

Václav Havel

Über die lokalen Spezialisierungen des Satzes vom vollständigen Viereck und des kleinen Desarguesschen Satzes

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 7 (1957), No. 2, 295–307

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100248>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER DIE LOKALEN SPEZIALISIERUNGEN DES SATZES  
VOM VOLLSTÄNDIGEN VIERECK UND DES KLEINEN  
DESARGUESSCHEN SATZES

VÁCLAV HAVEL, Praha.  
(Eingelangt am 6. April 1956.)

In dieser Arbeit werden die Implikationsrelationen zwischen solchen Spezialisierungen des Satzes vom vollständigen Viereck und des kleinen Desarguesschen Satzes untersucht, bei denen das harmonische Quadrupel, bzw. das Zentrum der Perspektivität und die Schnittpunkte einander zugeordneten Seiten fest sind.

**Einleitung.** Das Streben dieser Arbeit ist es, zu den Ergebnissen der Absätze 7.1—7.2 des Buches [6] einen bescheidenen Beitrag zu bringen. Die Terminologie wird aus [6] übernommen, so dass die Formulation mancher Begriffe nach zitierten Stellen zu suchen ist.

Es wird eine solche projektive Ebene untersucht, die kein vollständiges Viereck mit kollinearen Diagonaleckpunkten enthält. In § 1 werden folgende Schliessungssätze formuliert: Der Satz vom vollständigen Viereck mit fünf von seinen Spezialisierungen, weiter der kleine Satz von Desargues und schliesslich die sog. lokalen Spezialisierungen des Satzes vom vollständigen Viereck und des kleinen Desarguesschen Satzes. In § 2 werden dann einige Ergebnisse gegeben, die die gegenseitigen Implikationsbeziehungen zwischen den Punktquadrupeln und den Spezialisierungen des Satzes vom vollständigen Viereck, bzw. des kleinen Desarguesschen Satzes betreffen.

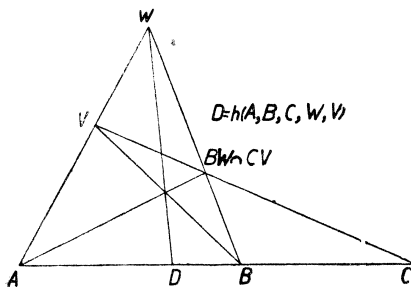


Abb. 1.

1. Der Gegenstand der Untersuchung ist die projektive Ebene ([6], S. 7), die kein Viereck mit kollinearen Diagonaleckpunkten enthält. Man bezeichnet mit  $AB$  die Gerade, auf der beide Punkte  $A \neq B$  liegen. Das Symbol  $(A, B, C)$  bezeichnet kollineare und untereinander verschiedene Punkte  $A, B, C$ .

Jetzt ordnet man zu den Punkten  $A, B, C, W, V$ , die die Bedingungen  $(A, B, C), (A, W, V), AB \neq WV$  erfüllen, immer den Punkt  $h(A, B, C, W, V) = AB \cap W(A(CV \cap BW) \cap BV)$  zu; das geordnete Quadrupel  $A, B, C, h(A, B, C, W, V)$  wird als das *harmonische Quadrupel* mit *Hilfspunkten*  $W, V$  bezeichnet. — Abb. 1.

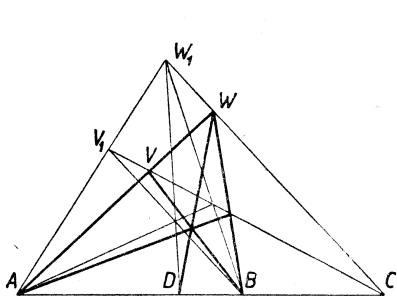


Abb. 2.

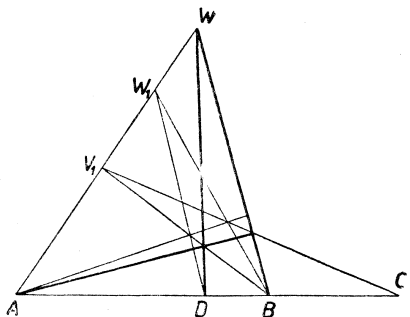


Abb. 3.

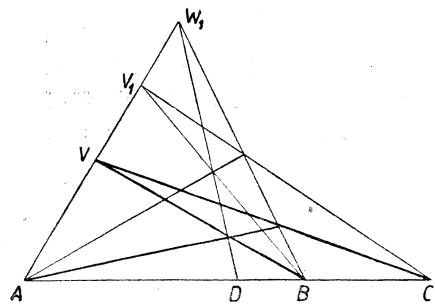


Abb. 4.

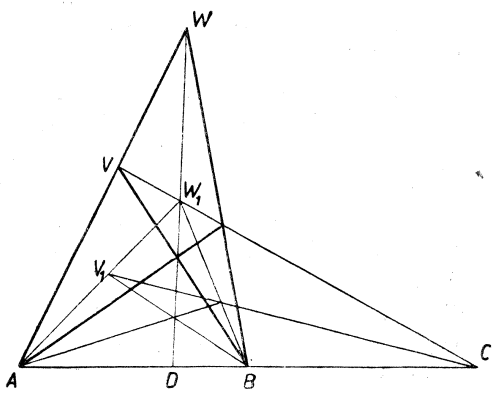


Abb. 5.

Den Begriff des Schliessungssatzes findet man in [6], S. 26. Die folgenden Schliessungssätze  $Q_1 - Q_5$  sind die Spezialisierungen des Schliessungssatzes  $Q$  (des Satzes vom vollständigen Viereck).

In den Schliessungssätzen  $Q_1 - Q_5$  werden  $A, B, C, D$  feste Punkte sein, die ein harmonisches Quadrupel bilden und  $W_1, V_1$  werden beliebige (variable) Hilfspunkte dieses Quadrupels sein.

