Czechoslovak Mathematical Journal

Miroslav Fiedler

Über qualitative Winkeleigenschaften der Simplexe

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 3, 463–478

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100260`

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

ÜBER QUALITATIVE WINKELEIGENSCHAFTEN DER SIMPLEXE

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Eingelangt am 11. August 1956.)

Einige qualitative Winkeleigenschaften der n-Simplexe im euklidischen Raum sind mit Hilfe der Graphentheorie elementargeometrisch untersucht. Auch rechtwinklige n-Simplexe sind behandelt und ihre charakteristischen Eigenschaften gefunden.

Einführung. In der Elementargeometrie werden am meisten quantitative Eigenschaften untersucht. Wir wollen zeigen, dass auch qualitative Untersuchungen von Interesse sind und zu Ergebnissen führen können.

Wir definieren, dass zwei Winkel (deren Grösse kleiner als π ist) dieselbe Qualität haben, falls sie gleichzeitig spitz, recht oder stumpf sind. Zwei geordnete (d. h. mit gewisser Anordnung der Eckpunkte oder der $(n-1)$-dimensionalen Seiten beschaffene) n-Simplexe im euklidischen Raum E_n $(n \geqq 2)$ nennen wir für einen Augenblick qualitativ winkeltreu, falls die inneren Winkel der in der gegebenen Anordnung sich entsprechenden $(n-1)$-dimensionalen Seiten von ihnen dieselbe Qualität besitzen.

Wenn man den $(n-1)$-dimensionalen Seiten (im folgenden kurz Seiten) eines n-Simplex Σ Knotenpunkte eines vollständigen Graphen[1]) G_v $(n+1)$-ten Grades zuordnet, so kann man die Kanten von G_v in Kanten von drei Graphen G_+, G_0, G_- auf folgende Weise zerlegen:

Eine Kante k von G_v ist in G_+, G_0, oder G_-, je nachdem der innere Winkel derjenigen Seiten von Σ, die den mit k inzidenten Knotenpunkten entsprechen, spitz, recht oder stumpf ist. Es ist klar, dass diese Zerlegung von G_v für einander qualitativ winkeltreue n-Simplexe dieselbe ist und umgekehrt die Klasse solcher n-Simplexe bestimmt.

In [1] wurde (Satz 11) bewiesen, dass für jedes n-Simplex der Graph G_+ zusammenhängend (und ohne isolierte Knotenpunkte) ist und umgekehrt, zu

[1]) Im folgenden werden wir den Begriff des Graphen so fassen, dass er ohne Schleifen und Zweiecke ist, dagegen isolierte Knotenpunkte besitzen darf. So haben die Graphen G_+, G_0 und G_- dieselben $n+1$ Knotenpunkte. Sonst werden wir uns der Terminologie von KÖNIG [2] beihalten.

jeder Zerlegung G_+, G_0 und G_- von G_v, für welche G_+ zusammenhängend ist, gibt es ein n-Simplex, dem solche Zerlegung entspricht.

Nach einem bekannten Satz (s. [2], S. 57) besitzt jeder zusammenhängende Graph ein zusammenhängendes Gerüst, d. i. einen Baum als Teilgraphen, der dieselben Knotenpunkte wie der ursprüngliche Graph hat. Hieraus folgt, da jeder Baum mit $n + 1$ Knotenpunkten genau n Kanten besitzt, dass die Anzahl von Kanten in G_+ mindestens n ist, also:

Jedes n-Simplex besitzt mindestens n spitze innere Winkel. Nach dem obenerwähnten Satz gibt es n-Simplexe, die genau n innere Winkel spitz und alle andere recht haben. Solche n-Simplexe wurden in [1] rechtwinklig genannt. Der Graph G_+ eines rechtwinkligen n-Simplex ist somit ein Baum, $G_- = \emptyset$ (ist ohne Kanten). Es gibt also ebensoviele Typen von rechtwinkligen n-Simplexen wie verschiedener Bäume mit $n + 1$ Knotenpunkten.

Ein n-Simplex ist nichtstumpfwinklig, falls $G_- = \emptyset$ ist, und spitzwinklig, falls $G_- = G_0 = \emptyset$ ist.

Da durch zwei der Graphen G_+, G_0 und G_- der dritte schon bestimmt ist, werden wir im folgenden nur die Graphen G_+ und G_- behalten. Dagegen werden wir oft mit den beiden Graphen G_+ und G_- zusammen arbeiten und sie als einen einzigen Graphen G betrachten, dessen Kanten mit den Vorzeichen $+$ (positive Kanten) und $-$ (negative Kanten) versehen sind. Auch werden wir meistens die Knotenpunkte von G mit den Seiten des n-Simplex identifizieren.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die qualitativen Verhältnisse der inneren Winkel eines n-Simplex näher zu untersuchen. Es zeigt sich, dass in gewissen Fällen aus der Qualität der inneren Winkel von $(n - 1)$-dimensionalen Seiten auf die Qualität der Winkel von anderen Seiten geschlossen werden kann (Satz 1). Aus diesem allgemeinen Satz folgen durch Spezialisation die Sätze 2—7. Im zweiten Absatz sind einige Sätze über rechtwinklige n-Simplexe bewiesen. Der Satz 8 spricht über Einbettung eines rechtwinkligen n-Simplex in ein n-dimensionales orthogonales Parallelotop, der Satz 10 zeigt, dass die baryzentrischen Koordinaten des Mittelpunktes der umgeschriebenen Hyperkugel eines rechtwinkligen n-Simplex nur von der Struktur des Graphen G abhängig sind.

1

Sind H_1, H_2 zwei Halbräume derselben Dimension k in einem k-dimensionalen Unterraum von E_n, $2 \leqq k \leqq n$, deren Grenzen $(k - 1)$-dimensionale lineare Räume mit $(k - 2)$-dimensionalem Durchschnitt sind, so werden wir mit $\varphi(H_1, H_2)$ den Winkel dieser Halbräume bezeichnen.

Lemma 1. *Es seien drei linear unabhängige Hyperebenen α, β, γ in E_n $(n \geqq 3)$ mit nichtleerem Durchschnitt gegeben. Sind $\alpha^+, \beta^+, \gamma^+$ Halbräume mit den Grenzen α, β, γ, so gilt die Formel*

$$\cos \varphi(\alpha^+ \cap \gamma, \beta^+ \cap \gamma) = \frac{\cos \varphi(\alpha^+, \beta^+) + \cos \varphi(\alpha^+, \gamma^+) \cos \varphi(\beta^+, \gamma^+)}{\sin \varphi(\alpha^+, \gamma^+) \sin \varphi(\beta^+, \gamma^+)}. \tag{1}$$

Beweis. Aus der linearen Unabhängigkeit von α, β, γ folgt, dass der (nichtleere) Durchschnitt $\delta = \alpha \cap \beta \cap \gamma$ die Dimension $n - 3$ hat. Ist $n > 3$, so sei R ein dreidimensionaler Unterraum von E_n, der orthogonal zu δ ist; für $n = 3$ sei $R = E_n$. Dann gilt nach dem Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie in unserer Bezeichnung

$$\cos \varphi(\alpha^+ \cap R, \beta^+ \cap R) = - \cos \varphi(\alpha^+ \cap R, \gamma^+ \cap R) \cos \varphi(\beta^+ \cap R, \gamma^+ \cap R) + \\ + \sin \varphi(\alpha^+ \cap R, \gamma^+ \cap R) \sin \varphi(\beta^+ \cap R, \gamma^+ \cap R) \cos \varphi(\alpha^+ \cap \gamma \cap R, \beta^+ \cap \gamma \cap R). \tag{2}$$

Da wegen der Orthogonalität von R und α, β, γ (für $n > 3$) $\varphi(\alpha^+ \cap \gamma \cap R, \beta^+ \cap \gamma \cap R) = \varphi(\alpha^+ \cap \gamma, \beta^+ \cap \gamma)$, $\varphi(\alpha^+ \cap R, \beta^+ \cap R) = \varphi(\alpha^+, \beta^+)$ usw. gilt, folgt aus (2) die Formel (1) und das Lemma ist bewiesen.

