Svatopluk Krupička

О целых точках в болеемерных выпуклых телах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 4, 524–552

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100266

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

О ЦЕЛЫХ ТОЧКАХ В БОЛЕЕМЕРНЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛАХ

СВАТОПЛУК КРУПИЧКА (Svatopluk Krupička), Прага.

(Поступило в редакцию 23/VI 1956 г.)

Для числа целых точек в r-мерных эллипсоидах известны формулы $A(x) = x^{\frac{r}{2}}V + P(x)$, где V означает объем „основного" эллипсоида. Если x стремится к бесконечности, то для остатка $P(x)$ имеем верхнюю оценку $P(x) = O(x^{\frac{r}{2}-\frac{r}{r+1}})$ и нижнюю оценку $P(x) = \Omega(x^{\frac{r-1}{4}})$. В настоящей работе автор доказывает справедливость аналогичных формул для числа целых точек в более общих выпуклых r-мерных телах.

1. Введение и постановка задачи

Для числа целых точек $A(x)$ в действительном замкнутом r-мерном эллипсоиде $Q(u) \leqq x$, $r \geqq 2$ известны некоторые оценки, независящие от числовых свойств коэффициентов соответствующей положительно определенной квадратной формы $Q(u) = Q(u_1, \ldots, u_r)$ (с определителем D).

Прежде всего [1]

$$A(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + O(x^{\frac{r}{2}-\frac{r}{r+1}})_{x\to+\infty}\,, \tag{1}$$

далее, если положить

$$P(x) = A(x) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\,, \tag{2}$$

существуют две положительные постоянные C_1, C_2 так, что оба неравенства

$$\pm P(x) > C_1 x^{\frac{r-1}{4}} \tag{3}$$

имеют решение в любом интервале вида $\tau \leqq x \leqq \tau + C_2\sqrt{\tau}$, $\tau > 1$ [2], откуда

$$P(x) = \Omega(x^{\frac{r-1}{4}})_{x\to+\infty} \,. \tag{4}$$

Согласно результатам Ярника [3], имеют место одинаковые оценки и в случае плоских областей ($r = 2$), ограниченных более общими выпуклыми кривыми. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что аналогичное обобщение можно провести и при $r > 2$.

Пусть $r \geqq 2$ — натуральное число; точки r-мерного пространства E_r будем обозначать через $u = (u_1, \ldots, u_r)$ и т. под. Пусть $K \subset E_r$ — выпуклое тело (т. е. компактное выпуклое множество), содержащее начало $(0, 0, \ldots, 0)$ в качестве внутренней точки. Пусть L — выпуклая гиперповерхность, ограничивающая тело K. Для $x \geqq 0$ символом $K(x)$, соотв. $L(x)$ обозначим множество точек $(\sqrt{x}u_1, \ldots, \sqrt{x}u_r)$, где $(u_1, \ldots, u_r) \in K$, соотв. $(u_1, \ldots, u_r) \in L$ (гомотетичное соответствие по отношению к началу). Еще определим функцию $Q(u)$ следующим образом: $Q(u) = 1$ для $u \in L$,
$Q(\sqrt{x}u_1, \ldots, \sqrt{x}u_r) = xQ(u_1, \ldots, u_r)$ для $x \geqq 0$, следовательно, $K(x)$, соотв. $L(x)$ есть множество именно тех точек u, для которых $Q(u) \leqq x$, соотв. $Q(u) = x$.

О гиперповерхности L будем предполагать, что любая прямая пересекает ее самое большее в двух точках. Кроме этого будем о ней предполагать еще следующее: существуют числа $\varepsilon > 0$, $t > 0$, $T > 0$ так, что справедливо следующее утверждение: если произведем произвольное преобразование ω координат, повернув оси на некоторый угол так, чтобы ось u_1 заняла положение ξ, то ,,площадь" сечения тела K гиперплоскостью, перпендикулярной ξ, явится непрерывной функцией $S_\omega(\xi)$, определенной в некотором конечном интервале $\langle \xi'_\omega, \xi_\omega \rangle$ и имеющей в $(\xi'_\omega, \xi_\omega)$ непрерывные производные вплоть до r-того порядка. Если через $\bar{\omega}$ обозначить преобразование, возникшее из ω поворотом (на угол π), при котором ось ξ изменит только ориентацию, то, очевидно, будут выполняться следующие соотношения:

$$\xi_{\bar{\omega}} = -\xi'_\omega \,, \quad \xi'_{\bar{\omega}} = -\xi_\omega \,,$$

$$S_\omega(\xi) = S_{\bar{\omega}}(-\xi) \,, \quad S^{(k)}_\omega(\xi) = (-1)^k S^{(k)}_{\bar{\omega}}(-\xi) \,, \quad k = 1, 2, \ldots, r \,.$$

Выберем ε настолько малым, чтобы было $\varepsilon < \xi_\omega$ для всех ω, затем пусть имеют место соотношения:

a) при $\xi_\omega - \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\omega$

$$1.\ S_\omega(\xi) = a_{1\omega}(\xi_\omega - \xi)^{\frac{r-1}{2}} + a_{2\omega}(\xi_\omega - \xi)^{\frac{r+1}{2}} + \ldots +$$
$$+ a_{[\frac{r}{2}]+1,\omega} + (\xi_\omega - \xi)^{\frac{r-1}{2}+[\frac{r}{2}]} + \Phi_\omega(\xi) \,;$$

2. $\Phi_\omega(\xi)$ имеет непрерывные производные вплоть до r-ого порядка, причем

$$\Phi_\omega(\xi_\omega) = \Phi'_\omega(\xi_\omega) = \ldots = \Phi^{(r-1)}_\omega(\xi_\omega) = 0\,,$$

3. $\Phi^{(r)}_\omega(\xi)$ монотонна и ограничена, $|\Phi^{(r)}_\omega(\xi)| < T$,

4. $t < a_{1\omega} < T$ и одновременно $|a_{l\omega}| < T$ при $l = 2, 3, \ldots, [\frac{1}{2}r] + 1$.

в) Пусть в интервале $-\xi_{\bar\omega} + \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\omega - \varepsilon$, или же $\xi'_\omega + \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\omega - \varepsilon$, $S^{(r)}_\omega(\xi)$ имеет самое большее T интервалов монотонности и всюду в этом интервале $|S^{(r)}_\omega(\xi)| < T$.

Эти условия, например, выполнены, если K представляет собой сферу с радиусом, равным $1, u_1^2 + \ldots + u_r^2 \leqq 1$, потому что в таком случае $\xi_\omega = 1$, $S_\omega(\xi) = (\xi_\omega - \xi)^{\frac{r-1}{2}} . (\xi_\omega + \xi)^{\frac{r-1}{2}}$ и аналогично в случае эллипсоида.

И в более общих случаях оказывается вполне естественным ожидать, что $S_\omega(\xi)$ можно писать в виде разложения, приведенного в а1), как видно из следующего рассуждения.

Возьмем координатную систему ω; координаты обозначим $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$. Пусть $P \equiv (\xi_\omega, \eta_{1\omega}, \ldots, \eta_{r-1\omega})$ — точка касания гиперплоскости $\xi = \xi_\omega$. Ради простоты предположим далее, что L — аналитическая гиперповерхность, заданная в окрестности точки P явно уравнением $\xi = \xi(\eta_1, \ldots, \eta_{r-1})$, и положим $\xi_\omega - \xi = v$, $\eta_{i\omega} - \eta_i = w_i$, $i = 1, \ldots, r-1$. Тогда в окрестности точки P будет, очевидно, справедливым разложение $\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta_i}\right)_{\eta_j = \eta_{j\omega}} = 0\right)$

$$v = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{r-1} (b_{ik})_\omega\, w_i w_k + \sum_{i_1 + \ldots + i_{r-1} > 2} c_{i_1, \ldots i_{r-1}}\, w_1^{i_1} \ldots w_{r-1}^{i_{r-1}}$$

где коэффициенты $(b_{ik})_\omega = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta_i \partial \eta_k}\right)_{\eta_j = \eta_{j\omega}}$ являются составляющими второго основного тензора.

Теперь построим в точке P все возможные единичные касательные векторы $\vec{t}$ к L; из дифференциальной геометрии известно, что при выполнении перечисленных условий

1. к каждому касательному вектору существует одна единственная геодезическая кривая на гиперповерхности L, проходящая через точку P.

2. среди касательных векторов находятся взаимно перпендикулярные единичные векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{r-1}$, определяющие главные направления в точке P; им соответствуют главные кривизны $1/R_1, \ldots, 1/R_{r-1}$, являющиеся нормальными кривизнами в главных направлениях (т. е. — вплоть до знака — первыми кривизнами соответствующих геодезических)[1].

Если все отнести к главным направлениям (заставим оси $\eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$ совпасть с главными направлениями $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{r-1}$ и если взять дуги геодезической в качестве параметра, представится вторая основная форма в виде)[2] $ds^2 \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\cos^2 \lambda_i}{R_i}$, $\lambda_i \equiv \sphericalangle(\vec{t}, \vec{e}_i)$, или же будет $v = \frac{s^2}{2} \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\cos^2 \lambda_i}{R_i} + s^3(\ldots)$, если измерять s в направлении $\vec{t}(\lambda_i)$ от точки P.

---

[1]) Если все главные кривизны попарно отличны друг от друга, то главные направления определяются однозначно.

[2]) См., например, E. Cartan: **La Géométrie des espaces de Rieman, Paris 1925**, стр. 45.

По предположению L является выпуклой гиперповерхностью, обладающей тем свойством, что каждая прямая пересекает ее не более чем в двух точках. Поэтому будет $\frac{1}{R_i} \geqq 0$, $i = 1, \ldots, r-1$, значит, основная форма будет положительно определенной, полуопределенной, возможно, нулевой. Предположим, что она положительно определенна, введя сферические координаты ($\varrho \geqq 0$)

$$w_i = \varrho \cos \vartheta_i \prod_{j=1}^{i-1} \sin \vartheta_j \ , \quad v = \varrho \sin \vartheta_{r-1} \prod_{j=1}^{r-1} \sin \vartheta_j \ ,$$

$$0 < \vartheta_i \leqq \pi \quad \text{для} \quad i < r-1 \ , \quad -\pi < \vartheta_{r-1} \leqq \pi \ , \tag{*}$$

получим уравнение в виде

$$v = B(\vartheta)\, \varrho^2 + \sum_{k=3}^{\infty} C_k(\vartheta)\, \varrho^k \ , \quad B(\vartheta) = B(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{r-1}) > 0 \ .$$

Это уравнение имеет при данном ϑ и положительном v два решения $\varrho_1(\vartheta)$, $\varrho_2(\vartheta)$, обращающиеся в нуль при $v = 0$:

$$\varrho_1(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k v^{\frac{k}{2}} \ , \quad \varrho_2(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k v^{\frac{k}{2}} \ , \quad \alpha_k = \alpha_k(\vartheta) \ , \quad \alpha_1 > 0 \ .$$

Одновременно легко видно, что $-\varrho_2(\vartheta)$ есть решение $\varrho_1(\bar{\vartheta})$, соответствующее направлению $\bar{\vartheta}$, обратному к ϑ.

