Ladislav Rieger

Об алгебрах Суслина (s-алгебрах) и их представлении

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 1, 99–142

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100135`

Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955

ОБ АЛГЕБРАХ СУСЛИНА (S-АЛГЕБРАХ) И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

ЛАДИСЛАВ РИГЕР (Ladislav Rieger), Прага

(Поступило в редакцию 3/IX 1954 г.)

Содержание:

Главные из приведенных результатов были автором сообщены на собрании Чехословацкого математического общества в Праге 25.V.1953. — Некоторые из наброшенных тогда обобщений оказались неправильными. — Применения к математической логике второго типа были автором набросаны на съезде польских математиков в Варшаве в августе 1953. Разработка этих применений подготовляется к печати.

§ 1. Введение.

Настоящая работа возникла в связи с попытками автора найти полное обощение т. н. алгебры Линденбаума (низшего предикатного исчисления) в алгебру квантификации логических переменных второго типа математической логики. Эту проблему понимаем как сводимую к задаче охарактеризировать структуру некоторых определенных классов проективных подмножеств пространства Кантора в терминологии свободных булевых алгебр с операциями над счетными системами элементов.

Здесь решена начальная часть задачи; несмотря на возникновение и цель работы, она вполне независима от понятий математической логики и может интересовать как специалистов по дескриптивной теории множеств, так и специалистов по теории структур.

Пусть B — некоторая булева алгебра и пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n \to b_{k_1, k_2, \ldots k_n}$ есть некоторое отображение множества конечных последовательностей $k_1, k_2, \ldots, k_n$ натуральных чисел в множество элементов алгебры[1]) B. Такое отображение называем *системой Суслина* (*S-системой*) и обозначаем его через $\{b_{k_1 \ldots k_n}\}$.

Допустим, что в B всегда существует элемент w, удовлетворяющий следующим

условиям:

(i) *Если для некоторого* $u \in B$ *и некоторой последоватесности натуральных чисел* $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ *имеем*

$$u \subseteq b_{\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n} .$$

для каждого $n = 1, 2, \ldots$, *то уже*

$$u \subseteq w$$

(ii) *Пусть* w^* (*в качестве* w) *обладает свойством* (i) (*по отношению к S-системе* $\{b_{k_1 \ldots k_n}\}$): тогда

$$w \subseteq w^* .$$

При этих условиях мы говорим, что в B *дана операция* $\mathcal{A}$ *Суслина* и пишем

$$w = \mathcal{A}(b_{k_1, \ldots k_n}) ;$$

булева алгебра B называется в таком случае *алгеброй Суслина* или *S-алгеброй.*

Имея в виду, что

$$\inf_{i=1,2,\ldots} a_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} a_i = \mathcal{A}(b_{k_1, \ldots k_n})$$

$b_{k_1, \ldots, k_n} = a_n$ в случае если положить в S-системе $\{b_{k_1 \ldots k_n}\}$

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$$

и

$$b_{k_1, \ldots k_2, k_n} = 0$$

в остальных случаях, видим, что S-алгебра всегда является σ-алгеброй (= счетно аддитивной булевой алгеброй).

---

[1]) В дальнейшем пропускаем определение ,,булева''.

Итак, можно писать

$$\mathcal{A}(b_{k_1,\dots k_n}) = \sup_{\mathfrak{z}} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} b_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n} \right)$$

(sup и inf разумеются в смысле полуупорядочения алгебры).

Если S-алгебра состоит из множеств, говорим о S-теле (множеств). Разнообразные примеры S-тел и S-алгебр хорошо известны из дескриптивной теории множеств, из топологии и из теории меры.

Типичными примерами S-тел могут служить тела т. н. $\mathcal{C}$-множеств (в пространствах Евклида), т. е. наименьшие классы множеств, содержащие все промежутки, замкнутые относительно $\mathcal{A}$-операции и дополнения. (Как известно, $\mathcal{C}$-множества измеримы, обладают свойством Бэра и лежат в проективном классе $B_2 = PCA \cap CPCA$[2]) не исчерпывая этого класса.)

Другие примеры S-тел: Класс множеств, обладающих свойством Бэра, класс измеримых множеств, класс $B_2 = PCA \cap CPCA$, класс всех проективных множеств, (включая трансфинитные классы), класс всех множеств точек некоторого пространства.

S-алгебры естественно возникают из S-тел посредством отношений конгруэнтности. Но существуют тоже S-алгебры другого рода: S-алгебра регулярных открытых точенных множеств некоторого топологического пространства, S-алгебра его замкнутых областей, полная метрическая S-алгебра. (Последение три алгебры даже полны в смысле любого sup и inf.)

В этой работе мы не изучаем систематично общее понятие S-алгебр. Мы выбираем только следующие три главные для нас вопросы:

1. Возможно ли (и при каком условии возможно) обобщить известный из дескриптивной теории множеств процесс Колмогорова-Серпинского[3]) (коротко: процесс К.-С.) на S-алгебры и выходит ли такое обобщение по существу за рамки теории множеств?

На этот вопрос отвечает § 5 (положительно).

2. Возможно ли охарактеризировать S-тело $\mathcal{C}$-множеств[4]) точек пространства Кантора как в некотором смысле свободную булеву алгебру?[5]) (Заметим, что класс множеств измеримых B в пространстве Кантора является свободной σ-алгеброй со счётным множеством образующих.)[6])

На этот вопрос отвечают главные теоремы IV и V (положительно).

3. Возможно ли (или при каком условии возможно) считать S-алгебры гомоморфными образами S-тел? (Вопрос надо считать частным случаем

---

[2]) См. *Лузин* [A], *Kuratowski* [Top I.] (квадратные скобки относятся к списку литературы в конце статьи).

[3]) Цм. *Ляпунов* [1], ст. 5 и 8, *Sierpiński* [2], ст. 362, *Kuratowski* [Top], ст. 7.

[4]) См. *Селивановский* [3], *Ляпунов* [1], ст. 7.

[5]) См. *Биркгоф* [Ст], (с. 8).

[6]) См. *Rieger* [4] (положительное решение проблемы *Hp*. 78 из [Ст]).

проблемы 80. из [Ст]; общий случай решен отрицательно, см. § 1, § 3 настоящей работы, или *Rieger* [4].

Этот вопрос вызван теоремой IV.

Надо подчеркнуть, что остались некоторые открытые вопросы. Они сформулированы в тексте.

В конце статьи (§ 8) помещены две заметки. Первая касается возможностей обобщений методов и результатов работы, вторая открывает основы применения их к математической логике.

Что касается предварительных знаний, то предполагаются известными лишь основные понятия теории булевых алгебр (см. н. п. Биркгоф [Ст.]) и дескриптивной теории множеств (см. н. п. *Kuratowski* [Top I].

Что касается обозначений, то напомним, что знаки П и. (Σ и $+$) обозначают множественную сумму (общую часть), знак $\emptyset$ означает пустое множество.

Знаки 0 и 1 употребляются для обозначения нуля и единицы булевой алгебры, знак $'$ обозначает дополнение. Иначе мы придерживаемся общепринятой символику теории структур (см. н. п. Биркгоф, [Ст)]. $\subset$ ($\supset$) исключает $=$.

§ 2. Знакомые понятия и теоремы, касающиеся булевых алгебр и σ-алгебр.

В любой булевой алгебре выполнены a) т. н. общие тождества Моргана:

$$\sup_{x \in X} a_x = (\inf_{x \in X} a'_x)'$$

и двойственно

$$\inf_{x \in X} a_x = (\sup_{x \in X} a'_x)'$$

для любого множества $X \neq \emptyset$ иднексов, если только одна из частей этих уравнений имеет смысл. (Доказательство: отображение $a \to a'$ есть двойственный автоморфизм порядка 2.)

b) Общие „бесконечные" дистрибутивные *тождества*: (надо отличать от *законов S-дистрибутивности* — см. ниже § 3).

$$a \cap \sup_{x \in X} a_x = \sup_{x \in X} (a \cap a_x)$$

и двойственно

$$a \cup \inf_{x \in X} a_x = \inf_{x \in X} (a \cup a_x) \, .$$

Несколько более обще:

$$\sup_{x \in X} a_x \cap \sup_{y \in Y} b_y = \sup_{(x,\, y) \in X \times Y} (a_x \cap b_y)$$

и двойственно

$$\inf_{x \in X} a_x \cup \inf_{y \in Y} b_y = \inf_{(x,\, y) \in X \times Y} (a_x \cup b_y) \, ,$$

если только левые части этих уравнений имеют смысл. (Доказательство: см. [Ст], гл. X., § 10.)

c) Пусть φ есть гомоморфное отображение булевой алгебры A в булеву алгебру B. Тогда имеем отношения

$$\sup_{x \in X} \varphi(a_x) \subseteq \varphi(\sup_{x \in X} a_x)$$

и дуально

$$\varphi(\inf_{x \in X} a_x) \subseteq \inf_{x \in X} \varphi(a_x) ,$$

если только существуют написанные sup и inf.

(Доказательство: очевидное следствие определений.)

d) Отображение φ σ-алгебры A в σ-алгебру B называется σ-гомоморфным, если

(i) $$\varphi(\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(a_i)$$

(ii) $$\varphi(a') = (\varphi(a))'$$

для любого $a \in A$.

Двойственное понятие „*δ-гомоморфизма*" с

(i*) $$\varphi(\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi(a_i)$$

вместо (i) является логически ровносильным понятием последнего.

Под *σ-идеалом* σ-алгебры A разумеют множество $I \neq \emptyset$, $I \neq A$ элементов из A удовлетворяющее условиям

1: Если $a_i \in I$ для $i = 1, 2, \ldots$, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \in I .$$

2. Если $a \subseteq b$, $b \in I$, то

$$a \in I .$$

Под двойственным *δ-идеалом* разумеют множество $I \neq \emptyset$, $I \neq A$ элементов из A, выполняющее условия

1. Если $a_i \in I$ для $i = 1, 2, \ldots$, то

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i \in I .$$

2. Если $b \subseteq a$, $b \in I$, то

$$a \in I .$$

Под *фактор-σ-алгеброй* A/I (A/I) по σ- (δ-) идеалы J (I) разумеют σ-алгебру смежных классов $[a]$, $[b]$, ... элементов из A, где $a^* \in [a]$; значит,

$$a^* \cup c = a \cup c$$

$$(a^* \cap c = a \cap c)$$

при подходящем $c \in J$ $(c \in I)$, причем

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i] = [\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i], \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i] = [\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i],$$

$$[a]' = [a'] \quad \text{в} \quad A/J \ (\text{и в } A/I) .$$

Смежные классы по J и по I совпадают, тогда и только тогда, когда $a' \in I$ равносильно $a \in J$. Вместо $a^* \in [a]$ иногда пишут $a^* \equiv a \pmod J$ (или $a^* \equiv a \pmod I$). Это означает то же самое, что

$$(a^* \cap a') \cup (a^{*\prime} \cap a) \in J$$

(или

$$(a^* \cup a') \cap (a^{*\prime} \cup a) \in I.)$$

I. Лемма *о σ-гомоморфизме. Пусть φ является σ-гомоморфным отображением σ-алгебры A на σ-алгебру B.*

Тогда множество $\varphi^{-1}(1) = J$ является δ-идеалом и фактор σ-алгебра A/J $(= A/I)$ σ-изоморфна алгебре B при отображении $[a] \to \varphi(a)$ алгебры A/J на алгебру B. (При этом $x \in J$ тогда и только тогда, когда $x' \in I$.)

Предыдущими предложениями и определениями будем пользоваться в дальнейшем без цитаций.

Теорема Люмиса. *Любая σ-алгебра A является изоморфной фактор σ-алгебре B/J (B/I), где B — σ-тело множеств, а J (I) есть δ- (σ-) идеал в B.*[7])

Теорема Люмиса может быть усилена следующим образом:[8])

Если σ-алгебра A может быть образована из $\mathfrak{m}$ своих элементов, тогда можно в качестве σ-тела B множеств взять наименьшее σ-тело множеств, образованное открыто-замкнутыми подмножествами обобщенного пространства Кантора $(0,1)^{\mathfrak{m}}$.[9])

Условия нуля. Бажную (хотя только вспомогательную) роль играют в следующем т. н. *условия нуля*, которые могут быть сформулированы для любой булевой σ-алгебры в таком виде:

Пусть $\|b_k^\alpha\|$ есть „матрица“ элементов из булевой σ-алгебры B где индекс строки $k = 1, 2, \ldots$ пробегает натуральные числа, индекс столбца. $\alpha = 1, 2, \ldots$; $\alpha < \Omega$ пробегает счётные трансфиниты.

---

[7]) Доказательство: См. *Loomis* [5], [St] X, § **11** (ст. 234), *Sikorski* [6], *Rieger* [4].

[8]) См. *Rieger* [4].

[9]) $(0,1)^{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{m}$ — некоторая мощность, обозначает топологическое произведение (степень) $\mathfrak{m}$ дискретных пространств $(0,1)$, каждое из которых состоит из двух точек 0 и 1.

Говорим, что в B имеет место *сильное* [*слабое*] *условие нуля*, если

$$\inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k^\alpha = 0 ,$$

как только

$$b_k^1 \supseteq b_k^2 \supseteq \ldots \supseteq b_k^\alpha \supseteq \ldots \quad \text{и} \quad \inf_{\alpha<\Omega} b_k^\alpha = 0$$

$$[b_k^\alpha \cap b_k^\beta = 0 \quad \text{для} \quad \alpha \neq \beta]$$

при каждом натуральном $k = 1, 2, \ldots$

Введение этих терминов оправдывает следующее

предложение: *Из сильного условия нуля следует слабое при следующем предположении:*

Пусть b^β ($\beta < \Omega$) обозначает некоторое количество $\aleph_1$ элементов данной σ-алгебры.

Тогда существует убывающая цепь

$$c_1 \supseteq c_2 \supseteq \ldots \supseteq c_\gamma \supseteq \ldots$$

такая, что 1. $c_\gamma \supseteq b^\beta$ *для каждого* β (*и каждого* γ);

2. *не существует* (*в данной σ-алгебре*) *элемент x такой, чтобы было*

$$c_\gamma \supset x \supset b^\beta$$

для всех γ и β — и

3. *цепь* $c_1 \supseteq c_2 \supseteq \ldots \supseteq c_\gamma \supseteq \ldots$ *не имеет более чем $\aleph_1$ различных членов* (*т. е.* $\gamma < \Omega$).

