Ladislav Rieger

Заметка о т. наз. свободных алгебрах с замыканиями

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 1, 16–20

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100226

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

ЗАМЕТКА О Т. НАЗ. СВОБОДНЫХ АЛГЕБРАХ С ЗАМЫКАНИЯМИ

ЛАДИСЛАВ РИГЕР (Ladislav Rieger), Прага.

(Поступило в редакцию 7/I 1956 г.)

Настоящее замечание относится к одной неправильной теореме Биркгофа, ошибочно приписываемой К. Куратовскому.

Алгеброй с замыканиями[1]) (closure algebra) называется булева алгебра с добавочной одинарной операцией, т. наз. операцией замыкания элемента (результат этой операции записывается обычно $\bar{x}$, как замыкание элемента x алгебры); для замыкания справедливы известные четыре аксиомы Куратовского[2]) (сформулированные первоначально только для подмножеств топологического пространства, взятых в качестве элементов алгебры):

I. $\overline{x \cup y} = \bar{x} \cup \bar{y}$, II. $\bar{0} = 0$ (0 есть нуль алгебры), III. $x \subseteq \bar{x}$, IV. $\bar{\bar{x}} = \bar{x}$.

(*В указанной ниже монографии Биркгофа этим аксиомам соответствуют в порядке следования:* аксиома C 3^+ (стр. 12 русс. пер.), условие определения в § 7 гл. XI (стр. 251 русс. пер.) и аксиомы C 1 и C 2 (на стр. 12 русс. пер.).) В книге *Garett Birkhoff*, Lattice Theory, Revised Edition, New York 1948, мы найдем на стр. 180 (Chapter XI, § 7) вместе с доказательством следующую теорему (Theorem 8), приписанную Куратовскому:

Свободная[3]) *алгебра с замыканиями, имеющая один образующий, есть* (*прямое произведение*) $\mathbf{2}^2\mathbf{C}$ (*свободной булевой алгебры* $\mathbf{2}^2$ *с одним образующим*[4]) *и алгебры с замыканиями* $\mathbf{C}$, *имеющей четыре элемента, где для*

[1]) Алгебры с замыканиями изучались в последнем десятилетии, помимо прочего, из-за их приложений к т. наз. модальным системам математической логики. (Авторы *Тарский*, *Маккинси*, *Сикорский*, *Расиова* и др.) — Одной из основных является работа Маккинси, Тарский [1].

[2]) *К. Куратовский*, Topologie I (Варшава 1948), стр. 20.

[3]) Алгебраическая система (какая бы то ни было) называется свободной с данными свободными образующими, если каждое отображение этих образующих в систему того же рода допускает расширение до гомоморфного отображения (всей образованной свободными образующими системы). Приведенные в скобках выражения вставлены автором настоящего замечания для большей ясности текста теоремы.

[4]) Имеющей четыре элемента $x, x', x \cup x', x \cap x'$.

$p \neq q$, $0 \neq p \neq 1$, $0 \neq q \neq 1$ *имеет место* $\overline{p} = \overline{q} = 1$); *она содержит шестнадцать элементов.*

Текст этой теоремы и ее вывода совпадает с русским переводом (ср. стр. 252 книги *Г. Биркгоф*, Теория структур, Москва 1952).

Настоящее замечание имеет целью обратить внимание на то, что эта теорема неверна и что приписывать ее Куратовскому[5]) — также ошибочно (ср. заключение настоящего замечания).

В действительности справедлива, наоборот,

Теорема. *Свободная алгебра с замыканиями, имеющая один образующий, содержит бесконечное (но счетное) число элементов.*

Доказательство. Достаточно привести пример бесконечной алгебры с замыканиями $\mathfrak{B}$, имеющей один образующий элемент.

1. В качестве $\mathfrak{B}$ возьмем бесконечное (счетное) множественное тело, состоящее с одной стороны из всех конечных подмножеств, а с другой — из дополнений этих подмножеств, образованных в следующем счетном множестве $\boldsymbol{N}$:

Пусть $\boldsymbol{N}$ состоит из всех натуральных чисел n вида

$$n = 2^h 3^k\,, \qquad (+)$$

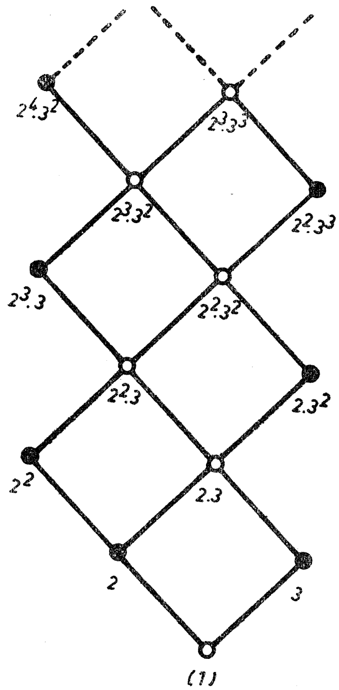

Рис. 1.

