Czechoslovak Mathematical Journal

Marko Švec

Über einige neue Eigenschaften der (oscillatorischen) Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 1, 75–94

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100100

ÜBER EINIGE NEUE EIGENSCHAFTEN DER (OSCILLATORISCHEN) LÖSUNGEN DER LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNG VIERTER ORDNUNG

MARKO ŠVEC, Bratislava.

(Eigelangt 27. IV. 1953.)

In der Arbeit beschäftige ich mich mit der linearen homogenen Differentialgleichung, deren Lösungen höchstens eine zweifache (dreifache) Nullstelle haben. Für die Lösungen dieser Gleichung, die irgendeinen Punkt x_1 als zweifache, bzw. dreifache Nullstelle haben, sind die Trennungssätze ihrer Nullstellen bewiesen. Im Falle der Gleichung $y^{(4)} + Q(x) \,.\, y = 0$, $Q(x) > 0$, sind noch die Trennungssätze der Nullstellen der Ableitungen erster, bzw. zweiter, bzw. dritter Ordnung der betreffenden Lösungen bewiesen.

§ 1.

In dieser Arbeit beschäftige ich mich mit den Eigenschaften der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung vierter Ordnung. Ich setze voraus, dass die Lösungen oscillatorisch sind. Diese Voraussetzung ist aber nicht grundsätzlich, sie kann durch Existenz der in Frage kommenden Nullstellen der Lösungen ersetzt werden. Auch dann bleiben die Sätze 3—11 richtig. Wesentliche Voraussetzung dafür, dass die Lösungen die in Sätzen 4, 5, 6, 7 aufgezeigte Eigenschaften hätten, ist: *(E) Jede eigentliche Lösung hat höchstens eine zweifache eventuell dreifache Nullstelle.* Für die spezielle Differentialgleichung (a_2) werden noch die Sätze 8—11 bewiesen, die die Folgerung des Satzes 2′ sind. Alle diese Eigenschaften, besonders aber der Satz 5, 6 und 7, werden bei der Verallgemeinerung der von O. Borůvka aufgestellten *Theorie der Dispersionen*[1]) eine wichtige Rolle spielen. Mit dieser Frage wird sich meine nächste Arbeit beschäftigen.

In den Sätzen 1,2 und 2′ wird gezeigt, dass Differential-systeme bzw. Differentialgleichungen existieren, deren Lösungen die Eigenschaft (E) haben. Ich bemerke noch, dass alles, was hier für lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung und ihre Lösungen abgeleitet wird, sich leicht mit zugehörigen Abänderungen für die lineare homogene Differentialgleichung

[1]) *O. Borůvka*: О Колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка (Чехословацкий математический журнал, т. *3* (78) 1953).

n-ter Ordnung ableiten lässt. Zum Beispiel die Gleichung $y^{(n)} + Q(x) \cdot y = 0$, hat die Eigenschaft: *Jede ihrer eigentlichen Lösungen hat höchstens eine* $\frac{1}{2}n$*-fache (eventuell mehr als* $\frac{1}{2}n$*-fache) Nullstelle, wenn* $n = 4k$ *und* $Q(x) > 0$, *oder wenn* $n = 4k + 2$ *und* $Q(x) < 0$ *ist, und eine* $[\frac{1}{2}n] + 1$*-fache (eventuell mehr als* $[\frac{1}{2}n] + 1$*-fache) Nullstelle, wenn* n *ungerade und* $Q(x) \lesseqgtr 0$ *ist.*[1]) Diese Eigenschaft ist Verallgemeinerung unserer Eigenschaft (E). Für die Lösungen der Differentialgleichungen mit solcher Eigenschaft lassen sich nach unserem Muster den Sätzen 3—11 ähnliche Sätze und viele andere beweisen.

§ 2.

Satz 1. *In dem Differentialsystem*

$$\begin{aligned} y'' &= p(x)\, z \\ z'' &= q(x)\, y \end{aligned} \tag{1}$$

seien die Funktionen $p(x)$ *und* $q(x)$ *in dem Intervalle* (a, b)[2]) *stetig und für alle* $x \in (a, b)$ *sei* $p(x) > 0$ *und* $q(x) < 0$. *Dann hat jede eigentliche Lösung von* (1) *höchstens einen Punkt* $\xi \in (a, b)$, *in welchem irgendeine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

$$\begin{aligned} B_1 &: y(\xi) = y'(\xi) = 0 \ , \\ B_2 &: y(\xi) = z(\xi) = 0 \ , \\ B_3 &: z(\xi) = z'(\xi) = 0 \ , \\ B_4 &: y'(\xi) = z'(\xi) = 0 \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Beweis. Es sei (y, z) eine eigentliche Lösung von (1) und $x_1, x_2 \in (a, b)$ $(x_1 \neq x_2)$ zwei Punkte, in welchen gleichzeitig irgendeine von den Bedingungen (2), bzw. in x_1 eine und in x_2 eine andere von den Bedingungen (2) erfüllt ist. Multiplizieren wir die erste Gleichung von (1) mit z, die zweite mit y. Nach Substraktion ergibt sich

$$y''z - yz'' = pz^2 - qy^2 > 0$$

oder

$$(y'z - yz')' = pz^2 - qy^2 > 0 \ . \tag{3}$$

Integrieren wir jetzt diese Gleichung zwischen x_1 und x_2, so ergibt sich

$$y'(x_2)z(x_2) - y(x_2)z'(x_2) - y'(x_1)z(x_1) + y(x_1)z'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (pz^2 - qy^2)\, dx \ . \tag{4}$$

Aus den Voraussetzungen folgt, dass der Ausdruck auf der linken Seite Null, der Ausdruck auf der rechten Seite aber stets von Null verschieden ist. Also ein Widerspruch, der unseren Satz beweist.

Satz 2. *In der Differentialgleichung*

$$y'''' + p_1 y''' + p_2 y'' + p_4 y = 0 \tag{a_1}$$

---

[1]) Man beweist dies auf demselben Wege wie den Satz 2.

[2]) (a, b) bedeutet offenes, $\langle a, b \rangle$ abgeschlossenes Intervall.

seien im Intervalle (a, b) *1°* $p_1'(x)$, $p_4(x)$ *stetige Funktionen, 2°* $p_2(x) = \frac{1}{4} p_1^2(x) + \frac{1}{2} p_1'(x)$, *3°* $p_4(x) > 0$. *Dann hat jede eigentliche Lösung von* (a_1) *höchstens einen Punkt* $\xi \in (a, b)$, *in welchem irgendeine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

$$\begin{aligned} &E_1 : y(\xi) = y'(\xi) = 0 \ , \\ &E_2 : y(\xi) = y''(\xi) = 0 \ , \\ &E_3 : y''(\xi) = y'''(\xi) = 0 \ , \end{aligned} \tag{5}$$

Beweis. Multiplizieren wir die Gleichung (a_1) mit $y.\, e^{\frac{1}{2}\int p_1(x)dx}$. Mit Rücksicht auf die Bedingung 2° ist dann

$$y''''yK + p_1 y'''yK + \tfrac{1}{4}p_1^2 y''yK + \tfrac{1}{2}p_1' y''yK + p_4 y^2 K = 0 \ , \tag{6}$$

wo $K = e^{\frac{1}{2}\int p_1(x)dx}$ ist, oder

$$[y'''yK - y''y'K + \tfrac{1}{2}p_1 y''yK]' = -Ky''^2 - p_4 K y^2 < 0 \ . \tag{7}$$

Es seien jetzt x_1 und x_2 zwei verschiedene Punkte aus (a, b), in welchen gleichzeitig irgendeine bzw. irgendzwei Bedingungen von (5) erfüllt sind. Integrieren wir die Gleichung (7) zwischen x_1 und x_2, so ist die linke Seite wegen der aufgestellten Voraussetzungen gleich Null, die rechte Seite aber von Null verschieden, was unseren Satz beweist.

