Czechoslovak Mathematical Journal

Jaroslav Kurzweil

Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 2, 217–259

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100195`

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

ОБ ОБРАЩЕНИИ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ (Jaroslav Kurzweil), Прага.

Поступило в редакцию 6 VII 1955 г.

Цель работы — доказать, что вторая теорема Ляпунова об устойчивости движения допускает обращение при единственном условии, что правая часть дифференциального уравнения $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t)$ непрерывна.

Введение

Мы будем исследовать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) , \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Эту систему мы представим в векторном виде

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t) , \tag{1,01}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ (x_i, f_i вещественны). Предположим, что векторная функция $f(x, t)$ определена и непрерывна для $t \geqq 0$, $\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} < H$, где H — положительная постоянная, что $f(0, t) = 0$ для $t \geqq 0$ и что интеграл уравнения (1,01) однозначно определяется начальным условием. Согласно Ляпунову, назовем нулевое решение уравнения (1,01) устойчивым, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что каждый интеграл $x(t)$ уравнения (1,01) удовлетворяющий условию $\|x(0)\| \leqq \delta$, удовлетворяет и условию $\|x(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq 0$.[1]) Если же кроме того существует такое число $\delta_0 > 0$, что каждое решение уравнения (1,01), удовлетворяющие условию $\|x(0)\| < \delta_0$, удовлетворяет также условию $x(t) \to 0$ для $t \to \infty$, то мы назовем нулевое решение системы (1) асимптотически устойчивым.

[1]) Мы предполагаем, что каждый интеграл уравнения (1,01) определен на наибольшем возможном интервале.

Мы будем рассматривать т. наз. второй метод Ляпунова для исследования устойчивости нулевого решения. Следующие определения позволят нам сформулировать результаты Ляпунова:

Непрерывную функцию $U(x) = U(x_1, \ldots, x_n)$, определенную для $\|x\| < h$, назовем положительно-определенной, если $U(0) = 0$, $U(x) > 0$ для $0 < \|x\| < h$.

Непрерывную функцию $V(x, t)$, определенную для $\|x\| < h$, $t \geqq 0$, назовем положительно-определенной, если $V(0, t) = 0$ $(t \geqq 0)$ и если существует непрерывная положительно-определенная функция $U_1(x)$ (определенная для $\|x\| < h$) такая, что $U_1(x) \leqq V(x, t)$ для $\|x\| < h$, $t \geqq 0$.

Непрерывную функцию $V(x, t)$, определенную для $\|x\| < h$, $t \geqq 0$, назовем функцией, допускающей бесконечно малый высший предел, если существует непрерывная положительно-определенная функция $U_2(x)$ (определенная для $\|x\| < h$) такая, что $|V(x, t)| \leqq U_2(x)$ для $\|x\| < h$, $t \geqq 0$.

Если функция $V(x, t) = V(x_1, \ldots, x_n, t)$ обладает непрерывными частными производными, то производной функции $V(x, t)$ по полю уравнения (1,01) назовем функцию

$$W(x, t) = W(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial V}{\partial t} \cdot$$

Очевидно,

$$W(x_0, t_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t), t) \Big|_{t=t_0},$$

где $x(t)$ — интеграл уравнения (1,01), выполняющий условие $x(t_0) = x_0$. Теперь можно сформулировать теоремы Ляпунова.[2])

Первая теорема Ляпунова. *Если существует функция $V(x, t)$, которая определена для $\|x\| < h$, $t \geqq 0$ $(0 < h \leqq H)$, обладает непрерывными частными производными первого порядка по переменным $x_1, \ldots x_n, t$, если она положительно-определенна и если функция $W(x, t)$ не принимает положительных значений, то нулевой интеграл уравнения* (1,01) *устойчив.*

Вторая теорема Ляпунова. *Если существует функция $V(x, t)$, которая определена для $\|x\| < h$, $t \geqq 0$ $(0 < h \leqq H)$, обладает непрерывными частными производными первого порядка по переменным $x_1, \ldots x_n$, t, если она положительно-определенна и допускает бесконечно малый высший предел, и если функция $W(x, t)$ отрицательно-определенна, то нулевой интеграл уравнения* (1,01) *асимптотически устойчив.*

Ляпунов предполагал, что функции f_i можно разложить в степенные ряды по переменным $x_1, \ldots, x_n, t$; однако, его доказательства сохраняют силу и при более общих сделанных нами предположениях.[3]) Теоремы

---

[2]) См. [1].

[3]) При тех же предположениях формулирует теоремы Ляпунова *И. Г. Малкин* в монографии [2].

Ляпунова оказались эффективным критерием для исследования устойчивости нулевого решения конкретных систем дифференциальных уравнений и позволили разработать подробную теорию устойчивости нулевого решения уравнения (1,01) при условии, что функции f_i можно разложить в степенные ряды по переменным $x_1, \ldots, x_n, t$.

Естественно возник вопрос, допускают ли теоремы Ляпунова обращение, т. е. можно ли для каждого уравнения (1,01), нулевой интеграл которого устойчив (асимптотически устойчив), найти функцию $V(x, t)$, выполняющую предположения первой (второй) теоремы Ляпунова? Этим вопросом начали заниматься казанские математики около 1930 г. Персидский [3] доказал, что если нулевой интеграл уравнения (1,01) устойчив и если функции $\partial f_i/\partial x_j$ непрерывны, то существует функция $V(x, t)$, удовлетворяющая условиям первой теоремы Ляпунова. Подобным же образом Курцвейль [4] охарактеризовал случай, когда нулевое решение уравнения (1,01) равномерно устойчиво.[4])

Обращением второй теоремы Ляпунова впервые занимался Ж. Л. Массера [5]. Массера доказал, что если нулевой интеграл уравнения (1,01) асимптотически устойчив, если функция $f(x, t)$ не зависит от переменной t (если $f(x, t)$ — периодическая функция переменной t при фиксированном x) и если производные $\partial f_i/\partial x_j$ непрерывны, то существует функция $V(x)$ ($V(x, t)$), удовлетворяющая условиям второй теоремы Ляпунова. Эти результаты углубил И. Г. Малкин [6]. Малкин заметил, что если выполнены условия второй теоремы Ляпунова, то можно итти дальше утверждения, что нулевой интеграл уравнения (1,01) асимптотически устойчив; пусть $x(t, t_0, x_0)$ есть интеграл уравнения (1,01), определенный условием $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$: функции $x(t_0 + t, t_0, x_0)$ стремятся к нулю для $t \to \infty$ равномерно относительно t_0 и x_0. Наоборот, как доказал Малкин, если функции $x(t_0 + t, t_0, x_0)$ стремятся равномерно к нулю и если частные производные $\partial f_i/\partial x_j$ непрерывны и ограничены, то существует функция $V(x, t)$, выполняющая условия второй теоремы Ляпунова. Е. А. Барбашин и Н. Н. Красовский [7] исследовали подобным же образом случай т. наз. асимптотической устойчивости в целом (т. е. $f(x, t)$ определена для всех $x, t \geqq 0$ и $x(t, t_0, x_0) \to 0$ для любых $x_0, t_0 \geqq 0$). В. И. Зубов в сообщении [8] исследует другую разновидность понятия „асимптотически устойчивый нулевой интеграл“ и в работе [9] подробно разбирает автономный случай. Значение работ [8] и [9] заключается прежде всего в том, что Зубов не разыскивает

[4]) Нулевое решение уравнения (1,01) назовем равномерно устойчивым, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что имеет место утверждение: если какой-либо интеграл $x(t)$ уравнения (1,01) выполняет для любого $t_0 \geqq 0$ условие $\|x(t_0)\| < \delta$, то он выполняет также условие $\|x(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq t_0$.

Если существует функция $V(x, t)$ с непрерывными частными производными, если она положительно-определенна и допускает бесконечно малый высший предел, причем $W(x, t) \leqq 0$, то нулевой интеграл уравнения (1,01) будет равномерно устойчивым и наоборот.

функцию $V(x, t)$ только для x достаточно близких к нулю, но определяет функцию $V(x, t)$ на наибольшем возможном множестве.

При таком положении вещей естественно возникает задача: доказать обращение теорем Ляпунова при как можно более слабых предположениях относительно функции $f(x, t)$. Решению этой задачи и посвящается настоящая работа.[5])

Теоремы Ляпунова и их доказательства остаются в силе при единственном предположении, что функция $f(x, t)$ непрерывна; нет необходимости предполагать, что интеграл однозначно определяется начальными условиями.

В настоящей работе исследуется обращение второй теоремы Ляпунова. Вторая теорема Ляпунова носит локальный характер и позволяет нам при известных условиях утверждать, что $x(t, t_0, x_0) \to 0$ для $t \to \infty$, если $\|x_0\|$ достаточно мало. Поэтому мы докажем сначала некоторую модификацию второй теоремы Ляпунова (см. теорему 1), преимущество которой состоит в том, что согласно этой теореме можно при известных условиях утверждать, что все интегралы уравнения (1,01) стремятся к нулю. Главным результатом настоящей работы является то, что теорему 1 можно обратить (см. теорему 7). Притом мы постоянно придерживаемся условия, что правая часть уравнения (1,01) непрерывна. Прежде всего мы построим функцию $V^*(x, t)$, выполняющую условия второй теоремы Ляпунова, но являющуюся только локально-липшицевской функцией. (Притом условие отрицательной определенности функции $W(x, t)$ нужно формулировать более общим образом.) При помощи некоторой теоремы об аппроксимации и теоремы о сглаживании мы найдем функцию $V(x, t)$, выполняющую условия второй теоремы Ляпунова и обладающую непрерывными частными производными всех порядков. Таким образом мы одновременно обобщаем результаты, содержащиеся в работе [7] и некоторые результаты работы [9].

Наконец, мы обратим внимание на топологические свойства множества, на котором исследуется уравнение (1,01). В частности, из существования функции $V(x, t)$ элементарным образом следует, что т. наз. область асимптотической устойчивости для уравнения $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t)$ гомеоморфна шару в E_n. Гомеоморфизм, который мы построим, обладает непрерывными производными всех порядков по координатам вектора x и отличным от нуля якобианом.

В следующей работе мы исследуем подобным же методом обращение первой теоремы Ляпунова.

---

[5]) Во время подготовки настоящей работы к печати автор узнал из письма, что *Ж. Массера* независимо сформулировал и разрешил подобную проблему. Решение Массера будет опубликовано в журнале Annals of Mathematics.

1. Вторая теорема Ляпунова.

В настоящем параграфе мы докажем вторую теорему Ляпунова в несколько видоизмененной форме. Введем прежде всего некоторые обозначения.

Пусть G — открытое подмножество в пространстве E_n, $0 \in G$. Пусть F — дополнение множества G в E_n.

Для $x \in E_n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ положим $\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, и если $H \subset E_n$, H непусто, то пусть $\varrho(x, H)$ означает расстояние точки x от множества H, т. е.

$$\varrho(x, H) = \inf_{z \in H} \|x - z\| .$$

Если H_1, H_2 — непустые множества в E_n, то $\varrho(H_1, H_2)$ означает расстояние между ними, т. е.

$$\varrho(H_1, H_2) = \inf_{\substack{x \in H_1 \\ z \in H_2}} \|x - z\| .$$

Далее для $x \in G$ положим

$$\omega(x) = \max\left(\|x\|, \frac{1}{\varrho(x, F)} - \frac{2}{\varrho(0, F)}\right)$$

($\omega(x) = \|x\|$, если $G = E_n$).

Если α — положительное число, то пусть $\Omega(\alpha)$ обозначает множество тех точек $x \in G$, для которых $\omega(x) < \alpha$. Из непрерывности функции $\omega(x)$ легко следует, что множество $\Omega(\alpha)$ непусто и открыто и что имеет место $G = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega(i)$; если $\alpha > \beta > 0$, то будет и $G \supset \overline{\Omega(\alpha)} \supset \Omega(\alpha) \supset \overline{\Omega(\beta)}$.[6] Пусть $C\Omega(\alpha)$ есть дополнение множества $\Omega(\alpha)$ в E_n.

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

(x_i, f_i вещественны). Эту систему будем писать в векторном виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) . \tag{1,01}$$

При этом предполагаем, что функция $f(x, t)$ определена и непрерывна для $x \in G$, $t \geqq 0$ и что $f(0, t) = 0$ для $t \geqq 0$.

Определение 1. Нулевое решение уравнения (1,01) назовем сильно устойчивым в G, если для любых положительных чисел β и ε существуют положительные числа $B = B(\beta)$, $T = T(\beta, \varepsilon)$ так, что соблюдаются условия

$$B(\beta) \to 0 \quad \text{монотонно для } \beta \to 0. \tag{1,02}$$

[6]) Если $H \subset E_n$, то $\overline{H}$ является замыканием множества H в E_n.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Если функция } y(t) \text{ удовлетворяет уравнению (1,01) для } t_0 \leqq t < \\ < t_1,\ 0 \leqq t_0 < t_1 \leqq \infty \text{ и условию } \omega(y(t_0)) \leqq \beta, \text{ то существует реше-} \\ \text{ние } x(t) \text{ уравнения (1,01), определенное для } t \geqq t_0 \text{ и выполняю-} \\ \text{щее условия } x(t) = y(t) \text{ для } t_0 \leqq t < t_1,\ \omega(x(t)) < B, \text{ для } t \geqq t_0, \\ \omega(x(t)) < \varepsilon, \text{ для } t \geqq t_0 + T.\end{array}\right\} \quad (1{,}03)$$

Теорема 1. *Предположим, что существуют функции $V(x, t)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ так, что выполняются следующие условия:*

I. *Функция $V(x, t)$ определена и непрерывна для $x \epsilon G$, $t \geqq 0$ и обладает непрерывными частными производными первого порядка по переменным $x_1, \ldots x_n$, t для $x \epsilon G$, $t > 0$.*

II. *Функции $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ определены и непрерывны для $x \epsilon G$; $U_1(0) = U_2(0) = U_3(0) = 0$; $U_1(x) > 0$, $U_2(x) > 0$, $U_3(x) > 0$ для $x \neq 0$, $U_2(x) \to \infty$, если $\omega(x) \to \infty$.*

III. $U_2(x) \leqq V(x, t) \leqq U_1(x)$, $x \epsilon G$, $t \geqq 0$.

IV. $W(x, t) \leqq - U_3(x)$, $x \epsilon G$, $t \geqq 0$.

Тогда нулевое решение уравнения (1,01) *будет сильно устойчиво в G.*

Эта теорема аналогична второй теореме Ляпунова и содержит также случай т. наз. асимптотической устойчивости в целом (см. [7]). Приведенное нами доказательство является нетрудной модификацией доказательства, данного Ляпуновым.

Доказательство. Предположим, что существуют функции $V(x, t)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$, удовлетворяющие условиям I—IV, что даны положительные числа β и ε и что функция $y(t)$ является решением уравнения (1,01) для $t_0 \leqq t < t_1$, $\omega(y(t_0)) \leqq \beta$. Множество $\overline{\Omega(\beta)}$, очевидно, компактно. Положим

$$M = 2 \max_{x \epsilon \Omega(\beta)} U_1(x) .$$

Пусть $B = B(\beta)$ есть наименьшее число такое что справедливо утверждение: если $x \epsilon G$, $\omega(x) \geqq B$, то $U_2(x) \geqq M$. Нетрудно убедиться, что число $B(\beta) > 0$ существует и что $B(\beta) \to 0$ монотонно для $\beta \to 0$. Далее докажем, что имеет место неравенство

$$\left| \omega(y(t)) < B \right| \quad t_0 \leqq t < t_1 . \tag{1,04}$$

Ясно, что $B > \beta$, откуда $\omega(y(t_0)) < B$. Если бы не имело места (1,04), то существовало бы такое число t_2, $t_0 < t_2 < t_1$ что было бы $\omega(y(t_2)) \geqq B$. Отсюда следует

$$V(y(t_2), t_2) \geqq U_2(y(t_2)) \geqq M , \tag{1,05}$$

$$V(y(t_0), t_0) \leqq U_1(y(t_0)) \leqq \tfrac{1}{2} M , \tag{1,06}$$

так как $y(t_0) \in \Omega(\beta)$. Ввиду того, что функция $W(x, t)$ не принимает положительных значений ($W(x, t) \leqq -U_3(x)$) для $x \in G$, $t > 0$, функция $V(y(t), t)$, $t_0 \leqq t < t_1$, не возрастает. Поэтому невозможно, чтобы одновременно имели место неравенства (1,05) и (1,06), в силу чего справедливо (1,04).

Подобным же образом и при помощи обычных рассуждений можно обнаружить существование решения $x(t)$ уравнения (1,01), определенного для $t \geqq t_0$ и выполняющего условия $x(t) = y(t)$, для $t_0 \leqq t < t_1$, $\omega(x(t)) < B(\beta)$, для $t \geqq t_0$.

Отыщем теперь настолько малое число $\beta_1 > 0$, чтобы было $B(\beta_1) < \varepsilon$. Множество точек $x \in G$, для которых имеет место $\beta_1 \leqq \omega(x) \leqq B(\beta)$ компактно и функция $U_3(x)$ достигает на этом множестве положительного минимума m. Положим $T = M/m$. Не может иметь места $\omega(x(t)) \geqq \beta_1$ для $t_0 \leqq \leqq t \leqq t_0 + T$. В этом случае было бы, то-есть,

$$W(x(t), t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t), t) \leqq -m\,, \quad t_0 \leqq t \leqq t_0 + T\,,$$

и

$$V(x(t), t) = V(x(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t} W(x(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\tau \leqq \tfrac{1}{2}M - m(t - t_0)\,,$$

так что было бы $V(x(t), t) < 0$ для $t_0 + \frac{1}{2}T < t \leqq t_0 + T$, что невозможно. Итак, существует такое число t_4, $t_0 \leqq t_4 \leqq t_0 + T$, что $\omega(x(t_4)) < \beta_1$. Это значит, что справедливо неравенство $\omega(x(t)) < B(\beta_1) < \varepsilon$ для $t \geqq t_4$, и тем более неравенство $\omega(x(t)) < \varepsilon$ для $t \geqq t_0 + T$.