где пары натуральных показателей h, $k = 0, 1, 2, \ldots$ связаны условием: или $h = 1$, $k = 0$ или $h - k = 2$ или $h - k = -1$.

(Для лучшего уяснения положения вещей примем во внимание, что числа вида $(+)$ являются в дистрибутивной структуре Σ всех чисел вида $2^m 3^n$, где (более обще, чем в $(+)$) $-1 \leqq m - n \leqq 2$; $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, т. наз. неразложимыми в объединение элементами.[6]) (Структурное упоря-

[5]) Автор настоящего замечания обратил внимание академика проф. Куратовского на эту ошибку уже в 1950 г.; русский перевод книги Биркгофа способствовал ее дальнейшему распространению. Представляется поэтому уместным обратить на это обстоятельство внимание в этой форме.

[6]) Элемент p структуры называется неразложимым в объединение, если не существует двух элементов r, s, не равных друг другу, и элемента p так, чтобы $r \cup s = p$. — Структура Σ играет здесь, конечно, лишь вспомогательную эвристическую роль: собственно говоря, посредством ее топологического представления (ср. напр. [2]) мы получаем искомую бесконечную алгебру с замыканиями; сама по себе Σ является т. наз. свободной алгеброй Броувера с одним образующим, ср. [3].

дочение Σ дано отношением делимости; для облегчения ориентации приводится диаграмма Хассе для Σ, где неразложимые в объединение элементы обозначены полными кружками.))

2. Для определения замыкания какого-либо множества $M \in \mathfrak{B}$ я использую теперь отношение делимости, а именно:

I. Для $M = \emptyset$ я положу, конечно, $\overline{M} = \emptyset$.

II. В случае $M \neq \emptyset$ я найду в M наименьшее число вида $(+)$ и прибавлю к M все кратные ему числа вида $(+)$; таким образом я получу $\overline{M}$.

Прежде всего ясно, что $\overline{M} \in \mathfrak{B}$ для любого $M \in \mathfrak{B}$, ибо $\overline{M} \neq \emptyset$ будет всегда бесконечной частью N с конечным дополнением. Из II. далее легко видно, что замыкание $\overline{M} \neq \emptyset$ или вообще равно множеству всех кратных вида $(+)$ наименьшего числа $n_1 \in M$, или отличается от этого множества кратных $(+)$ самое больше на одно число n_2 вида $(+)$ из M, которое нужно к указанным кратным прибавить, чтобы получить $\overline{M}$. В таком случае, однако, видно, что если $n_2 = 2^{h_2}3^{k_2}$ и $n_1 = 2^{h_1}3^{k_1}$, то $h_2 + k_2 = h_1 + k_1 + 1$.

Имеет место аксиома I: Действительно, если какое-либе из множеств M_1, M_2 (или оба) пусто, то все тривиально.

Если же, наоборот, $M_1 \neq \emptyset \neq M_2$, то пусть n_1 — наименьшее число в M_1, n_2 — наименьщее число в M_2.

Будем различать две альтернативы без ограничения общности (достаточно переставить индексы):

(a): n_2 делится на n_1,

(a′) n_2 не делится на n_1, n_1 не делится на n_2.

В случае (a) при образовании $\overline{M}_1$ прибавляем к M_1 столько же или больше чисел — кратных $(+)$ числу n_1 — сколько к M_2 (при образовании $\overline{M}_2$). Итак, $\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 = \overline{M}_1 \cup M_2$.

Однако, при образовании $\overline{M_1 \cup M_2}$ мы прибавляем к множеству $M_1 \cup M_2$ опять — как и раньше — кратные вида $(+)$ числа n_1 (которое, конечно, является наименьшем и в $M_1 \cup M_2$). Итак, в итоге $\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 = \overline{M}_1 \cup M_2 = \overline{M_1 \cup M_2}$.

Случай (a′) может наступить только тогда, если $n_1 = 2^{h_1}3^{k_1}$, $n_2 = 2^{h_2}3^{k_2}$ и, без ограничения общности, $n_1 < n_2$, причем уже обязательно будет $h_1 + k_1 + 1 = h_2 + k_2$.

Но тогда (в силу выше изложенного) будет опять $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 =$ объединению множеств всех кратных $(+)$ числа n_1 с множеством всех кратных $(+)$ числа $n_2 =$ первому упомянутому множеству кратных, увеличенному на число n_2.

Таким образом аксиома I проверена. Однако, так как аксиомы II, III, IV, очевидно, имеют место, $\mathfrak{B}$ является действительно алгеброй с замыканиями.

3. Докажем, наконец: алгебра с замыканиями $\mathfrak{B}$ образована единственным множеством $\{2\} \in \mathfrak{B}$ (содержащим единственное число 2) — при помощи операций $\cup$, $\cap$, $'$, $^{-}$ ($'$ обозначает дополнение к алгебре $\mathfrak{B}$).

