Štefan Schwarz

Характеры бикомпактных полугрупп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 1, 24–28

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100129`

ХАРАКТЕРЫ БИКОМПАКТНЫХ ПОЛУГРУПП

ШТЕФАН ШВАРЦ (Štefan Schwarz), Братислава,

(Поступило в редакцию 23/VIII 1954 г.)

Целью этой работы является исследование характеров бикомпактных полугрупп. Характером подразумываем при этом (в отличие от работы [1]) непрерывную комплексную функцию $\chi(x)$, по абсолютной величине равну единице, которая удовлетворяет уравнению $\chi(ab) = \chi(a) \cdot \chi(b)$ для всех $a, b \in S$.

В работе [1] я обобщил классическую теорию характеров конечных абелевых групп на случай конечных абелевых полугрупп. Характером полугруппы $S = \{a, b, c, \ldots\}$ мы при этом назвали комплексную функцию $\chi(x)$, определенниую на S, которая для каждой пары $a, b \in S$ удовлетворяет условию $\chi(ab) = \chi(a) \cdot \chi(b)$. Из этого условия следует, что функциональными значениями каждого характера будет или число 0, или некоторый корень из единицы.

То обстоятельство, что характер может принимать и значение 0, несколько видоизменило всю теорию по сравнению с теорией характеров конечных абелевых групп.

В работе [2] я рассматривал структуру хаусдорфовых бикомпактных полугрупп. Результаты этой работы позволяют произвести разработку теории характеров бикомпактных полугрупп сравнительно простым способом, т. е. свести ее к изучению характеров определенной замкнутой подгруппы из S. В отличие от конечного случая, рассматриваемого в работе [1], несбходимо сделать некоторые ограничения, а именно: определить характер точно так же, как и в теории групп, т. е., как функцию, принимающую только те значения, абсолютная величина которых равна единице.

Мне до сих пор не удалось выяснить в достаточно общей форме, как бы выглядела такая теория характеров (или, лучше сказать, мультипликативных функционалов) бесконечных коммутативных бикомпактных полугрупп, которая включала бы в качестве частного случая результаты работы [1].

Определение. *Пусть $S = \{a, b, c, \ldots\}$ — хаусдорфова бикомпактная абелева полугруппа. Характером полугруппы S мы будем называть каждый* *непрерывный гомоморфизм полугруппы S на группу комплексных чисел, абсолютная величина которых равна единице.*

Вместо гомоморфизмов мы будем в дальнейшем говорить просто о комплексных функциях, определенных на S.

Множество характеров полугруппы S обозначим символом S^*. Если $\chi_i(x)$, $\chi_k(x)$ — два характера $\in S^*$, то мы определяем их произведение обычным способом: $\chi_i\chi_k(x) = \chi_i(x)\,\chi_k(x)$. Единичным характером мы называем функцию $\chi_1(x) = 1$ для каждого $x \in S$. Если χ — характер, то и $\bar{\chi}$ есть характер, причем $\chi\bar{\chi} = \chi_1$. При таком определении умножения характеры образуют группу, единичным элементом которой будет χ_1. Нашей целью будет исследовать строение группы S^*.

В работе [2] мы доказали: каждую хаусдорфову бикомпактную коммутативную полугруппу S можно записать в виде суммы дизъюнктных максимальных полугрупп: $S = \sum\limits_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha$, где α пробегает некоторое множество индексов Λ. Каждое из слагаемых P_α содержит только один идемпотент e_α и является наибольшей частичной полугруппой из S, содержащей только один идемпотент e_α. Каждое P_α содержит, далее, одну единственную замкнутую максимальную группу $G_\alpha \subseteqq P_\alpha$, которая характеризуется тем, что она является наибольшей частичной группой из S, содержащей e_α.