Теорема 1 доказана.

2. Обращение второй теоремы Ляпунова. Предварительная формулировка

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

Функцию $V(x, t)$, определенную для $x \in G$, $t \geqq 0$, назовем локально липшицевской, если для всякой точки (x_0, t_0), $x_0 \in G$, $t_0 \geqq 0$ существуют положительные постоянные K и δ такие, что

$$|V(x^{(1)}, t_1) - V(x^{(2)}, t_2)| \leqq K(\|x^{(1)} - x^{(2)}\| + |t_1 - t_2|)$$

всякий раз, когда

$$\|x^{(1)} - x_0\| < \delta,\ \|x^{(2)} - x_0\| < \delta,\ |t_1 - t_0| < \delta,\ |t_2 - t_0| < \delta,\ t_1 \geqq 0,\ t_2 \geqq 0.$$

Целью настоящего параграфа является доказательство теоремы 2; из теоремы 2 при помощи двух дальнейших теорем следует, что теорему 1 можно обратить.

Теорема 2. *Предположим, что нулевой интеграл уравнения* (1,01) *является сильно устойчивым в G.*

Тогда существуют функции $V^*(x, t)$, $U_4(x)$, $U_5(x)$, $U_6(x)$ так, что выполняются следующие условия:

I. *Функция* $V^*(x, t)$ *является определенной и локально липшицевской для* $x \epsilon G$, $t \geqq 0$, $x \neq 0$.

II. *Функции* $U_4(x)$, $U_5(x)$, $U(x)$ *опредлены и непрерывны для* $x \epsilon G$, $U_4(0) = U_5(0) = U_6(0) = 0$; $U_4(x) > 0$, $U_5(x) > 0$, $U_6(x) > 0$, $x \neq 0$; $U_5(x) \to \infty$, *если* $\omega(x) \to \infty$.

III. $U_5(x) \leqq V^*(x, t) \leqq U_4(x)$, $x \epsilon G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$.

IV. $$\limsup_{t \to t_0 -} \frac{V^*(x(t), t) - V^*(x(t_0), t_0)}{t - t_0} \leqq - U_6(x(t_0)), \quad 0 < t_0 < \infty$$

где $x(t)$ - *произвольное решение уравнения* (1,01).

Притом функлия $V^*(x, t)$ *не зависит от* t, *если функция* $f(x, t)$ *нэ зависит от* t. *Функция* $V^*(x, t)$ *периодическая по отношению к* t *периода* ω_1, *еслы* $f(x, t) = f(x, t + \omega_1)$.

Так как доказательство теоремы 2 довольно длинно, то мы сначала вкратце наметим его ход.

Как мы уже упоминали в введении, впервые обращением второй теоремы Ляпунова занимался Ж. Л. Массера в работе [5]. И. Г. Малкин в работе [6] пользуется тем же методом, как и Массера, но исходит из более общих предположений.

Малкин определяет функцию $V(x, t)$ следующим образом: прежде всего он выбирает фиксированную функцию $G(\zeta)$ для $\zeta \geqq 0$; $G(\zeta) > 0$ для $\zeta > 0$, $G(0) = 0$. Возьмем на момент фиксированную точку (x, t), $t \geqq 0$. Пусть $y(\tau)$ есть интеграл уравнения (1,01), определенный для $\tau \geqq t$ и выполняющий условие $y(t) = x$. (Существует в точности один такой интеграл, так как Малкин предполагает, что производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial t}$ непрерывны и ограничены и что все интегралы уравнения (1,01) равномерно стремятся к нулю.) Теперь Малкин определяет функцию

$$V(x, t) = \int_t^\infty G(\|y(\tau)\|^2) \, \mathrm{d}\tau . \tag{2,01}$$

Малкин доказывает, что при надлежащем подборе функции $G(\zeta)$ функция $V(x, t)$ допускает бесконечно малый высший предел. Из предположений относительно уравнения (1,01) $\left(\text{ограниченные производные } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial t}\right)$ и из условий, которым удовлетворяет функция $G(\zeta)$ следует, что функция $V(x, t)$ обладает непрерывными и ограниченными производными первого порядка по переменным $x_1, \ldots, x_n, t$ и из формулы (2,01) следует, что $W(x, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} V(y(\tau), \tau)\big|_{\tau = t} = - G(\|x\|^2)$, так что функция $-W(x, t)$ положительно определенна. Для доказательства положительной определенности функции $V(x, t)$ Малкину понадобилось условие, что функция $\|f(x, t)\|$ ограничена, если ограничена $\|x\|$. Это условие легко вытекает из предположения, что производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны и ограничены и что $f(0, t) = 0$. (Действительно, если бы функция $\|f(x, t)\|$ не была ограниченной, то могла бы существовать последовательность интегралов $y^k(\tau)$ уравнения (1,01) и чисел $t_k \geqq 0$ так, что было бы

$$\|y^{(k)}(t_k)\| = 1\,, \quad \|y^{(k)}(\tau)\| \leqq e^{-k(\tau - t_k)}\,, \quad \tau \geqq t_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

В таком случае имело бы обязательно место $V(y^{(k)}(t_k), t_k) \to 0$ $(k \to \infty)$, и функция $V(x, t)$ не была бы положительно определенной.

Желая работать с более общими предположениями, мы должны будем преодолеть следующие трудности:

1. Если бы мы предположили, что функция $f(x, t)$ непрерывна, что через каждую точку (x, t) проходил бы только один интеграл уравнения (1,01), и если бы мы определили функцию $V(x, t)$ так же, как и Малкин, то функция $V(x, t)$ не должна была бы быть положительно определенной. Относительно функции $V(x, t)$ мы доказали бы без труда, что она непрерывна, что функция $V(y(\tau), \tau)$ обладает производной и что функция $W(x, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} V(y(\tau), \tau)\big|_{\tau=t}$ непрерывна. Определенная таким образом функция $V(x, t)$, естественно, не должна была бы иметь непрерывные частные производные первого порядка и нельзя быть уверенным, что нам удастся аппроксимировать функцию $V(x, t)$ гладкой функцией, имеющей все нужные свойства.

2. Так как мы предполагаем только непрерывность функции $f(x, t)$, то через данную точку (x, t) может проходить и более одного интеграла уравнения (1,01).

Отсюда видно, что для преодоления указанных трудностей нужно надлежащим образом определить функцию $V^*(x, t)$. Опишем способ определения функции $V^*(x, t)$:

Прежде всего выберем (и уже не будем менять) функцию $\psi(x, t)$ так, чтобы она была определеной и положительной для $x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$. Пусть Y означает множество функций $y(t)$, выполняющих следующие условия:

они определены и непрерывны для $t \geqq t_0$ ($t_0 \geqq 0$ может принимать различные значения для различных функций $y(t) \in Y$),

производные $\dot{y}(t)$ кусочно-непрерывны для $t \geqq t_0$,

$$\int_{t_0}^{\infty} \psi(y(t), t)\|\dot{y}(t) - f(y(t), t)\|\,\mathrm{d}t < 1.$$

Если функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет определенным оценкам снизу, то можно доказать, что функции $y(t) \in Y$ ведут себя подобно интегралам уравнения (1,01), т. е. для любых положительных чисел β и ε существуют положительные числа $B^* = B^*(\beta)$ и $T^* = T^*(\beta, \varepsilon)$ так, что соблюдается условие каждая функция $y(t) \in Y$, выполняющая неравенство $\omega(y(t_0)) \leqq \beta$, выполняет и неравенства $\omega(y(t)) < B^*$ для $t \geqq t_0$, $\omega(y(t)) < \varepsilon$ для $t \geqq t_0 + T^*$. Притом $B^*(\beta) \to 0$ для $\beta \to 0$.

Отсюда следует:
если функция $y(t) \in Y$ определена для $t \geqq t_0$ и если (2,02) для какого-либо числа $t_2 \geqq t_0$ $y(t_2) = 0$, то будет $y(t) = 0$ для $t \geqq t_2$.

Далее выберем функции $\chi(\eta)$ и $L(x, t, \eta)$. Функция $\chi(\eta)$ положительна для положительных η, $\chi(0) = 0$, функция $L(x, t, \eta)$ выполняет условия:

$L(x, t, \eta) = 1$ для ,,больших“ η — слово ,,большие“ имеет различные значения в зависимости от x и t,

$L(x, t, \eta) = (1 + \|f(x, t)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ для ,,малых“ η; кроме того, обе функции выполняют еще некоторые дальнейшие условия.

Выберем теперь функцию $y = y(t) \in Y$, определенную для $t \geqq t_0$, $y(t_0) \neq 0$. Из условия (2,02) следует, что существует $t_1 > t_0$ такое, что $y(t) \neq 0$ для $t_0 \leqq t < t_1$ и $y(t) = 0$ для $t \geqq t_1$. (Можно положить $t_1 = \infty$, если $y(t) \neq 0$ для $t \geqq t_0$.)

Функции $y(t)$ поставим в соответствие функцию $V_1(t)$, определенную для $t_0 \leqq t < t_1$ и удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = -\chi(\omega(y(t)))\, L(y(t), t, V_1(t)) \tag{2,03}$$

и условию $V_1(t) \to 0$, для $t \to t_1 -$, $V_1(t) > 0$, для $t_0 \leqq t < t_1$. Докажем, что существует одна и только одна функция $V_1(t)$, удовлетворяющая указанным условиям. Если случайно для выбранной функции $y(t)$ и для соответственной функции $V_1(t)$ имеет место $L(y(t), t, V_1(t)) = 1$ для $t \geqq t_0$, то

$$V_1(t) = \int_t^{t_2} \chi(\omega(y(\tau)))\, \mathrm{d}\tau\,,$$

так что функция $\chi(\eta)$ играет здесь подобную роль, как функция $G(\eta)$ у Малкина. Решим уравнение (2,03). Если функция $\omega(y(t))$,,круто“ возрастает при убывании переменной t, то функция $L(y(t), t, V_1(t))$ будет принимать значения, большие единицы, вследствие чего значение $V_1(t)$ не будет слишком малым относительно значения $\omega(y(t))$ независимо от t и независимо от функции $y \in Y$. Другими словами:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Для произвольного } \varepsilon > 0 \text{ существует } \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ так, что}\\ V_1(t) > \delta, \text{ если } \omega(y(t)) > \varepsilon.\end{array}\right\} \tag{2,04}$$

Этим мы по существу преодолели затруднение, указанное в пункте 1.

Если функция $y = y(t) \in Y$ определена для $t \geqq t_0$, то пусть число $c(y)$ определяется соотношением $c(y) = V_1(t_0)$, где функция $V_1(t)$ поставлена в соответствие функции $y(t)$ только-что описанным образом.

Для $x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$ обозначим через $B(x, t)$ множество таких функций $y(\tau) \in Y$, которые определены для $\tau \geqq t$ и для которых $y(t) = x$. В множество $B(x, t)$ входит, очевидно, интеграл $u(\tau)$ уравнения (1,01), выполняющий условие $u(t) = x$, так что множество $B(x, t)$ непусто.

Пусть $C(x, t)$ есть множество чисел γ вида

$$\gamma = c(y) \, (1 - \int_t^\infty (y(\tau), \tau) \, \|\dot{y}(\tau) - f(y(\tau), \tau)\| \, \mathrm{d}\tau) ,$$

где $y \in B(x, t)$.

Положим $V^*(x, t) = \sup_{\gamma \in C(x,t)} \gamma, \quad x \in G, \ x \neq 0, \ t \geqq 0$.

Неравенство $V^*(x, t) \leqq U_4(x)$ для подходящей функции $U_4(x)$ довольно легко проверить, используя свойства дифференциального уравнения (2,03). Неравенство $V^*(x, t) \geqq U_5(x)$ следует из условия (2,04), а также нетрудно обнаружить, что соблюдается условие IV'. Наиболее затруднительным является доказательство того, что $V^*(x, t)$ есть локально липшицевская функция.

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы 2, докажем справедливость следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть Z — данное фиксированное множество, элементами которого являются функции $z(t)$, выполняющие условия:*
функция $z(t)$ определена для $t \geqq \tau$, $\tau \geqq 0$ (τ может принимать разные значения для разных функций z), $z(t) \in G$, $t \geqq \tau$.
Предположим, что выполнено условие:

V. *Для любых положителных чисел β и ε существуют положительные числа $B = B(\beta)$ и $T = T(\beta, \varepsilon)$ так, что $B(\beta) \to 0$ для $\beta \to 0$, и если $z(t) \in Z$, $z(t)$ определена для $t \geqq \tau$, $\omega(z(t_0)) < \beta$, $t_0 \geqq \tau$, то будет $\omega(z(t)) < B(\beta)$, для $t \geqq t_0$, $\omega(z(t)) < \varepsilon$, для $t \geqq t_0 + T$.*
В таком случае выполняется и условие:

VI. *Существуют функции $\varphi(t)$, $\Lambda(\eta)$, удовлетворяющие следующим требованиям:*

Функция $\varphi(t)$ определена для всех t, непрерывна, убывает и $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to -\infty$, $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Функция $\Lambda(\eta)$ определена для $\eta > 0$, непрерывна, возрастает и $\Lambda(\eta) \to -\infty$ при $\eta \to 0$, $\Lambda(\eta) \to \infty$ при $\eta \to \infty$.

Если $z(t) \in Z$, $z(t)$ определена для $t \geqq \tau$, то

$$\omega(z(t)) < \varphi(t + t_0 + \Lambda(\omega(z(t_0)))) \text{ для всех } t \geqq t_0 \geqq \tau. \tag{2,05}$$

Наоборот, при соблюдении условия VI выполняется и условие V.

Доказательство леммы 1. Довольно легко доказать, что при выполнении условия VI выполняется и условие V. Мы ограничимся доказательством выполнения условия VI при соблюдении V. Препдоложим, что имеет место V. Положим

$$T_j = T(2^{-j+1}, 2^{-j}) + 1 , \quad j = \ldots -1, 0, 1, \ldots ,$$
$$\tau_0 = 0 , \quad \tau_1 = T_1 , \quad \tau_2 = T_1 + T_2 , \ldots , \quad \tau_{-1} = -T_0 , \quad T_{-2} = -T_0 - T_{-1} , \ldots$$

Функцию $\varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$ подберем так, чтобы она была непрерывной, убывающей, и чтобы

$$\varphi(t) \to 0 \quad \text{для} \quad t \to \infty\,,$$
$$\varphi(t) > B(2^{-j}) \quad \text{для} \quad \tau_j \leqq t \leqq \tau_{j+1}\,, \quad j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \tag{2,06}$$

Функцию $\Lambda(\eta)$, $0 < \eta < \infty$ подберем так, чтобы она была непрерывной, возрастающей, чтобы

$$\Lambda(\eta) \to -\infty \quad \text{для} \quad \eta \to 0\,,$$
$$\Lambda(\eta) > -\tau_{-j} \quad \text{для} \quad 2^{j-1} \leqq 2^j\,, \quad j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \tag{2,07}$$

Так как, очевидно, $B(\beta) \geqq \beta$, то будет $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to -\infty$; так как $\tau_{-j} \to -\infty$ при $j \to \infty$, то $\Lambda(\eta) \to \infty$ при $\eta \to \infty$. Докажем справедливость неравенства (2,05). Пусть даны $z(t) \in Z$, числа t_0 и $t_1 \geqq t_0$; найдем целые числа j, s так, чтобы

$$2^{j-1} \leqq \omega(z(t_0)) \leqq 2^j\,, \tag{2,08}$$
$$\tau_s \leqq t_1 - t_0 + \tau_{-j} \leqq \tau_{s+1}\,. \tag{2,09}$$

Из неравенств (2,07) и (2,08) следует

$$t_1 - t_0 - \Lambda(\omega(z(t_0))) \leqq t_1 - t_0 + \tau_{-j}\,.$$

Из неравенств (2,06) и (2,09) следует

$$\varphi(t_1 - t_0 - \Lambda(\omega(z(t_0)))) > B(2^{-s})\,. \tag{2,10}$$

Далее имеем $\tau_s - \tau_{-j} = T_{-j+1} + T_{-j+2} + \ldots + T_s$ для $s > -j$, $\tau_s - \tau_{-j} = 0$ для $s = -j$. (Согласно неравенствам (2,09), всегда будет $s \geqq -j$.) Из того же неравенства следует

$$T_{-j+1} + T_{-j+2} + \ldots + T_s \leqq t_1 - t_0 \quad \text{для} \quad s > -j\,, \tag{2,11}$$
$$0 \leqq t_1 - t_0 \quad \text{для} \quad s = -j\,. \tag{2,12}$$

Если $s > -j$, то из условия V и из неравенства (2,08) получаем

$$\begin{aligned} &\omega(z(t)) < 2^{j-1} && \text{для} \quad t \geqq t_0 + T_{-j+1}\,, \\ &\omega(z(t)) < 2^{j-2} && \text{для} \quad t \geqq t_0 + T_{-j+1} + T_{-j+2}\,, \\ &\omega(z(t)) < 2^{-s} && \text{для} \quad t \geqq t_0 + T_{-j+1} + T_{-j+2} + \ldots + T_s\,. \end{aligned} \tag{2,13}$$