Für die Hyperebenen (und Halbräume) α, β, γ kann man wie früher den Graphen $G = G_+ \cup G_-$ mit drei Knotenpunkten α, β, γ bilden. Dann gilt das folgende Lemma:

Lemma 2. *Die Qualität des Winkels $\varphi(\alpha^+ \cap \gamma, \beta^+ \cap \gamma)$ ist durch die Qualität der Winkel $\varphi(\alpha^+, \beta^+)$, $\varphi(\alpha^+, \gamma^+)$, $\varphi(\beta^+, \gamma^+)$ eindeutig bestimmt, sobald jeder Weg*[2]) *in G aus α nach β die* mod 2 *gleiche Anzahl von Kanten aus G_- enthält. Dieser Winkel ist dann recht, falls es keinen Weg aus α nach β in G gibt, spitz, falls es mindestens einen solchen Weg gibt und die obengenannte Anzahl* $\equiv 0 \bmod 2$ *ist, und stumpf, falls diese Anzahl* $\equiv 1 \bmod 2$ *ist.*

Anmerkung. Die Bedingung im Lemma 2 ist also dann und nur dann erfüllt, falls es keinen Zyklus (Kreislinie) $\alpha\beta\gamma\alpha$ in G mit ungerader Anzahl von Kanten aus G_- gibt.

Beweis. Es gibt höchstens zwei Wege $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma\beta$ von α nach β in G. Aus der Analysis des Zählers in der rechten Seite von (1) (der Nenner ist stets positiv) geht die Richtigkeit einzelner Fälle im Lemma hervor.

Bevor wir jetzt den Hauptsatz dieses Absatzes aussprechen, führen wir zwei Bezeichnungen ein:

Ist G ein Graph, M eine Untermenge der Knotenpunktmenge von G, so bezeichnen wir mit $G(M)$ den maximalen Teilgraphen von G, dessen Knotenpunktmenge M ist.

---

[2]) Wir geben hier die Definition des Weges im Graphen wieder: Es ist eine Folge von einander verschiedenen Knotenpunkten $p, q, r, \ldots, v$, von denen je zwei aufeinanderfolgende durch eine Kante des Graphen verbunden sind. Diesen Weg bezeichnen wir $pqr \ldots v$.

Ist ein n-Simplex mit Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ und Seiten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \ldots, \alpha_{n+1}$ [α_i gegenüber A_i] gegeben, so sei α_i^+ derjenige Halbraum mit der Grenze α_i bezeichnet, der den Eckpunkt A_i enthält. Der Winkel $\varphi(\alpha_i^+, \alpha_j^+)$ (für $i \neq j$) ist somit der innere Winkel der Seiten α_i und α_j im Simplex.

Satz 1. *Ein n-Simplex Σ mit dem Graphen $G = G_+ \cup G_-$ habe die folgende Eigenschaft: Für zwei Seiten α_1, α_2 [$\alpha_1 \neq \alpha_2$] und eine Menge S von Seiten, α_1 non $\in S$, α_2 non $\in S$, hat jeder Weg von α_1 nach α_2 in $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$ die* mod 2 *gleiche Anzahl von Kanten aus G_-. Ist dann L der Durchschnitt von Seiten (Hyperebenen) aus S, so ist die Qualität des Winkels $\varphi(\alpha_1^+ \cap L, \alpha_2^+ \cap L)$, der in L durch α_1^+ und α_2^+ ausgeschnitten wird, vollkommen bestimmt, und zwar:*

$\varphi(\alpha_1^+ \cap L, \alpha_2^+ \cap L) = \frac{1}{2}\pi$, *falls es keinen solchen Weg gibt,*

$\varphi(\alpha_1^+ \cap L, \alpha_2^+ \cap L) < \frac{1}{2}\pi$, *falls es mindestens einen solchen Weg gibt, wobei die obengenannte Anzahl* $\equiv 0 \bmod 2$ *ist,*

$\varphi(\alpha_1^+ \cap L, \alpha_2^+ \cap L) > \frac{1}{2}\pi$, *falls die obengenannte Anzahl* $\equiv 1 \bmod 2$ *ist.*

Beweis. Wir werden den Beweis durch Induktion nach der Anzahl s von Seiten in S führen. Ist $s = 0$, also S leer, ist der Satz nach der Definition von G und G_- für jedes Simplex richtig. Es sei also für das n-Simplex Σ $s > 0$ und setzen wir die Richtigkeit des Satzes für kleinere nichtnegative ganze s und für sämtliche Simplexe voraus.

Wählen wir eine Seite α aus S folgendermassen aus: Gibt es in S irgendeine Seite mit der Eigenschaft, dass sie in keinem Wege aus α_1 nach α_2 in $G(S \cup \alpha_1 \cup \cup \alpha_2)$ liegt, so hat auch α diese Eigenschaft (Fall (A)). Gibt es in S keine derartige Seite, so sei α eine beliebige Seite aus S (Fall (B)).

Es sei jetzt $\bar{\Sigma}$ das $(n-1)$-Simplex in α, das ein Untersimplex von Σ ist, $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \cap \alpha$, $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 \cap \alpha$, $\bar{S}$ die Menge aller $(n-2)$-dimensionalen Seiten von $\bar{\Sigma}$, die als Durchschnitt von je einer Hyperebene aus S mit α entstehen, $\bar{G} = \bar{G}_+ \cup \bar{G}_-$ der Graph von $\bar{\Sigma}$. Wir werden in einigen Schritten beweisen, dass $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ und $\bar{S}$ in $\bar{G}$ auch die Eigenschaft des Satzes besitzen, wobei die zugehörige Anzahl mod 2 dieselbe ist wie diejenige für α_1, α_2 und S. Da $\bar{S}$ nur $s-1$ Elemente hat, ist die Qualität des Winkels $\varphi(\bar{\alpha}_1^+ \cap \bar{L}, \bar{\alpha}_2^+ \cap \bar{L})$, wo $\bar{L}$ der Durchschnitt von Seiten aus $\bar{S}$ ist, wie im Satz bestimmt. Doch wegen $\bar{\alpha}_1^+ \cap \cap \bar{L} = \alpha_1^+ \cap L$ und $\bar{\alpha}_2^+ \cap \bar{L} = \alpha_2^+ \cap L$ gilt

$$\varphi(\bar{\alpha}_1^+ \cap \bar{L}, \bar{\alpha}_2^+ \cap \bar{L}) = \varphi(\alpha_1^+ \cap L, \alpha_2^+ \cap L)\,,$$

sodass der Satz nach der Beseitigung der Lücke vollkommen bewiesen sein wird.

Führen wir also den versprochenen Beweis durch:

(1,1) *Gibt es einen Weg $W \equiv \alpha_1 \ldots \alpha_2$ in $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$, so gibt es auch einen Weg $\bar{W} \equiv \bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_2$ in $\bar{G}(\bar{S} \cup \bar{\alpha}_1 \cup \bar{\alpha}_2)$, sogar mit der Eigenschaft, dass $\bar{W}$ die* mod 2 *gleiche Anzahl von negativen Kanten besitzt wie W.*

Beweis. Es sei $W \equiv \alpha_{i_0}\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}\alpha_{i_{k+1}}$ mit $i_0 = 1$, $i_{k+1} = 2$. Bezeichnen wir der Kürze halber $\bar{\alpha}_m = \alpha_m \cap \alpha$ für $\alpha_m \neq \alpha$.

