ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

ЛАДИСЛАВ КОУБЕК, (Ladislav Koubek), Прага.

(Поступило в редакцию 2/IX 1954 г.)

В этой статье я работаю над полем комплексных чисел и предполагаю, что все коэффициенты, равно как и решения исследуемого дифференциального уравнения, являются аналитическими. В этих предположениях я доказываю теорему:

Если $n + 1$ решений $x^0, \ldots, x^n$ параболического дифференциального уравнения с частичными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a(u, v)\frac{\partial x}{\partial u} + b(u, v)\frac{\partial x}{\partial v} + c(u, v)x, \quad b \neq 0,$$

связаны квадратным соотношением с постоянными коэффициентами $\Sigma a_{ik}x^i x^k = 0$ $(a_{ik} = a_{ki})$, то эти решения линейно зависимы.

Систему $n + 1$ комплексных чисел $x^0, \ldots, x^n$ будем считать точкой проективного пространства S_n размерности n. Если точка $x = (x^0, \ldots, x^n)$ является функцией двух параметров u, v, причем ее координаты не удовлетворяют никакому линейному дифференциальному уравнению вида $a\dfrac{\partial x}{\partial u} + b\dfrac{\partial x}{\partial v} + cx = 0$, где a, b, c — аналитические функции параметров u, v, из которых хоть одна отлична от нуля, то скажем, что точка x описывает в S_n поверхность (x).

Далее определим плюккерово произведение двух точек x, y, как билинейное соотношение

$$\{x, y\} = \Sigma a_{ik}x^i y^k \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

с постоянными коэффициентами. Плюккерово произведение, очевидно, коммутативно ($\{x, y\} = \{y, x\}$), для него справедлив распределительный закон ($\{x, y + z\} = \{x, y\} + \{x, z\}$) и скалярный множитель можно вынести за скобку произведения ($\{ax, by\} = ab\{x, y\}$). Далее, если точки x и y являются функциями одного и того же параметра u, то очевидно, будет $\{x, y\}_u = \{x_u, y\} + \{x, y_u\}$ (здесь, как и в дальнейшем, индексы обозначают производные по указанному параметру).

Уравнение $\{x, x\} = 0$ определяет в S_n гиперповерхность второго порядка Q^2_{n-1}. Если для двух точек x, y произведение $\{x, y\} = 0$, то обе точки являются сопряженными по отношению к гиперквадрику Q^2_{n-1}.

Прежде всего докажем

Лемму 1. *Всякое дифференциальное уравнение вида*

$$x_{uu} = ax_u + bx_v + cx \,, \quad b \neq 0 \,, \tag{1}$$

можно путем преобразования параметров привести к виду

$$x_{\bar{u}\bar{u}} = a_1 x_{\bar{u}} + x_{\bar{v}} + c_1 x \,. \tag{1'}$$

Доказательство: Произведем преобразование параметров

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v), \; \bar{v} = v, \; \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \neq 0 \,.$$

Это преобразование регулярно, так как

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \neq 0 \,.$$

Имеем

$$x_u = x_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \,,$$

$$x_v = x_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + x_{\bar{v}} \,,$$

$$x_{uu} = x_{\bar{u}\bar{u}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\right)^2 + x_{\bar{u}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial u^2} \,,$$

что после подстановки в (1) дает

$$x_{\bar{u}\bar{u}} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\right)^{-2} \left[\left(a \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + b \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial u^2}\right) x_{\bar{u}} + bx_{\bar{v}} + cx\right].$$

Итак, если за $\bar{u}$ взять решение уравнения

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\right)^2 = b \,,$$

то (1) преобразуется к искомому виду.

В дальнейшем будем исходить из уравнения, приведенного к виду (1′).

Определение 1. Пусть в S_n дана поверхность (x). Линейную оболочку точек $x, x_u, x_v, \ldots, \dfrac{\partial^r x}{\partial u^i \, \partial u^j}$ $(i + j = r)$ (значения вычислены для $u = u_0$, $v = v_0$) назовем касательным пространством $S(r)$ поверхности (x) в точке $x_0 = x(u_0, v_0)$.