Из неравенств (2,10), (2,11), (2,13) следует справедливость (2,05) для $t = t_1$, если $s > -j$, так как $B(2^{-s}) \geqq 2^{-s}$. Если, однако $s = -j$, то из неравенств (2,08) и (2,12) и из условия V следует $\omega(z(t_1)) < B(2^j) = B(2^{-s})$. Ввиду (2,10) имеет место (2,05), так что лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что нулевой интеграл уравнения (1,01) сильно устойчив в G, т. е. что для любых положительных чисел β и ε существуют числа $B(\beta)$ и $T(\beta, \varepsilon)$ так, что выполняется условие V. Положим

$$T_j = T(2^{j+2}, 2^{j-2}), \quad j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

Подберем число $\Psi_{j,k}$, $j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ так, чтобы выполнялось следующее условие:

если функция $y(t)$ определена для $t_1 \leqq t \leqq t_2$, $kT_j \leqq t_1 < t_2 \leqq (k+2)\, T_j$ и обладает кусочно-непрерывной производной $\dot{y}(t)$, и если

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{y}(t) - f(y(t), t)\| \, \mathrm{d}t \leqq \Psi_{j,k} ,$$

$$\omega(y(t_1)) < 2^{j+1} ,$$

то существует решение $x(t)$ уравнения (1,01), определенное для $t_1 \leqq t \leqq t_2$ так, что $\|x(t) - y(t)\| < r_j$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, где

$$r_j = \min \{\varrho(\Omega(2^{j-2}), C\Omega(2^{j-1})), \varrho(\Omega(2^{j+1}), C\Omega(2^{j+2})),$$
$$\varrho(\Omega(B(2^{j+2})), \; C\Omega(B(2^{j+3})))\} .^{7})$$

Докажем, что число $\Psi_{j,k}$ можно подобрать так, чтобы оно удовлетворяло всем указанным условиям. Число r_j, очевидно, положительно. Предположим, что существует последовательность функций $y^{(i)}(t)$, определенных для $t_1^{(i)} \leqq t \leqq t_2^{(i)}$, $kT_j \leqq t_1^{(i)} < t_2^{(i)} \leqq (k+2)\, T_j$, обладающих кусочно-непрерывными производными $\dot{y}^{(i)}(t)$, и что имеет место

$$\int_{t_1^{(i)}}^{t_2^{(i)}} \|\dot{y}^{(i)}(t) - f(y^{(i)}(t), t)\| \, \mathrm{d}t < \frac{1}{i} , \tag{2,14}$$

$$\omega(y^{(i)}(t_1^{(i)})) < 2^{j+1} , \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Предположим еще, что для $i = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо утверждение:

неравенство $\|x(t) - y^{(i)}(t)\| < r_j$, $t_1^{(i)} \leqq t \leqq t_2^{(i)}$ неверно, если функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1,01) для $t_1^{(i)} \leqq t \leqq t_2^{(i)}$. Без ограничения общности можно еще предположить, что $t_1^{(i)} \to t_1$, $t_2^{(i)} \to t_2$.

Прежде всего докажем, что соотношение $y^{(i)}(t) \in \Omega(B(2^{j+2}))$, $t_1^{(i)} \leqq t \leqq t_2^{(i)}$ справедливо почти для всех i.

В противном случае существовала бы выделенная последовательность такая, что имело бы место

$$y^{(i)}(t) \in \Omega(B(2^{j+2})) , \quad t_1^{(i)} \leqq t < t_3^{(i)} , \tag{2,15}$$

$$\omega(y^{(i)}(t_3^{(i)})) = B(2^{j+2}) , \quad t_1^{(i)} < t_3^{(i)} \leqq t_2^{(i)} .$$

Из неравенства (2,14) получаем

$$y^{(i)}(t) = y^{(i)}(t_1^{(i)}) + \int_{t_1^{(i)}}^{t} f(y^{(i)}(\tau), \tau) \, \mathrm{d}\tau + u^{(i)}(t), \; t_1^{(i)} \leqq t \leqq t_3^{(i)} ,$$

где непрерывная функция $u^{(i)}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|u^{(i)}(t)\| < \frac{2T_j}{i} , \qquad t_1^{(i)} \leqq t \leqq t_3^{(i)} .$$

Так как функция $\|f(x, t)\|$ ограничена для $x \in \overline{\Omega(B(2^{j+2}))}$, $kT_j \leqq t \leqq (k+2)T_j$,

[7]) $C\Omega(\alpha)$ есть дополнение множества $\Omega(\alpha)$ в E_n.

то функции $y^{(i)}(t)$ являются равностепенно непрерывны. Согласно (2,15), функции $y^{(i)}(t)$ равномерно ограничены, так что по теореме Асколи можно выбрать последовательность $y^{(i)}(t)$ так, что

$$t_3^{(i)} \to t_3 > t_1\,, \quad y^{(i)}(t) \to z(t)\,, \quad \text{для} \quad t_1 < t < t_3\,,$$

$$z(t) = z(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(z(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \quad t_1 \leqq t \leqq t_3\,, \tag{2,16}$$

$$\omega(z(t_1)) \leqq 2^{j+1}\,, \tag{2,17}$$

$$\omega(z(t_3)) = B(2^{j+2})\,. \tag{2,18}$$

Согласно уравнению (2,16), функция $z(t)$ удовлетворяет уравнению (1,01), $t_1 \leqq t \leqq t_3$; таким образом соотношения (2,17) и (2,18) противоречат смыслу функции $B(\beta)$. Итак,

$$y^{(i)}(t) \in \Omega(B(2^{j+2}))\,, \quad t_1^{(i)} \leqq t \leqq t_2^{(i)}$$

почти для всех i.

Далее из неравенства (2,14) следует

$$y^{(i)}(t) = y^{(i)}(t_1^{(i)}) + \int_{t_1^{(i)}}^{t} f(y^{(i)}(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\tau + u^{(i)}(t)\,, \quad t_1^{(i)} \leqq t \leqq t_5^{(i)}\,,$$

где непрерывные функции $u^{(i)}(t)$ удовлетворяют неравенству $\|u^{(i)}(t)\| < \dfrac{2T_j}{i}$. Отсюда следует, что функции $y^{(i)}(t)$ равностепенно непрерывны и что последовательность $y^{(i)}(t)$ можно подобрать так, что

$$y^{(i)}(t) \to z(t)\,, \quad t_1 \leqq t \leqq t_2\,,$$

$$z(t) = z(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(z(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \quad t_1 \leqq t \leqq t_2\,.$$

Если взять достаточно малое число $\alpha > 0$ и определить функцию $x(t)$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению (1,01) для $t_1 - \alpha < t < t_2 + \alpha$ и чтобы имело место $x(t) = z(t)$ для $t_1 \leqq t \leqq t_2$, то получим

$$\max_{t_1^{(i)} \leqq t \leqq t_2^{(i)}} \|y^{(i)}(t) - x(t)\| \to 0 \ \text{для} \quad i \to \infty\,,$$

так что существует индекс i, такой, что

$$\|x(t) - y^{(i)}(t)\| < r_j\,, \quad t_1^{(i)} \leqq t \leqq t_2^{(i)}\,.$$

Итак, мы пришли к противоречию и доказали, что число $\Psi_{j,k}$ можно подобрать так, чтобы оно удовлетворяло всем поставленным условиям.

Возьмем функцию $\varphi(x, t)$ так, чтобы она была определенной для $x \in G$, $t \geqq 0$, обладала непрерывными производными первого порядка по переменным $x_1, \ldots, x_n, t$ для $x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$ и удовлетворяла неравенствам

$$\psi(x, t) > (\Psi_{j,k})^{-1} \tag{2,19}$$

для $kT_j \leqq t \leqq (k+2)\, T_j$, $2^{j-2} \leqq \omega(x) \leqq B(2^{j+3})$,

$$\psi(x, t) > \frac{4}{\|x\|} + 1\,, \quad \text{для} \quad x \neq 0,\ t \geqq 0\,, \tag{2,20}$$

и $\psi(0, t) = 0$ для $t \geqq 0$.

Обратим внимание на то, что числа $\Psi_{j,k}$ можно подобрать так, чтобы они не зависели от k, если функция $f(x, t)$ не зависит от t, или, если $f(x, t)$ периодическая функциа по отношению к t, и что в таком случае можно выбрать функцию $\psi(x, t)$ так, чтобы она не зависела от t.

Пусть Y означает множество функций $y(t)$, выполняющих следующие условия:

они определены и непрерывны для $t \geqq t_0$ ($t_0 \geqq 0$ может иметь разные значения для разных функций $y(t)$),

производные $\dot{y}(t)$ кусочно непрерывны для $t \geqq t_0$,

$$\int_{t_0}^{\infty} \psi(y(t), t)\,.\,\|\dot{y}(t) - f(y(t), t)\|\,\mathrm{d}t < 1\,.$$

Докажем справедливость

Леммы 2. *Если* $y(t) \in Y$, $2^{j-1} < \omega(y(t_0)) \leqq 2^j$, *то*

$$\omega(y(t)) < B(2^{j+3}), \quad t_0 \leqq t \leqq t_0 + T_j\,, \tag{2,21}$$

$$\omega(y(t)) < B(2^{j+3-l}),\ t_0 + T_j + T_{j-1} + \ldots + T_{j-l+1} \leqq t \leqq t_0 + T_j + T_{j-1} + \ldots + T_{j-l}\,, \quad l = 1, 2, 3, \ldots \tag{2,22}$$

Доказательство леммы 2. Пусть $y(t) \in Y$, $\omega(y(t_0)) \leqq 2^j$. Допустим, что неравенство (2,21) неверно. Тогда существуют числа t_1, t_2, $t_0 \leqq t_1 < t_2 \leqq t_0 + T_j$ так, что

$$2^j = \omega(y(t_1)) < \omega(y(t)) < \omega(y(t_2)) = B(2^{j+3})\,, \quad t_1 < t < t_2\,. \tag{2,23}$$

Далее существует целое неотрицательное число k так, что

$$kT_j \leqq t_0 < t_0 + T_j \leqq (k+2)\, T_j\,. \tag{2,24}$$

По предположению, что $y(t) \in Y$, имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi(y(t), t)\, \|\dot{y}(t) - f(y(t), t)\|\,\mathrm{d}t < 1\,;$$

ввиду неравенств (2,19), (2,23) и (2,24), будет $\psi(y(t), t) > (\Psi_{j,k})^{-1}$, так что

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{y}(t) - f(y(t), t)\|\,\mathrm{d}t < \Psi_{j,k}\,.$$

По выбору числа $\Psi_{j,k}$ существует решение $x(t)$ уравнения (1,01), определенное для $t_1 \leqq t \leqq t_2$ такое, что

$$\|y(t) - x(t)\| < r_j , \quad t_1 \leqq t \leqq t_2 . \tag{2,25}$$

Так как $r_j \leqq \varrho(\Omega(2^{j+1}), \ C\Omega(2^{j+2}))$, $y(t_1) \in \Omega(2^{j+1})$, то имеет место $x(t_1) \in \Omega(2^{j+2})$. Согласно предположению о сильной устойчивости в G нулевого интеграла уравнения (1,01), имеем

$$\omega(x(t)) < B(2^{j+2}) , \quad t_1 \leqq t \leqq t_2 \tag{2,26}$$

и так как $r_j \leqq \varrho(\Omega(B(2^{j+2})), \ C\Omega(B(2^{j+3})))$, то будет, согласно (2,25) и (2,26),

$$\omega(y(t)) < B(2^{j+3}) , \quad t_1 \leqq t \leqq t_2 ,$$

что противоречит соотношению (2,23). Следовательно, справедливо (2,21).

Пусть τ_1 — наименьшее число такое, что $\omega(y(\tau_1)) = 2^{j-1}$. Докажем, что число τ_1 существует и что справедливо неравенство

$$\tau_1 < t_0 + T_j . \tag{2,27}$$

Предположим, что

$$\omega(y(t)) > 2^{j-1} , \quad t_0 \leqq t < t_0 + T_j . \tag{2,28}$$

Как мы уже доказали,

$$\omega(y(t)) < B(2^{j+3}) , \quad t_0 \leqq t \leqq t_0 + T_j , \tag{2,29}$$

так что, согласно (2,19), (2,24), (2,28) и (2,29), имеем

$$\psi(y(t), t) > (\Psi_{j,k})^{-1} , \quad t_0 \leqq t \leqq t_0 + T_j .$$

Очевидно, будет

$$\int_{t_0}^{t_0+T_j} \psi(y(t), t) \parallel \dot{y}(t) - f(y(t), t) \parallel \mathrm{d}t < 1 ,$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_j} \|\dot{y}(t) - f(y(t), t)\| \, \mathrm{d}t < \Psi_{j,k} .$$

Так как $\omega(y(t_0)) \leqq 2^j$, то по выбору числа $\Psi_{j,k}$ существует решение $x(t)$ уравнения (1,01), определенное для $t_0 \leqq t \leqq t_0 + T_j$ такое, что

$$\|y(t) - x(t)\| < r_j , \quad t_0 \leqq t \leqq t_0 + T_j .$$

Так как $r_j \leqq \varrho(\Omega(2^{j+1}), C\Omega(2^{j+2}))$, $y(t_0) \in \Omega(2^{j+1})$, имеем $x(t_0) \in \Omega(2^{j+2})$. Так как $T_j = T(2^{j+2}, 2^{j-2})$, то будет $\omega(x(t_0 + T_j)) < 2^{j-2}$, т. е. $x(t_0 + T_j) \in \in \Omega(2^{j-2})$. Ввиду того, что $r_j \leqq \varrho(\Omega(2^{j-2}), C\Omega(2^{j-1}))$, будет $y(t_0 + T_j) \in \in \Omega(2^{j-1})$, т. е. $\omega(y(t_0 + T_j)) < 2^{j-1}$.

Это противоречит неравенству (2,28). Итак, мы доказали, что число τ_1 существует и что справедливо (2,27).

Теперь можем применить доказанное уже неравенство (2,21) к функции $y(t)$ для $t \geqq \tau_1$. Мы обнаружим, что

$$\omega(y(t)) < B(2^{j+2}) , \quad \tau_1 \leqq t \leqq \tau_1 + T_{j-1} . \tag{2,30}$$

Далее убедимся подобным же образом в существовании числа τ_2, $\tau_1 < \tau_2 < < \tau_1 + T_{j-1}$ такого, что $\omega(y(\tau_2)) = 2^{j-2}$. Применим опять неравенство (2,21) к функции $y(t)$, $t \geqq \tau_2$ и т. д.

Таким образом найдем последовательность $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ такую, что $\tau_i - \tau_{i-1} < T_{j+1-i}$ и $\omega(y(t)) < B(2^{j+3-i})$ для $t \geqq \tau_i$. Тем более будет справедливо (2,22).

Из лемм 1 и 2 легко следует

Лемма 3. *Существуют функции $\varphi(t)$, $\Lambda(\eta)$, удовлетворяющие следующим требованиям:*

Функция $\varphi(t)$ определена для всех t, непрерывна, убывает и

$$\varphi(t) \to \infty, \text{ для } t \to -\infty, \qquad \varphi(t) \to 0, \text{ для } t \to \infty .$$

Функция $\Lambda(\eta)$ определена и непрерывна для $\eta > 0$, возрастает и

$$\Lambda(\eta) \to -\infty, \text{ для } \eta \to 0, \ \Lambda(\eta) \to \infty, \text{ для } \eta \to \infty .$$

Если $y(t) \varepsilon Y$, где $y(t)$ определена для $t \geqq t_0$, то

$$\omega(y(t)) < \varphi(t - t_0 - \Lambda(\omega(y(t_0)))).$$

Далее нам понадобится

Лемма 4. *Пусть функция $\bar{\varphi}(t)$ определена для всех $t \geqq 0$, непрерывна и выполняет условия*

$$\bar{\varphi}(t) > 0, \ \bar{\varphi}(t) \to 0 \text{ для } t \to \infty.$$

Пусть функция $\bar{M}(t)$ определена для $t \geqq 0$, не убывает, $\bar{M}(0) \geqq 0$.

Тогда существует функция $\bar{\chi}(\eta)$, определенная для $\eta \geqq 0$, непрерывная, возрастающая, $\chi(\eta) \to 0$ для $\eta \to 0$ и такая, что $\int\limits_0^\infty \bar{\chi}(\bar{\varphi}(t)) . \ \bar{M}(t) \, \mathrm{d}t < \infty$.