Искомый объем $S_\omega(\xi)$ ($\xi_\omega - \xi = v$) будет поэтому равен интегралу

$$\int\int \ldots \int \varrho_1^{r-1}(\vartheta)\, D(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta_1 \ldots \mathrm{d}\vartheta_{r-1} \ , \quad D(\vartheta) = \sin^{r-2} \vartheta_1 \sin^{r-3} \vartheta_2 \ldots \sin \vartheta_{r-2}$$

над областью (*). Но это, очевидно, можно записать также в виде интеграла

$$\int\int \ldots \int (\varrho_1^{r-1}(\vartheta) + \varrho_1^{r-1}(\bar{\vartheta}))\, D(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta_1 \ldots \mathrm{d}\vartheta_{r-1}$$

над областью $0 < \vartheta_i < \pi$ ($i = 1, \ldots, r-1$). Так как

$$\varrho_1(\vartheta) = \alpha_1 v^{\frac{1}{2}} + \alpha_2 v + \alpha_3 v^{\frac{3}{2}} + \ldots \ , \quad \varrho_1(\bar{\vartheta}) = \alpha_1 v^{\frac{1}{2}} - \alpha_2 v + \alpha_3 v^{\frac{3}{2}} - \ldots \ ,$$

то $S_\omega(\xi)$ будет иметь, очевидно, форму

$$v^{\frac{r-1}{2}} (\beta_0 + \beta_1 v + \beta_2 v^2 + \ldots) \ , \quad v = \xi_\omega - \xi \ .$$

Но с другой стороны, считая η_i расположенными в главных направлениях, обозначив радиус-вектор общей точки поверхности пересечения, измеряемый от точки ($\xi_\omega - v, 0, \ldots, 0$), через r и положив, наконец, $\eta_i = r \cos \lambda_i$, $i = 1, \ldots, r-1$, получим, учитывая еще, что $\lim\limits_{s \to 0} \frac{r}{s} = 1$ $\left(\lim\limits_{s \to 0} \frac{\varrho}{s} = 1 \ , \ \lim\limits_{s \to 0} \frac{v}{s} = 0\right)$,

$$v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\eta_i^2}{R_i} + \tau \ , \quad \lim_{r \to 0} \frac{\tau}{r^2} = 0 \ .$$

Следовательно, пренебрегая величиной τ, получаем квадрику $\sum\limits_{i=1}^{r-1} \frac{\eta_i^2}{2vR_i} = 1$, гомотетичную индикатрисе Дюпена,[3]) которая при наших предположениях будет представлять собой ($r-1$)-мерный эллипсоид. Ее „площадь“ будет равна

---

[3]) Для $r = 3$ этот результат выведен в книге V. Hlavatý: Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet (Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей и тензорное исчисление), Прага 1937, стр. 295.

$$S_{0\omega}(\xi) = Cv^{\frac{r-1}{2}} \prod_{i=1}^{r-1} R_i^{\frac{1}{2}} = C \frac{v^{\frac{r-1}{2}}}{\underset{(r-1)}{K}^{\frac{1}{2}}}, \quad v = \xi_\omega - \xi ,$$

где $\underset{(r-1)}{K}$ есть $(r-1)$-ая кривизна гиперповерхности L[4]) (тотальная кривизна) и $C > 0$ — абсолютная постоянная; следовательно,

$$\lim_{v \to 0} \frac{S_\omega(\xi)}{v^{\frac{r-1}{2}}} = \beta_0 = a_{1\omega} = \frac{C}{\underset{(r-1)}{K}^{\frac{1}{2}}}, \quad v = \xi_\omega - \xi .$$

Итак, мы видим, что требование $0 < t < a_{1\omega} < T$ сводится к условию о тотальной кривизне $0 < t' < \underset{(r-1)}{K} < T'$, где t', T' — положительные постоянные, независящие от ω.

Но $\underset{(r-1)}{K} = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{1}{R_i} > 0 \Rightarrow \frac{1}{R_i} \neq 0$, $i = 1, \ldots, r-1$ и, следовательно, должно быть $B(\vartheta) > 0$.

Тот же результат получаем и в случае параметрического задания гиперповерхности L в окрестности точки P. В то же время наблюдаем, что вместо аналитичности достаточно поставить условие, чтобы существовали непрерывные частные производные достаточно большого порядка (см. предположение о L в тексте).

Обозначим еще объем тел $K(x)$ и K, соответственно через $V(x)$ и V так что, ввиду определения $K(x)$, имеем

$$V(x) = Vx^{\frac{r}{2}} . \tag{5}$$

В дальнейшей части работы будет исследоваться количество целых точек в теле $K(x)$, т. е. в замкнутой области $Q(u) \leqq x$, ограниченной гиперповерхностью $L(x)$.

2. Основное тождество

Обозначим символом $A(x)$ число целых точек в теле $K(x)$; $A(x)$ имеет в любом ограниченном интервале конечное число точек разрыва, так что существуют интегралы

$$A_p(x) = \int_0^x A_{p-1}(y)\, \mathrm{d}y , \quad A_0(x) = A(x) , \quad p = 1, 2, \ldots$$

являющиеся, начиная с $A_1(x)$ непрерывными функциями x. Но одновременно $A(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1$; под этим разумеется сумма стольких единиц, сколькими спо-

[4]) Определения скаляров кривизны для болеемерных многообразий см. в работе F. Nožička: Skaláry křivosti nadplochy vnořené do eukleidovského prostoru a jejich geometrický význam (Скаляры кривизны гиперповерхности, погруженной в евклидово пространство и их геометрическое значение), Čas. pro pěst. matematiky, 77 (1952), 347.

собами можно удовлетворить неравенству $Q(m) \leqq x$, $m = (m_1, \ldots, m_r)$, где m_i — целые числа. Интегрируя, получаем отсюда выражения для функций $A_p(x)$:

$$A_p(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} \frac{(x - Q(m))^p}{p!}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Эти зависимости можно преобразовать при помощи формулы Дирихле, которую выгодно здесь сформулировать в несколько видоизмененной форме:

Лемма 1. *Пусть K — выпуклое тело в E_r, граница которого L пересекается с каждой прямой, параллельной первой координатной оси, самое большее в двух точках. Пусть $f(u) = f(u_1, \ldots, u_r)$ — вещественная функция от r вещественных переменных, обладающая следующими свойствами:*

1. *Существует $A > 0$ так, что $f(u) = 0$ для $\max\limits_{1 \leqq i \leqq r} |u_i| > A$.*

2. *f непрерывна за исключением, может быть, точек множества L.*

3. *Существует число B так, что изменение функции f по отношению к u_i (при произвольно выбранных величинах $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r$) меньше B.*

Тогда

$$\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(f(m_1+, m_2, \ldots, m_r) + f(m_1-, m_2, \ldots, m_r)\right) =$$

$$= \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} \int \cdots \int_{E_r} f(u_1, \ldots, u_r) \cos 2\pi h_1 u_1 \ldots \cos 2\pi h_r u_r \, \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_r{}^{5)} . \tag{7}$$

Если f, кроме того, непрерывна во всех целых точках, то левая часть в (7), конечно, равна $\sum\limits_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum\limits_{m_r=-\infty}^{+\infty} f(m_1, \ldots, m_r)$.

Доказательство. Случай $r = 1$ известен. Далее методом индукции от $r - 1$ к r: положим

$$\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2}(f(m_1 +, u_2, \ldots, u_r) + f(m_1-, u_2, \ldots, u_r)) = f_1(u_2, \ldots, u_r) .$$

Для $r = 1$ эта формула общеизвестна; следовательно,

$$f_1(u_2, \ldots, u_r) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} F_{h_1}(u_2, \ldots, u_r) , \tag{8}$$

где

$$F_{h_1}(u_2, \ldots, u_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2, \ldots, u_r) \cos 2\pi h_1 u_1 \, \mathrm{d}u_1 .$$

[5]) $f(u_1 +, u_2, \ldots, u_r) = \lim\limits_{v_1 \to u_1+} f(v_1, u_2, \ldots, u_r)$.

Функция F_{h_1} имеет, прежде всего, свойства, аналогичные свойствам 1,3 функции f и можно легко доказать, что F_{h_1} непрерывна всюду. Следовательно, по предположению индукции

$$\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_r=-\infty}^{+\infty} F_{h_1}(m_2, \dots, m_r) =$$

$$= \sum_{h_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} \int_{E_{r-1}} \cdots \int F_{h_1}(u_2, \dots, u_r) \cos 2\pi h_2 u_2 \dots \cos 2\pi h_r u_r \,.\, \mathrm{d}u_2 \dots \mathrm{d}u_r \,. \quad (9)$$

Согласно (8)

$$\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_r=-\infty}^{+\infty} f_1(m_2, \dots, m_r) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_r=-\infty}^{+\infty} F_{h_1}(m_2, \dots, m_r) \quad (10)$$

(потому что сумма по $m_2, \dots, m_r$ является в сущности суммой конечного числа слагаемых). Из (10), (9) следует сразу же (7).

Определим теперь функции $f_p(x, u_1, \dots, u_r)$ переменных $x, u_1, \dots, u_r$ следующим образом:

$$f_0(x, u_1, \dots, u_r) = 1 \,,$$

$$f_p(x, u_1, \dots, u_r) = \frac{(x - Q(u))^p}{p!}\,; \quad p = 1, 2, \dots \quad \text{для } Q(u) \leqq x \,, \quad (11a)$$

$$f_p(x, u_1, \dots, u_r) = 0 \,, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad \text{для } Q(u) > x \,. \quad (11b)$$

Определенные этими соотношениями функции переменных $u_1, \dots, u_r$ (при фиксированном $x > 0$) обладают всеми свойствами, перечисленными в лемме 1: очевидно, что условия 1,2 выполняются; предположение 3 выполнено в случае функции f_0, потому что, как видно, $\operatorname*{Var}_{(u_i)} f_0 \leqq 2$, а также и в случае f_p ($p \geqq 1$) вследствие рекурсивной формулы

$$f_p(x, u_1, \dots, u_r) = \int_0^x f_{p-1}(y, u_1, \dots, u_r)\, \mathrm{d}y, \; p \geqq 1.$$

Кроме того функция $f_p(x, u_1, \dots, u_r)$, $p \geqq 1$, имеет вследствие выпуклости гиперповерхности $L(x)$ по отношению к каждой переменной u_i два интервала монотонности и является, следовательно, функцией с конечным изменением независимо от остальных переменных.[6]) Если в случае функции f_0 исключить те значения x, для которых на $L(x)$ находится хоть одна целая точка, будет функция $f_p(x, u_1, \dots, u_r)$ непрерывной даже во всех целых точках для всех $p \geqq 0$.