Ясно, что существует некоторое r_0 так, что для всех $s > r_0$ будет $S(s) = S(r_0)$, но для любого $k < r_0$ будет $S(k) \subset S(r_0)$. Очевидно, $\dim S(r_0) \leqq n$.

Отсюда следует, что поверхность погружена в пространство $S(r_0)$, являющееся некоторым подпространством пространства S_n.

Лемма 2. *Пусть (x) — поверхность в S_n и пусть ее точки удовлетворяют уравнению*

$$x_{uu} = a x_u + x_v + c x \,. \tag{1}$$

Точки $\dfrac{\partial^r x}{\partial u^i\, \partial v^{r-i}}$ *для* $2 \leqq i \leqq r$ *лежат всегда в* $S(r-1)$. *Если какая-нибудь линейная комбинация точек* $\dfrac{\partial^r x}{\partial u\, \partial v^{r-1}}$ *и* $\dfrac{\partial^r x}{\partial v^r}$ *лежит в* $S(r-1)$, *то поверхность* (x) *погружена в пространство, размерность которого* $\leqq \dim S(r)$.

Доказательство: Первое утверждение леммы очевидно, ибо последовательным дифференцированием (1) для $i \geqq 2$ получаем

$$\frac{\partial^r x}{\partial u^i\, \partial v^{r-i}} = \sum_{0 \leqq j+k \leqq r-1} a_{jk} \frac{\partial^{j+k} x}{\partial u^j\, \partial v^k} \,.$$

Однако, по определению $S(r-1)$ является линейной оболочкой точек

$$\frac{\partial^{j+k} x}{\partial u^j\, \partial v^k} \quad (0 \leqq k + j \leqq r - 1)\,.$$

Для доказательства второго утверждения леммы предположим, что некоторая линейная комбинация точек $\dfrac{\partial^r x}{\partial u\, \partial v^{r-1}}$, $\dfrac{\partial^r x}{\partial v^r}$ лежит в $S(r-1)$, т. е., что можно писать

$$A \frac{\partial^r x}{\partial u\, \partial v^{r-1}} + B \frac{\partial^r x}{\partial v^r} = \sum_{0 \leqq i+j \leqq r-1} a_{ij} \frac{\partial^{i+j} x}{\partial u^i\, \partial v^j} \,,$$

где хоть один из коэффициентов A, B отличен от нуля. Нужно различать следующие случаи:

а) $A \neq 0$, $B = 0$. Тогда точка $\dfrac{\partial^r x}{\partial u\, \partial v^{r-1}}$ принадлежит $S(r-1)$, и можно написать

$$\frac{\partial^r x}{\partial u\, \partial v^{r-1}} = \sum_{0 \leqq i+j \leqq r-1} \bar{a}_{ij} \frac{\partial^{i+j} x}{\partial u^i\, \partial v^j} \,. \tag{2}$$

Если в $S(r-1)$ лежит и точка $\dfrac{\partial^r x}{\partial v^r}$, то точки поверхности (x) удовлетворяют системе

$$\frac{\partial^r x}{\partial u^i\, \partial v^{r-i}} = \sum_{0 \leqq j+k \leqq r-1} \alpha^i_{jk} \frac{\partial^{j+k} x}{\partial u^j\, \partial v^k}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, r\,.$$

Из предположения, что (x) — поверхность, следует, что интеграл этой системы существует. Но этот интеграл содержит столько произвольных постоянных, сколько имеется независимых точек среди $\frac{\partial^{j+k}x}{\partial u^j\,\partial v^k}$ $(j + k \leqq r - 1)$; другими словами, число независимых решений системы равно размерности пространства $S(r-1)$ и, следовательно, поверхность (x) лежит в $S(r-1)$.