Доказательство. Достаточно выбрать непрерывную возрастающую функцию $\bar{\chi}(\eta)$ так, чтобы имели место неравенства

$$\bar{M}(j) \cdot \bar{\chi}(\eta_j) < \frac{1}{j^2}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, \quad \text{где} \quad \eta_j = \max_{j-1 \leqq t \leqq j} \bar{\varphi}(t) .$$

Пусть $\varphi(t)$, $\Lambda(\eta)$ — функции, определенные в лемме 3. Согласно лемме 4, найдем функцию $\chi(\eta)$, определенную, возрастающую, непрерывную для $\eta > 0$ и такую, что

$$\chi(\eta) \to 0 \quad \text{для} \quad \eta \to 0 , \quad \int\limits_0^\infty \chi(\varphi(t)) \, \mathrm{d}t < \infty .$$

Можно еще предположить, что

$$\chi(\eta) > [\varrho(\Omega(2^j), C\Omega(2^{j+1})]^{-1} \quad \text{для} \quad 2^j \leqq \eta \leqq 2^{j+1} , \ j = 1, 2, 3, \ldots \ (2,32)$$

Положим

$$U_7(x) = \int_0^\infty \chi(\varphi(t - \Lambda(\omega(x)))\,\mathrm{d}t \quad \text{для} \quad x \in G,\ x \neq 0\,, \quad U_7(0) = 0\,.$$

Нетрудно убедиться, что функция $U_7(x)$ непрерывна и что $0 < U_7(x) < \infty$, $x \in G$, $x \neq 0$,

$$U_7(x) \to \infty \quad \text{для} \quad \omega(x) \to \infty\,. \tag{2,33}$$

Возьмем теперь функцию $L(x, t, \eta)$ так, чтобы соблюдались следующие условия:

функция $L(x, t, \eta)$ определена и непрерывна для $x \in G$, $t \geqq 0$, $\eta \geqq 0$.

$L(x, t, \eta) = 1$ дла $\eta \geqq U_7(x)$, $L(x, t, \eta) = (1 + \|f(x, t)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ дла $\eta < \frac{1}{2}U_7(x)$,

при фиксированных x, t функция L является невозрастающей функцией переменной η.

Легко обнаружить, что такая функция $L(x, t, \eta)$ существует.

Возьмем теперь фиксированную функцию $y = y(t) \in Y$, определенную для $t \geqq t_0$, $y(t_0) \neq 0$. Из леммы 2 следует, что возможны только два случая:

1. существует число $t_1 > t_0$ так, что

$$y(t) \neq 0 \quad \text{для} \quad t_0 \leqq t < t_1\,, \quad y(t) = 0 \quad \text{для} \quad t \geqq t_1\,.$$

2. $y(t) \neq 0$ для $t \geqq t_0$.

В последнем случае положим $t_1 = \infty$. Функции y поставим в соответствие функцию $V_1(t)$ и число $c(y)$ так, чтобы соблюдались следующие условия:

Функция $V_1(t)$ определена и непрерывна для $t_0 \leqq t < t_1$, и

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = -\chi(\omega(y(t)))\,.\,L(y(t), t, B_1(t))\,. \tag{2,34}$$

$$\lim_{t \to t_1 -} V_1(t) = 0,\ V_1(t) > 0,\ \text{для } t_0 \leqq t < t_1,\ \text{и}$$

$$c(y) = V_1(t_0)\,.$$

Докажем, что функция $V_1(t)$ существует и определяется однозначно, так что и число $c(y)$ определяется однозначно.

Докажем прежде всего справедливость

Леммы 5. *Предположим, что функции $V_2(t)$, $V_3(t)$ определены, положительны и непрерывны для $\tau_1 \leqq t < \tau_2$, $t_0 \leqq \tau_1 < \tau_2 \leqq t_1$, что они удовлетворяют дифференциальному уравнению* (2,34) *для* $\tau_1 \leqq t < \tau_2$ *и что* $V_2(\tau_1) > V_3(\tau_1)$.

Тогда

$$V_2(t) - V_3(t) \geqq V_2(\tau_1) - V_3(\tau_1)\,, \quad \tau_1 \leqq t < \tau_2\,.$$

Доказательство. Если лемма 5 неверна, то существует такое число τ_3, $\tau_1 < \tau_3 < \tau_2$, что

$$0 < V_2(t) - V_3(t)\,, \quad \tau_1 \leqq t \leqq \tau_3\,, \tag{2,35}$$

$$V_2(\tau_3) - V_3(\tau_3) < V_2(\tau_1) - V_3(\tau_1)\,. \tag{2,36}$$

Согласно (2,35) и согласно выбору функции L, имеет место неравенство $L(y(t), t, V_3(t)) \geqq L(y(t), t, V_2(t))$, $\tau_1 \leqq t \leqq \tau_3$, так что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V_2(t) - V_3(t)) = -\chi(\omega(y(t)))\,[L(y(t), t, V_2(t)) - L(y(t), t, V_3(t))] \geqq 0\,,$$
$$\tau_1 \leqq t \leqq \tau_3\,,$$

что противоречит неравенству (2,36). Итак, лемма 5 справедлива.

Из леммы 5 легко следует, что функция $V_1(t)$ однозначно определяется наложенными на нее условиями. Остается доказать, что функция $V_1(t)$ существует.

Прежде всего, существует число $k_1 > 0$ такое, что $U_7(y(t)) < k_1$, $t \geqq t_0$. Положим

$$V_4(t) = \int_t^{t_1} \chi(\omega(y(\tau)))\,\mathrm{d}\tau + k_1\,.$$

Так как $V_4(t) > k_1$ $(t_0 \leqq t < t_1)$, то будет $L(y(t), t, V_4(t)) = 1$, и функция $V_4(t)$ удовлетворяет уравнению (2,34).

Далее докажем утверждение:

Для каждого целого числа $j > \dfrac{1}{k_1} + 5$ существует функция $V_j(t)$, выполняющая следующие условия:

функция $V_j(t)$ определена, положительна и непрерывна для $t_0 \leqq t < t_1$,

функция $V_j(t)$ удовлетворяет уравнение (2,34) для $t_0 \leqq t < t_1$,

$\lim\limits_{t\to t_1-} V_j(t) = \dfrac{1}{j}\,.$

Возьмем фиксированное число $j > \dfrac{1}{k_1} + 5$. Так как $y(t) \to 0$ для $t \to t_1$, то существует число τ_j, $t_0 \leqq \tau_j < t_1$ такое, что

$$U_7(y(t)) < \frac{1}{j}\,, \quad \tau_j \leqq t < t_1\,. \tag{2,37}$$

Положим

$$\overline{V}_j(t) = \int_t^{t_1} \chi(\omega(y(\tau)))\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{j}\,, \quad \tau_j \leqq t < t_1\,.$$

Ввиду справедливости (2,37) и неравенства $\overline{V}_j(t) > \dfrac{1}{j}$ $(\tau_j \leqq t < t_1)$, получим, согласно выбору функции L, $L(y(t), t, \overline{V}_j(t)) = 1$, $\tau_j \leqq t < t_1$, так что функция $\overline{V}_j(t)$ удовлетворяет уравнению (2,34), причем

$$\lim_{t \to t_1 -} \overline{V}_j(t) = \frac{1}{j}.$$

В силу существования фукции $V_4(t)$ мы без труда обнаружим при помощи леммы 5, что существует функция $V_j(t) \leqq V_4(t)$, определенная и непрерывная для $t_0 \leqq t < t_1$, удовлетворяющая уравнению (2,34) (для $t_0 \leqq t < t_1$) и условию $V_j(t) = \overline{V}_j(t)$, $\tau_j \leqq t < t_1$. Таким образом мы доказали существование функции $V_j(t)$. Из леммы 5 далее следует, что $V_{j+1}(t) \leqq V_j(t)$, $t_0 \leqq \leqq t < t_1$, $j > \frac{1}{k_1} + 5$.

Положим $V_1(t) = \lim_{j \to \infty} V_j(t)$, $t_0 \leqq t < t_1$. Очевидно, $V_1(t) \geqq 0$, и из известных соображений (об равностепенной непрерывности) следует, что функция $V_1(t)$ удовлетворяет уравнению (2,34). Очевидно, $\lim_{t \to t_1 -} V_1(t) = 0$, и так как $\chi(\omega(y(t)))\, L(y(t), t, \eta) > 0$ для $\eta \leqq 0$, $t_0 \leqq t < t_1$ то должно быть $V_1(t) > 0$ для $t_0 \leqq t < t_1$. Итак, мы доказали, что функция $V_1(t)$ существует и определяется однозначно, а значит определено (однозначно) и число $c(y)$.

Для $x \in G$, $x \neq 0$, $t > 0$ обозначим через $B(x, t)$ множество таких функций $y = y(\tau) \in Y$, что функции $y(\tau)$ определены для $\tau \geqq t$ и что $y(t) = x$. Множество $B(x, t)$, очевидно, непусто, так как в него входит решение $u(\tau)$ уравнения (1,01), определенное для $\tau \geqq t$ и выполняющее условие $u(t) = x$. По предложению относительно уравнения (1,01) существует хотя бы одно такое решение.

Пусть $C(x, t)$ — множество чисел γ вида

$$\gamma = c(y)(1 - \int_t^\infty \psi(y(\tau), \tau)\, \|\dot{y}(\tau - f(y)(\tau), \tau)\|\, \mathrm{d}\tau), \quad \text{где} \quad y \in B(x, t).$$

Положим $V^*(x, t) = \sup_{\gamma \in C(x,t)} \gamma$, $\quad x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$.

Как мы уже заметили, функцию $\psi(x, t)$ выбираем так, чтобы она не зависела от t, если функция $f(x, t)$ не зависит от t, или, если $f(x, t)$ периодическая функция по отношению к t. В таком случае имеет место:

Если $x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$, $\sigma \leqq t$, $y = y(\tau) \in B(x, t)$, то $\bar{y} = \bar{y}(\tau) = y(\tau + \sigma) \in \in B(x, t - \sigma)$.

Отсюда уже легко можно вывести, что функция $V^*(x, t)$ не зависит от переменной t [что $V^*(x, t) = V^*(x, t + \omega_1)$, если $f(x, t) = f(x, t + \omega_1)$].

Пусть $\Lambda_2(\eta) = \Lambda(\varphi(-\Lambda(\eta)))$ для $\eta > 0$.

Нетрудно обнаружить, что функция $\Lambda_2(\eta)$ непрерывна, что она возрастает и что

$$\Lambda_2(\eta) \to -\infty \quad \text{для} \quad \eta \to 0, \quad \Lambda_2(\eta) \to \infty \quad \text{для} \quad \eta \to \infty.$$

Далее имеем

$$\Lambda_2(\eta) > \Lambda(\eta)\,, \tag{2,38}$$

так как $\varphi(-\Lambda(\eta)) < \eta$, что вытекает из (2,05). Положим

$$U_4(x) = 2\int_0^\infty \chi(\varphi(\tau - \Lambda_2(\omega(x))))\,\mathrm{d}\tau \quad \text{для} \quad x \in G,\ x \neq 0,\ U_4(0) = 0\,.$$

Функция $U_4(x)$, очевидно, непрерывна, $U_4(x) > 0$ для $x \neq 0$ и, как видно из (2,38),

$$U_7(x) \leqq \tfrac{1}{2}U_4(x)\,. \tag{2,39}$$

Докажем справедливость неравенства

$$V^*(x, t) \leqq U_4(x)\,. \tag{2,40}$$

Для доказательства (2,40) достаточно доказать справедливость неравенства

$$c(y) \leqq U_4(x) \quad \text{для} \quad y \in B(x, t),\ x \neq 0\,. \tag{2,41}$$

Итак, предположим, что существует такая фукнция $y(\tau) \in B(x, t)$, для которой

$$c(y) = V_1(t) \geqq U_4(x)\,. \tag{2,42}$$

Предположим, что

$$y(\tau) \neq 0 \quad \text{для} \quad t \leqq \tau < t_1,\ y(\tau) = 0 \quad \text{для} \quad \tau \geqq t_1,\ t < t_1 \leqq \infty\,.$$

Теперь могут наступить два случая:

1. Для всех $t \leqq \tau < t_1$ имеем

$$V_1(\tau) > U_7(y(\tau))\,,$$

2. существует такое число τ_1, $t < \tau_1 < t_1$, что

$$V_1(\tau) > U_7(y(\tau)) \text{ для } t \leqq \tau \leqq \tau_1\,, \quad V_1(\tau_1) = U_7(y(\tau_1)) > 0\,.$$

Исследуем сначала первый случай. В этом случае имеем $L(y(\tau), \tau, V_1(\tau)) = 1$ для $\tau \geqq t$, так что $V_1(\tau) = \int_\tau^{t_1} \chi(\omega(y(\varrho)))\,\mathrm{d}\sigma$, откуда $V_1(t) = \int_t^{t_1} \chi(\omega(y(\varrho)))\,\mathrm{d}\sigma$.

Так как $y \in B(x,t)$, получаем (по лемме 3 и по определению множества $B(x, t)$) $\omega(y(\tau)) < \varphi(\tau - t - \Lambda(\omega(x)))$, так что

$$c(y) = V_1(t) < \int_t^\infty \chi(\varphi(\tau - t - \Lambda(\omega(x))))\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty \chi(\varphi(\tau - \Lambda(\omega(x))))\,\mathrm{d}\tau = U_7(x),$$

что противоречит неравенству (2,42), так как имеет место (2,39). Итак, случай 1. невозможен.

Обратимся теперь ко второму случаю. В этом случае имеем $L(y(\tau), \tau, V_1(\tau)) = 1$ для $t \leqq \tau < \tau_1$, так что

$$V_1(t) - V_1(\tau_1) = \int_t^{\tau_1} \chi(\omega(y\sigma))) \, d\varrho \leqq \int_t^{\infty} \chi(\omega(y(\sigma))) \, d\sigma <$$

$$< \int_t^{\infty} \chi(\varphi(\tau - t - \Lambda(\omega(x)))) \, d\tau = \int_0^{\infty} \chi(\varphi(\tau - \Lambda(\omega(\alpha)))) \, d\tau = U_7(x) \, .$$

По предположению 2. будет $V_1(\tau_1) = U_7(y(\tau_1))$, так что

$$V_1(t) < U_7(x) + U_7(y(\tau_1)) \, . \tag{2,43}$$

По определению имеем $U_7(y(\tau_1)) = \int_0^{\infty} \chi(\varphi(\sigma - \Lambda(\omega(y(\tau_1)))))) \, d\sigma$. Так как $y \in Y$, $\tau_1 > t$, $y(t) = x$, то $\omega(y(\sigma)) < \varphi(\sigma - t - \Lambda(\omega(x)))$ для $\sigma \geqq t$, и тем более будет $\omega(y(\tau_1)) < \varphi(-\Lambda(\omega(x)))$. Отсюда следует

$$U_7(y(\tau_1)) < \int_0^{\infty} \chi(\varphi(\sigma - \Lambda_2(\omega(x)))) \, d\sigma = \tfrac{1}{2} U_4(x) \, .$$

Ввиду (2,39) и (2,43), получаем $c(y) = V_1(t) < U_4(x)$ и приходим к заключению, что невозможен и второй случай. Следовательно, имеют место соотношения (2,41) и (2,40).

Прежде чем приступить к нахождению функции $U_5(x)$, припомним следующее определение:

Функция $U_8(x)$, определенная для $x \in G$, называется полунепрерывной снизу в G, если соблюдается условие: если $x^{(i)} \to x \in G$, то $\liminf\limits_{i \to \infty} U_8(x^{(i)}) \geqq \geqq U_8(x)$. Без труда докажем справедливость

Леммы 6. *Пусть функция $U_8(x)$ полунепрерывна снизу в G.*

Пусть

$$U_8(0) \geqq 0, \, U_8(x) > 0 \;\; \text{для} \;\; x \neq 0, \, U_8(x) \to \infty \; \text{для} \; \omega(x) \to \infty .$$

Тогда существует функция $U_5(x)$, определенная и непрерывная в G и выполняющая условия

$$U_5(0) = 0, \, U_5(x) > 0 \; \text{для} \; x \neq 0, \, U_5(x) \to \infty \; \text{для} \; \omega(x) \to \infty, \, U_5(x) \leqq U_8(x) \, . \tag{2,44}$$

Доказательство. На компактном множестве $\overline{\Omega(2^j)} - \Omega(2^{j-1})$, $j = \dots -1, 0, 1, \dots$ функция $U_8(x)$ достигает положительного минимума $\overline{m}_j$. Притом $\overline{m}_j \to \infty$ для $j \to \infty$. Условие (2,44) будет выполнено, если функция $U_5(x)$ будет удовлетворять неравенствам $U_5(x) < m_j$ для $2^{j-1} \leqq \omega(x) \leqq 2^j$, $j = \dots -1, 0, 1. \dots$ Остальным условиям нетрудно удовлетворить.

Для $x \in G$ обозначим через $Q(x)$ множество, элементами которого являются функции $q(s)$, выполняющие следующие условия:

функция $q(s)$ определена и непрерывна для $0 \leqq s \leqq S \leqq \infty$ (S может принимать различные значения для различных функций $q(s)$, в частности. может быть $S = 0$ или $S = \infty$),

$$q(s) \in G \quad \text{для} \quad 0 \leqq s \leqq S\,, \quad q(0) = x\,,$$

существует кусочно-непрерывная производная

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,q(s)\,, \quad 0 \leqq s \leqq S\,, \quad \left(\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1\,, \quad 0 \leqq s \leqq S$$

(за исключением тех точек, где $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,q(s)$ не является непрерывной). В случае, когда $S = \infty$, предположим, что существует $\lim\limits_{t\to\infty} q(s) \in G$ и положим $\lim\limits_{s\to\infty} q(s) = q(\infty)$. Итак, элементами множества $Q(x)$ являются кривые $q(s)$, пробегающие в G; одной концевой точкой их является точка x. Эти кривые выражены в параметрическом виде, причем параметром s служит длина дуги кривой. При этом допускаются и кривые, которые вырождаются в точку.

Дадим определение функции $U_8(x)$

$$U_8(x) = \inf_{q\in Q(x)} \Big[\int\limits_0^S \chi(\omega(q(s)))\,\mathrm{d}s + \tfrac{1}{2}U_7(q(S))\Big]\,.$$

Очевидно, $U_8(0) = 0$, так как можно выбрать $S = 0$, $q(0) = 0$.