$Q_1$ . Für jeden auf  $CW_1$  liegenden und von  $C$  verschiedenen Punkt  $W$  gilt  $D = h(A, B, C, W, CV_1 \cap AW)$ . — Abb. 2.

Q<sub>2</sub>. Für jeden die Relation  $(A, W_1, V)$  erfüllenden Punkt  $V$  gilt  $D = h(A, B, C, W_1, V)$ . — Abb. 3.

Q<sub>3</sub>. Für jeden die Relation  $(A, W, V_1)$  erfüllenden Punkt  $W$  gilt  $D = h(A, B, C, W, V_1)$ . — Abb. 4.

Q<sub>4</sub>. Für jeden die Relation  $(D, W_1, W)$  erfüllenden Punkt  $W$  gilt  $D = h(A, B, C, CW_1 \cap AW)$ . — Abb. 5.

Q<sub>5</sub>. Für jeden auf  $AW_1$  liegenden und von  $A$  verschiedenen Punkt  $W$  gilt  $D = h(A, B, C, B(A(DW_1 \cap BV_1) \cap DW) \cap AW)$ . — Abb. 6.

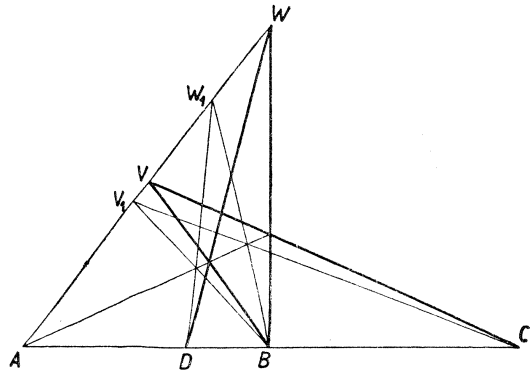


Abb. 6.

Im Schliessungssatz Q werden  $A, B, C, D$  variable Punkte sein, die immer ein harmonisches Quadrupel bilden:

Q. Für jeden nicht auf  $AB$  liegenden Punkt  $W$  und für jeden die Relation  $(A, W, V)$  erfüllenden Punkt  $V$  gilt  $D = h(A, B, C, W, V)$ . — Abb. 7.

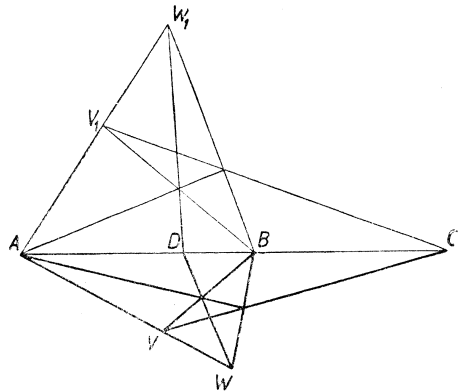


Abb. 7.

Die Spezialisierung des Schliessungssatzes Q, bei der die Punkte  $A, B, C, D$  eine feste (uneigentliche) Gerade durchlaufen, bzw. bei der die Punkte  $A, B, C, D$  fixiert werden, nennt man eine *affine*, bzw. *lokale Spezialisierung*.

Im Schliessungssatz  $d_1$ , bzw.  $d_2$  (dem sog. direkten, bzw. indirekten kleinen Satz von Desargues) werden  $A_i, B_i, C_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ),  $S$  beliebige (variable) Punkte sein, die die folgenden Bedingungen erfüllen: Das Tripel  $A_i, B_i, C_i$  ( $i = 1, 2$ ) enthält nichtkollineare Punkte;  $A_1B_1 \neq A_2B_2, A_1C_1 \neq A_2C_2, B_1C_1 \neq B_2C_2$ ;  $(A_0, B_i, C_i), (A_i, B_0, C_i), (A_i, B_i, C_0)$  ( $i = 1, 2$ );  $A_1 \neq A_2, B_1 \neq B_2, C_1 \neq C_2$ ;  $A_1A_2 \neq B_1B_2 \neq C_1C_2 \neq A_1A_2$ ; der Punkt  $S = A_1A_2 \cap B_1B_2$  ist von den

Punkten  $A_i, B_i, C_i$  ( $i = 1, 2$ ) verschieden und liegt auf  $A_0B_0$ . ([6], S. 79 u. S. 87.)

- $d_1$ . Ist  $S \in C_1C_2$ , so ist auch  $C_0 \in A_0B_0$ .  
 $d_2$ . Ist  $C_0 \in A_0B_0$ , so ist auch  $S \in C_1C_2$ .

— Abb. 8.

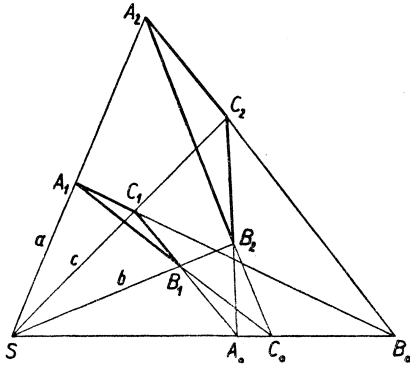


Abb. 8.

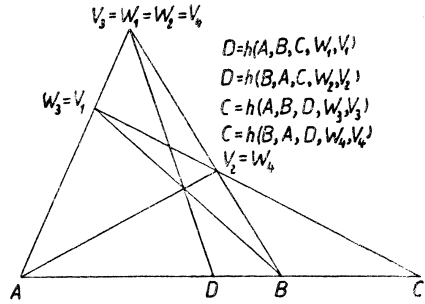


Abb. 9.