б) Если точка $\frac{\partial^r x}{\partial v^r}$ не лежит в $S(r-1)$, то дифференцируя уравнение (2) по u, получаем

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^r x}{\partial u\,\partial v^{r-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{0\leqq j+k\leqq r-1} \bar{a}_{jk}\,\frac{\partial^{j+k}x}{\partial u^j\,\partial v^k}\right),$$

то есть

$$\frac{\partial^{r+1}x}{\partial u^2\,\partial v^{r-1}} = \sum \frac{\partial \bar{a}_{jk}}{\partial u}\,\frac{\partial^{j+k}x}{\partial u^j\,\partial v^k} + \sum \bar{a}_{jk}\,\frac{\partial^{j+k+1}x}{\partial u^{j+1}\,\partial v^k},$$

так что точка $\frac{\partial^{r+1}}{\partial u^2\,\partial v^{r-1}}$ лежит в $S(r-1)$.

Но дифференцируя по v выражение

$$\frac{\partial^r x}{\partial u^2\,\partial v^{r-2}} = \sum_{0\leqq j+k\leqq r-1} b_{jk}\,\frac{\partial^{j+k}x}{\partial u^j\,\partial v^k},$$

получаем

$$\frac{\partial^{r+1}x}{\partial u^2\,\partial v^{r-1}} = \sum \frac{\partial b_{jk}}{\partial v}\,\frac{\partial^{j+k}x}{\partial u^j\,\partial v^k} + \sum b_{jk}\,\frac{\partial^{j+k+1}x}{\partial u^j\,\partial v^{k+1}},$$

так что, если только $b_{0,r-1} \neq 0$, точка $\frac{\partial^{r+1}x}{\partial u^2\,\partial v^{r-1}}$ не лежит в $S(r-1)$. Последовательным дифференцированием уравнения (1) убеждаемся, однако, в том, что для любого m коэффициент $b_{0,m-1}$ при $\frac{\partial^{m-1}x}{\partial v^{m-1}}$ в разложении

$$\frac{\partial^m x}{\partial u^2\,\partial v^{m-2}} = \sum_{0\leqq i+j\leqq m-1} b_{ij}\,\frac{\partial^{i+j}x}{\partial u^i\,\partial v^j}$$

равен единице.

Полученное противоречие показывает, что если в $S(r-1)$ лежит точка $\frac{\partial^r x}{\partial u\,\partial v^{r-1}}$, то в нем лежит и точка $\frac{\partial^r x}{\partial v^r}$, так что случай б) невозможен.

в) $A = 0$, $B \neq 0$. Тогда опять или обе точки лежат в $S(r-1)$, что приводит к разобранному случаю а), или в $S(r-1)$ лежит лишь точка $\frac{\partial^r x}{\partial v^r}$. Тогда для производных порядка $r+1$ имеем

$$\frac{\partial^{r+1}x}{\partial u^i\,\partial v^{r+1-i}} = \sum_{0\leqq j+k\leqq r} \beta_{jk}\,\frac{\partial^{j+k}x}{\partial u^j\partial v^k}, \quad i = 0, \ldots, r+1$$

и, рассуждая точно так же, как и в случае а), мы обнаружим, что хотя поверхность не лежит в $S(r-1)$, но зато лежит в $S(r)$.

г) Если, наконец, оба коэффициента отличны от нуля (т. е. ни одна из рассматриваемых точек не лежит в $S(r-1)$), то можно писать

$$\frac{\partial^r x}{\partial v^r} = \bar{A}\,\frac{\partial^r x}{\partial u\,\partial v^{r-1}} + \sum \bar{a}_{ij}\,\frac{\partial^{i+j} x}{\partial u^i\,\partial v^j}\,.$$

Последовательным дифференцированием этого соотношения обнаружим, что все точки $\frac{\partial^{r+1} x}{\partial u^i\,\partial v^{r+1-i}}$ лежат в $S(r)$, откуда тем же путем, как и в а), приходим к выводу, что поверхность (x) погружена в $S(r)$. Итак, лемма доказана.

Лемма 3. *Каждое касательное пространство $S(r)$ поверхности второго порядка (x), точки которой удовлетворяют уравнению*

$$x_{uu} = a x_u + x_v + c x\,,$$

является частью гиперквадрики Q^2_{n-1}.

