigma^b] \, .$$

Заметим еще, что подпространство Q плотно в каждом Z. Для каждого $b \in B$ пусть теперь e^b обозначает тот элемент пространства X, b-тая координата которого равна единице, а все остальные равны нулю. Для тех $b \in B$, для которых имеет смысл частное $\dfrac{1}{|e^b r|}$ положим $\sigma^b = \dfrac{1}{|e^b r|}$. Для остальных b пусть $\sigma^b = 0$. Пусть теперь Z — компактное множество, соответствующее последовательности σ^b. Так как по предположению r есть непрерывный функционал на Z, то существует $y \in Y$ так, что

$$|Z(r - y)| \leqq \tfrac{1}{2} \, .$$

Докажем теперь, что для каждого $b \in B$, для которого $y^b = 0$, имеет также место $e^b r = 0$. Действительно, пусть $b \in B$ такое, что $y^b = 0$. Если бы было $e^b r \neq 0$, то было бы также $\sigma^b \neq 0$. Так как $\sigma^b e^b \in Z$, то мы получили бы из выше приведенной оценки

$$\Theta \tfrac{1}{2} = \sigma^b e^b (r - y) = \sigma^b (e^b r - y^b) = \frac{1}{|e^b r|} \, e^b r \, ,$$

но это противоречие.

Итак, мы докажем, что $e^b r \neq 0$ может быть выполнено не больше как для конечного числа $b \in B$. Другими словами, мы доказали существование элемента $y \in Y$ такого, что на пространстве Q функционал r совпадает с y. Но r непрерывен на всяком Z, и подпространство Q плотно в каждом Z. Значит, должно быть $r = y$, так что r также непрерывен; на этом закончено доказательство полноты пространства Y.

Теперь можем сформулировать тот результат, о котором уже шла речь.

(3,5) *Существует полное выпуклое топологическое линейное пространство, не имеющее свойства B.*

Пусть Y означает полное нормированное пространство, которое не имеет конечную размерность. Обозначим через X пространство, двойственное Y, в котором дана слабая топология. Пополнение R пространства X тождественно пространству всех линейных функций на Y, так как при выборе слабой топологии в X всякая линейная функция на Y почти непрерывна. Пространство X неполно, так как из того, что Y не имеет конечную размерность, легко следует, что на Y существуют линейные функции, которые не непрерывны. Построим теперь на Y топологии u и v выше описанным способом. Топология u, очевидно, тождественна натуральной топологии пространства Y. Покажем далее, что топология v пространства Y идентична с его нормированной топологией. Так как единичная сфера пространства X слабо компактна, то топология v является более слабой, чем нормированная топология пространства (Y, v). Вместе с тем, как нам известно, пространство (Y, v) двойственно X. Но известно [1], что нормированная топология всегда является минимальной. Значит, топология v идентична топологии, порожденной нормой.

Так как пространство X неполно, то будет $v > u$. Рассмотрим теперь топологию $v(u)$. Из теоремы Бэра и полноты (Y, v) следует непосредственно, что всякое тело в Y, замкнутое в топологии v, является окрестностью нуля в топологии v. Значит, будет $v(u) \geqq v$, так что $v(u) = v$. Значит, пространство (Y, u) полно, но не обладает свойством B.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *J. Dieudonné:* La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, Ann. de l'Ecole Norm. Sup., *59* (1942), 107—139.

[2] *J. Dieudonné:* Un exemple d'espace normal non susceptible d'une structure uniforme d'espace complet, Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. *209* (1938), 145—147.

[3] *J. Dieudonné-L. Schwartz:* La dualité dans les espaces (F) et (LF), Annales de l'Inst. Fourier, Univ. de Grenoble, *1* (1950), 61—101.

[4] *M. Katětov:* On convex topological linear spaces, Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Carol., *181* (1948).

[5] *S. Kaplan:* Cartesian products of reals, Am. Journal of Math. *74* (1952), 936—954.

[6] *J. v. Neumann:* On complete topological spaces, Trans. Am. Math. Soc., *37* (1935), 1—20.

[7] *V. Pták:* О польных топологических линейных пространствах, Чехосл. мат. журнал, *78* (1953), 301—364.

Summary.

COMPACT SUBSETS OF CONVEX TOPOLOGICAL LINEAR SPACES

VLASTIMIL PTÁK, Praha.

(Received April 23, 1953.)

According to a well known theorem the closure of a precompact subset of a complete uniform space is compact. It is easy to see that, in the case of a metric space, completeness is equivalent to the condition that its precompact subsets have compact closures. This condition, in fact, has been accepted by J. VON NEUMANN to define completeness in the general case [6]. In the present paper we show that this condition ceases to be equivalent to completeness in the case of a general uniform space which does not fulfil the first axiom of countability. This result is based on some considerations concerning precompact subsets of convex topological linear spaces. Some of the results obtained are not without some interest themselves so that we are able to complete at the same time some investigations of a previous paper [7]. We have shown in [7] that the completion of a given convex topological linear space X consists of all almost continuous functionals on the space Y dual to X, i. e. of all linear functions defined on Y which are weakly continuous on every set U^* polar to a neigbourhood of zero U in X. It is easy to see that the weak topology on Y corresponding to the completion of X coincides with the weak topology of Y on every set of the form U^*. It is thus natural to ask how far the topology of Y can be weakened so as not lose this property. We show that the system of all sets polar to precompact subsets of a given complete convex topological linear space forms a complete system of neighbourhoods of zero of the weakest topology which coincides with the weak topology on all sets U^*.

Next we construct a noncomplete convex topological linear space X such that for every precompact $A \subset X$ the set A^{**} is compact. These considerations are closely connected with the notion of B-completeness. Using the preceding results we construct another example of a complete convex topological linear space which is not B-complete.