Nehmen wir jetzt eine spezielle Differenzialgleichung von dem Typus (a_1) an, und zwar die Gleichung

$$y^{(4)} + Q(x) \,.\, y = 0 \ , \tag{a_2}$$

wo $Q(x) > 0$ eine in (a, b) stetige Funktion ist. Für diese gilt der folgende

Satz 2′. *Jede eigentliche Lösung von* (a_2) *hat höchstens einen Punkt* $\xi \in (a, b)$, *in welchem irgendeine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

$$\begin{aligned} &E_1 : y(\xi) = y'(\xi) = 0 \ , \\ &E_2 : y(\xi) = y''(\xi) = 0 \ , \\ &E_3 : y''(\xi) = y'''(\xi) = 0 \ , \\ &E_4 : y'(\xi) = y'''(\xi) = 0 \ , \\ &E_5 : y'(\xi) = y''(\xi) = 0 \ , \\ &E_6 : y(\xi) = y'''(\xi) = 0 \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Beweis. Die Gleichung (a_2) geht aus der Gleichung (a_1) hervor, wenn wir $p_1(x) \equiv 0$ setzen. Für $E_1 - E_3$ folgt unsere Behauptung aus dem Satze 2. Aus (7) und aus $p_1(x) \equiv 0$ ist leicht zu ersehen, dass die Behauptung auch für E_4 richtig ist. Wir brauchen also den Beweis nur für E_5 und E_6 durchzuführen. Dazu wird uns der folgende Hilfssatz dienen:

Hilfssatz 1. *Es sei*

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

ein Fundamentalsystem der Lösungen (a_2). Dann haben die Funktionen

$$P_1(x) = \begin{vmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y(x_1) \\ y'(x_1) \end{vmatrix}, \quad P_2(x) = \begin{vmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y(x_1) \\ y''(x_1) \end{vmatrix} \quad P_3(x) = \begin{vmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y''(x_1) \\ y'''(x_1) \end{vmatrix}, \quad P_4(x) = \begin{vmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'(x_1) \\ y'''(x_1) \end{vmatrix},$$

$$P_5(x) = \begin{vmatrix} y(x) \\ y'''(x) \\ y(x_1) \\ y'(x_1) \end{vmatrix}, \quad P_6(x) = \begin{vmatrix} y(x) \\ y'''(x) \\ y(x_1) \\ y''(x_1) \end{vmatrix}, \quad P_7(x) = \begin{vmatrix} y(x) \\ y'''(x) \\ y''(x_1) \\ y'''(x_1) \end{vmatrix}, \quad P_8(x) = \begin{vmatrix} y(x) \\ y'''(x) \\ y'(x_1) \\ y'''(x_1) \end{vmatrix},$$

wo $x_1 \in (a, b)$ ist, nur eine einzige Nullstelle in (a, b) und zvar x_1.

Bemerkung. Die Symbole $P_i(x)$ bedeuten die Determinanten vierter Ordnung, deren Zeilen aus den bezeichneten Ableitungen von y_1, y_2, y_3, y_4 bestehen. Zum Beispiel

$$P_1(x) = \begin{vmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y(x_1) \\ y'(x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1'(x)\,, & y_2'(x)\,, & y_3'(x)\,, & y_4'(x) \\ y_1''(x)\,, & y_2''(x)\,, & y_3''(x)\,, & y_4''(x) \\ y_1(x_1), & y_2(x_1), & y_3(x_1), & y_4(x_1) \\ y_1'(x_1), & y_2'(x_1), & y_3'(x_1), & y_4'(x_1) \end{vmatrix}.$$

Beweis des Hilfssatzes. Es ist leicht zu ersehen, dass x_1 eine Nullstelle von $P_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, ist. Nehmen wir an, dass $\eta \in (a, b)$ eine von x_1 verschiedene Nullstelle von $P_i(x)$ ist. Dann gibt es zwischen x_1 und η eine Stelle ξ solche, dass $P_i'(\xi) = 0$, $i = 1, \ldots, 8$. Das ist aber unmöglich, denn diese Gleichungen der Reihe nach besagen, dass es eine eigentliche Lösung von (a_2) gibt, die in x_1 die Bedingung E_1 bzw. E_2, E_3, E_4 und in ξ die Bedingung E_4 erfüllt, was der bisher bewiesenen Tatsache widerspricht.

Fortsetzung des Beweises des Satzes 2'. a) Nehmen wir an, dass eine eigentliche Lösung von (a_2) besteht, die in x_1 die Bedingung E_i, $i = 1, \ldots 4$, und in x_2 $(\neq x_1)$ die Bedingung E_5 bzw. E_6 erfüllt, $x_1, x_2 \in (a, b)$. Das bedeutet aber, dass $P_i(x_2) = 0$, $i = 1, \ldots, 8$, was dem Hilfssatze 1 widerspricht

b) Es seien ξ und η $(> \xi)$ zwei Punkte aus (a, b). Nehmen wir an, dass eine eigentliche Lösung von (a_2) besteht, die in ξ und η gleichzeitig die Bedingung E_5 bzw E_6 erfüllt. Es ist also

$$P(\eta) \doteq \begin{vmatrix} y'(\xi) \\ y''(\xi) \\ y'(\eta) \\ y''(\eta) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{bzw.} \quad \overline{P}(\eta) = \begin{vmatrix} y(\xi) \\ y'''(\xi) \\ y(\eta) \\ y'''(\eta) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ist das wahr, so existiert eine Stelle $x_1 \epsilon (\xi, \eta)$, dass

$$P'(x_1) = P_4(\xi) = \begin{vmatrix} y'(\xi) \\ y''(\xi) \\ y'(x_1) \\ y'''(x_1) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{bzw.} \quad \bar{P}'(x_1) = P_8(\xi) = \begin{vmatrix} y(\xi) \\ y'''(\xi) \\ y'(x_1) \\ y'''(x_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Das widerspricht aber dem Hilfssatze 1.

c) Nehmen wir endlich an, dass es eine eigentliche Lösung von (a_2) gibt, die in x_3 die Bedingung E_5 und in x_2 $(\neq x_3)$ die Bedingung E_6 erfüllt. Dabei $x_2, x_3 \epsilon$ $\epsilon (a, b)$. Es gilt dann

$$R(x_3) = \begin{vmatrix} y'(x_3) \\ y''(x_3) \\ y(x_2) \\ y'''(x_2) \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Dann gibt es aber zwischen x_2 und x_3 einen Punkt x_1, dass

$$R'(x_1) = \begin{vmatrix} y'(x_1) \\ y'''(x_1) \\ y(x_2) \\ y'''(x_2) \end{vmatrix} = P_8(x_2) = 0 \ ,$$

was wieder dem Hilfssatze 1 widerspricht. Damit ist unser Beweis des Satzes 2′ beendet.

§ 3.

Wir werden uns weiter mit der homogenen linearen Differentialgleichung vierter Ordnung beschäftigen — wir werden sie mit (a) bezeichnen — deren Lösungen folgende Eigenschaft (E) haben:

(E) *Jede eigentliche Lösung hat höchstens eine zweifache eventuell dreifache Nullstelle.*

Wir setzen noch voraus, dass die Gleichung (a) sämtlich *oscillatorische* Lösungen hat. Die Eigenschaft (E) hat viele andere Eigenschaften zur Folge, die wir jetzt ableiten wollen.