Доказательство: Согласно нашим предположениям, для точек поверхности (x) справедливы соотношения

$$\{x, x\} = 0 \tag{1}$$

$$x_{uu} = a x_u + x_v + c x\,. \tag{2}$$

Так как каждое касательное пространство $S(r)$ по определению и по лемме 2 является линейной оболочкой одних точек $x, x_u, x_v, \ldots, \frac{\partial^{r-1} x}{\partial u\,\partial v^{r-2}}$, $\frac{\partial^{r-1} x}{\partial v^{r-1}}, \frac{\partial^r x}{\partial u\,\partial v^{r-1}}, \frac{\partial^r x}{\partial v^r}$, то достаточно доказать, что для любого натурального числа p имеют место соотношения

$$\left\{\frac{\partial^r x}{\partial u^i\,\partial v^{r-i}}\,,\quad \frac{\partial^s x}{\partial u^j\,\partial v^{s-j}}\right\} = 0\,,$$

где $i, j = 0, 1, \quad 0 \leqq s, r \leqq p$.

Доказательство проведем методом полной индукции.

Дифференцируя (1), получим

$$\{x, x_u\} = 0\,, \tag{3}$$

$$\{x, x_v\} = 0\,, \tag{4}$$

откуда, ввиду (2), следует также

$$\{x, x_{uu}\} = 0\,. \tag{5}$$

Дифференцируя (3) по u и используя (5), получаем

$$\{x_u, x_u\} = 0\,. \tag{6}$$

Продифференцировав (6) соответственно по u и по v, имеем

$$\{x_u, x_{uv}\} = 0 , \tag{7}$$

$$\{x_u, x_{uu}\} = 0 . \tag{8}$$

Помножив (2) на x_u, получим, согласно (3), (6) и (8),

$$\{x_u, x_v\} = 0 . \tag{9}$$

Дифференцируя (9) по u и используя (7), находим

$$\{x_{uu}, x_v\} = 0 . \tag{10}$$

Помножив (2) на x_v, получим, ввиду (4), (9) и (10),

$$\{x_v, x_v\} = 0 . \tag{11}$$

Из уравнений (1), (3), (4), (6), (9), (11) вытекает справедливость доказываемого утверждения для $p = 1$.

Предположим далее, что утверждение леммы справедливо для некоторого $p \geqq 1$. Тогда будет

$$\left\{\frac{\partial^r x}{\partial u^i\, \partial v^{r-i}}, \quad \frac{\partial^s x}{\partial u^j\, \partial v^{s-j}}\right\} = 0 , \quad 0 \leqq i \leqq r \leqq p, \ 0 \leqq j \leqq s \leqq p . \tag{12}$$

Продифференцировав (12) для $r = s = p$, $i = j = 0$, соответственно по u и по v, получим

$$\left\{\frac{\partial^{p+1} x}{\partial u\, \partial v^p}, \quad \frac{\partial^p x}{\partial v^p}\right\} = 0 , \tag{13}$$

$$\left\{\frac{\partial^{p+1} x}{\partial v^{p+1}}, \quad \frac{\partial^p x}{\partial v^p}\right\} = 0 . \tag{14}$$

Аналогично выведем

$$\left\{\frac{\partial^{p+1} x}{\partial u\, \partial v^p}, \quad \frac{\partial^p x}{\partial u\, \partial v^{p-1}}\right\} = 0 . \tag{15}$$

Продифференцировав уравнение (12) для $r = p$, $i = 0$, $s \leqq p - 1$, соответственно по u и по v, получим

$$\left\{\frac{\partial^{p+1} x}{\partial u\, \partial v^p}, \quad \frac{\partial^s x}{\partial u^j\, \partial v^{s-j}}\right\} = 0 , \quad (s \leqq p - 1) , \tag{16}$$

$$\left\{\frac{\partial^{p+1} x}{\partial v^{p+1}}, \quad \frac{\partial^s x}{\partial u^j\, \partial v^{s-j}}\right\} = 0 , \quad (s \leqq p - 1) . \tag{17}$$

Кроме того, по лемме 2

$$\frac{\partial^{p+2} x}{\partial u^2\, \partial v^p} = \sum_{i=0}^{p+1} A_i \frac{\partial^i x}{\partial v^i} + \sum_{j=1}^{p+1} B_j \frac{\partial^j x}{\partial u\, \partial v^{j-1}} , \tag{18}$$