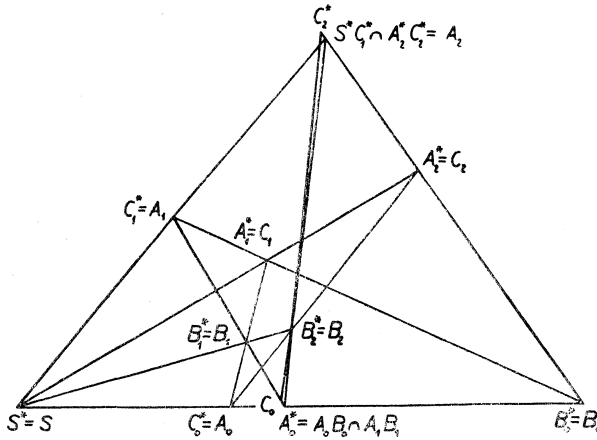


Abb. 10.

Man bezeichnet als *affine Spezialisierung* des Schliessungssatzes  $d_1$ , bzw.  $d_2$  eine solche Spezialisierung, bei der die Gerade  $A_0B_0$  fest (uneigentlich) wird. Unter der *lokalen Spezialisierung* des Schliessungssatzes  $d_1$  versteht man eine solche Spezialisierung, bei der  $S$  ein Fixpunkt ist und die Punkte  $A_0, B_0, A_0B_0 \cap A_1B_1$  eine gegebene dreipunktige Menge durchlaufen. Endlich bezeichnet man als *lokale Spezialisierung* des Schliessungssatzes  $d_2$  eine solche Spezialisierung, bei der  $S$  ein Fixpunkt ist und  $A_0, B_0, C_0$  eine gegebene dreipunktige Menge durchlaufen.

**2. Lehrsatz 1.** Ist  $A, B, C, D$  ein harmonisches Quadrupel, so ist auch  $B, A, C, D$ , bzw.  $A, B, D, C$  ein solches.

Beweis. Sei  $D = h(A, B, C, W, V)$ ; dann  $D = h(B, A, C, W, BW \cap CV)$ ,  
 $C = h(A, B, D, V, W)$ . — Abb. 9.

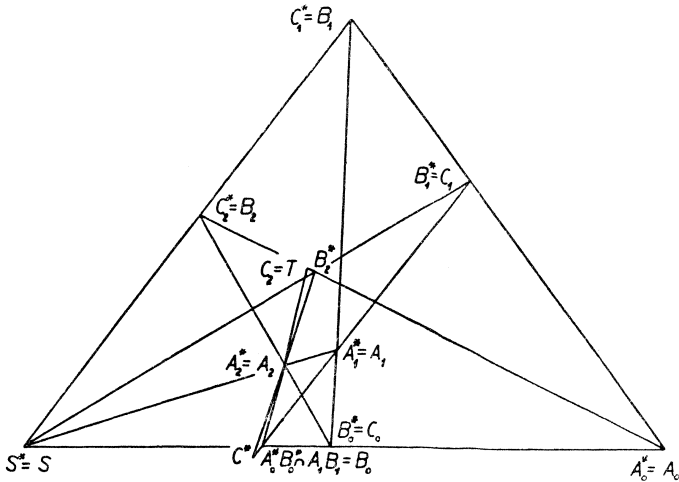


Abb. 11.

**Lehrsatz 2.** Aus  $Q_1, Q_2, Q_3$ , bzw. aus  $Q_2, Q_4, Q_5$  folgt die lokale Spezialisierung von  $Q$ .

Der Beweis ist einfach.

Man bemerkt, dass  $Q_2$  und  $Q_3$  miteinander äquivalent sind ([5], § 1, Abt. 1d, bzw. Abt. 1b).

**Satz 1.** Die lokalen Spezialisierungen von  $d_1$  und  $d_2$  sind miteinander gleichwertig.

Beweis. a) Setzt man voraus, dass die lokale Spezialisierung von  $d_1$  mit Fixpunkt  $S = S^*$  und mit Punkten  $A_0, B_0, A_0B_0 \cap A_1B_1$ , die eine gegebene dreipunktige Menge  $M$  durchlaufen, gültig ist. Seien die Voraussetzungen für  $d_2$  erfüllt, wobei die Bezeichnung bis auf Sternchen gleich bleibe wie bei der Formulierung von  $d_2$ ; weiter soll selbstverständlich  $A_0^*, B_0^*, C_0^* \in M$ . — Abb. 10. — Sind  $S^*, C_1^*, C_2^*$  nicht kollinear, so ist  $C_2^* \neq S^*C_1^* \cap A_2^*C_2^*$ . Wendet man  $d_1$  für  $A_1 = C_1^*, A_2 = S^*C_1^* \cap A_2^*C_2^*, B_i = B_i^*, C_i = A_i^* (i = 1, 2)$  an; das ist möglich, weil ausser den gewöhnlichen Bedingungen auch  $S = S^*, A_0 = C_0^*, B_0 = B_0^*$  und  $A_0B_0 \cap A_1B_1 = A_0^*$  gilt. Nach  $d_1$  ist also  $C_0 \in A_0B_0$ . Auf der anderen Seite ist aber  $C_2^* \neq S^*C_1^* \cap A_2^*C_2^*$ , also auch  $C_0$  non  $\in A_0B_0$ . Das ist ein Widerspruch, so dass die Punkte kollinear sind und die Richtigkeit der lokalen Spezialisierung von  $d_2$  bewiesen ist.

b) Sei nun die Richtigkeit der lokalen Spezialisierung von  $d_2$  vorausgesetzt für den Festpunkt  $S = S^*$  und für die Punkte  $A_0, B_0, C_0$ , die eine gegebene dreipunktige Menge  $M$  durchlaufen. — Abb. 11. — Seien die Voraussetzungen von  $d_1$  erfüllt; die Bezeichnung wählt man bis auf das Sternchen gleich wie bei

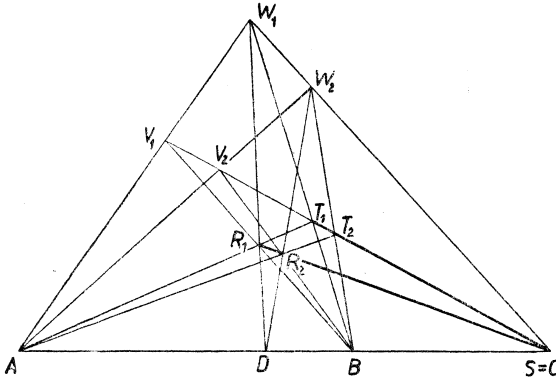


Abb. 12.