Выразив функции $A(x)$, соответственно $A_p(x)$, при помощи только что введенных функций и применив Лемму 1, получим, наконец, основные тождества:

---

[6]) Очевидно, будет всегда $\operatorname*{Var}_{(u_i)} f_p(x, u_1, \dots, u_r) \leqq 2x^p/p!$

Теорема 1. *При* $x \geqq 0$

$$A_p(x) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} R_p(x, h_1, \dots, h_r)\,, \quad p = 1, 2, \dots\,, \tag{12a}$$

$$A(x) = \lim_{x' \to x+} \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} R_0(x', h_1, \dots, h_r)\,, \tag{12b}$$

где

$$R_p(x, h_1, \dots, h_r) =$$

$$= \int_{Q(u) \leqq x} \dots \int \frac{(x - Q(u))^p}{p!} \cos 2\pi h_1 u_1 \dots \cos 2\pi h_r u_r \, \mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}u_r\,, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

При этом для $p = 1, 2, \dots, x \geqq 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} R_p(x, h_1, \dots, h_r) = R_{p-1}(x, h_1, \dots, h_r)\,. \tag{13}$$

Доказательство. Согласно (6) для $p \geqq 1$ будет

$$A_p(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} \frac{(x - Q(m))^p}{p!} = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{m_r=-\infty}^{+\infty} f_p(x, m_1, \dots, m_r)$$

и, следовательно, по Лемме 1

$$A_p(x) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} \int_{Q(u) \leqq x} \dots \int \frac{(x - Q(u))^p}{p!} \cos 2\pi h_1 u_1 \dots$$

$$\dots \cos 2\pi h_r u_r \, \mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}u_r\,.$$

Далее можем сказать следующее: функция $A(x)$ имеет разрыв в точке x тогда и только тогда, если на $L(x)$ находится по крайней мере одна целая точка. Ясно, что таких точек разрыва имеется в каждом ограниченном интервале только конечное число. Вследствие этого к любому $x \geqq 0$ всегда найдется $\eta > 0$ такое, что для любого x', удовлетворяющего неравенствам $0 \leqq x < x' \leqq x + \eta$, $A(x')$ непрерывна, т. е. на $L(x')$ не лежит ни одна целая точка. Можем опять применить Лемму 1:

$$A(x') = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{m_r=-\infty}^{+\infty} f_0(x', m_1, \dots, m_r) =$$

$$= \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} \int_{Q(u) \leqq x'} \dots \int \cos 2\pi h_1 u_1 \dots \cos 2\pi h_r u_r \, \mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}u_r\,. \tag{14}$$

Последнее равенство справедливо при любом x', для которого $0 \leqq x < x' \leqq x + \eta$ так что и

$$A(x) = \lim_{x' \to x+} \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} \int_{Q(u) \leqq x'} \dots \int \cos 2\pi h_1 u_1 \dots \cos 2\pi h_r u_r \, \mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}u_r\,,$$

что требовалось доказать.

Остается еще доказать уравнение (13); возьмем $\Delta > 0$ и образуем частное

$$\frac{R_p(x+\Delta, h_1, \ldots, h_r) - R_p(x, h_1, \ldots, h_r)}{\Delta} =$$

$$= \int \ldots \int_{Q(u) \leqq x} \frac{(x+\Delta-Q(u))^p - (x-Q(u))^p}{\Delta \, . \, p!} \cos 2\pi h_1 u_1 \ldots$$

$$\ldots \cos 2\pi h_r u_r \, \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_r +$$

$$+ \int \ldots \int_{x < Q(u) \leqq x+\Delta} \frac{(x+\Delta-Q(u))^p}{\Delta \, . \, p!} \cos 2\pi h_1 u_1 \ldots \cos 2\pi h_r u_r \, \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_r = q_1 + q_2 \, .$$

Вычисляя $(x + \Delta - Q(u))^p = ((x - Q(u)) + \Delta)^p$ по формуле бинома и заменяя все косинусы во втором интеграле единицей, получаем легко, что при $\Delta \to 0_+$, $q_1 \to R_{p-1}(x, h_1, \ldots, h_r)$ и $q_2 \to 0$. Тот же результат получим и при вычислении левого предела, так что на самом деле существует производная

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} R_p(x, h_1, \ldots, h_r) = R_{p-1}(x, h_1, \ldots, h_r) \, , \quad p \geqq 1 \, .$$

Замечание I. Потому что, очевидно, $R_p(0, h_1, \ldots, h_r) = 0$, то (13) можно заменить равенством

$$R_p(x, h_1, \ldots, h_r) = \int_0^x R_{p-1}(y, h_1, \ldots, h_r) \, \mathrm{d}y \, . \tag{15}$$

Замечание II. По теореме 1 и по формуле (15)

$$A_1(x) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} R_1(x, h_1, \ldots, h_r) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} \int_0^x R_0(y, h_1, \ldots, h_r) \, \mathrm{d}y \, .$$

Но одновременно для всех $x' \in (0, x)$, за исключением конечного числа, справедливо (14), так что в силу (15) будет

$$A_1(x) = \int_0^x \left(\sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} R_0(y, h_1, \ldots, h_r) \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} \int_0^x R_0(y, h_1, \ldots, h_r) \, \mathrm{d}y \, .$$

3. Изучение интегралов $R_p(x, h_1, \ldots, h_r)$

Теперь приступим к изучению выражений $R_p(x, h_1, \ldots, h_r)$ для $x \geqq 0$, для целых $p \geqq 0$ и для всех комбинаций $h_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Прежде всего, как мы уже заметили, для всех $p \geqq 0$

$$R_p(0, h_1, \ldots, h_r) = 0\,, \tag{16}$$

так как область, по которой вычисляется интеграл, вырождается в точку. Следовательно, достаточно предполагать, что $x > 0$.

Все вычисление можно разделить на две части: сначала необходимо вычислить, опираясь на определение, $R_0(x, h_1, \ldots, h_r)$, т. е. найти выражение интеграла $\int\limits_{Q(u)\leqq x} \ldots \int \cos 2\pi h_1 u_1 \ldots \cos 2\pi h_r u_r \, \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_r$; потом последует p-кратное интегрирование, в результате которого получится, ввиду (15), сразу же R_p.

Итак, докажем прежде всего следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть* $h_1, \ldots, h_r$ *— целые числа,* $x > 0$; *тогда*

$$R_0(x, 0, \ldots, 0) = V(x) = V\,.\,x^{\frac{r}{2}}\,, \tag{17}$$

а для $h_1^2 + \ldots + h_r^2 > 0$

$$R_0(x, h_1, \ldots, h_r) = \frac{\eta_h}{2^{r-1}} \sum_{\omega} \sum_{j=1}^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} \frac{c_{j\omega} x^{\frac{r+1}{4} - \frac{j}{2}} \sin(2\pi \sqrt{x} \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2}\,.\,\xi_\omega + \varphi_j)}{(2\pi)^{\frac{r-1}{2}+j} (h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r-1}{4}+\frac{j}{2}}} +$$
$$+ O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}+\frac{1}{4}} (h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{2r+1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}\right), \tag{18}$$

где O разумеется равномерно относительно $x, h_1, \ldots, h_r$, $\{q\} = q - [q]$, $c_{j\omega} = a_{j\omega} \Gamma\left(\frac{r}{2} + j - \frac{1}{2}\right)$, $\varphi_j = -\left(\frac{r-1}{2} + j - 1\right)\frac{\pi}{2}$; η_h *означает вес и* $\eta_h = 2^s$, *если из чисел* $h_1, \ldots, h_r$ *как раз s равно* 0. $\sum\limits_{\omega}$ *означает сумму по всем возможным положениям* ω *оси* ξ, *заданной уравнением преобразования* $\xi = \sum\limits_{i=1}^{r} \frac{\pm h_i u_i}{\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2}}$ *для всех взаимно различных систем* $\pm h_1, \ldots, \pm h_r$ (*таких систем всего* 2^{r-s}).

Доказательство. Равенство (17) тривиально; остается случай $h_1^2 + \ldots + h_r^2 > 0$. В выражении для $R_0(x, h_1, \ldots, h_r)$

$$R_0(x, h_1, \ldots, h_r) = \int\limits_{Q(u)\leqq x} \ldots \int \cos 2\pi h_1 u_1 \ldots \cos 2\pi h_r u_r \, \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_r$$

перейдем к новым переменным, положив $u_i = u_i' \sqrt{x}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Воспользовавшись известной формулой для преобразования произведения косинусов

$$\ldots \cos \alpha_r = \frac{1}{2^r} \sum_{\pm} \cos\,(\pm\, \alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_r)\,,$$

получим

$$R_0(x, h_1, \ldots, h_r) = \frac{\eta_h x^2}{2^r} \sum_{\pm}^{r} I(x, \pm h_1, \ldots, \pm h_r),$$

где

$$I(x, h_1, \ldots, h_r) = \int_{Q(u') \leqq 1} \ldots \int \cos (2\pi \sqrt{x}(h_1 u_1' + \ldots + h_r u_r'))\, du_1' \ldots du_r'$$

а сумма относится ко всем взаимно различным системам чисел $\pm h_1, \ldots, \pm h_r$.

Теперь введем новые координаты $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$, повернув систему координат $u_1, \ldots, u_r$ так, чтобы u_1 заняла положение ξ определенной соотношением

$$\xi = \frac{h_1 u_1' + \ldots + h_r u_r'}{\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2}}, \tag{19}$$

в то время как положение остальных осей при выполнении этого условия может быть произвольным. Соответствующее преобразование, одним уравнений которого является (19), обозначим символом ω. Тогда

$$I(x, h_1, \ldots, h_r) = \int_{Q(u') \leqq 1} \ldots \int \cos (2\pi \sqrt{x} \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2} \,.\, \xi)\, d\xi\, d\eta_1 \ldots d\eta_{r-1},$$

потому что определитель ортогональной подстановки равен единице; интегрируя по переменным $\eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$, получаем, учитывая предположения относительно L

$$I(x, h_1, \ldots, h_r) = \int_{-\xi_{\bar{\omega}}}^{\xi_\omega} \cos (2\pi \sqrt{x} \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2} \,.\, \xi)\, S_\omega(\xi)\, d\xi =$$

$$= \Re e \int_{-\xi_{\bar{\omega}}}^{\xi_\omega} e^{2\pi i \sqrt{x} \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2} \,.\, \xi} \,.\, S_\omega(\xi)\, d\xi\,. \tag{20}$$

Далее, простоты ради, положим $2\pi \sqrt{x} \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2} = H$, так что при указанных выше предположениях будет $H > 0$. Проинтегрируем (20) $[\frac{1}{2} r]$ раз по частям; таким образом получим

$$I(x, h_1, \ldots, h_r) = (-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \Re e \left(\frac{1}{iH}\right)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \int_{-\xi_{\bar{\omega}}}^{\xi_\omega} e^{iH\xi} S_\omega^{\left(\left[\frac{r}{2}\right]\right)}(\xi)\, d\xi\,, \tag{21}$$

потому что по предположению $S_\omega(\xi_\omega) = S'_\omega(\xi_\omega) = \ldots = S_\omega^{\left(\left[\frac{r}{2}\right]-1\right)}(\xi_\omega) = 0$, а также

$$S_\omega(-\xi_{\bar{\omega}}) = S'_\omega(-\xi_{\bar{\omega}}) = \ldots = S_\omega^{\left(\left[\frac{r}{2}\right]-1\right)}(-\xi_{\bar{\omega}}) = 0\,.$$

В дальнейшей части доказательства надо различать четные и нечетные r. Если, то-есть, r — нечетное число, то предполагаемое разложение функции $S_\omega(\xi)$ в окрестности точки ξ_ω, соотв. $-\xi_{\bar{\omega}}$, содержит только целые степени, и вследствие этого все производные $S_\omega^{(k)}(\xi)$ вплоть до $k = r$ непрерывны и ограничены во всем интервале интегрирования $\langle -\xi_{\bar\omega}, \xi_\omega\rangle$; значит, соответствующие интегралы можно вычислять и оценивать непосредственно во всем интервале интегрирования. Если же, напротив, r — четное число, то показатели в разложении $S_\omega(\xi)$ имеют вид целого числа $+\frac{1}{2}$, так что при $k \geqq [\frac{r}{2}]$ производная $S_\omega^{(k)}(\xi)$ в крайних точках интервала $(-\xi_{\bar\omega}, \xi_\omega)$ неограничена. Следовательно, надо будет окрестности этих точек исключить из интервала интегрирования, а соответствующие интегралы вычислять и оценивать отдельно для внутренних точек и отдельно в окрестности крайних точек интервала.