Im Falle (A) ist α in W nicht enthalten. Wir werden zeigen, dass $\bar{\bar{W}} \equiv \bar{\alpha}_{i_0}\bar{\alpha}_{i_1} \ldots \bar{\alpha}_{i_{k+1}}$ die gesuchte Eigenschaft besitzt. Es gibt nämlich höchstens einen Knotenpunkt α_{i_r} ($r = 0, 1, \ldots, k + 1$), für welchen $\alpha\alpha_{i_r}$ Kante aus G ist. Wenn wir wie im Lemma 2 den Graphen von je drei Hyperebenen α_{i_j}, $\alpha_{i_{j+1}}$ und α untersuchen, bekommen wir, dass sämtliche Kanten $\bar{\alpha}_{i_j}\bar{\alpha}_{i_{j+1}}$ in $\bar{G}(\bar{S} \cup \bar{\alpha}_1 \cup \bar{\alpha}_2)$ existieren, sogar mit demselben Vorzeichen wie $\alpha_{i_j}\alpha_{i_{j+1}}$.

Um im Falle (B) die Behauptung (1,1) zu beweisen, werden wir zuerst zwei andere Hilfsbehauptungen brauchen:

(1,2) *Im Falle* (B) *ist jede Kante von* $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$ *in irgendeinem Weg von* α_1 *nach* α_2 *in* $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$ *enthalten.*

Beweis. Es sei $\beta_1\beta_2$ eine Kante in $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$ und setzen wir voraus, dass sie in keinem Wege $\alpha_1 \ldots \alpha_2$ von $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$ enthalten ist. Nach (B) gibt es Wege $W_1 \equiv \alpha_1 \ldots \beta_1 \ldots \alpha_2$ bzw. $W_2 \equiv \alpha_1 \ldots \beta_2 \ldots \alpha_2$; diese Wege enthalten β_2 bzw. β_1 nicht (sonst gäbe es einen Weg $\alpha_1 \ldots \alpha_2$ durch $\beta_1\beta_2$). Es sei γ der erste Knotenpunkt nach β_2 in W_2, der aus W_1 ist (es gibt einen solchen wegen $\alpha_2 \in W_1$, $\alpha_2 \in W_2$). Dann ist $\alpha_1 \ldots \beta_1\beta_2 \ldots \gamma \ldots \alpha_2$, wobei $\alpha_1 \ldots \beta_1$ aus W_1, $\beta_2 \ldots \gamma$ aus W_2 und $\gamma \ldots \alpha_2$ aus W_1 genommen ist, ein Weg $\alpha_1 \ldots \alpha_2$ durch $\beta_1\beta_2$. Dieser Widerspruch vollendet den Beweis.

(1,3) *Im Falle* (B) *besitzt jede Kreislinie*[3]) *von* $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$ *eine gerade Anzahl von Kanten aus* G_-.

Beweis. Ist K eine Kreislinie von $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$, k eine Kante in K, so sei nach (1,2) $W \equiv \alpha_1 \ldots \alpha_2$ ein Weg in $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$, der k enthält. Es sei β_1 bzw. β_2 der erste bzw. letzte Knotenpunkt in W, der in K liegt; also $\beta_1 \neq \beta_2$. Dann gibt es zwei Wege $\alpha_1 \ldots \beta_1 \ldots \beta_2 \ldots \alpha_2$, je nachdem als $\beta_1 \ldots \beta_2$ der eine oder andere Bogen von K genommen wird. Da nach der Voraussetzung des Satzes beide diese Wege die mod 2 gleiche Anzahl von Kanten aus G_- enthalten, ist die Anzahl von Kanten aus G_- in K gerade, w. z. b. w.

Kehren wir jetzt zum Beweis von (1,1) zurück. Ist α in W nicht enthalten, so folgt aus Lemma 2 [angewandt auf Hyperebenen α_{i_r}, $\alpha_{i_{r+1}}$, α] wegen (1,3), dass für $r = 0, \ldots, k_1$ auch $\bar{\alpha}_{i_r}\bar{\alpha}_{i_{r+1}}$ Kante von $\bar{G}(\bar{S} \cup \bar{\alpha}_1 \cup \bar{\alpha}_2)$ ist, wobei ihr Vorzeichen dasselbe ist wie das von $\alpha_{i_r}\alpha_{i_{r+1}}$. Also $\bar{W} \equiv \bar{\alpha}_{i_0}\bar{\alpha}_{i_1} \ldots \bar{\alpha}_{i_{k+1}}$ ist ein Weg in $\bar{G}(\bar{S} \cup \bar{\alpha}_1 \cup \bar{\alpha}_2)$ mit den Eigenschaften von (1,1). Ist α in W enthalten, $\alpha = \alpha_{i_l}$ $(0 \neq l \neq k + 1)$, so folgt wie vorher aus Lemma 2, dass für $l - 1 \neq r \neq l$, $r = 0, \ldots, k$, $\bar{\alpha}_{i_r}\bar{\alpha}_{i_{r+1}} \in \bar{G}(\bar{S} \cup \bar{\alpha}_1 \cup \bar{\alpha}_2)$ mit demselben Vorzeichen wie $\alpha_{i_r}\alpha_{i_{r+1}}$ ist. Aus $\alpha\alpha_{i_{l+1}} \in G$, $\alpha\alpha_{i_{l-1}} \in G$ folgt nach Lemma 2 wegen (1,3), dass

---

[3]) Die Kreislinie eines Graphen G ist eine zyklisch geordnete Menge von (mindestens drei) einander verschiedenen Knotenpunkten, wobei jede zwei aufeinanderfolgende durch eine Kante aus G verbunden sind.

$\bar{\alpha}_{i_{l-1}}\bar{\alpha}_{i_{l+1}} \in \bar{G}$ ist. Dabei hat diese Kante das negative Vorzeichen, falls genau eine der Kanten $\alpha\alpha_{i_{l-1}}, \alpha\alpha_{i_{l+1}}$ in G negativ ist, sonst ist sie positiv. Hieraus folgt, dass der Weg $\bar{W} \equiv \bar{\alpha}_{i_0} \dots \bar{\alpha}_{i_{l-1}}\bar{\alpha}_{i_{l+1}} \dots \bar{\alpha}_{i_{k+1}}$ die in (1,1) geforderten Eigenschaften besitzt. Damit ist (1,1) vollständig bewiesen.

(1,4) *Ist* $\bar{W} \equiv \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_2$ *ein Weg in* $\bar{G}(\bar{S} \cup \bar{\alpha}_1 \cup \bar{\alpha}_2)$, *so gibt es einen Weg* $W \equiv \alpha_1 \dots \alpha_2$ *in* $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$, *der die* mod 2 *gleiche Anzahl von negativen Kanten besitzt wie* $\bar{W}$.