Замечание. Не знаю, можно ли пропустить как раз введенное (некрасивое) предположение, но оно наблюдается в почти всех важных знакомых примерах S-алгебр.

Доказательство. Пусть $\|d_k^\alpha\|$ для

$$\alpha = 1, 2, \ldots; \alpha < \Omega ,$$
$$k = 1, 2, \ldots, k < \omega_0$$

есть матрица элементов из σ-алгебры A, выполняющей сильное условие нуля, и пуст

$$d_k^\alpha \cap d_k^\beta = 0$$

для каждого натурального k и $\beta \neq \alpha$ счётно трансфинитных.

В силу нашего предложения, имеем цепь $c_k^1 \supseteq c_k^2 \supseteq \ldots \supseteq c_k^\alpha \supseteq$ для каждого натурального k и $\alpha < \Omega$ такую, что

$$\inf_{\alpha<\Omega} c_k^\alpha = \sup_{\beta<\Omega} d_\beta^k ,$$

если оба эти элемента понимать как сечения Макниля (см. [Ст.]).

Положим
$$b_k^\alpha = c_k^\alpha \cap (\bigcup_{\beta<\alpha} d_k^\beta)' \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, k < \omega_0 .$$
Тогда будет $b_k^1 \supseteq \ldots b_1^\alpha \supseteq \ldots$ — и
$$\inf_{\alpha<\Omega} b_k^\alpha \subseteq (\inf_{\alpha<\Omega} c_k^\alpha) \cap (\bigcup_{\beta<\gamma} d_k^\beta)'$$
(в альгебре сечений над A) для каждого $\gamma < \Omega$, т. е. будет
$$\inf_{\alpha<\Omega} b_k^\alpha \subseteq \sup_{\beta<\Omega} d_k^\beta \cap \inf_{\gamma<\Omega} (\bigcup_{\beta<\gamma} d_k^\beta)' = \sup_{\gamma<\Omega} \bigcup_{\beta<\gamma} d_k^\beta \cap (\sup_{\gamma<\Omega} (\bigcup_{\beta<\gamma} d_k^\beta))' = 0 ;$$
следовательно, в силу сильного условия нуля будет
$$\inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k^\alpha = 0 .$$
Но с другой стороны ясно, что в алгебре сечений будет
$$b_k^\alpha \supseteq \sup_{\beta<\Omega} d_k^\beta \cap (\bigcup_{\beta<\alpha} d_k^\beta)' \supseteq d_k^\alpha .$$

Следовательно, будет, в силу предыдущего, и
$$\inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{k=1} d_k^\alpha = 0 ,$$
и. т. д.

Не трудно видеть, что каждое множественное σ-тело удовлетворяет слабому условию нуля.

Действительно, пусть $\|d_k^\alpha\|$ — матрица множеств такая, что $d_k^\alpha d_k^\beta = \emptyset$ для всех счетных $\alpha \neq \beta$ и каждого натурального k.

Тогда
$$\prod_{\alpha<\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} d_k^\alpha = \sum_{\{k_\alpha\}_{\alpha<\Omega}} \prod_{\alpha<\Omega} d_{k_\alpha}^\alpha ,$$
где сумма вправо относится ко всем трансфинитным последовательностям натуральных чисел типа Ω.

Но $\prod_{\alpha<\Omega} d_{k_\alpha}^\alpha = \emptyset$ для каждой такой последовательности, так как подходящее натуральное k выступает в ней $\aleph_1$ раз.

Имея ввиду, что в каждом σ-теле из $\prod_{\alpha<\Omega} a^\alpha = \emptyset$ следует $\inf_{\alpha<\Omega} a^\alpha = \emptyset$, наблюдаем выполнение слабого условия нуля.

Что касается сильного условия нуля в множественном σ-теле, то оно проверяется (таким же образом, как и слабое) но только в предположении, что в данном σ-теле из $\inf_{\alpha<\Omega} b^\alpha = \emptyset$ следует $\prod_{\alpha<\Omega} b^\alpha = \emptyset$. (В частности, это будет всегда так, если σ-тело содержит все одноточечные множества, что н. п. имеет место в дескриптивной теории множеств, и в теории меры.)

Чтобы получить простой тример σ-алгебры, удовлетворяющей обеим условиям нуля и не являющейся изоморфной множественному σ-телу, достаточно взять полную счетную σ-алгебру, которая возникает из обыкновенной свободной алгебры с $\aleph_0$ образующими, если попросту положить равным 1 каждый sup из любого бесконечного множества элементов алгебры.

Это обстоятельство обобщается так: Оба условия нуля выполнены в любой σ-алгебре, удовлетворяющей т. н. *условию счетности цепей*, т. е. условию, что в трансфинитной последовательности вида

$$a_1 \subseteq a_2 \subseteq \ldots \subseteq a_\alpha \subseteq \ldots$$

имеет место равенство, начиная с определенного счетного $\bar{\alpha} = \alpha$.

Условие счетности цепей выполнено, напр. в счетных σ-алгебрах и в σ-алгебрах с мерой, в частности, в алгебре классов множеств, измеримых по Лебегу.

В связи с теоремой Люмиса естественно возникает вопрос о том, не выполняет ли вообще каждая σ-алгебра по крайней мере слабого условия нуля.

Отрицательный ответ подтверждают следующие примеры:

I: Пусть T_Ω есть σ-тело всех множеств счетных трансфинитов.

Построим, во-первых, индуктивно подходящую матрицу

$$\|a_k^\alpha\| \quad \begin{matrix} a = 1, 2, \ldots; & \alpha < \Omega \\ k = 1, 2, \ldots; & k < \omega_0 \end{matrix};$$

множеств из T_Ω; ее элементы a_k^α будут суммами

$$a_k^\alpha = \sum_{\beta < \Omega} a_{k,\beta}^\alpha$$

множеств $a_{k,\beta}^\alpha$ из T_Ω, определенных следующим образом:

1: Если $\beta = m < \omega_0$, то $a_{k,\beta}^\alpha = \emptyset$ для всех α и k.

2: Если β — счетный трансфинит второго рода, то

$$a_{k,\beta}^\alpha = \sum_{\gamma < \beta} a_{k,\gamma}^\alpha .$$

(Ясно, что здесь $a_{k,\beta}^\alpha = \emptyset$ для $\alpha \geqq \beta + 1$, если это условие выполнено для всех $\gamma < \beta$.)

3: Пусть $\beta = \beta^* + 1$ есть бесконечный счетный трансфинит первого рода. Тогда, если $\{k_\gamma\}_{\gamma \leqq \beta^*}$ обозначает определенное вполне упорядоченное множество всех натуральных чисел типа β, кладем:

$$a_{k,\beta}^\gamma = a_{k,\beta^*}^\gamma + (\beta^*)$$

в случаях $k = k_\gamma$ — и

$$a^\gamma_{k,\beta} = a^\gamma_{k,\beta^*}$$

в противных случаях.

(Здесь тоже будет

$$a^\alpha_{k,\beta} = \emptyset \quad \text{для} \quad \alpha \geqq \beta + 1.)$$

Теперь определим

$$a^\alpha_k = \sum_{\beta < \Omega} a^\alpha_{k,\beta}\,.$$

Ясно, что

$$a^\alpha_k \,.\, a^\gamma_k = \emptyset \quad \text{для} \quad \alpha \neq \gamma\,,$$

потому что мы всегда прибавляли каждый счетный трансфинит $\beta \geqq \omega_0$, в одно и только одно множество в каждом столбце с индексом $\leqq \beta$.

Во-вторых, построим фактор σ-алгебры T_Ω/I, где I — δ-идеал всех множеств X, удовлетворяющих условию

$$\prod_{\alpha=1}^{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} a^\alpha_k \subseteq X$$

для подходящего счетного γ.

Мы видим, что $I \neq T_\Omega$, потому что

$$\gamma \in \prod_{\alpha=1}^{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} a^\alpha_k = \sum_{\{k_\alpha\}_{\alpha \leqq \gamma}} \prod_{\alpha=1}^{\gamma} a^\alpha_k \neq \emptyset$$

в силу конструкции.

Но в σ-алгебре T_Ω/I имеем

$$[a^\alpha_k] \cap [a^\gamma_k] = 0 \quad \text{для} \quad \alpha \neq \beta$$

и

$$\bigcap_{\alpha=1}^{\gamma} \bigcup_{k=1}^{\infty} [a^\alpha_k] = 1$$

для любого счетного γ. Значит,

$$\inf_{\alpha < \Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} [a^\alpha_k] = 1\,,$$

т. е. даже слабое условие нуля в T_Ω/I далеко не выполняется.

Замечание. Ясно, что построенная только что σ-алгебра T_Ω/I не изоморфна никакому множественному σ-телу.

II. Относительно простым, но несколько искусственным образом можно строить алгебры без условий нуля как условно свободные σ-алгебры с подходящими определяющими соотношениями. На подробностях этого построения останавливаться не будем.

Замечание. Имея в виду приведенные примеры, можем (повидимому) считать парадоксальным тот факт, что каждая свободная σ-алгебра удовлетворяет (слабому) условию нуля, хотя оно не является следствием аксиом σ-алгебры. Но условия нуля — это не „алгебраические" условия, т. е. они неопределимы исключительно в терминах операций над счетными множествами элементов булевой алгебры. — В частности, условия нуля никаким образом нельзя перенести на гомоморфные образы. — В дальнейшем приводится обобщение факта, что свободные σ-алгебры удовлетворяют (слабому) условию нуля, на случай т. н. свободных дистрибутивных S-алгебр.

§ 3. Основные понятия и простые предпложения о S-алгебрах.

Как известно, в дескриптивной теории множеств операция $\mathcal{A}$ Суслина и операция решета Лузина являются равносильными.

Это верно (в соответствующем обобщении) даже в S-алгебрах.

Системой Лузина в булевой алгебре B назвем любое отображение $r \to w_r = \{w_r\}$ двоичных дробей вида

$$r = \frac{1}{2^{l_1}} + \frac{1}{2^{l_1+l_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{l_1+l_2+\ldots+l_s}}$$

(где l_i — натуральные числа) в множество элементов алгебры B.

Решетом Лузина назовем такую операцию, которая из систеты Лузина $\{w_r\}$ образует элемент (если такой существует в B)

$$w = \sup_{\{r_i\}_{i=1}^{\infty}} \inf_{i=1,2,\ldots} w_{r_i},$$

где $r_1 < r_2 < \ldots$

Тогда естественно считать т. н. *алгеброй Лузина* булеву алгебру B, в которой всегда выполнима операция решета Лузина.

Чтобы удостовериться в равносильности понятий S-алгебры и алгебры Лузина, достаточно положить[10])

$$a_{k_1} \cap a_{k_1,k_2} \cap \ldots \cap a_{k_1,k_2\ldots k_n} = w_r$$

гля

$$r = \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{k_1+k_2+\ldots+k_n}},$$

если хотим преобразовать $\mathcal{A}$-операцию в решето — или наоборот. Действительно, нетрудно проверить, что

$$\mathcal{A}(a_{k_1,\ldots k_n}) = \sup_{\{r_i\}_{i=i}^{\infty}} \inf_{i=1,2,\ldots} w_{r_i}$$

(для $r_1 < r_2 < \ldots$).

---

[10]) См. [Тор] ср. 9—10.

(Доказательство получается небольшой модификацией доказательства для случая множеств, которые берутся в качестве элементов алгебры, (см. [Top] стр. 10).)

Поэтому нет надобности изучать алгебры Лузина отдельно от $\mathfrak{S}$-алгебр, и все следующие результаты остаются *mutatis mutandis* в силе и для алгебр Лузина.

Двойственная $\mathcal{A}$-операция ($\mathcal{A}^*$-операция).

Двойственную $\mathcal{A}$-операцию $\mathcal{A}^*$ для $\mathfrak{S}$-системы $\{a_{k_1,\dots k_r}\}$ в $\mathfrak{S}$-алгебре B определяем равенством

$$\mathcal{A}^*(a_{k_1\dots k_r}) = (\mathcal{A}(a'_{k_1,\dots k_r}))' .$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{A}^*(a_{k_1,\dots k_r}) = \inf_{\mathfrak{z}} \bigcup_{n=1}^{\infty} a_{\mathfrak{z}_1,\dots \mathfrak{z}_n} ,$$

(где $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots$ пребегает все последовательности натуральных чисел.)

Ясно, что

$$\mathcal{A}(a_{k_1,\dots k_r}) = (\mathcal{A}^*(a'_{k_1,\dots k_r}))' .$$

Это значит, что $\mathfrak{S}$-алгебру можно определить с помощью $\mathcal{A}^*$-операции в качестве примитивного понятия.

Двойственные определения и предложения, касающиеся $\mathcal{A}^*$-операции, не будем иногда выписывать.

$\mathfrak{S}$-гомоморфизм, $\mathfrak{S}$-идеалы, фактор- $\mathfrak{S}$-алгебра.

Пусть A и B — $\mathfrak{S}$-алгебры, пусть φ — отображение A в B.

φ называется $\mathfrak{S}$-гомоморфным, если

(i) $$\varphi(\mathcal{A}(a_{k_1,\dots k_n})) = \mathcal{A}(\varphi(a_{k_1,\dots k_n}))$$

(ii) $$\varphi(a') = (\varphi(a))'$$

Вместо (ii) можно двойственно требовать

(ii)* $$\varphi(\mathcal{A}^*(a_{k_1,\dots k_n}) = \mathcal{A}^*(\varphi(a_{k_1,\dots k_n})) .$$

Если I является δ-идеалом $\mathfrak{S}$-алгебры A, то (как нетрудно проверить) можно в фактор-σ-алгебру A/I всегда ввести однозначно определенную операцию

$$\tilde{\mathcal{A}}([a_{k_1,\dots k_r}]) = [\mathcal{A}(a_{k_1,\dots k_r})] .$$

С другой стороны, A/I может (естественно) являться $\mathfrak{S}$-алгеброй.