Satz 3. *Die Lösungen von* (a), *die* x_1 *als dreifache Nullstelle haben, haben alle übrigen Nullstellen gemeinsam. Je zwei derselben sind linear abhängig.*

Beweis. Es sei

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \tag{9}$$

ein Fundamentalsystem der Lösungen von (a). Dann hat jede Lösung, die x_1 als dreifache Nullstelle hat, die Form

$$u_1(x) = \sum_{i=1}^{4} c_i y_i(x) \ , \tag{10}$$

wo die Konstanten c_i folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{4} c_i y_i(x_1) = 0 \\ &\sum_{i=1}^{4} c_i y_i'(x_1) = 0 \\ &\sum_{i=1}^{4} c_i y_i''(x_1) = 0 \ . \end{aligned} \tag{11}$$

Die Matrix dieses Systems hat den Rang 3. Wären nämlich alle Determinanten dritter Ordnung dieser Matrix Null, so wäre die Wronskische Determinante des Systems (9) in x_1 Null, was der Voraussetzung widerspricht, dass (9) ein Fundamentalsystem ist. Es gibt also wenigstens eine von Determinanten dritter Ordnung dieser Matrix, die von Null verschieden ist. Sei es die aus den ersten drei Spalten entstandene Determinante. Wir werden sie mit D_{44} bezeichnen. Aus (11) ergeben sich dann

$$c_i = (-1)^i \frac{D_{4i}}{D_{44}} c_4, \quad i = 1, 2, 3 \ , \tag{12}$$

wo D_{4i} die Determinante dritter Ordnung bedeutet, die aus unserer Matrix entsteht, wenn wir die i-te Spalte auslassen. Die gesuchte Lösung (10) hat dann die Form

$$u_1(x) = \frac{c_4}{D_{44}} (-D_{41}y_1(x) + D_{42}y_2(x) - D_{43}y_3(x) + D_{44}y_4(x)) \tag{13}$$

oder

$$u_1(x) = \frac{c_4}{D_{44}} \cdot u_1^*(x) \ , \tag{14}$$

wo $u_1^*(x)$ den Ausdruck in Klammern bedeutet, der sich auch in der Form der Determinante

$$u_1^*(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_1), & y_2(x_1), & y_3(x_1), & y_4(x_1) \\ y_1'(x_1), & y_2'(x_1), & y_3'(x_1), & y_4'(x_1) \\ y_1''(x_1), & y_2''(x_1), & y_3''(x_1), & y_4''(x_1) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x), & y_4(x) \end{vmatrix} \tag{15}$$

schreiben lässt. Es ist leicht zu ersehen, dass $u_1^*(x)$ eine Lösung von (a) ist, die x_1 als dreifache Nullstelle hat. Die Gleichung (14) zeigt, dass jede andere Lösung von (a), die x_1 als dreifache Nullstelle hat, von $u_1^*(x)$ linear abhängig ist und dieselben Nullstellen wie $u_1^*(x)$ hat.

Bemerkung. Durch x_1 sind schon alle Nullstellen von $u_1(x)$ bestimmt. Aus der Eigenschaft (E) folgt, dass sie einfache Nullstellen sind. Sie sind Funktionen von x_1. Bezeichnen wir die ν-te nach x_1 folgende Nullstelle von $u_1(x)$ durch ψ_ν, die ν-te vor x_1 liegende durch $\psi_{-\nu}$ und x_1 als ψ_0, so ist

$$\begin{aligned} \psi_0 &= x_1 \\ \psi_i &= \psi_i(x_1) \ , \quad i = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned} \tag{16}$$

Man nennt diese Funktionen nach O. Borůvka *Dispersionen*. Sie sind implicit durch Gleichung

$$u_1^*(\varphi_i) = 0 \tag{17}$$

bestimmt.

Satz 4. *Es seien x_1 und x_2 zwei verschiedene Punkte. Dann gibt es stets eine eigentliche Lösung von* (a), *die x_1 als zweifache und x_2 als einfache Nullstelle hat. Alle Lösungen von* (a), *die x_1 als zweifache und x_2 als einfache Nullstellen haben, haben die übrigen Nullstellen gemeinsam. Je zwei derselben sind linear abhängig.*

Beweis. Es sei y_1, y_2, y_3, y_4 ein Fundamentalsystem von (a). Man sieht leicht, dass

$$u_2^*(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_1), & y_2(x_1), & y_3(x_1), & y_4(x_1) \\ y_1'(x_1), & y_2'(x_1), & y_3'(x_1), & y_4'(x_1) \\ y_1(x_2), & y_2(x_2), & y_3(x_2), & y_4(x_2) \\ y_1(x)\ , & y_2(x)\ , & y_3(x)\ , & y_4(x), \end{vmatrix} \tag{18}$$

eine Lösung von (a) ist und x_1 als zweifache und x_2 als einfache Nullstelle hat. Sie ist nicht identisch Null. Wäre sie nämlich identisch Null, so wäre auch $u_2^{*\prime}(x)$ identisch Null und

$$u^{*\prime}(x_2) = \begin{vmatrix} y_1(x_1), & y_2(x_1), & y_3(x_1), & y_4(x_1) \\ y_1'(x_1), & y_2'(x_1), & y_3'(x_1), & y_4'(x_1) \\ y_1(x_2), & y_2(x_2), & y_3(x_2), & y_4(x_2) \\ y_1'(x_2), & y_2'(x_2), & y_3'(x_2), & y_4'(x_2) \end{vmatrix} = 0, \tag{19}$$

d. h. es existierte eine eigentliche Lösung von (a), die x_1 und x_2 als zweifache Nullstellen hätte. Das widerspricht aber der vorausgesetzen Eigenschaft (E).

Es sei $u_2(x)$ eine andere Lösung von (a), die x_1 als zweifache und x_2 als einfache Nullstelle hat. Dann sind $u_2(x)$ und $u_2^*(x)$ linear abhängig. Ist das nicht wahr, so ist

$$y(x) = u_2(x) - \frac{u_2'(x_2)}{u_2^{*\prime}(x_2)}\, u_2^*(x) \tag{20}$$

eine eigentliche Lösung von (a), die, wie man sich leicht darüber überzeugen kann, x_1 und x_2 als zweifache Nullstellen hat. Das ist aber ein Widerspruch mit der Eigenschaft (E). Es ist also

$$u_2(x) = k \,.\, u_2^*(x)\ . \tag{21}$$

Bemerkung. Durch die Angaben x_1 und x_2 sind schon alle übrigen Nullstellen von $u_2^*(x)$ bestimmt. Aus der Eigenschaft (E) folgt, dass sie einfache Nullstellen sind. Sie sind Funktionen von x_1 und x_2. Bezeichnen wir die ν-te nach x_2 liegende Nullstelle von $u_2^*(x)$ durch φ_ν, die ν-te vor x_2 liegende durch $\varphi_{-\nu}$ — die Nullstelle x_1 sei fest und bei der Numerierung lassen wir sie fort — so ist

$$\varphi_0 = x_2$$
$$\varphi_i = \varphi_i(x_2), \quad i = \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Wir nennen diese Funktionen wieder Dispersionen. Sie sind durch die Gleichung

$$u_2^*(\varphi_i) = 0 \tag{23}$$

implicit bestimmt. Man kann leicht zeigen, dass sie eine Gruppe bilden.[1])

Satz 5. *Es sei* y_1, y_2, y_3, y_4 *ein Fundamentalsystem* (a), *wo* y_1, y_2, y_3 *die Lösungen von* (a) *sind, die* x_1 *nicht als dreifache Nullstelle haben (man kann es so in jedem Fundamentalsystem von* (a) *durch eine geeignete Numerierung einrichten). Dann ist*

$$z_4(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_1), & y_2(x_1), & y_3(x_1) \\ y_1'(x_1), & y_2'(x_1), & y_3'(x_1) \\ y_1(x)\ , & y_2(x)\ , & y_3(x) \end{vmatrix} \tag{24}$$

eine Lösung von (a), *die* x_1 *als zweifache Nullstelle hat. Jede andere Lösung von* (a), *die* x_1 *als zweifache Nullstelle hat, lässt sich als lineare Kombination von* $u_1^*(x)$ *und* $z_4(x)$ *schreiben.*