Beweis. Es sei $\bar{W} \equiv \bar{\alpha}_{j_0}\bar{\alpha}_{j_1} \dots \bar{\alpha}_{j_{l+1}}$ mit $j_0 = 1$, $j_{l+1} = 2$. Im Falle (A) setzen wir voraus, dass $\alpha_{j_0}\alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_{l+1}}$ kein Weg in G ist. Es sei dann p bzw. q das kleinste bzw. grösste Index aus $r = 0, \dots, l$, für welches $\alpha_{j_r}\alpha_{j_{r+1}}$ non $\in G$ gilt (es kann auch $p = q$ sein). Nach Lemma 2 ist dann $\alpha_{j_p}\alpha \in G$, $\alpha\alpha_{j_{q+1}} \in G$, sodass $\alpha_1 \dots \alpha_{j_p}\alpha\alpha_{j_{q+1}} \dots \alpha_2$ ein Weg in $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$ durch α ist, gegen die Voraussetzung über α. Also $W \equiv \alpha_{j_0}\alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_{l+1}}$ ist ein Weg in G, wobei nach Lemma 2 (da wieder höchstens eine Kante $\alpha\alpha_{j_r} \in G$ ist) jede Kante aus W dasselbe Vorzeichen besitzt wie die entsprechende Kante in $\bar{W}$.

Im Falle (B) sei $\bar{\alpha}_{k_1}, \bar{\alpha}_{k_2}, \dots, \bar{\alpha}_{k_d}$ die Folge von denjenigen Knotenpunkten aus $\bar{W}$, die die folgende Eigenschaft besitzen: genau für eine der Kanten von $\bar{W}$, die mit diesem Knotenpunkt in $\bar{W}$ inzident sind, existiert die entsprechende Kante in G nicht. Nach Lemma 2 sind also sämtliche $\alpha\alpha_{k_j}$ $(j = 1, \dots, d)$ Kanten in $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$. Es gilt jetzt: Die Kanten $\alpha\alpha_{k_j}$ und $\alpha\alpha_{k_{j+1}}$ $(j = 1, \dots, \dots, d - 1)$ haben dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen, nachdem zwischen $\bar{\alpha}_{k_j}$ und $\bar{\alpha}_{k_{j+1}}$ in $\bar{W}$ eine gerade oder ungerade Anzahl von Kanten aus $\bar{G}_-$ ist. Im Abschnitt $\bar{\alpha}_{k_j} \dots \bar{\alpha}_{k_{j+1}}$ von $\bar{W}$ sind nämlich entweder für alle Kanten die entsprechenden Kanten in G, oder für gar keine. Im ersten Falle hat jede Kante von $\alpha_{k_j} \dots \alpha_{k_{j+1}}$ dasselbe Vorzeichen wie die entsprechende in $\bar{W}$, sodass unsere Behauptung aus (1,3) (angewandt auf die Kreislinie $\alpha\alpha_{k_j} \dots \alpha_{k_{j+1}}\alpha$) folgt. Im zweiten Falle sind sämtliche Knotenpunkte in G, die den Knotenpunkten aus $\bar{\alpha}_{k_j} \dots \bar{\alpha}_{k_{j+1}}$ entsprechen, mit α verbunden, sodass nach Lemma 2 solche zwei aufeinanderfolgende Kanten $\alpha\alpha_{j_r}$ und $\alpha\alpha_{j_{r+1}}$ dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen haben, nachdem die entsprechende Kante $\bar{\alpha}_{j_r}\bar{\alpha}_{j_{r+1}}$ in $\bar{W}$ positiv oder negativ ist. Hieraus folgt unmittelbar, dass auch $\alpha\alpha_{k_j}$ und $\alpha\alpha_{k_{j+1}}$ dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen haben, je nachdem es zwischen $\bar{\alpha}_{k_j}$ und $\bar{\alpha}_{k_{j+1}}$ in $\bar{W}$ eine gerade oder ungerade Anzahl von negativen Kanten gibt. Aus diesem Grunde ist in $\bar{W}$ die mod 2 gleiche Anzahl von negativen Kanten wie im Wege $\alpha_1 \dots \alpha_{k_1}\alpha\alpha_{k_d} \dots \alpha_2$ in $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$. Damit ist (1,4) vollkommen bewiesen.

Aus (1,1) (und 1,4) folgt schon leicht, dass es in $\bar{G}(\bar{S} \cup \bar{\alpha}_1 \cup \bar{\alpha}_2)$ einen Weg von $\bar{\alpha}_1$ nach $\bar{\alpha}_2$ dann und nur dann gibt, falls es einen Weg von α_1 nach α_2 in $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$ gibt. Gibt es einen solchen Weg, so hat jeder der Wege $\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_2$ in $\bar{G}(\bar{S} \cup \bar{\alpha}_1 \cup \bar{\alpha}_2)$ die mod 2 gleiche Anzahl von negativen Kanten wie jeder der Wege $\alpha_1 \dots \alpha_2$ in $G(S \cup \alpha_1 \cup \alpha_2)$. Damit ist der Beweis des Satzes 1 vollendet.

Wir werden jetzt einen Satz für das sphärische m-Simplex Σ' formulieren, das wir z. B. als Durchschnitt von $m + 1$ Halbräumen $\alpha_1^+, \alpha_2^+, \ldots, \alpha_{m+1}^+$ in E_{m+1} darstellen können, wobei die Hyperebenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ in E_{m+1} linear unabhängig und mit einem nichtleeren Durchschnitt (Punkt) sind. Für Σ' können wir also wie vorher den Graphen $G' = G'_+ \cup G'_-$ definieren.

Satz 2. *Es sei Σ' ein sphärisches m-Simplex, $G' = G'_+ \cup G'_-$ sein Graph. Es sei G'_- ein p-Teilgraph von G'.*[4]) *Sind Σ'_1, Σ'_2 zwei k-dimensionale Seiten von Σ' $(1 \leqq k \leqq m)$, die einen $(k - 1)$-dimensionalen Durchschnitt haben, so ist die Qualität des inneren Winkels zwischen Σ'_1 und Σ'_2 in Σ durch $G' = G'_+ \cup G'_-$ vollkommen bestimmt. Ist dabei $\Sigma'_1 = \alpha_1 \cap L$, $\Sigma'_2 = \alpha_2 \cap L$, $L = \alpha_3 \cap \ldots \cap \alpha_{m-k+2}$, ist dieser Winkel recht, falls es keinen Weg von α_1 nach α_2 in $G'(\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \ldots \cup \alpha_{m-k+2})$ gibt, spitz, falls es mindestens einen solchen Weg mit gerader Anzahl von negativen Kanten gibt, und stumpf, falls es einen Weg mit ungerader Anzahl von negativen Kanten gibt.*

Beweis. Folgt sogleich aus dem vorigen Satze, wenn man Σ' in ein $(m + 1)$-Simplex durch Hinzunahme einer Seite umwandelt. Aus der Voraussetzung dass G'_- in G' paar ist, folgt nämlich, dass jede zwei Wege mit demselben Anfangspunkt und demselben Endpunkt in G' die mod 2 gleiche Anzahl von negativen Kanten besitzen.

Anmerkung 1. Die einzelnen Fälle im Satz 2 scheiden sich aus. Der Winkel im Satz ist spitz oder stumpf, falls es einen Weg $\alpha_1 \ldots \alpha_2$ in $G'(\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \ldots \cup \alpha_{m-k+2})$ gibt, und dabei α_1 und α_2 zu derselben Klasse oder zu der verschiedenen Klassen gehören, die in der Anmerkung[4]) erwähnt sind. Es gilt auch, dass dasjenige sphärische m-Simplex Σ'', das aus Σ' dadurch entsteht, dass man für genau eine der Klassen anstatt α_i^+ im zugehörigen E_{m+1} die entgegengesetzten Halbräume α_i^- nimmt, nichtstumpfwinklig ist.