Действительно, из нашего определения замыкания вытекает последовательно

$\left(\overline{\{2\}}\right)' = \{3\}$ — можно выразить через $\{2\}$;

$\left(\overline{\{3\}}\right)' = \{2, 2^2\}$, так что $\{2^2\} = \left(\overline{\{3\}}\right)' \cap \{2\}'$ можно выразить также только через $\{2\}$;

$\left(\overline{\{2^2\}}\right)' = \{2, 3, 2 \,.\, 3^2\}$, так что $\{2 \,.\, 3^2\} = \left(\overline{\{2^2\}}\right)' \cap (\{2\} \cup \{3\})'$ можно выразить также только через $\{2\}$;

$\left(\overline{\{2 \,.\, 3^2\}}\right)' = \{2, 3, 2^2, 2^3 \,.\, 3\}$ так что $\{2^2 \,.\, 3\} = \left(\overline{\{2 \,.\, 3^2\}}\right)' \cap (\{2\} \cup \{3\} \cup \{2^2\})'$ можно выразить также только через $\{2\}$; — и т. д.

Нетрудно и формально убедиться полной индукцией в том, что каждое множество $\{n\} \in \mathfrak{B}$, содержащее единственное число $n = 2^h 3^k$ (имеющее вид $(+)$), можно выразить таким образом через одно только $g = \{2\} \in \mathfrak{B}$, используя только операции $\cup$, $\cap$, $'$ и $^{-}$:

$\{n\} = \left(\overline{\{\underline{n}\}}\right)' \cap \left(\bigcup\limits_{n^* > \underline{n}} \{n^*\}\right)'$, где n, $\underline{n}$, n^* имеют вид $(+)$, а n следует по величине за $\underline{n}$.

Этим завершается доказательство нашей теоремы.

Замечание 1. Наша алгебра с замыканиями $\mathfrak{B}$, имеюшая один образующий $g = \{2\} \in \mathfrak{B}$, не является, однако, свободной, ибо имеет место равенство $\bar{g}'{}^{-}{}'{}^{-} = \bar{g}$ [7]) и $\mathfrak{B}$ нельзя образовать никаким иным одним образзующим (как нетрудно убедиться; повторные операции $'$ и $^{-}$ обозначаются по типографическим соображениям последовательно). Итак, остается открытым — поскольку мне известно — довольно сложный, хотя в принципе может быть и не трудный, вопрос точного исследования строения свободной алгебры с замыканиями, имеющей один свободный образующий.

Замечание 2. Результат нашей теоремы можно, конечно, вывести и из общих соображений в [4] или в [3]. — Что касается источника ошибки, который мог привести к формулировке (и к ошибочному выводу) цитированной теоремы Биркгофа — и к тому, что эта неправильная теорема была приписана Куратовскому, то, как мне кажется, он заключается в следующем: Куратовский дает в своей Топологии I на стр. 24 полную сводку включений четырнадцати множеств, которые можно получить из данного множества топологического пространства посредством операций замыкания и дополнения — и которые можно демонстрировать на легких примерах (из топологии обычной плоскости). Присоединив к этой системе включений все пространство и пустое множество (которые не содержатся

[7]) Такое равенство для свободного образующего не может иметь места, ср. *Куратовский*, Топ. I, стр. 24.

в сводке Куратовского), получим очевидным и единственным способом структуру с шестнадцатью элементами (множествами), в которой операция дополнения тождественна с теоретико-множественной операцией дополнения. Однако, теоретико-структурные операции этой структуры не являются, вообще говоря, теоретико-множественными операциями объединения и пересечения, и вся структура не является дистрибутивной, тем менее ее можно считать булевой алгеброй.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Mc Kinsey I. C. C.* and *Tarski A:* The Algebra of Topology, Ann. of Math. *45* (1944), 141–191.

[2] *Rieger Lad.:* A note on Topological Representations of Distributive Lattices, Čas. mat. fys. *74* (1949), 55–61.

[3] *Rieger Lad.:* On the Lattice Theory of Brouwerian Propositional Logic, Acta fac. rerum nat. Univ. Car. 1949, *189*, 1–40.

[4] *Mc Kinsey I. C. C.* and *Tarski A.:* Some theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting, J. S. L. *13* (1948), 1–15.

Summary

A REMARK ON THE S. C. FREE CLOSURE ALGEBRAS

LADISLAV RIEGER, Prague.

(Received January 7, 1956.)

Theorem 8 on p. 180 of IX, § 7 in G. Birkhoff's Lattice Theory (Revised Edition, New York 1948; see also the same in the Russian Translation, Moscow, 1952), stating that the free closure algebra with one generator has exactly sixteen elements, is not true. The given example of an infinite closure algebra with one generator shows, that such a free algebra must be (countably) infinite. — The still involved precise description of this algebra remains open, so far I am informed.