Beweis. Suchen wir eine Lösung $u_2(x)$ von (a), die die Bedingungen

$$u_2(x_1) = u_2'(x_1) = 0, \quad u_2''(x_1) = \beta, \quad \beta \neq 0$$

erfüllt. Wir können $u_2(x)$ in der Form

$$u_2(x) = \sum_{i=1}^{4} c_i y_i(x) \tag{26}$$

schreiben, wo c_i, $i = 1, 2, 3, 4$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{4} c_i y_i(x_1) = 0 \\ &\sum_{i=1}^{4} c_i y_i'(x_1) = 0 \\ &\sum_{i=1}^{4} c_i y_i''(x_1) = \beta, \ \beta \neq 0\ , \end{aligned} \tag{26'}$$

erfüllen. Mindestens eine von den dreireihigen Determinanten der Matrix dieses Systems ist von Null verschieden, wie es in dem Beweise des Satzes 3 gezeigt wurde. Nehmen wir an, dass es die Determinante D_{44} ist. Dann ergeben sich aus (26′)

$$c_1 = -\frac{D_{41}}{D_{44}} c_4 + \beta \frac{\Delta_{23}}{D_{44}}, \quad c_2 = \frac{D_{42}}{D_{44}} c_4 - \beta \frac{\Delta_{13}}{D_{44}}, \quad c_3 = -\frac{D_{43}}{D_{44}} c_4 + \beta \frac{\Delta_{12}}{D_{44}}, \tag{27}$$

wo

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} y_i(x_1), & y_k(x_1) \\ y_i'(x_1), & y_k'(x_1) \end{vmatrix} \tag{28}$$

[1]) Dem Studium der Dispersionen der Differentialgleichung (a_2) ist meine nächste Arbeit gewidmet.

bedeutet. Setzen wir (27) in (25) ein, so ergibt sich

$$u_2(x) = \frac{c_4}{D_{44}}(-D_{41}y_1(x) + D_{42}y_2(x) - D_{43}y_3(x) + D_{44}y_4(x)) +$$
$$+ \frac{\beta}{D_{44}}(\Delta_{23}y_1(x) - \Delta_{13}y_2(x) + \Delta_{12}y_3(x)) \tag{29}$$

oder

$$u_2(x) = \frac{c_4}{D_{44}} u_1^*(x) + \frac{\beta}{D_{44}} . z_4(x) . \tag{30}$$

Satz 6. *Es sei $u_1(x)$ eine Lösung von (a), die x_1 als dreifache Nullstelle hat und $u_2(x)$ eine Lösung von (a), die x_1 als zweifache Nullstelle hat. Dann gilt:*

a) *die Lösungen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen ausser x_1;*

b) *zwischen je zwei einfachen Nullstellen von $u_2(x)$ liegt wenigstens eine Nullstelle von $u_1(x)$;*

c) *zwischen je zwei Nullstellen von $u_1(x)$ liegt wenigstens eine Nullstelle von $u_2(x)$.*

Mit anderen Worten besagt dieser Satz: *die erste nach (vor) x_1 liegende Nullstelle von $u_2(x)$ ist zu x_1 näher als die erste nach (vor) x_1 liegende Nullstelle von $u_1(x)$. Alle übrigen Nullstellen von $u_1(x)$ und $u_2(x)$ trennen sich voneinander ab.*

Beweis. Statt für $u_1(x)$ beweisen wir den Satz für $u_1^*(x)$. Wegen (14) ist er dann auch für $u_1(x)$ bewiesen.

a) Die Behauptung unter a) folgt unmittelbar aus dem Satz 4.

b) Seien $c_1 < c_2$ zwei einfache Nullstellen von $u_2(x)$, d. h.

$$u_2(c_1) = u_2(c_2) = 0 . \tag{31}$$

Nehmen wir an, dass unser Satz nicht gilt, dass also in $\langle c_1, c_2\rangle$ keine Nullstelle von $u_1^*(x)$ liegt. Dann ist die Funktion $\dfrac{u_2(x)}{u_1^*(x)}$ in $\langle c_1, c_2\rangle$ definiert, stetig und hat dort die erste Ableitung. Bilden wir diese Ableitung. Es ist

$$\left(\frac{u_2(x)}{u_1^*(x)}\right)' = \left(\frac{c_4}{D_{44}} + \frac{\beta}{D_{44}} . \frac{z_4}{u_1^*}\right)' = \frac{\beta}{D_{44}} . \frac{z_4' u_1^* - z_4 u_1^{*\prime}}{u_1^{*2}} \tag{32}$$

Entwickeln wir die Determinante (15) nach der dritten Zeile. So ist

$$u_1^*(x) = y_1''(x_1) . z_1(x) - y_2''(x_1) z_2(x) + y_3''(x_1) z_3(x) - y_4''(x_1) . z_4(x) , \tag{33}$$

wo die Bedeutung von $z_i(x)$ klar ist. Dann ist

$$z_4' u_1^* - z_4 u_1^{*\prime} = y_1''(x_1)[z_4' z_1 - z_4 z_1'] - y_2''(x_1)[z_4' z_2 - z_4 z_2'] +$$
$$+ y_3''(x_1)[z_4' z_3 - z_4 z_3'] . \tag{34}$$

Die Ausdrücke in Klammern lassen sich aber folgendermassen schreiben:

$$z_4'z_1 - z_4z_1' = \Delta_{12}\Delta_{34}A_{23} - \Delta_{12}\Delta_{23}A_{34} - \Delta_{13}\Delta_{24}A_{23} + \Delta_{13}\Delta_{23}A_{24} - \Delta_{23}\Delta_{34}A_{12} + \\ + \Delta_{23}\Delta_{24}A_{13} - \Delta_{23}\Delta_{23}A_{14} \ ,$$

$$z_4'z_2 - z_4z_2' = - \Delta_{34}\Delta_{13}A_{12} + \Delta_{34}\Delta_{12}A_{13} + \Delta_{14}\Delta_{23}A_{13} - \Delta_{14}\Delta_{13}A_{23} - \\ - \Delta_{13}\Delta_{23}A_{14} + \Delta_{13}\Delta_{13}A_{24} - \Delta_{13}\Delta_{12}A_{34} \ ,$$

$$z_4'z_3 - z_4z_3' = - \Delta_{24}\Delta_{13}A_{12} + \Delta_{24}\Delta_{12}A_{13} + \Delta_{14}\Delta_{23}A_{12} - \Delta_{14}\Delta_{12}A_{23} - \\ - \Delta_{12}\Delta_{23}A_{14} + \Delta_{12}\Delta_{13}A_{24} - \Delta_{12}\Delta_{12}A_{34} \ ,$$

wo

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} y_i(x), & y_k(x) \\ y_i'(x), & y_k'(x) \end{vmatrix}$$

ist. Setzen wir diese Ausdrücke in (34) ein, so ergibt sich nach kurzem Rechnen

$$z_4'u_1^* - z_4u_1^{*\prime} = - D_{44}(A_{12}\Delta_{34} + A_{23}\Delta_{14} - A_{13}\Delta_{24} + A_{14}\Delta_{23} - A_{24}\Delta_{13} + \\ + A_{34}\Delta_{12}) \ ,$$

oder

$$z_4'u_1^* - z_4u_1^{*\prime} = - D_{44} \, . \, A(x) \ , \tag{35}$$

wo $A(x)$ den Ausdruck in Klammern bedeutet, welcher sich in Form der Determinante

$$A(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_1), & y_2(x_1), & y_3(x_1), & y_4(x_1) \\ y_1'(x_1), & y_2'(x_1), & y_3'(x_1), & y_4'(x_1) \\ y_1(x)\ , & y_2(x)\ , & y_3(x)\ , & y_4(x) \\ y_1'(x)\ , & y_2'(x)\ , & y_3'(x)\ , & y_4'(x) \end{vmatrix} \tag{36}$$

schreiben lässt. Setzen wir jetzt (35) in (32) ein, so ist

$$\left(\frac{u_2(x)}{u_1^*(x)}\right)' = -\beta \frac{A(x)}{u_1^{*2}(x)} \, . \tag{37}$$

Die Funktion $A(x)$ hat, wie aus (36) ohne weiteres ersichtlich ist, folgende Eigenschaften: sie ist stetig, x_1 ist ihre vierfache Nullstelle und ausser x_1 hat sie keine andere Nullstelle. Sie hat ein konstantes Vorzeichen. Wäre nämlich zum Beispiel x_0 eine andere Nullstelle von $A(x)$, so existierte, wie es aus der Form (36) ersichtlich ist, eine eigentliche Lösung von (a), die x_1 und x_0, als zweifache Nullstelle hätte, was aber der Eigenschaft (E) widerspricht.