Anmerkung 2. Ist $G = G_+ \cup G_-$ das Graph eines n-Simplex, so ist G_- ein p-Teilgraph in G dann und nur dann, falls G_- leer (ohne Kanten) ist. Das folgt daraus, dass G_+ nach dem Satze aus der Einführung zusammenhängend ist. Ist dagegen für eine Untermenge U der Knotenpunktmenge von G der Graph $G_-(U)$ ein paarer Teilgraph von $G(U)$, dann ist die Qualität des inneren Winkels jeder zwei k-dimensionalen Seiten $(1 \leqq k \leqq n - 1)$ mit $(k - 1)$-dimensionalem Durchschnitt, der den Durchschnitt von Seiten aus U enthält, durch G und G_- eindeutig bestimmt.

Satz 3. *In einem n-Simplex Σ in E_n sei α eine Seite, M die Menge der übrigen Seiten. Ist G der Graph von Σ, so lasse man jeder Komponente K von $G(M)$ einen*

[4]) Ein Teilgraph G ist p-Teilgraph von G, falls jede Kreislinie in G eine gerade Anzahl von Kanten aus G_- hat. Es gilt bekanntlich (S. [2], S. 150), dass dann (und nur dann) die Knotenpunkte von G in zwei derartige Klassen geteilt werden können, dass eine Kante aus G genau dann in G_- liegt, falls ihre Endpunkte zu verschieden Klassen angehören.

linearen Raum als Durchschnitt der Seiten in K entsprechen. Dann sind jede zwei solche verschiedene Räume in E_n orthogonal.[5])

Beweis. Es seien M_1 bzw. M_2 die Seitenmengen in den Komponenten K_1 und K_2 von $G(M)$, $K_1 \neq K_2$, R_1 und R_2 die zugehörigen linearen Räume. Ist $\alpha_1 \in M_1$, $\alpha_2 \in M_2$, so gilt, da es keine Kante $\alpha_1\alpha_2 \in G$ gibt, dass α_1 und α_2 orthogonal sind. Weil für $i = 1, 2$ jede Hyperebene ϱ_i, die R_i enthält, eine lineare Kombination der Seiten aus M_i ist, folgt daraus (die Relation der Orthogonalität ist bilinear), dass ϱ_1 und ϱ_2 orthogonal sind, w. z. b. w.

Anmerkung. In $G(M)$ gibt es mehr als eine Komponente dann und nur dann, wenn α eine Artikulation ([2], S. 224) ist.

Aus dem Satz 1 folgen für spitzwinklige und nichtstumpfwinklige n-Simplexe die folgenden zwei Sätze, die keinen Beweis mehr erfordern:

Satz 4. *Ist ein n-Simplex spitzwinklig, so ist jede seine k-dimensionale Seite* $(2 \leqq k \leqq n - 1)$ *wiederum spitzwinklig.*

Satz 5. *Ist ein n-Simplex Σ nichtstumpfwinklig, so ist jede seine k-dimensionale Seite* $(2 \leqq k \leqq n - 1)$ *wiederum nichtstumpfwinklig. Die Qualität der inneren Winkel jeder k-dimensionalen Seite ist nur von der Qualität der inneren Winkel der* $(n - 1)$*-dimensionalen Seiten von Σ und nicht von der Auswahl des n-Simplex aus der Klasse einander qualitativ winkeltreuen n-Simplexe abhängig.*

Anmerkung. Wenn die k-dimensionale Seite $\bar{\Sigma}$ von Σ durch die Menge S der Seiten von Σ, die sie enthalten, gegeben ist, so bezeichnen wir mit C die Menge der übrigen Seiten von Σ. Laut dem Satz 1 bekommt man den Graphen $\bar{G}$ der Seite $\bar{\Sigma}$ aus dem Graphen G folgendermassen: Wenn man diejenige Seiten von Σ, die in C enthalten sind, als Knotenpunkte von $\bar{G}$ betrachtet, so sind zwei diese Knotenpunkte durch eine Kante in $\bar{G}$ dann und nur dann verbunden, falls es einen Weg zwischen ihnen durch Knotenpunkte in S gibt.

Im folgenden Satz werden wir die Qualität des Winkels von zwei beliebigen Seiten eines nichtstumpfwinkligen n-Simplex mit nichtleerem Durchschnitt untersuchen. Die Grösse eines solchen Winkels φ werden wir nur im Intervall $0 < \varphi \leqq \frac{1}{2}\pi$ betrachten.

Satz 6. *Es sei Σ ein nichtstumpfwinkliges n-Simplex, Σ_1 und Σ_2 seine [nicht nötig* $(n - 1)$*-dimensionale] Seiten mit einem nichtleeren Durchschnitt Σ_{12}, $\Sigma_1 \neq \Sigma_{12} \neq \Sigma_2$. Ist G der Graph von Σ und sind C_1, C_2, C_{12} die Mengen von denjenigen Seiten von Σ, die je $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_{12}$ nicht enthalten (also $C_{12} = C_1 \cap C_2$), dann ist der Winkel von Σ_1 und Σ_2 recht oder spitz, nachdem C_1 von C_2 durch C_{12} in G getrennt oder nicht getrennt wird.*

Beweis. Der Winkel von Σ_1 und Σ_2 ist recht dann und nur dann, wenn für je zwei Eckpunkte A_1, A_2 von Σ, für die $A_1 \in \Sigma_1$, A_1 non $\in \Sigma_2$, $A_2 \in \Sigma_2$, A_2 non $\in$

[5]) In dem Sinne, dass jede zwei Hyperebenen in E_n, die je einen solchen Raum enthalten, orthogonal sind.

non $\in \Sigma_1$ gilt, $A_1 \cup \Sigma_{12}$ (damit bezeichnen wir den kleinsten linearen Raum, der A_1 und Σ_{12} enthält) senkrecht zu $A_2 \cup \Sigma_{12}$ ist. Da jedoch $A_1 \cup \Sigma_{12}$ der Durchschnitt von α_2 und den Seiten aus C_{12}, $A_2 \cup \Sigma_{12}$ der Durchschnitt von α_1 und den Seiten aus C_{12} ist, so sind diese Räume senkrecht dann und nur dann, falls es in G keinen Weg von α_1 nach α_2 ausserhalb C_{12} gibt, d. h., falls C_{12} α_1 von α_2 trennt. Hieraus folgt schon, dass der Winkel von Σ_1 und Σ_2 genau dann recht ist, falls C_{12} C_1 von C_2 trennt.

Satz 7. *Es sei Σ ein nichtstumpfwinkliges n-Simplex mit dem Graphen G, $\bar{\Sigma}$ seine k-dimensionale Seite* ($2 \leq k \leq n - 1$). *Dann ist der Graph von $\bar{\Sigma}$ demjenigen Graphen $\bar{G}$ gleich, der die Knotenpunkte von G, die den $\bar{\Sigma}$ nicht enthaltenden Seiten von Σ entsprechen, besitzt und dabei dieselben Trennungseigenschaften wie G im folgenden Sinne hat: Ist M die besprochene Knotenpunktmenge von $\bar{G}$, so trennt eine Untermenge U von M zwei Untermengen U_1 und U_2 von M in $\bar{G}$ dann und nur dann, falls sie U_1 und U_2 auch in G trennt.*

Beweis. Aus dem Satz 6 folgt, dass die Trennungseigenschaften für die Graphen solcher Seiten von Σ erhalten bleiben, die $\bar{\Sigma}$ enthalten, d. i. für diejenigen Graphen, deren Knotenpunktmenge M enthält. Da durch diese Trennungseigenschaften $\bar{G}$ eindeutig bestimmt ist (wenn man nämlich als U_1 und U_2 je einen Knotenpunkt aus M, als U die Menge von allen übrigen Knotenpunkten aus M wählt), ist somit der Satz bewiesen.