Но упомянутая $\tilde{\mathcal{A}}$-операция не обязана совпадать с $\mathcal{A}$-операцией в A/I, она даже не является всегда операцией Суслина. Возможно, что либо вообще не существует в A/I элемент

$$\sup_{\mathfrak{z}} \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_{\mathfrak{z}_1, \dots \mathfrak{z}_n}] ,$$

либо этот элемент существует, но

$$\sup_{\mathfrak{z}} \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_{\mathfrak{z}_1, \dots \mathfrak{z}_n}] \neq [\sup_{\mathfrak{z}} \bigcap_{n=1}^{\infty} a_{\mathfrak{z}_1, \dots \mathfrak{z}_n}] ,$$

и A/I не является S-гомоморфным образом алгебры A.

Вот двойственный пример второй возможности (который будет использован еще и в дальнейшем):

Пусть T будет S-тело подмножеств пространства Кантора C, измеримых в смысле меры μ, однозначно определенной[11]) значениями $0 < \mu(C_j) < 1$ (напр., пусть всегда $\mu(C_j) = \frac{1}{2}$), где C_j — множество всех действительных чисел вида

$$2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} , \quad c_j = 1 , \quad c_i = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right. .$$

Пусть T/J — соответствующая (даже полная) фактор-S-алгебра с мерой[12]), т. е. J есть σ-идеал подмножеств меры μ, равной нулю.

Обозначим

$$C_j = b_{j,2} , \quad C'_j = b_{j,1}$$

$$a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n} = b_{1,\mathfrak{z}_1} b_{2,\mathfrak{z}_2} \dots b_{n,\mathfrak{z}_n}$$

для $\mathfrak{z}_i = 1$ или $= 2$, и положим

$$a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n} = \emptyset$$

в остальных случаях.

Тогда, в силу (двойственного) дистрибутивного тождества для множеств, имеем в S-теле T:

$$\mathcal{A}(a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}) = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{n=1}^{\infty} b_{1,\mathfrak{z}_1} b_{2,\mathfrak{z}_2} \dots b_{n,\mathfrak{z}_n} = \prod_{j=1}^{\infty} (C_j + C'_j) = C .$$

Но каждое непустое пересечение $\prod_{n=1}^{\infty} a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n} = \prod_{n=1}^{\infty} b_{1,\mathfrak{z}_1} \dots b_{n,\mathfrak{z}_n}$ (для любой последовательности $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots$ натуральных чисел) является множеством, образованным в точности из одной точки вида

$$2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}_i - 1}{3^i}$$

и, следовательно, имеет меру μ равную нулю. Значит, в T/J будет

$$\sup_{\mathfrak{z}} \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}] = \sup_{\mathfrak{z}} [\prod_{n=1}^{\infty} a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}] = 0 ,$$

---

[11]) См. *Халмош*: Теория меры, стр. 59—.

[12]) Как известно из общей теории меры в булевых алгебрах (см. [Ст.] стр. 237, 257—8), алгебра T/J является метрическим дополнением (в смысле Гливенко [7]) свободной (метрической) алгебры со счетным множеством образующих $[C_j]$ ($j = 1, 2, \dots$).

но

$$[\sup_{\mathfrak{z}} \prod_{n=1}^{\infty} a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}] = 1 \; ;$$

из этого мы видим, что операция $\tilde{\mathcal{A}}$ не совпадает с $\mathcal{A}$-операцией фактор S-алгебры T/J, т. е. фактор-S-алгебра T/J не является S-гомоморфным образом S-алгебры (тела) T, хотя J был σ-идеал.

Из сказанного следует, что необходимо ввести соответствующее операции $\mathcal{A}$ усиление понятия σ- (и δ-)идеала.

δ-идеал I в S-алгебре A, называем *d-идеалом*, если выполняется следующее

условие (iii): *Пусть для некоторой S-системы $\{b_{k_1 \dots k_r}\}$ в A будет $\bigcup_{n=1}^{\infty} b_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n} \in I$ для каждой последовательности $\mathfrak{z}$.*

Тогда

$$\mathcal{A}^*(b_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}) = \inf_{\mathfrak{z}} \bigcup_{n=1}^{\infty} b_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n} \in I \; .$$

Двойственное понятие s-идеала ясно.

Тривиальными примерами d- и s-идеалов являются главные идеалы. Не так тривиальными d-идеалами в S-телах являются идеалы множеств, содержащих некоторое множество, непринадлежащее данному S-телу.

В качестве простого примера другого рода („неограниченных“) s-идеалов можно рассмотреть s-идеал всех множеств с мощностью $\leqq 2^{\aleph_0}$ в некотором S-теле подмножеств данного множества с мощностью $2^{2^{\aleph_0}}$.

Фактор-S-алгебра A/J (или A/I) теперь естественным образом определяется как фактор-σ-алгебра по s- (или d-)идеалу J (или I) данной S-алгебры A (в смысле упомянутой операции $\tilde{\mathcal{A}}$, которая теперь уже является операцией Суслина в A/J (в A/I)).

При этом упомянутая выше I лемма о σ-гомоморфизме дословно перейдет в т. н. I лемму о S-гомоморфизме, которую нет надобности выписывать.

Законы дистрибутивности в S-алгебрах.

Мы приходим к очень важным для S-алгебр *законам дистрибутивности*.

Говорим, что S-алгебра *A сильно дистрибутивна*, если выполнено следующее тождество (т. н. *сильный закон S-дистрибутивности*).

Пусть $\{a^i_{\mathfrak{z}_1, \dots \mathfrak{z}_n}\}$ есть *последовательнось́т S-систем* для $i = 1, 2, \dots$, которую представляем тоже в виде схемы

$$
\begin{array}{l}
a_k^1\, a_{k,l}^1\, a_{k,l,n}^1 \dots \\
a_m^2\, a_{m,p}^2 \dots \\
a_q^3 \dots \\
\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

$k,\ l,\ m,\ n,\ p,\ q, \dots = 1, 2, 3, \dots$

Пусть $\{b_{\mathfrak{t}_1,\dots \mathfrak{t}_m}\}$ есть т. н. *диагоналная*[1]) S-система этой последовательности S-систем, т. е., пусть

$$
\begin{aligned}
b_k &= a_k^1 \\
b_{k,l} &= a_k^1 \cap a_{k,l}^1 \\
b_{k,l,m} &= a_k^1 \cap a_{k,l}^1 \cap a_m^2 \\
b_{k,l,m,n} &= a_k^1 \cap a_{k,l}^1 \cap a_m^2 \cap a_{k,l,n}^1 \\
b_{k,l,m,n,p} &= a_k^1 \cap a_{k,l}^1 \cap a_m^2 \cap a_{k,l,n}^1 \cap a_{m,p}^2 \\
b_{k,l,m,n,p,q} &= a_k^1 \cap a_{k,l}^1 \cap a_m^2 \cap a_{k,l,n}^1 \cap a_{m,p}^2 \cap a_q^3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Тогда будет

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}(a^i_{\mathfrak{z}_1\dots \mathfrak{z}_n}) = \mathcal{A}(b_{\mathfrak{t}_1\dots \mathfrak{t}_m})\ .$$

Рассматриваемая S-алгебра называется *сильно дистрибутивной.*

Написанный сильный закон S-дистрибутивности является равносильным *двойственному закону*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}^*(a^i_{\mathfrak{z}_1\dots \mathfrak{z}_n}) = \mathcal{A}^*(b_{\mathfrak{t}_1,\dots \mathfrak{t}_m})$$

(при двойственных определениях диагональной системы $\{b_{\mathfrak{t}_1,\dots \mathfrak{t}_m}\}$.[13])

Нетрудно видеть, что любое множественное S-тело есть сильно дистрибутивная S-алгебра, и что S-гомоморфный образ (или же фактор-S-алгебра) сильно дистрибутивной S-алгебры тоже сильно дистрибутивна.

Следствием сильного закона является т. н. *слабый закон S-дистрибутивности*, т. е. тождество

$$\bigcap_{i=k}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} a_{ik} = \mathcal{A}(b_{\mathfrak{z}_1\dots \mathfrak{z}_n})$$

где

$$b_{\mathfrak{z}_1\dots \mathfrak{z}_n} = a_{1,\mathfrak{z}_1} \cap a_{2,\mathfrak{z}_2} \cap \dots \cap a_{n,\mathfrak{z}_n}$$

для любой последовательности $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots$ натуральных чисел.

---

[13]) Разумеется, что можно было бы воспользоваться любым другим преобразованием приведенной двухразмерной схемы в одноразмерную.

Написанный слабый закон является равносильным *двойственному слабому закону.*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} a_{ik} = \mathcal{A}^*(b_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n})$$

и рассматриваемая S-алгебра называется *слабо дистрибутивной.*

Фактор-S-алгебра (или же S-гомоморфный образ) слабо дистрибутивной S-алгебры является тоже слабо дистрибутивной. Все S-тела являются слабо дистрибутивными S-алгебрами. Существуют даже не слабо дистрибутивные S-алгебры.

Очень простым примером (даже полной) S-алгебры, которая не является ни слабо дистрибутивной, служит упомянутая уже счетная S-алгебра B, определенная таким образом:

B — это обыкновенная свободная алгебра с образующими $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ количество которых равно $\aleph_0$, и с определением:

sup [inf] бесконечного множества (различных) элементов из B всегда равно 1 [0].

Здесь, например,

$$1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} (g_i \cup g_i') \neq \sup_{\{i_k\}} \inf_{k=1,2,\dots} \tilde{g}_{ki_k} = 0$$

где

$$i_k = 0, 1 \quad \text{и} \quad \tilde{g}_{k0} = g_k; \ \tilde{g}_{k1} = g_k'.$$

Замечаем, что в B выполняются оба условия нуля.

К сожалению, я незнаю примера слабо дистрибутивной S-алгебры, которая не является сильно дистрибутивной; но сомневаюсь, что свободные слабо дистрибутивные S-алгебры (см. § 6) дают такого рода примеры.

Другим примером даже не слабо дистрибутивной S-алгебры может служить упомянутая в § 3 алгебра с мерой μ, образованная из классов измеримых подмножеств пространства Кантора.

(Здесь именно слабый закон S-дистрибутивности по аналогичным причинам не выполняется уже в случае пересечения

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \cup C_i'$$

(см. стр. 111). Другие примеры даже не слабо дистрибутивной S-алгебры: Алгебра замкнутых областей в пространстве Кантора, алгебра регулярных открытых подмножеств этого пространства.

§ 4. Независимость законов дистрибутивности и условия нуля в S-алгебрах.

Возникают вопросы о логических соотношениях между условиями, данными законами дистрибутивности и условиями нуля. Несколько ответов дают следующие **предложения:**[14])

1. Все упомянутые условия совместимы, т. е. существуют S-алгебры сильно дистрибутивные и удовлетворяющие обоим условиям нуля, напр., S-тела всех подмножеств некоторого множества.

2. Из условий нуля не следует ни слабый закон дистрибутивности, потому что н. п. упомянутая выше счетная S-алгебра B выполояет оба условия нуля и не выполняет ни слабого закона дистрибутивности.

3. Условия, противоположные всем упомянутым условиям, совместимы. (Примерами могут служить прямые произведения подходящих только что построенных S-алгебр.)

4. Из сильного закона дистрибутивности (и тем менее из слабого закона) не следует ни слабое условие нуля.

Доказательство этого важного для нас предложения, т. е. построение сильно дистрибутивной S-алгебры без слабого условия нуля, можно выполнить т. н. „*методом локально определенных значений слов*". Мы здесь только набросаем ход этого рода построений, которые по существу очень просты, но в подробностях несколько медленны. (Метод может быть использован в абстрактной алгебре вообще.) Существование сильно дистрибутивной S-алгебры без слабого условия нуля понятно, так как результат операции $\mathcal{A}$ зависит от счетного числа элементов алгебры, но условие нуля касается несчетного количества элементов.

Пусть d_k^α (для $k < \omega_0$, $\alpha < \Omega$) являются условно переменными для образования искомой S-алгебры.[15])

Построим известным индуктивным методом все „S-слова" из этих переменных d_k^α. Имея ввиду некоторый счетный трансфинит γ, определяем значения переменных $\varphi(d_k^\alpha)$ в сильно дистрибутивной S-алгебре, состоящей лишь из элементов 0 и 1, произвольно, но только так, чтобы всегда выполнялось:

1: $$\varphi(d_k^\alpha) \, . \, \varphi(d_k^\beta) = 0$$

для всех $\alpha \neq \beta$, $\alpha < \gamma$, $\beta < \gamma$ и для каждого натурального k;

2: $$\sup_{k=1,2,\ldots} \varphi(d_k^\alpha) = 1$$

для всех $\alpha < \gamma$.

---

[14]) Для простоты ограничиваемся здесь вопросами, которые нам казались особенно важными, и не изучаем систематично всех возможностей.

[15]) См. доказательство теоремы II ниже; предполагаются известными основные термины из общей теории свободных алгебраических систем, см. напр. *Биркгоф* [Ст].

Ясно, что для данного счетного γ такие условные определения значений переменных d_k^α всегда возможны; одно такое определение дано именно одним полным упорядочением множества натуральных чисел в тип γ.

Определим, далее, значение любого S-слова, построенного индуктивно с помощью данного счетного множества переменных d_k^α (с $\alpha < \gamma$) так, как это всегда делается в абстрактной алгебре в известном индуктивном определении значения слов.

Теперь нетрудно показать, что и при таком „локальном" определении значений S-слов имеет место разбиение в классы равных между собою слов, если в один класс включить все слова, которые имеют всегда одинаковые значения, т. е. при каждом локальном определении значенин, при котором все переменные в одном и в другом S-слове вообще получили значения.

Классы $[s]$, $[t]$ равных между собою слов $s, t, \ldots$ теперь являются элементами построенной S-алгебры D.

Нетрудно видеть, что

$$[d_k^\alpha] \cap [d_k^\beta] = 0 \quad \text{в} \quad D$$

для любого натурального k и $\alpha \neq \beta$ счетных трансфинитов, и что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} [d_k^\alpha] = 1 \quad \text{в } D$$

для каждого $\alpha < \Omega$, так что

$$\inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} [d_k^\alpha] = 1 \quad \text{в } D.$$

Значит, слабое условие нуля в D не выполняется.

Но, с другой стороны, из построения легко следует, что наша S-алгебра D сильно дистрибутивна, так как это верно для использованной S-алгебры значений слов.

Ясно, что построенная S-алгебра D не изоморфна никакому множественному S-телу, так как в противном случае бы в ней обязательно выполнялось слабое условие нуля.

