

Jaroslav Hájek

Асимптотическая эффективность одной последовательности тестов

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 1, 26–30

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100176>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОДНОЙ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТЕСТОВ

ЯРОСЛАВ ГАЕК (JAROSLAV HÁJEK), Прага.

(Поступило в редакцию 8/III 1955 г.)

Обозначим через H_μ гипотезу, утверждающую, что случайные величины D_1, D_2, \dots, D_n независимо нормально распределены $(\mu\sigma, \sigma^2)$. Содержанием настоящей работы является утверждение, что тест гипотезы H_0 против альтернативной гипотезы H_μ ($\mu \neq 0$), основанный на статистике (1.1), имеет в смысле определения 5.1 асимптотическую эффективность (5.2).

1. Статистика α_k . Пусть k — произвольное натуральное число, меньше n . Определим статистику

$$\alpha_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \varphi(D_{i_1}, \dots, D_{i_k}), \quad (1.1)$$

где функция $\varphi(d_1, \dots, d_k)$ принимает значения

$$\begin{aligned} \varphi(d_1, \dots, d_k) &= 1 \quad \text{если } d_1 + \dots + d_k > 0, \\ &= 0 \quad \text{в противном случае.} \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. Средняя α_k . Если имеет место H_μ , то $D_1 + \dots + D_k$ имеет нормальное распределение $(k\mu\sigma, k\sigma^2)$. Среднюю можно, следовательно, представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\alpha_k | H_\mu) &= \binom{n}{k} \mathbf{E}[\varphi(D_1, \dots, D_k) | H_\mu] = \binom{n}{k} P(D_1 + \dots + D_k > 0 | H_\mu) = \\ &= \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\mu\sqrt{k}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx / \sqrt{2\pi}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

3. Дисперсия α_k . Из (1.1) и (1.2) следует, что¹⁾

$$\mathbf{D}^2(\alpha_k | H_\mu) = \binom{n}{k} \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \binom{n-k}{k-r} \text{cov}[\varphi(D_1, \dots, D_k), \varphi(D_{k-r+1}, \dots, D_{2k-r}) | H_\mu]. \quad (3.1)$$

¹⁾ Подробности см. в [1].

Ковариации, выступающие в правой части, являются непрерывными функциями μ ; следовательно, для любой последовательности $\{\mu_n\}$, $\mu_n \rightarrow 0$, будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{D}^2(\alpha_k | H_{\mu_n}) \frac{(k-1)!^2}{n^{2k-1}} = \text{cov} [\varphi(D_1, \dots, D_k), \varphi(D_k, \dots, D_{2k-1}) | H_0] \quad (3.2)$$

Если имеет место H_0 , то $D_1 + \dots + D_k$, $D_k + \dots + D_{2k-1}$ имеют нормальное распределение $(0, k\sigma^2)$, ковариация которого σ^2 , так что

$$\begin{aligned} P(D_1 + \dots + D_k > 0, D_k + \dots + D_{2k-1} > 0 | H_0) = \\ = \int_{\substack{x > 0 \\ y > 0}} \int e^{-\frac{x^2 - 2xy/k + y^2}{2k(1-1/k^2)\sigma^2}} \frac{dx dy}{2k\pi\sigma^2\sqrt{1-1/k^2}}. \end{aligned}$$

Этот интеграл можно при помощи преобразования

$$\begin{aligned} x &= u\sigma\sqrt{k}, \\ y - \frac{1}{k}x &= v\sigma\sqrt{1-1/k^2} \end{aligned}$$

привести к виду

$$\int_{\substack{u > 0 \\ u + v\sqrt{k^2-1} > 0}} \int e^{-1(u^2 + v^2)} \frac{du dv}{2\pi},$$

и, наконец, путем преобразования

$$u = \rho \cos \omega, \quad v = \rho \sin \omega$$

к виду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\arcsin 1/k}^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \int_0^\infty \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{4} + \frac{\arcsin 1/k}{2\pi}.$$

Объединяя эти уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \text{cov} [\varphi(D_1, \dots, D_k), \varphi(D_k + \dots + D_{2k-1}) | H_0] = \\ = P(D_1 + \dots + D_k > 0, D_k + \dots + D_{2k-1} > 0 | H_0) - \frac{1}{4} = \\ = \frac{\arcsin 1/k}{2\pi}. \end{aligned}$$

Подставляя в (3.2), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{D}^2(\alpha_k | H_{\mu_n}) \frac{(k-1)!^2}{n^{2k-1}} = \frac{\arcsin 1/k}{2\pi}, \quad (\mu_n \rightarrow 0). \quad (3.3)$$

4. Предельное распределение α_k . Путем незначительной модификации²⁾

²⁾ Дело здесь главное в том, что вместо предельного распределения частных сумм последовательности независимых, одинакового распределенных случайных величин, надо рассматривать предельное распределение сумм $\sum_{i=1}^n \xi_{in}$, где $\xi_{1n}, \dots, \xi_{nn}$ имеют одинаковое но в общем случае для каждого n иное распределение. Это затруднение можно легко устранить, например, используя теорему 11 из главы 9 в книге Б. В. Гнеденко „Курс теории вероятностей“, Москва 1950.

общего метода, примененного в работе [1], можно было бы доказать, что распределение $(\alpha_k - \mathbf{E}\alpha_k)/\mathbf{D}\alpha_k$, обусловленное гипотезой H_{μ_n} является при $n \rightarrow \infty$ и $\mu_n \rightarrow 0$ асимптотически нормальным $(0, 1)$.