Пусть $E = \{e_\nu / \nu \in \Lambda\}$ — множество всех идемпотентов $\in S$. Определим в E частичное упорядочение так, что положим $e_\alpha \leqq e_\beta$, если $e_\alpha e_\beta = e_\alpha$. Упорядоченное таким образом множество идемпотентов образует полуструктуру, т. е. частично упорядоченное множество, в котором для каждых двух элементов $e_\alpha, e_\beta \in E$ существует структурно-теоретическое пересечение, а именно: $e_\alpha \wedge e_\beta = e_\alpha e_\beta \in E$.

Теорема 1. *Идемпотенты хаусдорфовой бикомпактной коммутативной полугруппы образуют полуструктуру, имеющую наименьший элемент.*

Доказательство. Пусть $E = \{e_\nu / \nu \in \Lambda\}$ — множество всех идемпотентов $\in S$. Каждое из множеств Se_ν является идеалом из S. Каждый идеал Se_ν будет бикомпактным множеством, являясь непрерывным отображением S. Так как наше пространство хаусдорфово и Se_ν бикомпактно, то Se_ν будет замкнутым в S.

Рассмотрим пересечение всех таких идеалов

$$\mathfrak{n} = \bigcap_{\nu \in \Lambda} Se_\nu\,. \tag{1}$$

Пусть $Se_\alpha, Se_\beta, \ldots, Se_\mu$ конечное количество сомножителей пересечения (1).

Тогда, очевидно, будет,

$$e_\alpha e_\beta \ldots e_\mu \in Se_\alpha \,.\, Se_\beta \ldots Se_\mu \subseteqq Se_\alpha \cap Se_\beta \cap \ldots \cap Se_\mu\,.$$

Следовательно, пересечение конечного числа произвольных сомножителей из (1) непусто. Так как в пересечении (1) фигурируют только замкнутые множества, то $\mathfrak{n} \neq \emptyset$. Множество $\mathfrak{n}$ является кроме того замкнутой и, следовательно, бикомпактной частичной полугруппой полугруппы S. Одновременно $\mathfrak{n}$ является идеалом в S.

Докажем, что $\mathfrak{n}$ является минимальным идеалом в S. Известно, что полугруппа не может иметь более одного минимального идеала. Пусть $a \in \mathfrak{n}$. Тогда имеем $Sa \subseteqq \mathfrak{n}$. Полугруппа (идеал) Sa замкнута и бикомпактна. Следовательно, она имеет хоть один идемпотент e. Так как e входит в идеал Sa, то $Se \subseteqq Sa \subseteqq \mathfrak{n}$. С другой стороны $\mathfrak{n} = \bigcap_{\nu \in \Lambda} Se_\nu \subseteqq Se$. Из соотношения $Se \subseteqq Sa \subseteqq \mathfrak{n} \subseteqq Se$ следует, что $Sa = Se = \mathfrak{n}$. Соотношение $Sa = \mathfrak{n}$, имеющее место для любого $a \in \mathfrak{n}$, показывает, что $\mathfrak{n}$ не содержит ни одного подидеала полугруппы S, отличного от $\mathfrak{n}$. Следовательно, $\mathfrak{n}$ будет минимальным идеалом из S.

Из только что выведенных соотношений вытекает, что $\mathfrak{n}S = \mathfrak{n}$.

Далее, для каждого $a \in \mathfrak{n}$, $a\mathfrak{n}$ будет идеалом из S. Для любого $a \in \mathfrak{n}$ будет, следовательно, $a\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$. Это уравнение показывает, что для любых $a, b \in \mathfrak{n}$ уравнение $ax = b$ имеет решение $x \in \mathfrak{n}$. Следовательно, $\mathfrak{n}$ является группой.