Только что построенная алгебра D будет использована и в дальнейшем.

Методом, примененным при построении алгебры D можно даже доказать что из любого счетного множества тождеств („законов") в терминах S-алгебр не следует ни одно из условий нуля, если только эти тождества совместны, т. е. выполнены в S-алгебре $(0, 1)$.

С этими рассуждениями естественно связан очень важный для нас вопрос о том, обладает ли свободная сильно дистрибутивная S-алгебра (с бесконечным количеством образующих) одним из условий нуля.

Мы даем на этот вопрос положительный ответ в дальнейшем. — Пока можем, наоборот, сказать только то, что проверенное нами существование сильно дистрибутивной S-алгебры без слабого условия нуля делает возможным предположение, что слабое условие нуля не имеет места в свободной (бесконечной) сильно дистрибутивной S-алгебре.

§ 5. Процесс Колмогорова-Серпинского в S-алгебрах. Конституанты.

Известный из дескриптивной теории множеств процесс *Колмогорова-Серпинского*[16]) или коротко *процесс* К.-С, формулируется в S-алгебрах так:

Пусть $\{a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}\}$ есть S-система элементов из любой S-алгебры A.

Положим

$$a^0_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n} = a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}, \tag{1}$$

$$a^{\alpha+1}_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n} = a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} a^{\alpha}_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n, k}\right) \tag{2}$$

для трансфинитного α первого рода,

$$a^{\beta}_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n} = \bigcap_{\alpha<\beta} a^{\alpha}_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n} \tag{3}$$

для трансфинитного β второго рода, и, наконец,

$$a_\alpha = \bigcup_{k=1}^{\infty} a^{\alpha}_k . \tag{4}$$

Говорим, что *процесс К.-С. сходится* (в Ω шагах), если

$$\mathcal{A}(a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}) = \inf_{\alpha<\Omega} a_\alpha .$$

Известно, что процесс К.-С. сходится в случае любого множественого S-тела A.

Мы будем сейчас изучать два вопроса:

1. Каковы необходимые и достаточные условия сходимости (в Ω шагах) процесса К.-С. в S-алгебрах?

2. Выходит ли обобщение процесса К.-С. на S-алгебры по существу за рамку теории множеств, когда ограничиваемся сходимостью в Ω шагах? Далее: известно, как сходимостью процесса К.-С. в Ω шагах можно обосновать тот факт, что всякое C-множество является суммой и общей частью $\aleph_1$ т. н. конституант измеримых B (в пространстве Евклида).

Покажем, как и эти обстоятельства обобщаются на дистрибутивные S-алгебры определенного рода.

---

[16]) См. *Ляпунов* [1], стр. 5, 8. *Sierpiński* [2] (стр. 362). *Kuratowski* [Top] (стр. 7).

Лемма 1. *Пусть A — слабо дистрибутивная $\mathfrak{S}$-алгебра. Пусть в A выполнено слабое условие нуля, т. е.:*

Если $b_k^\alpha \cap b_k^\beta = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ при $\alpha \neq \beta$ ($\alpha < \Omega$, $\beta < \Omega$), то

$$\inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k^\alpha = 0 \; .$$

Пусть $\{a_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n}\}$ есть $\mathfrak{S}$-система элементов из A, и S — σ-подалгебра в A состоящая из элементов $\mathfrak{S}$-системы $\{a_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n}\}$, и пусть

$$a = \mathcal{A}(a_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n}) \; .$$

Тогда в S существует не более чем $\aleph_1$ элементов (в смысле (4), см. выше), т. н. внешных S-конституант данной $\mathfrak{S}$-системы,

$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega)$$

и дальнейших не более чем $\aleph_1$ элементов $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_\alpha^* \ldots$ $(\alpha < \Omega)$, т. н. внутренных S-конституант данной $\mathfrak{S}$-системы — так, что

$$a = \inf_{\alpha<\Omega} a_\alpha = \sup_{\alpha<\Omega} a_\alpha^*$$

в A, т. е. провесс К.-С. сходится[16] *в A.*

Доказательство. I. Воспользовавшись обозначениями (1)—(4), введенными выше, видим, что

$$a^\alpha_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n} \in S \quad (\text{для цвсех } \alpha \text{ и } \mathfrak{z})$$

и

$$a_\alpha \in S \quad (\text{для всех } \alpha) \; .$$

К определениям (1)—(4) прибавим еще два:

$$(5) \qquad b_\alpha = \sup_{\mathfrak{z}} \bigcup_{n=1}^{\infty} (a^\alpha_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n} \cap (a^{\alpha+1}_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n})') \; .$$

Тогда будет $b_\alpha \in S$, так как берется sup счетного множества всех $a_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n} \cap$ $\cap\, (a^{\alpha+1}_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n})'$.

$$(6) \qquad a_\alpha^* = a_\alpha \cap b_\alpha' \; .$$

Тогда и $a_\alpha^* \in S$.

II. Покажем теперь, что

$$a_\alpha^* \subseteq a = \mathcal{A}(a_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n}) \; ,$$

для каждого счетного α.

Имеем (в силу (4) и (6)):

$$a_\alpha^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha \cap [\sup_{\mathfrak{z}} \{ \bigcup_{n=1}^{\infty} a^\alpha_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n} \cap (a^{\alpha+1}_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n})'\}]' = \bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha \cap \inf_{\mathfrak{z}} [\bigcap_{n=1}^{\infty} a^{\alpha+1}_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n} \cup (a^\alpha_{\mathfrak{z}_1\cdots\mathfrak{z}_n})'] \, .$$

[16]) Ср. [Тор] стр. 7—9.

Положив

$$d_{1N}^{\alpha} = a_{\mathfrak{z}_1 \cdots \mathfrak{z}_n}^{\alpha+1}$$
$$d_{2N}^{\alpha} = (a_{\mathfrak{z}_1 \cdots \mathfrak{z}_n}^{\alpha})'$$

для

$$N = 2^{\mathfrak{z}_1 - 1} + 2^{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 - 1} + \ldots + 2^{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \cdots + \mathfrak{z}_n - 1}$$

можем писать

$$\inf_{\mathfrak{z}} \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_{\mathfrak{z}_1 \cdots \mathfrak{z}_n}^{\alpha+1} \cup (a_{\mathfrak{z}_1 \cdots \mathfrak{z}_n}^{\alpha})') = \bigcap_{N=1}^{\infty} (d_{1N}^{\alpha} \cup d_{2N}^{\alpha}) .$$

Но, в силу слабого дистрибутивного закона, в S-алгебрах имеем

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} (d_{1N}^{\alpha} \cup d_{2N}^{\alpha}) = \sup_{\{i_N\}_{N=1}^{\infty}} (d_{i_1 1}^{\alpha} \cap d_{i_2 2}^{\alpha} \cap \ldots \cap d_{i_N N}^{\alpha} \cap \ldots)$$

где $i_N = 1$ или $i_N = 2$ для $N = 1, 2, \ldots$

(Последний sup относится ко всем последовательностям $\{i_N\}_{N=1}^{\infty}$, состоящим из 1 и 2).

Из этого следует (с помощью общих дистрибутивных тождеств, см. § 2)

$$a_{\alpha}^{*} = \bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{\alpha} \cap \sup_{\{i_N\}_{N=1}^{\infty}} (d_{i_1 1}^{\alpha} \cap d_{i_2 2}^{\alpha} \cap \ldots \cap d_{i_N N}^{\alpha} \cap \ldots) =$$
$$= \sup_{\{i_N\}_{N=1}^{\infty}, k=1,2,\ldots} (a_k^{\alpha} \cap d_{i_1 1}^{\alpha} \cap \ldots \cap d_{i_N N}^{\alpha} \cap \ldots) .$$

Пусть

$$p = a_k^{\alpha} \cap d_{i_1 1}^{\alpha} \cap \ldots \cap d_{i_N N}^{\alpha} \cap \ldots \neq 0$$

есть некоторое из от нуля отличных пересеченний, из которых берется последний sup.

Тогда среди членов $d_{i_N N}^{\alpha}$ никакой не равен элементу $(a_k^{\alpha})'$. Поэтому для $N = 2^{k-1}$ элемент $d_{1N}^{\alpha} = a_k^{\alpha+1}$ из N-того объединения $\alpha_{1N}^{\alpha} \cup d_{2N}^{\alpha}$ попал в p в качестве фактора.

Но, в силу определения (2), в процессе К.-С. имеем

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} a_{k,l}^{\alpha} \supseteq a_k^{\alpha+1} . \tag{**}$$

Это значит, что среди факторов пересечения p не выступают все элементы вида $(a_{k,l}^{\alpha})'$ для $l = 1, 2, \ldots$ (в противном случае, как легко видно, было бы $p = 0$, в силу (**)), т. е. существует член $(a_{k,k_1}^{\alpha})' = d_{2N}^{\alpha}$ для подходящего k_1 и $N = 2^{k-1} + 2^{k+k_1-1}$, который не выступает как фактор в p. Но тогда фактором в p будет элемент

$$d_{1N} = a_{k,k_1}^{\alpha+1} .$$

Повторяя это заключение индуктивно, находим последовательность $k, k_1, k_2, \ldots$ натуральных чисел так, что элементы $a_k^{\alpha+1}, a_{k,k_1}^{\alpha+1}, \ldots, a_{k,k_1,k_2,\ldots k_n}^{\alpha+1}$, все выступают в пересечении p как факторы. Значит,

$$p \subseteq a_k^{\alpha+1} \cap a_{k,k_1}^{\alpha+1} \cap \ldots \cap a_{k,k_1,\ldots k_n}^{\alpha+1} \cap \ldots$$

Но из (1) и (2) в процессе К.-С. следует нетрудной трансфинитной индукцией, что для любого α

$$a_k^{\alpha+1} \cap a_{k,k_1}^{\alpha+1} \cap \ldots \cap a_{k,k_1,\ldots k_n}^{\alpha+1} \cap \ldots \subseteq a_k \cap a_{k,k_1} \cap \ldots \cap a_{k,k_1\ldots k_n} \ldots$$

Значит, имеем

$$p \subseteq a_k \cap a_{k,k_1} \cap \ldots \cap a_{k,k_1,\ldots k_n} \cap \ldots \subseteq \mathcal{A}(a_{\mathfrak{z}_1\ldots\mathfrak{z}_n}),$$

т. е.

$$a_\alpha^* \subseteq a$$

для каждого счетного α.

III. Покажем дальше, что

$$a \subseteq a_\alpha$$

для каждого счетного α.

Для этого достаточно показать, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} a_{\mathfrak{z}_1\ldots\mathfrak{z}_n} \subseteq a_{\mathfrak{z}_1\ldots\mathfrak{z}_m}^{\alpha} \ldots \qquad (***)$$

для любой последовательности $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n, \ldots$, для любого m и для любого счетного α. (В соотношении (***) положим $m = 1$ и возьмем в обеих частях sup относительно всех $\mathfrak{z}$ при данном α.)

Соотношение (***) докажем посредством индукции. Случай $\alpha = 0$ является тривиальным следствием определения (1), данного выше.

Случай $\alpha + 1$ следует из случая α в силу (2) при помощи пересечения обеих частей в (***) с элементом

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} a_{\mathfrak{z}_1\ldots\mathfrak{z}_m,k}^{\alpha}.$$

Если α второго рода, то (***) непосредственно следует из предыдущих случаев $\bar{\alpha} < \alpha$ и из (3).

IV. Докажем, наконец, что

$$\inf_{\alpha<\Omega} a_\alpha \subseteq \sup_{\alpha<\Omega} a_\alpha^* .^{17)}$$

---

17) Здесь важно заменить следующее: Мы не знаем, существуют ли элементы

$$\inf_{\alpha<\Omega} a_\alpha \quad u \quad \sup_{\alpha<\Omega} a_\alpha^*$$

в нашей S-алгебре A. Но мы можем (в этом последнем шаге долазательства) упомянутые inf и sup считать элементами полной S-алгебры $\bar{A}$ сечений Макниля над S-алгеброй A. Все, что мы с этими элементами делаем, можно делать и в лювой алгебре, следовательно, и в $\bar{A}$. Но в конце концов оказывается, что упомянутые элементы в действительности принадлежат элгебре A. Таким образом рассуждаем и дальше.

Положим

$$d_N^\alpha = a^\alpha_{\delta_1 \cdots \delta_n} \cap (a^{\alpha+1}_{\delta_1 \cdots \delta_n})'$$

для

$$N = 2^{\delta_1 - 1} + 2^{\delta_1 + \delta_2 - 1} + \ldots + 2^{\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n - 1} ,$$

Тогда, в силу (5), будет

$$b_\alpha = \bigcup_{N=1}^{\infty} d_N^\alpha \quad \text{и} \quad d_N^\alpha \cap d_N^\beta = 0$$

для $\alpha \neq \beta$.

Теперь применим слабое условие нуля,

$$\inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{N=1}^{\infty} d_N^\alpha = 0 .$$

Из этого следует (см. § 2 и зам. (17))

$$0 = \inf_{\alpha<\Omega} (a_\alpha \cap (\bigcup_{N=1}^{\infty} d_N^\alpha)) = \inf_{\alpha<\Omega} [a_\alpha \cap (a'_\alpha \cup (\bigcup_{N=1}^{\infty} d_N^\alpha))] =$$

$$= \inf_{\alpha<\Omega} a_\alpha \cap \inf_{\alpha<\Omega} (a'_\alpha \cup (\bigcup_{N=1}^{\infty} d_N^\alpha)) = \inf_{\alpha<\Omega} a_\alpha \cap \{ \sup_{\alpha<\Omega} (a_\alpha \cap (\bigcup_{N=1}^{\infty} d_N^\alpha)')\}' .$$

В силу (5) и (6), из этого получаем

$$\inf_{\alpha<\Omega} a_\alpha \subseteq \sup_{\alpha<\Omega} (a_\alpha \cap (\bigcup_{N=1}^{\infty} d_N^\alpha)') = \sup_{\alpha<\Omega} (a_\alpha \cap b'_\alpha) = \sup_{\alpha<\Omega} a^*_\alpha .$$

Из II, III, IV уже следует

$$\sup_{\alpha<\Omega} a^*_\alpha \subseteq a \subseteq \inf_{\alpha<\Omega} a_\alpha \subseteq \sup_{\alpha<\Omega} a^*_\alpha ,$$

т. е.

$$a = \inf_{\alpha<\Omega} a_\alpha = \sup_{\alpha<\Omega} a^*_\alpha ,$$

ч. т. д.