Integrieren wir jetzt (37) zwischen c_1 und c_2, so ist

$$\frac{u_2(c_2)}{u_1^*(c_2)} - \frac{u_2(c_1)}{u_1^*(c_1)} = -\beta \int_{c_1}^{c_2} \frac{A(x)}{u_1^{*2}(x)} \, \mathrm{d}x \ . \tag{38}$$

Nach (31) ist die linke Seite von (38) Null. Die rechte Seite ist aber von Null verschieden, weil die Funktion unter dem Integralzeichen ein konstantes Vorzeichen hat. Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung.

c) Den Beweis des letzten Teiles des Satzes erbringen wir in zwei Schritten.

1. Es seien $d_1 < d_2$ $(d_1 \neq x_1,\ d_2 \neq x_1)$ zwei Nullstellen von $u_1^*(x)$, d. h.

$$u_1^*(d_1) = u_1^*(d_2) = 0 \ . \tag{39}$$

Nehmen wir an, dass unser Satz nicht gilt, d. h. es liege zwischen d_1 und d_2 keine Nullstelle von $u_2(x)$. Dann ist die Funktion $\dfrac{u_1^*(x)}{u_2(x)}$ in $\langle d_1, d_2 \rangle$ definiert, stetig und hat dort die Ableitung

$$\left(\frac{u_1^*(x)}{u_2(x)}\right)' = -\frac{u_2' u_1^* - u_2 u_1^{*\prime}}{u_2^2} = -\frac{\beta}{D_{44}} \cdot \frac{z_4' u_1^* - z_4 u_1^{*\prime}}{u_2^2} , \tag{40}$$

oder nach (35)

$$\left(\frac{u_1^*(x)}{u_2(x)}\right)' = \beta \frac{A(x)}{u_2^2(x)} . \tag{41}$$

Durch Integration zwischen d_1 und d_2 ergibt sich

$$\frac{u_1^*(d_2)}{u_2(d_2)} - \frac{u_1^*(d_1)}{u_2(d_1)} = \beta \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{A(x)}{u_2^2(x)} \,\mathrm{d}x \ . \tag{42}$$

Die linke Seite ist wegen (39) Null, die rechte Seite aus denselben Gründen wie zuvor von Null verschieden. Also abermals ein Widerspruch, der die Behauptung beweist.

2. Sei jetzt zum Beispiel $d_1 = x_1 < d_2$. Durch Integration (41) zwischen d_1 und d_2 ergibt sich

$$\frac{u_1^*(d_2)}{u_2(d_2)} - \lim_{x \to x_1 + 0} \frac{u_1^*(x)}{u_2(x)} = \beta \lim_{x \to x_1 + 0} \int\limits_{x}^{d_2} \frac{A(x)}{u_2^2(x)} \,\mathrm{d}x \ . \tag{43}$$

Infolge der gemachten Voraussetzungen ist

$$\frac{u_1^*(d_2)}{u_2(d_2)} = 0, \qquad \lim_{x \to x_1 + 0} \frac{u_1^*(x)}{u_2(x)} = \lim_{x \to x_1 + 0} \frac{u_1^{*\prime\prime}(x)}{u_2''(x)} = 0$$

Die linke Seite von (43) ist also Null. Auf der rechten Seite steht ein uneigentliches Integral $\displaystyle\int\limits_{x_1}^{d_1} \frac{A(x)}{u_2^2(x)} \,\mathrm{d}x$. Wir beweisen, dass es existiert und von Null verschieden ist. Die Funktion $\dfrac{A(x)}{u_2^2(x)}$ ist in (d_1, d_2) stetig und hat dort ein konstantes Vorzeichen und in $x_1 = d_1$ hat sie einen endlichen Grenzwert. Es ist nämlich

$$A(x_1) = A'(x_1) = A''(x_1) = A'''(x_1) = 0,$$
$$A''''(x_1) = 2W(x_1) \neq 0 \ ,$$

wo $W(x_1)$ die Wronskische Determinante bedeutet, und

$$u_2^2(x_1) = [u_2^2(x_1)]' = [u_2^2(x_1)]'' = (u_2^2(x_1)]''' = 0 \ ,$$
$$[u_2^2(x_1)]'''' = 6u_2''^2(x_1) = 6\beta \neq 0$$

so, dass

$$\lim_{x\to x_1+0} \frac{A(x)}{u_2^2(x)} = \lim_{x\to x_1+0} \frac{A''''(x)}{(u_2^2(x))''''} = \frac{2W(x_1)}{6\beta} .$$

Die Gleichung (43) gibt also wieder einen Widerspruch. Im Falle $d_1 < d_2 = x_1$ beweisen wir auf demselben Wege unsere Behauptung.

Zum Schluss beweisen wir noch, dass zwischen x_1 und der ersten nach (vor) x_1 liegenden Nullstelle von $u_2(x)$ — wir bezeichnen sie mit ξ_1 — keine Nullstelle von $u_1^*(x)$ liegt. Nehmen wir an, dass dies falsch sei. Es liege zwischen x_1 und ξ_1 eine Nullstelle ψ von $u_1^*(x)$. Dann liegt nach c) zwischen x_1 und ψ eine Nullstelle von $u_2(x)$, also ξ_1 ist nicht die erste nach (vor) x_1 liegende Nullstelle von $u_2(x)$. Das widerspricht aber der Voraussetzung.

Satz 7. *Es seien $u_2(x)$ und $\bar{u}_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen von (a), die x_1 als zweifache Nullstelle haben. Dann liegt zwischen je zwei einfachen Nullstellen einer Lösung eine Nullstelle der anderen.*

Beweis. Nach (30) können wir schreiben

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \frac{c_4}{D_{44}} \cdot u_1^*(x) + \frac{\beta}{D_{44}} \cdot z_4(x) \\ \bar{u}_2(x) &= \frac{\bar{c}_4}{D_{44}} \cdot u_1^*(x) + \frac{\bar{\beta}}{D_{44}} \cdot z_4(x) \; . \end{aligned} \tag{44}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit ist

$$c_4\bar{\beta} - \bar{c}_4\beta \neq 0 \tag{45}$$

und beide Lösungen haben nur x_1 als gemeinsame Nullstelle. Seien jetzt $\xi_1 < \xi_2$ zwei einfache Nullstellen von $u_2(x)$, d. h.

$$u_2(\xi_1) = u_2(\xi_2) = 0 \; . \tag{46}$$

Nehmen wir an, dass der ausgesprochene Satz nicht gilt. Dann ist die Funktion $\dfrac{u_2(x)}{\bar{u}_2(x)}$ in $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ definiert, stetig und hat die Ableitung

$$\left(\frac{u_2(x)}{\bar{u}_2(x)}\right)' = -\frac{c_4\bar{\beta} - \bar{c}_4\beta}{D_{44}^2} \cdot \frac{z_4' u_1^* - z_4 u_1^{*\prime}}{\bar{u}_2^2} \tag{47}$$

Berücksichtigen wir (35), so ist

$$\left(\frac{u_2(x)}{\bar{u}_2(x)}\right)' = \frac{c_4\bar{\beta} - \bar{c}_4\beta}{D_{44}} \cdot \frac{A(x)}{\bar{u}_2^2(x)} . \tag{48}$$

Durch Integration zwischen ξ_1 und ξ_2 ergibt sich die Gleichung

$$\frac{u_2(\xi_2)}{\bar{u}_2(\xi_2)} - \frac{u_2(\xi_1)}{\bar{u}_2(\xi_1)} = \frac{c_4\bar{\beta} - \bar{c}_4\beta}{D_{44}} \cdot \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{A(x)}{\bar{u}_2^2(x)} \mathrm{d}x \; , \tag{49}$$

die uns einen Widerspruch gibt. Es liegt also zwischen je zwei einfachen

Nullstellen von $u_2(x)$ mindestens eine Nullstelle von $\bar{u}_2(x)$. Auf analoge Weise lässt sich beweisen, dass auch zwischen je zwei einfachen Nullstellen von $\bar{u}_2(x)$ mindestens eine Nullstelle von $u_2(x)$ liegt. Beide Teile zusammen ergeben unseren Satz.