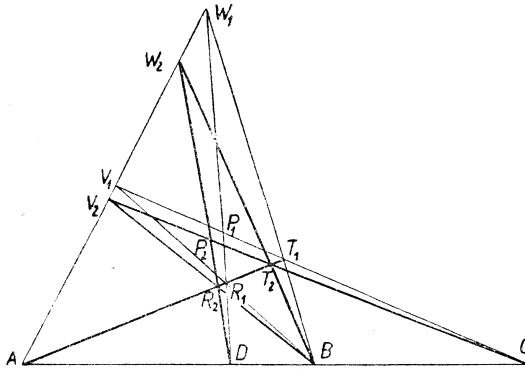


Abb. 13.

Beweis. — Abb. 12. — Seien  $W_1, V_1$  beliebige Hilfspunkte des Quadrupels  $A, B, C, D$ . Sei  $W_2$  der beliebige Punkt, der der Bedingung  $(W_1, W_2, C)$  genügt. Man bestimmt die Punkte  $V_2 = AW_2 \cap CV_1$ ,  $R_i = BV_i \cap DW_i$ ,  $T_i = AR_i \cap BW_i$  ( $i = 1, 2$ ), legt  $A_i = W_i$ ,  $B_i = V_i$ ,  $C_i = R_i$  ( $i = 1, 2$ ) und wendet  $d_2$  an; das ist möglich, weil ausser den gewöhnlichen Bedingungen auch  $S = C$ ,  $A_0 = B$ ,  $B_0 = D$ ,  $C_0 = A$  gilt. Nach  $d_2$  bekommt man  $(S, C_1, C_2)$ , oder anders ausgedrückt:  $(C, R_1, R_2)$ . Weiter setzt man  $A_i = W_i$ ,  $B_i = R_i$ ,  $C_i = T_i$  ( $i = 1, 2$ ) und gebraucht wieder  $d_2$ ; das ist wieder möglich, da ja

der Formulierung von  $d_1$ ; weiter setzt man voraus, dass  $A_0^*, B_0^*, A_0^*B_0^* \cap A_1^*B_1^* \in M$ ,  $S^* \in C_1^*C_2^*$ . Ist  $C_0^* \text{ non } \in A_0^*B_0^*$ , dann  $T = (A_0^*B_0^* \cap A_1^*B_1^*)$ .  $A_2^* \cap B_2^*C_2^* \text{ non } \in S^*B_1^*$ . Man wendet  $d_2$  an, und zwar für  $A_i = A_i^*, B_i = C_i^*$  ( $i = 1, 2$ ),  $C_1 = B_1^*, C_2 = T$ ; das ist möglich, weil ausser den gewöhnlichen Bedingungen auch  $S = S^*$ ,  $A_0 = A_0^*, B_0 = A_0^*B_0^* \cap A_1^*B_1^*$ ,  $C_0 = B_0^*$  gilt. Nach  $d_2$  ist  $(S, C_1, C_2)$ , oder mit anderen Worten  $(S^*, T, B_1^*)$ . Andererseits ist aber  $T \text{ non } \in S^*B_1^*$ . Man bekommt den gesuchten Widerspruch; die Voraussetzung  $C_0^* \text{ non } \in A_0^*B_0^*$  ist also falsch und die Richtigkeit der lokalen Spezialisierung von  $d_1$  ist bewiesen.

**Lehrsatz 3.** Sei  $A, B, C, D$  ein festes harmonisches Punktquadrupel und seien die lokalen Spezialisierungen von  $d_2$  für  $S = C$ ,  $M = \{A, B, D\}$  gültig. Dann gilt auch  $Q_1$ .

ausser den gewöhnlichen Bedingungen auch die Gleichungen  $S = C$ ,  $A_0 = A$ ,  $B_0 = B$ ,  $C_0 = D$  erfüllt sind. Nach  $d_2$  ist dann  $(S, C_1, C_2)$  oder anders  $(C, T_1, T_2)$ . Also  $T_2 = CV_2 \cap AR_2 \cap BW_2$ . Aus dieser Gleichung geht  $D = h(A, B, C, W_2, V_2)$  hervor, womit  $Q_1$  bewiesen ist.

**Lehrsatz 4.** Sei  $A, B, C, D$  ein festes harmonisches Punktquadrupel und gelte die lokale Spezialisierung von  $d_2$  für  $S = A$ ,  $M = \{B, C, D\}$ . Dann gilt auch  $Q_5$ .