Пусть, прежде всего, $r = 2k + 1$, k — натуральное число; в таком случае (21) перепишется следующим образом:

$$I(x, h_1, \ldots, h_r) = (-1)^k\, \Re\left(\frac{1}{iH}\right)^k \int\limits_{-\xi_{\bar\omega}}^{\xi_\omega} e^{iH\xi} S_\omega^{(k)}(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,. \tag{21'}$$

Интегрируя последовательно $k + 1$ раз по частям и учитывая, что для натуральных $j \leqq k + 1$

$$(-1)^{k+j-1} S_\omega^{(k+j-1)}(\xi_\omega) = (k + j - 1)!\, a_{j\omega} = c_{j\omega}\,,$$

$$(-1)^{k+j-1} S_\omega^{(k+j-1)}(-\xi_{\bar\omega}) = S_{\bar\omega}^{(k+j-1)}(\xi_{\bar\omega}) = (-1)^{k+j-1} c_{j\bar\omega}\,,$$

получим

$$I(x, h_1, \ldots, h_r) = \sum_{j=1}^{k+1} \Re\left(\frac{1}{iH}\right)^{k+j} (c_{j\omega}e^{iH\xi_\omega} - (-1)^{k+j-1} c_{j\bar\omega} e^{-iH\xi_{\bar\omega}}) + Z =$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1} c_{j\omega} \frac{\sin(H\xi_\omega + \varphi_j)}{H^{k+j}} + \sum_{j=1}^{k+1} c_{j\bar\omega} \frac{\sin(H\xi_{\bar\omega} + \varphi_j)}{H^{k+j}} + Z\,,$$

где

$$\varphi_j = -(k + j - 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad Z = \Re\left(-\frac{1}{iH}\right)^{2k+1} \int\limits_{-\xi_{\bar\omega}}^{\xi_\omega} e^{iH\xi} S_\omega^{(2k+1)}(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Дадим оценку остаточного члена Z. Функция $S_\omega^{(2k+1)}(\xi)$ имеет во всем интервале интегрирования не более чем $T + 2$ интервалов монотонности, к каждому из которых можно, следовательно, применить вторую теорему о среднем значении интегрального исчисления, а именно для действительной и для мнимой части интеграла в отдельности.[7]) В итоге получим $Z = O(H^{-2k-2})$.

Взяв все возможные знакомые комбинации совокупности чисел $\pm h_1, \ldots, \pm h_r$, получим каждый член разложения $I(x, h_1, \ldots, h_r)$ два раза, а именно, раз с индексом ω, а затем с $\bar\omega$; значит в итоге имеем

$$\sum_{\pm} I(x, \pm h_1, \ldots, \pm h_r) = 2\eta_h \sum_\omega \sum_{j=1}^{k+1} c_{j\omega} \frac{\sin(H\xi_\omega + \varphi_j)}{H^{k+j}} + O(H^{-2k-2})\,. \tag{22}$$

[7]) В дальнейшем вторая теорема о среднем значении всегда применяется только в этом смысле.

Отсюда уже вытекает (18), если подставить $H = 2\pi\sqrt{x}\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2}$, $r = 2k+1$ и умножить на $x^{\frac{r}{2}}/2^r$.

Этим теорема доказана для нечетных r.

Пусть, далее, r — четное число, $r = 2k$; и в этом случае справедливо (21′). Интервал интегрирования разделим на три части $(-\xi_{\bar\omega}, -\xi_{\bar\omega}+\varepsilon)$, $(-\xi_{\bar\omega}+\varepsilon, \xi_\omega-\varepsilon)$, $(\xi_\omega-\varepsilon, \xi_\omega)$. Сначала вычислим интеграл $\int\limits_{\xi_\omega-\varepsilon}^{\xi_\omega} e^{iH\xi} S_\omega^{(k)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Имеем

$$S_\omega^{(k)}(\xi) = \sum_{j=1}^{k+1} a_{j\omega} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k} (\xi_\omega - \xi)^{k+j-\frac{3}{2}} + \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k} \Phi_\omega(\xi)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\xi_\omega-\varepsilon}^{\xi_\omega} e^{iH\xi} S_\omega^{(k)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{j=1}^{k+1} a_{j\omega} A_j + B\,, \quad A_j = \int\limits_{\xi_\omega-\varepsilon}^{\xi_\omega} e^{iH\xi} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k} (\xi_\omega - \xi)^{k+j-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$B = \left[\sum_{h=1}^{k} (-1)^{h-1} \frac{e^{iH\xi}}{(iH)^h} \Phi_\omega^{(k+h-1)}(\xi)\right]_{\xi_\omega-\varepsilon}^{\xi_\omega} + \frac{(-1)^k}{(iH)^k} \int\limits_{\xi_\omega-\varepsilon}^{\xi_\omega} e^{iH\xi} \Phi_\omega^{(2k)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \left(-\frac{1}{iH}\right)^h e^{iH(\xi_\omega-\varepsilon)}\, \Phi_\omega^{(k+h-1)}(\xi_\omega - \varepsilon) + Z_1\,,$$

где Z_1 означает последний интеграл. Тогда будет

$$B = \sum_{h=1}^{k} \left(-\frac{1}{iH}\right)^h e^{iH(\xi_\omega-\varepsilon)}\, S_\omega^{(k+h-1)}(\xi_\omega - \varepsilon) + Z_1 - Z_2\,,$$

где

$$Z_2 = \sum_{h=1}^{k} \left(-\frac{1}{iH}\right)^h e^{iH(\xi_\omega-\varepsilon)} \sum_{j=1}^{k+1} a_{j\omega} \left[\frac{\mathrm{d}^{k+h-1}}{\mathrm{d}\xi^{k+h-1}} (\xi_\omega - \xi)^{k+j-\frac{3}{2}}\right]_{\xi=\xi_\omega-\varepsilon}.$$

Положим

$$D_j = A_j - \sum_{h=1}^{k} \left(-\frac{1}{iH}\right)^h e^{iH(\xi_\omega-\varepsilon)} \left[\frac{\mathrm{d}^{k+h-1}}{\mathrm{d}\xi^{k+h-1}} (\xi_\omega - \xi)^{k+j-\frac{3}{2}}\right]_{\xi=\xi_\omega-\varepsilon},$$

так что $\sum\limits_{j=1}^{k+1} a_{j\omega} A_j - Z_2 = \sum\limits_{j=1}^{k+1} a_{j\omega} D_j$.

Интегрируя по частям ($\sum\limits_1^0$ означает 0, $\prod\limits_1^0$ означает 1), получаем

$$A_j = \sum_{h=1}^{j-1} \frac{e^{iH(\xi_\omega-\varepsilon)}}{(iH)^h} \left[\frac{\mathrm{d}^{k+h-1}}{\mathrm{d}\xi^{k+h-1}} (\xi_\omega - \xi)^{k+j-\frac{3}{2}}\right]_{\xi=\xi_\omega-\varepsilon} +$$

$$+ (-1)^{k+j-1} \left(-\frac{1}{iH}\right)^{j-1} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \left(k + j - \frac{3}{2}\right) \int\limits_{\xi_\omega-\varepsilon}^{\xi_\omega} \frac{e^{iH\xi}}{\sqrt{\xi_\omega - \xi}}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Но

$$\int\limits_{\xi_\omega-\varepsilon}^{\xi_\omega} \frac{e^{iH\xi}}{\sqrt{\xi_\omega-\xi}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{e^{iH\xi_\omega}}{\sqrt{H}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1-i) - \int\limits_{H\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}\,\mathrm{d}\xi\right),$$

так что

$$A_j = (-1)^k\,\frac{\Gamma(k+j-\frac{1}{2})\,.\,(1-i)\,e^{iH\xi_\omega}}{i^{j-1}H^{j-\frac{1}{2}}\sqrt{2}} +$$

$$+\frac{(-1)^{k+1}\,e^{iH\xi_\omega}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{2}\ldots(k+j-\frac{3}{2})}{i^{j-1}H^{j-\frac{1}{2}}}\int\limits_{H\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}\,\mathrm{d}\xi +$$

$$+\sum_{h=1}^{j-1} e^{iH(\xi_\omega-\varepsilon)}\left(\frac{-1}{iH}\right)^h\left[\frac{\mathrm{d}^{k+h-1}}{\mathrm{d}\xi^{k+h-1}}\,(\xi_\omega-\xi)^{k+j-\frac{3}{2}}\right]_{\xi=\xi_\omega-\varepsilon}.$$

Далее,

$$\int\limits_{H\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}\,\mathrm{d}\xi = \sum_{m=1}^{k-j+1}\frac{(-1)^{m-1}\,e^{-iH\varepsilon}\,.\,(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-m+\frac{3}{2})}{(-i)^m(H\varepsilon)^{m-\frac{1}{2}}} +$$

$$+(-1)^{k-j+1}\int\limits_{H\varepsilon}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-k+j-\frac{1}{2})\,e^{i\xi}}{(-i)^{k-j+1}\,\xi^{k-j+\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\xi$$

следовательно (пишем $h = j - l + m$),

$$\frac{(-1)^{k+1}}{i^{j-1}H^{j-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(k+j-\frac{3}{2}\right)e^{iH\xi_\omega}\int\limits_{H\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$=\sum_{h=j}^{k}\left(\frac{-1}{iH}\right)^h e^{iH(\xi_\omega-\varepsilon)}\left[\frac{\mathrm{d}^{k+h-1}}{\mathrm{d}\xi^{k+h-1}}\,(\xi_\omega-\xi)^{k+j-\frac{3}{2}}\right]_{\xi=\xi_\omega-\varepsilon} +$$

$$+(-1)^{k+1}\,\frac{e^{iH\xi_\omega}}{i^kH^{j-\frac{1}{2}}}\,.\,(-k+j-\tfrac{1}{2})(-k+j+\tfrac{1}{2})\ldots(k+j-\tfrac{3}{2})\int\limits_{H\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-i\xi}}{\xi^{k-j+\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

В итоге

$$D_j = (-1)^k\,\frac{\Gamma(k+j-\frac{1}{2})\,.\,(1-i)\,e^{iH\xi_\omega}}{i^{j-1}H^{j-\frac{1}{2}}\sqrt{2}} +$$

$$+(-1)^{k+1}\,\frac{e^{iH\xi_\omega}}{i^kH^{j-\frac{1}{2}}}\,.\,(-k+j-\tfrac{1}{2})\,.\,(-k+j+\tfrac{1}{2})\ldots(k+j-\tfrac{3}{2})\int\limits_{H\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-i\xi}}{\xi^{k-j+\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\xi\,,$$