Определение. *Скажем, что в* S*-алгебре* A *выполняется слабое условие нуля для конституант, если для каждых* d_N^α *из IV в доказательстве предыдущей леммы выполнено слабое условие нуля.*

Лемма 2. *Необходимым и достаточным условием сходимости процесса Колмогорова-Серпинского в любой* S*-алгебре* A *является следующее требование:*

а) A *— слабо дистрибутивна,*

б) в A *выполняется слабое условие нуля для конституант.*

Доказательство. I. Условие *достаточно* — см. доказательство Леммы 1.

II. Условие *необходимо*:

Пусть в A процесс К.-С. сходится.

а) Пусть в A не выполняется слабый закон $\mathfrak{S}$-дистрибутивности, т. е. пусть

$$a = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} a_{ik} \neq \sup_{\{k_i\}} \bigcap_{i=1}^{\infty} a_{ik_i} = b$$

для подходящих $a_{ik} \in A$.

Покажем, что это предположение ведет к противоречию. Построим фактор $\mathfrak{S}$-алгебры $A/\{a \cap b'\}$, где $\{a \cap b'\}$ обозначает главный d-идеал всех $x \in A$, таких, что $x \supseteqq a \cap b'$; (ясно, что $a \cap b' \neq 0$.) Тогда нетрудно убедиться в том, что в $A/\{a \cap b'\}$ сходится процесс К.-С., если только он сходится в A.

(Достаточно все строения в A попросту пересечь элементом $a \cap b$).

При этом в $A/\{a \cap b'\}$ будет

$$1 = [a] = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_{ik}] ,$$

т. е.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} [a_{ik}] = 1 \tag{*}$$

для каждого $i = 1, 2, \ldots$

Но

$$0 = [b] = \sup_{\{k_i\}} \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_{ik_i}] ,$$

так как

$$b \subseteq (a \cap b')' \equiv 0 \bmod \{a \cap b'\} ,$$

$$(1, 0, [a_{ik}], [a], [b] \in A/\{a \cap b'\}) .$$

Имея (в $A/\{a \cap b'\}$) ввиду $\mathfrak{S}$-систему нашего sup, т. е. $\mathfrak{S}$-систему

$$B_{\mathfrak{z}_1 \cdots \mathfrak{z}_n} = [a_{1\mathfrak{z}_1} \cap a_{2\mathfrak{z}_2} \cap \ldots \cap a_{n\mathfrak{z}_n}]$$

легко убеждаемся в том, что в силу (*)

$$B^{\alpha}_{\mathfrak{z}_1 \cdots \mathfrak{z}_n} = B_{\mathfrak{z}_1 \cdots \mathfrak{z}_n}$$

для любых $\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n$ и $\alpha < \Omega$ — (в смысле процесса К.-С.).

Но это для внешних конституант нашей $\mathfrak{S}$-системы значит, что

$$B^{\alpha} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B^{\alpha}_k = 1$$

и, следовательно, $[b] = \inf\limits_{\alpha<\Omega} B^{\alpha} = 1$, что противоречит условию $[b] = 0$.

Значит, слабый закон дистрибутивности являетяс необходимым условием сходимости процесса К.-С.

б) С учетом предыдущего а) и второй части доказательства леммы 1. нетрудно теперь заключчть, что слабое условие нуля для конституант является тоже необходимым условием сходимости процесса К.-С., и. т. д.

Замечание 1. Естественно возникает вопрос о том, будет ли (общее) слабое условие нуля существенно сильнее условия нуля для конституант, т. е. не будет ли уже общее слабое условие нуля необходимым для сходимости процесса К.-С. Ответ, очевидно, зависит от мощности данной S-алгебры (напр., в случае конечных или счетных S-алгебр общее слабое условие нуля тривиально необходимо для сходимости процесса К.-С.).

Если (в нетривиальном несчетном случае) данная S-алгебра слабо дистрибутивна и имеет мощность $2^{\aleph_0}$, и если предполагаем, что $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$ (т. е., напр. ,предполагаем гипотезу континуума), то кажется, что слабое условие нуля, в своей общности, не будет необходимым для сходимости процесса К.-С. Это можно оживать потому, что нам хватит количество не более чем $2^{\aleph_0}$ частных применений слабого условия нуля, т. е. слабое условие нуля для конституант, для гарантирования сходимости всех $2^{\aleph_0}$ процессов К.-С. (между тем, что условие нуля вообще содержит $2^{\aleph_1}$ своих случаев.)

Замечание 2. Чтобы убедиться в существенности обобщения процесса К.-С. на S-алгебры, нужно найти примеры S-алгебр, в которых сходится процесс К.-С., но которые не являются S-телами множеств.

Пример α: Пусть T — S-тело всех подмножеств данного множества мощности $2^{2^{\aleph_0}}$ (напр., множества всех функций действительного переменного на промежутке).

Пусть J — идеал всех подмножеств в T, мощность которых не больше $2^{\aleph_0}$.

Тогда J является s-идеалом и фактор S-алгебра $A = T/J$ выполняет условие леммы 1, что нетрудно проверить; значит, в A сходится процесс Колмогорова-Серпинского. Но этот простой пример немножественной применимости процесса К.-С. пока еще не доказывает, что он по существу выходит за рамки S-тел; надо еще выяснить, что T/J не является S-изоморфным множественному S-телу; это последнее автор не сумел доказать. Вернемся поэтому к другому примеру.

Пример β: Мы уже знаем из предыдущего пример сильно дистрибутивной S-алгебры, в которой не выполнено слабое условие нуля, т. е. которая не изоморфна множественному S-телу, но в которой несмотря на то процесс К.-С. сходится. Это S-алгебра D о которой шла речь в § 4, в которой по ее конструкции нетрудно проверить сходимость процесса К.-С., так как она является „локально S-изоморфной“ множественному S-телу, т. е. S-подалгебра, образованная в D из любого счетного подмножества ее образующих S-изоморфна множественному S-телу.

Следовательно, обобщение процесса К.-С. в этом смысле существенно выходит за рамки дескриптивной теории множеств. Мы можем считать процесс К.-С. по существу „*алгебраическо-топологическим трансфинитным алгорифмом*“, т. е. процессом, сходимость которого обусловлена в Лемме 1 одним требованием „алгебраического“ характера, а именно, слабым законом дистрибутивности, и одним требованием „топологического“ характера, а именно, определенным свойством полуупорядочения S-алгебры (невыражаемым тождеством в терминах рассмотренных операций).

Надо сказать, что существенность процесса К.-С. этим еще полностью не исчерпана.

Во-первых, автор не сумел подыскать пример слабо дистрибутивной S-алгебры, в которой процесс К.-С. расходится (в Ω шагах). Значит, еще не выяснено (хотя вероятно), что слабое условие нуля для конституант не следует из слабого закона дистрибутивности.

С этим тесно связан тоже здесь невыясненный вопрос о том, сохраняет ли S-гомоморфное отображение сходимость процесса К.-С.

Во вторых, автор тоже не изучал вопроса сходимости процесса К.-С. в более чем Ω шагах.

Лемма 3. *Предположения*: *Пусть A — σ-алгебра, в которой выполнено сильное условие нуля, т. е.*:

Если $d_k^1 \supseteq d_k^2 \supseteq \ldots \supseteq d_k^\alpha \supseteq \ldots$ $(\alpha < \Omega)$ *для каждого* $k = 1, 2, \ldots$ $(k < \omega_0)$ *и если*

$$\inf_{\alpha<\Omega} d_k^\alpha = 0 \quad \text{для } k = 1, 2, \ldots ,$$

то

$$\inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} d_k^\alpha = 0 .$$

Пусть

$$b_k^1 \supseteq b_k^2 \supseteq \ldots \supseteq b_k^\alpha \supseteq \ldots$$

$\alpha < \Omega$ *для* $k = 1, 2, \ldots$ $(k < \omega_0)$ *и пусть* $\inf_{\alpha<\Omega} b_k^\alpha$ *существует в A для каждого* k.

Утверждение: *Тогда существует и*

$$\inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k^\alpha ,$$

и имеем

$$\inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k^\alpha = \bigcup_{k=1}^{\infty} \inf_{\alpha<\Omega} b_k^\alpha .$$

Доказательство. Положим

$$d_k^\alpha = b_k^\alpha \cap \Big(\bigcup_{l=1}^{\infty} \inf_{\beta<\Omega} b_l^\beta \Big)' .$$

Тогда $d_k^1 \supseteq d_k^2 \supseteq \ldots \supseteq d_k^\alpha \supseteq \ldots$ для каждого $k = 1, 2, \ldots$ и

$$\inf_{\alpha<\Omega} d_k^\alpha = \Big(\bigcup_{l=1}^{\infty} \inf_{\beta<\Omega} b_l^\beta \Big)' \cap \inf_{\alpha<\Omega} b_k^\alpha = 0 .$$

В силу предположения, имеем

$$0 = \inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} d_k^\alpha = \inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(b_k^\alpha \cap \Big(\bigcup_{l=1}^{\infty} \inf_{\beta<\Omega} b_l^\beta \Big)'\Big) .$$

Из этого следует

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \inf_{\gamma<\Omega} b_m^\gamma = \bigcup_{m=1}^{\infty} \inf_{\gamma<\Omega} b_m^\gamma \cup \inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(b_k^\alpha \cap \Big(\bigcup_{l=1}^{\infty} \inf_{\beta<\Omega} b_l^\beta \Big)'\Big) .$$

В силу дистрибутивных тождеств и того, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} b_k^\alpha \supseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \inf_{\gamma<\Omega} b_m^\gamma$ (для каждого $\alpha < \Omega$), в правой части остается лишь $\inf_{\alpha<\Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k^\alpha$, ч. т. д.

Лемма 4. *Пусть A — сильно дистрибутивная $\mathfrak{S}$-алгебра, M-некоторое непустое множество ее элементов такое, что если $a \in M$, то и $a' \in M$.*

Бозначим через $\mathcal{A}(M)$ множество всех результатов однократного применения операции $\mathcal{A}$ на элементы из M, а через $\mathcal{A}^*(M)$ множество дополнений этих результатов (т. е. $\mathcal{A}^*(M)$ совпадает с множеством результатов однократного применения двойственной операции $\mathcal{A}^*$ на элементы из M).

Тогда алгебра A_M (в обыкновенном смысле), порожденная в A элементами суммы $\mathcal{A}(M) + \mathcal{A}^*(M)$ является σ-алгеброй.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $\{a^i_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}\}$ будет счетная система ($i = 1, 2, \ldots$) $\mathfrak{S}$-систем и если положить

$$a^i_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n} = b_{\mathfrak{t}_1 \ldots \mathfrak{t}_{n+1}}, \quad \mathfrak{t}_1 = i, \mathfrak{t}_2 = \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{n+1} = \mathfrak{z}_n ,$$

то можно писать

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}(a^i_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}) = \mathcal{A}(b_{\mathfrak{t}_1 \ldots \mathfrak{t}_m})$$

и двойственно

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}^*(a^i_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}) = \mathcal{A}^*(b_{\mathfrak{t}_1 \ldots \mathfrak{t}_m}) .$$

(Это непосредственно следует из определения $\mathcal{A}$-операции.)

Пусть теперь будет

$$a^i \in \mathcal{A}(M) + \mathcal{A}^*(M) \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots .$$

Тогда пишем

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} a^i = (\bigcup_{\substack{j=1\\ a^j \in A(M)}}^{\infty} a^j) \cup (\bigcup_{\substack{k=1\\ a^k \in A^*(M)}}^{\infty} a^k).$$

Применив (если надо) только что высказанное замечание к первому объединению и сильный закон S-дистрибутивности ко второму, видим, что первое принадлежит $\mathcal{A}(M)$, а второе — $\mathcal{A}^*(M)$, т. е. $\bigcup_{i=1}^{\infty} a^i \in A_M$.

В случае $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i$ рассуждаем двойственно. Из предположения и из тождеств Моргана легко уже следует заключение доказательства леммы.

Теорема I. *Пусть A — сильно дистрибутивная [слабо дистрибутивная] S-алгебра со слабым условием нуля [с сильным и слабым условием нуля].*

Пусть G — любая σ-подалгебра в A, которая порождает (с помощью $\mathcal{A}$-операции и дополнения) *всю A. Пусть a — любой элемент из A.*

Тогда можно писать

$$a = \sup_{\alpha<\Omega} a_\alpha^* = \inf_{\alpha<\Omega} a_\alpha$$

с подходящими $a_\alpha \in G$, $a_\alpha^* \in G$, т. е. с т. н. G-конституантами элемента a — где $\alpha = 1, 2, \ldots; \alpha < \Omega$.

Доказательство. I. (Случай первого предположения.)

Произведем вспомогательную классификацию элементов из A, (похожую на классификацию C-множеств).

(i) Положим $$G_0 = G.$$

(ii) Пусть уже определены классы G_β для $\beta < \alpha$. Тогда G_α будет обозначать σ-подалгебру в A, порожденную всеми результатами однократного применения операции $\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}^*$ на элементы классов G_β.

Ясно, что

$$\sum_{\alpha<\Omega} G_\alpha = A.$$

Теорема теперь доказывается при помощи индукции.

Для $a \in G_0$ нечего доказывать.

Пусть утверждение теоремы верно для всех $a \in G_\beta$, $\beta < \alpha$.

Пусть

$$b = \mathcal{A}(a_{\jmath_1 \ldots \jmath_n}) \in G_\alpha$$

есть результат однократного применения операции $\mathcal{A}$ на элементы $a_{\jmath_1 \ldots \jmath_n}$ из $\sum_{\beta<\alpha} G_\beta$.

Тогда, как говорит лемма 1,

$$b = \sup_{\gamma<\Omega} a_\gamma^* = \inf_{\gamma<\Omega} a_\gamma$$

с подходящими a_γ^*, a_γ из $\sum\limits_{\beta<\alpha} G_\beta$.