5. Асимптотическая эффективность α_k -теста. T -тестом гипотезы H_0 назовем тест, основанный на статистике $T = T(D_1, \dots, D_n)$ таким образом, что H_0 опровергнем, как только $T \leq T_1$, соотв. $T \geq T_2$, где T_1 и T_2 суть критические значения с данным уровнем значительности. Асимптотическую эффективность T -теста для нашего случая³⁾ определим следующим образом:

Определение 5.1. Пусть распределение статистики $T = T(D_1, \dots, D_n)$ обусловленное гипотезой H_{μ_n} , является при $n \rightarrow \infty$ и $\mu_n \rightarrow 0$ асимптотически нормальным. Тогда число

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \mu} \mathbf{E}(T|H_{\mu})|_{\mu=0} \right]^2}{n \mathbf{D}^2(T|H_{\mu_n})} (\mu_n \rightarrow 0), \quad (5.1)$$

если оно существует, назовем асимптотической эффективностью T -теста гипотезы H_0 против альтернативной гипотезы H_{μ} ($\mu \neq 0$).

Как показано в [2], весь смысл асимптотической эффективности e заключается в том, что относительно данного случая T -тест имеет при n наблюдениях приблизительно ту же мощность, как t -тест Стьюдента при ne наблюдениях, если только n достаточно велико и $|\mu|$ является достаточно малым.

Вычислим теперь асимптотическую эффективность e_k α_k -теста. Ввиду (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \mathbf{E}(\alpha_k|H_{\mu}) \Big|_{\mu=0} = \binom{n}{k} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_{-\infty}^{\mu/\sqrt{k}} e^{-x^2} dx / \sqrt{2\pi} \Big|_{\mu=0} = \binom{n}{k} \sqrt{\frac{k}{2\pi}}.$$

Подставляя этот результат в (5.1), получим с учетом (3.3)

$$e_k = \frac{1}{k \arcsin 1/k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

6. Приложение. Статистика α_1 равна количеству случаев, когда $D_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, так что α_1 -тест и известный „знаковый“ тест тождественны. Ввиду (5.2) асимптотическая эффективность этого теста будет

$$e_1 = \frac{1}{2}\pi \doteq 0,637. \quad (6.1)$$

Значительно более эффективным является α_2 -тест

$$e_2 = \frac{1}{3}\pi \doteq 0,955. \quad (6.2)$$

³⁾ Более общее определение не приводим, потому что оно кажется, в литературе еще не установилось.

Но для приложений всего важнее является α -тест, основанный на статистике $\alpha = \alpha_2 + \alpha_1$, который вводится в работе [3]. Он вычисляется таким образом, что наблюдения d_1, d_2, \dots, d_n случайных величин D_1, D_2, \dots, D_n упорядочим по абсолютной величине

$$|d^{(1)}| < |d^{(2)}| < \dots < |d^{(n)}|,$$

и сложим верхние порядковые индексы положительных (отрицательных) наблюдений. Так как $\lim \alpha_1 / \mathbf{D}\alpha_2 = 0$, то асимптотическая эффективность α -теста равна асимптотической эффективности α_2 -теста (6.2).

Сравнивая (6.1) и (6.2), видим, что увеличение вычислительной работы при использовании α -теста вместо „знакового“ теста вполне оплачивается значительным увеличением асимптотической эффективности. Кроме того, устанавливая тест более общей нулевой гипотезы, можно воспользоваться не только α_1 -тестом, но и α -тестом. α -тестом можно, например, воспользоваться в случае нулевой гипотезы, утверждающей, что случайные величины D_1, D_2, \dots, D_n , независимы и что все они имеют относительно нуля симметричное распределение. Это наступает, например, тогда, если $D_i = X_i - Y_i$ причем векторы (X_i, Y_i) , имеют то же распределение, как и векторы (Y_i, X_i) , $i = 1, \dots, n$.

Из (4.2) далее следует, что асимптотическая эффективность α_k -теста возрастает вместе с k , причём

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 1. \quad (6.3)$$

Но на практике α_k -тесты ($k > 2$) не очень пригодны, потому что они менее эффективны и при том требуют более сложной вычислительной работы, чем t -тест Стьюдента. Кроме того, аналогично t -тесту они зависят от специфической формы распределения D_1, D_2, \dots, D_n .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *W. Hoefding*: A class of statistics with asymptotically normal distributions, *Ann. Math. Stat.* XIX (1948), 293—325.
- [2] *G. E. Noether*: „On a theorem of Pitman“, *Ann. Math. Stat.* XXVI (1955), 64—68.
- [3] *Я. Гаек*: Некоторые порядковые распределения и их применение, (*J. Hájek*: Někteřá pořadová rozdělení a jejich použití), *Časopis pro pěstování matematiky*, 80 (1955), 17—31.

Summary

THE ASYMPTOTIC EFFICIENCY OF SOME SEQUENCE OF TESTS

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Received March 8, 1955.)

Let H_μ be a hypothesis, that random variables D_1, D_2, \dots, D_n are independent and normal $(\mu\sigma, \sigma^2)$. Test of the null hypothesis H_0 against the alternative H_μ ($\mu \neq 0$) based on statistic (1.1) has in the sense of the definition 5.1 asymptotic efficiency (5.2).