§ 4.

Jetzt werden wir uns mit der Differentialgleichung (a_2) beschäftigen. Wir nehmen an, dass sie sämtlich oscillatorische Lösungen hat. Für diese, wie man gleich sieht, gelten die Sätze aus § 3. Wir beweisen für sie noch einige weitere Sätze, die die Folgerung des Satzes 2' sind.

Satz 8. *Es seien $u_1(x)$ und $\bar{u}_1(x)$ zwei Lösungen von (a_2) folgender Eigenschaften: x_1 ist eine dreifache und x_2 eine einfache Nullstelle von $u_1(x)$ und x_2 ist eine dreifache Nullstelle von $\bar{u}_1(x)$ .Dann ist auch x_1 eine einfache Nullstelle von $\bar{u}_1(x)$.*

Beweis. Es sei y_1, y_2, y_2, y_4 ein Fundamentalsystem von (a_2). Man sieht leicht, dass

$$u(x) = \begin{vmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \\ y(x_2) \end{vmatrix}$$

eine Lösung von (a_2) ist, die x_2 als dreifache Nullstelle hat. Nach dem Satz 3 ist dann

$$u_1(x) = k \,.\begin{vmatrix} y(x_1) \\ y'(x_1) \\ y''(x_1) \\ y(x) \end{vmatrix} \,, \qquad \bar{u}_1(x) = k' \,.\begin{vmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \\ y(x_2) \end{vmatrix} \,.$$

Nach der Voraussetzung ist aber

$$u_1(x_2) = k \,.\begin{vmatrix} y(x_1) \\ y'(x_1) \\ y''(x_1) \\ y(x_2) \end{vmatrix} = 0 \,,$$

woraus folgt, dass auch

$$\bar{u}_1(x_1) = k' \,.\begin{vmatrix} y(x_1) \\ y'(x_1) \\ y''(x_1) \\ y(x_2) \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Satz 9. *Es seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen von* (a_2). *Dann sind auch $y_1^{(k)}(x)$ und $y_2^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, 3$, linear unabhängig.*[1])

[1]) Man überzeugt sich leicht, dass der Satz 9 für jede lineare homogene Differentialgleichung mit sämtlich oscillatorischen Lösungen gilt und zwar für jedes natürliche k und n, insofern die entsprechenden Ableitungen existieren.

Beweis. Ist zum Beispiel

$$y_1^{(k)}(x) = c \,.\, y_2^{(k)}(x), \quad 1 \leqq k \leqq 3, \quad c \neq 0 \ ,$$

wo c eine Konstante ist, so ist

$$y_1(x) - c y_2(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} \ , \quad k \leqq 3 \ .$$

Die linke Seite ist eine Lösung von (a_2), die rechte Seite aber ein Polynom. Ein Polynom kann aber nicht eine Lösung von (a_2) sein.

Satz 10. *Es sei $u_1(x)$ eine Lösung von (a_2), die x_1 als eine dreifache und $u_2(x)$ eine Lösung von (a_2), die x_1 als eine zweifache Nullstelle hat. Dann haben*

1. *$u_1'(x)$ und $u_2'(x)$ keine gemeinsame Nullstelle ausser x_1,*
2. *$u_1^{(k)}(x)$ und $u_2^{(k)}(x)$, $k = 2, 3$, keine gemeinsame Nullstelle,*

und

3. *zwischen je zwei von x_1 verschieden Nullstellen von $u_2'(x)$ liegt mindestens eine Nullstelle von $u_1'(x)$ und zwischen je zwei Nullstellen von $u_1'(x)$ liegt mindestens eine Nullstelle von $u_2'(x)$,*
4. *die Nullstellen von $u_1^{(k)}(x)$ und $u_2^{(k)}(x)$, $k = 2, 3$, trennen sich gegenseitig.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen für $u_1(x)$ und $u_2(x)$ folgt, dass x_1 eine gemeinsame Nullstelle von $u_1'(x)$ und $u_2'(x)$ ist, dass aber x_1 nicht eine gemeinsame Nullstelle von $u_1''(x)$ und $u_2''(x)$, bzw. von $u_1'''(x)$ und $u_2'''(x)$ ist. Aus dem Satze 2′ folgt weiter, dass $u_1'(x)$ eine zweifache Nullstelle und zwar x_1 hat, $u_2'(x)$, $u_1''(x)$, $u_2''(x)$, $u_1'''(x)$, $u_2'''(x)$ sämtlich einfache Nullstellen haben. Jetzt nehmen wir an, dass ξ ($\neq x_1$) eine gemeinsame Nullstelle von $u_1^{(k)}(x)$ und $u_2^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, 3$, ist d. h.

$$u_1^{(k)}(\xi) = u_2^{(k)}(\xi) = 0 \ . \tag{50}$$

Aus dem Satz 6 folgt, dass $u_1^2(\xi) + u_2^2(\xi) \neq 0$. Nehmen wir an, dass $u_2(\xi) \neq 0$. Dann hat die Funktion

$$y(x) = u_1(x) - \frac{u_1(\xi)}{u_2(\xi)} \,.\, u_2(x) \tag{51}$$

folgende Eigenschaften (man kann sich übrigens darüber leicht überzeugen): sie ist eine eigentliche Lösung von (a_2) und

$$y(x_1) = y'(x_1) = 0, \quad y(\xi) = y^{(k)}(\xi) = 0 \ , \tag{52}$$

d. h. diese Lösung erfüllt in x_1 die Bedingung E_1 und in ξ die Bedingung E_1 für $k = 1$, E_2 für $k = 2$, E_6 für $k = 3$. Das widerspricht aber dem Satze 2′.

Wir beweisen weitere Behauptungen des Satzes für $u_1^*(x)$, somit werden sie, wegen linearer Abhängigkeit von $u_1(x)$ und $u_1^*(x)$, auch für $u_1(x)$ bewiesen.

Zuerst bemerken wir noch, dass sich auf demselben Wege wie im Beweise des Satzes 6 folgende Relationen ableiten lassen:

$$\begin{aligned} z_4'' u_1^{*\prime} - z_4' u_1^{*\prime\prime} &= - D_{44} \,.\, P_1(x) \ , \\ z_4''' u_1^{*\prime\prime} - z_4'' u_1^{*\prime\prime\prime} &= - D_{44} \,.\, A_2(x) \ , \\ z_4'''' u_1^{*\prime\prime\prime} - z_4''' u_1^{*\prime\prime\prime\prime} &= - D_{44} \,.\, Q(x) \,.\, P_5(x) \ , \end{aligned} \tag{53}$$

wo

$$A_2(x) = \begin{vmatrix} y(x_1) \\ y'(x_1) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{vmatrix} .$$

Nach dem Hilfssatze 1 hat $P_1(x)$ und $P_5(x)$ nur x_1 als eine Nullstelle. Man kann sich leicht überzeugen, dass sie eine zweifache Nullstelle ist. *Also* $P_1(x)$ *und* $P_5(x)$ *bewahren ein konstantes Vorzeichen.* Aber auch *die Funktion* $A_2(x)$ *bewahrt ein konstantes Vorzeichen.* Sie hat keine Nullstelle. Ist $x = x_1$, so ist $A_2(x_1) = = 2W(x_1) \neq 0$. Wäre ξ ($\neq x_1$) eine Nullstelle von $A_2(x)$, so existierte eine eigentliche Lösung von (a_2), die in x_1 die Bedingung E_1 und in ξ die Bedingung E_3 erfüllte. Das widerspricht aber dem Satz 2'.