Но так как (в силу индуктивного предположения) в свою очередь

$$a_\gamma^* = \sup_{\lambda<\Omega} a_{\gamma\lambda}^*$$

и

$$a_\gamma = \inf_{\lambda<\Omega} a_{\gamma\lambda}\,,$$

где

$$a_{\gamma\lambda}^* \in G_0\,, \quad a_{\gamma\lambda} \in G_0$$

(для всех $\lambda < \Omega$), то, составив некоторые трансфинитные последовательности $\{b_\beta^*\}_{\beta<\Omega}$ из элементов $a_{\gamma\lambda}^*$ и $\{b_\beta\}_{\beta<\Omega}$ из элементов $a_{\gamma\lambda}$, получаем

$$b = \sup_{\beta<\Omega} b_\beta^* = \inf_{\beta<\Omega} b_\beta\,,$$

где $b_\beta^* \in G_0$, $b_\beta \in G_0$ для всех $\beta < \Omega$.

То же самое имеет место и в двойственном случае для дополнения $b^* = b'$ к упомянутому b.

Чтобы легко закончить индуктивный шаг, достаточно уже только применить лемму 4 в случае $M = \sum\limits_{\beta<\alpha} G_\beta$ и общие дистрибутивные тождества (см. § 2, б)) в виде

$$\sup_{\alpha<\Omega} a_\alpha \cap \sup_{\beta<\Omega} b_\beta = \sup_{\alpha,\beta} (a_\alpha \cap b_\beta)$$

(и двойственно).

II. (Случай второго предположения.) Пусть A — слабо дистрибутивная S-алгебра с сильным и слабым условиями нуля.

Произведя ту же самую классификацию элементов, как и в случае I, и применив (для завершения индуктивного шага) лемму 3 вместо леммы 4, мы нетрудно докажем наше утверждение.

Примечание к теореме I. Теорема I обобщает на случай булевых алгебр известное из дескриптивной теории множеств разбиение C-множеств в конституанты, измеримые B.

Первое предположение состоит, так сказать, из сильного требования „алгебраического рода“ и из сравнительно слабого требования „топологического рода“, между тем, как второе (альтернативное) предположение, наоборот, соединяет слабое „алгебраическое“ и сильное „топологическое“ условие.

§ 6. Существование и однозначность определенного рода свободных S-алгебр.

Определение. *S-алгебра A называется свободной сильно [слабо] дистрибутивной S-алгеброй с количеством $\mathfrak{m}$ свободных образующих, если в A существует множество G элементов мощности $\mathfrak{m}$ такое, что*

1. *сильно [слабо] дистрибутивная S-подалгебра, образованная из элементов множества G совпадает с A, и*

2. *каждое отображение φ множества G в любую сильно [слабо] дистрибутивную S-алгебру B может быть распространено на S-гомоморфное отображение всей алгебры A в алгебру B.*

(*G называется множеством свободных образующих.*)

Теорема II. *К любой мощности $\mathfrak{m}$ существует свободная сильно дистрибутивная S-алгебра с количеством $\mathfrak{m}$ свободных образующих. Эта S-алгебра — обозначим ее через $D_{\mathfrak{m}}$ — определена однозначно* (с точностью до S-изоморфизма) *данной мощностью $\mathfrak{m}$.*

Замечание перед доказательством: Как известно из абстрактной алгебры, доказательство существования (пока оно возможно)[18]) свободной алгебраической системы определенного рода выполняется так:
во-первых, строятся т. н. ,,слова" (т. е. формальные многочлены, соответствующие данным операциям системы и их комбинациям),
во-вторых, строятся элементы искомой свободной алгебраической системы как классы равносильных слов.

При этом имеются принципиально два пути:

1. *Метод значений слов*, при котором в один класс кладут все слова, которые ,,всегда" (т. е. при любых значениях простейших слов, выступающих в качестве ,,алгебраических переменных") индуктивно получают равные значения в любой данной системе значений обсужденного рода.

2. *Метод индуктивной конструкции отношения равносильности между словами.*

Этот последний метод, по существу, в математической логике принимает вид разнообразных исчислений логики (исчисления предложений, предикатные исчисления — классические и неклассические, финитные и трансфинитные).[19])

Мы будем применять второй метод: Несмотря на пользу применения его к математической логике, этот метод является несколько более ,,эффективным" (т. е. менее гипотетичным) в случае так мало исследованных систем, какими являются S-алгебры.

[18]) В этом общие рассуждения в [Ст.] (стр. 8) неточны; не всякая система алгебраических (непротиворечивых) аксиом имеет свободную алгебру.

[19]) В качестве примера трансфинитного исчисления, родственного части нами выше приведенного исчисления, можно взять, напр., П. С. Новиков [8].

Имея ввиду, что метод конструкции по существу известен, мы выполним детально лишь некоторые, не совсем очевидные шаги (в целом слишком громоздкого, но нетрудного) доказательства теоремы.

Доказательство теоремы II. Построение „слов“: Пусть G — данное множество с мощностью $\mathfrak{m} \neq 0$.

Пусть $\sim$, $\mathbf{V}$, $\mathcal{A}$ будут три „оперативных“ элемента (непринадлежащие к G) (для введения дополнения, объединения и $\mathcal{A}$-операции в конструируемую алгебру).

Построение „слов“ выполним так:

(i) Пусть $\mathfrak{S}_0 = G$, т. е. элементы из G (или т. н. переменные) являются словами порядка 0.

(ii) Если уже построено множество $\mathfrak{S}_\alpha$ слов порядков $\leqq \alpha$, то множество $\mathfrak{S}_{\alpha+1}$ слов порядков $\leqq \alpha + 1$ возникает из $\mathfrak{S}_\alpha$ добавлением

а) всех упорядоченных пар вида $(\sim, s)$ и троиц $(\mathbf{V}, s, s^*)$, где $s \in \mathfrak{S}_\alpha$, $s^* \in \mathfrak{S}_\alpha$,

б) всех упорядоченных пар вида $(\mathcal{A}, \{s_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}\})$, где $\{s_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}\}$ — некоторое отображение всех конечных последовательностей $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n$ натуральных чисел $\mathfrak{z}_i$ в $\mathfrak{S}_\alpha$ (или же т. н. S-*система* (Суслина) *слов*).

Для γ второго рода будет

$$\mathfrak{S}_\gamma = \sum_{\alpha<\gamma} \mathfrak{S}_\alpha$$

(Значит, порядками слов являются только трансфиниты первого рода.) Таким образом определено множество всех слов как сумма

$$\mathfrak{S} = \sum_{\alpha<\Omega} \mathfrak{S}_\alpha .$$

Введем еще четыре сокращенных обозначения для важиых частных случаев слов: Пусть $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некогорая счетная система слов для $k = 1, 2, \dots$ Тогда знаком

$$\mathop{\mathbf{V}}_k s_k$$

обозначаем слово

$$(\mathcal{A}, \{s_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}\}) ,$$

где

$$s_k = s_{k_1, k_2, \dots k_u} = s_{l_1, l_2, \dots l_v} ,$$

если только $k_1 = l_1 = k$.

Знаком $\mathop{\mathbf{\Lambda}}_k s_k$ обозначаем слово

$$(\mathcal{A}, \{t_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}\}) , \quad \text{где } s_k = t_{k_1, k_2, \dots k_u} = t_{l_1 \dots l_v} ,$$

если только $k = u = v$.

Слово вида $(\mathbf{V}, (\sim, r), s)$ обозначаем коротко $r \to s$.

Слово вида $(\sim, \mathbf{V}, ((\sim, r), (\sim, s)))$ обозначаем коротко $r \wedge s$.

Заметим, что нашей целью является лишь относительно удобное и скорое построение нашей алгебры; значит, мы не стараемся здесь иметь независимые требования и знаки. (Они в действительности будут зависимы.)

В частности, можно было бы ограничиться только оперативными элементами $\mathcal{A}$ и $\sim$; тогда „аксиомы" а) … г) оказались бы не нужными при подходящих дополнительных определениях. Но построение стало бы в таком случае более сложным.

Приступим, тепер к построению „исчисления слов" для построения искомой S-алгебры.

Это „исчисление" индуктивно определяет класс I единичных слов.

Если s, r, t — произвольные слова, то пусть класс I_0 содержит в точности слова следующего вида:

a) $(\mathbf{V}, s, s) \to s$,

b) $s \to (\mathbf{V}, s, r)$,

c) $(\mathbf{V}, s, r) \to (\mathbf{V}, r, s)$,

d) $(\mathbf{V}, (\sim, r), s) \to (\mathbf{V}, (\sim, (\mathbf{V}, t)\, r)), (\mathbf{V}, t, s))$.

a), b), c), d) (так же обозначенные) — это аксиомы (точнее: схемы аксиом) классического исчисления предложений Гильберт-Акермана, примененного здесь для построения исходной (в обыкновенном смысле) свободной булевой алгебры.

Пусть $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ — любая последовательность слов. Тогда в I_0 включаем еще слова

e) $s_m \to \bigvee\limits_n s_n$,

f) $\bigwedge\limits_n s_n \to s_m$ для каждого $m = 1, 2, \ldots$

e) и f) (обозначенные таким же образом) — это, по существу, аксиомы (схемы аксиом) классического предикатного исчисления Гильберт-Акермана; они будут гарантировать первое свойство счётного sup (inf) в построенной алгебре.

g) Пусть $\{s_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}\}$ — S-система слов. Обозначая для данной последовательности $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ натуральных чисел слово $s_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}$ через s_n^*, включаем в класс I_0 и все слова вида

$$\bigwedge_n s_n^* \to (\mathcal{A}, \{s_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}\}) .$$

Требование g) будет гарантировать первое свойство результата $\mathcal{A}$-операции (как sup) в построенной алгебре.

h) Пусть $\{r_{t_1 \ldots t_m}\}$ есть в смысле § 3 (см. законы дистрибутивности) диагоналная S-система слов определенной последовательности $\{s^i_{\mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n}\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ S-систем слов.

Тогда в I_0 включаем и слово

$$\bigwedge \mathcal{A}, \{s^i_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}\} \to \mathcal{A}, \{r_{t_1, \ldots t_m}\}$$

Требование h) будет гарантировать сильный закон S-дистрибутивности в построенной алгебре.

Перейдем теперь к индуктивному шагу строения класса I_α ($r, s, \ldots$ — иногда с индексами — суть любые слова).

$\delta 0$: Если $r \in \mathrm{I}_\alpha$, то $r \in \mathrm{I}_{\alpha+1}$.

$\delta 1$ (т. н. *modus ponens*): Если $r \to s \in \mathrm{I}_\alpha$ и $r \in \mathrm{I}_\alpha$, то $s \in \mathrm{I}_{\alpha+1}$.

$\delta 2$ (Правило изотонности). Если для двух S-систем слов

$$\{s_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}\} \quad \text{и} \quad \{s^*_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}\}$$

имеем

$$s_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n} \to s^*_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n} \in \mathrm{I}_\alpha$$

для любых $\mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n$, то

$$\mathcal{A}\{s_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}\} \to \mathcal{A}, \{s^*_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}\} \in \mathrm{I}_{\alpha+1}\,.$$

$\delta 3$ (правило супремума.): Если обозначить слова $s_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}$ из S-системы слов при данной последовательности $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ натуральных чисел через s^*_n, то пусть всегда (т. е. для любой $\mathfrak{z}$)

$$\bigwedge_n s^*_n \to w \in \mathrm{I}_\alpha$$

при постоянном слове w.

Тогда будет

$$\mathcal{A}, \{s_{\mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_n}\} \to w \in \mathrm{I}_{\alpha+1}\,.$$

(Правило $\delta 3$ гарантирует второе свойство результата $\mathcal{A}$-операции.)

Для γ второго рода положим

$$\mathrm{I}_\gamma = \sum_{\alpha<\gamma} \mathrm{I}_\alpha\,.$$

Таким образом определен класс

$$\mathrm{I} = \sum_{\alpha<\Omega} \mathrm{I}_\alpha$$

всех единичных слов.

Приступим к построению искомой алгебры.

Определим отношение $\Leftrightarrow$ между словами таким образом:

$$r \Leftrightarrow s$$

тогда, когда $r \to s \in \mathrm{I}$, $s \to r \in \mathrm{I}$.

Простыми рассуждениями (известными из теории исчисления предложений и предикатов, доказывается, что $\Leftrightarrow$ есть отношение эквивалентности и что классы эквивалентных слов $[s]$, $[r]$, $[t]$, ... образуют булеву алгебру $D_{\mathfrak{m}}$ в смысле следующих определений:

$$[s]' = [\sim s]\,,$$
$$[s] \cup [r] = [\mathbf{V}, s, r]\,,$$
$$[s] \cap [r] = [\sim, (\mathbf{V}, (\sim s), (\sim, r))]\,,$$
$$1 = [\mathbf{V}, (\sim, r), r]\,,$$
$$0 = [\sim, (\mathbf{V}, (\sim, r), r)]\,.$$

При этом $[r] \subseteq [s]$ в $D_\mathfrak{m}$ тогда и только тогда, когда

$$r \to s \in \mathrm{I}\,.$$

Но в $D_\mathfrak{m}$ выполнима даже следующая $\mathcal{A}$-операция:

Если $\{a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}\}$ является S-системой элементов из $D_\mathfrak{m}$, выберем[20]) в каждом из классов $a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}$ слов слово

$$s_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n} \in a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}$$

иположим

$$\mathcal{A}[a_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}) = [\mathcal{A}, \{s_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}\}]\,.$$

(Однозначность этого определения следует из $\delta 2$; свойства $\mathcal{A}$-операции, из g) и $\delta 3$.)

Из этого и из h) и $\delta 2$ нетрудно следует, что $D_\mathfrak{m}$ — сильно дистрибутивная S-алгебра. Пока не совсем очевидно, что $D_\mathfrak{m}$ не вырожденная алгебра, т. е. неочевидно, имеет ли в $D_\mathfrak{m}$ место $0 \neq 1$.[21])

Сейчас докажем более сильное предложение, а именно:

Если $g \neq g^*$, $g \in G$, $g^* \in G$, то

$$[g] \neq [g^*] \quad \text{в } D_\mathfrak{m}\,.$$

Допустим противоположное, т. е.

$$g \neq g^* \quad \text{и} \quad g \to g^* \in \mathrm{I}\,, \quad g^* \to g \in \mathrm{I}\,.$$

Пусть φ отображает G на алгебру $(\overline{0}, \overline{1})$ так, что

$$\varphi(g) = \overline{0}\,, \quad \varphi(g^*) = \overline{1}\,, \quad \overline{0} \neq \overline{1}\,.$$

Расширим φ индуктивно на все слова, полагая

$$\varphi(\sim, s) = \varphi(s)'\,,$$
$$\varphi(\mathbf{V}, s, r) = \varphi(s) \cup \varphi(r)\,,$$
$$\varphi(\mathcal{A}, \{s_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}\} = \mathcal{A}(\varphi(s_{\mathfrak{z}_1 \dots \mathfrak{z}_n}))\,.$$

Докажем, что

$$\varphi(s) = \overline{1}$$

для каждого $s \in \mathrm{I}$.