Пусть $x \in G$, $x \neq 0$. Тогда существует такое число $r > 0$, что

$$\tfrac{1}{2}U_7(v) > r^2 \quad \text{и} \quad \chi(\omega(v)) > r\,, \quad \text{если} \quad \|v - x\| < r\,.$$

Пусть $q \in Q(x)$; если $\|q(S) - x\| < r$, то $\frac{1}{2}U_7(q(S)) > r^2$; если же $\|q(S) - x\| \geqq r$, то найдем оценку интеграла $\int\limits_0^S \chi(\omega(q(s)))\,\mathrm{d}s$. Возьмем число S_1, $0 < S_1 < S$ так, чтобы было

$$\|q(s) - x\| < r \quad \text{для} \quad 0 \leqq s < S_1\,, \quad \|q(S_1) - x\| = r\,.$$

Так как параметр s есть длина дуги, имеем $S_1 \geqq r$; далее будет $\chi(\omega(q(s))) > r$ для $0 \leqq s < S_1$, откуда

$$\int\limits_0^S \chi(\omega(q(s)))\,\mathrm{d}s \geqq \int\limits_0^{S_1} \chi(\omega(q(s)))\,\mathrm{d}s \geqq r^2\,,$$

так что во всяком случае имеет место $U_8(x) \geqq r^2 > 0$. Итак, для $x \neq 0$ будет $U_8(x) > 0$.

Предположим теперь, что $x \in G$, $\omega(x) > 2^{2j}$, где j — натуральное число.

Обозначим $\overline{M}_j = \inf\limits_{\substack{v \in G \\ \omega(v) \geqq 2^j}} \frac{1}{2} U_7(v)$.

Ввиду (2,33) имеем $\overline{M}_j \to \infty$ для $j \to \infty$. Пусть $q \in Q(x)$; если $\omega(q(S)) \geqq 2^j$, то $\frac{1}{2} U_7(q(S)) \geqq \overline{M}_j$.

Предположим, что $\omega(q(S)) < 2^j$. Найдем числа $s_1, \bar{s}_1, \ldots, s_j, \bar{s}_j$, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqq s_1 < \bar{s}_1 \leqq s_2 < \bar{s}_2 \leqq \ldots \leqq s_j < \bar{s}_j < S$, $2^{2j-i+1} = \omega(q(s_i)) > \omega(q(s)) > \omega(q(\bar{s}_i)) = 2^{2j-i}$ для $s_i < s < \bar{s}_i$, $i = 1, 2, \ldots, j$.

Ввиду (2,32) и того, что s есть длина дуги, получим $\int\limits_{s_i}^{\bar{s}_i} \chi(\omega(q(s)))\,\mathrm{d}s > 1$, $(i = 1, 2, \ldots, j)$, так что $\int\limits_0^S \chi(\omega(q(s)))\,\mathrm{d}s > j$. Итак, мы доказали утверждение:

если $\omega(x) > 2^{2j}$, то $U_8(x) \geqq \min(\overline{M}_j, j)$, $(j = 1, 2, 3, \ldots)$, так что

$$U_8(x) \to \infty\,, \quad \text{если} \quad \omega(x) \to \infty\,.$$

Докажем еще, что функция $U_8(x)$ полунепрерывна снизу в G. Отыщем такие числа $K_1 > 0$ и $r_1 > 0$, что $\chi(\omega(v)) < K_1$ для $\|v - x\| < r_1$. Без труда можно установить справедливость неравенства

$$U_8(x) \leqq U_8(v) + K_1\|x - v\|\,, \quad \text{если} \quad \|x - v\| < r_1\,,$$

так что функция $U_8(x)$ полунепрерывна снизу. Функция $U_9(x)$ выполняет все условия леммы 6. Пусть функция $U_5(x)$ определена по лемме 6 для функции $U_8(x)$. Мы докажем, что справедливо неравенство

$$V^*(x, t) \geqq U_5(x)\,. \tag{2,45}$$

Пусть $x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$ и пусть $y(\tau)$ есть решение уравнения (1,01), определенное для $\tau \geqq 1$ и выполняющее условие $y(t) = x$. Такое решение $y(\tau)$ существует, причем $y = y(\tau) \in B(x, t)$. Опять-таки

$$y(\tau) \neq 0 \quad \text{для} \quad t \leqq \tau < t_1,\ y(\tau) = 0 \quad \text{для} \quad \tau \geqq t_1, t < t_1 \leqq \infty\,.$$

Так как $y(\tau)$ есть решение уравнения (1,01), то

$$\int\limits_t^\infty \psi(y(\tau), \tau)\|\,\dot{y}(\tau) - f(y(\tau), \tau)\|\,\mathrm{d}\tau = 0\,,$$

так что (ввиду леммы 6) неравенство (2,45) будет доказано, если покажем, что

$$c(y) = V_1(t) \geqq U_8(x)\,. \tag{2,46}$$

Допустим, что $V_1(t) < U_8(x)$. По определению функции $U_8(x)$ имеем $U_8(x) \leqq \frac{1}{2} U_7(x)$, и могут наступить два случая:

1. для всех τ, $t \leqq \tau < t_1$ будет $V_1(\tau) < \frac{1}{2} U_7(y(\tau))$;
2. существует число t_2, $t < t_2 < t_1$ такое, что

$$V_1(\tau) < \tfrac{1}{2} U_7(y(\tau)) \quad \text{для} \quad t \leqq \tau < t_2\,, \quad V_1(t_2) = \tfrac{1}{2} U_7(y(t_2))\,.$$

Исследуем прежде всего первый случай. В этом случае бУдет

$$L(y(\tau), \tau, V_1(\tau)) = (1 + \|f(y(\tau), \tau)\|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad t \leqq \tau < t_1$$

и $V_1(t) = \int\limits_t^{t_1} \chi(\omega(y(\tau)))\,(1 + \|\dot{y}(\tau)\|^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\tau > \int\limits_t^{t_1} \chi(\omega(y(\tau)))\,\|\dot{y}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau$

в силу определения функции $V_1(\tau)$ и уравнения (1,01).

Произведем замену независимой переменной

$$s = \int\limits_t^{\tau} \|\dot{y}(\sigma)\|\,\mathrm{d}\sigma, \quad S = \int\limits_t^{t_1} \|\dot{y}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau, \quad \bar{y}(s) = y(\tau)\,.$$

Получаем

$$V_1(t) > \int\limits_0^S \chi(\omega(\bar{y}(s)))\,\mathrm{d}s\,,$$

$$\bar{y}(S) = 0\,, \quad \bar{y}(s) \in Q(x)\,,$$

так что $V_1(t) < U_8(x)$, и первый случай невозможен.

Обратимся теперь ко второму случаю. В этом случае

$$L(y(\tau), \tau, V_1(\tau)) = (1 + \|f(y(\tau), \tau)\|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad t \leqq \tau < t_2\,,$$

и мы получаем

$$V_1(t) - V_1(t_2) = \int\limits_t^{t_2} \chi(\omega(y(\tau)))(1 + \|\dot{y}(\tau)\|^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\tau > \int\limits_t^{t_2} \chi(\omega(y(\tau)))\cdot\|\dot{y}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Произведем опять замену независимой переменной

$$s = \int\limits_t^{\tau} \|\dot{y}(\sigma)\|\,\mathrm{d}\sigma\,, \quad S = \int\limits_t^{t_2} \|\dot{y}(\sigma)\|\,\mathrm{d}\sigma\,, \quad \bar{y}(s) = y(\tau)\,.$$

Так как по предположению 2. $V_1(t_2) = \frac{1}{2}U_7(y(t_2)) = \frac{1}{2}U_7(\bar{y}(S))$, получаем

$$V_1(t) > \int\limits_0^S \chi(\omega(\bar{y}(s)))\,\mathrm{d}s + \tfrac{1}{2}U_7(\bar{y}(S))\,.$$

Очевидно, $\bar{y}(s) \in Q(x)$, и мы получаем

$$c(y) = V_1(t) > U_8(x)\,;$$

таким образом невозможен и второй случай. Это значит, что соотношения (2,46) и (2,45) имеют место.

Положим

$$U_6(x) = \chi(\omega(x))\,\frac{U_5(x)}{2U_4(x)} \quad \text{для} \quad x \in G\,, \quad x \neq 0\,, \quad U_6(0) = 0\,.$$

Очевидно, $U_6(x) > 0$ для $x \neq 0$. Так как $U_5(x) \leqq \frac{1}{2}U_7(x) \leqq \frac{1}{4}U_4(x)$, имеем $U_5(x) : (2U_4(x)) < 1 : 8$ для $x \in G$, $x \neq 0$, так что функция $U_6(x)$ непрерывна в G.

Возьмем произвольное $x \in G$, $x \neq 0$, $t > 0$. Пусть $u(\tau)$ есть решение уравнения (1,01), определенное для $t - \xi < \tau \leqq t$ и выполняющее условие $u(t) = x$ (ξ — сколь угодно малое положительное число). Докажем, что

$$\liminf_{\Delta t \to 0+} \frac{V^*(u(t-\Delta t), t - \Delta t) - V^*(x, t)}{\Delta t} \geqq U_6(x) . \tag{2,47}$$

Возьмем число Δt, $0 < \Delta t < \xi$. Для любого числа ζ, $0 < \zeta < (U_5(x)) : 2$ можно подобрать такую функцию $y \in B(x, t)$, что

$$c(y) . (1 - \int_t^\infty \psi(y(\tau), \tau) . \|\dot{y}(\tau) - f(y(\tau), \tau)\| \, \mathrm{d}\tau) > V^*(x, t) - \zeta . \tag{2,48}$$

Притом $V_1(t) = c(y) \leqq U_4(x)$ и $V^*(x, t) \geqq U_5(x)$. (см. (2,41) и (2,45)).

Из этих неравенств, из (2,48) и из неравенства $\zeta < (U_5(x)) : 2$ получаем

$$1 - \int_t^\infty \psi(y(\tau), \tau) . \|\dot{y}(\tau) - f(y(\tau), \tau)\| \, \mathrm{d}\tau > U_5(x) : (2U_4(x)) .$$

Положим далее $\tilde{y}(\tau) = u(\tau)$ для $t - \Delta t \leqq \tau < t$, $\tilde{y}(\tau) = y(\tau)$ для $\tau \geqq t$. Очевидно,

$$\int_{t-\Delta t}^\infty \psi(\tilde{y}(\tau), \tau) . \|\dot{\tilde{y}}(\tau) - f(\tilde{y}(\tau), \tau)\| \, \mathrm{d}\tau = \int_t^\infty \psi(y(\tau), \tau) . \|\dot{y}(\tau) - f(y(\tau), \tau)\| \, \mathrm{d}\tau .$$

Далее имеем $c(\tilde{y}) = \tilde{V}_1(t - \Delta t) = \tilde{V}_1(t - \Delta t) - \tilde{V}_1(t) + V_1(t)$[8]) в силу очевидного равенства $\tilde{V}_1(t) = V_1(t)$. Так как $L(\tilde{y}(\tau), \tau, \tilde{V}_1(\tau)) \geqq 1$, то будет

$$\tilde{V}_1(t - \Delta t) - \tilde{V}_1(t) \geqq \int_{t-\Delta t}^t \chi(\omega(u(\tau))) \, \mathrm{d}\tau .$$

Таким образом получаем $c(\tilde{y}) \geqq \int_{t-\Delta t}^t \chi(\omega(u(\tau))) \, \mathrm{d}\tau + c(y)$ и

$$V^*(u(t - \Delta t), t - \Delta t) \geqq c(\tilde{y})(1 - \int_{t-\Delta t}^\infty \psi(\tilde{y}(\tau), \tau) \|\dot{\tilde{y}}(\tau) - f(\tilde{y}(\tau), \tau)\| \, \mathrm{d}\tau) \geqq$$

$$\geqq \int_{t-\Delta t}^t \chi(\omega(u(\tau))) \, \mathrm{d}\tau . (1 - \int_t^\infty \psi(y(\tau), \tau) \|\dot{y}(\tau) - f(y(\tau), \tau)\| \, \mathrm{d}\tau +$$

$$+ c(y)(1 - \int_t^\infty \psi(y(\tau), \tau) \|\dot{y}(\tau) - f(y(\tau), \tau)\| \, \mathrm{d}\tau) \geqq$$

$$\geqq \int_{t-\Delta t}^t \chi(\omega(u(\tau))) \, \mathrm{d}\tau . \frac{U_5(x)}{2U_4(x)} + V^*(x, t) - \zeta .$$

---

[8]) Функция $\tilde{V}_1(\tau)$ поставлена в соответствие функции $\tilde{y}(\tau)$ для $\tau \geqq t - \Delta t$ (см. стр. 234).

Так как число ζ, $0 < \zeta < \frac{1}{2}U_5(x)$ было произвольным, то

$$V^*(u(t - \Delta t), t - \Delta t) \geqq \int_{t-\Delta t}^{t} \chi(\omega(u(\tau)))\,\mathrm{d}\tau \cdot \frac{U_5(x)}{2U_4(x)} + V^*(x, t)\,.$$

Отсюда уже легко вытекает справедливость (2,47).

Для завершения доказательства теоремы 2 остается доказать, что функция $V^*(x, t)$ является локально липшицевской для $x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$.

Для этого возьмем точку $x_0 \in G$, $x_0 \neq 0$, $t_0 \geqq 0$. Пусть F_2 — множество таких точек $x \in G$, для которых $\|x\| \geqq \frac{1}{4}\|x_0\|$, $\omega(x) \leqq \varphi(-\Lambda(2\omega(x_0)))$. Множество F_2, очевидно, компактно и не содержит точки 0.

Возьмем число K_2 так, чтобы было

$$K_2 > \|f(x, t)\|\,, \quad x \in F_2\,, \quad 0 \leqq \tau \leqq t_0 + 1\,.$$

Найдем число δ', $0 < \delta' < \frac{1}{5}$ так, чтобы

$K_2\delta' < \|x_0\| : 24$ и если $\|x - x_0\| < \delta'$, то $\|x\| > \frac{1}{2}\|x_0\|$, $\omega(x) < 2\omega(x_0)$.

Докажем справедливость

Леммы. 7. *Если*

$$\|x - x_0\| < \delta',\ |t - t_0| < \delta',\ t \geqq 0, \quad y = y(\tau) \in B(x, t),$$

то

$$y(\tau) \in F_2\,, \quad t \leqq \tau \leqq t_0 + 2\delta'\,.$$

Доказательство. Так как $\|x - x_0\| < \delta'$, имеем $\omega(x) < 2\omega(x_0)$, так что

$$\omega(y(\tau)) < \varphi(\tau - t - \Lambda(\omega(x))) < \varphi(-\Lambda(2\omega(x_0)))\,, \quad \tau \geqq t\,.$$

Предположим, что существует число τ_3, $t \leqq \tau_3 \leqq t_0 + 2\delta'$ такое, что $\|y(\tau_3)\| < \|x_0\| : 4$. Так как $y(t) = x$, $\|x\| > \|x_0\| : 2$, то существуют числа τ_1, τ_2, $t < \tau_1 < \tau_2 \leqq t_0 + 2\delta'$ такие, что

$$\tfrac{1}{2}\|x_0\| = \|y(\tau_1)\| > \|y(\tau)\| > \|y(\tau_2)\| = \tfrac{1}{4}\|x_0\|\,, \quad \tau_1 < \tau < \tau_2\,. \tag{2,49}$$

Так как $y = y(\tau) \in B(x, t)$, то

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \psi(y(\tau), \tau)\|\,\dot y(\tau) - f(y(\tau), \tau)\|\,\mathrm{d}\tau < 1\,.$$

Согласно (2,20) и (2,49), имеем

$$\psi(y(\tau), \tau) > \frac{8}{\|x_0\|} \quad \text{для} \quad \tau_1 < \tau < \tau_2 \quad \text{и получаем}$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\dot y(\tau) - f(y(\tau), \tau)\|\,\mathrm{d}\tau < \|x_0\| : 8\,, \qquad \|y(\tau_2) - y(\tau_1)\| < \tfrac{1}{8}\|x_0\| + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|f(y(\tau), \tau)\|\,\mathrm{d}\tau.$$

В силу (2,49), будет $y(\tau) \in F_2$, $\tau_1 < \tau < \tau_2$, так что $\|f(y(\tau), \tau)\| < K_2$. Получаем

$$\|y(\tau_2) - y(\tau_1)\| < \tfrac{1}{8}\|x_0\| + K_2|\tau_2 - \tau_1| < \tfrac{1}{8}\|x_0\| + K_2 \,.\, 3\delta' < \tfrac{1}{4}\|x_0\| ,$$

что противоречит неравенству (2,49). Лемма 7 доказана.

Возьмем открытое множество $G_2 \subset G$ так, чтобы было $F_2 \subset G_2 \subset \bar{G}_2 \subset G$, $\bar{G}_2$ — компактно, (точка 0 не входит в множество $\bar{G}_2$).

Возьмем число δ, $0 < \delta < \frac{1}{6}\delta'$, $\delta < \frac{1}{2}\varrho(F_2, CG_2)$. Возьмем затем $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, t_1, t_2 так, чтобы

$$\|x^{(1)} - x_0\| < \delta , \quad \|x^{(2)} - x_0\| < \delta , \quad |t_1 - t_0| < \delta , \quad |t_2 - t_0| < \delta ,$$
$$t_1 \geqq 0 , \quad t_2 \geqq 0$$

и положим $\varrho = \|x^{(1)} - x^{(2)}\| + |t_1 - t_2|$.