3. Es seien $\eta_1 < \eta_2$ zwei von x_1 verschiedene Nullstellen von $u_2'(x)$. Gibt es in $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ keine Nullstelle von $u_1^{*\prime}(x)$, so ist $\dfrac{u_2'(x)}{u_1^{*\prime}(x)}$ eine in $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ stetige Funktion und hat die erste Ableitung

$$\left(\frac{u_2'(x)}{u_1^{*\prime}(x)}\right)' = \left(\frac{\dfrac{C_4}{D_{44}} u_1^{*\prime} + \dfrac{\beta}{D_{44}} \cdot z_4'}{u_1^{*\prime}}\right)' = \frac{\beta}{D_{44}} \cdot \frac{z_4'' u_1^{*\prime} - z_4' u_1^{*\prime\prime}}{u_1^{*\prime 2}}$$

oder mit Rücksicht auf (63)

$$\left(\frac{u_2'(x)}{u_1^{*\prime}(x)}\right)' = -\beta \frac{P_1(x)}{u_1^{*\prime 2}(x)} . \tag{54}$$

Integrieren wir diese Gleichung zwischen η_1 und η_2, so ist wegen der gemachten Bedingungen die linke Seite Null, die rechte, weil die Funktion unter dem Integralzeichen ein konstantes Vorzeichen bewahrt, von Null verschieden.

Es seien jetzt $\xi_1 < \xi_2$ zwei von x_1 verschiedene Nullstellen von $u_1^{*\prime}(x)$. Liegt wieder in $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ keine Nullstelle von $u_2'(x)$, so ist $\dfrac{u_1^{*\prime}(x)}{u_2'(x)}$ eine in $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ stetige Funktion mit der ersten Ableitung

$$\left(\frac{u_1^{*\prime}(x)}{u_2'(x)}\right)' = \frac{u_1^{*\prime\prime} u_2' - u_1^{*\prime} u_2''}{u_2'^2} ,$$

oder mit Rücksicht auf (40) und (63)

$$\left(\frac{u_1^{*\prime}(x)}{u_2'(x)}\right)' = \beta \cdot \frac{P_1(x)}{u_2'^2(x)} . \tag{55}$$

Die Integration dieser Gleichung zwischen ξ_1 und ξ_2 gibt wieder einen Widerspruch.

Ist jetzt zum Beispiel $\xi_1 = x_1$, so ist nach der Integration der Gleichung (65)

$$\frac{u_1^{*\prime}(\xi_2)}{u_2'(\xi_2)} - \lim_{x\to x_1+0} \frac{u_1^{*\prime}(x)}{u_2'(x)} = \beta \lim_{x\to x_1+0} \int\limits_x^{\xi_2} \frac{P_1(x)}{u_2'^2(x)} \mathrm{d}x \,. \tag{56}$$

Es ist aber

$$\lim_{x\to x_1+0} \frac{u_1^{*\prime}(x)}{u_2'(x)} = \lim_{x\to x_1+0} \frac{u_1^{*\prime\prime}(x)}{u_2''(x)} = 0$$

und

$$\lim_{x\to x_1+0} \frac{P_1(x)}{u_2'^2(x)} = \lim_{x\to x_1+0} \frac{P_1''(x)}{2u_2''^2(x)} = \frac{W(x_1)}{\beta} \,.$$

Also die linke Seite in (56) ist Null, die rechte von Null verschieden.

Im Falle $\xi_1 < \xi_2 = x_1$ kommen wir zu demselben Resultat. Diese Widersprüche beweisen unsere Behauptung.

4. Die Behauptung unter 4. beweist sich auf dieselbe Art.

Satz 11. *Es seien $u_2(x)$ und $\bar{u}_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen von (a_2), die x_1 als zweifache Nullstelle haben. Dann haben*

1. *$u_2'(x)$ und $\bar{u}_2'(x)$ keine gemeinsame Nullstelle ausser x_1,*
2. *$u_2^{(k)}(x)$ und $\bar{u}_2^{(k)}(x)$, $k = 2, 3$, keine gemeinsame Nullstelle, und*
3. *zwischen je zwei von x_1 verschiedenen Nullstellen von $u_2'(x)$ liegt eine Nullstelle von $\bar{u}_2'(x)$ und umgekehrt,*
4. *die Nullstellen von $u_2^{(k)}(x)$ und $\bar{u}_2^{(k)}(x)$, $k = 2, 3$, trennen sich gegenseitig.*

Beweis. 1,2. Nach dem Satze 2′ haben $u_2^{(k)}(x)$ und $\bar{u}_2^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, 3$, nur einfache Nullstellen. Nach den Voraussetzungen über $u_2(x)$ und $\bar{u}_2(x)$ ist x_1 eine gemeinsame Nullstelle von $u_2'(x)$ und $\bar{u}_2'(x)$, aber nicht von $u_2^{(k)}(x)$ und $\bar{u}_2^{(k)}(x)$, $k = 2, 3$. Es sei $\xi (\neq x_1)$ eine gemeinsame Nullstelle von $u_2^{(k)}(x)$ und $\bar{u}_2^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, 3$, d. h.

$$u_2^{(k)}(\xi) = \bar{u}_2^{(k)}(\xi) = 0 \,.$$

Wegen linearer Unabhängigkeit von $u_2(x)$ und $\bar{u}_2(x)$ ist $u_2^2(\xi) + \bar{u}_2^2(\xi) \neq 0$. Nehmen wir an, dass $\bar{u}_2(\xi) \neq 0$. Bilden wir die Funktion

$$y(x) = u_2(x) - \frac{u_2(\xi)}{\bar{u}_2(\xi)} \cdot \bar{u}_2(x) \,.$$

Sie hat folgende Eigenschaften — wie man sich leicht überzeugen kann: Sie ist eine eigentliche Lösung von (a_2) und erfüllt die Bedingungen

$$y(x_1) = y'(x_1) = 0, \qquad y(\xi) = y^{(k)}(\xi) = 0 \,;$$

d. h. sie erfüllt in x_1 die Bedingung E_1 und in ξ die Bedingung E_1 für $k = 1$, E_2 für $k = 2$, E_6 für $k = 3$. Das widerspricht aber dem Satze 2′.

Die Behauptungen unter 3. und 4. beweisen sich auf dieselbe Art wie die Behauptungen unter 3. und 4. im Satze 10.

Резюме.

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ СВОЙСТВАХ (ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ) РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

МАРКО ШВЕЦ (Marko Švec), Братислава.
(Поступило в редакцию 27/IV 1953 г.)

В работе исследуются свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения четвертого порядка. Прежде всего в теоремах 1, 2 и 2′ указываются определенные свойства специальных диффернциальных уравнений (соотв. системы дифф. уравнений).