следовательно, имеем наконец

$$\int\limits_{\xi_\omega-\varepsilon}^{\xi_\omega} e^{iH\xi}S_\omega^{(k)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{j=1}^{k+1}\frac{\Gamma(k+j-\frac{1}{2})\,a_{j\omega}\,(1-i)(-1)^k\,e^{iH\xi_\omega}}{i^{j-1}H^{j-\frac{1}{2}}\sqrt{2}} +$$

$$+(-1)^{k+1}\,e^{iH\xi_\omega}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{(-k+j-\frac{3}{2})(-k+j-\frac{1}{2})\ldots(k+j-\frac{3}{2})\,a_{j\omega}}{i^kH^{j-\frac{1}{2}}}\int\limits_{H\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-i\xi}}{\xi^{k-j+\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\xi +$$

$$+\left(\frac{-1}{iH}\right)^k \int\limits_{\xi_\omega - \varepsilon}^{\xi_\omega} e^{iH\xi} \Phi_\omega^{(2k)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \sum_{h=1}^{k} (-1)^h \frac{e^{iH(\xi_\omega - \varepsilon)}}{(iH)^h} S_\omega^{(k+h-1)}(\xi_\omega - \varepsilon)\,.$$

Дадим оценку интегралов, выступающих в этой формуле. По второй теореме о среднем для $B > H\varepsilon$ будет $\left|\int\limits_{H\varepsilon}^{B} \frac{e^{-i\xi}}{\xi^{k-j+\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\xi\right| < \frac{C}{(H\varepsilon)^{k-j+\frac{3}{2}}}$, где C — положительная постоянная, независящая от B, H; следовательно, будет также

$$\left|\int\limits_{H\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-i\xi}}{\xi^{k-j+\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\xi\right| \leqq \frac{C}{(H\varepsilon)^{k-j+\frac{3}{2}}}\,,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(-k+j-\frac{3}{2})\ldots(k+j-\frac{3}{2})\,a_{j\omega}}{H^{j-\frac{1}{2}}} \int\limits_{H\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-i\xi}}{\xi^{k-j+\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\xi\right| < \frac{C}{H^{k+1}}\,.\ ^{8})$$

Наконец, ввиду того, что $\Phi_\omega^{(2k)}(\xi)$ монотонна в интервале $\langle \xi_\omega - \varepsilon, \xi_\omega \rangle$ будет в силу второй теоремы о среднем $\left|\int\limits_{\xi_\omega - \varepsilon}^{\xi_\omega} e^{iH\xi} \Phi_\omega^{(2k)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right| < \frac{C}{H}$; итак, в итоге получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\xi_\omega - \varepsilon}^{\xi_\omega} e^{iH\xi} S_\omega^{(k)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(k+j-\frac{1}{2})\,a_{j\omega}(1-i)(-1)^k e^{iH\xi_\omega}}{i^{j-1} H^{j-\frac{1}{2}}\sqrt{2}} + \\ + \sum_{h=1}^{k} (-1)^h \frac{e^{iH(\xi_\omega - \varepsilon)}}{(iH)^h} S_\omega^{(k+h-1)}(\xi_\omega - \varepsilon) + O(H^{-k-\frac{1}{2}})\,.\end{aligned} \tag{23}$$

С учетом предположений о функциях $S_\omega(\xi)$ и $S_{\bar\omega}(\xi)$ получаем аналогичный результат также для интервала $\langle -\xi_{\bar\omega}, -\xi_{\bar\omega} + \varepsilon \rangle$.

Проинтегрируем, наконец, $\int\limits_{-\xi_{\bar\omega}+\varepsilon}^{\xi_\omega - \varepsilon} e^{iH\xi} S_\omega^{(k)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ последовательно k раз по частям; такими же приемами, как в случае нечетного r, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\xi_{\bar\omega}+\varepsilon}^{\xi_\omega - \varepsilon} e^{iH\xi} S_\omega^{(k)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = -\sum_{h=1}^{k} \left(\frac{-1}{iH}\right)^h e^{iH(\xi_\omega - \varepsilon)} S_\omega^{(k+h-1)}(\xi_\omega - \varepsilon) - \\ -\sum_{h=1}^{k} \left(\frac{-1}{iH}\right)^h e^{iH(\xi_{\bar\omega} - \varepsilon)} S_{\bar\omega}^{(k+h-1)}(\xi_{\bar\omega} - \varepsilon) + Z'\,,\end{aligned} \tag{24}$$

$$Z' = \left(\frac{-1}{iH}\right)^k \int\limits_{-\xi_{\bar\omega}+\varepsilon}^{\xi_\omega - \varepsilon} e^{iH\xi} S_\omega^{(2k)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

[8]) Отдельные абсолютные положителные постоянные не означаю индексами.

Оценим еще остаток Z'. Во всем интервале интегрирования $|S_\omega^{(-k)}(\xi)| < T$ и $S_\omega^{(-k)}(\xi)$ имеет в нем самое большее T интервалов монотонности. Применяя опять вторую теорему о среднем, получаем

$$|Z'| \leqq T \frac{4T}{H^{k+1}} . \tag{25}$$

Следовательно, если подставим в (21′) выражения, найденные в (23), (24), (25) и если учтем все знакомые комбинации чисел $\pm h_1, \ldots, \pm h_r$, получим в итоге

$$\sum_{\pm} I(x, \pm h_1, \ldots, \pm h_r) = 2\eta_h \sum_{\omega} \sum_{j=1}^{k} c_{j\omega} \frac{\sin(H\xi_\omega + \varphi_j)}{H^{k+j-\frac{1}{2}}} + O(H^{-2k-\frac{1}{2}}) , \tag{26}$$

где

$$\varphi_j = \frac{\pi}{4} - (k + j - 1) \frac{\pi}{2} .$$

Теперь уже опять-таки достаточно умножить уравнение (26) на $x^{\frac{r}{2}}/2^r$ и подставить $H = 2\pi\sqrt{x}\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2}$, чтобы получить (18). Итак, теорема полностью доказана.

Прежде чем приступить к определению R_p для $p = 1, 2, \ldots$ посредством p-кратного интегрирования соотношения (18), обратим внимание на поведение функции $R_0(x, h_1, \ldots, h_r)$ при $x \to 0$. Согласно (20) $I(x, h_1, \ldots, h_r)$ ограничен для всех $x \geqq 0$, так что для $0 \leqq x \leqq (h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{-1}$, $h_1^2 + \ldots + h_r^2 > 0$ будет

$$|R_0(x_1 h_1, \ldots, h_r)| \leqq \frac{C}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}}} \tag{27}$$

и, следовательно, будет $R_0(x, h_1, \ldots, h_r)$ порядком равняться самое большее O-члену в (18).

При вычислении воспользуемся следующим соотношением, легко получаемым n-кратным интегрированием по частям и применением второй теоремы о среднем.

Лемма 2. *Для $s \geqq 0$, $a > 0$, $\varphi \gtreqless 0$, $0 \leqq x_0 < x$ и для всех целых n, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqq n < 2s + 1$, будет*

$$\int_{x_0}^{x} y^s \sin(a\sqrt{y} + \varphi)\, dy = 2\Gamma(2s + 2) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{s-\frac{k}{2}+1} \sin(a\sqrt{x} + \varphi - k\frac{1}{2}\pi)}{a^k \Gamma(2s - k + 3)} +$$

$$+ O\left(\frac{x^{s-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}{a^{n+1}}\right) + \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{x_0^{s+1-\frac{k}{2}}}{a^k}\right) \tag{28}$$

равномерно относительно a, x, x_0.

Уже наперед ясно, что если применить формулу (28) к разложению $R_0(x, h_1, \ldots, h_r)$, указанному в теореме 2, то показатель при x у явно заданных членов будет при каждом интегрировании увеличиваться на $\frac{1}{2}$, в то время как порядок O-членов увеличится всегда на единицу. Таким образом после каждого интегрирования отпадет явный член с наименьшим показателем, ибо он будет того же порядка, как и остаточный O-член. Итак, становится очевидным, что при больших p будем располагать лишь верхней оценкой $R_p(x, h_1, \ldots, h_r)$, представленной соответствующим O-членом.

Точные результаты содержатся в следующей теореме:

Теорема 3. *Пусть* $h_1^2 + \ldots + h_r^2 > 0$; *если* $p < \left[\frac{r+1}{2}\right]$, *то для* $0 \leqq x \leqq (h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{-1}$ *будет*

$$|R_p(x, h_1, \ldots, h_r)| \leqq \frac{C x^{p-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}, \tag{29}$$

а для $x \geqq (h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{-1}$

$$R_p(x, h_1, \ldots, h_r) =$$
$$= \frac{\eta_h}{2^{r-p-1}} \sum_{\omega} \sum_{j=1}^{\left[\frac{r+1}{2}\right]-p} \frac{c_{j\omega}^{(p)} x^{\frac{r+1}{4}+\frac{p}{2}-\frac{j}{2}} \sin\left(2\pi\sqrt{x}\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2}\,.\,\xi_\omega + \varphi_j^{(p)}\right)}{(2\pi)^{\frac{r-1}{2}+p+j}\,(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r-1}{4}+\frac{p}{2}-\frac{j}{2}}} +$$
$$+ O\left(\frac{x^{p-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}\right). \tag{30}$$

Если $p \geqq \left[\frac{r+1}{2}\right]$, *то для всех* $x \geqq 0$ *будет*

$$R_p(x, h_1, \ldots, h_r) = O\left(\frac{x^{p-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}\right). \tag{31}$$

При этом $c_{j\omega}^{(p)}$ *задано рекурсивной формулой*

$$c_{j\omega}^{(p)} = \frac{1}{\xi_\omega} c_{j\omega}^{(p-1)} - \frac{1}{\xi_\omega^2}\left(\frac{r}{2} + p + \frac{3}{2} - j\right) c_{j-1,\omega}^{(p-1)} +$$
$$+ \frac{1}{\xi_\omega^3}\left(\frac{r}{2} + p + \frac{5}{2} - j\right)\left(\frac{r}{2} + p + \frac{3}{2} - j\right) c_{j-2,\omega}^{(p-1)} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{j-1} \frac{1}{\xi_\omega^j}\left(\frac{r}{2} + p - \frac{1}{2}\right) \ldots \left(\frac{r}{2} + p + \frac{3}{2} - j\right) c_{1\omega}^{(p-1)},$$

$$c_{j\omega}^{(0)} = c_{j\omega}, \quad \varphi_j^{(p)} = -\left(\frac{r-1}{2} + p + j - 1\right)\frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Теорема справедлива для $p = 0$ по теореме 2 и по формуле (27). Пусть (29) и (30) справедливо и для некоторого $p - 1$, $p < \left[\frac{r+1}{2}\right]$; индукцией с $p - 1$ на p докажем справедливость формулы (30) для каждого $p < \left[\frac{r+1}{2}\right]$. Для этого воспользуемся Леммой 2, положив

$$x_0 = (h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{-1},\ a = 2\pi\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2}\,.\,\xi_\omega,\ n = \frac{r}{2} - p - j + 1 + \left\{\frac{r}{2}\right\}.$$

Наряду с этим для $0 \leqq x \leqq (h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{-1}$

$$\left|\int_0^x R_{p-1}(y, h_1, \ldots, h_r)\,\mathrm{d}y\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{C}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}} \int_0^x y^{p-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}\,\mathrm{d}y = \frac{Cx^{p-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}},$$

это ни что иное, как (29).