Beweis. Seien  $W_1, V_1$  beliebige Hilfspunkte des harmonischen Quadrupels  $A, B, C, D$ . — Abb. 13. — Sei  $W_2$  ein beliebiger, die Bedingung  $(W_1, W_2, A)$  erfüllender Punkt. Man leitet die Punkte  $R_1 = DW_1 \cap BV_1, R_2 = DW_2 \cap AR_1, V_2 = AW_1 \cap BR_2, P_i = DW_i \cap CV_i, T_i = BW_i \cap CV_i$  ( $i = 1, 2$ ) her, legt  $A_i = V_i, B_i = R_i, C_i = P_i$  ( $i = 1, 2$ ) und wendet  $d_2$  an; das ist möglich, weil die gewöhnlichen Bedingungen und auch die Gleichungen  $S = A$ ,  $A_0 = D$ ,  $B_0 = C$ ,  $C_0 = B$  gelten. Nach  $d_2$  ist dann  $(S, C_1, C_2)$ , oder anders:  $(A, P_1, P_2)$ . Setzt man weiter  $A_i = P_i, B_i = W_i, C_i = T_i$  ( $i = 1, 2$ ) und wendet  $d_2$  an; das ist wieder möglich, weil ausser den gewöhnlichen Bedingungen auch  $S = A, A_0 = B, B_0 = C, C_0 = D$  gilt. Nach  $d_2$  ist dann  $(S, C_1, C_2)$ , oder anders:  $(A, T_1, T_2)$ , woraus sich  $T_2 = AR_2 \cap BW_2 \cap CV_2$  ergibt. Also gilt  $D = h(A, B, C, W_2, V_2)$  und der Lehrsatz ist bewiesen.

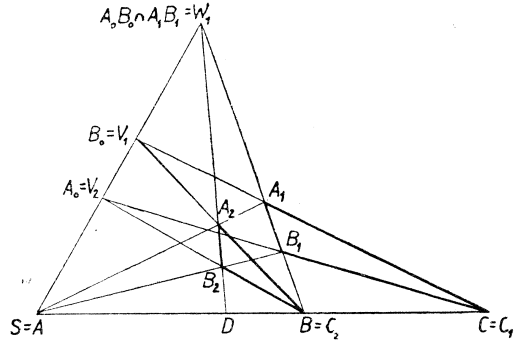


Abb. 14.

**Lehrsatz 5.** Sei  $A, B, C, D$  ein festes harmonisches Punktquadrupel und seien  $W_1, V_1$  beliebige (variable) Hilfspunkte dieses Quadrupels.

a) Gilt eine solche Spezialisierung von  $d_1$ , bei der  $S = A$ ,  $C_1 = C$ ,  $C_2 = B$  Fixpunkte sind und die Bedingungen  $B_0 = V_1$ ,  $A_0B_0 \cap A_1B_1 = W_1$  erfüllt sind, so gilt auch  $Q_2$ .

b) Gilt eine solche Spezialisierung von  $d_1$ , bei der die Punkte  $S = A$ ,  $B_1 = D$ ,  $B_2 = B$  fest sind und die Bedingungen  $A_0 = W_1$ ,  $B_0 = V_1$  erfüllt sind, so gilt auch  $Q_3$ .

Beweis. a) Sei  $V_2$  ein beliebiger, der Relation  $(A, V_1, V_2)$  genügender Punkt. — Abb. 14. — Setzt man  $A_1 = BW_1 \cap CV_1, B_1 = BW_1 \cap CV_2, C_1 = C, A_2 = DW_1 \cap BV_1, B_2 = BV_2 \cap AB_1, C_2 = B$  und wendet  $d_1$  an; das ist möglich, weil ausser den gewöhnlichen Bedingungen auch die Gleichungen  $S = A, C_1 = C, C_2 = B, B_0 = V_1, A_0B_0 \cap A_1B_1 = W_1$  gelten. Nach  $d_1$  ist dann  $C_0 =$



$= A_1B_1 \cap A_2B_2 \in A_0B_0$ , also auch  $B_2 = AB_1 \cap BV_2 \cap DW_1$ ,  $D = h(A, B, C, W_1, W_2)$ . Teil a) ist bewiesen.

b) Sei  $W_2$  ein beliebiger, den Bedingungen  $(A, W_1, W_2)$ ,  $W_2 \neq V_1$  genügender Punkt. — Abb. 15. — Setzt man  $A_2 = CV_1 \cap BW_2$ ,  $B_2 = B$ ,  $C_2 = CV_1 \cap BW_1$ ,  $A_1 = AA_2 \cap BV_1$ ,  $B_1 = D$ ,  $C_1 = AC_2 \cap BV_1$  und wendet  $d_1$  an; das ist möglich, weil ausser den gewöhnlichen Bedingungen auch die Gleichungen  $S = A$ ,  $B_1 = D$ ,  $B_2 = B$ ,  $A_0 = W_1$ ,  $B_0 = V_1$  gelten. Nach  $d_1$  ist dann  $C_0 = A_1B_1 \cap A_2B_2 \in A_0B_0$ , so dass  $W_2 = AW_1 \cap DA_1 \cap BA_2$  und  $D = h(A, B, C, W_2, V_1)$ . Teil b) ist damit bewiesen.

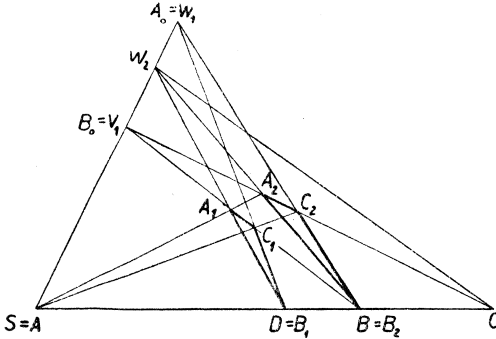


Abb. 15.

Aus den Lehrsätzen 3 und 5 ergibt sich nach Satz 1 und nach dem ersten Teil des Lehrsatzes 2 ein schon von R. MOUFANG hergeleitetes Ergebnis ([6], Satz 6, S. 191, bzw. Satz 1, S. 187):

Aus  $d_i$  folgt Q ( $i = 1, 2$ ). (\*)

**Satz 2.** Sei  $A, B, C, D$  ein festes harmonisches Punktquadrupel. Gilt die lokale Spezialisierung von  $d_2$  für  $S = C$ ,  $M = \{A, B, D\}$ , bzw. für  $S = A$ ,  $M = \{B, C, D\}$ , so ist auch  $C, D, A, B$  ein harmonisches Quadrupel.