---

[20]) В общем случае необходимо пользоваться аксиомой выбора.

[21]) С точки зрения нашей конструкции, рассматриваемой в качестве логического исчисления, речь идет о непротиворечивости этого исчисления.

Действительно, если $s \in \mathrm{I}_0$, то нетрудно проверить (в случаях a)—h), что $\varphi(s) = \bar{1}$.

Но имея ввиду правила $\delta 0$—$\delta 3$, также нетрудно убеждаемся в том, что из $\varphi(s) = \bar{1}$ для всех $s \in \mathrm{I}_\alpha$ следует $\varphi(s^*) = \bar{1}$ для всех $s^* \in \mathrm{I}_{\alpha+1}$.

Следовательно, $\varphi(s) = \bar{1}$ для всех $s \in \mathrm{I}$.

Значит, мы пришли к противоречию

$$\bar{1} = \varphi(g^* \to g) = \varphi(\mathbf{V}, ((\sim, g^*), g)) = (\varphi(g^*))' \cup \varphi(g) = \bar{0}\ ,$$

значит, в действительности из $g \neq g^*$ следует $[g] \neq [g^*]$.

Таким образом, $D_{\mathfrak{m}}$ оказывается сильно дистрибутивной S-алгеброй с количеством $\mathfrak{m}$ образующих, (именно элементов вида $[g]$, где $g \in G$).

Теперь надо уже только показать, что $D_{\mathfrak{m}}$ — свободная S-алгебра своего рода со свободными образующими $[g]$.

Пусть Φ некоторое отображение всех элементов $[g] \in D_{\mathfrak{m}}$ ($g \in G$) в некоторую сильно дистрибутивную S-алгебру B.

Тогда, полагая $\varphi(g) = \Phi([g])$, определим индукивно значения $\varphi(s)$ всех слов.

Нетрудной индукцией (так же само, как и в предыдущем доказательстве того, что из $g \neq g^*$ следует $[g] \neq [g^*]$) доказывается, что если $s \to t \in \mathrm{I}$, то $\varphi(s) \subseteq \varphi(t)$ в B.

Из этого непосредственно следует, что отображение Φ можно расширить на всю $D_{\mathfrak{m}}$, полагая

$$\Phi([s]) = \varphi(s)$$

для любого элемента $[s] \in D_{\mathfrak{m}}$.

Но теперь из определения Φ уже ясно, что Φ есть S-гомоморфное отображение S-алгебры $D_{\mathfrak{m}}$ в S-алгебру B.

Что касается однозначности (в смысле S-изоморфизма) свободной сильно дистрибутивной S-алгебры $D_{\mathfrak{m}}$, то необходимые рассуждения из абстрактной алгебры столь известны, что можем их пропустить.

Таким образом, можем считать теорему II существования и однозначности сильно дистрибутивных S-алгебр доказанной.

Определение. *Если к определению свободной слабо дистрибутивной S-алгебры добавим сильное условие нуля, то получаем понятие т. н. свободной слабо дистрибутивной S-алгебры с сильным условием нуля (и с данным количеством $\mathfrak{m}$ свободных образующих).*

Теорема III. *К любой мощности $\mathfrak{m}$ существует свободная слабо дистрибутивная S-алгебра с сильным условием нуля и с количеством $\mathfrak{m}$ свободных образующих. Эта S-алгебра — обозначим ее через $\tilde{D}^0_{\mathfrak{m}}$ — определена однозначно* (с точностью до S-изоморфизма) *данной мощностью $\mathfrak{m}$.*

Доказательство проводится методом, примененным в доказательстве предыдущей теоремы II. Разница только в следующем: После построения свободной слабо дистрибутивной $\mathfrak{S}$-алгебры с количеством $\mathfrak{m}$ образующих [которое почти буквально то же самое, как и в случае теоремы II, но формально несколько проще, ввиду подходящего ослабления требования $\mathfrak{h}$)] надо еще разделить полученную $\mathfrak{S}$-алгебру на определенный s-идеал I. Именно, I образован из всех элементов x, выполняющих условие

$$x \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} d_k^{\alpha}$$

для всех $\alpha < \Omega$, если $\|d_k^{\alpha}\|$ — любая матрица с предропожением сильного условия нуля. (Мы пропустим замедляющие подробности этой небольшой компликации.) — Очевидно, что здесь будет значительно проще (но менее конструктивним) доказательство с помощью метода значений слов.

Из теоремы II непосредственно следует:

Предложение II*. *Любая сильно дистрибутивная $\mathfrak{S}$-алгебра с количеством $\mathfrak{n}$ образующих является $\mathfrak{S}$-гомоморфным образом $\mathfrak{S}$-алгебры $D_{\mathfrak{m}}$ из теоремы II, если только $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$.*

Подобное ему будет предложение III*. (которое нет надобности выписывать), вытекающее из теоремы III. Надо только вместо „сильно дистрибутивная" говорить „слабо дистрибутивная с сильным условием нуля", и вместо „$\mathfrak{S}$-алгебра $D_{\mathfrak{m}}$ из теоремы II" — „$\mathfrak{S}$-алгебра $\tilde{D}_{\mathfrak{m}}^{0}$ из теоремы III". В следующем § 7 покажем, что алгебры $D_{\aleph_0}$ и $\tilde{D}_{\aleph_0}$ в действительности $\mathfrak{S}$-изоморфны (и изоморфны $\mathfrak{S}$-телу C-множеств пространства Кантора).

§ 7. Характеризация $\mathfrak{S}$-тела C-множеств пространства Кантора как определенного рода свободной $\mathfrak{S}$-алгебры.

Основной для дальнейшего является следующая

Лемма. *Любая свободная слабо [сильно] дистрибутивная $\mathfrak{S}$-алгебра удовлетворяет слабому условию нуля.*

Доказательство. (Мы пропустим некоторые нетрудные подробности.)

a) Первый случай (слабой дистрибутивности). Назовем *дистрибутивной $2^{\aleph_1}$-полной алгеброй* булеву алгебру,[22]) в которой

1: каждое множество элементов с мощностью не более чем $2^{\aleph_1}$ имеет свой sup (и следовательно и inf) в смысле полуупорядочения алгебры ;

2: имеет место следующий *закон дистрибутивности*:

$$\inf_{\alpha<\Omega} \sup_{k<\omega_0} d_k^{\alpha} = \sup_{\{k_\lambda\}_{\alpha<\Omega}} \inf_{\alpha<\Omega} d_{k_\lambda}^{\alpha}$$

[22]) См. *Rieger* [4].

где sup вправо относится ко всем трансфинитным последовательностям $\{k_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ натуральных чисел.

Напр., тело всех подмножеств любого множества образует такую дистрибутивную $2^{\aleph_1}$-полную алгебру.

Нетрудно показать (по существу таким же образом, как и в множественном случае), что из написанного выше дистрибутивного закона следует слабое (и тоже сильное) условие нуля, так что оба условия нуля имеют место в любой дистрибутивной $2^{\aleph_1}$-полной алгебре.

Но приведенный выше дистрибутивный закон содержит слабый закон дистрибутивности в S-алгебрах как частный случай.

Следовательно, каждую дистрибутивную $2^{\aleph_1}$-полную алгебру можно считать слабо дистрибутивной S-алгеброй с обоими условиями нуля (если ограничиться образованием sup в смысле определения $\mathcal{A}$-операции).

Имея в виду определение, данное в начале § 6, мы не должны буквально выписывать, что разумеется под термином *свободная дистрибутивная* $2^{\aleph_1}$*-польная алгебра с количеством* $\mathfrak{m}$ *свободных образующих*.[23])

Методом, приведенным в этой работе при доказательстве теоремы II или в работе автора [4], можно нетрудно (однако, несколько замедлительно) показать существование (и однозначность, в смысле обсужденного sup определенного изоморфизма) такой свободной алгебры; обозначим ее через $V_{\mathfrak{m}}$.

Теперь показывается что любую свободную слабо дистрибутивную S-алгебру с количеством $\mathfrak{m}$ свободных образующих — обозначим ее через $\tilde{D}_{\mathfrak{m}}$ — (ср. определение в § 6 и теорему II) можем считать S-подалгеброй S-алгебры $V_{\mathfrak{m}}$.

Но так как $V_{\mathfrak{m}}$ удовлетворяет слабому условию нуля и так как элемент $\inf\limits_{\alpha<\Omega} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} d_k^\alpha$, где $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} d_k^\alpha \in \tilde{D}_{\mathfrak{m}}$, взятый в смысле $V_{\mathfrak{m}}$, всегда будет меньше или равен элементу $\inf\limits_{\alpha<\Omega} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} d_k^\alpha$ взятому в смысле ограниченном на $D_{\mathfrak{m}}$, то заключаем, что лемма верна в случае а) слабой дистрибутивности.

б) Приступим теперь ко второму случаю (сильной дитрибутивности). — (Заметим, что тот факт, что из сильного закона дистрибутивности в S-алгебрах следует слабый закон, никаким образом еще не позволяет свести случай а) к случаю б), потому что свободная сильно дистрибутивная S-алгебра не обязана быть свободной тоже в смысле слабой S-дистрибутивности.)

Доказательство проводится тем же самым методом, как и в а), но только со следующей небольшой модификацией:

[23]) См. *Rieger* [4].

К приведенному в случае a) sub 2: закону дистрибутивности для $2^{\aleph_1}$-полных алгебр добавим еще следующий *закон дистрибутивности*.

3: $$\inf_{i<\omega_0} \sup_{d \in E} a_i^d = \sup_{\{d_j\}_{j=1}^{\infty}} \inf_{j<\omega_0} a_j^{d_j},$$

где E обозначает множество всех действительных чисел, sup вправо относится ко множеству всех последовательностей действительных чисел.

Нетрудно проверить, что из 3: *следует сильный закон дистрибутивности*, если ограничиться $\mathcal{A}$-операцией.

Можно было бы и прямо предполагать в $2^{\aleph_1}$-полной алгебре этот последний закон, что было бы несколько слабее, но зато сложнее (для конструкции относительной свободной алгебры).

Так как остальные рассуждения не изменяются, то нашу лемму можно считать вплоне доказанной.

Замечание. То же самое заключение недопустимо в случае сильного условия нуля. А именно, могло бы случиться, что сильное условие нуля не выполняется в $\mathfrak{S}$-подалгебре $\tilde{D}_\mathfrak{m}$ (или в $D_\mathfrak{m}$) но выполняется в целой $\mathfrak{S}$-алгебре $V_\mathfrak{m}$. В случае слабого условия нуля этой опасности нет.

Теперь уже можем приступить к характеризации $\mathfrak{S}$-тела C-множеств в пространстве Кантора.

Определение. *Пусть* $(0,1)^\mathfrak{m}$ *обозначает обобщенное пространство Кантора, т. е. топологическое произведение („степень") $\mathfrak{m}$ дискретных пространств, каждое из которых состоит из двух точек* 0 *и* 1 ($\mathfrak{m} \neq 0$).

Тогда под минимальным σ-телом $B_\mathfrak{m}$ B-множеств в пространстве $(0,1)^\mathfrak{m}$ *разумеем наименьшее σ-тело подмножеств этого пространства, которое содержит все открыто-замкнутые подмножества.*

Под минимальным $\mathfrak{S}$-телом $C_\mathfrak{m}$ C-множеств этого пространства разумеем наименьшее $\mathfrak{S}$-тело множеств, которое содержит все открыто-замкнутые подмножества (и, следовательно, содержит $B_\mathfrak{m}$). Для $\mathfrak{m} = \aleph_0$ *имеем обыкновенное пространство Кантора, σ-тело $B_{\aleph_0}$ его подмножеств, измеримых B, и $\mathfrak{S}$-тело $C_{\aleph_0}$ его C-подмножеств.*

Теорема IV. *Минимальное $\mathfrak{S}$-тело $C_\mathfrak{m}$ C-множеств в обобщенном пространстве Кантора* $(0,1)^\mathfrak{m}$ *— это свободная сильно дистрибутивная $\mathfrak{S}$-алгебра с количеством $\mathfrak{m}$ свободных образующих, которыми могут быть множества точек из* $(0,1)^\mathfrak{m}$, *определенная „координата" которых равна* 1.

Доказательство. Пусть $D_\mathfrak{m}$ — свободная сильно дистрибутивная $\mathfrak{S}$-алгебра с количеством $\mathfrak{m}$ свободных образующих из теоремы II (§ 6).

Ввиду случая a) основной леммы из § 7. $D_\mathfrak{m}$ удовлетворяет слабому условию нуля. В силу теоремы I (первый случай, § 5), в $D_\mathfrak{m}$ каждый элемент $a \in D_\mathfrak{m}$ можно считать супремумом подходящих внутренних $G_\mathfrak{m}$-конституант a_α^* и инфимумом подходящих внешних $G_\mathfrak{m}$-конституант a_α ($\alpha = 1, 2, \ldots;$

$\alpha < \Omega$), которые принадлежат свободной σ-алгебре $G_{\mathfrak{m}}$ с количеством $\mathfrak{m}$ данных свободных образующих, (так как $G_{\mathfrak{m}}$ с помощью $\mathcal{A}$-операции и дополнения образует всю $D_{\mathfrak{m}}$.

Но известно,[24]) что $G_{\mathfrak{m}}$ σ-изоморфна минимальному σ-телу $B_{\mathfrak{m}}$ B-множеств обобщенного пространства Кантора $(0, 1)^{\mathfrak{m}}$.

Применяя характеристическое свойство S-алгебры $D_{\mathfrak{m}}$, продолжим некоторое определенное σ-изоморфное отображение $G_{\mathfrak{m}}$ на $B_{\mathfrak{m}}$ в S-гомоморфное отображение Φ всей $D_{\mathfrak{m}}$ в минимальное S-тело $C_{\mathfrak{m}}$ C-множеств в пространстве $(0, 1)^{\mathfrak{m}}$.