Пусть e^* — единственный существующий идемпотент из $\mathfrak{n}$. Мы утверждаем, что e^* есть наименьший идемпотент полуструктуры идемпотентов E, т. е. для каждого $e' \in E$ будет $e'e^* = e^*$. Пусть e' — произвольный идемпотент $\in S$. Множество $\mathfrak{n}e'$ есть идеал из S, следовательно, $\mathfrak{n} \subseteqq \mathfrak{n}e' \subseteqq \mathfrak{n}S = \mathfrak{n}$, т. е. $\mathfrak{n}e' = \mathfrak{n}$. Множество $\mathfrak{n}e'$ содержит идемпотент e^*e'. Но так как $\mathfrak{n}$ имеет один единственный идемпотент e^*, то неизбежно $e^*e' = e^*$. Этим теорема 1 полностью доказана.

Лемма 1. *Пусть e^* — наименьший идемпотент полугруппы S. Пусть G — максимальная группа, принадлежащая к e^*. Тогда $G = \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ — минимальный идеал полугруппы S.*

Доказательство. Так как $e^* \in \mathfrak{n}$, а $\mathfrak{n}$ есть группа, то, очевидно, $\mathfrak{n} \subseteqq G$. Если идемпотент e^* принадлежит к какому-либо идеалу, то к нему принадлежит и вся группа G, так как $S \,.\, e^* = \{G + \ldots\} \,.\, e^* \supseteqq G$. Так как множество $\mathfrak{n}$ есть идеал, то $G \subseteqq \mathfrak{n}$. Поэтому $G = \mathfrak{n}$.

Лемма 2. *Пусть e^* и $\mathfrak{n}$ имеют то же значение, как и в лемме 1. Тогда для каждого $a \in S$ будет $ae^* \in \mathfrak{n}$.*

Доказательство. Вытекает из соотношения $a \,.\, e^* \in S \,.\, \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$.

Пусть χ — произвольный характер полугруппы S. Для каждого идемпотента $e_\alpha \in S$ имеет место $\chi(e_\alpha^2) = \chi(e_\alpha)$, т. е. $\chi(e_\alpha)[\chi(e_\alpha) - 1] = 0$, $\chi(e_\alpha) = 1$.

Теперь докажем теорему, которая сводит изучение характеров полугруппы S к изучению характеров замкнутой подгруппы $\mathfrak{n}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{n}$ — *минимальный идеал хаусдорфовой бикомпактной коммутативной полугруппы* S. *Тогда множество* S^* *характеров полугруппы* S *изоморфно группе характеров группы* $\mathfrak{n}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{n} = \{u_\nu / \nu \in T\}$ — минимальный идеал из S. Обозначим символом A_ν множество всех элементов $x \in S$, для которых $x \,.\, e^* = u_\nu$. Множество A_ν непусто, так как к нему принадлежит по крайней мере элемент u_ν. Следовательно, по лемме 2, S разложится в сумму дизъюнктных слагаемых $S = \sum_{\nu \in T} A_\nu$.

Пусть χ — какой-либо характер полугруппы S. Тогда для каждого $a_\nu \in A_\nu$

$$a_\nu e^* = u_\nu ,$$

$$\chi(a_\nu) \,.\, \chi(e^*) = \chi(u_\nu) ,$$

т. е.

$$\chi(a_\nu) = \chi(u_\nu) .$$

Каждый характер $\chi \in S^*$ принимает, следовательно, на всем множестве A_ν одно и то же значение, а именно значение $\chi(u_\nu)$.

Каждый характер $\chi \in S^*$ индуцирует на группе $\mathfrak{n}$ какой-то характер $\psi(x)$ группы $\mathfrak{n}$. По только что доказанному два характера $\in S^*$, которые принимают одинаковые значения на $\mathfrak{n}$, принимают одинаковые значения на всем S, т. е. они тождественны. Следовательно, два различных характера $\chi_1, \chi_2 \in S^*$ индуцируют на $\mathfrak{n}$ два различных характера ψ_1, ψ_2. Произведение $\chi_1 \cdot \chi_2$ индуцирует на группе $\mathfrak{n}$, очевидно, произведение характеров $\psi_1 \,.\, \psi_2$ группы $\mathfrak{n}$.