причем $A_{p+1} \neq 0$. Помножив (18) на $\frac{\partial^p x}{\partial v^p}$, получим, согласно (12), (13) и (14):

$$\left\{\frac{\partial^{p+2}x}{\partial u^2\,\partial v^p}, \quad \frac{\partial^p x}{\partial v^p}\right\} = 0\,. \tag{19}$$

Дифференцируя (13) по u, получим, ввиду (19).

$$\left\{\frac{\partial^{p+1}x}{\partial u\,\partial v^p}, \quad \frac{\partial^{p+1}x}{\partial u\,\partial v^p}\right\} = 0\,. \tag{20}$$

Дифференцируя (20) и используя опять уравнение (18), находим

$$\left\{\frac{\partial^{p+1}x}{\partial v^{p+1}}, \quad \frac{\partial^{p+1}x}{\partial u\,\partial v^p}\right\} = 0\,. \tag{21}$$

Продифференцировав (12) для $r = s = p$, $i = 0$, $j = 1$, получим

$$\left\{\frac{\partial^p x}{\partial u\,\partial v^{p-1}}, \quad \frac{\partial^{p+1}x}{\partial v^{p+1}}\right\} = 0\,. \tag{22}$$

Наконец, дифференцируя (21) по u и используя (18), получаем

$$\left\{\frac{\partial^{p+1}x}{\partial v^{p+1}}, \quad \frac{\partial^{p+1}x}{\partial v^{p+1}}\right\} = 0\,. \tag{23}$$

Из уравнений (13), (14), (15), (16), (17), (20), (21), (22), (23) вытекает наше утверждение.

Так как каждая поверхность лежит в некотором из своих касательных пространств $S(p)$, то для поверхностей второго порядка, точки которых удовлетворяют уравнению $x_{uu} = ax_u + x_v + cx$, проведено, таким образом, доказательство того, что поверхность лежит в пространстве, размерность которого меньше n. В подходящей системе координат для пространства, в котором погружена наша поверхность, имеет место $y^0 = 0$. Так как координаты x и y связаны линейным регулярным преобразованием

$$y^i = \Sigma c_{ij} x^j\,, \quad |c_{ij}| \neq 0\,,$$

то

$$0 = \sum_{j=0}^{n} c_{0j} x^j\,.$$

Этим доказана

теорема: *Если $n + 1$ решений $x^0, \ldots, x^n$ параболического дифференциального уравнения с частными производными второго порядка*

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a(u, v)\,\frac{\partial x}{\partial u} + b(u, v)\,\frac{\partial x}{\partial v} + c(u, v)\,x\,, \quad b \neq 0\,,$$

(коэффициенты здесь являются аналитическими функциями) связаны квадратным соотношением с постоянными коэффициентами $\Sigma a_{ik} x^i x^k = 0$ $(a_{ik} = a_{ki})$, то эти решения линейно зависимы.

Zusammenfassung

ÜBER EINE GEWISSE EIGENSCHAFT DER LÖSUNGEN EINER PARABOLISCHEN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG

LADISLAV KOUBEK, Praha.

(Eingelangt am 2. September 1954.)

In der Arbeit ist folgender Satz bewiesen:

Sind $n + 1$ *Lösungen einer parabolischen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a(u, v) \frac{\partial x}{\partial u} + b(u, v) \frac{\partial x}{\partial v} + c(u, v)\, x\,, \quad b \neq 0\,, \tag{1}$$

durch eine quadratische Relation mit konstanten Koeffizienten $\Sigma a_{ik} x^i x^k = 0$ $(a_{ik} = a_{ki})$ *verbunden, dann sind sie linear abhängig.* (Koeffizienten und Lösungen der Gleichung (1) werden analytisch vorausgesetzt.)

Der Beweis wird geometrisch geführt. Das System von $n + 1$ Lösungen der Gleichung (1) wird als eine Fläche des projektiven Raumes S_n interpretiert und es wird bewiesen, dass jeder Tangentialraum einer quadratischen Fläche, deren Punkte die Gleichung (1) erfüllen, ein linearer Raum gewisser Hyperquadrik ist. Daraus folgt bewiesener Satz unmittelbar.