Предположим, что $\varrho > 0$; очевидно, $\varrho < 4\delta$. Положим $t_3 = t_1 + 2\varrho$. Нам требуется оценить снизу разность $V^*(x^{(2)}, t_2) - V^*(x^{(1)}, t_1)$. Положим

$$K_8 = \tfrac{1}{2} \inf_{\|x - x_0\| \leqq \delta} U_5(x) , \quad K_9 = \sup_{\|x - x_0\| \leqq \delta} U_4(x) ,$$

и возьмем произвольное число ζ, $0 < \zeta < K_8$ и функцию $y^{(1)} = y^{(1)}(\tau) \in B(x^{(1)}, t_1)$ так, чтобы

$$c(y^{(1)}) \,.\, (1 - \int_{t_1}^{\infty} \psi(y^{(1)}(\tau), \tau) \, \|\dot{y}^{(1)}(\tau) - f(y^{(1)}(\tau), \tau)\| \, \mathrm{d}t) + \zeta > V^*(x^{(1)}, t_1) \,. \tag{2,50}$$

Положим

$$y_2(\tau) = y^{(1)}(\tau) , \quad \text{для} \quad \tau \geqq t_1 + 2\varrho = t_3$$

$$y_2(\tau) = y^{(1)}\left(t_3 + (t_1 - t_3)\,\frac{\tau - t_3}{t_2 - t_3}\right) + (x^{(2)} - x^{(1)})\,\frac{\tau - t_3}{t_2 - t_3} \quad \text{для} \quad t_2 \leqq \tau < t_3 \,.$$

Обозначим

$$\Delta = \int_{t_2}^{\infty} \psi(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\, y^{(2)}(\sigma) - f(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \right\| \mathrm{d}\sigma -$$
$$- \int_{t_1}^{\infty} \psi(y^{(1)}(\tau), \tau) \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, y^{(1)}(\tau) - f(y^{(1)}(\tau), \tau) \right\| \mathrm{d}\tau =$$
$$= \int_{t_2}^{t_3} \psi(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\, y^{(2)}(\sigma) - f(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \right\| \mathrm{d}\sigma -$$
$$- \int_{t_1}^{t_3} \psi(y^{(1)}(\tau), \tau) \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, y^{(2)}(\tau) - f(y^{(1)}(\tau), \tau) \right\| \mathrm{d}\tau \,.$$

Подберем постоянные K_3, K_4, K_5, K_6 так, чтобы имело место

$$K_3 > \|f(x, \tau)\|, \quad x \in \overline{G}_2, \quad 0 \leqq \tau \leqq t_0 + 1,$$
$$K_4 > \psi(x, \tau), \quad x \in \overline{G}_2, \quad 0 \leqq \tau \leqq t_0 + 1,$$
$$K_5(\|v^{(1)} - v^{(2)}\| + |\tau_1 - \tau_2|) \geqq |\psi(v^{(1)}, \tau_1) - \psi(v^{(2)}, \tau_2)|,$$

если все точки отрезка $\langle v^{(1)}, v^{(2)}\rangle$[9]) входят в $\overline{G}_2$, $0 \leqq \tau_1 \leqq t_0 + 1$, $0 \leqq \tau_2 \leqq t_0 + 1$.

(Число K_5 существует, так как функция $\psi(x, t)$ обладает непрерывными производными первого порядка для $x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$ и множество $\overline{G}$ компактно и не содержит точки 0.)

$$K_6 > \chi(\omega(x))\, L(x, \tau, \eta), \quad x \in \overline{G}_2, \quad 0 \leqq \tau \leqq t_0 + 1.$$

В интеграле

$$\int_{t_2}^{t_3} \psi(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} y^{(2)}(\sigma) - f(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \right\| \mathrm{d}\sigma$$

произведем подстановку $\tau = t_3 + (t_1 - t_3) \dfrac{\sigma - t_3}{t_2 - t_3}$. Имеем

$$y^{(2)}(\sigma) = y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} y^2(\sigma) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} y^{(1)}(\tau) + \frac{x^{(2)} - x^{(1)}}{t_1 - t_3} \right) \frac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3}.$$

Получаем

$$\int_{t_2}^{t_3} \psi(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} y^{(2)}(\sigma) - f(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \right\| \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \int_{t_1}^{t_3} \psi\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right) \cdot$$

$$\cdot \left\| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} y^{(1)}(\tau) + \frac{x^{(2)} - x^{(1)}}{t_1 - t_3} \right) \frac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3} - \right.$$

$$\left. - f\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3} \right) \right\| \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_3} \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_{t_1}^{t_3} \psi\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3} \right) \cdot$$

$$\cdot \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} y^{(1)}(\tau) + \frac{x^{(2)} - x^{(1)}}{t_1 - t_3} - \right.$$

$$\left. - \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_3} f\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3} \right) \right\| \mathrm{d}\tau.$$

---

[9]) Под отрезком $\langle v^{(1)}, v^{(2)}\rangle$ мы понимаем множество точек $(1 - \xi)\, v^{(1)} + \xi v^{(2)}$, $0 \leqq \xi \leqq 1$.

Очевидно, будет $\frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \leqq \frac{|t_2 - t_1| + t_3 - t_1}{t_3 - t_1} \leqq \frac{\varrho + 2\varrho}{2\varrho} < 2$.

Далее будет $\|x^{(2)} - x^{(1)}\| < 2\delta$, $\varrho < 4\delta$, $t_3 = t_1 + 2\varrho < t_0 + \delta + 8\delta < t_0 + 2\delta'$, $y^{(1)}(\tau) \in F_2$ для $t_1 \leqq \tau \leqq t_3$, и поэтому будет $y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3} \in \bar{G}_2$, $t_1 \leqq \tau \leqq t_3$. (Даже все точки отрезка

$$\left\langle y^{(1)}(\tau), \quad y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \cdot \frac{t_1 - t_3}{\tau - t_3} \right\rangle$$

входят в $\bar{G}_2$ для любого τ, $t_1 \leqq \tau \leqq t_3$.) Это значит, что $\psi(y^{(1)}(\tau), \tau) < K_4$,

$$\left\|\psi\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right)\right\| < K_4,$$

$$\|f(y^{(1)}(\tau), \tau)\| < K_3, \quad \left\| f\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right) \right\| < K_3.$$

Получаем

$$|\Delta| \leqq \int_{t_1}^{t_3} \left| \psi\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right) - \psi(y^{(1)}(\tau), \tau) \right| \cdot$$

$$\cdot \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} y^{(1)}(\tau) - f(y^{(1)}(\tau), \tau) \right\| \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_3} \left| \psi\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right)\right| \cdot \|f(y^{(1)}(\tau), \tau)\| \, \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_3} \left| \psi\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right)\right| \cdot \frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|}{t_2 - t_3} \, \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_3} \int_{t_1}^{t_3} \left| \psi\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, \quad t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right)\right| \cdot$$

$$\cdot \left\| f\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, \quad t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right) \right\| \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq \int_{t_1}^{t_3} \left| \psi\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3} - \psi(y^{(1)}(\tau), \tau) \right| \cdot$$

$$\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left\| y^{(1)}(\tau) - f(y^{(1)}(\tau), \tau) \right\| \mathrm{d}\tau + K_4 K_3 (t_3 - t_1) + 2K_4 \|x^{(2)} - x^{(1)}\| + 2K_4 K_3 (t_3 - t_1).$$

Как мы уже заметили, все точки отрезка

$$\left\langle y^{(1)}(\tau), \; y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3} \right\rangle$$

входят в множество $\bar{G}_2$ для любого τ, $t_1 \leqq \tau \leqq t_3$. Так как

$$\left\|(x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right\| \leqq \|x^{(2)} - x^{(1)}\| , \qquad t_1 \leqq \tau \leqq t_3 ,$$

$$\left| t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3} - \tau \right| = |t_1 - t_2| \cdot \left| \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3} \right| \leqq |t_1 - t_2| , \qquad t_1 \leqq \tau \leqq t_3 ,$$

$\|x^{(2)} - x^{(1)}\| + |t_2 - t_1| = \varrho$, то получаем

$$\left| \psi\left(y^{(1)}(\tau) + (x^{(2)} - x^{(1)}) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}, t_3 + (t_2 - t_3) \frac{\tau - t_3}{t_1 - t_3}\right) - \psi(y^{(1)}(\tau), \tau) \right| \leqq K_5 \varrho ,$$

$$t_1 \leqq \tau \leqq t_3 .$$

Так как $y^{(1)}(\tau) \in B(x^{(1)}, t_1)$, $\psi(x, \tau) > 1$, [см. (2,20)], то

$$\int_{t_1}^{t_3} \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} y^{(1)}(\tau) - f(y(\tau), \tau) \right\| \mathrm{d}\tau < 1 .$$

Таким образом мы получим оценку

$$|\Delta| \leqq K_5 \varrho + K_4 K_3 2\varrho + 2K_4 \varrho + 2K_4 K_3 2\varrho = (6K_4 K_3 + 2K_4 + K_5)\, \varrho = K_7 \varrho \cdot$$

Так как $c(y^{(1)}) \leqq K_9$, $V^*(x^{(1)}, t_1) \geqq 2K_8$, [см. (2,41) и (2,45)], то из неравенства (2,50) получаем

$$\int_{t_1}^{\infty} \psi(y^{(1)}(\tau), \tau) \| \dot{y}^{(1)}(\tau) - f(y^{(1)}(\tau), \tau) \| \, \mathrm{d}\tau < 1 - K_8 : K_9 .$$

Итак, если $\varrho < K_8 : (K_7 K_9) = K_{10}$, то

$$\int_{t_2}^{\infty} \psi(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} y^{(2)}(\sigma) - f(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \right\| \mathrm{d}\sigma < 1$$

и $y^{(2)} = y^{(2)}(\varrho) \in B(x^{(2)}, t_2)$.

Теперь найдем оценку разности $c(y^{(1)}) - c(y^{(2)})$. Пусть функции $V_1^{(1)}(\tau)$, $V_1^{(2)}(\tau)$ поставлены в соответствие функциям $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ (см. стр.).

Имеем

$$c(y^{(1)}) = V_1^{(1)}(t_1) , \quad c(y^{(2)}) = V_1^{(2)}(t_2) .$$

Очевидно, что $V_1^{(1)}(t_3) = V_1^{(2)}(t_3)$, так как $y^{(1)}(\tau) = y^{(2)}(\tau)$ для $\tau \geqq t_3$ и функция V_1 определяется однозначно.

Так как $y^{(1)}(\tau) \in \bar{G}_2$, $t_1 \leqq \tau \leqq t_3$, $y^{(2)}(\tau) \in \bar{G}_2$, $t_2 \leqq \tau \leqq t_3$, $t_3 \leqq t_0 + 2\delta' \leqq \leqq t_0 + 1$, то

$$\chi(\omega(y^{(1)}(\tau)))\, L(y^{(1)}(\tau), \tau, V_1^{(1)}(\tau)) < K_6 , \quad \text{для} \quad t_1 \leqq \tau \leqq t_3 ,$$

$$\chi(\omega(y^{(2)}(\tau)))\, L(y^{(2)}(\tau), \tau, V_1^{(2)}(\tau)) < K_6 , \quad \text{для} \quad t_2 \leqq \tau \leqq t_3 .$$

Так как функции $V_1^{(1)}(\tau)$, $V_1^{(2)}(\tau)$ удовлетворяют уравнению (2,34), получаем $K_6(t_3 - t_1) + V_1^{(1)}(t_3) > V_1^{(1)}(t_1) > V_1^{(1)}(t_3)$, $K_6(t_3 - t_2) + V_1^{(2)}(t_3) > V_1^{(2)}(t_2) > V_1^{(2)}(t_3)$. Так как $t_3 - t_2 \leqq t_3 - t_1 + |t_2 - t_1| \leqq 3\varrho$, имеем

$$|V_1^{(1)}(t_1) - V_1^{(2)}(t_2)| < 3K_6\varrho \quad \text{и} \quad |c(y^{(1)}) - c(y^{(2)})| < 3K_6\varrho\,.$$

Очевидно,

$$V^*(x^{(2)}, t_2) \geqq c(y^{(2)}) \left(1 - \int_{t_2}^{\infty} \psi(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} y^{(2)}(\sigma) - f(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \right\| \mathrm{d}\sigma \right) \geqq$$

$$\geqq c(y^{(1)}) \left(1 - \int_{t_2}^{\infty} \psi(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} y^{(2)}(\sigma) - f(y^{(2)}(\sigma), \sigma) \right\| \mathrm{d}\sigma \right) - 3K_6\varrho \geqq$$

$$\geqq c(y^{(1)}) \left(1 - \int_{t_1}^{\infty} \psi(y^{(1)}(\tau), \tau) \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} y^{(1)}(\tau) - f(y^{(1)}(\tau), \tau) \right\| \mathrm{d}\tau \right) - K_9K_7\varrho - 3K_6\varrho \geqq$$

$$\geqq V^*(x^{(1)}, t_1) - \zeta - K_9K_7\varrho - 3K_6\varrho\,.$$

Так как число ζ произвольно, то мы доказали, что

$$V^*(x^{(2)}, t_2) - V^*(x^{(1)}, t_1) \geqq -K_{11}\varrho\,, \quad \text{где} \quad K_{11} = K_9K_7 + 3K_6\,.$$

Если поменять местами $x^{(2)}$, t_2 и $x^{(1)}$, t_1, то получим

$$V^*(x^{(1)}, t_1) - V^*(x^{(2)}, t_2) \geqq -K_{11}\varrho\,.$$

Это значит, что

$$|V^*(x^{(2)}, t_2) - V^*(x^{(1)}, t_1)| \leqq K_{11}\varrho\,, \quad \varrho = \|x^{(2)} - x^{(1)}\| + |t_2 - t_1|\,.$$

Таким образом мы пришли к следующему результату: Для данных $x_0 \in G$, $x_0 \neq 0$, $t_0 \geqq 0$ мы нашли положительные числа δ, K_{10}, K_{11} такие, что как только

$$\|x^{(1)} - x_0\| < \delta\,, \quad \|x^{(2)} - x_0\| < \delta\,, \quad |t_1 - t_0| < \delta\,, \quad |t_2 - t_0| < \delta\,,$$

$$t_1 \geqq 0\,, \quad t_2 \geqq 0\,,$$

$$\|x^{(1)} - x^{(2)}\| + |t_1 - t_2| < K_{10}\,, \tag{2,51}$$

то будет также и

$$|V^*(x^{(2)}, t_2) - V^*(x^{(1)}, t_1)| \leqq K_{11}(\|x^{(2)} - x^{(1)}\| + |t_2 - t_1|)\,.$$

Условие (2,51) можно, очевидно, опустить, если уменшить δ.

Итак, мы доказали, что функция $V^*(x, t)$ является локально липшицевской для $x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$. Теорема 2 доказана.

3. Теорема об аппроксимации

В настоящем параграфе мы докажем теорему 3.

В теореме 3 мы предполагаем только непрерывность функции $f(x, t)$ для $x \in G$, $t \geqq 0$ и не делаем никаких предположений о поведении интегралов уравнения (1,01).

Теорема 3. *Предположим, что функция $V_2(x,t)$ выполняет следующие условия:*

функция $V_2(x, t)$ определена и непрерывна для $x \in G$, $t \geqq 0$

Функция $V_2(x, t)$ является локально липшицевской для $x \in G$, $x \neq 0$, $t > 0$.

$V_2(0, t) = 0$, $t \geqq 0$, $V_2(x, t) > 0$ для $x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$.

Существует функция $U_9(x, t)$, определенная и непрерывная для $x \in G$, $t > 0$, $U_9(0, t) = 0$, $t > 0$, $U_9(x,t) > 0$, $x \in G$, $x \neq 0$, $t > 0$ такая, что имеет место утверждение:

если $u(\tau)$ есть решение уравнения (1,01), выполняющее условие $u(t) = x$, $x \neq 0$, $t > 0$, то

$$\liminf_{\Delta t \to 0+} \frac{V_2(u(t - \Delta t), t - \Delta t) - V_2(x, t)}{\Delta t} \geqq U_9(x, t)\,. \tag{3,01}$$

Тогда существует функция $V_3(x, t)$, выполняющая следующие условия:

Функция $V_3(x, t)$ определена и непрерывна для $x \in G$, $t \geqq 0$.

Функция $V_3(x, t)$ обладает непрерывными производными всех порядков для $x \neq 0$, $t > 0$.

$$|V_3(x, t) - V_2(x, t)| \leqq \frac{t}{1 + 2t} V_2(x, t)\,,$$

$$W_3(x, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_3}{\partial x_j} f_j + \frac{\partial V_3}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} V_3(u(\tau), \tau)\big|_{\tau = t} < -\tfrac{1}{2} U_9(x, t)$$

($u(\tau)$ есть решение уравнения (1,01), выполняющее условие $u(t) = x$).