Наконец, при $p = \left[\frac{r+1}{2}\right] - 1$, справедливо как соотношение (30), содержащее один единственный явно заданный член с $x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}$ и остаточный член $O\left(\frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}\right)$, так (29), дающее оценку того же порядка.

Интегрируя эти соотношения, получаем во всяком случае (31).

4. Оценки числа целых точек

Теперь вернемся к функциям $A_p(x)$. Согласно теоремам 1, 2, 3, можно для $p = 1, 2, \ldots$ писать

$$A_p(x) = \frac{Vx^{\frac{r}{2}+p}}{\left(\frac{r}{2}+1\right)\left(\frac{r}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{r}{2}+p\right)} + P_p(x)\,, \tag{32}$$

$$P_p(x) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty}{}' R_p(x, h_1, \ldots, h_r)\,, \tag{33}$$

причем символ $\sum \ldots \sum'$ означает, что в данном ряде пропущен член с $h_1 = h_2 = \ldots = h_r = 0$; но и при этом, конечно,

$$P_p(x) = \int_0^x P_{p-1}(y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{34}$$

При $p = 0$ также справедливо (32), если только вместо (33) положить

$$P_0(x) = \lim_{x' \to x+} \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty}{}' R_0(x', h_1, \ldots, h_r) . \tag{33'}$$

Наша задача — найти верхнюю и нижнюю оценку для $P(x) = P_0(x)$.

Теорема 4. *Для целых* $r \geqq 2$

$$A(x) = Vx^{\frac{r}{2}} + O(x^{\frac{r}{2} - \frac{r}{r+1}}) , \quad x \to +\infty . \tag{35}$$

Доказательство. В (32) и (33) положим $p = \left[\frac{r+1}{2}\right]$ пусть, далее, $x > 1$, $\xi > 1$, $h \neq 0$, $|h| < \frac{x}{2p}$ $\left(\text{так что } \frac{x}{2} < x + ph < \frac{3}{2} x\right)$. Символом Δ_h^p обозначим p-тую разнотсь при интервале h. Тогда

$$\sum_{\operatorname{Max}|h_i| > \xi}{}' \frac{1}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^\alpha} = O(\xi^{r-2\alpha}) \quad \text{для} \quad \alpha > \frac{r}{2}, \tag{36}$$

и

$$\sum_{\operatorname{Max}|h_i| \leqq \xi}{}' \frac{1}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^\alpha} = O(\xi^{r-2\alpha}) \quad \text{для} \quad \alpha < \frac{r}{2} . \tag{37}$$

Следовательно, в силу (31) при $p = \left[\frac{r+1}{2}\right]$ ряд (33) сходится абсолютно и, значит,

$$\Delta_h^p A_p(x) = \Delta_h^p \frac{Vx^{\frac{r}{2}+p}}{\left(\frac{r}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{r}{2}+p\right)} + \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty}{}' \Delta_h^p R_p(x, h_1, \ldots, h_r) . \tag{38}$$

Здесь, во-первых,

$$\Delta_h^p R_p(x, h_1, \ldots, h_r) = O\left(\frac{x^{p-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}\right) ;$$

во-вторых, R_p имеет производные вплоть до $p - 1$ порядка, так что для определенного $\vartheta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \Delta_h^p R_p(x, h_1, \ldots, h_r) &= \Delta_h^{p-1}(R_p(x+h, h_1, \ldots, h_r) - R_p(x, h_1, \ldots, h_r)) = \\ &= h^{p-1}(R_1(x + \vartheta(p-1)\, h + h, h_1, \ldots, h_r) - R_1(x + \vartheta(p-1)\, h, h_1, \ldots, h_r)) = \\ &= h^{p-1} \int_X^{X+h} R_0(y, h_1, \ldots, h_r)\, \mathrm{d}y = O\left(\frac{|h|^p x^{\frac{r-1}{4}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r+1}{4}}}\right) \end{aligned}$$

если воспользоваться (18); притом $X = x + \vartheta(p-1)\, h$.

Отсюда

$$\sum_{\mathrm{Max}|h_i|>\xi}' \Delta_h^p R_p(x, h_1, \ldots, h_r) = O\left(x^{p-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}\,\xi^{-\frac{1}{2}-\left\{\frac{r}{2}\right\}}\right), \tag{39}$$

$$\sum_{\mathrm{Max}|h_i|\leqq\xi}' \Delta_h^p R_p(x, h_1, \ldots, h_r) = O\left(|h|^p\, x^{\frac{r-1}{4}}\,\xi^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}\right) \tag{40}$$

и, наконец,

$$\Delta_h^p \frac{V x^{\frac{r}{2}+p}}{\left(\frac{r}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{r}{2}+p\right)} = h^p V x^{\frac{r}{2}} + O\left(|h|^{p+1} x^{\frac{r}{2}-1}\right). \tag{41}$$

Чтобы сумма написанных выше трех O-членов имела как можно наименьший порядок, выберем h, ξ так, чтобы все три члена имели один и тот же порядок; получаем $h = \pm\, x^{\frac{1}{r+1}}$, $\xi = x^{\frac{r-1}{2(r+1)}}$, откуда

$$\frac{1}{h^p}\,\Delta_h^p\, A_p(x) = V x^{\frac{r}{2}} + O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{r}{r+1}}\right). \tag{42}$$

Но A_p имеет все производные до $p-1$ порядка, следовательно, для определенного η $(0 < \eta < 1)$

$$\begin{aligned}\Delta_h^p A_p(x) &= \Delta_h^{p-1}(A_p(x+h) - A_p(x)) = \\ &= h^{p-1}(A_1(x + \eta(p-1)\,h + h) - A_1(x + \eta(p-1)\,h)) = \\ &= h^{p-1}\int_X^{X+h} A_0(y)\,\mathrm{d}y\,, \quad (X = x + \eta(p-1)\,h)\,.\end{aligned}$$

Положив $h = x^{\frac{1}{r+1}}$, получим $x < X < X + h$ и, следовательно,

$$A_0(x) \leqq \frac{1}{h}\int_X^{X+h} A_0(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{h^p}\,\Delta_h^p A_p(x) = V x^{\frac{r}{2}} + O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{r}{r+1}}\right);$$

если положить $h = -\,x^{\frac{1}{r+1}}$, будет $x > X > X + h$ и, следовательно,

$$A_0(x) \geqq \frac{1}{-h}\int_{X+h}^{X} A_0(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{h}\int_X^{X+h} A_0(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{h^p}\,\Delta_h^p\, A_p(x) = V x^{\frac{r}{2}} + O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{r}{r+1}}\right),$$

т. е.

$$-\,C x^{\frac{r}{2}-\frac{r}{r+1}} < A_0(x) - V x^{\frac{r}{2}} < C x^{\frac{r}{2}-\frac{r}{r+1}},$$

откуда уже вытекает (35).

Дальнейшая задача состоит в нахождении нижней оценки порядка остаточного члена $P(x)$. С этой целью мы прежде всего определим вспомогательные функции $\bar{R}_p(x, h_1, \ldots, h_r)$ и $\bar{P}_p(x)$; предположим, что $h_1^2 + \ldots + h_r^2 > 0$.

1. Пусть $0 \leqq p < \left[\frac{r+1}{2}\right]$; в таком случае положим

$$\overline{R}_p(x, h_1, \ldots, h_r) =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqq x < (h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{-1}, \\ \dfrac{\eta_h}{2^{r-p-1}} \sum\limits_{\omega} \sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{r+1}{2}\right]-p} \dfrac{c_{j\omega}^{(p)} x^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}+\frac{1}{4}-\frac{j}{2}} \sin\left(2\pi\sqrt{x}\sqrt{h_1^2+\ldots+h_r^2}\,.\,\xi_\omega + \varphi_j^{(p)}\right)}{(2\pi)^{\frac{r}{2}+p\;\frac{1}{2}+j}\,(h_1^2+\ldots+h_r^2)^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}-\frac{1}{4}+\frac{j}{2}}} \\ \quad \text{для} \quad x \geqq (h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{-1}, \end{cases} \tag{43}$$

где $c_{j\omega}^{(p)}$ и $\varphi_j^{(p)}$ имеют то же значение, как в теореме 3.

2. Пусть $p \geqq \left[\frac{r+1}{2}\right]$; тогда положим

$$\overline{R}_p(x, h_1, \ldots, h_r) = \begin{cases} 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqq x < (h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{-1}, \\ \dfrac{\eta_h x^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}-\frac{1}{4}} \sum\limits_{\omega} c_{1\omega}^{(p)} \sin\left(2\pi\sqrt{x}\sqrt{h_1^2+\ldots+h_r^2}\,.\,\xi_\omega + \varphi_1^{(p)}\right)}{2^{\frac{3r}{2}-\frac{1}{2}}\,\pi^{\frac{r}{2}+p+\frac{1}{2}}\,(h_1^2+\ldots+h_r^2)^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}+\frac{1}{4}}} \\ \text{для} \quad x \geqq (h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{-1}, \end{cases} \tag{44}$$

где $c_{1\omega}^{(p)} = \frac{1}{\xi_\omega} c_{1\omega}^{(p-1)}$, $c_{1\omega}^{(0)} = c_{1\omega}$; $\varphi_1^{(p)} = -\left(\frac{r-1}{2} + p\right)\frac{\pi}{2}$.

Затем определим функцию $\overline{P}_p(x)$ для всех $x \geqq 0$ и $p \geqq 0$ r-кратным повторяющимся рядом (сходимость которого впоследствии докажем):

$$\overline{P}_p(x) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty}{}' \overline{R}_p(x, h_1, \ldots, h_r), \quad p > 0, \tag{45}$$

или, возможно,

$$\overline{P}_0(x) = \lim_{x' \to x+} \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty}{}' \overline{R}_0(x', h_1, \ldots, h_r). \tag{45'}$$

Ряд (45) для $p \geqq \left[\frac{r+1}{2}\right]$ сходится абсолютно и равномерно, следовательно, его можно почленно интегрировать; таким образом получим

$$\int_0^x \overline{P}_p(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty}{}' \int_0^x \overline{R}_p(y, h_1, \ldots, h_r)\,\mathrm{d}y. \tag{46}$$

Как мы сейчас покажем, справедливо это соотношение и в случае $p = 0, 1, \ldots, \left[\frac{r+1}{2}\right] - 1$: Имея в виду формулы (33), (43) и теоремы 2 и 3, можем, то-есть, пропустив в общей сумме члены, образующие абсолютно и равномерно сходящийся ряд, писать

$$P_p(x) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty}{}' \bar{R}_p(x, h_1, \ldots, h_r) + \sum_{h_1, \ldots, h_r=-\infty}^{+\infty}{}' Z_p(x, h_1, \ldots, h_r) ,$$

$$Z_p(x, h_1, \ldots, h_r) = O\left(\frac{x^{p-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}\right) \tag{47}$$

(при $p = 0$ необходимо исключить некоторые значения x, неимеющие конечной предельной точки); следовательно,

$$\int_0^x P_p(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x \Big(\sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty}{}' \bar{R}_p(y, h_1, \ldots, h_r)\Big)\,\mathrm{d}y +$$

$$+ \sum_{h_1, \ldots, h_r=-\infty}^{+\infty}{}' \int_0^x Z_p(y, h_1, \ldots, h_r)\,\mathrm{d}y\,. \tag{48}$$

Но одновременно по теореме 1 и по замечанию 1, следующему за этой теоремой, для $p \geqq 0$ будет

$$\int_0^x P_p(y)\,\mathrm{d}y = P_{p+1}(x) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty}{}' \int_0^x \bar{R}_p(y, h_1, \ldots, h_r)\,\mathrm{d}y +$$

$$+ \sum_{h_1, \ldots, h_r=-\infty}^{+\infty}{}' \int_0^x Z_p(y, h_1, \ldots, h_r)\,\mathrm{d}y\,, \tag{49}$$

так что, сравнив (48) и (49), получаем действительно соотношение (46) для всех $p \geqq 0$.