Пусть, наоборот, ψ — некоторый характер группы $\mathfrak{n}$. Определим комплексную функцию $\chi(a)$ на S следующим образом:

для $a \in S$ пусть будет

$$\chi(a) = \psi(ae^*) . \tag{2}$$

Функция $\chi(x)$ имеет следующее свойство: для $a, b \in S$ имеет место

$$\chi(a) \,.\, \chi(b) = \psi(ae^*) \,.\, \psi(be^*) = \psi(abe^*) = \chi(ab) .$$

Для того, чтобы доказать, что χ является характером, необходимо еще доказать, что построенная таким образом функция χ непрерывна на S. Зададимся некоторым $\varepsilon > 0$; следует показать, что для данного $a \in S$ существует окрестность $U(a)$ такая, что для каждого $b \in U(a)$ $|\chi(a) - \chi(b)| < \varepsilon$. Так как ψ (как характер группы $\mathfrak{n}$) является на $\mathfrak{n}$ непрерывной функцией, то для данного $\varepsilon > 0$ существует такое $U(ae^*)$, что для каждого $v \in U(ae^*) \cap \mathfrak{n}$ будет $|\psi(ae^*) - \psi(v)| < \varepsilon$. Так как операция умножения на S непрерывна, то существует окрестность $U(a)$ такая, что $U(a) \,.\, e^* \subseteqq U(ae^*)$. Это $U(a)$ имеет искомое свойство. Ибо, если $b \in U(a)$, то $be^* \in U(a)\, e^* \subseteqq U(ae^*)$; одновременно $be^* \in \mathfrak{n}$, т. е. $be^* \in U(ae^*) \cap \mathfrak{n}$. Следовательно, $|\chi(a) - \chi(b)| =$

$= |\psi(ae^*) - \psi(be^*)| < \varepsilon$. Функция χ, определяемая соотношением (2), является, следовательно, характером полугруппы S.

Для двух различных характеров ψ_1, ψ_2 группы $\mathfrak{n}$ мы получаем таким образом, очевидно, два различных характера χ_1, χ_2 полугруппы S. Произведению характеров $\psi_1\psi_2$ группы $\mathfrak{n}$ соответствует характер

$$\Phi(a) = \psi_1\psi_2(ae^*) = \psi_1(ae^*) \,.\, \psi_2(ae^*) = \chi_1(a) \,.\, \chi_2(a) \,,$$

то есть, произведение характеров χ_1, χ_2 полугруппы S.

Из этого следует, что $\chi \longleftrightarrow \psi$ есть изоморфизм, и теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Schwarz Št.*, Теория характеров коммутативных полугрупп, Чехословацкий математический журнал, т. *4* (79), 1954, 219—247.

[2] *Schwarz Št.*: К теории хаусдорфовых бикомпактных полугрупп, Чехословацкий математический журнал, т. *5* (80), 1955, 1 — 23.

Summary

CHARACTERS OF BICOMPACT SEMIGROUPS

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Received August 23, 1954.)

Let S be a commutative Hausdorff bicompact semigroup. By a character we mean a continuous complex-valued function χ defined on S with values of absolute value unity and satisfying the relation $\chi(a) \,.\, \chi(b) = \chi(ab)$ for every $a, b \in S$.

If we define the multiplication of characters in the usual manner, then the set of all characters forms a group S^*. The purpose of this paper is to find the structure of S^*.

The set of all idempotents of a commutative semigroup S can be partially ordered in an obvious manner. The idempotents $\in S$ form then a semi-lattice. It is essential for our purposes that if S is a Hausdorff bicompact semigroup, this semi-lattice has a unique least idempotent e.

Let $\mathfrak{n}$ be the maximal subgroup of S with e as its unit element. The main result of the paper is: S^* is isomorphic to the group of characters of the group $\mathfrak{n}$.