Замечание: Теорема 3 остается верной, если заменить условие (3,01) условием

$$\limsup_{\Delta t \to 0+} \frac{V_2(u(t + \Delta t), t + \Delta t) - V_2(x, t)}{\Delta t} \leqq -U_9(x, t)\,. \tag{3,02}$$

Доказательство. Пусть $J_{i,k}$ обозначает множество таких точек (x, t), для которых

$$x \in G\,, \quad 2^{i-3} < \omega(x) < 2^{i+4}\,, \quad 2^{k-3} < t < 2^{k+4}\,, \quad i = \ldots, -2, 0, 2, \ldots\,,$$
$$k = \ldots, -2, 0, 2, \ldots$$

Пусть $\tilde{J}_{i,k}$ обозначает множество таких точек (x, t), для которых

$$x \in G\,, \quad 2^{i-1} \leqq \omega(x) \leqq 2^{i+2}\,, \quad 2^{k-1} \leqq t \leqq 2^{k+2}\,, \quad i = \ldots, -2, 0, 2, \ldots,$$
$$k = \ldots, -2, 0, 2, \ldots$$

Пусть функции $p_i(x)$ выполняют следующие условия: Функции $p_i(x)$, $i = \ldots, -2, 0, 2, \ldots$ определены для $x \in G$ и обладают непрерывными производными всех порядков.

$$0 \leqq p_i(x) \leqq 1 , \quad x \in G .$$

$$p_i(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in G , \quad \omega(x) \leqq 2^{i-1} \quad \text{или} \quad \omega(x) \geqq 2^{i+2} .$$

$$p_i(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in G , \quad 2^i \leqq \omega(x) \leqq 2^{i+1} .$$

$$p_i(x) + p_{i+2}(x) = 1 , \quad x \in G , \quad 2^{i+1} \leqq \omega(x) \leqq 2^{i+2} , \quad i = \ldots, -2, 0, 2, \ldots$$

Нетрудно показать, что существуют функции $p_i(x)$, удовлетворяющие указанным условиям.

Пусть функция $g_k(t)$ выполняет следующие условия: Функция $g_k(t)$, $k = \ldots, -2, 0, 2, \ldots$ определена для всех t и обладает непрерывными производными всех порядков.

$$0 \leqq g_k(t) \leqq 1 .$$

$$g_k(t) = 0 \quad \text{для} \quad t \leqq 2^{k-1} , \quad \text{или} \quad t \geqq 2^{k+2} ,$$

$$g_k(t) = 1 , \quad 2^k \leqq t \leqq 2^{k+1} ,$$

$$g_k(t) + g_{k+2}(t) = 1 , \quad 2^{k+1} \leqq t \leqq 2^{k+2} , \quad k = \ldots, -2, 0, 2, \ldots$$

Нетрудно обнаружить, что существуют функции $g_k(t)$, удовлетворяющие указанным условиям.

Возмем числа $\bar{f}_{i,k}$, $\bar{p}_i$, $\bar{g}_k$ так, чтобы

$$\bar{f}_{i,k} \supset \|f(x, t)\| , \quad (x, t) \in J_{i,k} , \tag{3,03}$$

$$\bar{p}_i > \left| \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \right| , \quad \bar{p}_i > \left| \frac{\partial p_{i+2}}{\partial x_j} \right| \quad j = 1, 2, \ldots, u, \; x \in G \tag{3,04}$$

$$\bar{g}_k > \left| \frac{\mathrm{d}g_k}{\mathrm{d}t} \right| , \quad \bar{g}_k > \left| \frac{\mathrm{d}g_{k+2}}{\mathrm{d}t} \right| , \quad -\infty < t < \infty , \quad i = \ldots, -2, 0, 2, \ldots,$$
$$k = \ldots, -2, 0, 2, \ldots \tag{3,05}$$

Далее возьмем положительные числа $\xi_{i,k}$, $\zeta_{i,k}$ так, чтобы

$$\zeta_{i,k} < \tfrac{1}{8} U_9(x, t) , \quad (x, t) \in J_{i,k} , \tag{3,06}$$

$$\xi_{i,k} < \frac{t}{1 + 2t} V_2(x, t) , \quad x(t) \in J_{i,k} , \tag{3,07}$$

$$(n\bar{f}_{i,k}\bar{p}_i + \bar{g}_k)(\xi_{i,k} + \xi_{i+2,k} + \xi_{i,k+2} + \xi_{i+2,k+2}) < \zeta_{i,k} . \tag{3,08}$$

Пусть функция $\vartheta(x, t) = \vartheta(x_1, \ldots, x_n, t)$ определена для всех $(x_1, \ldots, x_n, t) \in E_{n+1}$, обладает непрерывными производными всех порядков по переменным $x_1, \ldots, x_n, t$ и пусть

$$\vartheta(x, t) \geqq 0 , \quad \vartheta(x, t) = 0 \quad \text{для} \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 + t^2 \geqq 1 ,$$

$$\int_{E_{n+1}} \ldots \int \vartheta(x, t) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \, \mathrm{d}t = 1 .$$

Возьмем теперь фиксированную пару индексов i, k, $i = \ldots, -2, 0, 2, \ldots$, $k = \ldots, -2, 0, 2, \ldots$ и определим функцию $V_{3,i,k}(x, t)$ при помощи уравнения

$$V_{3,i,k}(x, t) = \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E_{n+1}} \ldots \int V_2(x' + x, t' + t)\, \vartheta\left(\frac{x'}{r}, \frac{t'}{r}\right) \mathrm{d}x_1' \ldots \mathrm{d}x_n' \, \mathrm{d}t\,, \tag{3,09}$$

где положительное число r будет выбрано позднее. Функция $V_{3,i,k}(x, t)$ определена для таких (x, t), для которых интеграл в правой части уравнения (3,09) имеет смысл. Очевидно, существует такое положительное число $\bar{r}_{i,k}$, что функция $V_{2,i,k}(x, t)$ будет определена, как только $(x, t) \in J_{i,k}$, и имеет место неравенство

$$|V_{3,i,k}(x, t) - V_2(x, t)| < \xi_{i,k}\,, \quad (x, t) \in J_{i,k}\,, \tag{3,10}$$

если $0 < r < \bar{r}_{i,k}$. Притом функция $V_{3,i,k}(x, t)$ обладает непрерывными производными всех порядков для $(x, t) \in J_{i,k}$.

Пусть постоянная D имеет следующее свойство: если $(x^{(1)}, t_1) \in J_{i,k}$, $(x^{(2)}, t_2) \in J_{i,k}$ и если кроме того все точки, лежащие на отрезке, концевые точки которого суть $(x^{(1)}, t_1)$ и $(x^{(2)}, t_2)$, входят в множество $J_{i,k}$, то

$$|V_2(x^{(2)}, t_2) - V_2(x^{(1)}, t_1)| \leqq D(\|x^{(2)} - x^{(1)}\| + |t_2 - t_1|)\,. \tag{3,11}$$

Постоянная D существует, так как множество $\bar{J}_{i,k}$[10]) компактно, не содержит начала координат и функция $V_2(x, t)$ является локально липшицевской для $x \in G$, $x \neq 0$, $t > 0$. Возьмем число $d > 0$ так, чтобы было

$$2Dd < \zeta_{i,k}\,. \tag{3,12}$$

Наконец, возьмем число r, $0 < r < \bar{r}_{i,k}$ настолько малое, чтобы было

$$\|f(x, t) - f(x', t')\| < d\,, \tag{3,13}$$

как только $(x, t) \in \bar{J}_{i,k}$, $(x', t') \in \bar{J}_{i,k}$, $(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2 + (t - t')^2 < 4r^2$, и чтобы было

$$(x', t') \in J_{i,k}\,, \tag{3,14}$$

как только $(x, t) \in \tilde{J}_{i,k}$, $(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2 + (t - t')^2 < 4r^2$, и чтобы

$$|U_9(x, t) - U_9(x', t')| < \zeta_{i,k} \tag{3,15}$$

для $(x, t) \in J_{i,k}$, $(x', t') \in J_{i,k}$, $(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2 + (t - t')^2 < 4r^2$.

Возьмем теперь фиксированную точку $(x, t) \in \tilde{J}_{i,k}$ и число Δt, $0 < \Delta t^2 < \frac{r}{(1 + n\bar{f}_{i,k}^2)^{\frac{1}{2}}}$. Пусть $u(\tau)$ есть решение уравнения (1,01), определенное для $t \leqq \tau \leqq t + \Delta t$ и удовлетворяющее условию $u(t) = x$. Нетрудно доказать,

[10]) $\bar{J}_{i,k}$ есть замыкание множества $J_{i,k}$ в E_{n+1}.

что функция $u(\tau)$ существует и что $(u(\tau), \tau) \in J_{i,k}$ $(t \leqq \tau \leqq t + \Delta t)$. (Доказательство будет дано ниже.) Имеем

$$V_{3,i,k}(x, t) - V_{3,i,k}(u(t + \Delta t), t + \Delta t) =$$
$$= \frac{1}{r^{n+1}} \int \cdots \int_{x_1'^2 + \ldots + x_n'^2 + t'^2 = r^2} (V_2(x' + x, t' + t) - \tag{3,16}$$
$$- V_2(x' + u(t + \Delta t), t' + t + \Delta t))\, \vartheta \left(\frac{x'}{r}, \frac{t'}{r}\right) . \mathrm{d}x_1', \ldots, \mathrm{d}x_n' \, \mathrm{d}t'.$$

Возьмем фиксированные значения x', t',

$$x_1'^2 + \ldots + x_n'^2 + t'^2 < r^2 , \tag{3,17}$$

и пусть $y(\tau)$ есть решение уравнения (1,01), определенное для $t' + t \leqq \tau \leqq$ $\leqq t' + t + \Delta t$ и выполняющее условие $y(t' + t) = x' + x$. Такое решение существует, причем

$$\begin{gathered}(\tau - t' - t)^2 + (y_1(\tau) - x_1' - x_1)^2 + \ldots + (y_n(\tau) - x_n' - x_n)^2 < r^2 , \\ t' + t \leqq \tau \leqq t' + t + \Delta t .\end{gathered} \tag{3,18}$$

Решение может быть наверное определено для τ достаточно близких к $t' + t$. Если бы решение $y(\tau)$ нельзя было определить на всем интервале $\langle t' + t,\ t' + t + \Delta t\rangle$ или если бы не имело места неравенство (3,18), то можно было бы найти такое число τ_1, $t' + t < \tau_1 \leqq t' + t + \Delta t$, что было бы

$$(\tau - t' - t)^2 + (y_1(\tau) - x_1' - x_1)^2 + \ldots + (y_n(\tau) - x_n' - x_n)^2 < r^2 \tag{3,19}$$

для $t' + t \leqq \tau < \tau_1$,

$$(\tau_1 - t' - t)^2 + (y_1(\tau_1) - x_1' - x_1)^2 + \ldots + (y_n(\tau_1) - x_n' - x_n)^2 = r^2 . \tag{3,20}$$

Согласно (3,19), (3,17) и (3,14), имеем $(y(\tau), \tau) \in J_{i,k}$, $t' + t \leqq \tau \leqq \tau_1$. Это значит, что

$$\begin{gathered}(\tau_1 - t' - t)^2 + (y_1(\tau_1) - x_1' - x_1)^2 + \ldots + (y_n(\tau_1) - x_n' - x_n)^2 < (\Delta t)^2 + \\ + n(f_{i,k}\, \Delta t)^2 < r^2 ,\end{gathered}$$

так что не может иметь места (3,20) и, следовательно, справедливо (3,18). В частности, если $x' = 0$, $t' = 0$, то $y(\tau) = u(\tau)$, так что

$$(\tau - t)^2 + (u_1(\tau) - x_1)^2 + \ldots + (u_n(\tau) - x_n)^2 < r^2 ,\ t \leqq \tau \leqq t + \Delta t , \tag{3,21}$$

и $(u(\tau), \tau) \in J_{i,k}$, что мы и обещали доказать.

Из условия (3,01), соотв. (3,02) нетрудно видеть, что

$$V_2(x' + x, t' + t) - V_2 (y(t' + t + \Delta t) ,\quad t' + t + \Delta t) \geqq \int_{t'+t}^{t'+t+\Delta t} U_9(y(\tau), \tau)\, \mathrm{d}\tau .$$

Согласно (3,18), (3,17) и (3,15), отсюда следует

$$V_2(x' + x, t' + t) - V_2(y(t' + t + \Delta t), t' + t + \Delta t) > (U_9(x, t) - \zeta_{i,k})\, \Delta t . \tag{3,22}$$

Согласно (3,18), (3,17) и (3,13), имеем $\|f(x, t) - f(y(\tau), \tau)\| < d$, $t' + t \leqq \tau \leqq \leqq t' + t + \Delta t$. Отсюда следует (по уравнению (1,01))

$$\|f(x, t) \,.\, \Delta t - y(t' + t + \Delta t) - y(t' + t)\| < \Delta t \,.\, d \quad \text{или}$$

$$\|x' + x + f(x, t) \,.\, \Delta t - y(t' + t + \Delta t)\| < \Delta t \,.\, d \,.$$

Аналогично получаем $\|x + f(x, t) \,.\, \Delta t - u(t + \Delta t)\| < \Delta t \,.\, d$, так что

$$\|x' + u(t + \Delta t) - y(t' + t + \Delta t)\| < \Delta t \,.\, 2d \,. \tag{3,23}$$

Неравенство

$$\|z - x\|^2 + (\sigma - t)^2 < 4r^2 \tag{3,24}$$

справедливо, если подставить вместо (z, σ) или $(x' + u(t + \Delta t), t' + t + \Delta t)$ или $(y(t' + t + \Delta t), t' + t + \Delta t)$ [согласно (3,21), (3,17) и (3,18)]. Следовательно, неравенство (3,24) также верно, если подставить вместо (z, σ) любую точку, лежащую на отрезке, концевые точки которого в пространстве E_{n+1} суть $(x' + u(t + \Delta t), t' + t + \Delta t)$ и $(y(t' + t + \Delta t), t' + t + \Delta t)$, так что все точки этого отрезка входят в $J_{i,k}$ [согласно (3,14)], вследствие чего будет [см. (3.23) и (3,11)]

$$|V_2(x' + u(t + \Delta t), t' + t + \Delta t) - V_2(y(t' + t + \Delta t), t' + t + \Delta t)| < \\ < \Delta t \,.\, 2Dd \,. \tag{3,25}$$

Из (3,22), (3,25) и (3,12) следует

$$V_2(x' + x, t' + t) - V_2(x' + u(t + \Delta t),\ t' + t + \Delta t) > (U_9(x, t) - 2\zeta_{i,k})\, \Delta t \,.$$

Отсюда и из (3,16) получаем

$$V_{3,i,k}(x, t) - V_{3,i,k}(u(t + \Delta t), t + \Delta t) > (U_9(x, t) - 2\zeta_{i,k})\, \Delta t \,.$$

Так как функция $V_{3,i,k}(x, t)$ обладает непрерывными производными всех порядков, следует отсюда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V_{3,i,k}(u(\tau), \tau)|_{\tau=t} \leqq - U_9(x, t) + 2\zeta_{i,k} < - \tfrac{3}{4} U_9(x, t) \tag{3,26}$$

[см. (3,06)].

Итак, для любого подбора индексов i, k, $i = \ldots, -2, 0, 2, \ldots$, $k = \ldots, -2, 0, 2, \ldots$, можем построить функцию $V_{3,i,k}(x, t)$, имеющую следующие свойства:

она определена и обладает непрерывными производными всех порядков, как только $(x, t) \in J_{i,k}$; выполняются неравенства

$$|V_{3,i,k}(x, t) - V_2(x, t)| < \xi_{i,k} \,, \quad (x, t) \in J_{i,k} \,, \tag{3,10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} V_{3,i,k}(u(\tau), \tau)|_{\tau=t} < - \tfrac{3}{4} U_9(x, t), \quad (x, t) \in \tilde{J}_{i,k} \tag{3,26}$$

[$u(\tau)$ есть решение уравнения (1,01), выполняющее условие $u(t) = x$].

Условимся, что выражение $V_{3,i,k}(x, t)\, p_i(x)\, g_k(t)$ принимает значение 0 для тех $x \in G$, $t \geqq 0$, для которых функция $V_{3,i,k}(x, t)$ не определена, и определим функцию

$$V_4(x, t) = \sum_{\substack{i=\ldots,-2,0,2,\ldots \\ k=\ldots,-2,0,2,\ldots}} V_{3,i,k}(x, t)\, p_i(x)\, g_k(t)\,, \quad x \in G\,, \quad x \neq 0\,, \quad t > 0\,. \qquad (3,27)$$

Так как каждая точка (x, t), $x \neq 0$, $t > 0$ имеет такую окрестность, на которой только конечное число слагаемых в правой части (3,27) отлично от нуля, то сумма имеет смысл и функция $V_4(x, t)$ обладает непрерывными производными всех порядков для $x \in G$, $x \neq 0$, $t > 0$.

Докажем, что функция $V_4(x, t)$ удовлетворяет неравенствам

$$|V_4(x, t) - V_2(x, t)| < \frac{t}{1 + 2t}\, V_2(x, t)\,, \quad x \in G, x \neq 0, t > 0, \qquad (3,28)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, V_4(u(\tau), \tau)|_{\tau=t} < -\tfrac{3}{4} U_9(x, t)\,, \quad x \in G, x \neq 0, t > 0 \qquad (3,29)$$

[$u(\tau)$ есть решение уравнения (1,01), выполняющее условие $u(t) = x$].

Возьмем фиксированные $x \in G$, $x \neq 0$, $t > 0$. Найдем четные числа l, m; $2^l < \omega(x) \leqq 2^{l+2}$, $2^m < t \leqq 2^{m+2}$.