Для функций $\bar{P}_p(x)$ справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Для* $p \geqq 0$, $x > 0$

$$\int_0^x \bar{P}_p(y)\,\mathrm{d}y = \bar{P}_{p+1}(x) + O(x^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}-\frac{1}{4}})_{x\to+\infty}\,. \tag{50}$$

Доказательство. Сначала докажем, что для $h_1^2 + \ldots + h_r^2 > 0$

$$\int_0^x \bar{R}_p(y, h_1, \ldots, h_r)\,\mathrm{d}y = \bar{R}_{p+1}(x, h_1, \ldots, h_r) + O\left(\frac{x^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}-\frac{1}{4}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}\right). \tag{51}$$

Если $0 \leqq p \leqq \left[\frac{r+1}{2}\right] - 2$, то $\frac{r}{4} + \frac{p}{2} - \frac{1}{4} \geqq p + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}$, следовательно, по теореме 3 будет

$$\int_0^x \bar{R}_p(y, h_1, \ldots, h_r)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^x R_p(y, h_1, \ldots, h_r)\,\mathrm{d}y + \int_0^x O\left(\frac{y^{p-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= R_{p+1}(x, h_1, \ldots, h_r) + O\left(\frac{x^{p+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}\right) =$$

$$= \overline{R}_{p+1}(x, h_1, \ldots, h_r) + O\left(\frac{x^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}-\frac{1}{4}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}\right)_{x\to\infty}.$$

Если $p \geqq \left[\frac{r+1}{2}\right] - 1$, то (51) получим сразу же, применив лемму 2, где следует положить

$$x_0 = (h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{-1},\ s = \frac{r}{4} + \frac{p}{2} - \frac{1}{4},\quad a = 2\pi\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2}\,.\,\xi_\omega,\ n = 1.$$

Будет

$$\int_0^x \overline{R}_p(y, h_1, \ldots, h_r)\,\mathrm{d}y = \overline{R}_{p+1}(x, h_1, \ldots, h_r) + O\left(\frac{x^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}-\frac{1}{4}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}+\frac{5}{4}}}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+p+1}}\right) = \overline{R}_{p+1}(x, h_1, \ldots, h_r) +$$

$$+ O\left(\frac{x^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}-\frac{1}{4}}}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}}}\right)_{x\to+\infty},$$

ибо по предположению $h_1^2 + \ldots + h_r^2 \geqq 1$, а для $p \geqq \left[\frac{r+1}{2}\right] - 1$ имеем $\frac{r}{4} + \frac{p}{2} + \frac{5}{4} \geqq \frac{r}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left\{\frac{r}{2}\right\}$.

Итак, (51) справедливо для всех $p \geqq 0$, откуда сразу же с учетом (46), вытекает соотношение (50).

Ряд (45) для $p \geqq \left[\frac{r+1}{2}\right]$ сходится абсолютно, следовательно, его члены можно произвольным способом переставить. Потому что начало является внутренней точкой облатси $Q(u) \leqq 1$, будут все числа ξ_ω (для всех целых $h_1, \ldots, h_r$) больше некоторого положительного числа; поэтому из чисел $\pi^2(h_1^2 + \ldots + h_r^2)\,\xi_\omega^2 = \lambda_n(h_1, \ldots, h_r)$ можно составить возрастающую последовательность $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots, \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.

Если положить еще

$$\alpha_n = \frac{1}{2^{\frac{3r}{2}-\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_r \\ \pi\sqrt{h_1^2+\ldots+h_r^2}\,.\,\xi_\omega = \sqrt{\lambda_n}}} \sum_\omega \eta_h \xi_\omega^{\frac{r}{2}+p+\frac{1}{2}}\,.\,c_{1\omega}^{(p)} =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{3r}{2}-\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{h_1,\ldots,h_r \\ \pi\sqrt{h_1^2+\ldots+h_r^2}\,.\,\xi_\omega = \sqrt{\lambda_n}}} \sum_\omega \eta_h \xi_\omega^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}\,.\,c_{1\omega}\,,$$

то для ряда (45) получим

$$\overline{P}_p(x) = x^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}+\frac{1}{4}}} \sin(2\sqrt{\lambda_n x} + \varphi_1^{(p)}), \tag{52}$$

$$\varphi_1^{(p)} = -\left(\frac{r-1}{2} + p\right)\frac{\pi}{2}, \quad p \geqq \left[\frac{r+1}{2}\right];$$

очевидно, $\alpha_n > 0$, так как $c_{1\omega} > 0$, $\eta_h > 0$, $\xi_\omega > 0$.

В дальнейшем оставим только первый член ряда (52) как колеблющийся, а остальные члены оценим.

Лемма 4. *К любому натуральному p существует последовательность чисел $0 < x_1^{(p)} < \ldots < x_k^{(p)} < \ldots$ таких, что*

$$x_k^{(p)} = \frac{k^2\pi^2}{4\lambda_1} + O(k), \tag{53}$$

$x_{k+1}^{(p)} - x_k^{(p)} = O(k)$, $k \to \infty$, k-целые числа, и, далее, для достаточно больших натуральных k

$$\overline{P}_p(x_{2k}^{(p)}) > \gamma_p k^{\frac{r-1}{2}+p}, \quad \overline{P}_p(x_{2k+1}^{(p)}) < -\gamma_p k^{\frac{r-1}{2}+p}, \quad \gamma_p > 0. \tag{54}$$

Доказательство. Ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n^\varrho}$ сходится при достаточно больших ϱ, скажем, при $\varrho \geqq \varrho_0$. Следовательно, для таких ϱ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n^\varrho} \leqq \frac{\lambda_2^{\varrho_0}}{\lambda_2^\varrho} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n^{\varrho_0}};$$

если $\varrho \to \infty$, то выражение в правой части имеет пределом 0, так что при достаточно больших ϱ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n^\varrho} < \frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\lambda_1^\varrho}.$$

Применив (52), получаем, следовательно, для достаточно больших p

$$\overline{P}_p(x) = \frac{\alpha_1 x^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}-\frac{1}{4}}}{\lambda_1^{\frac{r}{4}+\frac{p}{2}+\frac{1}{4}}}\left(\sin\left(2\sqrt{\lambda_1 x} - \left(\frac{r-1}{2}+p\right)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}B\right), \quad |B| < 1, \quad p \geqq p_0 \tag{55}$$

Пусть через $x_k^{(p)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ обозначено то значение x для которого $2\sqrt{\lambda_1 x} - \left(\frac{r-1}{2} + p\right)\frac{\pi}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, значит

$$x_k^{(p)} = \frac{\pi^2}{4\lambda_1}\left(k + \frac{r+1}{4} + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Сразу же видно, что определенные таким образом числа $x_k^{(p)}$ имеют все свойства, требуемые в теореме, так что при $p \geqq p_0$ выполнено как (53), так и (54).

Далее методом индукции: пусть теорема справедлива для некоторого $p \geqq 2$. Докажем, что в таком случае она справедлива и для $p - 1$. По лемме 3 и по предположению индукции для достаточно больших k будет

$$\int_{x_{2k-1}^{(p)}}^{x_{2k}^{(p)}} \bar{P}_{p-1}(y)\,\mathrm{d}y = \bar{P}_p(x_{2k}^{(p)}) - \bar{P}_p(x_{2k-1}^{(p)}) + O((x_{2k}^{(p)})^{\frac{r-1}{4}+\frac{p-1}{2}}) + O((x_{2k-1}^{(p)})^{\frac{r-1}{4}+\frac{p-1}{2}}) \geqq$$

$$\geqq \gamma_p k^{\frac{r-1}{2}+p} + O(k^{\frac{r-1}{2}+p-1}) > \tfrac{1}{2}\gamma_p k^{\frac{r-1}{2}+p}.$$

С другой стороны, если положить $M = \sup\limits_{x_{2k-1}^{(p)} \leqq x \leqq x_{2k}^{(p)}} \bar{P}_{p-1}(x)$, будет

$$\int_{x_{2k-1}^{(p)}}^{x_{2k}^{(p)}} \bar{P}_{p-1}(y)\,\mathrm{d}y \leqq M(x_{2k}^{(p)} - x_{2k-1}^{(p)}) \leqq M\,.\,C\,.\,k\,.$$

Значит, существует по крайней мере одно $x_{2k}^{(p-1)} \in \langle x_{2k-1}^{(p)}, x_{2k}^{(p)}\rangle$ такое, что для достаточно больших k, $\bar{P}_{p-1}(x_{2k}^{(p-1)}) > \gamma_{p-1} k^{\frac{r-1}{2}+p-1}$, $\gamma_{p-1} > 0$.

Совершенно одинаково докажем, что существует число $x_{2k+1}^{(p-1)}$, обладающее требуемым в теореме свойством. Очевидно, что последовательность чисел $x_k^{(p-1)}$ является возрастающей, если числа $x_k^{(p)}$ образуют возрастающую последовательность, а именно, начиная с $k = 1$ при условии, что первые члены последовательности подобраны так, что $x_{k-1}^{(p)} < x_k^{(p-1)} < x_k^{(p)}$, в остальном произвольно. Этим теорема полностью доказана.

Итак, мы подготовили уже все к доказательству следующей теоремы:

Теорема 5. *Существует* $\gamma > 0$ *и последовательность* $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ *такая, что*

$$x_k = \frac{k^2\pi^2}{4\lambda_1} + O(k)\,, \quad k \to +\infty$$

k — *целые числа, и для всех достаточно больших* k

$$P(x_{2k}) > \gamma x_{2k}^{\frac{r-1}{4}} \qquad P(x_{2k+1}) < -\gamma x_{2k+1}^{\frac{r-1}{4}}. \tag{56}$$

Доказательство. По теореме 2 и по леммам 3 и 4 имеем, ввиду определения функции $\bar{P}_0(x)$,

$$\int_{x_{2k-1}^{(1)}}^{x_{2k}^{(1)}} P(y)\,\mathrm{d}y = \int_{x_{2k-1}^{(1)}}^{x_{2k}^{(1)}} \bar{P}_0(y)\,\mathrm{d}y + \int_{x_{2k-1}^{(1)}}^{x_{2k}^{(1)}} O(1)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \bar{P}_1(x_{2k}^{(1)}) - \bar{P}_1(x_{2k-1}^{(1)}) + O(k^{\frac{r-1}{2}}) + O(k) > \tfrac{1}{2}\gamma_1 k^{\frac{r+1}{2}}, \quad \gamma_1 > 0 \tag{57}$$

при достаточно больших k; аналогично $\int\limits_{x_{2k}^{(1)}}^{x_{2k+1}^{(1)}} P(y)\, \mathrm{d}y < -\frac{1}{2}\gamma_1 k^{\frac{r+1}{2}}$.