2

In diesem Absatz werden wir rechtwinklige n-Simplexe untersuchen. Zunächst geben wie einige Definitionen, in welchen bekannte Begriffe aus der ebenen Geometrie verallgemeinert werden.

Eine Kante (d. i. eindimensionale Seite) eines rechtwinkligen n-Simplex heisst *Kathete von Σ*, falls der innere Winkel der gegenüberliegenden Seiten spitz ist.

Die Menge sämtlicher Katheten von Σ, zusammen mit den Eckpunkten von Σ, bildet also topologisch einen Graphen, der dem Graphen G von Σ äquivalent ist. Diesen Graphen, der nach der Definition des rechtwinkligen n-Simplex ein Baum ist, werden wir *Kathetenbaum* K_Σ von Σ nennen. Ein Eckpunkt von Σ, mit welchem genau eine Kathete inzident ist, heisst Endpunkt von K_Σ. Derjenige lineare Raum, der durch sämtliche Endpunkte von K_Σ bestimmt wird, heisst *Hypotenusenraum* von Σ, die höchstdimensionale Seite von Σ im Hypotenusenraum heisst *Hypotenusenseite* von Σ. Da jeder Baum mit $n + 1$ Knotenpunkten mindestens zwei und höchstens n Endknotenpunkte besitzt, ist die Dimension des Hypotenusenraumes eines rechtwinkligen n-Simplex mindestens 1 und höchstens $n - 1$.

Jetzt werden wir den Hauptsatz über rechtwinklige n-Simplexe beweisen.

Satz 8. *Es sei Σ ein rechtwinkliges n-Simplex in E_n. Dann gibt es in E_n ein n-dimensionales orthogonales Parallelotop Π, unter dessen Eckpunkten sich sämtliche Eckpunkte von Σ befinden, und zwar so, dass genau Katheten von Σ zugleich Kanten von Π sind. Umgekehrt, hat eine Menge von n (abgeschlossenen) Kanten eines n-dimensionalen orthogonalen Parallelotops Π in E_n die Eigenschaft, dass keine zwei dieser Kanten parallel sind und dass diese Menge zusammenhängend ist, so bilden diese Kanten den Kathetenbaum eines rechtwinkligen n-Simplex.*

Beweis. Den ersten Teil des Satzes beweisen wir durch Induktion nach n. Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig. Es sei $n > 2$ und setzen wir voraus, dass die Behauptung für sämtliche k-Simplexe, $2 \leqq k < n$, richtig ist. Es sei also Σ ein rechtwinkliges n-Simplex mit den Eckpunkten $O_0, O_1, \ldots, O_n$ und mit dem Kathetenbaum K_Σ. Es sei O_n ein Endpunkt von K_Σ, O_nO_{n-1} die zugehörige Kathete mit dem Endpunkt O_n. Bezeichnen wir $\bar{\Sigma}$ die $(n-1)$-dimensionale Seite von Σ, die gegenüber O_n liegt. Aus dem Satz 6 oder durch direkte Überlegung folgt, dass O_nO_{n-1} zur Seite $\bar{\Sigma}$ senkrecht ist. Aus dem Satz 7 (oder aus Lemma 2) folgt, dass $\bar{\Sigma}$ wieder ein rechtwinkliges $(n-1)$-Simplex ist, dessen Kathetenbaum $\bar{K}_{\bar{\Sigma}}$ aus K_Σ dadurch entsteht, dass man die Kathete O_nO_{n-1} von K_Σ abnimmt. Laut der Induktionsvoraussetzung ist $\bar{\Sigma}$ in einem $(n-1)$-dimensionalen orthogonalen Parallelotop $\bar{\Pi}$ enthalten, wobei genau die Kanten aus $\bar{K}_{\bar{\Sigma}}$ zugleich Kanten von $\bar{\Pi}$ sind. Bezeichnen wir mit $\bar{\Pi}'$ ein mit $\bar{\Pi}$ kongruentes Parallelotop, das aus $\bar{\Pi}$ durch Verschiebung um den Vektor $\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$ entsteht. Die Eckpunkte von $\bar{\Pi}$ und $\bar{\Pi}'$ bilden zusammen die Eckpunktenmenge eines n-dimensionalen orthogonalen Parallelotops Π. Da die Eckpunkte von $\bar{\Sigma}$ unter den Eckpunkten von $\bar{\Pi}$, O_n ein Eckpunkt von $\bar{\Pi}'$ ist, sind sämtliche Eckpunkte von Σ zugleich Eckpunkte von Π. Von den Kanten von Σ sind genau diejenige von K_Σ Kanten in Π: laut der Induktionsvoraussetzung sind von den Kanten von $\bar{\Sigma}$ genau diejenigen aus $\bar{K}_{\bar{\Sigma}}$ Kanten von $\bar{\Pi}$, also von Π; von den Kanten in Σ, die mit O_n inzident sind, ist nur O_nO_{n-1} Kante von Π, denn die übrigen sind weder parallel zu O_nO_{n-1}, noch in $\bar{\Pi}'$ gelegen. Wegen $K_\Sigma = \bar{K}_{\bar{\Sigma}} \cup O_nO_{n-1}$ ist somit der erste Teil des Satzes völlig bewiesen.

Den Beweis des zweiten Teils werden wir auch durch Induktion führen. Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig. Es sei $n > 2$ und nehmen wir an, die Behauptung ist richtig für sämtliche k-dimensionale orthogonale Parallelotope mit $2 \leqq k < n$. Es sei also eine zusammenhängende Menge M von n (abgeschlossenen) Kanten eines n-dimensionalen orthogonalen Parallelotops Π gegeben, von denen keine zwei parallel sind. Wenn M eine (topologische) Kreislinie K enthalten würde, so sei k eine Kante von K. Die Eckpunkte von k liegen in zwei parallelen $(n-1)$-dimensionalen Seiten von Π. In K muss noch eine Kante diese Seiten verbinden, die also zu k parallel ist, was jedoch der Voraussetzung widerspricht. Somit ist M topologisch ein zusammenhängender Graph ohne Kreislinien, also ein Baum. Da ein Baum irgendeine Endkante besitzt, so sei PQ eine solche Endkante von M mit dem Endpunkt P (von M). Diejenige $(n-1)$-dimensionale Seite von Π, die senkrecht zu PQ ist und Q enthält, ist also ein $(n-1)$-dimensionales Parallelotop $\bar{\Pi}$. Die Menge $\bar{M}$, die aus M durch Wegnehmen von PQ entsteht, ist wieder eine zusammenhängende Menge von $n-1$ Kanten aus $\bar{\Pi}$, wobei keine zwei von ihnen parallel sind. Laut der Induktionsvoraussetzung bildet $\bar{M}$ den Kathetenbaum eines rechtwinkligen $(n-1)$-Simplex $\bar{\Sigma}$. Der Eckpunkt Q ist auch ein Eckpunkt von $\bar{\Sigma}$. Da P in der Hyperebene ω von $\bar{\Sigma}$ nicht enthalten ist, bilden die Eckpunkte von $\bar{\Sigma}$ zusammen mit P die Eckpunktenmenge eines n-Simplex Σ. Bezeichnen wir für einen Augenblick $P = O_n$, $Q = O_{n-1}$ und die übrigen Eckpunkte von Σ mit $O_0, \ldots, O_{n-2}$; die Seite von Σ gegenüber O_j sei mit ω_j bezeichnet, also $\omega_n = \omega$. Da O_nO_{n-1} zu ω_n senkrecht ist, ist ω_n zu ω_j senkrecht für $n-1 \neq j \neq n$. O_nO_{n-1} ist also die einzige Kante mit dem Endpunkt O_n, der gegenüber ein spitzer Winkel ist. Aus Lemma 2, auf die Hyperebenen von $\omega_i, \omega_j, \omega_n$ mit $n \neq i \neq j \neq n$ angewandt, folgt, dass die Qualität der inneren Winkel von ω_i, ω_j dieselbe ist wie die der inneren Winkel $\omega_i \cap \omega_n$, $\omega_j \cap \omega_n$ von $\bar{\Sigma}$. Hieraus folgt, dass von den Kanten in $\bar{\Sigma}$ genau gegenüber denjenigen von $\bar{M}$ spitze Winkel in Σ liegen, wobei gegenüber den anderen rechte Winkel sind. Σ ist somit rechtwinklig mit dem Kathetenbaum M, w. z. b. w.