Так как $B_{\mathfrak{m}}$ образует все $C_{\mathfrak{m}}$, нетрудно видеть, что Φ есть отображение $D_{\mathfrak{m}}$ на все $C_{\mathfrak{m}}$. Остается доказать, что Φ в действительности обязано быть S-изоморфным отображением $D_{\mathfrak{m}}$ на $C_{\mathfrak{m}}$.

Доступим противоположное. Тогда существует в $D_{\mathfrak{m}}$ элемент $x \neq 0$ так, что $\Phi(x) = 0 \in C_{\mathfrak{m}}$.

Так как $x \neq 0$, то существует некоторая ненулевая внутренняя $G_{\mathfrak{m}}$-конституанта элемента x, напр., $y \in G_{\mathfrak{m}}$, $0 \neq y \subseteq x$. Но тогда будет $0 \neq \Phi(y) \in$ $\in B_{\mathfrak{m}}$, так как Φ отображает $G_{\mathfrak{m}}$ на $B_{\mathfrak{m}}$ изоморфно.

С другой стороны, $0 = \Phi(y) \subseteq \Phi(x)$, так как Φ гомоморфно отображает $D_{\mathfrak{m}}$ на $C_{\mathfrak{m}}$. Этим противоречием теорема доказана, так как утверждение об образующих тела $C_{\mathfrak{m}}$ очевидно.

Следствие. *Тело C-множеств* (обыкновенного) *пространства Кантора — это свободная сильно дистрибутивная S-алгебра, множество образующих которой счетно.*

Теорема V *S-тело $C_{\aleph_0}$ C-множеств* (обыкновенного) *пространства Кантора — это совободная слабо дистрибутивная S-алгебра с сильным условием нуля, т. е. $C_{\aleph_0}$ S-изоморфно S-алгебре $D_{\aleph_0}$ из теоремы II.*

Доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы IV., только со следующими изменениями:

Вместо теоремы II — теорема III.

Вместо первого случая теоремы I — второй случай; вместо случая а) основной леммы из § 7 — случай б) этой леммы.

Но имеется еще одна существенная разница, по сравнению с теоремой IV.: Мы должны убедиться в том, что как S-тело $C_{\aleph_0}$ C-множеств, так и σ-тело $B_{\aleph_0}$ B-множеств в пространстве Кантора удовлетворяют сильному условию нуля. Это почти очевидно, так как все множества содержащие лишь одну точку принадлежат $B_{\aleph_0}$ (и $C_{\aleph_0}$). Но сильное условие нуля уже не очевидно в общем случае $B_{\mathfrak{m}}$ (и $C_{\mathfrak{m}}$) как минимального тела B- (C-) множеств в $(0,1)^{\mathfrak{m}}$, потому что одноточечные множества не обязаны принадлежать $B_{\mathfrak{m}}$. Значит, мы не знаем, будет ли обобщение теоремы V на

---

[24]) См. *Rieger* [4], Theorem 6.

случай несчетных мощностей $\mathfrak{m} > \aleph_0$ верным. Этот вопрос мы оставим открытым.

Следствие теорем IV. и V. *Свободная сильно дистрибутивная S-алгебра $D_{\aleph_0}$ (со счетным множеством образующих) из теоремы II и свободная слабо дистрибутивная S-алгебра с сильным условием нуля $\tilde{D}^0_{\aleph_0}$ (со счетным множеством образующих) из теоремы III являются взаимо S-изоморфными*; $D_{\aleph_0} \cong \tilde{D}^0_{\aleph_0}$.

Замечание. Теорема IV характеризирует S-тело C-множеств пространства кантора как свободную алгебру с относительно сильными но ,,чисто алгебраическими" требованиями, т. е. с такими требованиями, которые выражаются в терминах операции $\mathcal{A}$. Теорема V дает другую характеризацию с несколько более слабыми алгебраическими требованиями, но с добавлением требования ,,неалгебраического" рода (касающегося свойства полуупорядочения алгебры).

Теорема IV дает следующее *расширение теоремы Люмиса*:

Каждая сильно дистрибутивная S-алгебра является S-гомоморфным образом подходящего S-тела множеств.

В частности, это представляет собой положительный ответ на в значительной мере ослабленную проблему нр. 80. из Биркгофа [Ст.].

В связи с этим уместно напоминать, что мы встретили (в § 4) даже счетные S-алгебры, неявляющиеся S-гомоморфными образами никакого S-тела множеств.

§ 8. Замечания о возможностях обобщений.

Приведенные здесь исследования представляют определенного рода ,,алгебраическое" обобщение некоторых разделов дескриптивной теории множеств. Естественно возникает вопрос о том, представит ли какой-нибудь интерес продолжение этих исследований, и по какому именно пути продолжать эти исследования.

В дескриптивной теории множеств операция $\mathcal{A}$ содержится в классе т. н. δs — операций над последовательностями множеств.

Нетрудно обобщить любую, заданную на множествах, δs — операцию на булевы алгебры.

Но для любого подмножества пространства Кантора нетрудно найти δs-операцию, в результате которой (после применения ее к раз на всегда определенную последовательность открыто-замкнутых множеств) получается именно данное множество. Это значить, что такое слишком произвольное обобщение не интересно. Из слишком большого количества $2^{2^{\aleph_0}}$-всех δs-операций надо выбрать такую, котороя может обладать некоторыми ,,натуральными" алгебраическими закономерностиями, т. е. тождеcтвами, выражаемыми в терминах самой этой операции, как это, напр. имеет место в дистрибутивных законах для $\mathcal{A}$-операции.

Такими δs-операциями можно считать т. н. R-операции [25]) R^α, где $R^1 = \mathcal{A}$ и R^α ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots; \alpha < \Omega$) составляют трансфинитную последовательность все более сильных специальных δs-операций, в результате применения которых получаем тело т. н. R-множеств как естественное расширение S-тела C-множеств.

Обобщение этих понятий на булевы алгебры принципиально возможно, но очень сложно и ненатурально, пока не имеем другого пути, кроме усиления R^α-операций. Эти усиления надо проводить два раза: раз для базисов R^α-операции, т. е. в пространстве Бэра, а раз в самой алгебре. Кажется вероятным, что при подходящих, все более и более сильных, дистрибутивных законах (составляющих трансфинитную последовательность типа Ω и касающихся операций R^α), возможно будет охарактеризовать даже тело R-множеств как свободную булеву алгебру некоторого очень сложно определенного рода. Эта возможность дана тем, что процесс Колмогорова-Серинского обобщается на R^α-операции.

Возможными, но еще менее актуальными кажутся автору некоторые ,,алгебраические`` обобщения других понятий из теории операций над множествами, изученных Канторовичем и Ливенсоном [10]. (Так, напр., понятия т. н. квазианалитической операции и т. н. теоретико-множественной операции легко формулируются без понятия принадлежности точки множеству.)

Для нашей главной цели, т. е. для применения к математической логике второго типа, такие обобщения пока не являются нужными.

Применение к математической логике.

Мы ограничимся здесь только короткой и неточной заметкой об идее применений предыдущих результатаов к математической логике, так как разработка этих применений требует отдельной статьи, которая подготовляется к печати.

В работе [4] было автором дано изоморфное преставление т. н. алгебры Линденбаума (т. н. булевой алгебры равносильных выражений нисшего предикатного исчисления) определенным подтелом σ-тела B-подмножеств пространства Кантора. При этом малый квантор (существования) является множественной (счетной) суммой соответствующих B-множеств.

Продолжая это представление в логику второго типа, мы можем, по идее Куратовского, истолковать *квантор существования для предикатной*

---

25) См. *Ляпунов* [1].

переменной с помощью проектирования в пространстве Кантора (если мы руководствуемся интуитивной канторовской теорией множеств).

Таким образом, выражения второго типа с исключительно малым квантором для предикатных переменных будут представляться A-(аналитическими) подмножествами пространства Кантора; тогда большая квантификация на предикатных переменных требует для своего представления образования CA-множеств, и чередования кванторов предикатных переменных требуют образования проективных множеств конечных классов в пространстве Кантора.

Поставим теперь перед собой задачу построить в этом смысле полное предикатное исчисление второго типа, подуская в нем, очевидно, трансфинитную индукцию первого несчетного типа.

Эта задача не разрешима, так как с одной стороны, трансфинитные конструкция множеств современными средствами всегда ведут от измеремых множеств к измеримым; но, с другой стороны, допустимо (по Геделю) существование неизмеримых множеств даже в проективном классе $PCA \cap$ $\cap\ CPCA$.

Но имея ввиду образование A- (и CA) множеств при помощи $\mathcal{A}$-операции (и дополнения), возможно понимать задачу построения полного предикатного (трансфинитного) исчисления так, чтобы она стала разрешимой.

Именно, пользуясь „алгебраическим" обобщением процесса Колмогорова-Серпинского для построения „формальных" конституант выражений, мы получаем *полное исчисление второго типа* для *нечередующихся кванторов предикатных переменных.*

Если теперь применить эти соотношения и в случае чередования кванторов дия предикатных переменных, то получим „исчисление второго типа", но полное лиш в смысле опрпределенным (трансфинитным) образом „конструктивной" квантификации существования предикатных переменных; этот смысл требует еще подровного логического раскрытия.

ЛИТЕРАТУРА.

[Ст] *Г. Биркгоф (G. Birkhoff): Теория структур* (перевод), Москва 1952.

[А] : *Н. Н. Лузин: Лекции об аналитических множествах и их приложениях*, ГИТЛ Москва 1953.

[Top] *K. Kuratowski:* Topologie I (изд. 2). Monografie matematyczne Warszawa 1948.

[1] *А. А. Ляпунов: R-множества.* Труды мат. инст. им. Стеклова XL, Москва 1953.

[2] *W. Sierpiński:* Sur une propriété des ensembles (A), Fund. Math. *8* (1926).

[3] *Е. А. Селивановский: Об одном классе эффективных множеств*, Мат. сб. *35* (1928).

[4] *L. Rieger:* On Free $\aleph_\xi$-complete Boolean Algebras, Fund. Math. *37* (1951).

[5] *L. Loomis:* On the representation of σ-complete Boolean algebras, Bull. Am. Math. Soc. *53* (1947), 757—760.

[6] *R. Sikorski:* On the representation of Boolean algebras as fields of sets. Fund. Math. *35* (1948).

[7] *В. И. Гливенко:* Géométrie des systèmes des choses normées, Am. Journ. of Mth. *59* (1937).

[8] *П. С. Новиков:* On the consistency of certain logical calculus, Мат. сб. *12* (54), (1943).

[9] *П. С. Новиков:* О непротиворечивости некоторых положений теории множеств. Труды Мат. инст. им. Стеклова, XVI III, Москва 1955.

[10] *Л. В. Канторович* и *Е. М. Ливенсон:* Memoir on the analytical operations and projective sets, Fund. Math. XVIII (1932), XX (1933).

Sumary

ON SUSLIN — ALGEBRAS AND THEIR REPRESENTATIONS

LADISLAV RIEGER, Prague.

(Received September 3, 1954.)

Let B be a Boolean algebra $\{b_{k_1, k_2, \dots k_n}\}$ a system of elements of B where $k_1, \dots, k_n = 1, 2, \dots;$ $n = 1, 2, \dots$ (a s. c. *Suslin-system*). We say that B is a *Suslin-algebra*, if always

$$\sup_{\{k_n\}_{n=1}^{\infty}} \inf_{n=1,2,\dots} b_{k_1 \dots k_n} \in B$$

(sup and inf meant in the sens of the lattice ordering of B).

Let further $\{b^j_{k_1, \dots k_n}\}$ for $j = 1, 2, \dots$ be a sequence of Suslin — systems in B. Then the Suslin system $\{a_{l_1 \dots l_m}\}$, given by

$$\begin{aligned} a_k &= b^1_k , \\ a_{k,l} &= b^1_k \cap b^1_{k,l} , \\ a_{k,l,m,} &= b^1_k \cap b^1_{k,l} \cap b^2_m , \\ a_{k,l,m,n} &= b^1_k \cap b^1_{k,l} \cap b^2_m \cap b^1_{k,l,n} , \end{aligned}$$

....

is said to be the diagonal system of the mentioned sequence

$$\{b^j_{k_1, \dots k_n}\}_{j=1}^{\infty} .$$

A Suslin-algebra B is then said to be *distributive*, if the following identity holds:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \sup_{\{k_n\}_{n=1}^{\infty}} \bigcap_{n=1}^{\infty} b^i_{k_1, \dots k_n} = \sup_{\{l_m\}_{m=1}^{\infty}} \bigcap_{m=1}^{\infty} a_{l_1, \dots l_m} .$$

Every Suslin-field of sets is distributive, but there exist distributive Suslin-algebras not isomorphic with a set-field.

The main result is as follows: *The set-field of the s. c. C-subsets of the Cantor discontinuum* (i. e. the set-field obtained by starting from open-and-closed subsets and repeating the Suslin A-operation and complementation) *is a free distributive Suslin-algebra with countable many generators.*

This yields the *positive solution* of a very restricted problem[1]) Nr. 80 of G. Birkhoff's *Lattice theory* (of extending Loomis — theorem to uncountable operations in Boolen algebras), whereas this problem has a *negative solution even* if it is *restricted* to *Suslin-algebras.*

Concerning the method of the paper, two decisive points are to be emphazised:

(1) An *"algebraical" extension* of the known s. c. Kolmogoroff-Sierpiński *process* in the descriptive set-theory, which gives the possibility of an *algebraical construction* of the s. c. *borelian constituants* (of analytical and of some more complicated constructive sets).

(2) A s. c. *zero-condition*[2]) which is fulfilled in free distributive Suslin-algebras and which warrants the convergence of the Kolmogoroff-Sierpiński process (in Ω steps) in distributive Suslin-algebras.

It is also shown that the generalization of this process is essential, i. e. there are Suslin-algebras with a convergent Kolmogoroff-Sierpiński-process, which are not ismomorphic to a set field.

The whole paper is in some sense an algebraisation of a part of the (constructive) descriptive set-theory. But the author's aim was to bring certain preparative considerations to a planned new theory of the *quantification* of *predicate variables* of *mathematical logic.*

---

[1]) I. e. restricted to *distributive* Suslin-algebras.

[2]) See § 2.