Применив тот же прием, как при доказательстве леммы 4, обнаружим, что существует последовательность чисел $0 < x_1 < x_2 < \ldots$, обладающих требуемыми в теореме свойствами, причем

$$P(x_{2k}) > \gamma_0 k^{\frac{r-1}{2}}, \quad P(x_{2k+1}) < -\gamma_0 k^{\frac{r-1}{2}}, \quad \gamma_0 > 0$$

для достаточно больших k.

Но так как в то же время для достаточно больших k $x_k < \frac{k^2\pi^2}{2\lambda_1}$, то существует $\gamma > 0$ так что справедливо (56).

Замечание. Из доказанной теоремы непосредственно вытекает, что

$$P(x) = \Omega(x^{\frac{r-1}{4}})_{x \to +\infty}. \tag{58}$$

Легко докажем еще следующую теорему:

Теорема 6. *Положим* $P^+(x) = \mathrm{Max}\,(P(x), 0)$, $P^-(x) = \mathrm{Max}\,(-P(x), 0)$. *Тогда существуют* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ *такие, что*

$$\int\limits_0^x P^+(y)\, \mathrm{d}y > C_1 x^{\frac{r+3}{4}}, \quad \int\limits_0^x P^-(y)\, \mathrm{d}y > C_1 x^{\frac{r+3}{4}} \quad \text{для} \quad x > C_2. \tag{59}$$

Доказательство. Из (57) для достаточно больших x вытекает

$$\int\limits_0^x P^+(y)\, \mathrm{d}y \geqq \sum_{x_{2k}^{(1)} \leqq x} \int\limits_{x_{2k-1}^{(1)}}^{x_{2k}^{(1)}} P(y)\, \mathrm{d}y > \tfrac{1}{2}\gamma_1 \sum_{x_{2k}^{(1)} \leqq x} k^{\frac{r+1}{2}} >$$

$$> \tfrac{1}{2}\gamma_1 \sum_{\frac{k^2\pi^2}{\lambda_1} + O(k) \leqq x} k^{\frac{r+1}{2}} > C_1 x^{\frac{r+3}{4}},$$

и аналогично для P^-x.

Считаю своим приятным долгом выразить свою глубокую благодарность акад. В. Ярнику, по побуждению которого работа возникла и который ценными советами и указаниями способствовал ее конечному оформлению, и доценту д-ру Ф. Ножичке за ценный разбор геометрической стороны дела.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. Landau:* Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen. (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid.) Sitzungsberichte K. P. Akademie der Wissenschaften Berlin 1915, 458—476.

[2] *E. Landau:* Über die Gitterpunkte in gewissen Bereichen. Göttingen Nachrichten 1924, 137—150.

[3] *V. Jarník:* O mřížových bodech v rovině. Rozpravy II. tř. Čes. Akademie věd a umění 1924, Praha.

Zusammenfassung

ÜBER DIE ANZAHL DER GITTERPUNKTE IN MEHRDIMENSIONALEN KONVEXEN KÖRPERN

SVATOPLUK KRUPIČKA, Praha.

(Eingelangt 23. VI. 1956.)

Es sei $r \geqq 2$; für die Anzahl der Gitterpunkte $A(x)$ in einem abgeschlossenen r-dimensionalen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$ gelten folgende Abschätzungen, die von den arithmetischen Eigenschaften der Koeffizienten der zugehörigen quadratischen Form Q unabhängig sind [1,2]:

Mit

$$A(x) = V(x) + P(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)} + P(x)$$

ist erstens

$$P(x) = O(x^{\frac{r}{2} - \frac{r}{r+1}}),\ x \to +\infty$$

und zweitens

$$P(x) = \Omega(x^{\frac{r-1}{4}}),\quad x \to +\infty$$

nach rechts und auch nach links genommen.

Es wurde von V. Jarník [3] gezeigt, dass gleiche Abschätzungen auch für gewisse ebene Bereiche, die durch allgemeinere konvexe Kurven definiert werden, gültig sind. In dieser Arbeit wird dann eine ähnliche Verallgemeinerung für $r > 2$ durchgefürt. Zu diesem Zweck betrachten wir einen konvexen Körper $K \subset E_r$ (d. h. eine kompakte konvexe Menge), der mit einer konvexen Hyperfläche L begrenzt ist; der Punkt $(0, \ldots, 0)$ sei der innere Punkt von K. Jede Gerade schneide L höchstens in zwei Punkten (L hat also überall eine von Null verschiedene Totalkrümmung). Über L wird noch vorausgesetzt: Es existieren drei reelle Zahlen $\varepsilon > 0$, $t > 0$, $T > 0$ mit folgenden Eigenschaften: Wird eine beliebige Rotation ω der Koordinatenachsen durchgeführt, welche die Achse u_1 in ξ überführt, so wird der Inhalt eines Schnittes des Körpers K durch eine Hyperebene, welche senkrecht zu ξ steht, als eine stetige Funktion $S_\omega(\xi)$ gegeben, die in einem gewissen endlichen Intervall $\langle \xi'_\omega, \xi_\omega \rangle$ definiert wird und die in $(\xi'_\omega, \xi_\omega)$ eine stetige r-te Ableitung hat. $S_\omega(\xi)$ hat noch folgende Eigenschaften:

a) Wenn $\xi_\omega - \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\omega$, dann

1. $S_\omega(\xi) = a_{1\omega}(\xi_\omega - \xi)^{\frac{r-1}{2}} + a_{2\omega}(\xi_\omega - \xi)^{\frac{r+1}{2}} + \dots a_{\left[\frac{r}{2}\right]+1,\omega}(\xi_\omega - \xi)^{\frac{r-1}{2}+\left[\frac{r}{2}\right]} + \Phi_\omega(\xi)$,

2. $\Phi_\omega(\xi)$ hat eine stetige r-te Ableitung und ist

$$\Phi_\omega(\xi_\omega) = \Phi'_\omega(\xi_\omega) = \dots = \Phi^{(r-1)}_\omega(\xi_\omega) = 0,$$

3. $\Phi^{(r)}_\omega(\xi)$ ist monoton und beschränkt, $|\Phi^{(r)}_\omega(\xi)| < T$,

4. $t < a_{1\omega} < T$ und gleichzeitig $|a_{l\omega}| < T$ für $l = 2, 3, \dots, [\frac{1}{2}r] + 1$.

b) In dem Intervall $\xi'_\omega + \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_\omega - \varepsilon$ hat $S^{(r)}_\omega(\xi)$ höchstens T Monotonieintervalle und gilt dort überall $|S^{(r)}_\omega(\xi)| < T$.

Diesen Voraussetzungen kann man auch eine geometrische Dautung geben, da sie zur gleichmässigen Beschränkung der Totalkrümmung der Hyperfläche L durch zwei positive Konstanten führen.

Es sei nun für jedes $x \geqq 0$ eine mit L homothetische Hyperfläche $L(x)$ als Menge aller Punkte $(\sqrt{x}u_1, \dots, \sqrt{x}u_r)$ aus E_r gegeben, für welche gleichzeitig $(u_1, \dots, u_r) \in L$ ist. Es ist Ziel dieser Arbeit, die Ausdrücke für die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Bereiche $K(x)$ anzugeben, das von $L(x)$ begrenzt ist.

Im nächsten Teile der Arbeit wird mit Hilfe der modifizierten Dirichlet-Formel die Grundidentität für die p-mal integrierte Anzahl der Gitterpunkte abgeleitet (Satz 1):

Es gilt für $x \geqq 0$

$$A_p(x) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} R_p(x, h_1, \dots, h_r)\,, \quad p = 1, 2, \dots\,,$$

$$A_0(x) = A(x) = \lim_{x' \to x+} \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{h_r=-\infty}^{+\infty} R_0(x', h_1, \dots, h_r)\,,$$

wo

$$R_p(x, h_1, \dots, h_r) =$$
$$= \int \dots \int_{Q(u) \leqq x} \frac{(x - Q(u))^p}{p!} \cos 2\pi h_1 u_1 \dots \cos 2\pi h_r u_r \, \mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}u_r, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

und wo $Q(u) = Q(u_1, \dots, u_r) = y$ *für alle Punkte* $(u_1, \dots, u_r) \in L(y)$. *Weiter ist für alle* $p = 1, 2, \dots, x \geqq 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} R_p(x, h_1, \dots, h_r) = R_{p-1}(x, h_1, \dots, h_r)$$

und wegen $\dot{R}_p(0, h_1, \ldots, h_r) = 0$ *auch*

$$R_p(x, h_1, \ldots, h_r) = \int_0^x R_{p-1}(y, h_1, \ldots, h_r)\, \mathrm{d}y\,.$$

Im dritten Teile wird der asymptotische Ausdruck für das Integral

$$R_0(x, h_1, \ldots, h_r) = \int \underset{Q(u) \leqq x}{\ldots} \int \cos 2\pi h_1 u_1 \ldots \cos 2\pi h_r u_r \,\mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_r$$

(Satz 2) und daraus durch p-malige Integration analogische Ausdrücke für $R_p(x, h_1, \ldots, h_r)$, $p \geqq 1$ (Satz 3) abgeleitet.

Im letzten Teile der Arbeit wird für $A(x)$ zuerst die obere Abschätzung mit Hilfe der p-ten Differenzen bewiesen (Satz 4):

Für ganze $r \geqq 2$ *ist*

$$A(x) = Vx^{\frac{r}{2}} + P(x) = Vx^{\frac{r}{2}} + O(x^{\frac{r}{2} - \frac{r}{r+1}})_{x \to +\infty}\,,$$

wo V *den Inhalt des Körpers* K *bedeutet.*

Und schliesslich wird, mit der Einführung passender Hilfsfunktionen $\bar{R}_p(x, h_1, \ldots, h_r)$ und $\bar{P}_p(x)$, die mit R_p in einfachem Zusammenhange stehen, durch Induktion von p nach $p - 1$ der Beweis für die untere Abschätzung durchgeführt (Satz 5):

Es existieren eine Konstante $\gamma > 0$ *und die Folge* $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots$ *derart, dass* $x_k = \dfrac{k^2\pi^2}{4\lambda_1} + O(k)$, *wenn* $k \to +\infty$ *ganzzahlig und* $\lambda_1 > 0$ *ist, und dass weiter für alle natürliche Zahlen* k, *die genug gross sind, folgende Ungleichungen gelten:*

$$P(x_{2k}) > \gamma x_{2k}^{\frac{r-1}{4}}\,, \quad P(x_{2k+1}) < -\gamma x_{2k+1}^{\frac{r-1}{4}}\,.$$

(Satz 6): *Es sei* $P^+(x) = \mathrm{Max}\,(P(x), 0)$, $P^-(x) = \mathrm{Max}\,(-P(x), 0)$. *Dann gibt es* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ derart, dass

$$\int_0^x P^+(y)\,\mathrm{d}y > C_1 x^{\frac{r+3}{4}}\,, \quad \int_0^x P^-(y)\,\mathrm{d}y > C_1 x^{\frac{r+3}{4}} \text{ für } x > C_2.$$