Согласно выбору функций $p_i(x)$, $g_k(t)$, имеем

$$V_4(x, t) = \sum_{i=l,\, l+2}^{t} \sum_{k=m,\, m+2} V_{3,i,k}(x, t)\, p_i(x)\, g_k(t)\,.$$

Ввиду равенства $\sum\limits_{i=l,\, l+2} \sum\limits_{k=m,\, m+2} p_i(x) \cdot g_k(t) = 1$ получаем

$$V_4(x, t) - V_2(x, t) = \sum_{i=l,\, l+2} \sum_{k=m,\, m+2} (V_{3,i,k}(x, t) - V_2(x, t))\, p_i(x)\, g_k(t)\,.$$

Так как $(x, t) \in J_{i,k}$, $i = l$, $l + 2$, $k = m$, $m + 2$, то

$$|V_{3,i,k}(x, t) - V_2(x, t)| < \xi_{i,k} < \frac{t}{1 + 2t}\, V_2(x, t)\,, \; i = l, l + 2, k = m, m + 2\,,$$

согласно (3,10) и (3,07), так что получаем

$$|V_4(x, t) - V_2(x, t)| < \frac{t}{1 + 2t}\, V_2(x, t) \sum_{i=l,\, l+2} \sum_{k=m,\, m+2} p_i(x)\, g_k(t) =$$
$$= \frac{t}{1 + 2t}\, V_2(x, t)\;;$$

таким образом неравенство (3,28) доказано.

Далее имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, V_4(u(\tau), \tau) = \sum_{i=l,\, l+2} \sum_{k=m,\, m+2} \Bigg(p_i(u(\tau))\, g_k(\tau)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, V_{3,i,k}(u(\tau), \tau) +$$
$$+ g_k(\tau)\, V_{3,i,k}(u(\tau), \tau)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, p_i(u(\tau)) + V_{3,i,k}(u(\tau), \tau)\, p_i(u(\tau))\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, g_k(\tau)\Bigg)\,.$$

(После дифференцирования вместо τ подставим t, $u(\tau)$ имеет обычный смысл.) Из (3,26) и из определения функций $p_i(x)$, $g_k(t)$ следует, что или $p_i(x)\, g_k(t) = 0$ или

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} V_{3,i,k}(u(\tau), \tau)|_{\tau=t} < -\tfrac{3}{4}U_9(x, t)\,, \quad i = l,\ l+2,\ k = m,\ m+2,$$

и таким образом, получаем

$$\sum_{i=l,l+2} \sum_{k=m,m+2} p_i(u(\tau))\, g_k(\tau) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} V_{3,i,k}(u(\tau), \tau) < -\tfrac{3}{4}U_9(x, t)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} V_4(u(\tau), \tau) < -\tfrac{3}{4}U_9(x, t) + R\,, \tag{3,30}$$

где $R = \sum_{i=l,l+2} \sum_{k=m,m+2} V_{3,i,k}(u(\tau), \tau) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[p_i(u(\tau))\, g_k(\tau)]$.

Так как $p_l(x) + p_{l+2}(x) = 1$ для $2l < \omega(x) < 2^{l+3}$, $g_m(\tau) + g_{m+2}(\tau') = 1$ для $2^m < \tau' < 2^{m+3}$, имеем

$$\sum_{i=l,l+2} \sum_{k=m,m+2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[p_i(u(\tau))\, g_k(\tau)] = 0\,,$$

$$R = \sum_{i=l,l+2} \sum_{k=m,m+2} (V_{3,i,k}(x, t) - V_2(x, t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[p_i(u(\tau))\, g_k(\tau)]\,.$$

Ввиду того, что $(x, t) \in J_{i,k}$, $i = l,\ l+2$, $k = m$, $m+2$, будет $|V_{3,i,k}(x, t) - V_2(x, t)| < \xi_{i,k}$ в соответствии с (3,10). Далее будет

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[p_i(u(\tau)) \cdot g_k(\tau)]\right| < n\bar{p}_l + \bar{g}_m\,,$$

так что

$$|R| < (n\bar{p}_l\bar{f}_{l,m} + \bar{g}_m)(\xi_{l,m} + \xi_{l+2,m} + \xi_{l,m+2} + \xi_{l+2,m+2}) < \zeta_{l,m}.$$

согласно (3,08). Отсюда следует, согласно (3,30) и (3,06), что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} V_4(u(\tau), \tau)|_{\tau=t} < -\tfrac{1}{2}U_9(x, t)\,,$$

и неравенство (3,29) доказано.

Определим функцию $V_3(x, t)$ для $x \in G$, $t \geqq 0$.

$$V_3(x, t) = V_4(x, t) \quad \text{для} \quad x \in G,\ x \neq 0,\ t > 0,\ V_3(0, t) = 0 \ \text{для}\ t \geqq 0\,,$$
$$V_3(x, 0) = \lim_{t \to 0} V_4(x, t)\,, \quad x \in G\,, \quad x \neq 0\,.$$

Теперь уже нетрудно убедиться, что функция $V_3(x, t)$ удовлетворяет всем условиям, поставленным в теореме 3. Теорема 3 доказана.

Теорему 4 можно доказать совершенно аналогичным способом, как теорему 3. В теореме 4 мы также не делаем никаких предположений о поведении интегралов уравнения (1,01).

Теорема 4. *Предположим, что непрерывная функция* (x, t) *не зависит от переменной* t *и что функция* $V_2(x)$*, выполняющая следующие условия:*

Функция $V_2(x)$ *определена и непрерывна для* $x \epsilon G$.

Функция $V_2(x)$ *является локально липшицевской для* $x \epsilon G$, $x \neq 0$.
$V_2(0) = 0$, $V_2(x) > 0$ *для* $x \neq 0$.

Существует функция $U_9(x)$*, определенная и непрерывная для* $x \epsilon G$, $U_9(0) = 0$, $U_9(x) > 0$ *и для* $x \neq 0$ *такая, что имеет место утверждение:*

если $u(\tau)$ *есть решение уравнения* (1,01)*, выполняющее условие* $u(t) = x$, $x \neq 0$, *то*

$$\liminf_{\Delta t \to 0+} \frac{V_2(u(t - \Delta t)) - V_2(x)}{\Delta t} \geqq U_9(x) .$$

Тогда существует функция $V_3(x)$*, удовлетворяющая следующим условиям:*

Функция $V_3(x)$ *определена и непрерывна для* $x \epsilon G$.

Функция $V_3(x)$ *обладает непрерывными производными всех порядков для* $x \neq 0$.

$$V_3(x) + V_2(x) < \tfrac{1}{2} V_2(x).$$

$$W_3(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_3}{\partial x_j} f_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} V_3(u(\tau))|_{\tau=t} < - \tfrac{1}{2} U_9(x)$$

[$u(\tau)$ *есть решение уравнения* (1,01)*, выполняющее условие* $u(t) = x$].

Замечание. Аналогическую теорему возможно доказать и в том случае, чмо $V_2(x, t)$ периодическая функция по отношению к t.

Из теоремы 2 и из теоремы 3 (соотв. из теоремы 4), соотв. из замечания легко вытекает справедливость

Теоремы 5. *Предположим, что нулевой интеграл уравнения* (1,01) *сильно устойчив в* G.

Тогда существуют функции $V_5(x, t)$, $U_{10}(x)$, $U_{11}(x)$, $U_{12}(x)$ *так, что выполняются следующие условия:*

I''. *Функция* $V_5(x,t)$ *определена и непрерывна для* $x \epsilon G$, $t \geqq 0$ *и обладает непрерывными производными всех порядков по переменным* $x_1, \ldots, x_n$, t *для* $x \epsilon G$, $x \neq 0$, $t > 0$.

II. *Функции* $U_{10}(x)$, $U_{11}(x)$, $U_{12}(x)$ *определены и непрерывны для* $x \epsilon G$; $U_{10}(0) = U_{11}(0) = U_{12}(0) = 0$, $U_{10}(x) > 0$, $U_{11}(x) > 0$, $U_{12}(x) > 0$, $x \neq 0$, $U_{11}(x) \to \infty$ *если* $\omega(x) \to \infty$.

III. $U_{11}(x) \leqq V_5(x, t) \leqq U_{10}(x)$, $x \epsilon G$, $t \geqq 0$.

IV. $$W_5(x, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_5}{\partial x_j} f_j + \frac{\partial V_5}{\partial t} \leqq - U_{12}(x) , \quad x \in G, x \neq 0, t > 0.$$

При этом функция $V_5(x, t)$ *не зависит от* t, *если функция* $f(x, t)$ *не зависит от* t. $V_5(x,t)$ *периодическая функция по отношению к* t *периода* ω_1, *если* $f(x,t) = f(x,t + \omega_1)$.

4. Теоремы о сглаживании. Обращение второй теоремы Ляпунова

В настоящем параграфе мы докажем справедливость

Теоремы 6. *Пусть функция* $V_6(x, t)$ *выполняет следующие условия:*

Функция $V_6(x, t)$ *определена и непрерывна для* $x \epsilon G$, $t \geqq 0$.

Функция $V_6(x, t)$ *обладает непрерывными частными производными всех порядков по переменным* $x_1, \ldots, x_n$, t *для* $x \epsilon G$, $x \neq 0$, $t > 0$, $V_6(0, t) = 0$, $t \geqq 0$, $V_6(x, t) > 0$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$.

Тогда существует функция $\nu(\eta)$, *выполняющая следующие условия:*

Функция $\nu(\eta)$ *определена для всех* η *и обладает* (4,01) *непрерывными производными всех порядков.*

$$\nu(\eta) = 0, \quad \eta \leqq 0. \tag{4,02}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\nu(\eta) \quad \text{есть возрастающая функция для } \eta \geqq 0\,. \tag{4,03}$$

$$\nu(\eta) \to \infty \quad \textit{для} \quad \eta \to \infty. \tag{4,04}$$

Функция $\nu(V_6(x, t))$ *обладает непрерывными производными всех порядков для* $x \epsilon G$, $t > 0$. (4,05)

Доказательство. Пусть функции $\mu_i(\eta)$ выполняют следующие условия: они определены, непрерывны и возрастают для $0 \leqq \eta \leqq 1$;

$$\mu_i(0) = 0\,, \quad \mu_i(\eta) \geqq \eta \quad \text{для} \quad 0 \leqq \eta \leqq 1\,, \tag{4,06}$$

$$\mu_i(\eta) \geqq V_6(x, t) \quad \text{если} \quad 0 \leqq \omega(x) \leqq \eta\,, \quad 2^{-i} \leqq t \leqq 2^{+i}\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{4,07}$$

Пусть функции $\Phi_i(\eta)$ выполняют следующие условия: они определены, непрерывны и убывают для $0 < \eta \leqq 1$;

$$\Phi_i(\eta) > \left[1 + \left| \frac{\partial^k V_6(x, t)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}\, \partial t^{k_{n+1}}} \right|\right]^{i+1} \tag{4,08}$$

$k, k_1, \ldots, k_{n+1}$ — целые, неотрицательные $0 \leqq k \leqq i$, $k_1 + \ldots + k_n + k_{n+1} = k$, $\eta \leqq \omega(x) \leqq 1$, $2^{-i} \leqq t \leqq 2^i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

[Если $k = 0$, то $\dfrac{\partial^k V_6(x, t)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}\, \partial t^{k_{n+1}}} = V_6(x, t)$.]

Построим функцию $\nu(\eta)$. Прежде всего построим функцию $\nu^*(\eta)$, которая выполняет следующие условия:

Функция $\nu^*(\eta)$ определена и непрерывна для всех η;

$$\nu^*(\eta) = 0\,, \quad \eta \leqq 0\,, \quad \nu^*(\eta_1) < \nu^*(\eta_2)\,, \quad 0 \leqq \eta_1 < \eta_2\,.$$
$$\nu^*(\eta) \to \infty\,, \quad \eta \to \infty\,. \tag{4,09}$$

$$\nu^*(\mu_i(\eta))\,.\,\Phi_i(\eta) \to 0\,, \quad \eta \to 0+\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{4,10}$$

[Функцию $\nu^*(\eta)$ нетрудно построить, ибо условие (4,10) будет выполняться, как только будет $\nu^*(\eta) = o(\Phi_i(\mu_i^{-1}(\eta)))$ для $\eta \to 0+$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, где $\mu_i^{-1}(\eta)$ есть функция, обратная функции $\mu_i(\eta)$.]

Пусть функция $\Xi(\eta)$, определенная для всех η, обладает непрерывными производными всех порядков и выполняет условия

$$0 \leqq \Xi(\eta) \leqq 1 \quad \text{для} \quad -\infty < \eta < \infty\,, \quad \Xi(\eta) > 0 \quad \text{для} \quad -1 < \eta < 1\,,$$

$$\Xi(\eta) = 0 \quad \text{для} \quad \eta \leqq -1 \quad \text{или} \quad \eta \geqq 1\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Xi(\eta)\,\mathrm{d}\eta = 1.$$

Положим $\tilde{\nu}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu^*(\xi)\, \Xi(\xi - \eta + 1)\,\mathrm{d}\xi$, $-\infty < \eta < \infty$.

Нетрудно показать, что функция $\tilde{\nu}(\eta)$ обладает непрерывными производными всех порядков и что

$$\tilde{\nu}(\eta) = 0 \quad \text{для} \quad \eta \leqq 0\,. \quad \tilde{\nu}(\eta_1) < \tilde{\nu}(\eta_2) \quad \text{для} \quad 0 \leqq \eta_1 < \eta_2\,. \tag{4,11}$$

$$\nu^*(\eta - 2) \leqq \tilde{\nu}(\eta) \leqq \nu^*(\eta)\,. \tag{4,12}$$

Из (4,09), (4,10) и (4,12) следует

$$\tilde{\nu}(\eta) \to \infty \quad \text{для} \quad \eta \to \infty\,. \tag{4,13}$$

$$\tilde{\nu}(\mu_i(\eta)) \,.\, \Phi_i(\eta) \to 0\,, \quad \eta \to 0+\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{4,14}$$

Положим, наконец,

$$\nu(\eta) = \int_0^{\eta} \exp\left\{\frac{-1}{\tilde{\nu}(\sigma)} + \tilde{\nu}(\sigma)\right\} \mathrm{d}\sigma\,, \quad \text{для} \quad \eta > 0\,,\ \nu(\eta) = 0 \quad \text{для} \quad \eta < 0.$$

Функция $\nu(\eta)$ имеет, очевидно, производные всех порядков для $\eta \neq 0$ и, как нетрудно убедиться, выполняет условия (4,02), (4,03) и (4,04). Так как $\tilde{\nu}^{(j)}(\eta) \to 0$ для $\eta \to 0$, то из определения функции $\nu(\eta)$ легко выводится, что

$$\frac{\nu^{(j)}(\eta)}{\tilde{\nu}(\eta)} \to 0 \quad \text{для} \quad \eta \to 0+\,. \tag{4,15}$$

[$\nu^{(j)}(\eta)$ означает производную j-го порядка от функции $\nu(\eta)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$]. Отсюда следует, что функция $\nu(\eta)$ обладает непрерывными производными всех порядков [и, следовательно, выполняет условие (4,01)]. Функция $\nu(V_6(x, t))$ обладает, очевидно, непрерывными производными всех порядков для $x \in G$, $x \neq 0$, $t > 0$. Для доказательства (4,05) достаточно доказать, что

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}\, \partial t^{k_{n+1}}}\, \nu(V_6(x, t)) \to 0 \quad \text{для} \quad x \to 0\ (x \neq 0),\ t \to t_0\ (t_0 > 0)\,,$$

$k, k_1, \ldots, k_{n+1}$ — целые, неотрицательные, $k_1 + \ldots + k_{n+1} = k$. Условие (4,16) нетрудно, однако, получить, используя условия (4,15), (4,11) и (4,14) при фиксированном i, удовлетворяющем неравенствам $i \geqq k$, $2^{-i} < t_0 < 2^i$ для $j \leqq k$. Теорема 6 доказана.

Из теоремы 5 и из теоремы 6 нетрудно вывести теорему 7. Теорема 7 является искомым обращением второй теоремы Ляпунова (теоремы 1).

Теорема 7. *Предположим, что нулевой интеграл уравнения* (1,01) *сильно устойчив в* G.

Тогда существуют функции $V_7(x, t)$, $U_{13}(x)$, $U_{14}(x)$, $U_{15}(x)$ *так, что соблюдаются следующие условия:*

I. *Функция* $V_7(x, t)$ *определена и непрерывна для* $x \epsilon G$, $t \geqq 0$ *и обладает непрерывными частными производными всех порядков по переменным* $x_1, \dots x_n, t$ *для* $x \epsilon G$, $t > 0$.

II. *Функции* $U_{13}(x)$, $U_{14}(x)$, $U_{15}(x)$ *определены и непрерывны для* $x \epsilon G$, $U_{13}(0) = U_{14}(0) = U_{15}(0) = 0$, $U_{13}(x) > 0$, $U_{14}(x) > 0$, $U_{15}(x) > 0$, $x \neq 0$, $U_{14}(x) \to \infty$ *если* $\omega(x) \to \infty$.

III. $U_{14}(x) \leqq V_7(x, t) \leqq U_{13}(x)$, $x \epsilon G$, $t \geqq 0$.

IV. $W_7(x, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_7}{\partial x_j} f_j + \frac{\partial V_7}{\partial t} \leqq - U_{15}(x)$, $x \in G, t > 0$.

При этом функция $V_7(x, t)$ *не зависит от* t, *если функция* $f(x, t)$ *не зависит от* t. $V_7(x,t)$ *периодическая функция по отношекию к* t *перуода* ω_1, *если* $f(x,t) = f(x,t + \omega_1)$.

(*Продолжение*)