Aus diesem Satz folgt sogleich:

Satz 9. *Zwei verschiedene Katheten eines rechtwinkligen n-Simplex sind zueinander senkrecht.*

Anmerkung. Hieraus folgt, dass das Parallelotop Π durch Σ eindeutig bestimmt ist.

Satz 10. *Es sei Σ ein rechtwinkliges n-Simplex mit Eckpunkten $O_0, \ldots, O_n$. Ist k_j der Grad (d. i. die Anzahl von Katheten, die mit O_j inzident sind) von O_j im Kathetenbaum K_Σ, so ist der Punkt*

$$P = \left(1 - \frac{k_0}{2}\right) O_0 + \left(1 - \frac{k_1}{2}\right) O_1 + \ldots + \left(1 - \frac{k_n}{2}\right) O_n \tag{3}$$

$\left[\text{wobei } \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{k_j}{2}\right) = 1 \text{ ist}\right]$ *der Mittelpunkt der umgeschriebenen Hyperkugel von Σ.*

Den Beweis werden wir wieder durch Induktion nach n führen. Für $n = 2$, falls O_0O_2 senkrecht zu O_1O_2 ist, gilt $k_0 = k_1 = 1$, $k_2 = 2$, sodass wirklich $P = \frac{1}{2}O_0 + \frac{1}{2}O_1$ ist.

Es sei jetzt $n > 2$ und nehmen wir an, der Satz ist für sämtliche k-Simplexe mit $2 \leqq k < n$ richtig. Wir können voraussetzen, dass O_n als Eckpunkt von Σ den Grad 1 in K_Σ hat:

$$k_n = 1\,, \tag{4}$$

und dass die einzige Kathete von O_n aus $O_n O_{n-1}$ ist. Ist $\bar{K}_{\bar{\Sigma}}$ der Kathetenbaum der Seite $\bar{\Sigma}$ in ω_n (gegenüber O_n), sodass $\bar{K}_{\bar{\Sigma}}$ aus K_Σ durch Auslassen der Kante $O_n O_{n-1}$ entsteht, so gilt für die Grade $\bar{k}_j$ ($j < n$) der Eckpunkte O_j in $\bar{K}_{\bar{\Sigma}}$:

$$\bar{k}_j = k_j \quad \text{für} \quad j \leqq n-2\,, \quad \bar{k}_{n-1} = k_{n-1} - 1\,. \tag{5}$$

Laut der Induktionsvoraussetzung ist der Punkt

$$\bar{P} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\bar{k}_j}{2}\right) O_j \tag{6}$$

der Mittelpunkt der umgeschriebenen Hyperkugel von $\bar{\Sigma}$, also Mittelpunkt derjenigen Seite $\bar{\Pi}$ des Parallelotops Π (dessen Eckpunktenmenge die Eckpunktenmenge von Σ nach dem Satz 8 enthält), die in ω_n liegt. Für den Mittelpunkt P von Π, der also Mittelpunkt der umgeschriebenen Hyperkugel von Σ ist, gilt ($\overrightarrow{O_n O_{n-1}}$ ist parallel zu $\overrightarrow{\bar{P}P}$, doch zweimal so gross)

$$O_n - O_{n-1} = 2(P - \bar{P})\,, \quad \text{sodass}$$

$$P = \bar{P} + \frac{1}{2} O_n - \frac{1}{2} O_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\bar{k}_j}{2}\right) O_j + \frac{1}{2} O_n - \frac{1}{2} O_{n-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{k_j}{2}\right) O_j$$

wegen (4)—(6), w. z. b. w.

Satz 11. *Der Mittelpunkt P der umgeschriebenen Hyperkugel eines rechtwinkligen n-Simplex Σ ist für $n \geqq 2$ nie ein innerer Punkt von Σ. P liegt auf der „Oberfläche" von Σ dann und nur dann, wenn der Kathetenbaum eine „Schlange" (d. h. homäomorph mit einer Strecke) ist. In diesem Fall liegt P im Mittelpunkt der (einzigen) längsten Kante.*

Anmerkung. Der letzte Fall wurde in [1] untersucht. Es wurde gezeigt, dass das n-Simplex von diesem Typus das einzige n-Simplex ist, dessen sämtliche zweidimensionale Seiten rechtwinklige Dreiecke sind (Satz 34). Auch der Satz 8 wurde für diesen Spezialfall bewiesen.[6])

Beweis des Satzes 11. Da jeder Baum mit $n + 1$ Knotenpunkten für $n > 1$ mindestens einen Knotenpunkt vom Grade $\geqq 2$ besitzt, ist der erste Teil des Satzes wegen (3) richtig. Aus (3) folgt auch, dass eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass P auf der Oberfläche von Σ liegt, ist:

[6]) Dieses n-Simplex wurde von L. SCHLÄFLI, Gesammelte Mathematische Abhandlungen Bd I. (Basel 1950), S. 243, untersucht und „Orthoschem" genannt.

für $j = 0, 1, \ldots, n$ gilt $1 \leqq k_j \leqq 2$. Doch der einzige Baum, der diese Bedingung erfüllt, ist die „Schlange", die genau zwei Knotenpunkte A, B ersten Grades und alle übrigen zweiten Grades besitzt. Nach (3) liegt also P im Mittelpunkt der Kante AB, die somit (als Durchmesser der umgeschriebenen Hyperkugel) die (einzige) längste Kante im Simplex ist. Dadurch ist der Satz bewiesen.

Bevor wir weitere Sätze formulieren werden, teilen wir die Eckpunkte eines rechtwinkligen n-Simplex in drei Klassen, je nachdem der Grad des zugehörigen Eckpunktes in K_Σ 1, 2 oder > 2 ist. Die Eckpunkte der ersten Klasse (mit Grad 1) werden Hypotenuseneckpunkte bezeichnet, diejenigen der zweiten Klasse (mit Grad 2) indifferente Eckpunkte, der dritten Klasse (mit Grad > 2) Katheteneckpunkte. Der Hypotenusenraum ist also genau mit den Hypotenuseneckpunkten inzident. Wir werden noch den Begriff der Hauptseite bzw. Hauptraumes einführen: es ist diejenige Seite bzw. Raum, die durch sämtliche Hypotenusen- und Katheteneckpunkte bestimmt ist. Nur die indifferenten Eckpunkte sind also in dem Hauptraum nicht enthalten.

Satz 12. *Die Hauptseite eines rechtwinkligen n-Simplex Σ ist wieder ein rechtwinkliges Simplex,*[7] *das keine indifferenten Eckpunkte, jedoch dieselben Hypotenusen- und Katheteneckpunkte wie Σ besitzt. Der Graph der Hauptseite (und ihr Kathetenbaum) ist dem Graphen (und Kathetenbaum) von Σ homäomorph.*

Beweis. Folgt aus dem Satz 7, wenn man den Graphen der Hauptseite bildet.