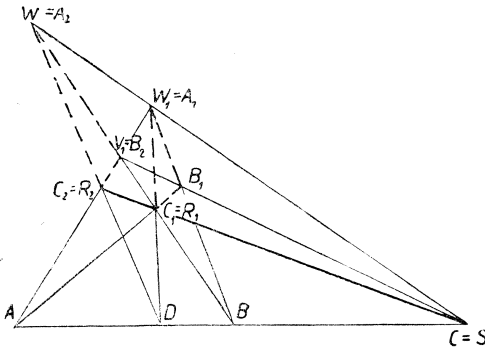


Abb. 16.

Beweis. Seien  $W_1, V_1$  beliebige Hilfspunkte des Quadrupels  $A, B, C, D$ . — Abb. 16. — Man bestimmt  $W_2 = BV_1 \cap CW_1$ ,  $V_2 =$

$= W_1$ ,  $R_1 = DW_1 \cap BV_1$ ,  $R_2 = DW_2 \cap AV_2$ . Wird  $A_i = W_i$ ,  $C_i = R_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $B_1 = BV_2 \cap AR_1$ ,  $B_2 = V_1$  gesetzt und der Schliessungssatz  $d_2$  angewandt (was möglich ist, weil ausser den gewöhnlichen Relationen auch  $S = C$ ,  $A_0 = A$ ,  $B_0 = D$ ,  $C_0 = B$  gilt), so ergibt sich als Ergebnis  $(S, C_1, C_2)$ , was man  $(C, R_1, R_2)$  überschreiben kann. Also  $B = h(C, D, A, W_2, V_2)$ . Der erste Teil der Behauptung ist damit bewiesen.

Weiter setzt man  $A_1 = W_1$ ,  $B_1 = CV_1 \cap BW_1$ ,  $C_1 = CW_1 \cap DB_1$ ,  $A_2 = V_1$ ,  $B_2 = BV_1 \cap AB_1$ ,  $C_2 = DW_1 \cap CV_1$  und wendet  $d_2$  an, was wieder möglich ist aus den immer ähnlichen Gründen: ausser den gewöhnlichen Bedingungen

gilt auch  $S = A$ ,  $A_0 = D$ ,  $B_0 = C$ ,  $C_0 = B$ . — Abb. 17. Nach  $d_2$  ist dann  $(S, C_1, C_2)$ . Also  $B = h(C, D, A, CW_1 \cap D(CV_1 \cap BW_1), W_1)$ . Damit ist Satz 2 bewiesen.

Satz 2 verallgemeinert die Resultate von [4], bzw. [3], Theorem 1. Vergleiche auch [1], Kap. VII, § 17, bzw. (6), Satz 9, S. 193.

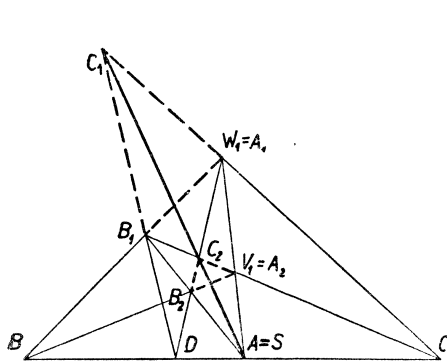


Abb. 17.

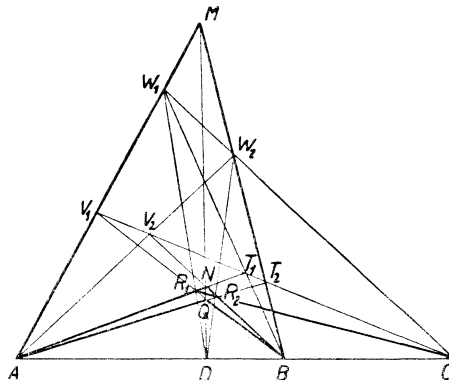


Abb. 18.

Folgerung des Satzes 2: Wenn ausser den Voraussetzungen des Satzes 2 auch die lokale Spezialisierung von  $Q$  für ein festes harmonisches Punktquadrupel  $A, B, C, D$  gilt, so gilt auch die lokale Spezialisierung von  $Q$  für das feste Quadrupel  $C, D, A, B$ .

**Satz 3.** *Gilt die lokale Spezialisierung von  $Q$  für ein festes harmonisches Punktquadrupel  $A, B, C, D$ , so gilt auch die lokale Spezialisierung von  $d_2$  für  $S = C$ ,  $M = \{A, B, D\}$ .*

**Beweis.** — Abb. 18. — Man wählt zum gegebenen Quadrupel zwei Paare der Hilfspunkte  $W_i, V_i$  ( $i = 1, 2$ ), und zwar so, dass die Relationen  $(W_1, W_2, C)$ ,  $(V_1, V_2, C)$  gelten. Zuerst bestimmt man die Punkte  $T_i = BW_i \cap CV_i$ ,  $R_i = BV_i \cap AT_i$  ( $i = 1, 2$ ). Wird  $A_i = W_i$ ,  $B_i = V_i$ ,  $C_i = R_i$ ,  $S = C$  gesetzt, dann ist offenbar  $(S, A_1, A_2)$ ,  $(S, B_1, B_2)$ . Weiter bestimmt man die Punkte  $M = AW_1 \cap BW_2$ ,  $N = AR_1 \cap BR_2$ ,  $Q = AR_2 \cap BR_1$ . Es gilt  $D = h(A, B, C, M, W_1) = h(A, B, C, N, R_1)$ , so dass die Punkte  $M, N, Q, D$  kollinear sind. Wegen  $D = h(A, B, C, N, R_1)$  ist  $(C, R_1, R_2)$ , oder anders  $(S, C_1, C_2)$ . Der Beweis ist somit beendet.