Теорема 1. *Пусть в дифференциальной системе*

$$\begin{aligned} y'' &= p(x)\,.\,z\,,\\ z'' &= q(x)\,.\,y \end{aligned} \tag{1}$$

функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на интервале (a, b) и пусть для всех $x \in (a, b)$ будет $p(x) > 0$ и $q(x) < 0$. Тогда каждое нетривиальное решение системы (1) *выполняет не более чем в одной точке $\xi \in (a, b)$ одно из следующих условий:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{B}_1\colon\ y(\xi) = y'(\xi) = 0\,,\\ &\mathrm{B}_2\colon\ y(\xi) = z(\xi) = 0\,,\\ &\mathrm{B}_3\colon\ z(\xi) = z'(\xi) = 0\,,\\ &\mathrm{B}_4\colon\ y'(\xi) = z'(\xi) = 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 2. *Путь в дифференциальном уравнении*

$$y'''' + p_1 y''' + p_2 y'' + p_4 y = 0 \tag{a$_1$}$$

на интервале (a, b) будут 1° $p_1'(x)$, $p_4(x)$ непрерывными функциями, 2° $p_2 = \frac{1}{4}p_1^2 + \frac{1}{2}p_1'$, 3° $p_4(x) > 0$. Тогда каждо нетривиальное решение уравнения (a$_1$) *выполняет не более чем в одной точке $\xi \in (a, b)$ одно из следующих условий:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_1\colon\ y(\xi) = y'(\xi) = 0\,,\\ &\mathrm{E}_2\colon\ y(\xi) = y''(\xi) = 0\,,\\ &\mathrm{E}_3\colon\ y''(\xi) = y'''(\xi) = 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 2′. *Пусть в дифференциальном уравнении*

$$y'''' + Q(x)\,.\,y = 0 \tag{a}$$

функция $Q(x) > 0$ непрерывна на интервале (a, b). Тогда каждое его нетривиальное решение выполняет не более чем в одной точке $\xi \in (a, b)$ одно из следующих условий:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}_1\colon \quad y(\xi) = y'(\xi) = 0\,,\\
&\mathrm{E}_2\colon \quad y(\xi) = y''(\xi) = 0\,,\\
&\mathrm{E}_3\colon \quad y''(\xi) = y'''(\xi) = 0\,,\\
&\mathrm{E}_4\colon \quad y'(\xi) = y'''(\xi) = 0\,,\\
&\mathrm{E}_5\colon \quad y'(\xi) = y''(\xi) = 0\,,\\
&\mathrm{E}_6\colon \quad y(\xi) = y'''(\xi) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Приведенные дифференциальные уравнения обладают следующим свойством:

(E) *Каждое нетривиальное решение имеет не более одной двойной или тройной нулевой точки.*

В дальнейшем разбирается линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка, о котором предполагается, что оно имеет свойство (E) и что все его решения являются осцилляционными. Обозначим это уравнение знаком (a). Условие осцилляционности решения можно заменить существованием нулевых точек решения, о котором идет речь. При указанных предположениях были доказаны теоремы:

Теорема 3. *Для нетривиальных решений дифференциального уравнения (a), для которых x_1 является тройной нулевой точкой, все остальные нулевые точки будут общими. Эти решения будут попарно линейно зависимыми.*

Теорема 4. *Пусть x_1 и x_2 — два различные точки. В таком случае можно всегда найти нетривиальные решения уравнения (a), для которых x_1 будет двойной, а x_2 простой нулевой точкой. Для всех решений, имеющих в x_1 двойную и в x_2 простую нулевую точку, все остальные нулевые точки будут общими. Эти решения будут попарно линейно зависимыми.*

Теорема 5. *Пусть y_1, y_2, y_3, y_4 — фундаментальная система уравнения* (a) *и пусть y_1, y_2, y_3 — также решения уравнения* (a), *для которых x_1 не является тройной нулевой точкой (в каждой фундаментальной системе уравнения* (a) *этого можно достигнуть при помощи подходящей нумерации элементов). Тогда*

$$
z_4(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_1), & y_2(x_1), & y_3(x_1) \\ y_1'(x_1), & y_2'(x)_1, & y_3'(x_1) \\ y_1(x), & y_2(x), & y_3(x) \end{vmatrix}
$$

будет решением уравнения (a) *с точкой x_1 в качестве двойной нулевой точки. Каждое решение дифф. уравнения* (a), *для которого x_1 является двойной нулевой точкой, можно записать в виде линейной комбинации $z_4(x)$ и $u_1^*(x)$, где $u_1^*(x)$ есть решение уравнения* (a), *для которого x_1 является тройной нулевой точкой.*

Теорема 6. *Пусть $u_1(x)$ — решение уравнения* (a) *с точкой x_1 в качестве тройной нулевой точки, а $u_2(x)$ — решение с точкой x_1 в качестве двойной нулвеой точки. Тогда имеет место:*

а) решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ **не** *имеют, кроме x_1, ни одной общей нулевой точки,*

б) между любими двумя простыми нулевыми точками решения $u_2(x)$ лежит хоть одна нулевая точка решения $u_1(x)$,

в) между любиым двумя нулевыми точками решения $u_1(x)$ лежит хоть одна нулевая точка решения $u_2(x)$.

Теорема 7. *Пусть $u_2(x)$ и $\overline{u}_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения* (a) *с точкой x_1 в качестве двойной нулевой точки. Тогда между каждыми двумя простыми нулевыми точками одного решения лежит одна нулевая точка другого решения.*

Для дифференциального уравнения (a_2) далее доказаны следующие теоремы:

Теорема 8. *Пусть $u_1(x)$ и $\overline{u}_1(x)$ — два нетривиальбых решения уравнения* (a_2) *со следующими свойствами: x_1 является тройной,* а *x_2 — простой нулевой точкой решения $u_1(x)$; далее, x_2 является тройной нулевой точкой решения $\overline{u}_1(x)$. Тогда и x_1 является простой нулевой точкой решения $\overline{u}_1(x)$.*

Теорема 9. *Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения* (a_2). *Тогда и $y_1^{(k)}(x)$ и $y_2^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, 3$, также линейно независимы.*

Теорема 10. *Пусть $u_1(x)$ — решение уравнения* (a_2) *с тройной нулевой точкой x_1, а $u_2(x)$ — решение, для которого x_1 является двойной нулевой точкой. Тогда* 1. *$u_1'(x)$ и $u_2'(x)$ имеют только одну овщую нулевую точку x_1,*

2. *$u_1^{(k)}(x)$ и $u_2^{(k)}(x)$, $k = 2, 3$, не имеют общих нулевых точек,*

3. *между каждыми двумя отличными от x_1 нулевыми точками $u_2'(x)$ лежит хоть одна нулевая точка $u_1'(x)$, и между каждыми двумя нулевыми точками $u_1'(x)$ лежит хоть одна нулевая точка $u_2'(x)$,*

4. *нулевые точки $u_1^{(k)}(x)$ и $u_2^{(k)}(x)$, $k = 2, 3$, отделяют друг друга.*

Теорема 11. *Пусть $u_2(x)$ и $\overline{u}_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения* (a_2), *для которых x_1 является двойной нулевой точкой. Тогда*

1. *$u_2'(x)$ и $\overline{u}_2'(x)$ имеют только одну общую нулевую точку x_1,*

2. *$u_2^{(k)}(x)$ и $\overline{u}_2^{(k)}(x)$, $k = 2, 3$, не имеют общих нулевых точек,*

3. *между каждыми двумя отличными от x_1 нулевыми точками $u_2'(x)$ лежит одна нулевая точка $\overline{u}_2'(x)$ и наоборот,*

4. *нулевые точки $u_2^{(k)}(x)$ и $\overline{u}_2^{(k)}(x)$, $k = 2, 3$, отделяют друг друга.*

Подобные приведенным здесь свойства можно доказать указанными в работе способами и для линейных однородных дифференциальных уравнений порядка выше четвертого при соответствующих условиях. В частности для дифф. уравнения $y^{(n)} + Q(x) \,.\, y = 0$, $Q(x) \lesseqgtr 0$ можно доказать подобные же свойства, как и для уравнения (a_2)м Так напр. можно доказать свойство, подобное свойству (E):

Каждое нетривиальное его решение имеет не больше одной $\frac{1}{2}n$ кратной (или высшей кратности) нулевой точки, в том случае, если $n = 4k$ и $Q(x) > 0$, или если $n = 4k + 2$, $Q(x) < 0$, и $[\frac{1}{2}n] + 1$ кратной (или высшей кратности) нулевой точки в том случае, если n нечетное $Q(x) > 0$.