Satz 13. *Der Mittelpunkt P der umgeschriebenen Hyperkugel eines rechtwinkligen n-Simplex Σ liegt in der Hauptseite von Σ, wo er mit dem Mittelpunkt der der Hauptseite umgeschriebenen (bzw. wenigerdimensionalen) Hyperkugel identisch ist. P ist auch im linearen Raum enthalten, der den durch die Katheteneckpunkte bestimmten Raum mit dem Schwerpunkt der Hypotenusenseite von Σ verbindet (gibt es keinen Katheteneckpunkt, ist P mit dem Schwerpunkt der Hypotenusenseite identisch).*

Beweis. Folgt aus dem Satze 12 durch Analysis der Formel (3).

Anmerkung. Aus (3) folgt auch, dass die Hauptseite von Σ die Seite kleinster Dimension von Σ ist, deren linearer Raum den Mittelpunkt der umgeschriebenen Hyperkugel enthält.

Satz 14.[8] *Die Hypotenusenseite H eines rechtwinkligen n-Simplex ist spitzwinklig. Sie bildet mit jeder Seite $\bar{\Sigma}$, für die $H \cap \bar{\Sigma} \neq \emptyset$ und $H \neq H \cap \bar{\Sigma} \neq \bar{\Sigma}$*

[7]) Um keine Ausnahmen zuzulassen, werden wir eindimensionale Simplexe als rechtwinklig und gleichzeitig spitzwinklig betrachten. Diese Simplexe erfüllen auch die Sätze 8 und 10.

[8]) In diesem Satz ist der Begriff der Seite nicht nur auf $(n - 1)$-dimensionale Seiten beschränkt.

gilt, einen spitzen Winkel. Eine spitzwinklige Seite $\bar{\Sigma}$ von Σ besitzt dann und nur dann die Eigenschaft, dass jede zwei grössere Seiten von Σ, deren Durchschnitt $\bar{\Sigma}$ ist, einen spitzen Winkel einander bilden, wenn diese Seite in der Hypotenusenseite von Σ enthalten ist.

Beweis. Es genügt den zweiten Teil des Satzes zu beweisen. Diese Behauptung folgt jedoch aus dem Satze 6 und daraus, dass in einem Baum B eine Untermenge U der Knotenpunktmenge dann und nur dann die folgende Eigenschaften (a), (b), besitzt, falls jeder Knotenpunkt aus U Endpunkt des Baumes ist [C_U sei die Menge der übrigen Knotenpunkte]:

a) $C_U(B)$ ist zusammenhängend,

b) jede zwei Knotenpunkte aus U sind durch einen Weg durch Knotenpunkte aus C_U verbindbar.

Zum Schluss werden wir noch einige Eigenschaften des rechtwinkligen n-Simplex Σ erwähnen. So hat der Graph jeder Seite von Σ die Eigenschaft, das sein jedes Glied ([2], S. 225) ein vollständiger Graph ist. Nennen wir noch ein m-Simplex rechtwinklig im engeren Sinne, falls es rechtwinklig ist und seine Hypotenusenseite die Dimension $m - 1$ hat, so hat ein solches m-Simplex einen einzigen Katheteneckpunkt (und keinen indifferenten Eckpunkt), sodass der Kathetenbaum durch m zueinander senkrechte Strecken gebildet ist. Für einen Eckpunkt A eines rechtwinkligen n-Simplex Σ kann man nach der im engeren Sinne rechtwinkligen Seite von Σ höchster Dimension $k(A)$ fragen, die A als Katheteneckpunkt besitzt. Es zeigt sich, dass $k(A)$ dem Grad von A im Kathetenbaum K_Σ gleich ist. Das erlaubt auch, die Hypotenusen-, Katheten- und indifferenten Eckpunkte von Σ geometrisch zu charakterisieren. Speziell ist also ein Eckpunkt A von Σ dann und nur dann ein Hypotenuseneckpunkt, falls keine rechtwinklige zweidimensionale Seite (Dreieck) von Σ mit dem rechten Winkel bei A existiert.

LITERATUR

[1] *M. Fiedler:* Geometrie simplexu v E_n I—III, Časopis pro pěst. mat. *79* (1954), 297 bis 320; *80* (1955), 462—476; *81* (1956), 182—223.

[2] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

Резюме

О КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ УГЛОВ СИМПЛЕКСА

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler), Прага.

(Поступило в редакцию 11/VIII 1956 г.)

Под качеством угла евклидова пространства в статье подразумевается свойство угла быть острым, прямым или тупым. В первой части изучаются качественные свойства внутренних углов k-мерных граней n-симплекса ($2 \leqq k \leqq n$), если дано качество всех внутренних углов (между $(n - 1)$-мерными гранями) симплекса, при помощи графа G, ребра которого обозначены знаками $+$ и $-$ следующим образом:

$(n - 1)$-мерным граням симплекса соответствуют вершины графа G; две вершины из G соединены ребром тогда и только тогда, если внутренний угол соответствующих граней симплекса не является прямым, причем ребро считается положительным, если этот угол острый, и отрицательным, если он тупой. В работе [1] было доказано, что множество положительных ребер (вместе со всеми $n + 1$ вершинами) связно и что, наоборот, для каждого графа G с $n + 1$ вершинами ребра которого снабжены знаками $+$ и $-$ и положительные ребра которого образуют (вместе с вершинами) связное множество, существует n-симплекс, графом которого является как раз G.

В статье показано (теорема 1), что в определенных случаях можно, пользуясь только графом G, определить качество внутренних углов в гранях симплекса. Далее, справедливы утверждения, что каждая грань нетупоугольного n-симплекса (в котором внутренние углы $(n - 1)$-мерных граней сплошь острые или прямые) является также нетупоугольной (теорема 5) и что каждая грань остроугольного n-симплекса — также остроугольна (теорема 4). В случае нетупоугольного n-симплекса можно при помощи графа G простым способом определить качество любого внутреннего угла любой грани.

Во втором параграфе исследуются прямоугольные n-симплексы, т. е. n-симплексы, обладающие максимальным числом $\left(\text{а именно } \binom{n}{2}\right)$ прямых внутренних углов (остальные — острые). Графом прямоугольного n-симплекса является дерево, состоящее только из положительных ребер. Вводится определение катетов прямоугольного n-симплекса: это те ребра, противолежащий угол которых острый. Множество катетов вместе с вершинами образует также дерево (с n ребрами), эквивалентное графу G (т. наз. дерево катетов). В теореме 8 показано, что для каждого прямоугольного n-симплекса существует (в точности один) n-мерный прямоугольный

параллелепипед так, что все вершины n-симплекса являются одновременно и вершинами параллелепипеда, причем из числа ребер n-симплекса катеты и только катеты служат одновременно ребрами параллелепипеда. Наоборот, если связное множество n ребер n-мерного прямоугольного параллелепипеда обладает тем свойством, что никакие два из этих ребер не являются параллельными, то оно представляет множество (дерево) катетов прямоугольного n-симплекса. Далее, справедливо утверждение, что барицентрические координаты центра описанной сферической гиперповерхности прямоугольного n-симплекса зависят только от степеней вершин графа G (теорема 10, уравнение (3)). В частности, этот центр лежит в каждой $(n-1)$-мерной грани, которой в G соответствует вершина степени 2. В нескольких остальных теоремах исследуются, помимо прочего, свойства грани гипотенузы, т. е. грани, соединяющей концевые вершины дерева катетов.