Vergleicht man den Satz 3 mit der bekannten Behauptung ([6], Satz 7, S. 191):

$$\text{Aus } Q \text{ folgt } d_i \quad (i = 1, 2). \quad (**)$$

Satz 3 bietet einerseits ein stärkeres Ergebnis (für die lokalen Spezialisierungen), aber andererseits bleibt die Frage offen, ob sich aus Satz 3 die Be-

hauptung (\*\*) einfach ergibt. Der originelle Beweis der Behauptung (\*\*) stammt von R. Moufang ([6], S. 191-2), er ist aber unangenehm lang. Die Frage nach einem einfacheren Beweis der Behauptung (\*\*) hat also ihren Grund. Weiter ist auch folgendes Problem offen:

Nach welchen nachträglichen Bedingungen folgt aus der affinen Spezialisierung von  $Q$  die affine Spezialisierung von  $d_i$  ( $i = 1, 2$ )?

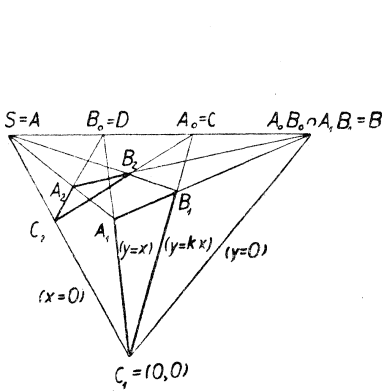


Abb. 19.

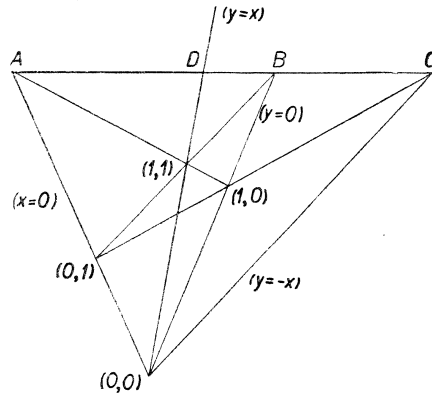


Abb. 20.

Schliesslich führt man einige Folgerungen der Sätze 2,3, bzw. des Satzes 2 an:

1. Gilt die lokale Spezialisierung von  $Q$  für das feste harmonische Punktquadrupel  $A, B, C, D$ , dann a) ist auch das Quadrupel  $C, D, A, B$  harmonisch; b) gilt die lokale Spezialisierung von  $Q$  für das feste Quadrupel  $C, D, A, B$ . (Teil a) ist eine Verschärfung des Satzes 9, S. 193, [6].)

2. Gilt  $Q$ , so gilt auch eine solche Spezialisierung von  $d_2$ , bei der  $S, A_0, B_0, C_0$  immer ein (variables) harmonisches Quadrupel bilden.

**Satz 4.** Setzt man voraus, dass zwei folgende Bedingungen erfüllt sind: (I)  $A, B, C, D$  ist ein festes harmonisches Punktquadrupel; die lokale Spezialisierung von  $d_2$  gilt für  $S = A, M = \{B, C, D\}$ . (II) Wählt man  $B, A$  als uneigentliche Punkte der Koordinatenachsen  $x, y$  und  $D$  als uneigentlichen Punkt der Geraden ( $y = x$ ) ([6], S. 31/9), dann gilt in jedem zugeordneten Koordinatenternärkörper  $T$  die Gleichung  $(-1)u = -u$  für jedes  $u \in T$ .

Der Schluss des Satzes: Dann gilt die lokale Spezialisierung von  $Q$  für das feste Quadrupel  $A, B, C, D$ .

Beweis. Aus (I) ergibt sich nach Lehrsatz 4 der Schliessungssatz  $Q_5$ . Es wird bewiesen werden, dass aus (I), (II) auch  $Q_2$  und  $Q_4$  folgt, so dass nach dem zweiten Teil des Lehrsatzes 2 auch die Geltung der lokalen Spezialisierung von  $Q$  ausgehen wird.

**Hilfssatz.** Gilt (I) und (II), so ist  $C$  der uneigentliche Punkt der Geraden  $(y = -x)$  und in jedem  $T$  gilt die spezielle Zerlegungsbedingung ([6], Formel (46), S. 38)  $T(-1, u, v) = -u + v$  für alle  $u, v \in T$ .

Beweis des Hilfssatzes: — Abb. 19. — Sei  $C$  der uneigentliche Punkt der Geraden  $(y = kx)$ . Setzt man  $B_2 = (u, T(k, u, v))$ ,  $B_1 = (u, ku)$ ,  $A_2 = (ku, ku + v)$ ,  $A_1 = (ku, ku)$ ,  $C_2 = (0, v)$ ,  $C_1 = (0, 0)$  und wendet  $d_1$  an, was mög-

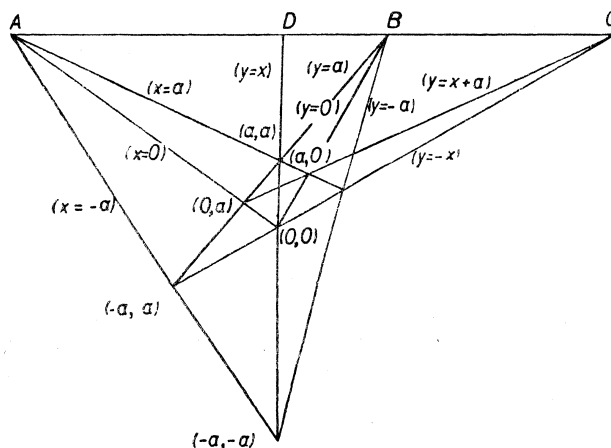


Abb. 21.

lich ist, weil ausser den gewöhnlichen Bedingungen auch die Gleichungen  $S = A$ ,  $A_0 = B$ ,  $B_0 = D$ ,  $A_0B_0 \cap A_1B_1 = C$  gelten. (Bemerkte man noch, dass wegen des Satzes 1 die lokalen Spezialisierungen von  $d_1$  und  $d_2$  gleichwertig sind.) Nach  $d_1$  folgt also  $C_0 = A_1B_1 \cap A_2B_2 \in A_0B_0$ , das heisst:  $(C, (u, T(k, u, v)), (ku, ku + v))$ . Also gilt  $T(k, u, v) = ku + v$  identisch in  $u, v$ .

Der Punkt  $C$  ist gewiss der uneigentliche Punkt der Geraden  $(1, 0)(0, 1)$ , denn  $A(1, 0) \cap B(0, 1) = (1, 1) \in (0, 0)D$ . — Abb. 20. — Die Gerade  $(y = kx + q)$  enthält die Punkte  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  gerade dann, wenn  $q = 1$ ,  $k = -1$ . Nach Voraussetzung gilt aber  $(-1)u = -u$ , so dass  $T(-1, u, v) = -u + v$ . Der Hilfssatz ist bewiesen.

Setzt man wieder die Gültigkeit von (I) und (II) voraus. — Abb. 21. — Die Gerade  $(a, 0)(0, a)$  mit  $a \in T$  hat die Gleichung  $y = -x + a$ , so dass  $C$  der uneigentliche Punkt dieser Geraden ist. Aus  $(C, (a, 0), (0, a))$  folgt  $D = h(A, B, C, (0, 0), (0, a))$ . Also gilt  $Q_2$ . Für alle  $a \in T$  ist  $((-a, 0), (-a, a), A)$  und weiter auch  $(a, a) = (-a, a)B \cap (a, -a)A$ , so dass  $D = h(A, B, C, (-a, -a), (-a, a))$ . Also gilt auch  $Q_4$ . Der Beweis des Satzes 4 ist damit beendet.

Als Folgerung des Satzes 4 ergibt sich (\*). Es ist nämlich bekannt, dass jeder Koordinatenternärkörper der projektiven Ebene, in der  $d_2$  gültig ist, ein

Альтернативные тела характеристики  $\neq 2$  ([6], Satz 51 VII, S. 108, bzw. Satz 1, S. 157); доказательство предыдущего утверждения может быть получено только из теоремы Шлиесингера  $d_2$  обосновано. Условие (II) также выполнено и (\*) вытекает теперь непосредственно из Satz 4.

Условие (II) из Satz 4 существенно. Это вытекает из свойств системы  $U^+$ , которая с помощью системы Халла (Zusatz II, [2]) инверсивно изоморфна относительно умножения. Система  $U^+$  является квазикörperом ([6], S. 92), в котором уравнение  $(-1)u = -u$  не является тождеством. Квазикörper  $U^+$  является координатным телом проективной плоскости, в которой выполняется аффинная специализация  $d_2$ , но не выполняется аффинная специализация  $Q$  (что можно увидеть с помощью элемента  $u_1 \in U^+$  с  $(-1)u_1 \neq -u_1$ ).

#### LITERATUR

- [1] K. Borsuk-W. Szmielew: Podstawy geometrii, Warszawa 1955.
- [2] M. Hall: Projective planes, Trans. Am. Math. Soc. 54 (1943), 229—277.
- [3] V. Havel: Harmonical quadruplet in Moufang plane, Czech. Mat. Journ. 5 (1955), 76—82.
- [4] R. Moufang: Die Einführung der idealen Elemente in die Ebene mit Hilfe des Satzes vom vollständigen Viereck, Math. Ann. 105 (1931), 759—778.
- [5] R. Moufang: Die Schnittpunktsätze des projektiven speziellen Fünfecknetzes in ihrer Abhängigkeit voneinander, Math. Ann. 106 (1932), 755—793.
- [6] G. Pickert: Projektive Ebenen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

#### Резюме

### О ЛОКАЛЬНЫХ СПЕЦИАЛИЗАЦИЯХ ТЕОРЕМЫ О ПОЛНОМ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКЕ И МАЛОЙ ТЕОРЕМЫ ДЕЗАРГА

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Прага.

(Поступило в редакцию 6/IV 1956 г.)

В статье изучается проективная плоскость, не содержащая никакого полного четырехугольника с коллинеарными диагональными вершинами. Вводится понятие локальной специализации теоремы о полном четырехугольнике ( $Q$ ), соотв., малой теоремы Дезарга ( $d$ ); при этих специализациях фиксируется основная гармоничная четверка точек, соотв., центр точек пересечения соответственных сторон.

Главным результатом является аналог теоремы об эквивалентности  $Q$  и  $d$  в случае локальной специализации: из локально специализированной теоремы  $Q$  следует локально специализированная теорема  $d$  (теорема 3); если справедлива локальная специализация теоремы  $d$  для фиксированных точек, образующих гармоничную четверку, то справедлива и локальная специализация теоремы  $Q$ , если выполняется дальнейшее существенное условие, а именно, если имеет место тождество  $(-1)x = -x$  в некоторых координатных тернарных телах данной плоскости (теорема 4).

Далее в статье содержится теорема об эквивалентности локальных специализаций прямой и обратной малых теорем Дезарга (теорема 1) и теорема о замене обеих пар точек одной и той же гармоничной четверки точек (теорема 2).